

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE CHIMIE



DOMAINE : SCIENCES DE LA MATIERE
FILIERE : CHIMIE

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE : CHIMIE-PHYSIQUE

THEME

**Etude théorique de l'effet piézoélectrique sur la propagation des ondes
acoustiques**

Présenté par : **BENOU MELGHAR Fariza**

Soutenu publiquement, le 09/11 / 2020, *devant le jury composé de :*

| <i>Nom et Prénom</i> | <i>Grade</i> | <i>Affiliation</i> | <i>Qualité</i> |
|----------------------------|-------------------|--------------------|------------------|
| <i>M. BOURAHLA Boualem</i> | <i>professeur</i> | <i>UMMTO</i> | <i>Examineur</i> |
| <i>M. CHAOUCHI Ahcène</i> | <i>professeur</i> | <i>UMMTO</i> | <i>Examineur</i> |
| <i>M. CHEKNOUN Salem</i> | <i>M/C</i> | <i>UMMTO</i> | <i>président</i> |
| <i>M. SAIT Smail</i> | <i>M/C</i> | <i>UMMTO</i> | <i>Encadreur</i> |

Remerciements

**J'aime celui qui jette des paroles d'or au-
devant de ses œuvres et qui tient toujours plus
qu'il ne promet : car il veut son d'éclin.**

Nietzsche Friedric

Tout d'abord, Je remercie le Dieu tout puissant de m'avoir prêté vie et volonté et il m'a éclairée le chemin pour achever ce mémoire.

Il m'est agréable d'exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de mémoire, M. SAIT Smail pour son soutien actif, ses fructueuses remarques, ses encouragements et sa passion pour la recherche tout au long de la durée de ce travail et tous les conseils et vastes connaissances scientifiques qu'il a partagé avec moi.

Je tiens, à exprimer mes vifs remerciements aux membres de jury qui mon fait l'honneur de bien vouloir examiner ce travail : le président de jury M.CHEKNOUN Salem (chef de département chimie) M. (BOURAHLA Boulem), et M (CHAOUCHI Ahcène), tant que examinateurs.

Je tiens également à remercier tous les enseignants de l'Université Mouloud MAMMERY, en particulier, les enseignants de la Faculté des Sciences, département Chimie pour leurs précieux conseils durant les cinq années d'étude et surtout M.saal Amar le responsable de la spécialité chimie physique, pour leur soutien moral et leurs conseils au cour de la préparation de mon travail, merci énormément.

Sans oublier ma famille, mon mari particulièrement qui m'a était d'un grand soutien tous au long de mes années d'études.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, d'une manière ou autre, ont contribué au bon déroulement de ce travail, tant qu'au niveau humain ou scientifique.

FARIZA BENOUMELGHAR

Dédicaces

**Je dédie ce travail à
A mes parents, aucun hommage ne pourrait
être à la hauteur de
l'amour dont ils ne cessent de me combler.**

**Que dieu leur procure
bonne santé et longue vie.**

**A mon mari Aissa qui m'a soutenu tout au
long de
ce projet : et bien sûr à mes frères et ma
sœur, sans oublier ma belle-mère et mon
beau père**

**A toute ma famille, et mes amis
spécialement, ma copine Wahiba, et toute
la famille BENOUMELGHAR et AIT ELHADJ.
Et à tous ceux qui ont contribué de près ou
de loin pour que ce
projet soit possible, je vous dis merci.**

| | |
|------------------------------------|---|
| Introduction générale | 1 |
|------------------------------------|---|

Chapitre I

L'élasticité dynamique linéaire en milieu isotrope

| | |
|--|---|
| I.1. Généralités sur les ondes élastiques | 3 |
| I.2. Aperçus sur l'élasticité dynamique linéaire | 4 |
| I.2.1. Les ondes longitudinales et transversales | 6 |

Chapitre II

Propagation d'ondes élastiques dans un milieu isotrope

| | |
|---|----|
| II.1. Equation de propagation | 7 |
| II.2. Surfaces caractéristiques..... | 10 |
| II.2.1. Surface des vitesses | 10 |
| II.2.2. Surface des lenteurs | 11 |
| II.3. Propagation dans un solide anisotrope non-piézoélectrique cas d'un système Trigonal : Corindon (Al_2O_3) | 11 |

Chapitre III

Ondes élastiques dans les matériaux piézoélectriques

| | |
|---|----|
| III.1. Equations des ondes sonores dans les matériaux piézoélectriques | 16 |
| III. 2. Equation de propagation des ondes acoustiques dans le Niobate de Lithium..... | 18 |
| III. 3. Simulations et résultats | 20 |
| Conclusion générale | 27 |
| Références bibliographiques | 28 |

Introduction générale

L'effet piézoélectrique, est connu et exploité depuis des décennies, il est devenu un moteur d'innovation, le monde entier a initié de nouveaux projets dans cette innovation. La piézoélectricité couvre une très large gamme d'applications, elle est particulièrement forte dans les domaines, de l'information et des communications, de l'automatisation industrielle, du diagnostic médical, du contrôle non destructif et dans les industries de la défense.

Le terme « piézoélectricité » est venu du Grec « piezein », qui signifie presser ou contraindre « forcer ». Le phénomène de la piézoélectricité a été découvert en 1880, par Jacques et Pierre Curie, lors d'expériences sur le quartz. La piézoélectricité est un caractère intrinsèque de quelques matériaux, En effet, l'effet direct traduit la génération de charges électriques, lors de l'application d'une contrainte au matériau, alors que l'effet inverse concerne la déformation mécanique du matériau lorsqu'un champ électrique y est imposé. Ce caractère intrinsèque, résulte de la distribution non uniforme des charges au sein d'une maille cristalline, quand la maille se déforme, les barycentres (électriques) respectifs des charges positives et négatives initialement confondus, se déplacent différemment, ils s'écartent donc l'un de l'autre, ce qui génère une polarisation au sein de la maille cristalline, ainsi, bien que le cristal déformé reste globalement neutre, une polarisation macroscopique est créée au sein du matériau et des charges apparaissent en surface, et ce phénomène est parfaitement réciproque. Parmi les matériaux fortement piézoélectriques, on cite à titre d'exemple, Quartz (SiO_2), le Niobate de lithium (LiNbO_3), le Tantalate de lithium (LiTaO_3), l'Oxyde de Zinc (ZnO), le Zirconate titanate de plomb PZT ...etc. Des études ont été réalisées sur les différentes constantes élastiques et piézoélectriques des matériaux, afin de les exploiter dans les différents applications et domaines. On s'intéresse au domaine des ultrasons et leurs applications, ce champ est celui de l'analyse ultrasonore des matériaux. A cette époque, cette technologie était déjà bien maîtrisée et plusieurs méthodes éprouvées existaient, pour générer des ondes acoustiques dans différents milieux et ces méthodes faisaient, essentiellement usage du phénomène de la piézoélectricité.

Les ondes ultrasonores résultent, des vibrations des atomes autour de leurs positions d'équilibres dans un milieu matériel. Dans ce contexte on peut avoir les deux cas de figures selon que, un solide homogène illimité, dans ce cas, les ondes élastiques se propagent dans le volume (BAW, Bulk Acoustic Waves) et ce sont des ondes planes, au cours de leurs propagations, ces ondes ne rencontrent aucune frontière car l'étendue du faisceau

d'onde est inférieure aux dimensions latérales du solide, dans lequel elles se propagent. Le second cas, est celui d'un solide limité, dans ce cas, les ondes sont guidées et on distingue les différents cas des ondes guidées exemple (Rayleigh, Lamb, Love, Bleustein-Gulyaev...).

Par ailleurs, plus précisément la propagation des ondes élastiques, se fait dans des milieux isotropes ou anisotropes. On distingue deux principaux types d'ondes de volume, qui peuvent se propager dans les milieux isotrope, sont les ondes longitudinales qui provoque une perturbation dont la direction est parallèle à la direction de propagation de l'onde, et les ondes transversales, incite une perturbation dans la direction est comprise dans le plan perpendiculaire à la direction propagation de l'onde.

Toute fois, dans le cas général, le vecteur déplacement associé à une onde qui, se propage n'a aucune raison d'être parallèle ou orthogonal à la direction de propagation, on ne peut donc pas parler d'onde purement longitudinale ou purement transversale. Cependant, si la polarisation de l'onde est proche de la direction de propagation, on parle d'onde quasi-longitudinale, en revanche si, la polarisation est proche d'une direction orthogonale à la direction de propagation, on parle d'onde quasi transversale, et on les classe en deux types d'ondes transversales, l'une transversale rapide et l'autre transversale lente.

Par ailleurs, la propagation d'ondes acoustiques, dans les cristaux anisotropes est un phénomène relativement complexe, on utilise souvent certaines surfaces caractéristiques afin d'illustrer de façon claire, les effets dus à l'anisotropie et la piézoélectricité. Dans ce contexte, notre objectif vise, l'importance capitale de la propagation des ondes élastiques dans les milieux anisotropes, en tient compte de la piézoélectricité.

Ce manuscrit, est subdivisé en trois chapitres, le premier chapitre, est consacré sur l'étude théorique de la propagation des ondes élastiques (élasticité dynamique linéaire), dans les milieux isotropes, l'étude théorique de la propagation des ondes acoustique dans les milieux anisotropes, fait l'objet de second chapitre et nous le terminerons par des simulations numériques qui clarifient les propagations des différentes ondes de volume, on s'appuyons sur les surfaces caractéristiques des ondes, dans le troisième chapitre on établit les équations fondamentales de propagations des ondes élastiques dans des milieux piézoélectriques, qui montre par simulation, les différences entre les vitesses de propagation des ondes de volume dans un matériau anisotrope, avec effet piézoélectrique en comparaisons, avec le même matériau sans effet piézoélectrique, nous terminons le manuscrit par une conclusion générale.

Chapitre I

L'élasticité dynamique linéaire en milieu isotrope

I.1. Généralités sur les ondes élastiques

L'étude expérimentale des ondes élastiques dans les milieux présentent de nombreux avantages, leur propagation libre dans un milieu est engendrée par les équations du mouvement.

Dans la pratique, le milieu de propagation est souvent limité par une ou plusieurs frontières.

Les ondes s'y réfléchissent et donnent naissance aux autres ondes dans certaines conditions, ainsi elles changent de direction le plus souvent en changeant de nature.

Dans ce contexte, ces ondes sont gouvernées à la fois, par les équations du mouvement et par les conditions aux limites imposées sur les frontières et dans certaines conditions particulières le milieu peut devenir un guide d'ondes.

Par ailleurs, la compréhension du phénomène de propagation des ondes dans une structure nécessite, des modélisations numériques faisant intervenir de nombreuses données physiques (contraintes imposées sur la structure, conditions aux limites, etc.); des modélisations mathématiques qui s'intéressent à la résolution des équations, la recherche de valeurs et vecteurs propres, etc., parfois plus précis, c'est de passer aux éléments finis et l'analyse modale[1-5].

