

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MOULOUD MAMMERI de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de Master en génie mécanique

Option : Construction

THÈME

*Analyse isogeometrique en
dynamique des pièces
mécaniques*

Travail réalisé par :

Mr. KASMI Achour

Proposé et dirigé par :

Mr. ASMA Farid

Promotion 2014

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir donné la force, la volonté et le courage pour l'élaboration de ce travail.

Je remercie mon promoteur Mr F.ASMA pour avoir bien voulu m'encadrer et pour ses précieux conseils et orientations.

Je remercie mon camarade BELGAID Hocine pour son aide

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants, les responsables et personnel du département de Génie mécanique.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

KASMI ACHOUR

Je dédie ce modeste travail

A la mémoire de ma grande mère

A mes très chers parents

A mon cher frère

A ma chère sœur

A toute ma famille

Table des matières	page
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Nomenclature	
Introduction générale	01
Chapitre (I) : Modélisation géométrique en CAO	
I.1 Modélisation géométrique des courbes et surfaces :	04
I.1.1 Model de Bézier :	04
Introduction :	04
I.1.1.2. Courbe de Bézier :	04
Définition :	04
I.1.1.2.1. Polynômes de BERNSTEIN :	05
Définition des fonctions de ERSTEIN :	05
I.1.1.2. 1.2. Propriétés de polynômes de BERSTEIN :	06
I.1.1.2. Courbe de Bézier non rationnel :	07
Définition :	07
Explication :	07
I.1.1.2. 1. Propriétés de courbes de Bézier non rationnelles :	08
I.1.1.2.3. Différentes courbes de Bézier :	09
I.1.1.2. 4. Influence de changement de points de contrôles sur la forme de la courbe :	11
I.1.1.3. Courbe de Bézier rationnelle :	14
Introduction :	14
I.1.1.3. 1. Cordonnées homogènes :	14
Définition :	15
Remarque :	16
I.1.1.3.2. Propriétés des courbes rationnelles de Bézier :	17
I.1.1.3.3. Influence des poids (w_i) sur la forme de la courbe rationnelle :	17
Remarque :	19
I.1.1.3. Modélisation des surfaces :	19
I.1.1.3.1. Surfaces de Bézier non rationnelles :	19
Définition :	20
I.1.1.3.1 propriétés de surface de Bézier non rationnelles :	21
I.1.1.3.2. Surface de Bézier rationnelle :	21
I.1.1.3.2.1. Influence des poids sur les surfaces de Bézier rationnelle :	22
I.1.2. Model B-SPLINE NON RATIONNELLE :	24
Introduction :	24
Définition :	24
I.1.2.1. Nœud et vecteur nodale :	24
I.1.2.1.1 Vecteur uniforme :	25
I.1.2.1.2. Vecteur non uniforme :	25
I.1.2.2. Multiplicité des nœuds :	25
I.1.2.3. Fonction de base B-SPLINE :	25
I.1.2.4. Différents types de fonctions de B- SPLINE :	26
I.1.2.4.1. B-Splines uniformes :	26

I.1.2.4.2.B-Spline non uniformes :	27
I.1.2.5. Propriétés des fonctions de bases :	29
I.1.2.6. Les courbes de B-SPLINES :	29
I.1.2.6.1. Courbes B-SPLINE non rationnelle uniforme :	29
I.1.2.6.2. Propriétés des courbes B-Spline :	30
I.1.2.6.3. Surface B-SPLINE non rationnelle :	31
I.1.2.6.4. Propriétés des surfaces B-SPLINES :	32
I.1.2.7.Modèle B-Spline rationnel NURBS :	32
I.1.2.7.1Fonction de base de NURBS :	32
I.1.2.7.2. Propriétés de base de NURBS :	32
I.1.2.7.3. Dérives de fonctions de NURBS :	33
I.1.2.8. Courbes de NURBS :	35
Définition :	35
I.1.2.8. 1. Propriétés géométriques des courbes NURBS :	36
I.1.2.8. 3. Surface de NURBS :	36
I.1.2.8. 4. Propriétés des surfaces NURBS :	37
I.2. Raffinement :	38
I.2.1. h-raffinement :	38
I.2.2. p-raffinement :	40
I.2.3.k -raffinement :	41
Chapitre II : méthode des éléments finis classique	
II .1. La méthode des éléments finis :	43
Introduction :	43
II .2.Principe :	43
II .3.Les étapes (procédures) logiques du calcul par élément finis :	44
II .4.Domaine d'application de la MEF :	45
II .5. Connaissances nécessaires à un utilisateur MEF :	45
II .6. Discrétisation :	45
II .7. Élément poutre :	47
II .8. Détermination de la matrice de déformation B :	50
II .10. La matrice de rigidité :	52
II .11. La matrice de masse :	52
II .12. Valeurs propres et vecteurs propres :	52
Chapitre III : La méthode éléments finis isogéométrique	
III.1. Introduction :	53
III.2. Analyse iso-géométrique :	53
a)Définition :	53
b) Présentation de la méthode :	54
III.3. Analyse iso-géométrique en utilisant les NURBS (AIG) :	56
III.4. La procédure du calcul des éléments finis iso-géométriques :	58
III.5. Matrice de raideur :	58
III.6. Matrice de masse :	59
III.7. Les équations de Bernoulli :	60
III.8. Résumé des principales notions de l'analyse iso-géométrie :	61

Chapitre IV : Application de deux méthodes	
I V-a) Introduction :	62
I V-b) Définition du model :	62
IV-c) Propriétés et dimensions du model :	62
IV. Calcul du model par les deux méthodes :	63
IV.1. méthode des éléments finis classique :	63
IV.1.1. discrétisation de la géométrie :	63
IV .1.2. Calcul des matrices élémentaires :	63
IV .1.3. Assemblage et résolution :	65
IV .1.4. Les déplacements de la poutre :	66
IV .1.5. Application :	67
IV 1.5.1. Déplacements verticaux :	67
IV 1.5.1. explication :	67
IV 1.5.2. Les rotations :	68
.IV.2. méthode des éléments finis iso géométriques :	69
IV.2.1. création du model . :	69
IV.2.2. discrétisation (raffinage) :	69
IV.2.3. Les matrices de masse et de rigidité :	69
IV.2.3. Les valeurs et les vecteurs propres :(modes propres) :	69
IV.2.4. Augmentation les fonctions de base et l'ordre :	70
IV.2.5. Comparaison de deux méthodes :	71
IV.2.6. La différence entre les deux méthodes :	71
Conclusion générale :	73
Référence bibliographique	

LISTE DES FIGURES

Liste des figures

Figure (I-1) : Polynômes de Bernstein de degré 5

Figure (I-2) : Courbe de Bézier non rationnel

Figure (I-3) : courbe de Bézier de degré 1(droite)

Figure (I-4) : courbe de Bézier de degré 2

Figure (I-5) : courbe de Bézier de degré 3

Figure (I-6) : courbe de Bézier non rationnelle

Figure (I-7) : illustration de la transformation homogène entre R^3 et R^2

Figure (I-8) : courbe de Bézier rationnelle

Figure (I-9) : courbe de Bézier rationnelle

Figure (I-10) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 9 \ 1 \ 1]$

Figure (I-11) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 10 \ 10 \ 1]$

Figure (I-12-1) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-12-2): courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-13) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-13-1) : courbe rationnelle de Bézier avec $W = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-13-2) : courbe rationnelle de Bézier avec $W = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

Figure (I-14) : surface de Bézier non rationnelle

Figure (I-15) : réseau caractéristique de surface de Bézier non rationnelle

Figure (I-16): surface de Bézier rationnelle

Figure (I-17-1): surface de Bézier rationnelle avec les poids $W_i=W_j = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-17-2): surface de Bézier rationnelle après le changement des poids

$W_i = [1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$, $W_j = [1 \ 1 \ 10 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-17-3) : surface de Bézier rationnelle avec $W_i = [1 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1 \ 1]$, $W_j = [1 \ 1 \ 100 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-17-4) : surface de Bézier rationnelle avec $W_i = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, $W_j = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$

Figure (I-18) : fonction de base de l'ordre 0,1,2,3 pour le vecteur uniforme $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$

Figure (I-19-a-b-c-d): fonctions de B-Spline uniformes de degré 0 à 3

Figure (19-f-g) : fonctions de B-Spline non uniforme de degré 0 et 1 et de vecteur nodal

$\Xi = [0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-20) : fonctions de B-Spline non uniforme de degré 2 et de vecteur nodal

$\Xi = [0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-21) : courbe B-Spline non rationnelle

LISTE DES FIGURES

Figure (I-22) : comparaison entre l'interpolation de Lagrange et B-Spline
a)-interpolation de Lagrange b)-interpolation B-spline

Figure (I-23) : surface B-Spline non rationnelle

Figure (I-24) : 1^{ère} et 2^{ème} dérivées fonctions de bases B-Spline et NURBS

Figure (I-24) : courbe de NURBS avec $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-25) : surface de NURBS de degré 2

Figure (I-26) : insertion des nœuds h-raffinement

Figure (I-27) : élévation de fonction de base p-raffinement

Figure (I-28) : le concept de k-raffinement

Figure (II-1) : concept de la méthode élément finis

Figure (II-2) : Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée)

Figure (II-3) : Elément de poutre et ses degrés de liberté

Figure (III-1): relation entre DAO et AEF dans l'analyse iso géométrique

Figure (III-2): Transformation du domaine physique au domaine paramétrique MEF

Figure (III-3): Transformation de domaine physique au domaine paramétrique AIG

Figure (III-4) : Chaque fonction de base est définie sur un intervalle de l'espace paramétrique comprenant un nombre restreint d'éléments.

Figure (IV-1): représentation du model à analyser

Figure (IV-2): modèle subdivise en 10 éléments

Figure (IV-3): fréquences propres du modèle

Figure (IV-4): 01: les déplacements verticaux $v(x)$

Figure (IV-5): les rotations en rad

Figure (IV-6): allure des fonctions de base NURBS d'ordre 1 définissant la poutre

Figure (IV-7): fonctions de base NURBS et ses 4 dérivés

Figure (IV-8): les modes propres du modèle

Figure (IV-9): Fonction de base $n=50$ et $p=4$

Figure (IV-10): Mode propre $n=50$ et $p=4$

NOMENCLATURE

Nomenclature :

Liste des symboles :

$B_{i,n}$: Fonction de BERNSTEIN

$C_{i,n}$: Binôme de Newton

P_i : Points de contrôles

t : Paramètre géométrique

u, v : Paramètres curvilignes

W : vecteur poids

$N_{i,p}(\xi)$ **et** $N_{j,q}(\eta)$: Fonction de base de B-SPLINE

Ξ Et H : vecteur nodaux

p : Ordre polynomiale

$R_{i,p}$: Fonction de base NURBS

$[J]$: matrice de transformation Jacobéenne

$[K]$: matrice de rigidité globale

$[M]$: matrice de masse globale

b : Largeur de la poutre

h : Hauteur de la poutre

ρ : la masse volumique du matériau

Abréviations :

DAO : dessin assiste par ordinateur

CAO : conception assiste par ordinateur

AEF : analyse par élément fini

MEF : méthode des éléments finis

AIG : analyse isogeometrique

NURBS : non uniforme rationnelle B-SPLINE

IAO : ingénierie assiste par ordinateur

CFAO : conception de fabrication assiste par ordinateur

LISTE DES TABLEAUX

Liste des tableaux

Tableau 1 : Types d'éléments finis

Tableau 2 : Les fonctions de formes

Tableau 4 : Fréquences propres du modèle

Tableau 5 : Les valeurs numériques de $v(x)$ et O_y

Tableau 6 : La comparaison entre MEF classique et isogéométrie nouvelle

Introduction générale

Introduction générale :

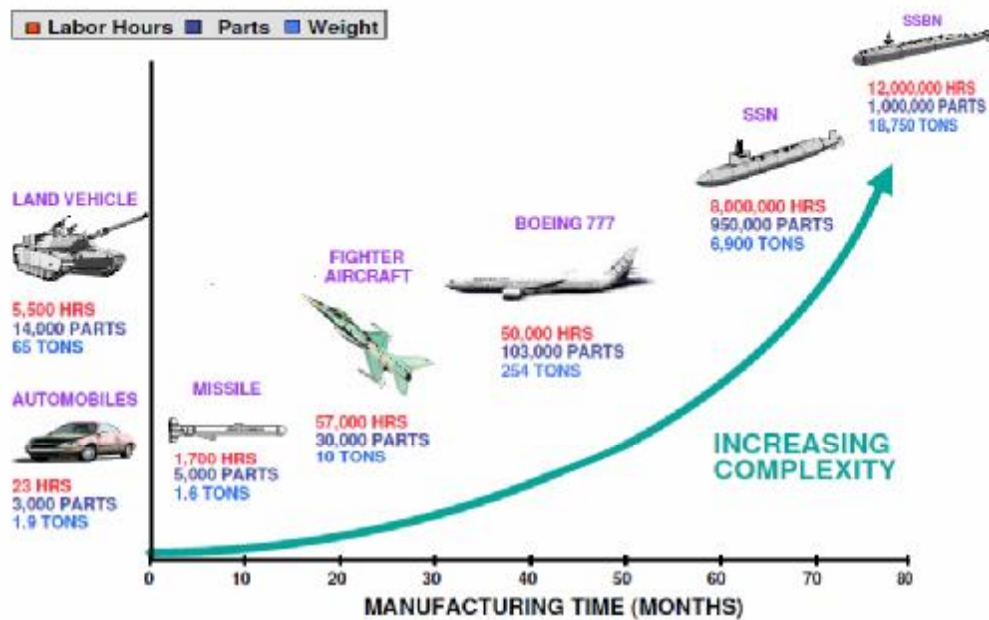
La géométrie est la base de l'analyse, pourtant des méthodes modernes pour le calcul géométrique jusqu'à récemment ont eu un très petit impact sur le calcul mécanique. Peut être la raison est que la méthode des éléments finis (MEF) n'a été développée que dans les années 50 et 60, avant l'apparition de la conception assistée par ordinateur (CAO) et sa généralisation dans les années 70 et 80. Ceci peut expliquer pourquoi les représentations géométriques dans l'analyse des éléments finis et DAO sont si différents, les principaux programmes d'éléments finis étaient techniquement murs longtemps avant que le DAO ait été largement adopté. Actuellement, le DAO est plus industrialisé que l'analyse, l'analyse désignée sous le nom de l'ingénierie assistée par ordinateur (IAO) dans la recherche. Il est très difficile de mesurer avec précision la taille des industries de IAO et DAO. La situation typique dans la pratique en matière de technologie est que les conceptions sont renfermée dans le système DAO et le maillage est généré par des informations de DAO. Alors adopter différentes descriptions géométriques pour l'analyse et une étude qui est seulement approximative.

Il y a toujours des situations gouvernantes dans l'industrie dans lesquelles les schémas sont faits à partir du DAO et le maillage est généré à partir des données de DAO.

Il est estimé qu'environ 80% de temps de l'analyse globale est consacré au maillage comme par exemple dans l'industrie automobile, aérospatiale et navale. Dans l'industrie automobile, un maillage entier d'un véhicule peut prendre environ quatre mois pour le construire. Alors la conception en ingénierie devient de plus en plus complexe comme le montre la figure suivante (voir nombre de pièces constituant l'objet).

La conception et l'analyse sont deux domaines qui ne peuvent jamais être séparés, la conception des systèmes sophistiqués dans l'ingénierie est basée sur un éventail d'analyses numériques et des méthodes de simulations, comme la mécanique des structures, dynamique des fluides, etc.

Introduction générale



Classement de quelques objets technologiques en fonction de leur temps de réalisation, nombre de composants et poids

Les tendances récentes prennent place dans l'analyse d'ingénierie et de calcul haute performance et demande également une très grande précision et une meilleure intégration de l'ensemble modélisation et analyse des processus. Nous notons qu'un maillage aux éléments finis n'est qu'une approximation de la géométrie DAO que nous considérons comme «exacte». Ce rapprochement peut dans de nombreuses situations créer des erreurs dans les résultats d'analyse. Ceci exige le changement d'éléments finis classiques par un procédé d'analyse basé sur les représentations exactes de DAO. Ce concept désigné sous le nom de l'analyse Isogéométrique, a été proposé la première fois par Thomas J.R. Hughes, Cottrell, et Bazilevs. Elle permet de faire le lien entre le D.A.O. (Dessin Assistée par Ordinateur) et la simulation numérique, elle utilise les mêmes concepts pour les calculs par éléments finis que pour la CAO: les fonctions NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) par exemple. Ces éléments finis de nouvelle génération se nomment éléments finis isogéométriques. Cette technique est extrêmement intéressante car elle supprime définitivement la notion de maillage éléments finis ainsi que la pauvreté de convergence des éléments finis habituels. L'idée principale repose sur l'utilisation de fonctions de base servant à définir la géométrie. Plusieurs avantages rendent l'approche très attractive comparée à la méthode des éléments finis classiques, elle permet une représentation précise voire exacte des géométries complexes.

Introduction générale

Il y a actuellement une avancée vers une précision plus élevée et une meilleure simulation de la réalité. De nouvelles technologies sont présentées et adoptées rapidement dans les logiciels de conception, et des nouvelles et meilleures applications peuvent être établies avec ces nouvelles technologies de DAO et le nouveau concept d'analyse (l'analyse isogéométrique). Cette nouvelle approche d'analyse isogéométrique et ces applications dans le domaine d'ingénierie est vraiment très signifiant.

Dans ce travail on propose une application de ce nouveau concept sur des structures mécaniques notamment les pièces (poutres).

Ce travail est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre décrit l'évolution de la modélisation géométrique des courbes et surfaces, voir les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein en 1962 avec les travaux de PIERRE Bézier et les courbes B-spline puis NURBS.

Le deuxième Chapitre présente la méthode des éléments finis classique et les formules utilisées.

Le troisième chapitre présente la nouvelle méthode des éléments finis isogeometriques.

Le quatrième Chapitre termine le mémoire par des applications sur le même modèle à analyser.

I.1 Modélisation géométrique des courbes et surfaces

I.1.1 Modèle de Bézier

Introduction :

Né en 1910, Pierre Bézier conçoit en 1945 les machines de transferts pour la fabrication des 4CV et en 1958 une machine à Commande Numérique. Au début des années soixante, il était directeur des méthodes mécaniques. À la suite de divergences avec ses supérieurs, il fut mis à l'écart, ce qui lui donna l'occasion de s'intéresser à la modélisation des surfaces. Sa préoccupation était d'offrir au dessinateur un moyen simple et puissant pour créer des formes et pour faciliter la programmation des machines à commande numérique. Afin d'utiliser concrètement les courbes et surfaces de Bézier, un logiciel fut créé : Unisurf. Il est à la base de tous les logiciels créés par la suite, dont Catia.

Les concepts de CAO et de CFAO venaient de prendre forme. Trouver un moyen de définir de façon mathématique une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante laser du Mac, John Warnock (futur fondateur d'Adobe) choisit les courbes de Bézier comme base de PostScript. Aujourd'hui, les graphistes et designers utilisent les courbes de Bézier un peu comme monsieur Jourdain. Pierre Bézier, le père de la CAO chez Renault, s'est éteint le 25 novembre 1999. Ingénieur des Arts et Métiers, il était aussi diplômé de l'Ecole supérieure d'électricité, docteur en mathématique.

Les courbes de Bézier se retrouvent dans pratiquement tous les logiciels de dessin, et définissent les polices de caractères vectorielles (PostScript) des imprimantes. Les surfaces de Bézier se retrouvent dans les logiciels de CAO (conception) et FAO (fabrication) utilisés par les constructeurs automobiles et aéronautiques entre autres. Il faut rendre hommage à un autre ingénieur, Paul de Faguet de Casteljau, mathématicien chez Citroën, qui mit au point une méthode de définition des surfaces complexes en 1959. Il existe maintenant d'autres courbes (Spline, B-Spline..) et d'autres surfaces (coons, nurbs...).

I.1.1.2. Courbes de Bézier

Définition :

Les **courbes de Bézier** sont des courbes polynomiales paramétriques décrites pour la première fois en 1962 par l'ingénieur français Pierre Bézier qui les utilisait pour concevoir des pièces d'automobiles à l'aide d'ordinateurs. Elles ont de nombreuses applications dans la

synthèse d'images et le rendu de polices de caractères. Elles ont donné naissance à de nombreux autres objets mathématiques.

Il s'agit d'un modèle permettant de créer des formes du plan et de l'espace à partir de points de contrôle [1]

Pour la description de ces courbes et surfaces, Pierre Bézier a utilisé les polynômes de BERSTEIN.