I.2. Aperçu sur l'élasticité dynamique linière

Supposons, qu'un milieu est traversé par un ébranlement, qui le met localement en vibration. Le déplacement u_i de chaque point, qui ne dépendait que des coordonnées initiales x_i (cas d'élasticité statique), dépend maintenant du temps $u_i = u_i(x_k, t)$, il obéi aux certaines relations fondamentales.

L'équation du mouvement, qui résulte du principe fondamental de la dynamique:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (\text{I.1})$$

Où T_{ij} désigne les composantes du tenseur des contraintes T (figure I.1), f_i sont les composantes des forces volumiques, ρ la masse volumique du matériau et u_i les composantes du champ de déplacement u .

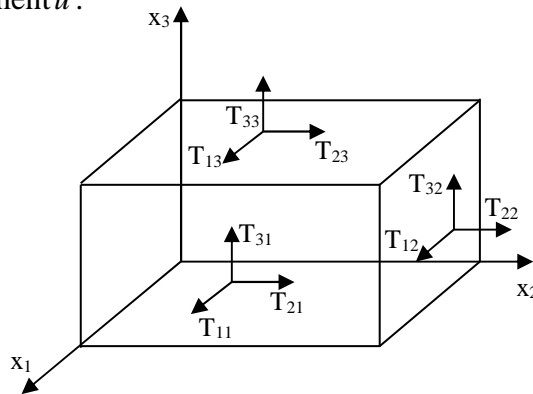


Figure I.1 : Représentations des contraintes normales est tangentielles.

Les déformations subites par un milieu matériel sont reliées aux contraintes résultant des efforts extérieurs appliqués sur ce milieu par une loi caractéristique de ce milieu appelé loi de comportement élastique existant entre l'allongement subi par le matériau et la contrainte normale exercée sur une extrémité, c'est la loi de Hooke généralisée.

Sous l'hypothèse des faibles déformations, il existe une relation de proportionnalité entre les composantes respectives du tenseur des contraintes et des déformations, sous cette hypothèse, pourra-t-on écrit :

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{ij}. \quad (\text{I.2})$$

Où S_{ij} le tenseur des déformations élastiques, il est donné par la relation de Cauchy (déplacement/déformation), en fonction du vecteur déplacement par la relation suivante :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{I.3})$$

Et le tenseur C_{ijkl} d'ordre 4 est appelé tenseur d'élasticité on en compte $3^4 = 81$ composantes. Il résulte des propriétés de symétrie de T_{ij} et S_{ij} que le tenseur C_{ijkl} possède respectivement les symétries $C_{ijkl} = C_{jikl}$ et $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ ce qui réduit de 81 à 36 le nombre de composantes indépendantes de C_{ijkl} . Cependant, des considérations thermodynamiques, découlent la symétrie $C_{klij} = C_{ijkl}$.

Des deux premières symétries, il résulte qu'une notation contractée des indices est possible, par l'introduction de la transformation indicielle de Voigt $ijkl \Rightarrow \alpha\beta$.

Où les indices grecs (α, β) variant de 1 à 6 et les latins (i, j, k, l) de 1 à 3.

La transformation indicielle est donnée selon la convention suivante : L'indice grec vaut la demi somme des indices latins si $i=j$ et il vaut $9 - (i + j)$ si $i \neq j$.

Le but de cette transformation c'est la simplification possible de la contrainte T_{ij} , d'où on peut la réécrire sous la forme matricielle suivante: $T_\alpha = C_{\alpha\beta} S_\beta$.

Où $C_{\alpha\beta}$ est une matrice 6x6, symétrique en raison de la symétrie $C_{ijkl} = C_{klij}$ mentionnée plus haut.

Dans le cas le plus général, c'est-à-dire dans le cas d'une anisotropie maximale, la connaissance de 21 composantes est nécessaire à la caractérisation de ce milieu.

Dans le cas simple d'isotropie, la loi de Hooke se réduit à: $T_{ij} = \lambda S_{ij} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}$, λ et μ sont les constantes de Lamé, δ_{ij} est le symbole de Kronecker (qui vaut 1 pour $i = j$, 0 sinon)

On conclut des relations précédentes la formulation de Navier en déplacement comme suit.

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (I.4)$$

En l'absence de forces volumiques, l'équation de Navier peut se mettre sous la forme vectorielle suivante :

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}, \text{ où } \Delta \text{ désigne l'opérateur Laplacien.}$$

Dans l'équation (I.4) ; les trois composantes du déplacement (u_x, u_y, u_z), sont couplées. Il est possible d'obtenir des équations découplées en faisant usage de la décomposition de

$$\text{Helmholtz : } \vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_T = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (I.5)$$

Cette décomposition nous permet d'écrire le champ de déplacement \mathbf{U} comme la somme d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vectoriel incompressible $\vec{\psi}$ définissant respectivement les composantes longitudinales et transversales du déplacement mécanique.

En conséquence, les composantes vectorielles des déplacements peuvent être écrites en fonction des potentiels sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \\ u_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.6})$$

I.2.1. Les ondes longitudinales et transversales

En reportant l'expression du déplacement (I.5) dans l'équation de Navier (I.4) on aboutit à deux équations d'Alembert découplées pour les deux potentiels scalaires ϕ et vecteur ψ .

$\Delta \phi - \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$: Correspond à la propagation d'une onde longitudinale (L) ou de compression (P) pour laquelle la matière subit une succession alternative de compressions et de dilatations parallèles à la direction de propagation, sa vitesse est définie par la relation suivante : $C_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$

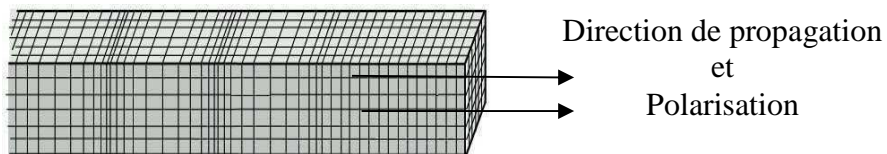


Figure I.2 : Schéma de propagation d'onde longitudinale et sa polarisation.

$\Delta \psi - \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$: Concerne l'onde transversale (T) ou de cisaillement (S) pour laquelle le déplacement des particules s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation.

La vitesse de ces ondes est définie comme suit : $C_T = \sqrt{\mu / \rho}$. [3-5]

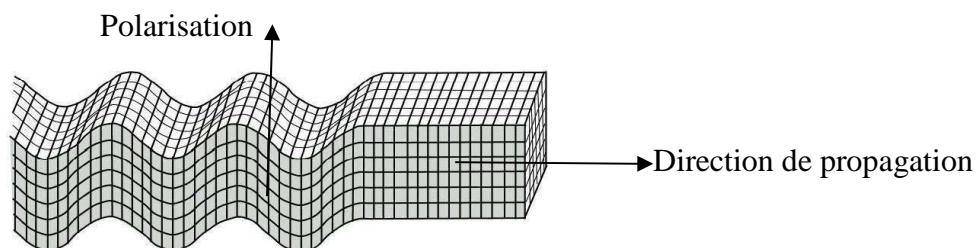


Figure I.3 : Schéma de propagation d'onde transversale et sa polarisation.

Chapitre II

Propagation d'ondes élastiques dans un milieu isotrope

Equation de propagation

Pour la propagation d'une onde plane suivant une direction \vec{n} ($|\vec{n}| = 1$), le vecteur déplacement associé est $u(x, t)$. Dans un solide élastique, il existe une relation biunivoque entre les contraintes et les déformations. Sous réserve d'un comportement linéaire, les deux tenseurs d'ordre 2 sont liés par la relation

$$T_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} S_{kl} \quad (\text{II.1})$$

Les coefficients C_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur d'ordre 4 (tenseur des rigidités élastiques), satisfont certaines relations de symétrie $C_{ijkl} = C_{jikl}$ et $C_{ijkl} = C_{ijlk}$.

Ces relations de symétrie permettent d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction des différentes composantes du déplacement :

$$T_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \quad (\text{II.2})$$

En réalité le tenseur C_{ijkl} peut être simplifié et exprimé en fonction des seuls coefficients effectivement différents, ce qui se traduit par une réécriture utilisant deux indices $C_{ijkl} = C_{\alpha\beta}$ avec les correspondances suivantes $(i, j) \leftrightarrow \alpha$ (Notation de Voigt).

(11) \leftrightarrow 1 ; (22) \leftrightarrow 2 ; (33) \leftrightarrow 3 ; (23) = (32) \leftrightarrow 4 ; (13) = (31) \leftrightarrow 5 ; (12) = (21) \leftrightarrow 6.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \sum_{ijkl} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (\text{II.3})$$

Cette expression constitue la loi de Hooke généralisée, sur laquelle repose les lois d'élasticité dynamique. La solution de cette équation est sous forme d'une onde plane progressive se propageant dans une direction définie par le vecteur unitaire $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ perpendiculaire aux plans d'onde d'équation $\vec{n} \cdot \vec{x} = \text{cte}$, à une vitesse de phase v_φ de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{n}$ et de polarisation \vec{u}_i , elle peut s'écrire comme suit :

$$u_i = u_i^0 f\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{v_\varphi}\right) = u_i^0 f\left(t - \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{v_\varphi}\right), \text{ où } f \text{ est une fonction quelconque.}$$

D'une manière classique on déduit les formules des dérivées de (u) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} &= -u_l^0 \frac{n_j}{v} f'\left(t - \frac{n \cdot x}{v}\right) \\ \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} &= u_l^0 \frac{n_j n_k}{v^2} f''\left(t - \frac{n \cdot x}{v}\right) \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= u_i^0 f''\left(t - \frac{n \cdot x}{v}\right) \end{aligned}$$

En injectant ces dérivées dans l'équation (II.3), d'où l'équation de propagation devient

$$\rho v^2 u_i^0 = \sum_{ijkl} C_{ijkl} u_l^0 n_j n_k \quad (\text{II.4})$$

A partir du tenseur C_{ijkl} d'ordre 4, on peut introduire le tenseur Γ_{il} d'ordre 2 défini par la relation

$$\Gamma_{il} = \sum_{jk} C_{ijkl} n_j n_k \quad (\text{II.5})$$

Cette équation constitue l'équation de Christoffel. Il découle de cette définition que, le tenseur Γ_{il} dépend de la direction de propagation de l'onde que l'on cherche à résoudre de l'équation de propagation. Ce tenseur d'ordre 2 permet alors de réécrire l'équation de propagation sous la forme suivante :

$$\rho v^2 u_i^0 = \sum_l \Gamma_{il} u_l^0 \text{ Il en résulte donc que la polarisation } u_i^0 \text{ est le vecteur propre du tenseur } \Gamma_{il}$$

avec la valeur propre $\gamma = \rho v^2$.

Ainsi l'équation de Christoffel peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \rho V^2 \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix}$$

A partir des relations de symétrie du tenseur C_{ijkl} , on peut aisément vérifier que le tenseur Γ_{il} est également symétrique. Ce tenseur est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont réelles et positives, ses vecteurs propres sont orthogonaux entre eux.

Pour des raisons thermodynamiques et la symétrie des tenseurs T_{kl} et S_{ij} , le tenseur Γ_{il} est symétrique d'où,

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k = C_{klij} n_j n_k \text{ pour des raisons thermodynamiques}$$

$$\Gamma_{il} = C_{lkji} n_j n_k \text{ En raison de la symétrie des tenseurs } T_{kl} \text{ et } S_{ij}$$

$$\Gamma_{il} = \Gamma_{li}$$

On résumés que le tenseur Γ_{il} peut s'écrire d'une manière générale sous la formule suivante :

$$\Gamma_{il} = C_{i11l} n_1^2 + C_{i22l} n_2^2 + C_{i33l} n_3^2 + (C_{i12l} + C_{i21l}) n_1 n_2 + (C_{i13l} + C_{i31l}) n_1 n_3 + (C_{i23l} + C_{i32l}) n_2 n_3 \quad (\text{II.6})$$

Et le développement du tenseur Γ_{il} , nous amène aux différents termes suivants :

$$\Gamma_{11} = C_{11} n_1^2 + C_{66} n_2^2 + C_{55} n_3^2 + 2C_{16} n_1 n_2 + 2C_{15} n_1 n_3 + 2C_{56} n_2 n_3$$

$$\Gamma_{22} = C_{66} n_1^2 + C_{22} n_2^2 + C_{44} n_3^2 + 2C_{26} n_1 n_2 + 2C_{46} n_1 n_3 + 2C_{24} n_2 n_3$$

$$\Gamma_{33} = C_{55} n_1^2 + C_{44} n_2^2 + C_{33} n_3^2 + 2C_{45} n_1 n_2 + 2C_{35} n_1 n_3 + 2C_{34} n_2 n_3$$

$$\Gamma_{12} = C_{16} n_1^2 + C_{26} n_2^2 + C_{45} n_3^2 + (C_{12} + C_{66}) n_1 n_2 + (C_{14} + C_{56}) n_1 n_3 + (C_{46} + C_{25}) n_2 n_3$$

$$\Gamma_{13} = C_{15} n_1^2 + C_{46} n_2^2 + C_{35} n_3^2 + (C_{14} + C_{56}) n_1 n_2 + (C_{13} + C_{55}) n_1 n_3 + (C_{36} + C_{45}) n_2 n_3$$

$$\Gamma_{23} = C_{56} n_1^2 + C_{24} n_2^2 + C_{34} n_3^2 + (C_{46} + C_{25}) n_1 n_2 + (C_{36} + C_{45}) n_1 n_3 + (C_{23} + C_{44}) n_2 n_3$$

Le tenseur peut être simplifié en faisant appel aux relations de symétrie suivantes :

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21}, \Gamma_{13} = \Gamma_{31}, \Gamma_{23} = \Gamma_{32}, \text{ d'où}$$

$$\Gamma_{il} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} \end{bmatrix}.$$

Etant donné que, le tenseur est symétrique. Cependant, pour une onde plane transitoire se propageant suivant la direction \vec{n} , les vitesses de phases et les polarisations sont les valeurs/vecteurs propres du tenseur Γ_{il} .

Pour une direction \vec{n} donnée, il y a en général, trois valeurs positives de vitesses de phase $V_{(\varphi,\zeta)}$ ($\zeta = 1,2,3$), qui sont les racines de l'équation séculaire suivante :

$$\det|\Gamma_{il} - \rho v^2 \delta_{il}| = 0. \quad (\text{II.7})$$

Chaque solution est caractérisée par une valeur propre γ et un vecteur propre u_i^ζ qui définit la direction du vecteur déplacement associé à l'onde qui se propage.

L'obtention des composantes des vecteurs polarisations s'effectuent par la résolution du système d'équation suivant :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}u_1^\zeta + \Gamma_{12}u_2^\zeta + \Gamma_{13}u_3^\zeta &= \rho V_{(\varphi,\zeta)}^2 u_1^\zeta \\ \Gamma_{21}u_1^\zeta + \Gamma_{22}u_2^\zeta + \Gamma_{23}u_3^\zeta &= \rho V_{(\varphi,\zeta)}^2 u_2^\zeta \\ \Gamma_{31}u_1^\zeta + \Gamma_{32}u_2^\zeta + \Gamma_{33}u_3^\zeta &= \rho V_{(\varphi,\zeta)}^2 u_3^\zeta \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8})$$

En général, Le vecteur déplacement \vec{u} (la polarisation de l'onde) n'est pas, colinéaire ni perpendiculaire à la direction de propagation \vec{n} . L'onde dont la polarisation est la plus proche de \vec{n} est dite quasi longitudinale «QL», les autres sont dites quasi transversales «QT». Ces dernières propageaient plus lentement que l'onde quasi longitudinale [7-14].

Les solutions de l'équation de Christoffel peuvent être représentées sous la forme des surfaces caractéristiques (surfaces de vitesses et surface lenteurs), suivant chaque vecteur \vec{n}

II.2. Surfaces caractéristiques

L'effet de l'anisotropie dans les milieux présente une vaste complication à la propagation des ondes acoustiques. Cependant, il est primordial d'utiliser des surfaces caractéristiques (surfaces des vitesses, surface des lenteurs) pour singulariser cet effet.

II.2.1. Surface des vitesses

La surface des vitesses est obtenue à partir d'une origine donnée "O" en faisant varier la direction de propagation et en traçant l'extrémité du vecteur $\vec{V} = V\vec{n}$ le vecteur pointant dans la direction de propagation \vec{n} et son module égale à la vitesse de phase. Cette surface des vitesses comporte trois nappes dissemblables, l'une correspondant à l'onde quasi-

longitudinale de vitesse de phase V_1 et deux autres aux ondes quasi-transversales de vitesses de phase V_2 et V_3 .

II.2.2. Surface des lenteurs

On appelle vecteur lenteur $\vec{L} = \vec{n}/\vec{v}$, le vecteur porté par la direction de propagation de l'onde et de module égal à l'inverse de sa vitesse de phase dans cette direction à partir d'une origine donnée O. Les surfaces des lenteurs sont le lieu de l'extrémité de ce vecteur pour toutes les directions de propagation des ondes, elle est constituée de trois nappes ; une distincte l'onde quasi-longitudinale, elle est localisée à l'intérieur des deux autres nappes qui dénotent les ondes quasi-transversales [3,7].

II.3. Propagation dans un solide anisotrope non-piézoélectrique cas d'un système Trigonal : Corindon (Al_2O_3).

Dans le cas d'un système à symétrie Trigonal classe $\overline{3m}$, le tenseur $C_{\alpha\beta}$ est donné par la matrice suivante :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & C_{66} \end{bmatrix}$$

Rappelons l'expression du tenseur Γ_{il} tel qu'elle est donnée dans la formule (II.6).

$$\Gamma_{il} = C_{i11l}n_1^2 + C_{i22l}n_2^2 + C_{i33l}n_3^2 + (C_{i12l} + C_{i21l})n_1n_2 + (C_{i13l} + C_{i31l})n_1n_3 + (C_{i23l} + C_{i32l})n_2n_3$$

Supposons que la propagation s'effectue dans le plan (2,3) = (Y, Z), où le vecteur $n = (n_1, n_2, n_3)$ avec $n_1 = 0$; $n_2 = \sin(\alpha)$; $n_3 = \cos(\alpha)$.

L'écriture du tenseur Γ_{il} en fonction de la direction de propagation de l'onde est donnée comme suit :

$$\Gamma_{11} = C_{66} \sin^2(\alpha) + C_{44} \cos^2(\alpha) + C_{14} \sin(2\alpha).$$

$$\Gamma_{22} = C_{11} \sin^2(\alpha) + C_{44} \cos^2(\alpha) - 2C_{14} \sin(2\alpha).$$

$$\Gamma_{33} = C_{44} \sin^2(\alpha) + C_{33} \cos^2(\alpha).$$

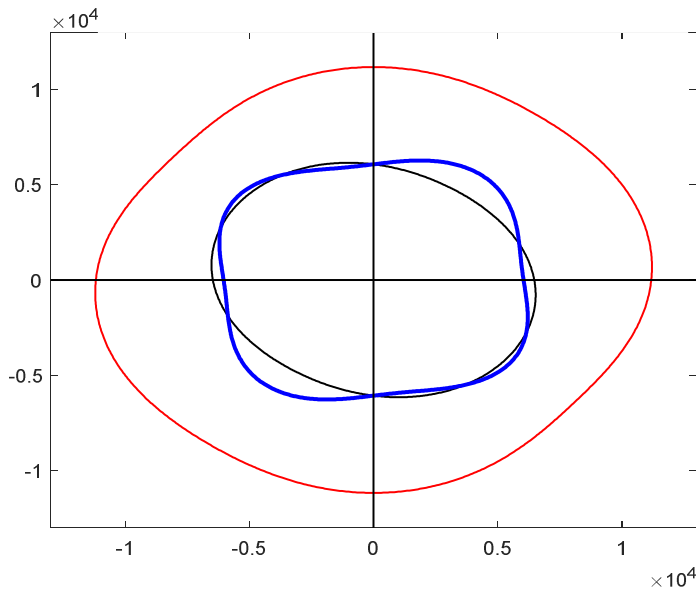
$$\Gamma_{23} = -C_{14} \sin^2(\alpha) + \frac{1}{2}(C_{13} + C_{44})\sin(2\alpha) = \Gamma_{32}.$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0.$$

En injectant ces valeurs dans l'équation séculaire (II.7), après résolution du système matricielle on aboutit aux valeurs propres de γ qui sont les vitesses de phases.

$$V_1 = \sqrt{\frac{\Gamma_{11}}{\rho}} \quad , \quad V_{2,3} = \sqrt{\frac{(\Gamma_{11} + \Gamma_{33})\rho \pm \sqrt{\rho^2(\Gamma_{22} + \Gamma_{33})^2 - 4\rho^2(\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2)}}{2\rho^2}}. \quad (II.9)$$

Où, V_1 est la vitesse de l'onde quasi-longitudinale, V_2 et V_3 sont des vitesses des ondes quasi-transversales, celle qui correspond à la grande valeur (dans la formule $V_{2,3}$) correspond au signe plus (+) et la petite valeur au signe moins (-), d'où l'en déduit que, l'une est plus rapide que l'autre (onde quasi-transversale rapide et onde quasi-transversale lente), la figure (II.1) montre les surfaces des vitesses de phase pour les trois ondes et la figure (II.2) représente les lenteurs des vitesses[15-20].



— Onde quasi longitudinale ; — Onde quasi transversale rapide ; — Onde quasi transversale lente

Figure II.1. Surfaces des vitesses de phase.