I.1.1.2.1. Polynômes de BERNSTEIN :

Définition des fonctions de BERSTEIN :

$$B_{i,n}(t) = C_{i,n} \cdot t^i \cdot (1-t)^{(n-i)} \quad (\text{I.1})$$

i variant entre 0 et n, constituent une base de l'espace des fonctions polynomiales de degré n

- $C_{i,n}$ est le coefficient bien connu: $C_{i,n} = n! / (i!(n-i)!)$ (I.2)
- binôme de NEWTON
- n : entier positif
- i=0, 1, 2,3,.....n

Exemple :

On prend n=5 pour $t \in [0 \dots n]$ et on calcule la fonction de BERSTEIN : $N_{i,5}$

$$\begin{aligned} B_{0,5} &= (1-t)^5 \\ B_{1,5} &= 5t(1-t)^4 \\ B_{2,5} &= 10t^2(1-t)^3 \\ B_{3,5} &= 10t^3(1-t)^2 \\ B_{4,5} &= 5t^4(1-t) \\ B_{5,5} &= t^5 \end{aligned}$$

Ce qui donne graphiquement par MATLAB

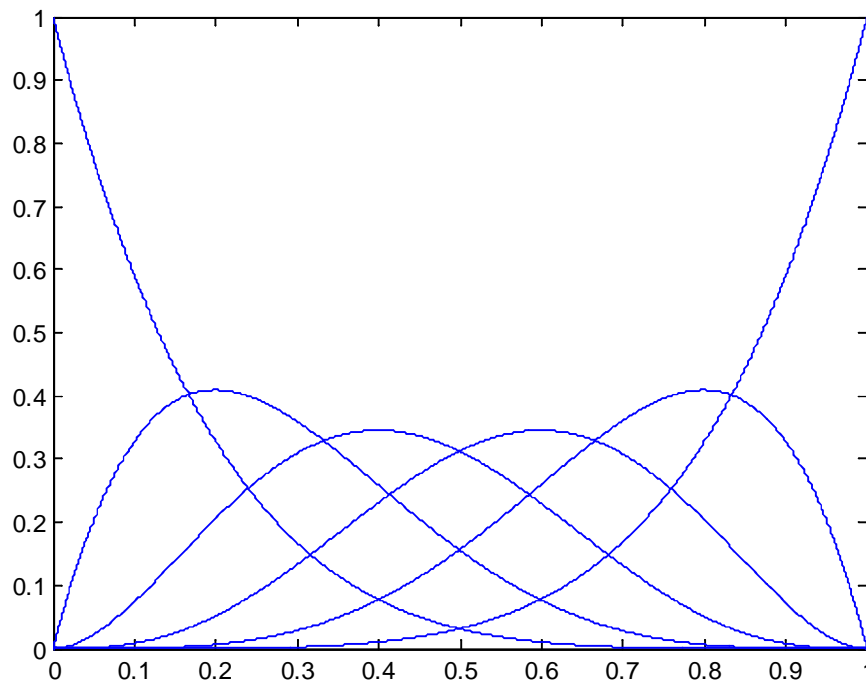


Figure (I-1) : Polynômes de Bernstein de degré 5

I.1.1.2. 1.2. Propriétés de polynômes de BERSTEIN :

- ✓ la positivité : $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ et $\forall t \in [0, 1]$; $B_{i,n}(t) \geq 0$.
- ✓ 2. partition de l'unité: $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$.
- ✓ 3. max $B_{i,n} = B_{i,n}(t = i/n)$.
- ✓ 5. symétrie: $\forall t \in [0, 1]$; $B_{i,n}(t) = B_{n-i}(1-t)$.
- ✓ 6. intégration: il est montré que: $\forall i \in [0, n]$; $\int_0^1 B_{i,n}(t) dt = \frac{1}{n+1}$.

➤ ici dans l'exemple précédent le degré $n = 5$

$$\Rightarrow \int_0^1 B_{i,5}(t) dt = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

- ✓ 7. dérivée: $B_{i,n}(t) = \begin{cases} -nB_{i,n-1}(t) \dots \dots (i = 0). \\ B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t) \dots \dots (i = 1, \dots, n-1) \\ nB_{i-1,n-1}(t) \dots \dots (i = n) \end{cases}$

I.1.1.2. Courbe de Bézier non rationnelle :

Une courbe de Bézier de degré n est caractérisée généralement par $n+1$ points, appelés points de contrôle qui définissent le polygone caractéristique associé à cette courbe. Le premier point et le dernier sont des nœuds.

Les autres points de contrôle permettent de définir la forme de la courbe, la courbe ne passant pas en général par ces points.

Définition :

Pour définir de manière mathématique une courbe de Bézier de degré n associée au polygone caractéristique (PG) défini par les points de contrôle (P_0, P_1, \dots, P_n) dans le repère $R(O, X, Y)$, on utilise les polynômes de BERNSTEIN à l'aide de l'équation suivante :

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot P_i \quad (\text{I-3})$$

Avec :

- $B_{i,n}(t)$: fonction de BERNSTEIN
- P_i appelés pôles du polygone caractéristique et sont les points de contrôle dans le repère $R(O, X, Y)$
- Et $i=\{0,1,2, \dots, n\}$ et $t \in [0,1]$ coordonnées géométriques

Exemple : pour $n=5$ donc six points de contrôles, on définit le polygone caractéristique

$$P_i = \{p_0(0,0), p_1(2,3), p_2(5,9), p_3(11,9), p_4(14,4), p_5(18,4)\}$$

Donc : pour l'axe des abscisses $x(t)$, $P_i = \{0, 2, 5, 11, 14, 18\}$

Pour l'axe des ordonnées $y(t)$, $P_i = \{0, 3, 9, 9, 4, 4\}$

La courbe de Bézier est définie comme suit

$$C(t) = \begin{cases} x(t) = 0 \cdot B_{0,5} + 2 \cdot B_{1,5} + 5 \cdot B_{2,5} + 11 \cdot B_{3,5} + 14 \cdot B_{4,5} + 18 \cdot B_{5,5} \\ y(t) = 0 \cdot B_{0,5} + 3 \cdot B_{1,5} + 9 \cdot B_{2,5} + 9 \cdot B_{3,5} + 4 \cdot B_{4,5} + 4 \cdot B_{5,5} \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

Ce qui donne en utilisant le langage de programmation MATLAB la figure suivante :

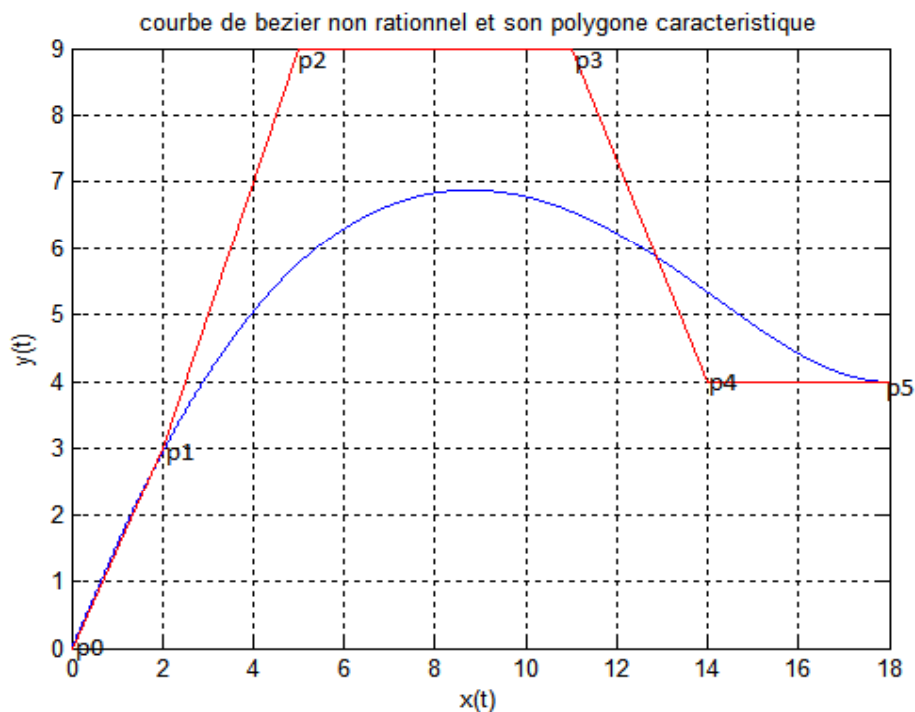


Figure (I-2) : Courbe de Bézier non rationnelle

Explication :

Six points de contrôles P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 définissent une courbe de Bézier de degré $n=5$. La courbe se trace en partant du point P_0 , en se dirigeant vers P_1 et en arrivant au point P_5 selon la direction $P_2-P_3-P_4-P_5$.

En général, la courbe ne passe ni par P_1, P_2, P_3, P_4 : ces points sont simplement là pour donner une information de direction. La distance entre P_0 et P_1 détermine la « longueur » du déplacement dans la direction de P_1 avant de tourner vers P_5 .

I.1.1.2. 1. Propriétés des courbes de Bézier non rationnelles :

- La courbe est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle.
- La courbe commence par le point P_0 et se termine par le point P_n , mais ne passe pas a priori par les autres points de contrôle qui déterminent cependant l'allure générale de la courbe.
- $\overrightarrow{P_0P_1}$ est le vecteur tangent à la courbe en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ au point P_n .

- Une courbe de Bézier est infiniment dérivable (de classe C^∞).
- La courbe de Bézier est un segment si et seulement si les points de contrôle sont alignés.
- Chaque restriction d'une courbe de Bézier est aussi une courbe de Bézier.
- Un arc de cercle (ni même aucun arc de courbe conique, en dehors du segment de droite) ne peut pas être décrit par une courbe de Bézier, quel que soit son degré.
- Le contrôle de la courbe est global : modifier un point de contrôle modifie toute la courbe, et non pas un voisinage du point de contrôle.
- Pour effectuer une transformation affine de la courbe, il suffit d'effectuer la transformation sur tous les points de contrôle.
- La courbe ne passe pas toujours par l'origine de repère, ça dépend des points de contrôles donnés.

I.1.1.2.3. Différentes courbes de Bézier :

❖ Courbe de Bézier linéaire (de degré 1)

Les points de contrôle P_0 et P_1 définissent la courbe de Bézier :

Il s'agit donc du segment $[P_0, P_1]$. **Voir figure ((I-3) .**

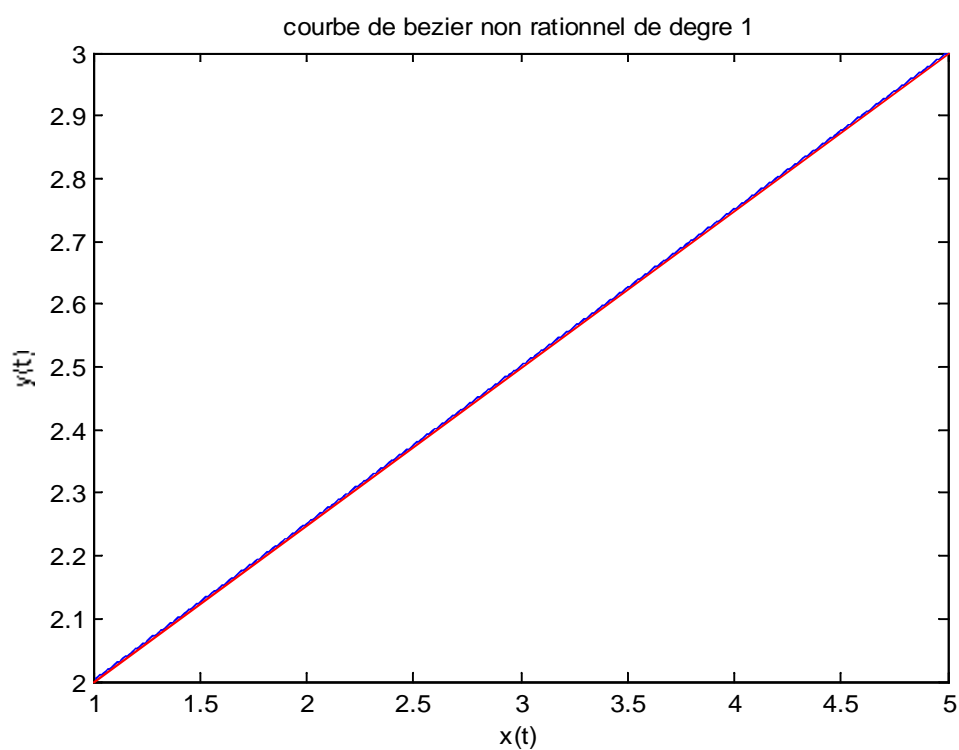
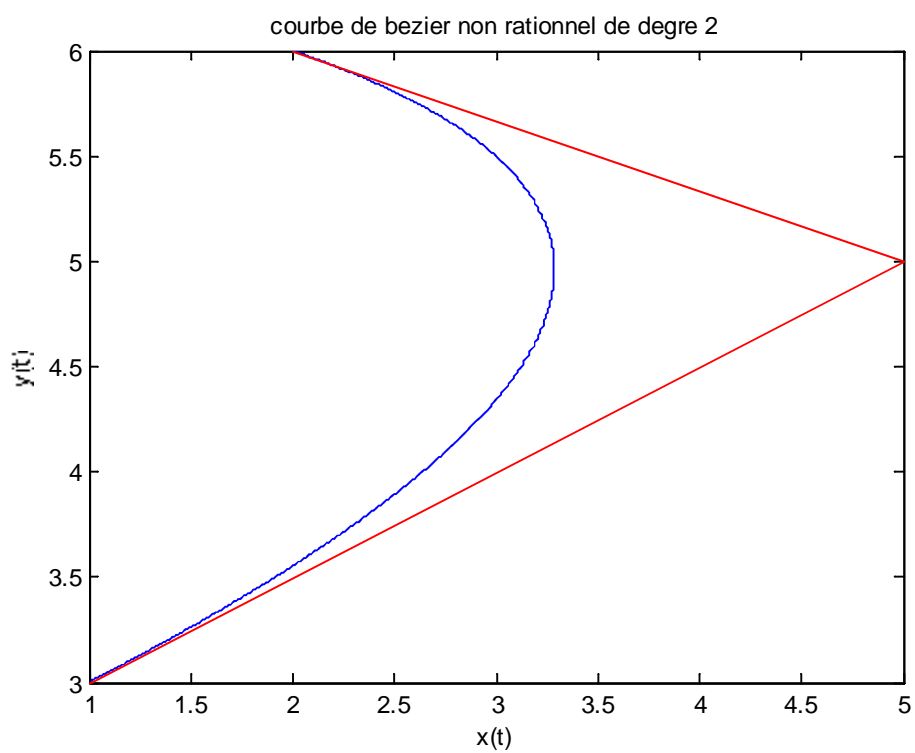
❖ Courbe de Bézier quadratique (de degré 2)

Une courbe de Bézier quadratique est la courbe $B(t)$ définie par les points de contrôle P_0, P_1 et P_2 . Voir **figure ((I-4)**

❖ Courbe de Bézier cubique (de degré 3)

Une courbe de Bézier cubique est la courbe $B(t)$ définie par les points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 . Voir **figure (I-5)**

- On remarque que pour n degré donne $n+1$ points de contrôles
- Pour $t=0$ $B_{i,n} = 0$ et $B_{0,n} = 1$
- Pour $t=1$ $B_{i,n}=0$ et $B_{n,n} = 1$
- La courbe passe par ses deux points de contrôles (les nœuds), le premier et le dernier point donc on peut créer facilement des courbes complexes.

**Figure (I-3) :** courbe de Bézier de degré 1(droite)**Figure (I-4) :** courbe de Bézier de degré 2

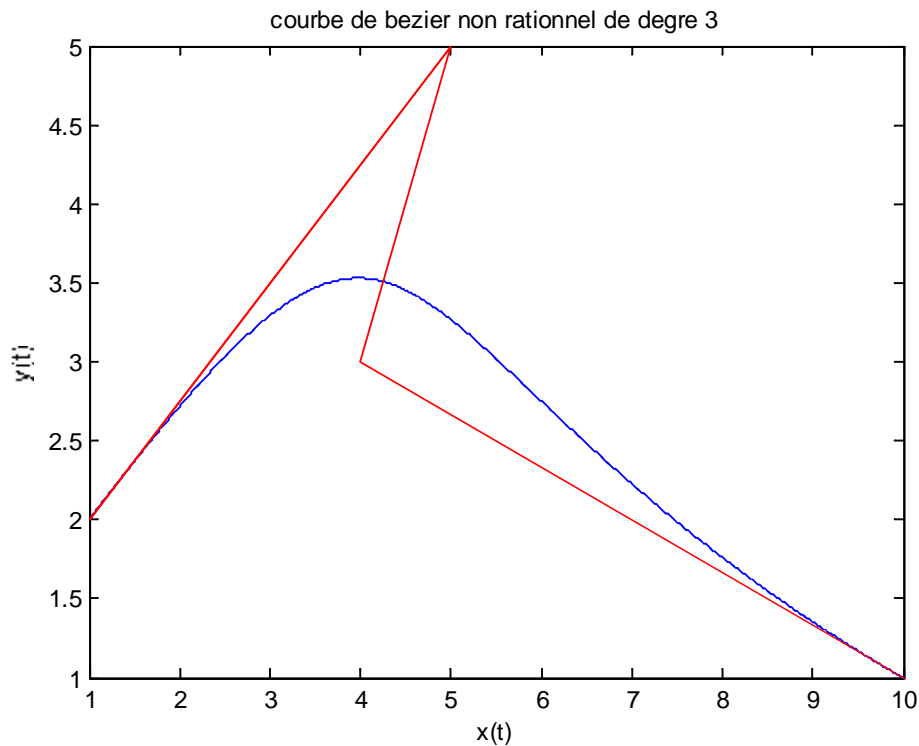


Figure (I-5) : courbe de Bézier de degré 3

I.1.1.2. 4. Influence de changement de points de contrôles sur la forme de la courbe :

A présent, nous allons générer une courbe de Bézier avec 4 points de contrôle :

Les coordonnées des sommets sont :

$$P_i = \{P_0(0,0); P_1(4,6); P_2(9,6); P_3(11,1)\} \text{ voir figure (I-6)}$$

Et on effectuera un déplacement des sommets comme suit :

$$\text{Figure (I-6-1)} : P_i = \{P_0(0,0); P_1(3,6); P_2(9,6); P_3(11,1)\}$$

$$\text{Figure (I-6-2)} : P_i = \{P_0(0,0); P_1(3,3); P_2(9,6); P_3(11,1)\}$$

$$\text{Figure (I-6-3)} : P_i = \{P_0(0,0); P_1(4,6); P_2(8,2); P_3(11,1)\}$$

$$\text{Figure (I-6-4)} : P_i = \{P_0(0,0); P_1(4,6); P_2(9,6); P_3(11,10)\}$$

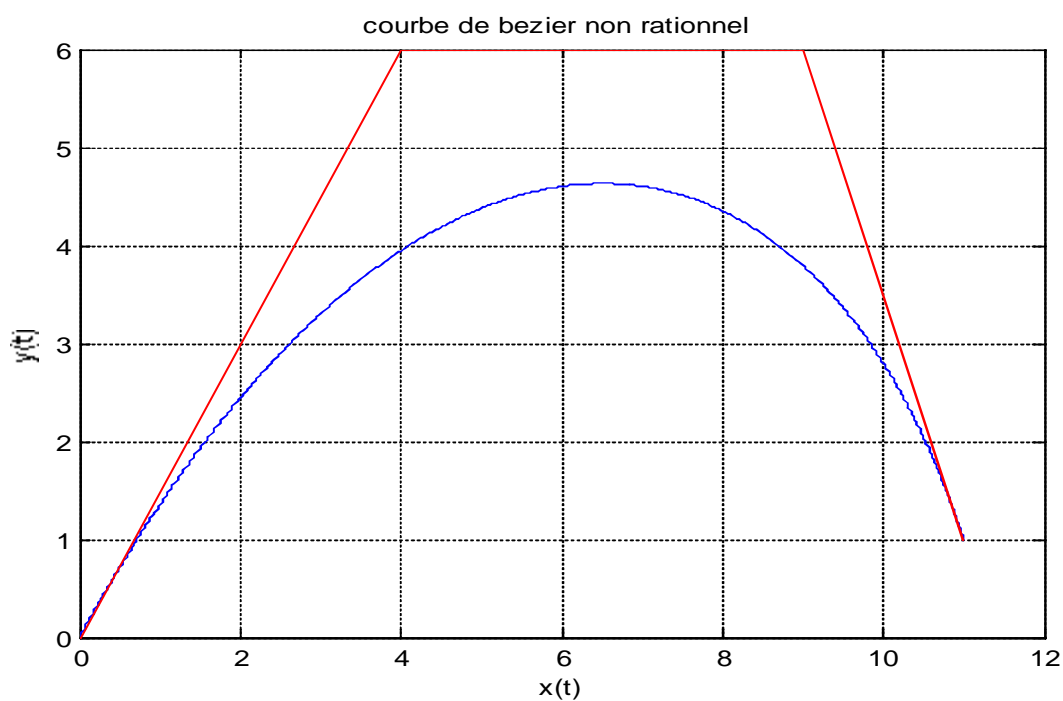


Figure (I-6) : courbe de Bézier non rationnelle

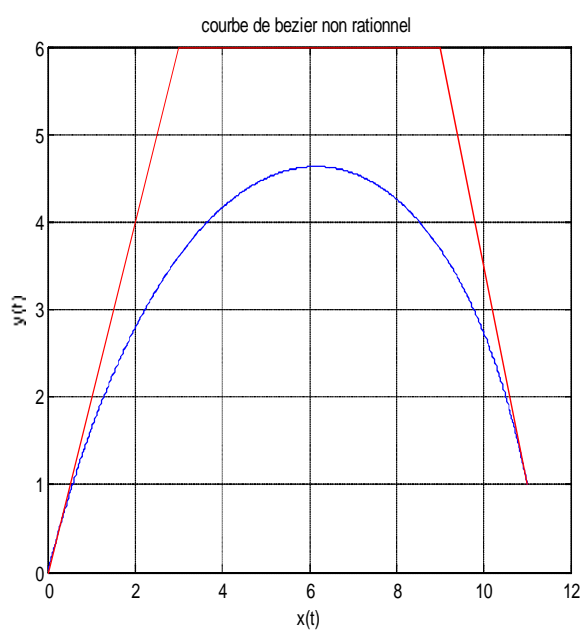


Figure (I-6-1)