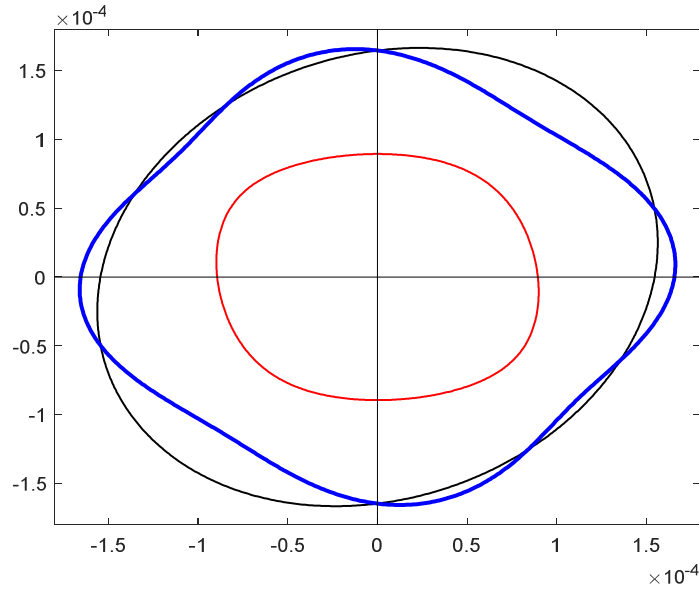


Figure II.2. Surfaces des lenteurs des vitesses de phase.

Le tracé des vitesses de phases en fonction de l'angle α , permet en valeur précise d'avoir la valeur de la vitesse de phase, ainsi l'intervalle d'oscillation des ondes, figure (II.3)

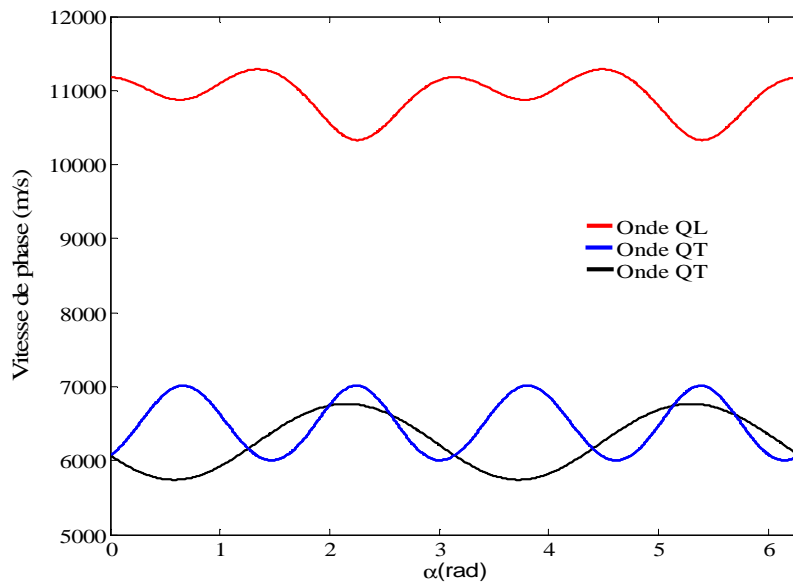


Figure II.3. Intervalle de variation des vitesses en fonction de l'angle α .

Les déplacements où les polarisations peuvent être déterminées en résolvant le système d'équations (II.8), on obtient les trois composantes de déplacement pour chacune des ondes :

$u_1^\zeta = 0$; $u_2^\zeta = \Gamma_{23}$; $u_3^\zeta = \rho V_{(\varphi, \zeta)}^2 - \Gamma_{22}$, ($\zeta = 1, 2, 3$). Leur variation en fonction de l'angle est représentée sur la figure(II.4)

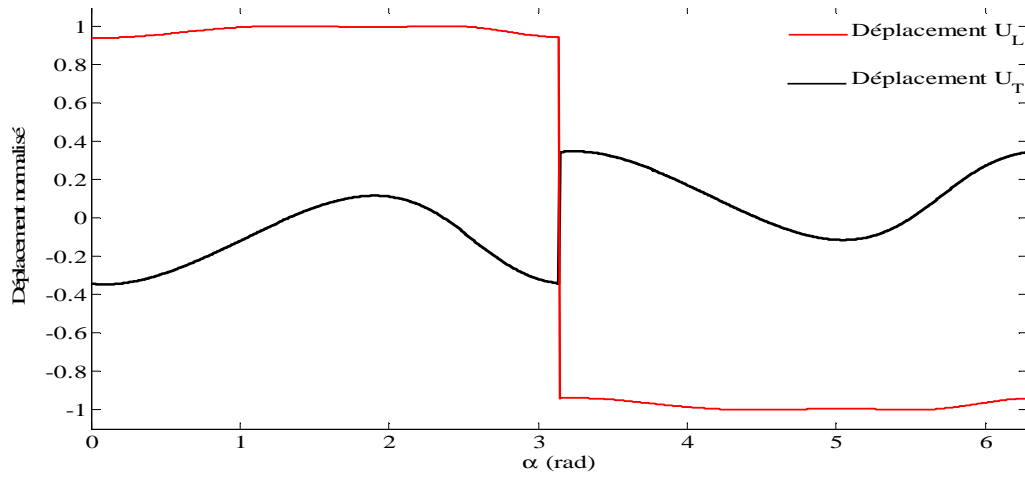


Figure II.4. Composantes de déplacement longitudinales et transversales d'onde quasi longitudinale (QL).

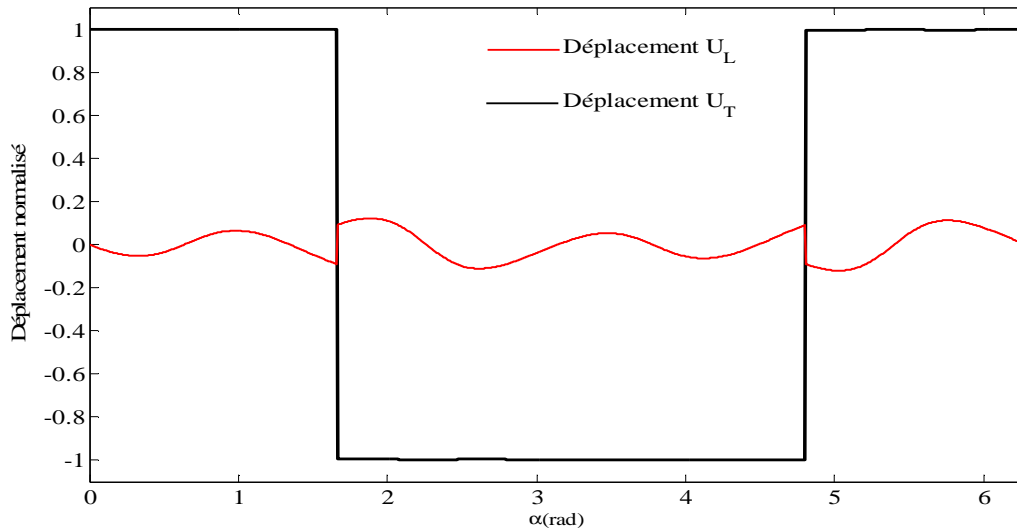


Figure II.5. Composantes de déplacement longitudinales et transversales d'onde quasi transversal rapide (QT).

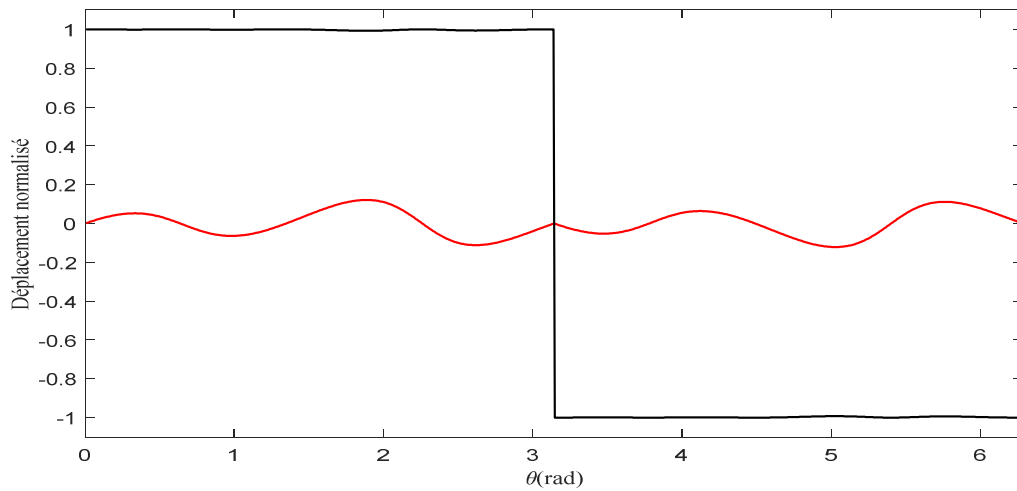
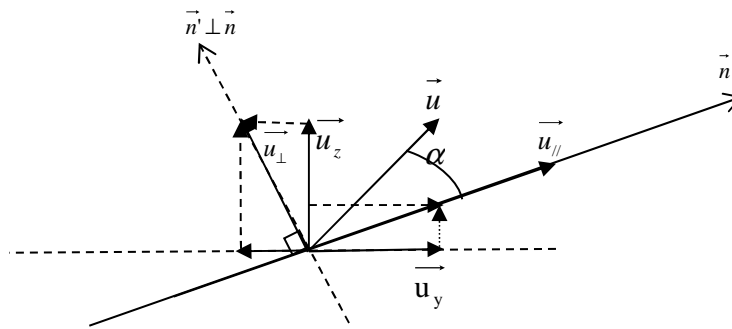


Figure II.6. Composantes de déplacement longitudinale et transversal d'onde quasi transversal lente (QT).

Figure(II.5) : Les projections des composantes longitudinales et transversales des déplacements longitudinaux et transversaux (u_L , u_T) de l'onde longitudinale et les ondes transversales sur les vecteur parallèle et perpendiculaire à \vec{n} .

Cette figure représente les projections des composantes vectorielles des déplacements u_2 et u_3 sur la direction de propagation \vec{n} et la normale à \vec{n} , pour les ondes quasi longitudinales, quasi transversales rapides et lentes. Elle montre que, pour l'onde quasi longitudinale la composante du déplacement la plus forte c'est la composante du déplacement projetée sur la direction du vecteur \vec{n} et la composante projetée sur le vecteur normal à \vec{n} est faible, pour les ondes quasi transversales (lente et rapide), la composante du déplacement la plus dominante c'est la composante du déplacement projetée sur la direction du vecteur normal à la direction de propagation \vec{n} et la composante projetée sur le vecteur \vec{n} est faible figure (II.5) .



Figure(II.6) : Représentation vectorielles des projections des composantes longitudinales et transversales du déplacement \vec{u} .

Pour une direction \vec{n} fixée, on est amené à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres correspondant respectivement aux vitesses de phase et les polarisations du tenseur de Christoffel Γ , qui est symétrique défini positif. Ces valeurs propres sont réelles et positives et les vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux ; on montre ainsi, l'existence de trois ondes planes se propageant dans la direction \vec{n} à des vitesses différentes et dont les polarisations sont orthogonales. L'onde dont la polarisation est la plus proche de \vec{n} est appelée onde quasi-longitudinale et les deux autres sont appelées ondes quasi-transversales.

Chapitre III

Ondes élastiques dans les matériaux piézoélectriques

Le traitement des équations de propagations des ondes acoustiques, dans le cas des matériaux piézoélectriques, nécessite de prendre en considération son caractère intrinsèque qui dépend du champ électrique. Ces équations lient entre elles deux grandeurs, l'une purement mécanique et l'autre purement électrique, tel que, les grandeurs électriques sont des constantes piézoélectriques e_{ij} ($C.m^{-2}$) et diélectriques ϵ_{ij} ($F.m^{-1}$), et mécanique sont des constantes élastiques $C_{\alpha\beta}$ (GPa) du matériau [3,7,19-22].

III.1. Equations des ondes sonores dans les matériaux piézoélectriques

La loi de Hooke (II.3) ne s'applique qu'à des solides purement élastiques. Si le solide possède des propriétés piézoélectriques, il convient d'y apporter les contributions des effets piézoélectriques. La loi de Hooke et la loi sur l'induction électrique deviennent alors [3-7,19-25]:

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (\text{III.1})$$

Le champ électrique est quasi statique, donc

$$E_k = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \quad (\text{III.2})$$

on explicitant la déformation

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (\text{III.3})$$

L'équation de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \quad (\text{III.4})$$

Par ailleurs ; l'induction électrique :

$$D_j = e_{jkl} s_{kl} + \epsilon_{jkl} E_k = \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (\text{III.5})$$

Et pour un solide isolant il satisfait l'équation de poisson

$$\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{III.6})$$

Il apparaît, dans ces équations (III.4, III.5), les tenseurs de piézoélectricité e_{ij} et de permittivité diélectrique ϵ_{ij} . L'ensemble de ces équations se mettent sous la forme de deux équations aux dérivées du second ordre décrivant la propagation d'une onde dans un milieu anisotrope piézoélectrique.

$$e_{jkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} - \epsilon_{jkl} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (\text{III.7})$$

La solution générale, pour une onde plane progressive, se déplaçant dans la direction \vec{n} à une vitesse de phase \vec{v} , sera admet une solution générale sous forme d'onde plane

$$u_i = u_i^0 F \left(t - \frac{n_j x_j}{v} \right) ; \quad \phi = \phi^0 F \left(t - \frac{n_j x_j}{v} \right) \quad (\text{III.8})$$

le champ électrique est longitudinal

$$D'où : E_j = - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{n_j}{v} \phi \circ F' \quad (\text{III.9})$$

Où F' est la dérivée de la fonction F , la substitution dans les équations (III.4) et (III.7) de (III.8) :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \circ u_i F'' , \quad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{v^2} \circ u_l F'' , \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{n_j n_k}{v^2} \Phi_0 F'' \quad (\text{III.10})$$

On pose :

$$\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k , \quad \gamma_i = e_{kij} n_j n_k , \quad \epsilon = \epsilon_{jk} n_j n_k \quad (\text{III.11})$$

Au système d'équations :

$$\rho v^2 u_i^o = \Gamma_{il} u_l^o + \gamma_i \phi_0 \quad (\text{III.12})$$

$$\gamma_l u_l^o - \varepsilon \phi_0 = 0 \quad (\text{III.13})$$

L'élimination du potentiel électrique ϕ_0 entre ces deux équations donne :

$$\rho v^2 u_i^o = \left(\Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon} \right) u_l^o \quad (\text{III.14})$$

c'est une équation tensorielle appelée équation de Christoffel

avec u_i^o est polarisations des ondes élastiques planes se propageant dans une direction choisie comme dans le cas des solides non piézoélectrique, les vecteurs propres d'un tenseur de rang deux :

On pose $\bar{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon}$

D'où l'équation (III.14) devient $\bar{\Gamma}_{il} u_l^o = \rho v^2 u_i^o$ (III.15)

Les valeurs propres $\gamma = \rho V^2$ donnent les vitesses de phase. D'autre part les polarisations des trois ondes planes sont toujours orthogonales du fait que le tenseur $\bar{\Gamma}_{il}$ est symétrique et le terme supplémentaire d'origine piézoélectrique dépend de la direction de propagation [3, 7,20-28].

$$\gamma_L = e_{11l} n_1^2 + e_{22l} n_2^2 + e_{33l} n_3^2 + (e_{12l} + e_{21l}) n_1 n_2 + (e_{13l} + e_{31l}) n_1 n_3 + (e_{23l} + e_{32l}) n_2 n_3$$

Soit pour chaque valeurs de l'indice l :

$$\gamma_1 = e_{11} n_1^2 + e_{26} n_2^2 + e_{35} n_3^2 + (e_{16} + e_{21}) n_1 n_2 + (e_{15} + e_{31}) n_1 n_3 + (e_{25} + e_{36}) n_2 n_3$$

$$\gamma_2 = e_{16} n_1^2 + e_{22} n_2^2 + e_{34} n_3^2 + (e_{12} + e_{26}) n_1 n_2 + (e_{14} + e_{36}) n_1 n_3 + (e_{24} + e_{32}) n_2 n_3$$

$$\gamma_3 = e_{15} n_1^2 + e_{24} n_2^2 + e_{33} n_3^2 + (e_{14} + e_{25}) n_1 n_2 + (e_{13} + e_{35}) n_1 n_3 + (e_{23} + e_{34}) n_2 n_3$$

III.2. Equation de propagation des ondes acoustiques dans le Niobate de Lithium

Les solutions de l'équation de Christoffel peuvent être représentées sous la forme des surfaces des vitesses et lenteurs. Suivant chaque vecteur \vec{n} on porte l'inverse des vitesses $\vec{L} = \vec{n} / \vec{v}$ pour chacune des trois ondes planes. La surface des lenteurs correspond au lieu géométrique des extrémités du vecteur lenteur. Elle est composée de trois nappes puisque pour une direction de propagation donnée et trois ondes planes, sont susceptibles de se propager.

Propagation d'ondes acoustique dans Niobate de Lithium LiNbO_3 dans le plan YZ pour (Classe 3m, système rhomboédrique).

$$\rho = 4,7 \text{ g/cm}^3$$

$$e_{15} = 3,7 \text{ c/m}^2 ; e_{22} = 2,5 \text{ c/m}^2 ; e_{31} = 0,2 \text{ c/m}^2 ; e_{33} = 1,3 \text{ c/m}^2 ; \varepsilon_{11} = 389 \text{ pF/m} ; \varepsilon_{33} = 257 \text{ pF/m}$$

$$C_{11} = 203 \text{ GPa} ; C_{12} = 53 \text{ GPa} ; C_{13} = 75 \text{ GPa} ; C_{33} = 245 \text{ GPa} ; C_{44} = 60 \text{ GPa} ; C_{14} = 9 \text{ GPa}$$

$$e_{i\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{22} \\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = e_{11}n_1^2 + e_{26}n_2^2 + e_{35}n_3^2 + (e_{16} + e_{21})n_1n_2 + (e_{15} + e_{31})n_1n_3 + (e_{25} + e_{36})n_2n_3 \\ \gamma_2 = e_{16}n_1^2 + e_{22}n_2^2 + e_{34}n_3^2 + (e_{12} + e_{26})n_1n_2 + (e_{14} + e_{36})n_1n_3 + (e_{24} + e_{32})n_2n_3 \\ \gamma_3 = e_{15}n_1^2 + e_{24}n_2^2 + e_{33}n_3^2 + (e_{14} + e_{25})n_1n_2 + (e_{13} + e_{35})n_1n_3 + (e_{23} + e_{34})n_2n_3 \end{array} \right.$$

$$\text{Plan } yz \Rightarrow n_1 = 0; n_2 = \sin \theta; n_3 = \cos \theta.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = e_{22} \sin^2 \theta + (e_{15} + e_{31}) \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_3 = e_{15} \sin^2 \theta + e_{33} \cos^2 \theta \\ \varepsilon = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{il} = c_{ijkl} n_j n_k$$

$$\Rightarrow \Gamma_{il} = c_{i11l} n_1^2 + c_{i22l} n_2^2 + c_{i33l} n_3^2 + (c_{i12l} + c_{i21l}) n_1 n_2 + (c_{i13l} + c_{i31l}) n_1 n_3 + (c_{i23l} + c_{i32l}) n_2 n_3$$

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma_{11} = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2 + 2C_{16}n_1n_2 + 2C_{15}n_1n_3 + 2C_{56}n_2n_3 \\ \Gamma_{22} = C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 + 2C_{26}n_1n_2 + 2C_{46}n_1n_3 + 2C_{24}n_2n_3 \\ \Gamma_{33} = C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + 2C_{45}n_1n_2 + 2C_{35}n_1n_3 + 2C_{34}n_2n_3 \\ \Gamma_{12} = C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + C_{45}n_3^2 + (C_{12} + C_{66})n_1n_2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_3 + (C_{46} + C_{25})n_2n_3 \\ \Gamma_{13} = C_{15}n_1^2 + C_{46}n_2^2 + C_{35}n_3^2 + (C_{14} + C_{56})n_1n_3 + (C_{13} + C_{55})n_1n_3 + (C_{36} + C_{45})n_2n_3 \\ \Gamma_{23} = C_{56}n_1^2 + C_{24}n_2^2 + C_{34}n_3^2 + (C_{46} + C_{25})n_1n_2 + (C_{36} + C_{45})n_1n_3 + (C_{23} + C_{44})n_2n_3 \end{array} \right.$$

Système rhomboédrique

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\text{plan } YZ \Rightarrow n_1 = 0; n_2 = \sin \theta; n_3 = \cos \theta$$

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = c_{66} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta + c_{14} \sin 2\theta \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = 0 \\ \Gamma_{22} = c_{11} \sin^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta - c_{14} \sin 2\theta \\ \Gamma_{23} = -c_{14} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(c_{13} + c_{44}) \sin 2\theta \\ \Gamma_{33} = c_{44} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta \end{cases}$$

D'où il existe une onde transversale pure polarisée au plan YZ de vitesse :

$$V_3 = \left[\frac{1}{\rho} (c_{44} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta + c_{14} \sin 2\theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.15})$$

Et deux ondes QL et QT de vitesses respectives V_1 et V_2 :

$$2\rho v_{1,2}^2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{22} - \Gamma_{33})^2 + 4\Gamma_{23}^2} \quad (\text{III.16})$$

$$2\rho v_{1,2}^2 = c_{44} + c_{11} \sin^2 \theta + c_{33} \cos^2 \theta - c_{14} \sin 2\theta \pm \left[(c_{11} \sin^2 \theta - c_{33} \cos^2 \theta - c_{14} \sin 2\theta)^2 + (c_{13} + c_{44}) \sin 2\theta - 2c_{14} \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.17})$$

De plus

$$\bar{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + \frac{\gamma_i \gamma_l}{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta$$

D'où

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11} &= \Gamma_{11}; & \bar{\Gamma}_{22} &= \Gamma_{22} + \frac{\gamma_2^2}{\varepsilon} \\ \bar{\Gamma}_{23} &= \Gamma_{23} + \frac{\gamma_2 \gamma_3}{\varepsilon}; & \bar{\Gamma}_{33} &= \Gamma_{33} + \frac{\gamma_3^2}{\varepsilon} \end{aligned}$$

D'après les calculs on déduit l'existence d'une onde transversale dans le plan de propagation de vitesse $V_3 = \sqrt{\Gamma_{11} / \rho}$ non affectée par la piézoélectricité. Les ondes QL et QT sont modifiées par la piézoélectricité [3, 5, 7, 26-30], l'ensemble des vitesses de propagation sont données par les simulations pour les différents matériaux selon le paragraphe suivant.