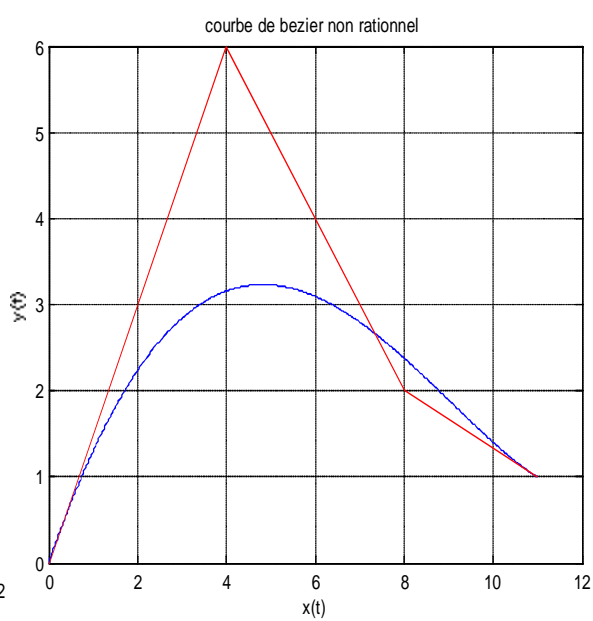


Figure (I-6-2)

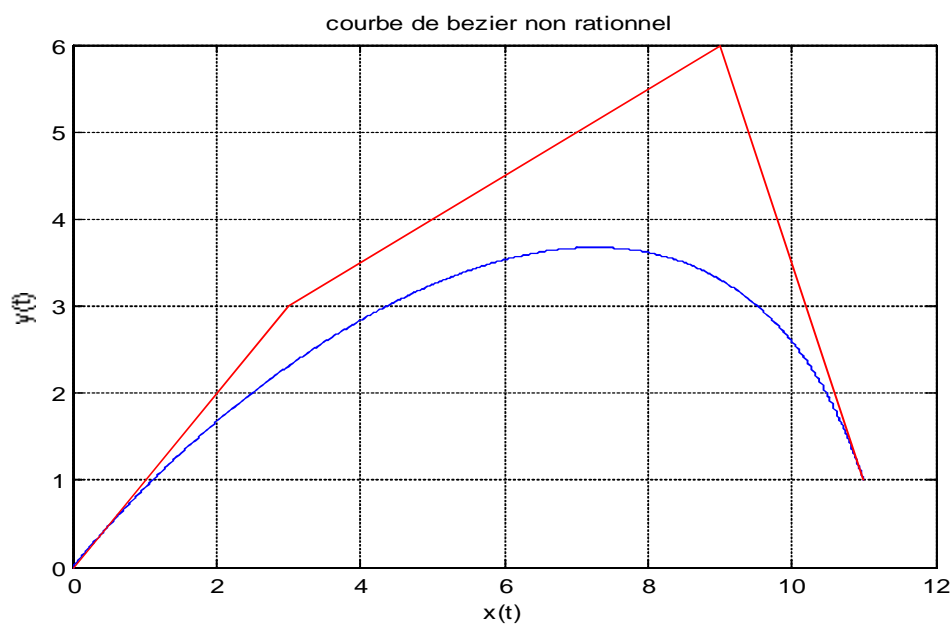


Figure (I-6-3)

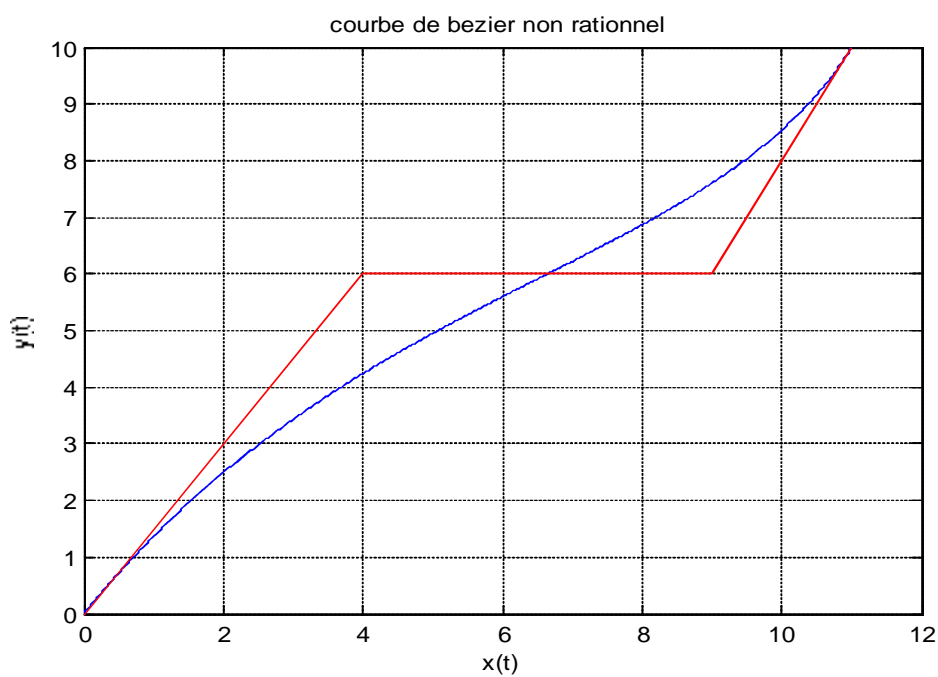


Figure (I-6-4)

L'influence de la courbe est affectée par le déplacement du sommet sauf les deux points extrêmes P_0 et P_3 lorsque le sommet déplacé n'est ni P_0 ni P_3 .

Si le sommet déplacé est l'un des points extrêmes seul l'autre point extrême qui reste inchangé de la courbe et réciproquement [5].

I.1.1.3. Courbe de Bézier rationnelle :

Introduction :

Le modèle de Bézier non rationnelle a des grands problèmes dans la géométrie (incapable de tracer exactement des courbes comme un arc de cercle), donc on fait appel aux courbes rationnelles de Bézier, et la première utilisation de ces modèles remonte à longtemps avec l'intégration de ces courbes de BEZIER rationnelles dans le logiciel « CONSURF ».

On peut considérer que sur chaque forme rationnelle on affecte à chaque point de contrôle un coefficient qui joue le rôle d'un poids (W_i), et donne une influence à chacun des points de définition. Le premier avantage des formes rationnelles est l'aptitude à présenter une classe plus importante de formes (quadratique, conique, cercle, parabole, hyperbole, arc de cercle....etc.) donc à faciliter l'homogénéisation des bases de données des logiciels.

Les modèles géométriques rationnels font appel aux concepts des coordonnées homogènes.

I.1.1.3. 1. Coordonnées homogènes

Le concept général des coordonnées homogènes est d'exprimer des points de l'espace R^N (dimension N) dans un espace R^{N-1} (dimension-1) .

Soit P un point de coordonnées (x, y, w) de R^3 , sa projection est obtenue comme suit:

$$F: R^3 \rightarrow R^2$$

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \end{pmatrix}$$

La division des composantes (x, y) par la troisième composante (w) représente géométriquement une projection conique de sommet de l'origine R^3 avec le plan $w=1$.

L'emploi des coordonnées homogènes en CAO offre plusieurs avantages comme la possibilité de combiner toutes les transformations géométriques courantes (translation, symétrie, rotation).

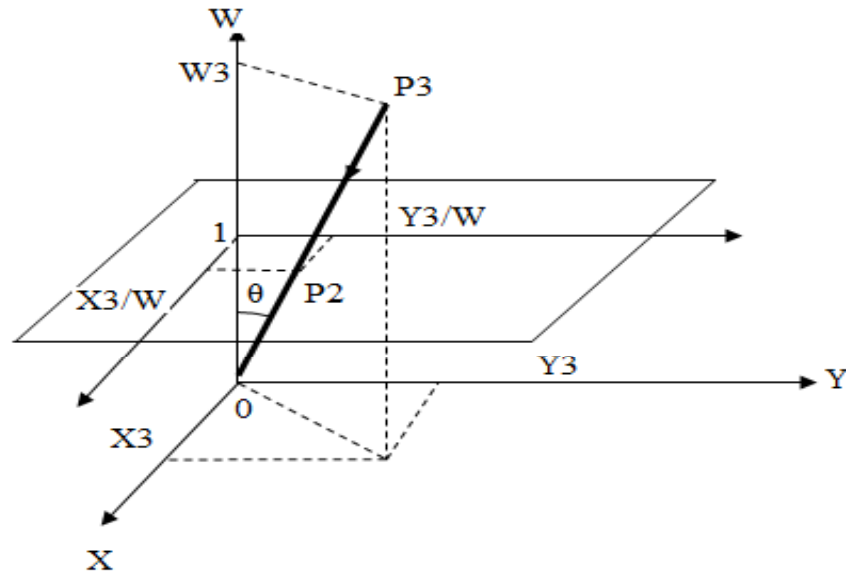


Figure (I-7) : illustration de la transformation homogène entre R^3 et R^2

Définition :

Pour les pôles (P_0, P_1, \dots, P_n) chargés respectivement par les poids (W_0, W_1, \dots, W_n) , la courbe de Bézier rationnelle est définie par l'équation :

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot W_i \cdot P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot W_i} \quad (I.5)$$

$$c(t) = \sum_{i=0}^n S_{i,n}(t) \cdot P_i \quad (I.6)$$

$$S_{i,n}(t) = \frac{B_{i,n}(t) \cdot W_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot W_i} \quad (I.7)$$

Avec :

$S_{i,n}(t)$: polynômes de BERSTEIN rationnels

$B_{i,n}(t)$: Polynômes de BERSTEIN

W_i : Les poids associées aux pôles caractéristiques avec W_i *strictement positif*

$P_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ W_i \end{pmatrix}$: pôles des polygones caractéristiques

Remarque :

La propriété de non négativité des poids W_i pour $t \in [0,1]$ assure que le dénominateur de l'équation est non nul, ce qui évite des singularités à la courbe de Bézier $C(t)$.

Exemple :

On prend les points de contrôle et avec $n=3$

$$P_i = \{P_0(0,0), P_1(1,6), P_2(4,5), P_3(4,0)\}$$

$$W = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

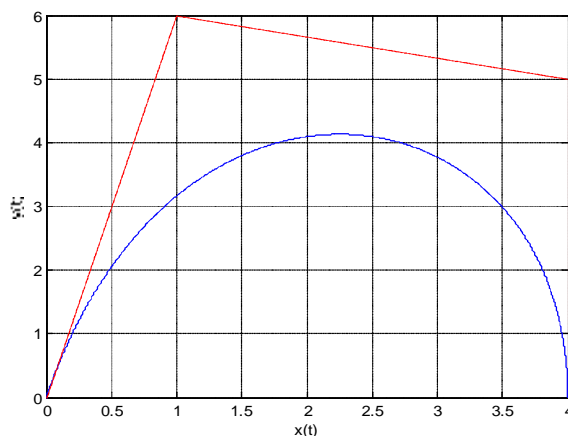


Figure (I-8) : courbe de Bézier rationnelle

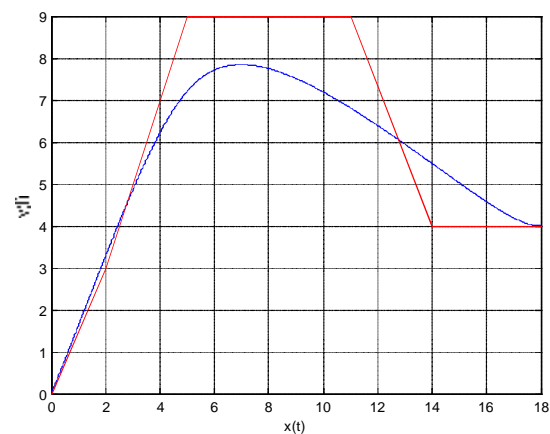


figure (I-9) courbe de Bézier rationnelle

La courbe de Bézier rationnelle représentée dans la figure (I-8) a quatre points de contrôle avec $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$ c'est comme la courbe de Bézier non rationnelle, par contre la figure (I-9) est de degré 5 avec 6 points de contrôles.

Si on compare la figure précédente figure (I-2) page 12 avec la figure suivante (I-9) avec les mêmes points de contrôles P_i , le même polygone caractéristique, avec les poids W_i

$W = [2 \ 10 \ 90 \ 100 \ 200 \ 900]$. On remarque le changement important de la courbe, donc les poids w ont une importance pour la courbe de Bézier rationnelle.

I.1.1.3.2. Propriétés des courbes rationnelles de Bézier

- Toute courbe de Bézier passe par les points de contrôles extrêmes.
- Invariance affine : la transformation affine d'une courbe de Bézier est la courbe passant par la transformée des points.
- Symétrie : la courbe de Bézier rationnelle associée au polygone caractéristique reste

sur la même forme lorsque on inversant les pôles et les vecteurs poids.

- Enveloppe convexe : si les W_i sont tous positifs donc la courbe de Bézier rationnelle appartient à l'enveloppe convexe des points.

I.1.1.3.3. Influence des poids (w_i) sur la forme de la courbe rationnelle

- ❖ Si on augmente un poids W_i la courbe se rapproche du point P_i associée

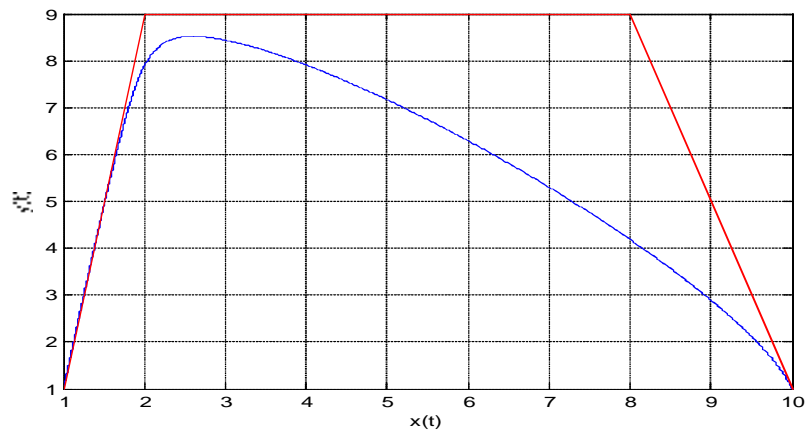


Figure (I-10) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 9 \ 1 \ 1]$

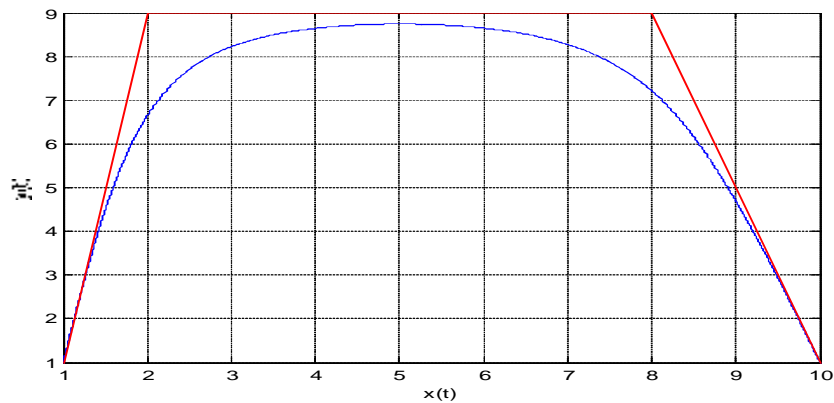


Figure (I-11) : courbe de Bézier rationnelle avec $w = [1 \ 10 \ 10 \ 1]$

- ❖ Si on change le signe des poids W_i (négatifs), la courbe s'éloigne du point P_i associé, voir la figure suivante

- ❖ A proximité d'une extrémité de la courbe, le changement du signe d'un poids peut changer le sens de la tangente de la courbure.

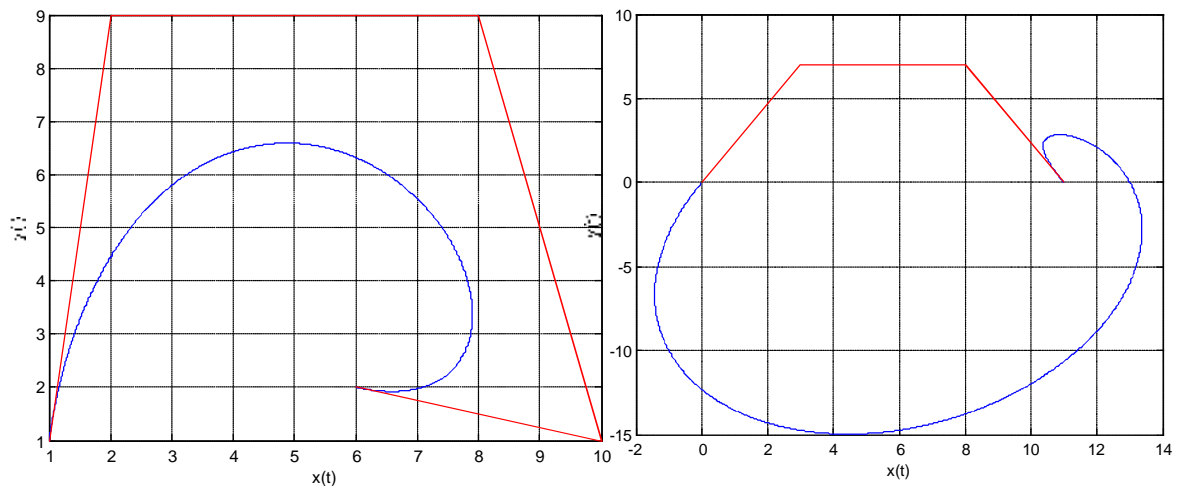


Figure (I-12-1) : courbe de Bézier rationnelle **figure (I-12-2):** courbe de Bézier rationnelle

avec $W = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$

avec $W = [1 \ -1 \ 1 \ 1]$

- ❖ Si $W_i = 0$ le point P_i associé va perdre toute influence sur la forme de la courbe, et les figures ci-dessous **Figure (I-13-1)** et **Figure (I-13-2)** montrent le changement et l'influence pour des poids nuls pour les mêmes points de contrôles sur la courbe :

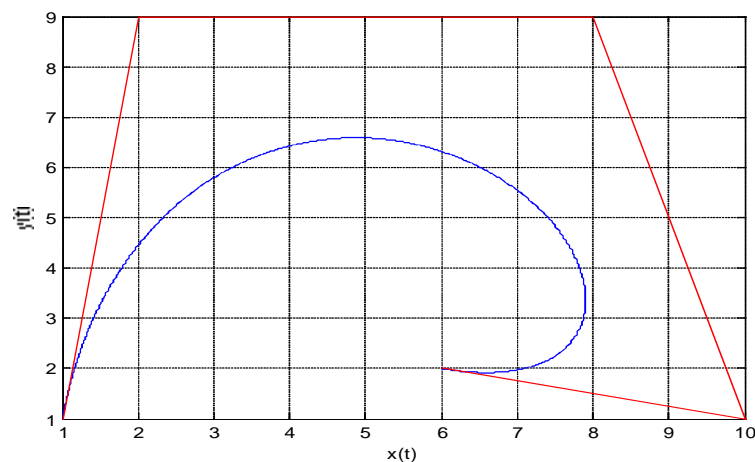


Figure (I-13) : courbe de Bézier rationnelle avec $W = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

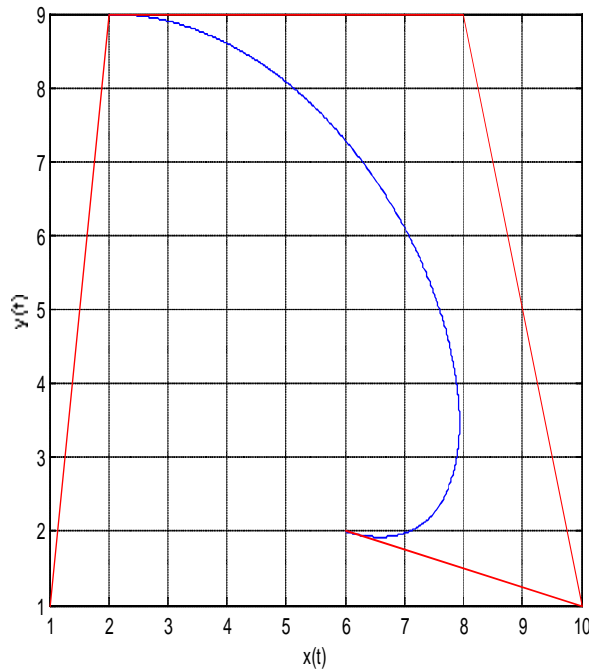


Figure (I-13-1)

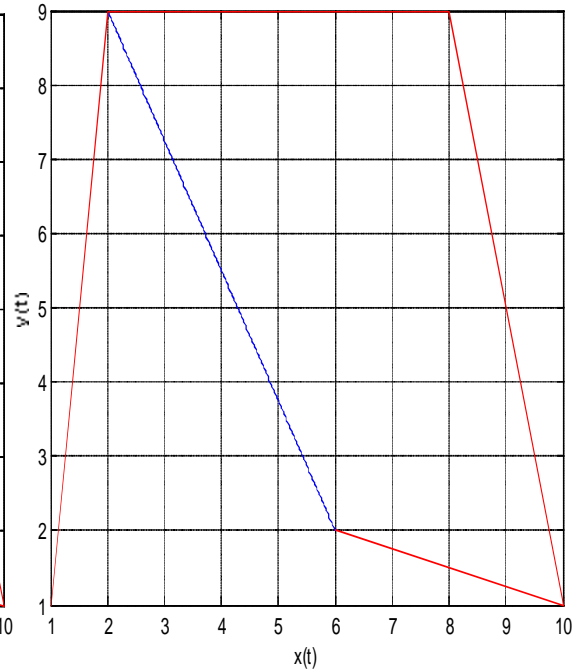


Figure (I-13-2)

Figure (I-13-1) : courbe rationnelle de Bézier avec $W = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

Figure (I-13-2) : courbe rationnelle de Bézier avec $W = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$

Remarque: nous remarquons que la modification des poids W_i a une grande influence sur la forme de la courbe même si on peut obtenir cette modification par une modification des points de contrôle (P_i) mais la modification des poids est plus souple et simple à mettre en œuvre dans la pratique.