III.3. Simulation et résultats

Propagation d'onde acoustique dans les matériaux piézoélectriques (LiNbO₃, ZnO, SiO₂)

LiNbO₃

$$\rho = 4700 (\text{Kg/m}^3)$$

$$C_{11} = 20.3; C_{12} = 5.3; C_{13} = 7.5; C_{33} = 24.5; C_{44} = 6; C_{14} = 0.9; C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2 \text{ (GPa)}$$

$$e_{15} = 3.7; e_{22} = 2.5; e_{31} = 0.2; e_{33} = 1.3 \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\epsilon_{11} = 38,9 \cdot 10^{-11} ; \epsilon_{33} = 25,7 \cdot 10^{-11} \text{ (F/m)}$$

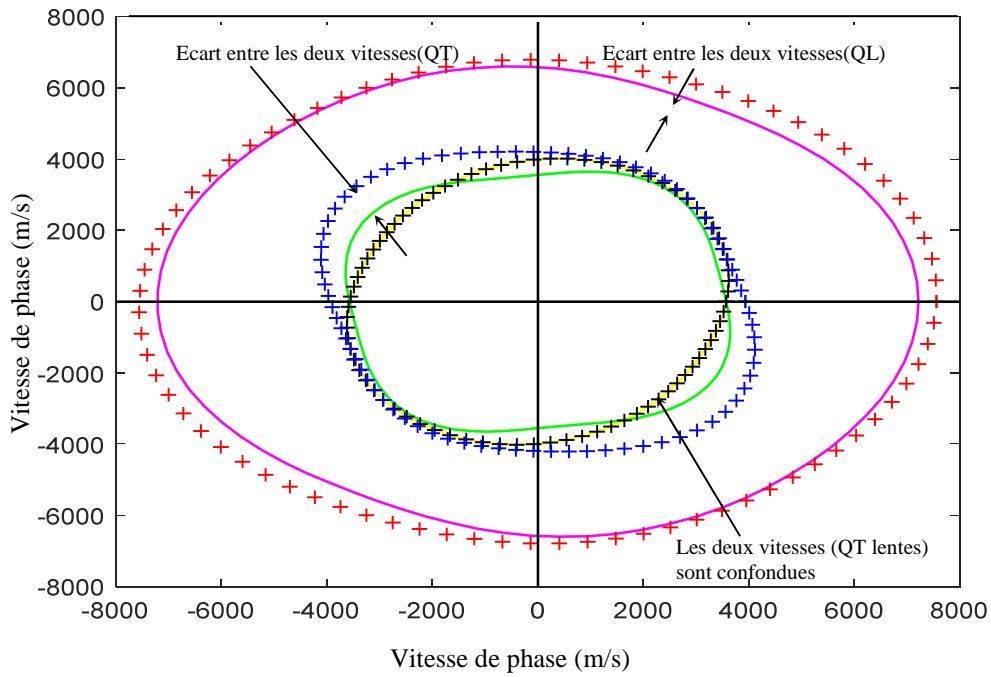


Figure III.1. Surfaces des vitesses de phase dans le plan (2,3)=(y,z), pour le (LiNbO₃) .

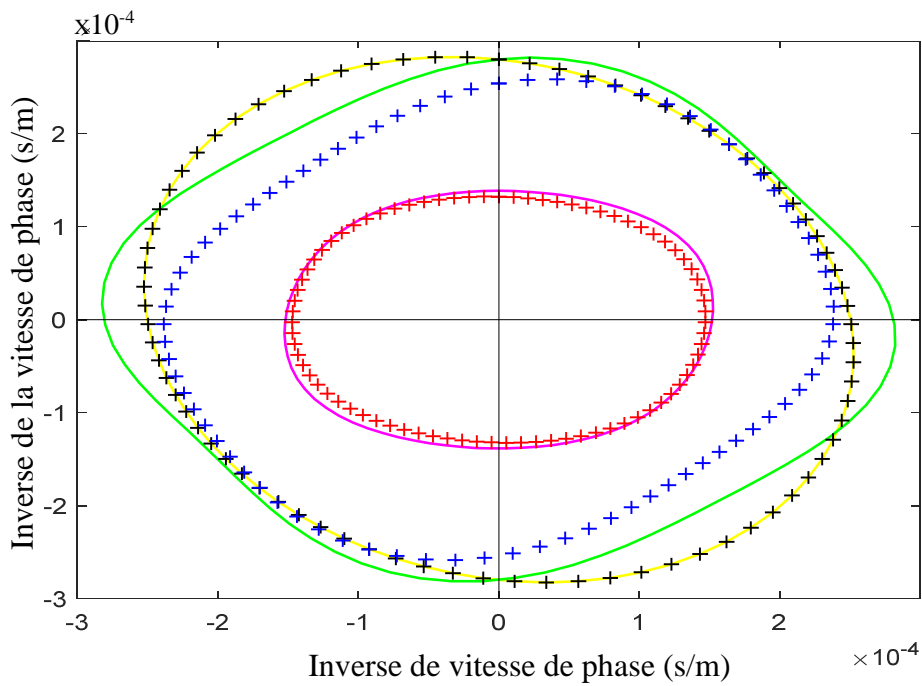


Figure III.2. Surfaces des lenteurs des vitesses de phase dans le plan (2,3) = (y, z), pour le (LiNbO₃).

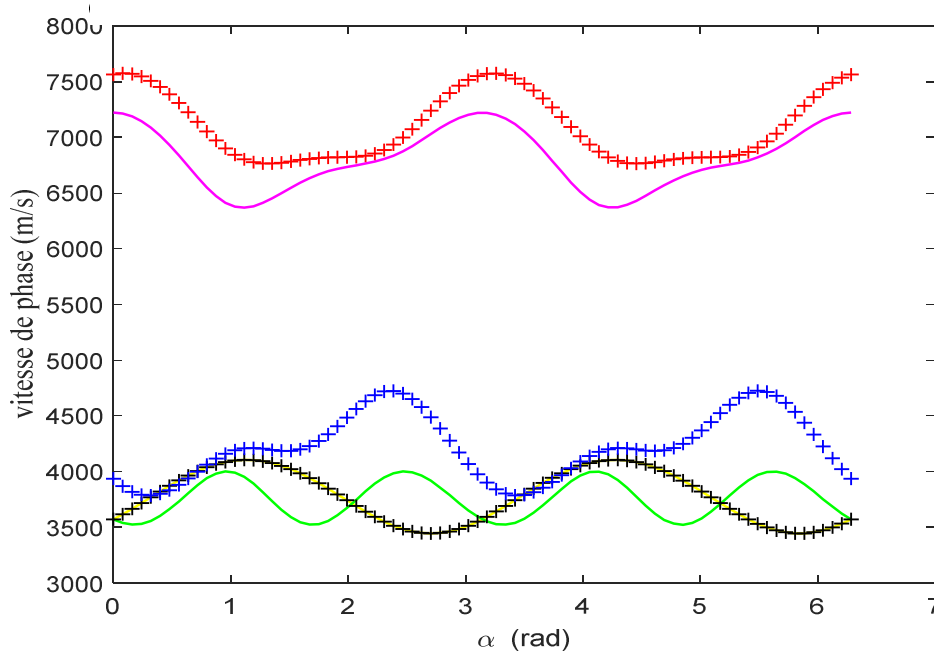


Figure III .3.Variation du module des vitesses de phase en fonction de l'ongle α , pour le(LiNbO3) .

— QL sans piézoélectricité ; — QT rapide sans piézoélectricité ; — QT lente sans piézoélectricité
 + QL avec piézoélectricité ; + QT rapide avec piézoélectricité ; + QT lente avec piézoélectricité

Cas des materiaux ZnO

$\rho = 5676(\text{Kg}/\text{m}^3)$

$C_{11} = 20.97; C_{12} = 12.11; C_{13} = 10.51; C_{33} = 21.09; C_{44} = 4.25; C_{66} = (C_{11}-C_{12})/2(\text{GPa}).$

$e_{11} = -0.59; e_{15} = -0.61; e_{33} = 1.14 (\text{C}/\text{m}^2).$

$\epsilon_{11} = 7.38 \cdot 10^{-11}; \epsilon_{33} = 7.83 \cdot 10^{-11} (\text{F}/\text{m}).$

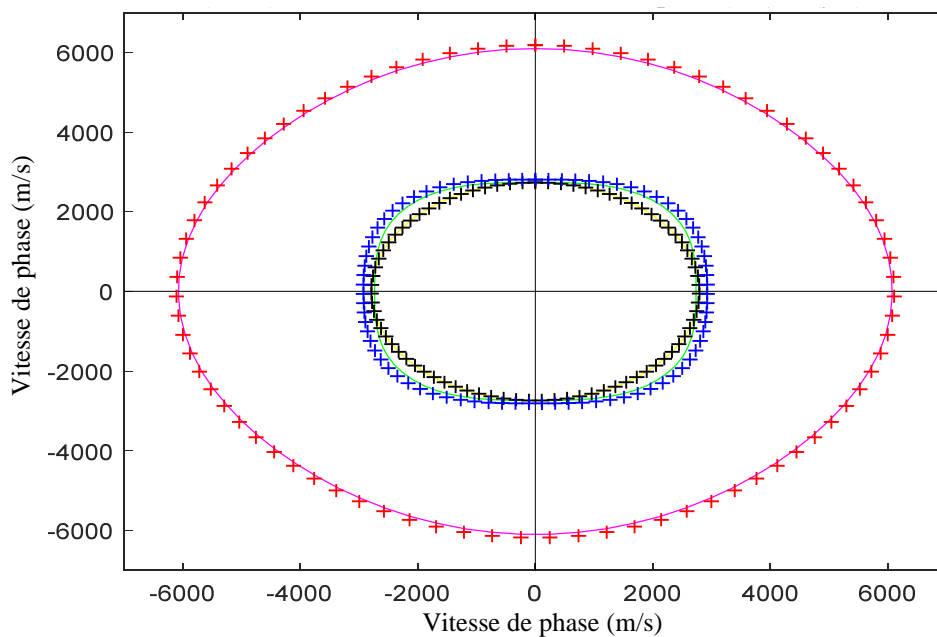


Figure III.4. Surfaces des vitesses de phase dans le plan (2,3) = (y, z), de ZnO.