I.1.1.3. Modélisation des surfaces :

I.1.1.3.1. Surfaces de Bézier non rationnelles :

Dans le cadre de la modélisation géométrique, le déplacement et la déformation d'une courbe génératrice qui est une courbe de Bézier, déterminée par son polygone caractéristique P_{Gm} , chaque sommet S_i décrit une courbe D_i , appelée directrice, présentée également par une courbe de Bézier de degré n .

On peut dire que l'extension directe des courbes de Bézier nous ramène vers les surfaces de Bézier.

Définition :

La surface de Bézier non rationnelle est le produit cartésien de deux familles de courbe de Bézier suivant deux directions avec deux paramètres descripteurs u et v .

La surface de Bézier est définie par l'expression :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \cdot P_{i,j} \quad (I.8)$$

$B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$: sont les p polynômes de BERSTEIN avec $u \in [0,1]$ et $v \in [0,1]$

$P_{i,j}$: Les pôles du réseau caractéristique (les points de contrôles) avec

- $i \in [0, \dots, n]$
- $j \in [0, \dots, m]$

Les points de contrôle associés à la surface de Bézier sont aussi les points de contrôle correspondant à un ensemble de courbes de Bézier.

L'expression $s(u, v)$, peut l'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$S(u, v) = [B_{0,n}(u), B_{1,n}(u), \dots, B_{n,n}(u)] \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,0} & \dots & P_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,m}(v) \\ \vdots \\ B_{m,m}(v) \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

Exemple : la figure suivante montre une surface de Bézier non rationnelle et son réseau caractéristique :

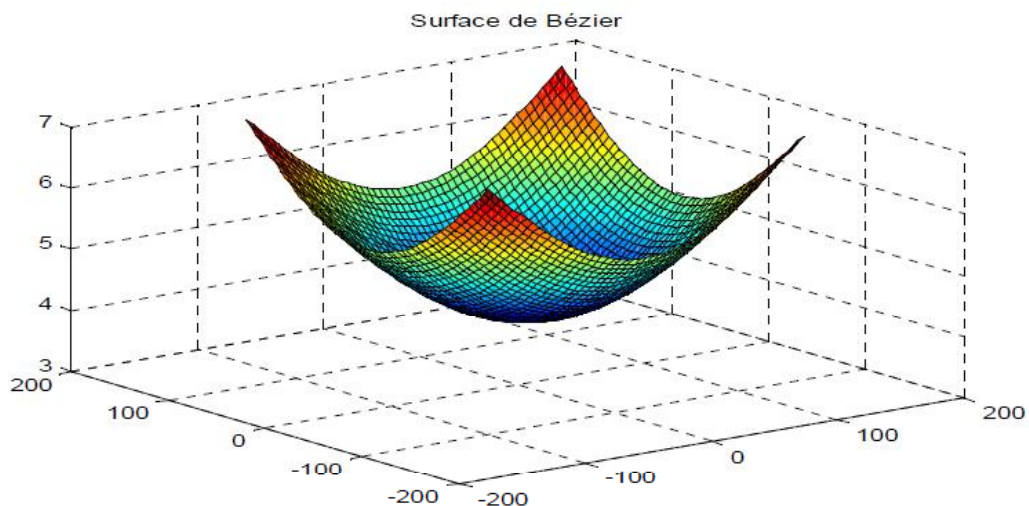


Figure (I-14) : surface de Bézier non rationnelle

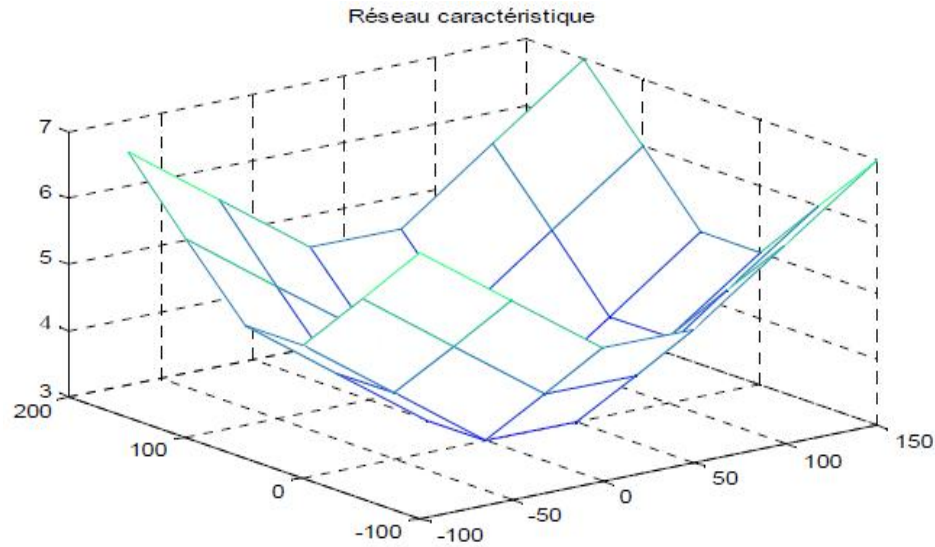


Figure (I-15) : réseau caractéristique de surface de Bézier non rationnelle

I.1.1.3.1 Propriétés de surfaces de Bézier non rationnelles :

- ❖ La positivité : $B_{i,n}(u)B_{j,m}(v) \geq 0$ i, j, u et v .
- ❖ La surface passe par les quatre points extrêmes (interpolation).
- ❖ Enveloppe convexe : la surface de Bézier est contenue à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôles.
- ❖ Partition unité : $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) = 1$.

I.1.1.3.2. Surface de Bézier rationnelle :

La surface de Bézier rationnelle se construit de la même manière à celle de Bézier non rationnelle en ajoutant les degrés supplémentaires (les poids).

Les surfaces rationnelles de Bézier sont le produit cartésien de deux familles de courbes rationnelles suivant deux directions u et v .

L'expression des surfaces de Bézier rationnelles s'écrit par l'équation suivante :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \cdot P_{i,j} \cdot W_{i,j}}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) \cdot \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) \cdot P_{i,j} \cdot W_{i,j}} \quad (I.9)$$

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m G_{i,n}(u) \cdot G_{j,m}(v) \cdot P_{i,j} \quad (I.10)$$

$P_{i,j}$: Les points de contrôle avec $i \in [0, n]$ et $j \in [0, m]$

$B_{i,n}(u)$ et $B_{j,m}(v)$: sont les polygones de BERSTEIN avec $u \in [0,1]$ et $v \in [0,1]$

$W_{i,j}$: sont les poids associés à la surface

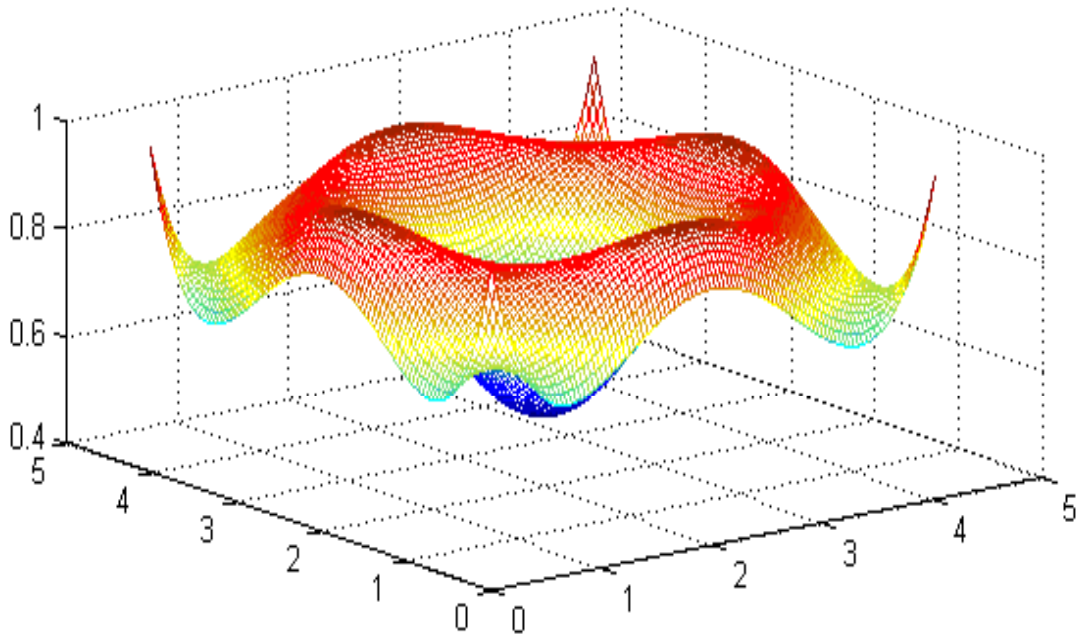


Figure (I-16): surface de Bézier rationnelle

I.1.1.3.2.1. Influence des poids sur les surfaces de Bézier rationnelle :

Le comportement de la surface vis-à-vis de son réseau caractéristique est le même que celui de la courbe de Bézier rationnelle envers son polygone de contrôle.

Si on augmente le poids ou plusieurs points de réseau caractéristique la surface se rapproche de ces points et si on les diminue la surface s'éloigne. En changeant la valeur de poids W sur un point de contrôle, tous les points de la surface se déplacent sauf les quatre points extrêmes de la surface là où elle coïncide avec le réseau caractéristique.

Les figures ci-dessous montrent le comportement de la surface en changeant les valeurs des vecteurs poids $W_{i,j}$ et tout en gardant le même réseau caractéristique.

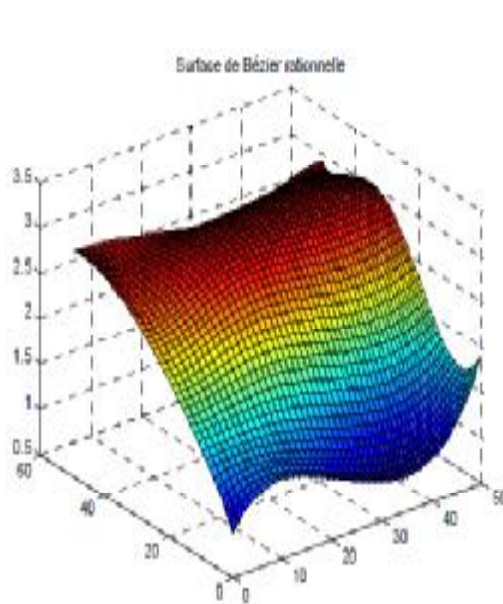


Figure: (I-17-1)

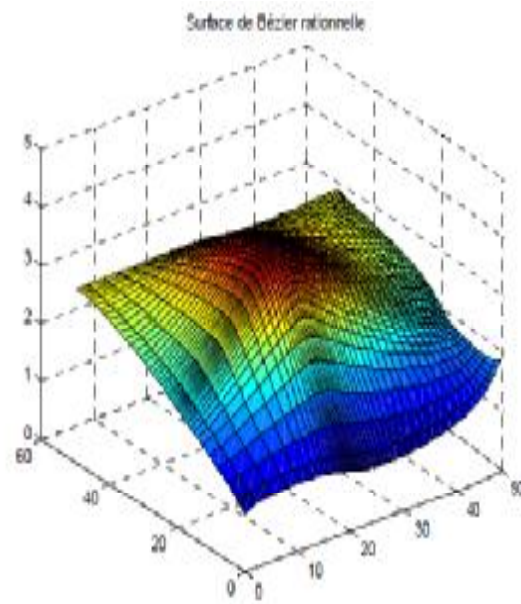


figure: (I-17-2)

Figure (I-17-1): surface de Bézier rationnelle avec les poids $W_i=W_j=[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$

Figure (I-17-2): surface de Bézier rationnelle après le changement des poids $W_i=[1\ 1\ 10\ 1\ 1\ 1]$
 $W_j=[1\ 1\ 10\ 1\ 1\ 1]$

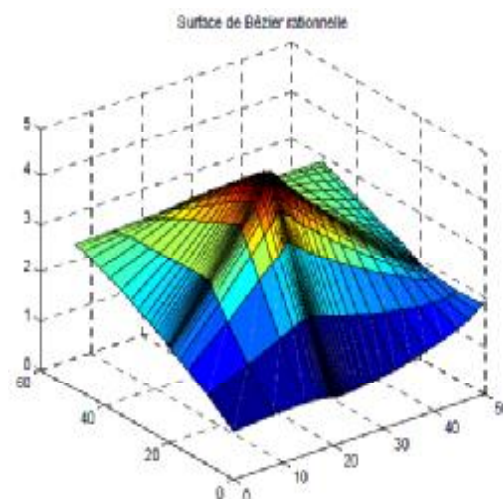


Figure (I-17-3)

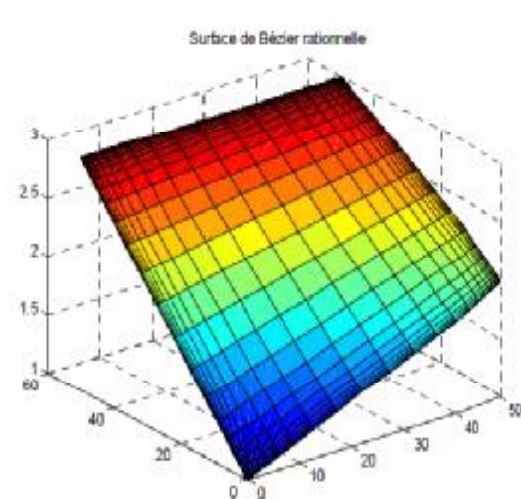


figure (I-17-4)

figure (I-17-3) : surface de Bézier rationnelle avec $W_i=[1\ 1\ 100\ 1\ 1\ 1]$, $W_j=[1\ 1\ 100\ 1\ 1\ 1]$

Figure (I-17-4) : surface de Bézier rationnelle avec $W_i=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$, $W_j=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$

L'inconvénient des courbes de Bézier définies précédemment est que les formes de l'objet sont définies par les points de contrôles, la modification par le biais de points de contrôle, le changement local d'un de ces points perturbe l'allure globale de la courbe.

Mais il existe un modèle qui permet de répondre à ces inconvénients de Bézier qui est le modèle de B-Spline.

I.1.2. Modèle B-SPLINE NON RATIONNEL :

Introduction :

La définition de courbes polynomiales par morceau (B-spline) permet de répondre aux insuffisances du modèle de Bézier, car elle offre une grande flexibilité et une grande précision. Les B-Spline (basis spline) ont été proposées par De Boor (1972) et utilisées pour la première fois par Riesenfeld dans des applications CAO en 1973 [2]

Il s'agit de construire une courbe sans les inconvénients des courbes de Bézier, la courbe B-SPLINE devra approximer les points de contrôle, simple à manipuler, et avoir les mêmes propriétés que les courbes de Bézier. La modification d'un point de contrôle ne changera pas l'allure de la courbe, et le degré de la courbe n'est pas proportionnel au nombre de points de contrôle (mais fixe). L'idée principale des B-SPLINE est de remplacer les polynômes de BERNSTEIN par des fonctions, ensuite, nous sommerons ces fonctions avec les points de contrôles pour obtenir la courbe. Une courbe B-SPLINE ne dépend pas uniquement des points de contrôles mais aussi d'un vecteur nœud. [5]

Définition :

Les courbes B-Spline sont définies à partir d'une combinaison linéaire des fonctions polynomiales (fonctions de base) d'une manière analogue à celles de Bézier qui sont définies à base des polynômes de Bernstein. [3]

I.1.2.1.Nœud et vecteur nodal :

Soit $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$ une suite de valeurs $m+1$ entiers naturels, telle que cette suite soit décroissante ($\xi_{i-1} \leq \xi_i$), ces valeurs sont des nœuds, et l'élément $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ est appelé vecteur nœud ou vecteur nodal. il existe deux familles de vecteurs nodaux :

I.1.2.1.1 Vecteur uniforme : un vecteur nodal est dit uniforme si l'espace entre ses nœuds est régulier $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$

I.1.2.1.2. Vecteur non uniforme : un vecteur nodal est dit non uniforme si l'espace entre ses nœuds est non régulier $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2]$.

I.1.2.2. Multiplicité des nœuds :

La multiplicité d'un nœud est le nombre de fois qu'il apparaît dans une séquence nodal

$\Xi = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$.

La multiplicité du nœud 0 est égale à 2, et la multiplicité du nœud 1 est égale à 1, et la multiplicité de 2 est égale à 3.

I.1.2.3. Fonction de base B-SPLINE :

Les B-SPLINE sont des fonctions polynomiales par morceau qui possèdent une classe de continuité donnée, elles sont construites à partir d'un ensemble de coordonnées dans l'espace paramétrique $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ ou :

- $\xi_i \in \mathbb{R}$ est le $i^{ème}$ nœud.
- i est l'indice, $i=1,2,\dots,m$
- m est l'ordre de fonction.