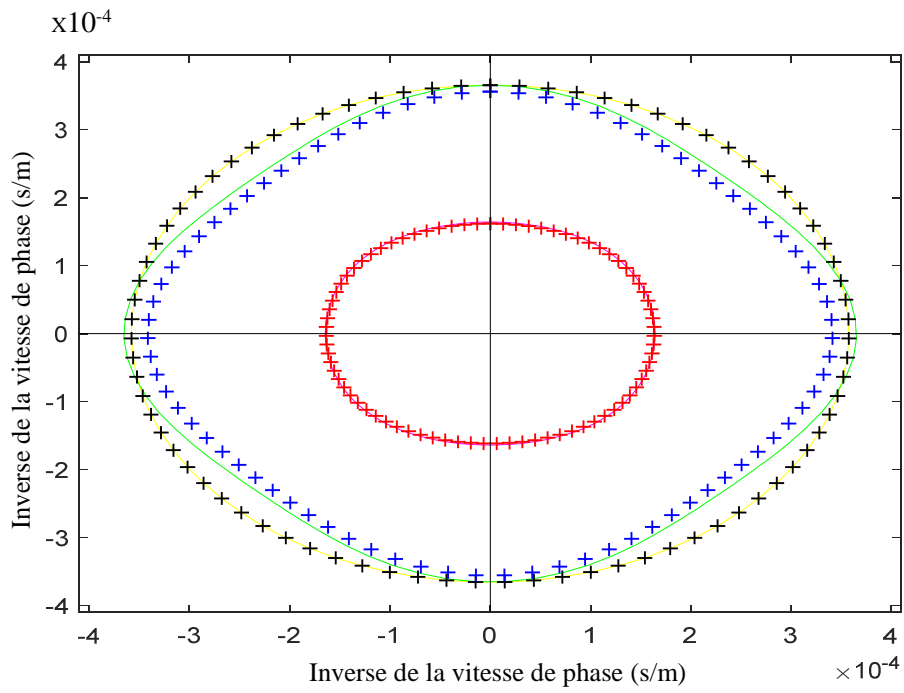


Figure III.5. Surfaces des lenteurs des vitesses de phase dans le plan $(2,3) = (y, z)$, de ZnO.

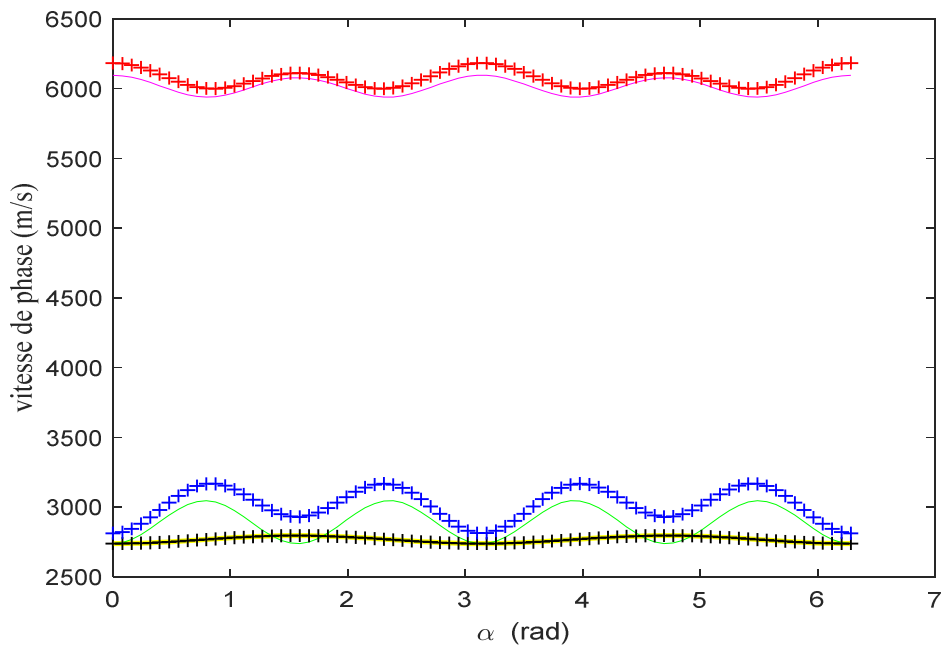


Figure III.6. Variation du module des vitesses de phase en fonction de l'angle α , de ZnO.

— QL sans piézoélectricité ; — QT rapide sans piézoélectricité ; — QT lente sans piézoélectricité
 + QL avec piézoélectricité ; + QT rapide avec piézoélectricité ; + QT lente avec piézoélectricité

SiO₂ (quartz) :

$$\rho = 2648(\text{Kg/m}^3)$$

$$C_{11} = 8.67; C_{12} = 0.7; C_{13} = 1.19; C_{33} = 10.72; C_{44} = 5.79; C_{14} = -1.79; C_{66} = (C_{11}-C_{12})/2(\text{GPa})$$

$$e_{11} = 0.171; e_{14} = -0.0406 (\text{C/m}^2)$$

$$\epsilon_{11} = 3.92 \cdot 10^{-11}; \epsilon_{33} = 4.10 \cdot 10^{-11} (\text{F/m})$$

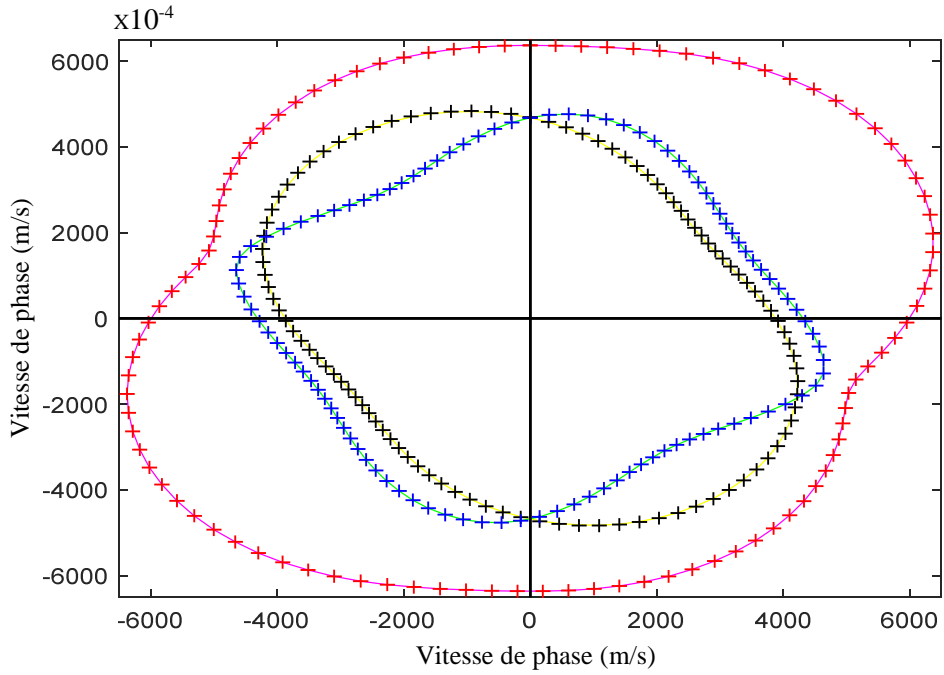


Figure III.7 Surfaces des vitesses de phase dans le plan (2,3) = (y, z), de quartz(SiO2).

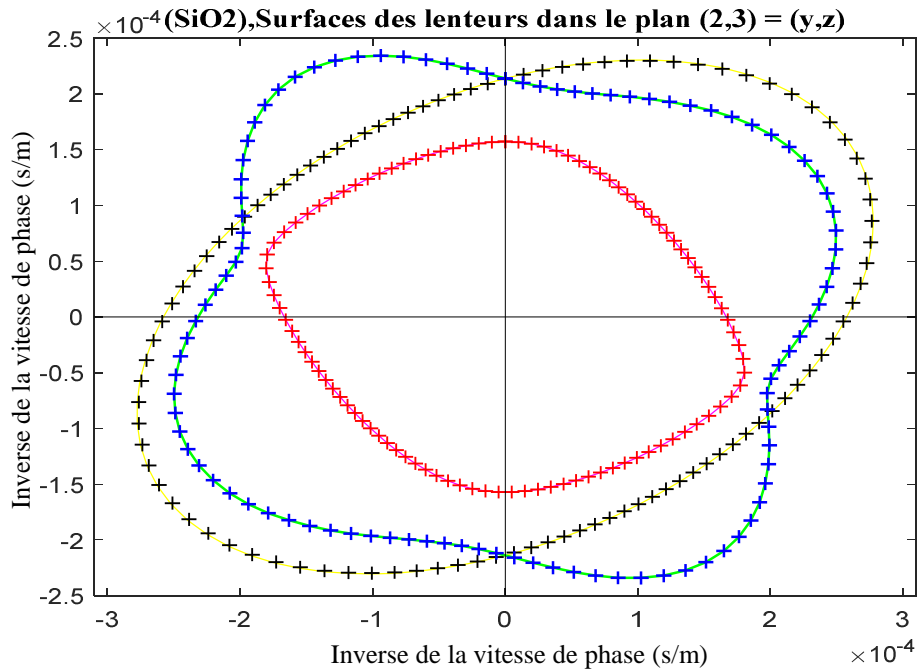


Figure III.8. Surfaces des lenteurs des vitesses de phase dans le plan (2,3) = (y, z), de quartz(SiO2).