Les fonctions de l'ordre m données quelconques sont définies récursivement à l'aide de la formule de COX-de BOOR à partir du vecteur nœud Ξ [5]

La définition récursive des fonctions B-SPLINE est donnée par la formule suivante :

$$N_{t,m}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+m} - \xi_i} \cdot N_{t,m-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+m+1} - \xi}{\xi_{i+m+1} - \xi_{i+1}} \cdot N_{t+m,m-1}(\xi) \quad (I.11)$$

$$\xi \in [\xi_{t+1}, \xi_{t+m+1}]$$

Pour l'ordre $m=0$:

$$N_{t,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_t \leq \xi \leq \xi_{t+1} \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (1.12)$$

Si le numérateur et le dénominateur sont nul ensemble ou le dénominateur est nul, la formule

$$N_{i,m}(\xi) \text{ est nulle, donc } \frac{0}{0} = 0$$

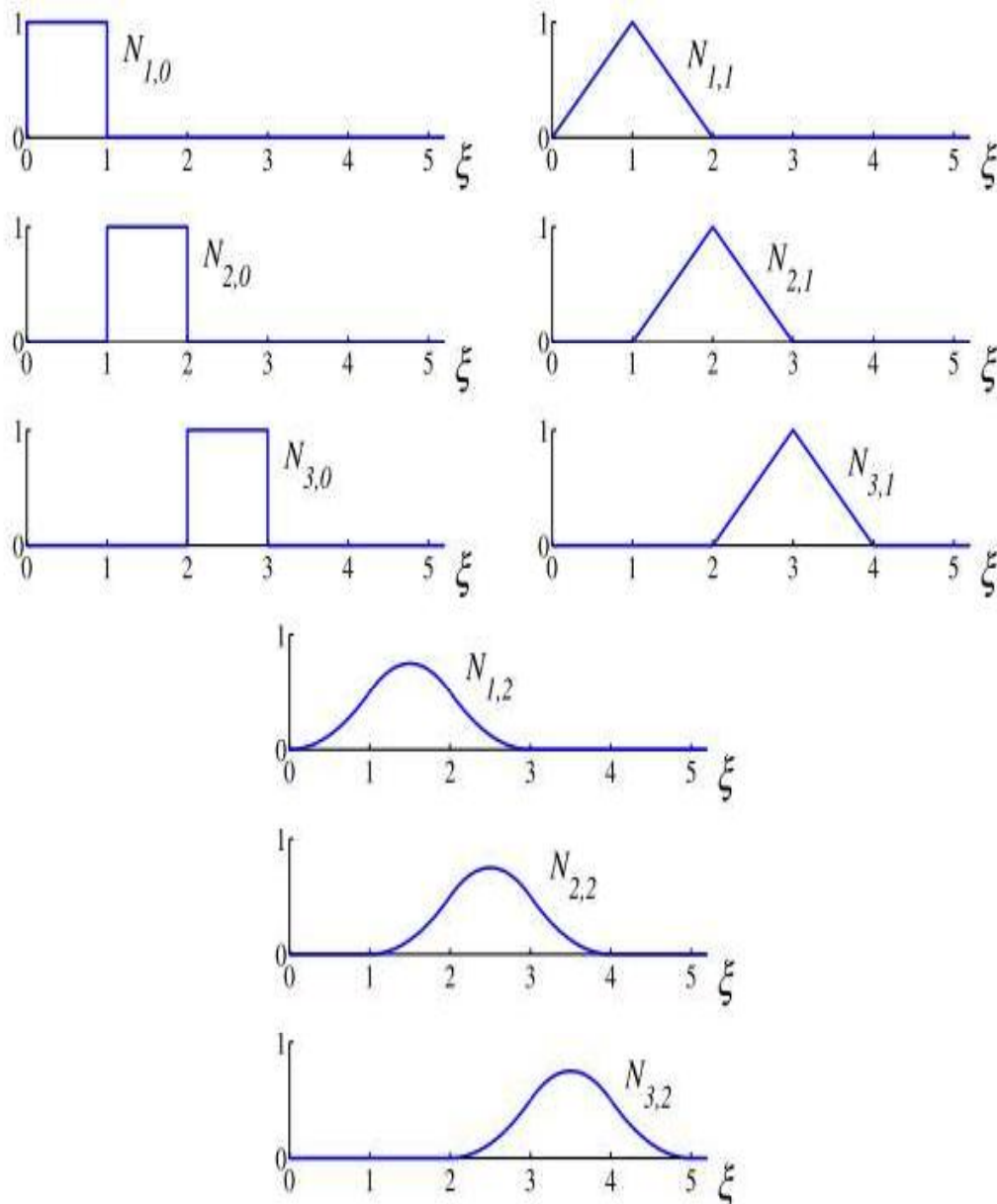


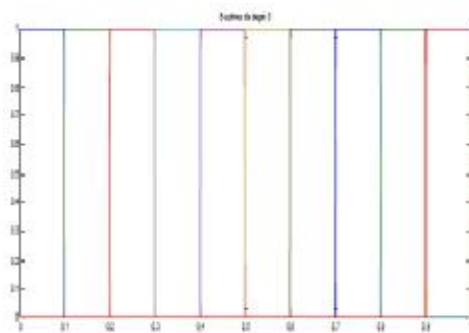
Figure (I-18): fonctions de base de l'ordre 0, 1, 2, 3 pour le vecteur uniforme $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$

I.1.2.4. Différents types de fonctions B-Spline :

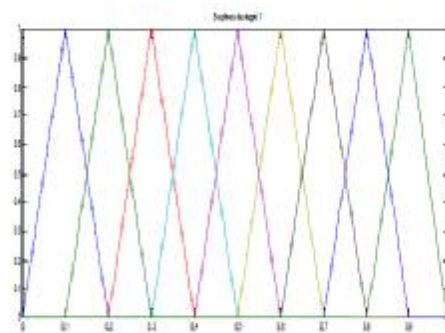
I.1.2.4.1. B-Splines uniforme :

On appelle B-spline uniforme les fonctions de base dont la courbe est construite à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds est constant.

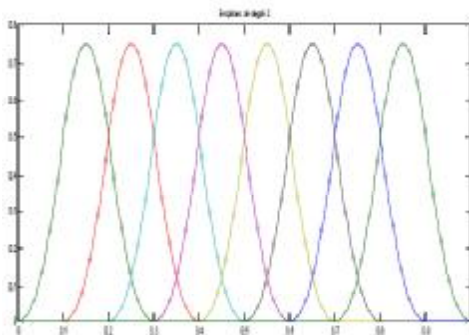
Exemple :



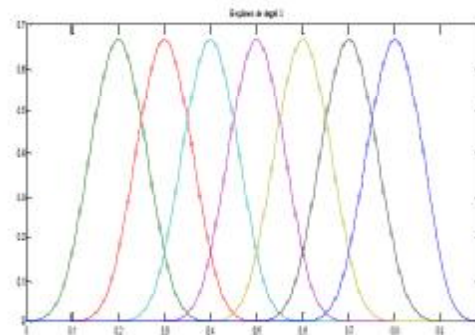
a. Dix fonctions B-splines de degré 0



b. neuf fonctions B-splines de degré 1



c. Huit fonctions B-splines de degré 2



d. Sept fonctions B-splines de degré 3

Figure (I-19-a-b-c-d): fonctions B-Spline uniformes de degré 0 à 3

I.1.2.4.2. B-Spline non uniforme :

On appelle B-spline non uniforme les fonctions de base dont la courbe est construite à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds successifs n'est pas constant.

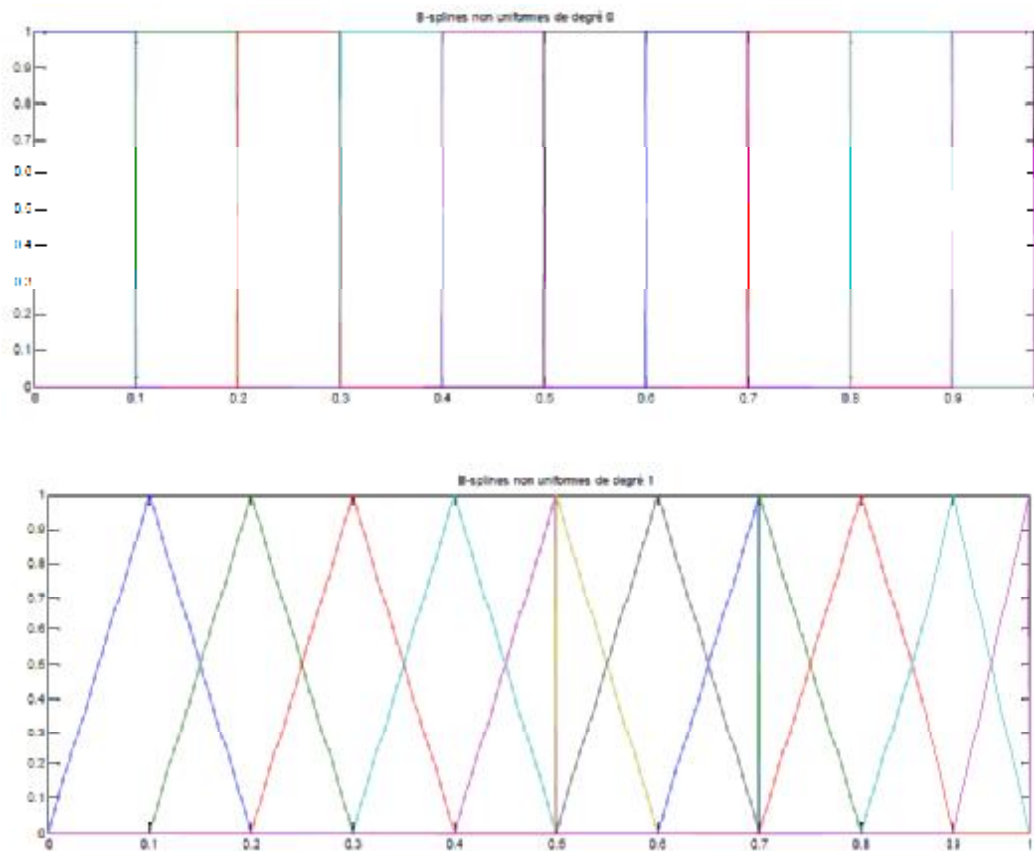


Figure (19-f-g) : fonctions B-Spline non uniforme de degré 0 et 1 et de vecteur nodal

$$\Xi = [0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1]$$

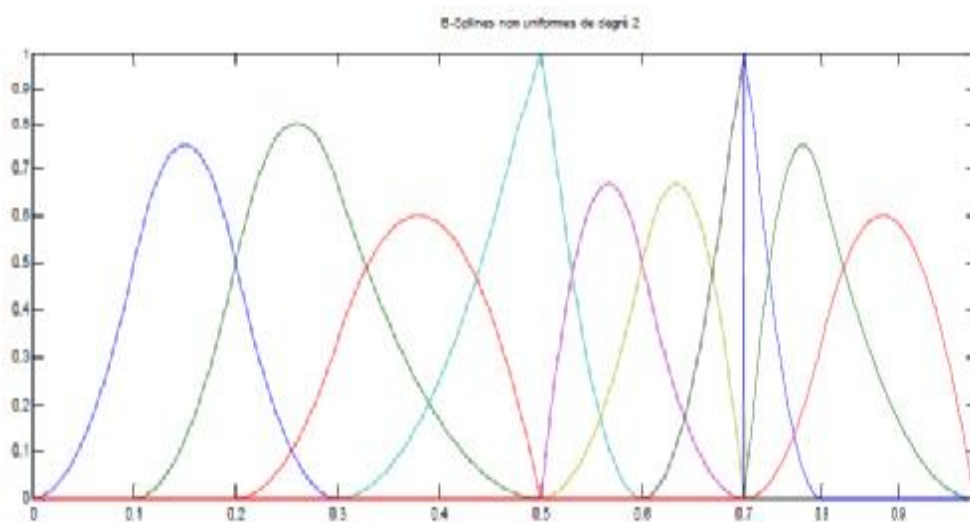


Figure (I-20) : fonctions B-Spline non uniforme de degré 2 et de vecteur nodal

$$\Xi = [0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$$

I.1.2.5. Propriétés des fonctions de base :

- Le vecteur des nœuds influe principalement sur la propriété de continuité et de dérivabilité.
- Chaque intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ définit un arc de courbe délimité par les points (ξ_i) et (ξ_{i+1}) .
- Support local : si les fonctions $N_{i,m}(\xi)$ s'annulent, il n'y aura aucune influence en dehors de l'intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.
- La positivité : $N_{i,m}(\xi) \geq 0 \quad i=1, 2, 3, \dots, n$.
- La base constitue une partition unité $\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) = 1 \quad \forall \xi$.

I.1.2.6. Courbes B-SPLINE :

I.1.2.6.1. Courbes B-SPLINE non rationnelles uniformes :

Pour construire des courbes B-SPLINE, on fait appel aux fonctions B-SPLINE définies précédemment. Le choix d'un vecteur nœud va permettre d'introduire des éléments de discontinuité agissant sur la forme de la courbe.

La courbe de B-SPLINE est définie à partir de $n+1$ points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ par la formule suivante :

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(\xi) \cdot P_i \quad (\text{I.13})$$

P_i : Les pôles du polygone de contrôle

$N_{i,m}(\xi)$: Fonction de base de degré m

Exemple : courbe B-Spline non rationnelle

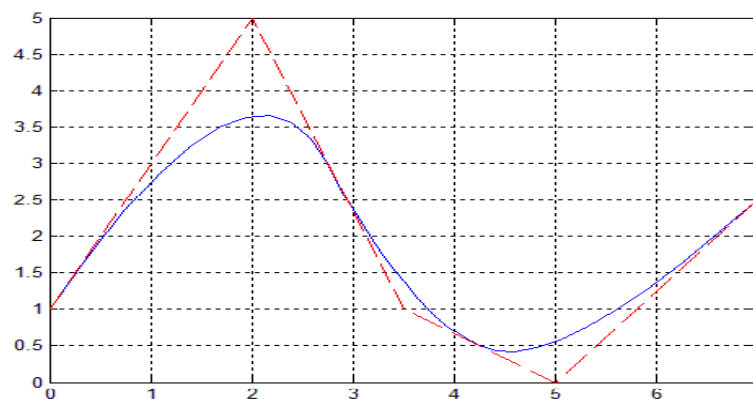


Figure (I-21) : courbe B-Spline non rationnelle

I.1.2.6.2. Propriétés des courbes B-Spline non rationnelles

Les courbes B-Spline non rationnelles présentent les propriétés suivantes:

- ✎ Enveloppe convexe: la courbe est contenue dans une enveloppe convexe des pôles.
- ✎ Contrôle local : le déplacement d'un pôle engendre une déformation locale de la courbe.
- ✎ Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la courbe si elle est appliquée au polygone caractéristique.
- ✎ La courbe B-spline non rationnelle coïncide avec son polygone caractéristique au premier et au dernier point de contrôle.
- ✎ La courbe B-spline est p fois continument dérivable ($p=m-k$).

En plus de ces propriétés on trouve une propriété de diminution de variation, cette propriété est particulière en comparaison avec le comportement d'une courbe représenté par les polynômes standards de Lagrange. On prend l'exemple illustré sur la figure (I-13). On note qu'en mesure que l'ordre augmente l'amplitude des oscillations augmente également, par contre les courbes B-Spline se comportent très différemment. Cette propriété mène les courbes B-spline à avoir une très grande utilité dans l'analyse. [7]

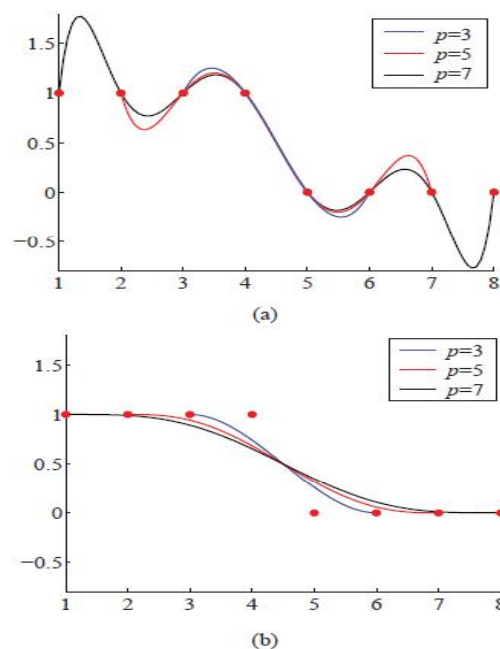


Figure (I-22) : comparaison entre l'interpolation de Lagrange et B-Spline

a) Interpolation de Lagrange

b) interpolation B-SPLINE

I.1.2.6.3. Surface B-SPLINE non rationnelle :

Comme on a vu pour la définition des surfaces de Bézier non rationnelles, la surface B-SPLINE est une extension directe des courbes B-SPLINE non rationnelles suivant deux directions u et v .

Une surface B-SPLINE non rationnelle de degré (p, q) est définie par :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \cdot P_{i,j} \quad (\text{I.14})$$

$N_{i,p}(\xi)$ et $N_{j,q}(\eta)$: Comme fonction de base B-SPLINE

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$$

$$H = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}$$

Ξ Et η sont deux vecteurs nodaux

$$u \in [\xi_0, \xi_{n+p+1}] \text{ et } v \in [\eta_0, \eta_{m+q+1}]$$

On peut même écrire l'expression (I.14) sous forme matricielle :

$$S(\xi, \eta) = [N_{0,p}(\xi), N_{1,p}(\xi), \dots, N_{n,p}(\xi)] \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,0} & \dots & P_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{0,q}(\eta) \\ \vdots \\ N_{m,q}(\eta) \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

Exemple : surface B- Spline non rationnelle

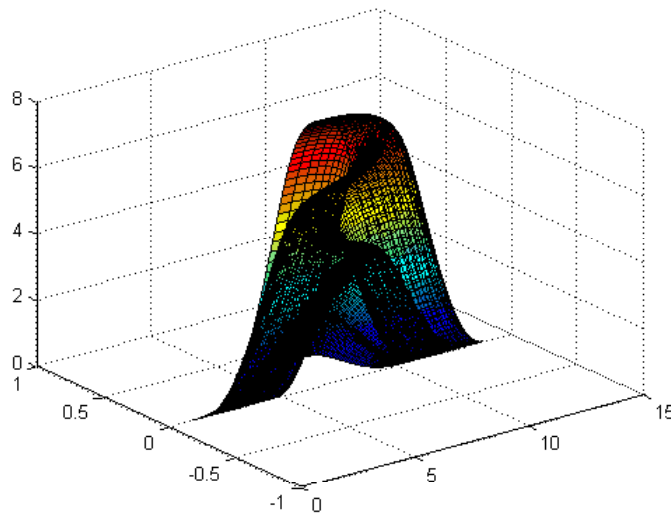


Figure (I-23) : surface B-Spline non rationnelle

I.1.2.6.4. Propriétés des surfaces B-SPLINES :

- ❖ Non négativité (la positivité) $N_{i,n}(\xi)N_{j,m}(\eta) \geq 0, \forall i, j, \xi, \eta$.
- ❖ Partition unité $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m N_{i,n}(\xi)N_{j,m}(\eta) = 1 \quad \forall \xi \text{ et } \eta$.
- ❖ Enveloppe convexe : la surface $S(\xi, \eta)$ est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôles.
- ❖ Si $n \geq 0$ et $m \geq 0$ alors $N_{i,n}(\xi)N_{j,m}(\eta)$ atteint exactement une seule valeur maximale.
- ❖ Modification locale : si on change les coordonnées d'un point $P_{i,j}$ seulement le rectangle $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ qui sera modifié.
- ❖ Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la surface si elle est appliquée aux pôles.

I.1.2.7. Modèle B-Spline rationnel NURBS :

Le modèle B-SPLINE rationnel non uniforme (NURBS) est actuellement une des formes mathématiques les plus employées pour la description des surfaces géométriques complexes.

Les NURBS ont des propriétés géométriques et analytiques excellentes, et c'est pour cette raison que les NURBS sont entrés rapidement dans le système CAO et CFAO.

Les NURBS correspondent à une généralisation de B-SPLINE.

Et comme des courbes et surfaces (cercle, ellipse, hyperbole et cône) et les sphères, surfaces de révolutions peuvent être représentés précisément par les B-SPLINE. Les NURBS répondent et résolvent ces problèmes de géométrie.

I.1.2.7.1 Fonction de base de NURBS :

Par la formule mathématique suivante, on définit la fonction NURBS :

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi).W_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi).W_i} \quad (\text{I.16})$$

$N_{i,m}(\xi)$: Fonction de base B-SPLINE

W_i : Les poids

I.1.2.7.2. Propriétés de base de NURBS :

- ❖ le non négativité : $R_{i,m}(\xi) \geq 0$ pour toutes valeurs i, m, ξ .
- ❖ partition unité : $\sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}]$.
- ❖ invariance affine.
- ❖ si tous les poids sont égaux, les NURBS deviennent des B-SPLINE.
- ❖ la dérivabilité : toutes les dérivées des fonctions $R_{i,m}(\xi)$ existent (pour un nœud de

multiplicité k elles sont $(m-k)$ fois continument dérivables.