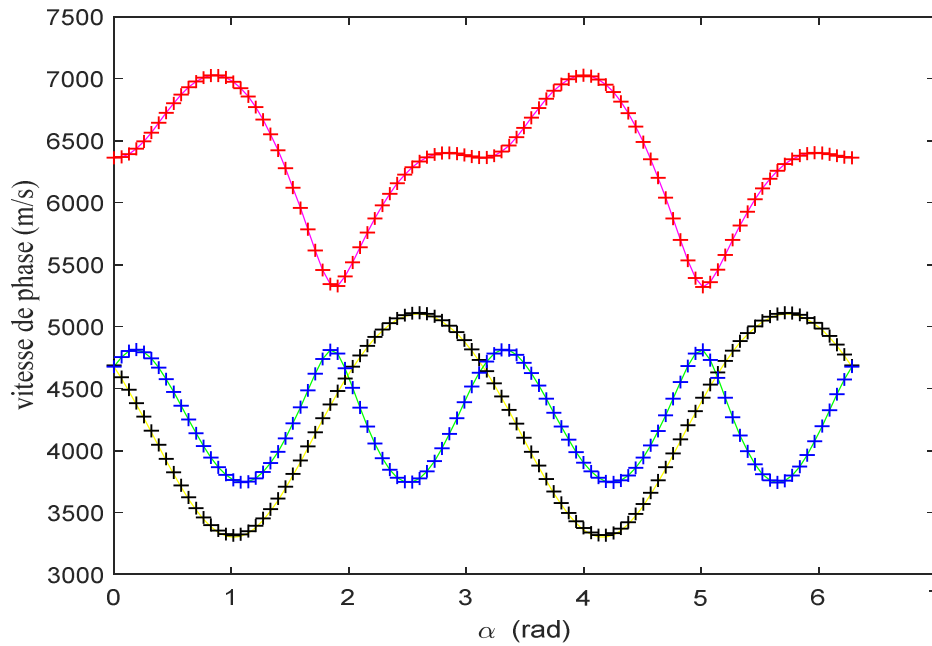


Figure III .9.Variation du module des vitesses de phase en fonction de l'angle α , de quartz(SiO_2).

- QL sans piézoélectricité ; — QT rapide sans piézoélectricité ; — QT lente sans piézoélectricité
- + QL avec piézoélectricité ; + QT rapide avec piézoélectricité ; + QT lente avec piézoélectricité

L'ensemble des figures (III.1-III.9) illustrent les composantes vectoriels et le module des vitesses des ondes de volume quasi longitudinales et quasi transversales, trait plein sans effet piézoélectrique, caractère (+) avec effet piézoélectrique.

Sur les figures (Figure (III.2), Figure (III.5), Figure (III.7)), l'ensemble des extrémités des vecteurs lentes $\vec{L} = \vec{n} / \vec{v}$ constitue trois nappes appelées surfaces des lentes centrées autour d'un point fixe O. rappelons que dans le cas d'une onde plane harmonique le vecteur lenteur est défini par $L = k / \omega$

Cependant, on observe sur les figures l'évolution des vecteurs lentes et vitesses, dans toutes les directions de l'espace pour les différents matériaux, Niobate de Lithium(LiNbO_3), l'Oxyde de Zinc (ZnO) et le quartz (SiO_2)), on aperçoit que l'onde quasi longitudinale en rouge est plus rapide que les deux ondes quasi transversales en vert et en noir, et parmi les deux ondes transversales, on distingue une transversale rapide en vert et une transversale lente en noir. Par ailleurs, l'effet piézoélectrique induit, une influence pour certaines ondes et ce pour les matériaux LiNbO_3 , ZnO et SiO_2 les ondes sont affectées, exception l'ondes transversale lente qui n'est pas affectée (les deux ondes sont confondues entre elles), d'autre part cet effet n'est plus homogène dans l'espace

ceux qui est représenté par les plages d'oscillation des vitesses en fonction de l'angle α (Figure (III.3), Figure (III.6), Figure (III.9)). De plus, les figures montrent que dans certaines directions de l'angle α la vitesse des ondes affectées par la piézoélectricité est plus grande que d'autre direction. En revanche, une particularité, pour le quartz qui n'est pas affecté par la piézoélectricité dont lequel, toutes les vitesses sont confondues entre elles. Toute fois, selon une direction de propagation \vec{n} choisie on constate que, les surfaces des vitesses n'étant plus des cercles pour certaine ondes (ondes quasi longitudinale et quasi transversale rapide) ceux qui montrent l'absence d'ondes pures dans ces matériaux.

Conclusion générale

La compréhension théorique, du comportement vibratoire de matériaux anisotropes et/ou piézoélectriques est quasi-incontournable. En effet, l'étude des ondes de volume ultrasonores, d'un point de vue physique, a lieu loin de l'influence de toutes surfaces délimitant la structure. Cependant, la connaissance des valeurs propres et vecteurs propres simplifient l'étude de la propagation des ondes de volume dans ces matériaux, ils conduisent pour une direction de propagation donnée à un nombre fini de modes propagatifs (un quasi longitudinal et deux quasi transverses).

La modélisation de l'interaction des ondes, avec les milieux anisotropes piézoélectriques doit donc tenir compte de leurs caractéristiques (propriétés des matériaux) et de la nature de la propagation (direction), ces paramètres ne rendent pas la résolution du problème possible que numériquement.

Le calcul numérique a mis au point le phénomène de propagation des ondes de volume dans le plans (y, z), une comparaison des résultats des vitesses calculées, par des programmes sous le logiciel matlab, les courbes des vitesses et lenteurs sont représentées sur les figures permettent, d'extraire un maximum d'informations sur le comportement propagatif des ondes de volume, pour pouvoir effectuer une comparaison partielle des vitesses dans une direction donnée. Elles montrent une comparaison parfaite, entre les surfaces des vitesses et lenteurs calculées pour des matériaux anisotropes et/ou piézoélectriques.

Les figures révèlent l'effet de l'anisotropie et de la piézoélectricité du matériau dans un plan de propagation choisi (y, z); la comparaison entre les simulations, pour les différents matériaux montre les écarts des vitesses avec et sans piézoélectricité, ainsi la sensibilité des ondes par l'effet piézoélectrique, tels que, les ondes quasi transversales lentes ne sont pratiquement pas affecté par la piézoélectricité.

Ces simulations, ont permis d'exploiter, les ondes de volume ultrasonores pour objectifs divers (médicale, militaire, contrôle non destructif, etc), ceci par le choix de matériau anisotrope et/ou piézoélectrique à choisir et de la direction de l'angle α qui nous permettra, d'exploiter l'amplification (écart entre les vitesses), des vitesses par effet piézoélectrique pour certaines ondes dans une direction bien précise, ainsi une idée sur le type d'onde (longitudinale et/ou transversale) a sélectionner pour un besoin précis.

Référence bibliographique

- [1] E Jerrold. Marsden, Mathematical foundations of elasticity, New York, (1983).
- [2] G.Mavko, the Rock Physics Handbook, Second Edition, New York, (2009).
- [3] D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic waves in solids I, Free and guided propagation, Springer, (1996).
- [4] D. Royer, E. Dieulesaint, Elastic waves in solids II, Generation, acousto-optic interaction, applications, Springer, (2000).
- [5] J. Rose, Ultrasonic guided waves in solid media, New York, (2014).
- [6] Y' Yang and A.Norris, Longitudinal wave scattering from a partially bonded fiber Wave motion, Elsevier, 15, 43-59 (1992).
- [7] B.A. Auld, Acoustic Fields and Waves in Solids, v. 1, John Wiley & Sons: New York, (1973).
- [8] O. E. Mattiat, Ultrasonic Transducer Materials, Lewis Balamuth Ultrasonic Systems, Inc., New York, N.Y. (1971).
- [9] Solodov, Daniel Döring, Martin Rheinfurth, and Gerd busse, Ultrasonic Ndt Of In-Plane Stiffness Anisotropy In Metals AndComposites, Materials Sciences,(2017).
- [10] A. Hood Advances in Anisotropy: Selected Theory, Modeling, and Case Studies Proceedings of the Seventh International Workshop on Seismic Anisotropy (7IWSA), (2001).
- [11] F. I. Fedorov. Theory of Elastic Waves in Crystals. Plenum Press, New York, (1968).
- [12] A.Petrin, Wave Propagation in Materials for Modern Applications, Intech, (2010).
- [13] K. Hasegawa and S' Sato, Perfectly Matched Layers of Elastic Wave Propagation in a Piezoelectric Solid in the Frequency Domain, Proceedings of Symposium on Ultrasonic Electronics, 33, 21-22,(2012).
- [14] B,Y M. D. S, Piezoelectric effect on the velocities of waves in an anisotropic piezo-poroelastic medium, 466, 1977–1992, R, Society,(2010).
- [15] Don W. Dissanayake, Acoustic Waves, Sciyo Books, (2010).
- [16] M. Cengiz D, A Dynamic Analysis Of Piezoelectric Strained Elements, United States ,(1992).
- [17] B'Collet and M'Destrade, Explicit secular equations for piezoacoustic surface waves:Shear-horizontal modes, Acoustical Society of America, 6, 3432–3442,(2004).
- [18] F. Laidoudi, Thèse de Doctorat en Sciences, Simulation des ondes ultrasonores dans des matériaux anisotropes piézoélectriques. Application aux capteurs électroacoustiques à ondes guidées, USTHB, Algérie, (2019).

- [19] J' Wang and J' Lin, A.Two-Dimensional Theory for Surface Acoustic Wave Propagation in Finite Piezoelectric Solids, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16, 623-629, (2005).
- [20] B' D. Zaitsev, Propagation of QSH (Quasi Shear Horizontal) Acoustic Waves in Piezoelectric Plates, *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 46:1298-1302, (1999).
- [21] C' Babaoglu, S'Erbay, Two-dimensional wave propagation in a generalized elastic solid, *Chaos, Solitons and Fractals* 12 381–389, (2001).
- [22] A. H. Meitzler and E. K. Sittig, Characterization of Piezoelectric Transducers Used in Ultrasonic Devices Operating Above 0.1 GHz, *J. Appl. Phys.* 40, 4341, (1969).
- [23] R' Gerson, Variation in Ferroelectric Characteristics of Lead Zirconate Titanate Ceramics due to Minor Chemical Modifications, *Journal of Applied Physics* 31, 188, (1960).
- [24] D' Berlincourt, and H' H. A. Krueger, Domain Processes in Lead Titanate Zirconate and Barium Titanate Ceramics, *Journal of Applied Physics* 30, 1804, (1959).
- [25] P' A' Bodian, Thèse De Doctorat En Sciences, Propagation des ultrasons en milieu hétérogène et anisotrope : Application a l'évaluation des propriétés d'élasticité et d'atténuation d'aciers moules par centrifugation et de soudures en inconel, L'institut National Des Sciences Appliquées De Lyon, (2019).
- [26] K.L. Verma, Thermoelastic slowness surfaces in anisotropic media with thermal relaxation, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11, 2227-2240, (2014).
- [27] V.I. Alshits , J. Lothe, Some basic properties of bulk elastic waves in anisotropic media, *Wave Motion* ,40, 297–313,(2004).
- [28] J'A. Turner, Elastic wave propagation and scattering in heterogeneous, anisotropic media: Textured polycrystalline materials, *J. Acoust. Soc. Am.* 106 (2), 541-552, (1999).
- [29] D' A. Okayal and T' V'. McEvelly, Elastic wave propagation in anisotropic crustal material possessing arbitrary internal tilt, *Geophys. J. Int.* 153, 344–358, (2003).
- [30] A.G. Everya,A. A. Maznevb, W. Grillc, M. Plutad, J.D. Cominsa, O.B. Wrighte, O. Matsudae, W. Sachsef, J.P. Wolfe, Bulk and surface acoustic wave phenomena in crystals:Observation and interpretation, *Wave Motion*, 50 ,1197–1217, (2013).