I.1.2.7.3. Dérives des fonctions NURBS :

On a la fonction de NURBS

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi) \cdot W_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) \cdot W_i} \quad (I.17)$$

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) \cdot W_i, \text{ et } w'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,m}(\xi) W_i$$

$$\frac{d}{dt} R_{i,m}(\xi) = W_i \frac{w(\xi) N'_{i,m}(\xi) - w'(\xi) N_{i,m}(\xi)}{(w(\xi))^2} \quad (I.18)$$

La dérivée de B-SPLINE :

$$N'_{i,m}(\xi) = \frac{d}{dt} R_{i,m}(\xi) = \frac{m}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(\xi) - \frac{m}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(\xi)$$

D'une manière générale pour $k^{ème}$ dérivée on a la formule générale suivante :

$$\frac{d^k}{dt^k} R_{i,m}(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} w^j(\xi) \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} R_{i,m}(\xi)}{w(\xi)} \quad (I.19)$$

$$\text{Avec : } w^j(\xi) = \frac{d^j}{dt^j} w(\xi) \quad \text{et} \quad A_i^{(n)}(\xi) = w_i \frac{d^n}{dt^n} N_{i,m}(\xi)$$

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$$

Et on peut généraliser la dérivée de fonction NURBS pour dériver la fonction de base B-SPLINE pour $k^{ème}$ dérivée

$$\frac{d^k}{dt^k} N_{i,m}(\xi) = \frac{m}{t_{i+m} - t_i} \left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} N_{i,m-1}(\xi) \right) - \frac{m}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} N_{i+1,m-1}(\xi) \right) \quad (I.20)$$

Les fonctions de base NURBS sont des fonctions liées aux fonctions de base B-Spline, donc leurs dérivées dépendent des dérivées des fonctions de base B-Spline.

La figure qui suit montre les dérivées NURBS et celle des B-Spline.

Sur la figure on trouve.

- a)- fonctions de base B-Spline, b)- leurs 1^{ère} dérivées, c)-leurs 2^{ème} dérivées,
- d)-fonctions de base NURBS, e)-leurs 1^{ère} dérivées,
- f)-leurs 2^{ième} dérivées.

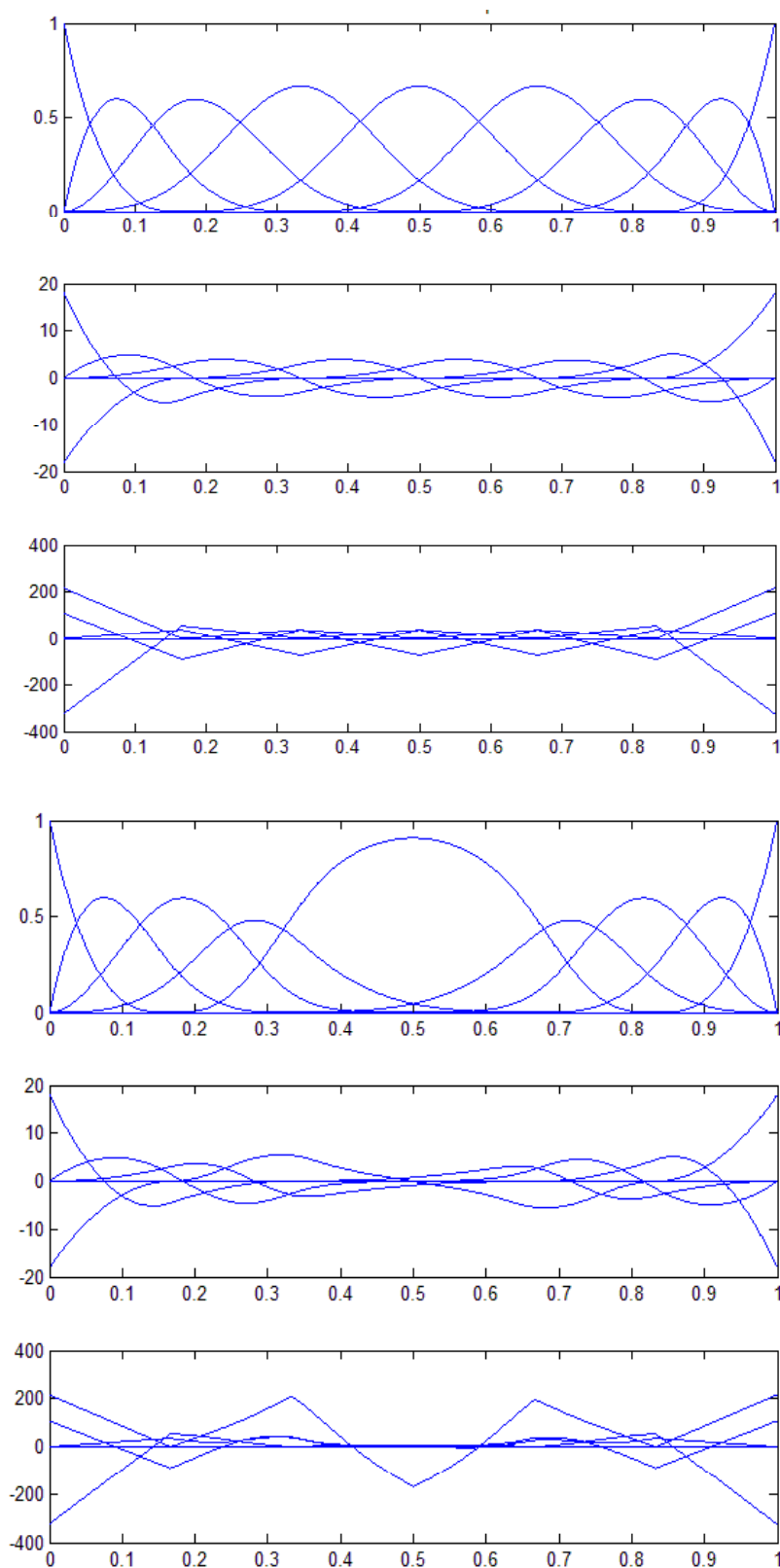


Figure (I-24) : 1^{ère} et 2^{ème} dérivées des fonctions de base B-Spline et NURBS

I.1.2.8. Courbes de NURBS

Définition :

Soit Ξ un vecteur nœuds, soit p un polygone de contrôle dans R^n et w_i des poids attachés à chaque point de contrôle P_i et on suppose que les poids ne sont pas tous nul.

La courbe de NURBS de degré m est définie par la formule suivante :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi) \cdot P_i \quad (I.21)$$

Avec : $R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) \cdot w_i}$ fonction de NURBS

P_i : Les points de contrôles

w_i : Les poids associés aux pôles

m : Degré des fonctions NURBS

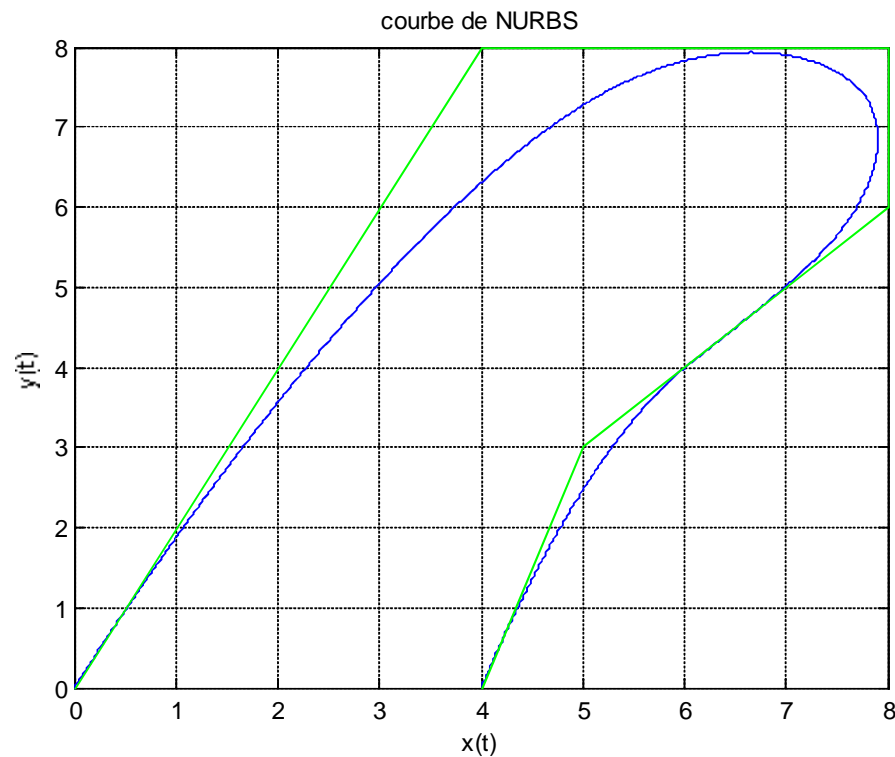


Figure (I-24) : courbe NURBS avec $w = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$

I.1.2.8. 1. Propriétés géométriques des courbes NURBS

- Représentation des coniques: en choisissant correctement les points de contrôles toute forme conique peut être représentée exactement par une NURBS.
- Invariance affine: la transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points de contrôle.
- Invariance projective: contrairement aux courbes B-Spline l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points. (Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection).
- Dérivation et continuité: pour tout ξ qui n'est pas une valeur nodale $C(\xi)$ est infiniment dérivable, si ξ est égale à une valeur nodale de multiplicité k alors $C(\xi)$ est $(m-k)$ fois dérivable ($C(\xi)$ n'est pas nécessairement continue).
- Les courbes NURBS peuvent représenter exactement toutes les formes coniques usuelles de conception.
- L'influence de la variation des poids W_i sur les pôles P_i est analogue à celle de Bézier rationnelle sauf que la variation dans le cas NURBS est locale.

I.1.2.8. 3. Surface NURBS :

Une surface NURBS de degré (p, q) est définie par l'expression suivante :

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \cdot P_{i,j} \cdot W_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \cdot W_{i,j}} \quad (I.22)$$

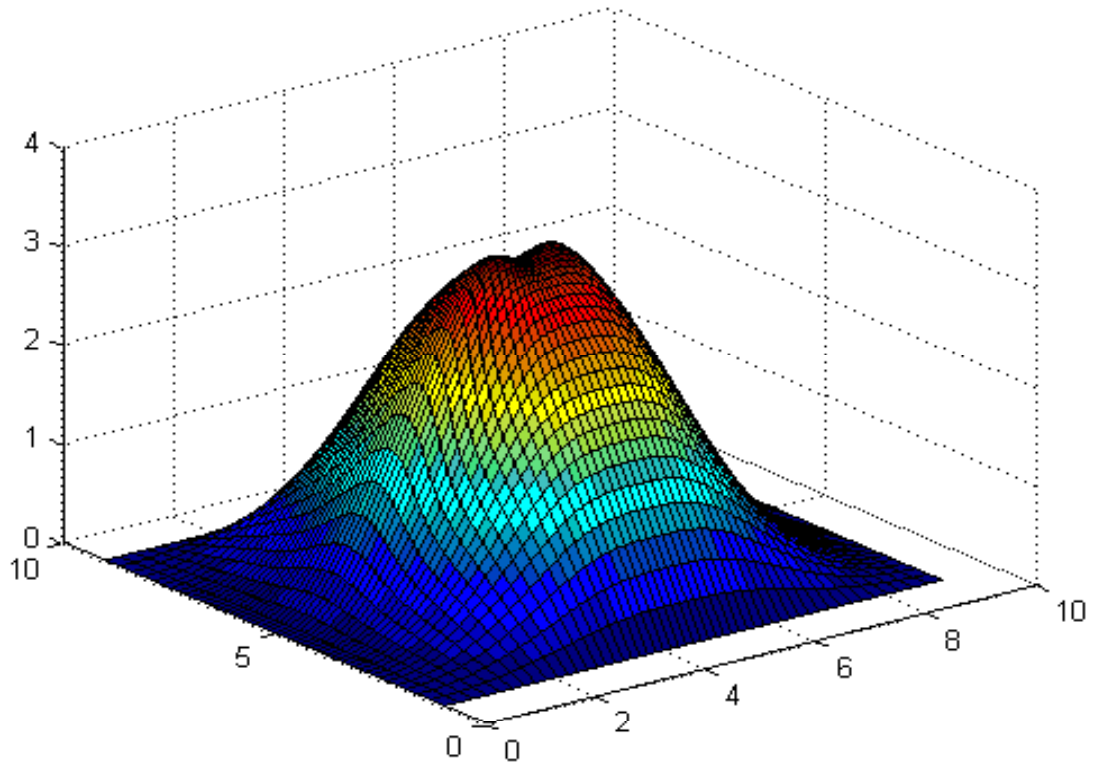
avec :

$\xi, \eta \in [0,1]$

$P_{i,j}$: Points de contrôle bidirectionnels (réseau de points de contrôles)

$W_{i,j}$: Les poids des points de contrôle

$N_{i,p}(\xi)$ et $N_{j,q}(\eta)$: sont les fonctions de base B-SPLINE

Exemple de surface de NURBS :**Figure (I-25) :** surface NURBS de degré 2**I.1.2.8. 4. Propriétés des surfaces NURBS:**

- ❖ Non négativité (la positivité) $R_{i,j}(\xi, \eta) \geq 0 \forall i, j, \xi, \eta$.
- ❖ Partition unité $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) = 1 \forall (\xi, \eta) \in [0,1] \times [0,1]$.
- ❖ Enveloppe convexe : la surface $S(\xi, \eta)$ est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.
- ❖ Si $p \geq 0$ et $q \geq 0$ alors $R_{i,j}(\xi, \eta)$ atteint exactement une seule valeur maximale.
- ❖ Modification locale : si on change les coordonnées d'un point $P_{i,j}$ seulement le rectangle $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ sera modifié.
- ❖ Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la surface si elle est appliquée aux pôles.
- ❖ $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$.

I.2. Raffinement :

L'application du processus de raffinement dans un contexte iso-géométrie a suscité beaucoup d'attention [7] où on constate que le raffinement peut être effectué dans h-p-k-espace une caractéristique unique des méthodes iso-géométriques. Le h et p raffinement sont analogues au h-raffinement et p-raffinement traditionnels dans la méthode des éléments finis MEF, mais le k-raffinement est spécial à l'analyse iso-géométrie [7]. On se base sur le fait que les processus h-raffinement et p-raffinement dans des méthodes iso-géométriques ne permutent pas, par contre, dans le cas k-raffinement, d'abord l'ordre des fonctions de base est augmenté (p-raffinement) et puis les valeurs des nœuds sont ajoutés pour créer de nouveaux éléments (h-raffinement).

I.2.1. h-raffinement :

Le h-raffinement dans l'analyse iso-géométrie est basé sur l'insertion de nœud. Etant donnée le vecteur nœud $E' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1})$, on appelle ξ le nouveau nœud tel que $\xi \in [\xi_i + \xi_{i+1}]$. Les (n+1) nouvelles fonctions de base sont obtenues en utilisant les équations (I.11) et (I.12) avec le nouveau nœud $E = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{n+p+1})$. [4] définissant les points de contrôle de la courbe originale $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Le nouvel ensemble de points de contrôle $P = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}$ sont obtenus avec

$$\bar{p}_i = \alpha_i + (1 - \alpha_i) p_{i-1}$$

$$\text{ou } \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq k-p \\ \tau - t_i/t_{i+p} - t_i & \text{si } k-p+1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases}$$

Des valeurs de nœud déjà actuelles dans le vecteur nœud peuvent être répétées. Cependant, ceci réduit la continuité de la base au nœud correspondant. La continuité de la courbe est préservée en choisissant les points de contrôle. La figure suivante illustre une courbe raffinée avec l'insertion de nœud.

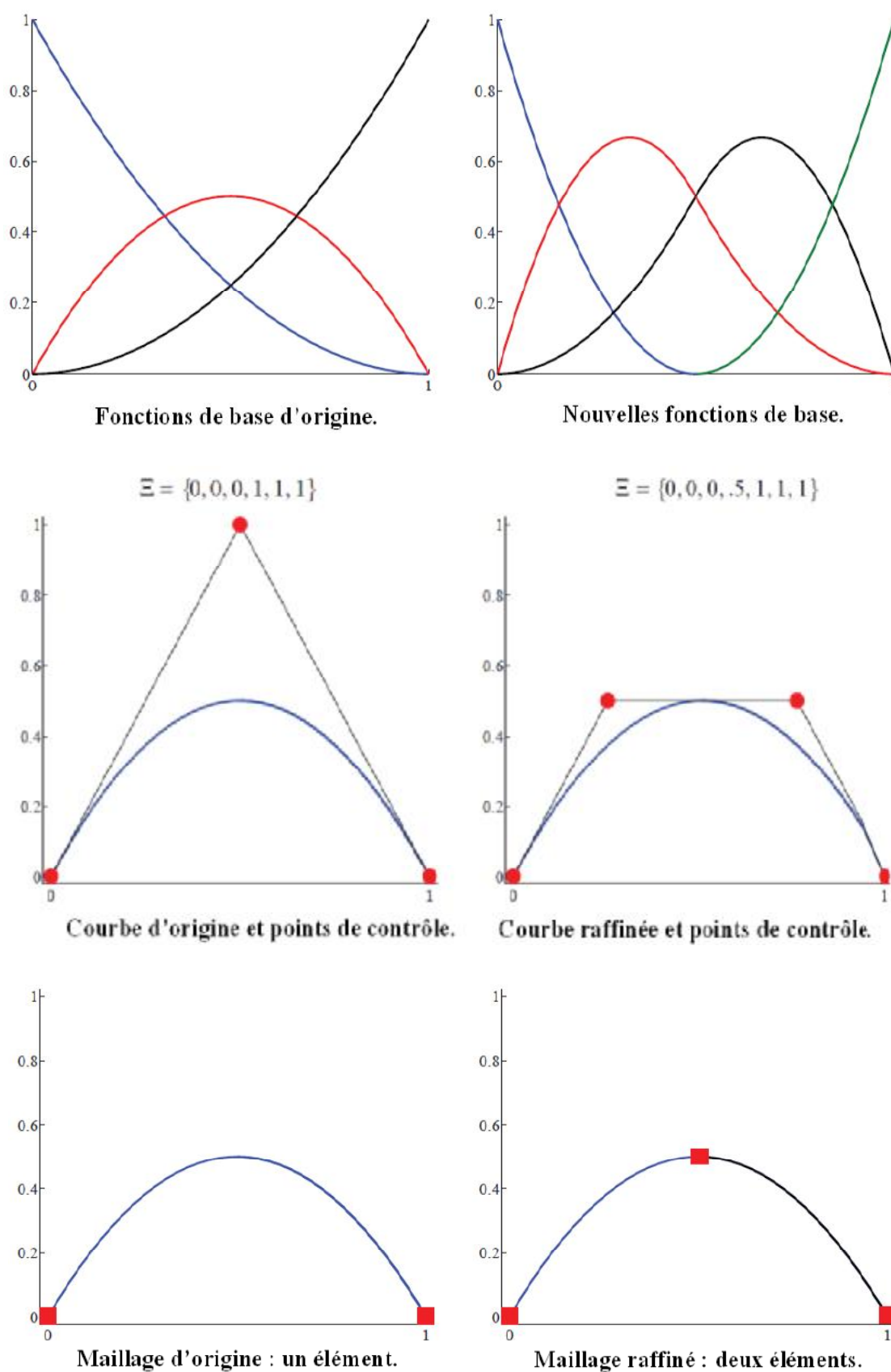


Figure (I-26) : insertion des nœuds h-raffinement

I.2.2. p-raffinement :

Le mécanisme pour mettre en application le p-raffinement est l'élévation d'ordre. L'ordre du polynôme des fonctions de base peut être augmenté sans changer la courbe paramétriquement ou géométriquement. Noter que chaque valeur unique de nœud doit être répétée afin de préserver des discontinuités dans la n-ème dérivée de la courbe. Le nombre de nouveaux points de contrôle dépend des multiplicités des nœuds existants. Comme l'insertion de nœud, l'espace parcouru par la base élevée contient l'espace parcouru par la base originale, ainsi on peut augmenter l'ordre sans changer la géométrie de la courbe B-spline [3]. La figure suivante montre un exemple de p-raffinement :

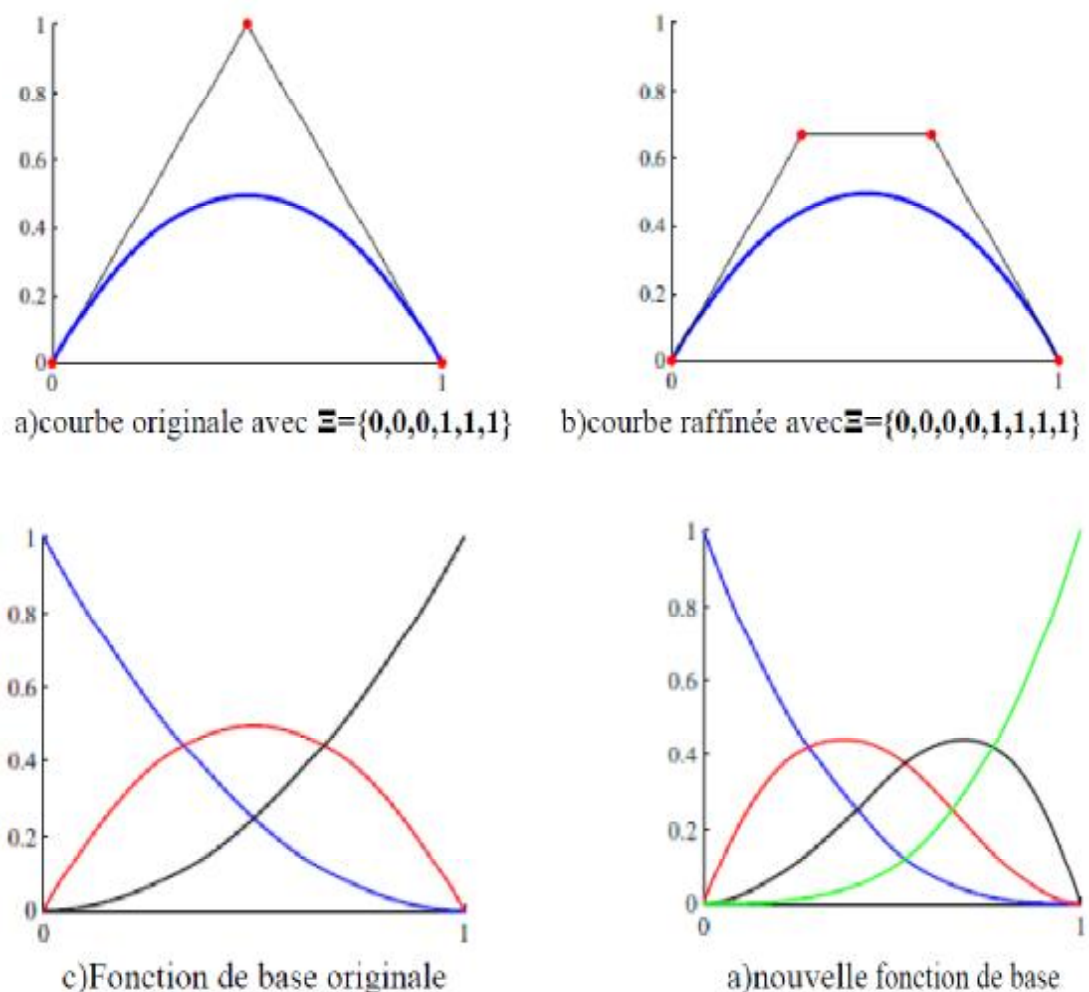


Figure (I-27) : élévation de fonction de base p-raffinement

I.2.3. k-raffinement :

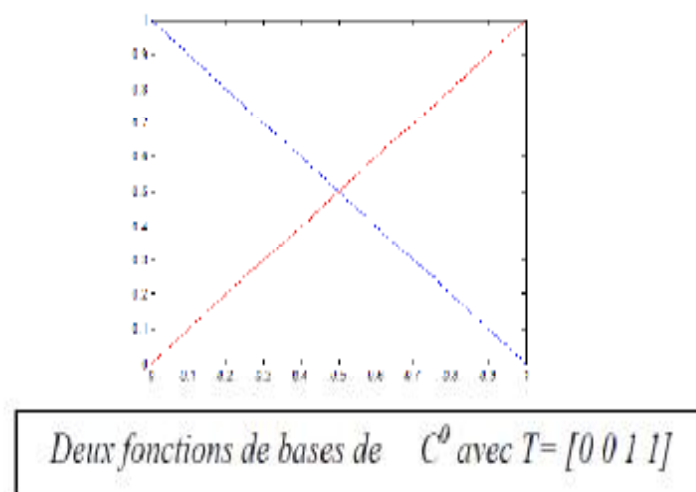
k-raffinement : élévation d'ordre et une continuité élevée

Si on insère une valeur de nœud entre deux nœuds dans la courbe d'ordre m , les fonctions de base auront un nombre de $m-1$ dérivées continues au nœud, et si nous élevons plus tard l'ordre des fonctions de base à q la multiplicité de chaque nœud augmente y compris celui inséré et le nombre de dérivées continues ne change pas (discontinuité à la $n^{\text{ème}}$ dérivée). Mais si on commence par une élévation d'ordre des fonctions de base à q , ensuite on insère la valeur du nœud, cette fois-ci les fonctions de base auront $q-1$ dérivées continues au nœud, ce procédé est appelé *k- raffinement*. [3, 4]

Le concept du k-raffinement est très important parce que l'analyse isogéométrique est fondamentalement une approche évoluée. Dans le p-raffinement traditionnel il y a non homogénéité dans la structure due à la différence des fonctions de base liées à la surface, au sommet, et aux nœuds intérieurs. En outre, la continuité C^0 maintenue pendant le processus de raffinement implique une multiplication dans le nombre de nœuds. Dans le k-raffinement, il y a une homogénéité de la structure et la croissance du nombre de points de contrôle est limitée.

Un exemple de k-raffinement et une comparaison avec le traditionnel p- raffinement sont donnés dans la figure (I-28),

Dans la méthode du k-raffinement pour un maillage fixe, des nœuds sont ajoutés aux valeurs limites, croissant leur multiplicité, mais pas de nœuds intérieurs ajoutés.



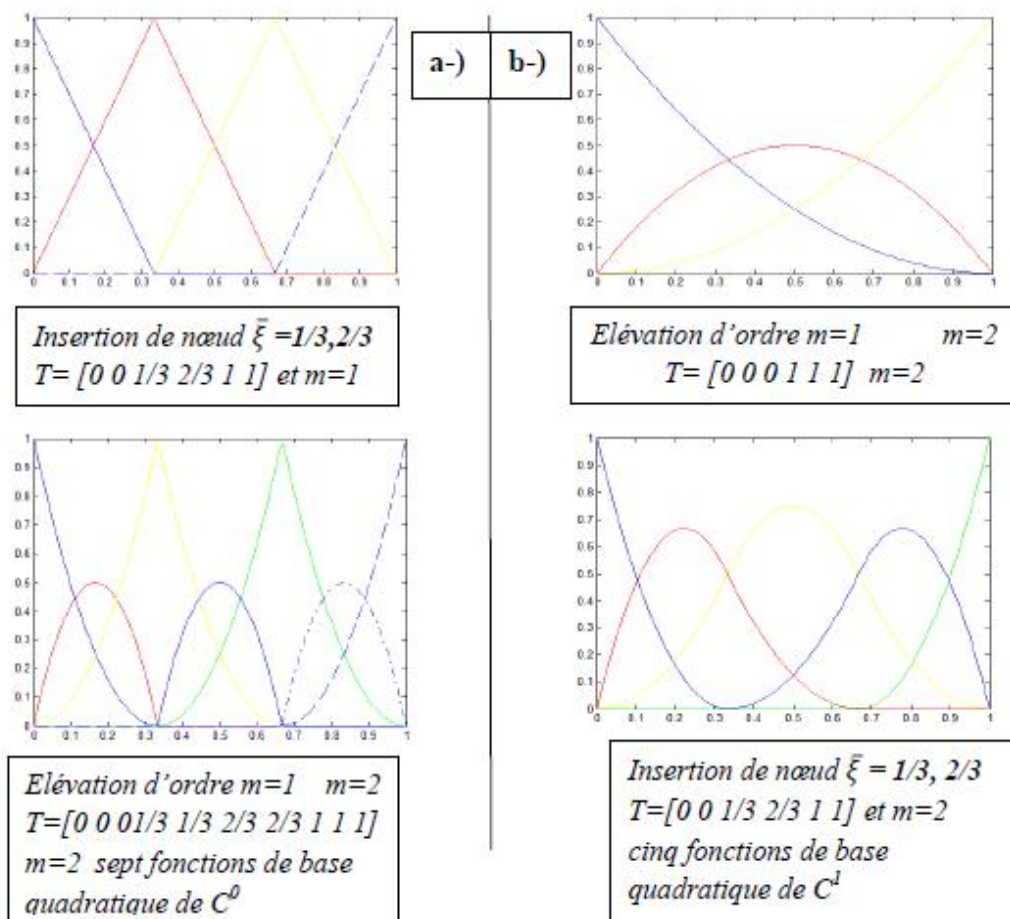


Figure (I-28) : le concept de k-raffinement

Conclusion :

Au début de ce chapitre, nous avons développé les éléments géométriques utilisés dans la conception assistée par ordinateur, nous avons modélisé le modèle de Bézier en premier qui utilise les fonctions de base de BERNSTEIN qui sont simple à manipuler avec les points de contrôle, puis le modèle B-Spline, il est plus complexe par rapport au premier modèle, il dépend en plus du vecteur nœuds pour présenter avec une bonne précision la géométrie désirée.

On a vu encore un modèle avec beaucoup plus de précision et il est mieux que les deux premiers modèles pour une géométrie plus exacte, c'est le modèle NURBS.

A la fin de ce chapitre, nous avons présenté et expliqué les trois types de raffinement h-p-k pour bien présenter la géométrie.

II.1. La méthode des éléments finis :

Introduction :

La méthode des éléments finis (MEF) ou l'analyse aux éléments finis (AEF) est une méthode numérique de résolution généralement pour les problèmes dont la géométrie est complexe où les solutions analytiques ne peuvent pas être obtenues. Le concept est de construire des objets de forme complexe en utilisant des éléments simples. Obtenir une solution approximative aux problèmes à valeur finie ; en outre, discrétiser un objet de forme complexe en éléments plus petits. La figure suivante récapitule le principe [8]

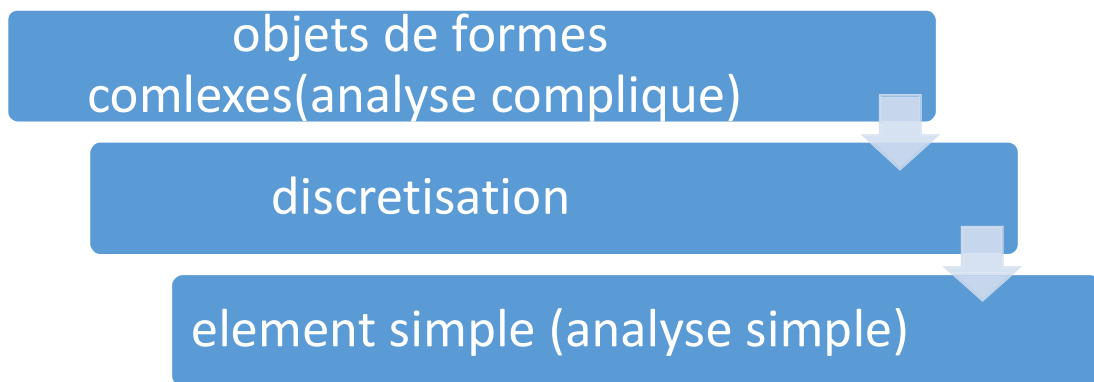


Figure (II-1) : concept de la méthode élément finis

II.2. Principe :

la MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de formes géométriques simples (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.

Nous considérons le comportement mécanique de chaque élément séparément, puis nous assemblons ces éléments de telle façon que l'équation des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaites en chaque nœud.

La MEF utilise des approximations simples des variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

Exemple : discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée)

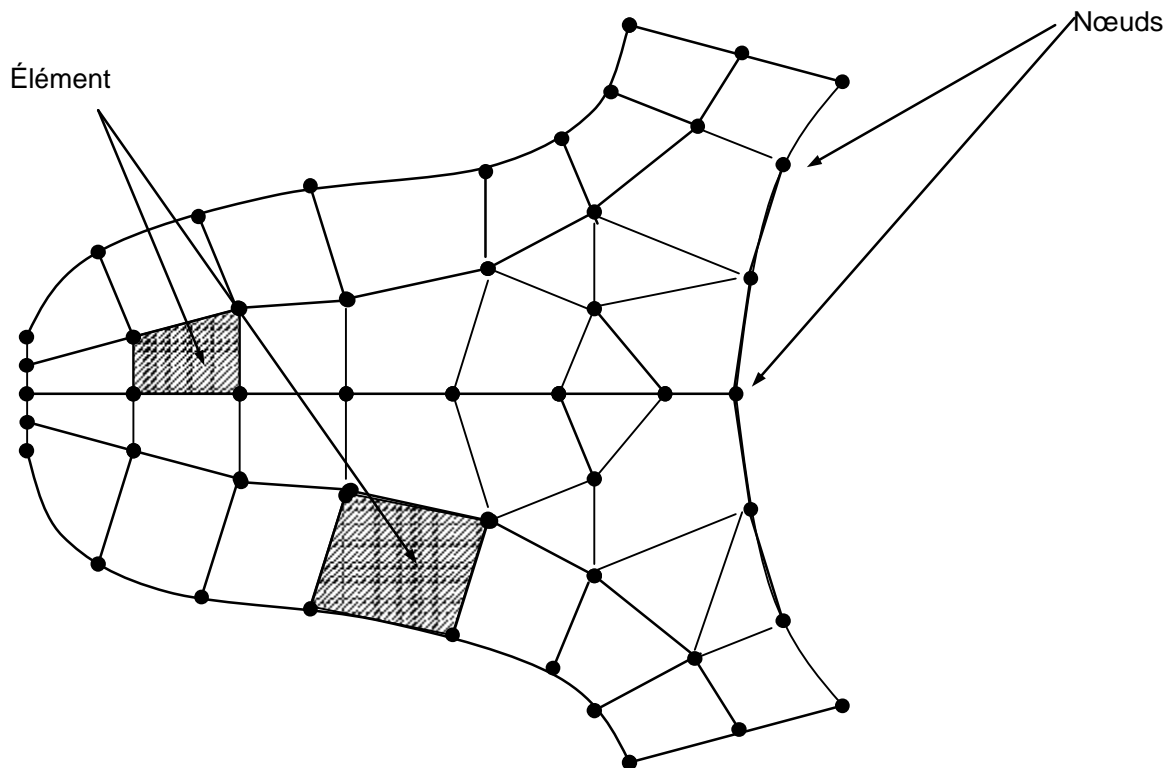


Figure (II-2) : discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée)

II .3. Les étapes (procédures) logiques du calcul par élément finis :

1. définir les nœuds et les éléments (créer le maillage)
2. pour chaque élément, établir la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ reliant le degré de liberté : déplacements nodaux $\{U^e\}$ et les forces $\{f^e\}$ appliquées aux nœuds : $[K^e] \{U^e\} = \{f^e\}$
3. assembler les matrices et les vecteurs élémentaires en un système global de manière à satisfaire les conditions d'équilibre aux nœuds $[K] \{U\} = \{F\}$.
4. modifier le système global en tenant compte des conditions aux limites.
5. résoudre le système $[K] \{U\} = \{F\}$ et obtenir les déplacements $[U]$ aux nœuds.
6. calculer les gradients (déformations, contraintes et flux de chaleur) dans les éléments et les réactions aux nœuds sur les conditions aux limites sont imposés.

II.4. Domaine d'application de la MEF :

- Analyse linéaire (statique et dynamique)
- Analyse non linéaire (grands déplacements, grandes déformations, contact et frottement, flambage...)
- Mise en forme des matériaux
- Thermique (en régime permanent et transitoire)
- Mécanique des fluides, électromagnétisme
- Dynamique rapide (choc, impact)

La méthode des éléments finis a plusieurs secteurs d'utilisations : en génie mécanique, en génie civil, transport aéronautique, espace nucléaire et le domaine militaire.

I .5. Connaissances nécessaires à un utilisateur de MEF





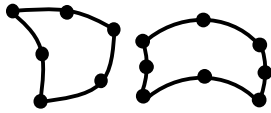
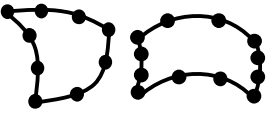
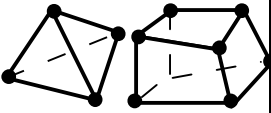
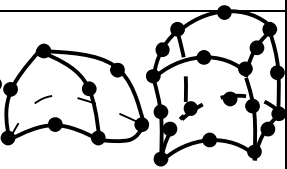
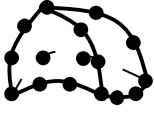


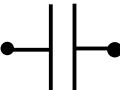
Un utilisateur est mis dans la situation de résoudre un certain problème. On doit mentionner dès le début que le logiciel appliqué au problème respectif ne le résoud pas. Il ne fait que résoudre un modèle créé par l'utilisateur. Les résultats peuvent être confirmés ou pas, en fonction du modèle choisi par l'utilisateur. La modélisation est une activité de simplification de la structure en encadrant ses différentes portions dans une des catégories suivantes : barres, plaques, blocs massifs, en tenant compte des chargements, appuis etc. La modélisation correcte (la plus proche de la réalité) est un problème d'expérience, d'inspiration et du moins de la connaissance des fondements théoriques de la méthode.

II.6. Discrétisation :

La Méthode des Eléments Finis a développé une série de types d'éléments finis qui, pour le début, peuvent être classifiés en :

- ✦ éléments finis unidimensionnels (généralement des barres)
- ✦ éléments finis bidimensionnels (plaques et mêmes volumes)
- ✦ éléments finis tridimensionnels (blocs massifs)

Tableau1 : types d'éléments finis

Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			
autres types	 Masse	 Ressort	 Contact

Les éléments finis sont générés par des points qui ne sont que des nœuds de la structure. Il existe des éléments ayant un degré supérieur à ceux cubiques (qui sont les plus performants) mais le plus couramment sont utilisés les éléments linéaires et paraboliques. Certains éléments finis ont des nœuds intérieurs pour améliorer la précision, mais l'utilisateur ne

travaille pas avec ces nœuds. Ils sont générés et ensuite condensés dans la phase de calcul des matrices de rigidité des éléments.

II.7. Élément poutre :

C'est un élément unidimensionnel de longueur L est constitué généralement de deux nœuds ayant chacun deux degrés de libertés.

Dans un repère local le vecteur des inconnues nodales est noté $q_e = \{u_i \theta_i \theta_j u_j\}^T$

u_i et θ_i : Sont respectivement le déplacement vertical et l'angle de rotation au nœud i dans le repère local. Chaque section droite de l'élément subit : une translation et une rotation

La figure (II.3) montre un élément de poutre dans le plan. L'élément est prismatique, ayant un module d'élasticité longitudinal E , de moment d'inertie I pour la section axiale. L'axe qui passe par les centres de chaque section a un déplacement latéral $v = v(x)$. Conformément à la théorie des poutres la fonction $v = v(x)$ est un polynôme cubique en x pour une poutre uniforme prismatique chargée à ses extrémités.

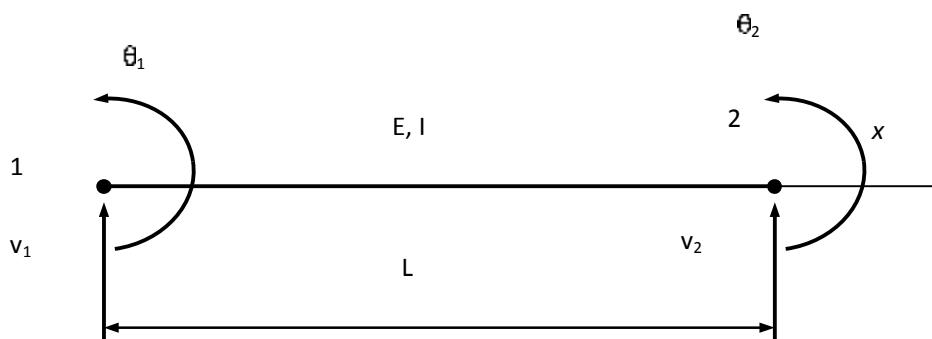


Figure (II-3) : élément de poutre et ses degrés de libertés

Dans la figure précédente, chaque nœud possède deux degrés de libertés :

- Un déplacement vertical v ou w normal à la poutre
- Une rotation θ autour de l'axe vertical

Le nombre total de degrés de liberté d'un élément poutre étant égal au produit du nombre de nœuds par le nombre de degrés de liberté de chaque nœud, le nombre total de DDL de chaque élément est égal à quatre.

Pour les nœuds 1 et 2 par exemple :

$$U_n = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} ; \{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

On a donc besoin de quatre coefficients pour exprimer la valeur du déplacement vertical.

Comme la théorie des poutres donne : $\theta = \frac{dW}{dx}$ alors on peut écrire :

$$\begin{cases} W = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\ \theta = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 \end{cases}$$

A partir des équations ci-dessus, on obtient le vecteur déplacement U(x) sous forme matricielle :

$$U(x) = \begin{Bmatrix} W \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X & X^2 & X^3 \\ 0 & 1 & 2X & 3X^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{soit } U(x) = [P(x)] \{a\} \quad (\text{II.2})$$

Puisque U(x) représente le déplacement au point P=(x, y), appliquons la formule (II.2) aux nœuds 1 et 2 de l'élément. On obtient :

Pour le nœud 1, x=0 et la relation (II.2) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad \text{ce qui donne } a_0 = W_1 \text{ et } a_1 = \theta_1$$

Pour le deuxième nœud, x=L et la relation (II.2) nous donne :

$$\begin{Bmatrix} W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{Ce qui donne : } W_2 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3$$

$$\theta_2 = a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2$$

Pour les deux nœuds 1 et 2 de l'élément poutre

$$U(n) = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ou bien } U(n) = [A] \{a\}$$

La matrice $[A]$ étant connue, le vecteur des coefficients $\{a\}$ peut être obtenu en inversant l'expression de l'équation, c'est-à-dire :

$$\{a\} = [A]^{-1} U(n) \quad (\text{II.3})$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

On substitue la relation (II.3) dans la relation (II.2), on obtient ainsi :

$$U(x) = [P(x)] [A]^{-1} \{U_n\}$$

On en déduit :

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \{U_n\}$$

$$\text{Avec } \langle N \rangle = [P(x)] [A]^{-1} \quad (\text{II.4})$$

N : correspond aux fonctions de forme des déplacements et rotations de l'élément poutre, ce que montre le tableau suivant :

Tableau 2 : les fonctions de formes

Activation du degré de liberté	Fonction de forme correspondante
Déplacement du nœud 1	$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 1	$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$
Déplacement du nœud 2	$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 2	$N_4 = -\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^2}$

II .8. Détermination de la matrice de déformation B :

Ici on va trouver la matrice qui relie les déformations aux déplacements nœdaux.

La théorie des poutres donne les résultats suivants :

La relation de comportement s'écrit :

$$M_f = EI \frac{d\theta}{dx} \quad , \text{ On prend le choix des axes } I = I_y$$

Ou encore dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli ($\theta_y = -\frac{dw}{dx}$) :

$$M_f = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{II.5})$$

Les relations d'équilibres s'écrivent :

$$\frac{dM_f}{dx} + T = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} + p = 0 \quad (\text{II.6})$$

Relation déformation – déplacement :

$$\varepsilon = \gamma \frac{d\theta}{dx} = -\gamma \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (\text{II.7})$$

en effet ($\theta = -\frac{dw}{dx}$)

Avec : M_f moment de flexion (il vaut M_1 au nœud 1 et M_2 au nœud 2)

T : effort tranchant (il vaut T_1 au nœud 1 et T_2 au nœud 2)

p : Chargement linéique transverse

E : module d'élasticité longitudinal du matériau

I : moment quadratique pour la flexion (moment d'inertie de la poutre)

w : Déplacement transverse

Et on peut écrire l'énergie élastique en première approximation pour un tronçon de poutre de longueur l , mais en prenant en compte uniquement le moment fléchissant :

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M_f^2}{EI} dx \quad (\text{II.8})$$

L'élément poutre considéré est supposé chargé uniquement aux nœuds.

L'effort tranchant y est donc constant .d'où : $\frac{dV}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -EI \frac{d^4w}{dx^4} = 0$

La relation liant $\{U_n\}$ et $\{F\}^e$

$$\{F\}^e = [K]^e \{U_n\}^e \quad (\text{II.9})$$

La matrice de rigidité $[K]^e$ est une matrice carrée d'ordre 4

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

On peut écrire la matrice de rigidité $[K]$:

$$[K] = \int_0^L [B]^T E I [B] dx \quad (\text{II.10})$$

et $\theta = \frac{dw}{dx}$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left[\frac{d^2}{dx^2} N \right] [U_n] = [B] [U_n]$$

$$[B] = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}, -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}, \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}, -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]$$

$$\text{Pour les déformations : } \{\varepsilon(x)\} = [B(x)] \{U_n\} \quad (\text{II.11})$$

La contrainte de poutre :

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \text{ ou } M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI [B] \{U_n\}$$

La matrice de rigidité et de masse pour un élément poutre :

En utilisant les éléments finis, pour écrire la matrice de rigidité et la matrice de masse dans ce présent mémoire on considère que le matériau est isotrope et les caractéristique mécanique (E , I , et ρ) et même la section sont constants, alors les expressions explicites des matrices élémentaires peuvent être obtenues et s'écrivent comme suit :

II.10. La matrice de rigidité :

$$[k^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

II.11. La matrice de masse :

$$[M^e] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Ces deux matrices sont utilisées pour la méthode des éléments finis pour la programmation sous MATLAB afin de trouver les déplacements de cette poutre.

II.12. Valeurs propres et vecteurs propres :

Dans l'analyse des structures, il est important de déterminer les modes propres pour traiter et résoudre le problème posé.

Les fréquences et formes propres peuvent être décrites par un ensemble d'équation :

$$([K] - \lambda_i[M])\{\varphi\} = \mathbf{0} \quad (\text{II.14})$$

Pour $i=1, 2, 3, \dots, n$

$[K]$: matrice de rigidité globale de la poutre

$[M]$: matrice de masse globale de la poutre

$\lambda_i = \omega_i^2$: ω_i et $\{\varphi\}_i$ sont les $i^{ème}$ fréquences naturelles et la $i^{ème}$ forme propre de la structure

n : Est le nombre total de formes propres

Chapitre III : La méthode éléments finis isogéométrique :**III.1. Introduction :**

Une méthode numérique pour l'analyse et l'optimisation de sensibilité de conception de forme complexe est développée, en utilisant la méthode d'analyse isogéométrique avec des fonctions de base NURBS. Dans la méthode d'analyse isogéométrique, une fonction de base est adoptée directement à l'aide des fonctions NURBS dans la géométrie à réaliser, qui permet la description exacte d'un modèle géométrique. La conception de forme, en utilisant les éléments finis classiques a éprouvé certains problèmes, c'est-à-dire, la frontière des éléments finis devrait être métrisée en utilisant un modèle géométrique séparé, tel qu'un système réalisé par le DAO. En outre, le modèle de conception devrait être transformé, pour exprimer la grande perturbation d'un domaine par éléments finis. Dans l'approche isogéométrique, la fonction de base NURBS qui est employée dans la représentation du modèle géométrique du système est directement employée dans l'analyse de réponse du système, et la frontière de conception est exprimée par la même fonction de NURBS.

III.2. Analyse isogéométrique :**a) Définition:**

Dans cette méthode, le champ de réponse est interpolé par exactement les mêmes fonctions de base NURBS utilisées dans la modélisation de la géométrie à étudier. Dans la méthode d'analyse isogéométrique, des limites d'ordre plus supérieur sont exactement évaluées, pour fournir des informations plus précises sur la sensibilité du modèle éléments-finis de base. Pour une meilleure qualité de solution, des techniques d'amélioration des résultats qui sont : h-raffinement, et P-raffinement et k-raffinement sont utilisées. Puis, la méthode d'analyse isogéométrique est comparée à la méthode des éléments finis, pour la vérification de cette méthode, des exemples analytiques et leurs formulations détaillées sont donnés pour un cas bidimensionnel.

Dans la MEF il y a une notion de maille et une notion d'élément, mais un élément a deux représentations, une dans le domaine apparent, et l'autre dans l'espace physique.

Des éléments sont habituellement définis par leurs coordonnées nodales, et leurs degrés de liberté sont les valeurs des fonctions de base aux nœuds. Les fonctions d'interpolation des éléments finis sont généralement interpolées et peuvent prendre des valeurs positives et négatives. Des fonctions de base de l'élément finis sont connues souvent sous le nom des "fonctions d'interpolation".

Dans l'approche isogéométrique il y a deux notions de mailles, la maille de commande et la maille physique. Les points de commande définissent la maille de commande, et la maille de commande interpole les points de commande. La maille de commande contient des éléments non linéaires, dans deux dimensions ils sont les éléments quadrilatéraux bilinéaires, et dans le cas tridimensionnel sont les éléments en hexaèdre trilitères. La maille de commande ne se conforme pas à la géométrie réelle. Plutôt, elle est comme un échafaudage qui commande la géométrie. La maille de commande a la même forme d'une maille multilinéaire. Les variables de commande sont les degrés de liberté et elles sont situées aux points de commande. Elles peuvent être considérées en tant que "coordonnées généralisées". Des éléments de commande peuvent être dégénérés à une forme plus primitive, telle que des triangles et des tétraèdres. La maille de commande peut également être tordue et même inversée jusqu'à un degré, alors qu'en même temps, pour NURBS elle est suffisamment lisse, la géométrie physique peut être immobile (contrairement aux éléments finis).

La maille physique est une décomposition de la géométrie réelle. Il ya deux notions des éléments dans la maille physique, la pièce rapportée et l'envergure de nœud. La pièce rapportée peut être considérée comme un macroélément. La plupart des géométries utilisant une pièce rapportée simple.

b) Présentation de la méthode:

L'analyse isogéométrique est une méthode utilisant les fonctions de base NURBS, qui servaient habituellement comme modèle de représentation géométrique en dessin assisté par ordinateur (DAO). Le principal avantage des NURBS par rapport aux fonctions de forme polynomiales utilisées en MEF est que ces dernières ne font qu'approcher la géométrie d'origine, alors que les NURBS décrivent la géométrie exacte du modèle ce qui donne des résultats beaucoup plus précis.

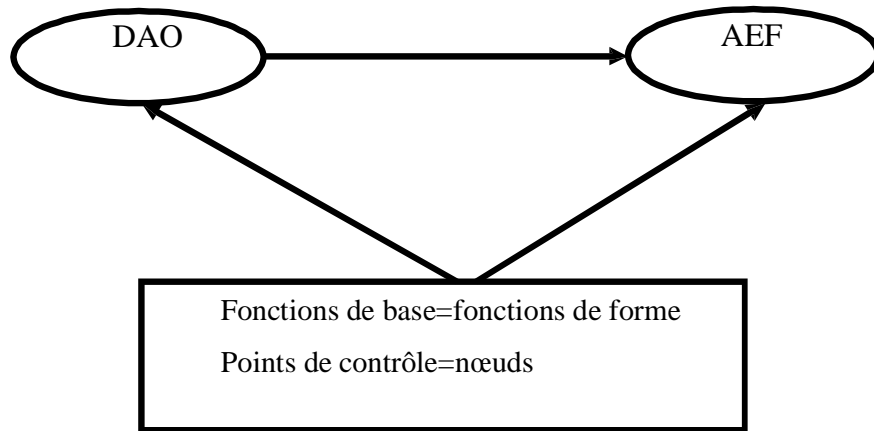


Figure (III-3.1): relation entre DAO et AEF dans l'analyse iso géométrique

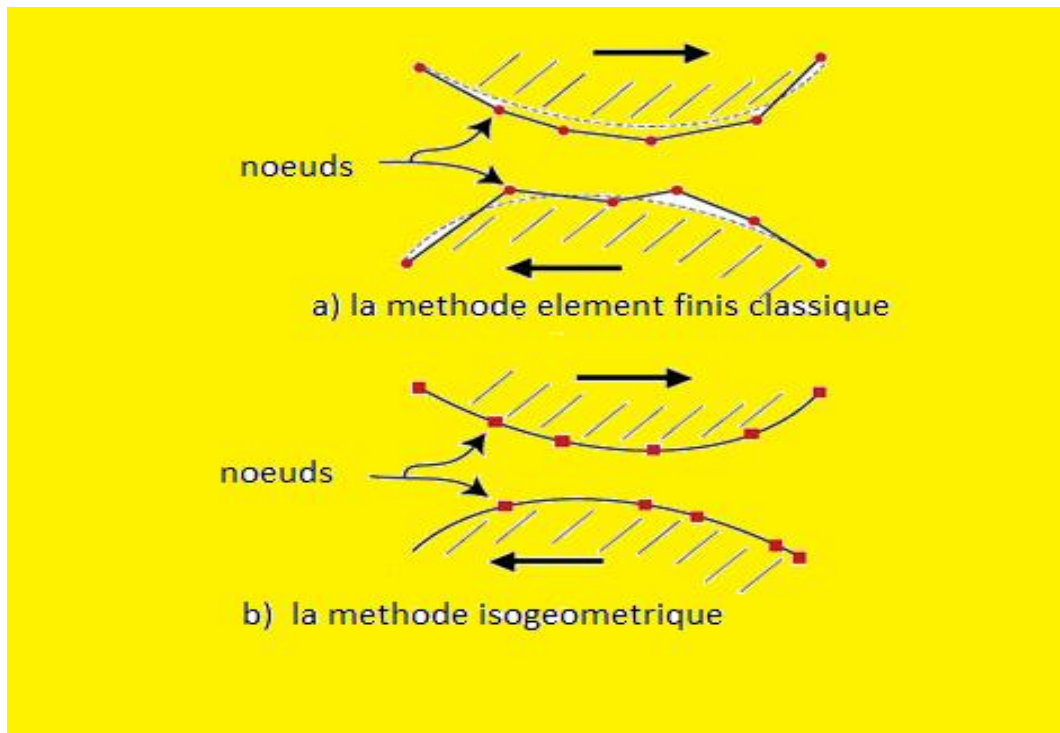


Figure (III-3.2): une comparaison de deux méthodes d'éléments finis

Dans l'analyse isogéométrique, la géométrie du modèle $C(\xi)$ est exprimée par une combinaison linéaire de fonctions de base NURBS R_i et de points de contrôle B_i , tel que :

$$c(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) \cdot B_i \quad (\text{III.1})$$

Avec les fonctions de base de NURBS :

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi) \cdot W_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) \cdot W_i} \quad (\text{III.2})$$

$N_{i,m}(\xi)$: Les fonctions de base B-SPLINE

W_i : Les poids associés aux pôles

m : Le degré de la fonction

III.3. Analyse isogéométrique en utilisant les NURBS (AIG)

La méthode d'analyse isogéométrique comme la méthode des éléments finis, utilise le concept iso-paramétrique. Dans la méthode des éléments finis chaque élément est généralement transformé en coordonnées paramétriques (figure (III-4)).

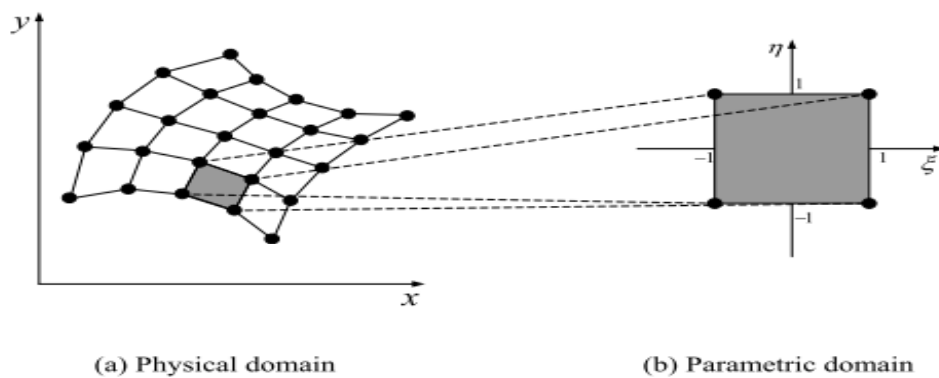


Figure (III-4): Transformation du domaine physique au domaine paramétrique MEF

Dans l'analyse isogéométrique, c'est tous le domaine physique qui sont transformé en un domaine paramétrique (figure(III.2.3)) [12]

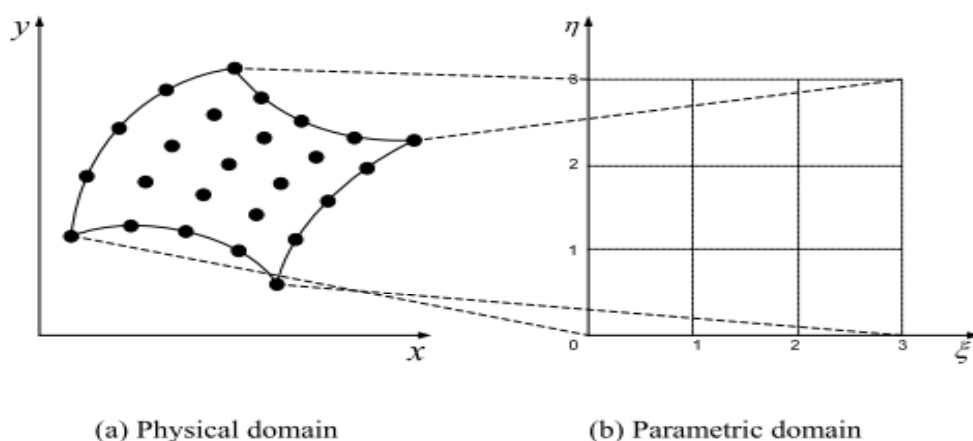


Figure (III-5): Transformation de domaine physique au domaine paramétrique AIG

Soit un solide occupant un domaine Ω et son champ de déplacement $u(x) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \Omega$.

Dans le cadre des petites déformations, la réponse du solide est décrite en termes du tenseur

de déformation linéaire [10] :

$$\varepsilon(u) = \nabla^s u = 1/2(\nabla u + \nabla u^T) \quad (\text{III.3})$$

L'équation gouvernant les déplacements u , avec comme conditions aux limites imposées

$u = \bar{u}$ En $\delta_u \Omega \in \delta \Omega$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot \rho b d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \cdot l d\Gamma \quad (\text{III.4})$$

Dont :

σ : le tenseur des contraintes dépendant de u

$\delta \varepsilon$: La première variation de déformation

δb : Les forces volumiques du corps

l : La traction imposée sur une limite $\delta_r \Omega \in \delta \Omega$ du solide

La méthode consiste alors à trouver les solutions u que l'équation (III.4) admet pour toute variation des déplacements admissibles avec $\delta u = 0$ en $\delta_u \Omega$.

Dans la méthode des éléments finis la géométrie est définie comme suit :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (\text{III.5})$$

x_i : Position du nœud correspondant

Par contre dans l'analyse isogéométrique, la géométrie est définie par l'expression suivante :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{t=1}^n R_t(\xi, \eta) \cdot P_t = RP \quad (\text{III.6})$$

$R_t(\xi, \eta)$: Fonction de base NURBS

R : matrice de fonctions de base

$$\text{Avec } R = \begin{bmatrix} R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & 0 & \dots & R_{n,m} & 0 \\ 0 & R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & \dots & 0 & R_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$P = [x_1 y_1 x_2 y_2 \dots \dots \dots x_n y_n]^T$$

Le champ des solutions $u(\xi, \eta)$ est représenté par une combinaison linéaire des mêmes fonctions de base R_i avec les coefficients de réponses d_i (des déplacements nodaux, dans le cas d'élasticité linéaire), tel que:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi, \eta) \cdot d_i = R d \quad (\text{III.7})$$

$$d = [u_1 v_1 u_2 v_2 \dots \dots u_n v_n]^T$$

III.4. Procédure du calcul des éléments finis isogéométriques :

Les éléments finis isogéométriques sont basés principalement sur les fonctions NURBS pour représenter la géométrie, l'avantage principal de cette méthode est la continuité qui est supérieure à celle utilisée dans les éléments finis classiques.

La procédure de calcul des éléments finis isogéométriques est comme suit :

- représenter de la géométrie par les fonctions NURBS
- l'espace inter-nodal subdivise le domaine en éléments
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème
- assemblage des matrices élémentaires
- prise en compte des conditions aux limites
- résolution du système d'équation

III.5. Matrice de raideur :

Dans ce qui suit, nous allons déduire la matrice de rigidité pour un « patch ». À partir des équations (III.3) et (III.4), le vecteur des déformations correspondant à la condition des déformations planes est le suivant:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^h = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d} \quad (\text{III.8})$$

$\mathbf{B}(\mathbf{x})$: définissant l'opérateur des déformations linéaires dont la rotation matricielle est défini comme suit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \quad (\text{III.9})$$

La transformation entre les coordonnées paramétriques des NURBS et le système de coordonnées globales est donnée par le Jacobien :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{Ce qui mène à : } \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta R}{\delta \xi} \\ \frac{\delta R}{\delta \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$\frac{\delta R}{\delta \xi}, \frac{\delta R}{\delta \eta}$: Dérivées partielles des fonctions de base NURBS

Alors la matrice de rigidité élémentaire est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{K} = \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbb{C} \mathbf{B}(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (\text{III.12})$$

\mathbb{C} : matrice caractéristique au comportement élastique du matériau

III.6. Matrice de masse :

Dans les problèmes de dynamique des structures, l'équation des mouvements est donnée pour un système conservatif libre dans la forme matricielle est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{III.14})$$

tel que :

M : la matrice de masse

\ddot{U} : La deuxième dérivée par rapport au temps du vecteur des déplacements, qui représente les accélérations nodales.

La matrice de masse est donnée par :

$$\mathbf{M} = \delta \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \rho \mathbf{B}(\xi, \eta) \det(J) d\xi d\eta \quad (\text{III.15})$$

δ : indice de Kronecker

ρ : masse volumique du matériaux

Remarque :

Intégrale numérique : Vu la complexité analytique des fonctions de base NURBS, une intégration numérique (quadrature) s'impose, pour cela plusieurs méthodes peuvent être employées, telles que la quadrature de Gauss, de Simpson, la méthode du point milieu, la méthode de Bernoulli, cette dernière sera employée dans l'application accompagnant ce présent mémoire.

III.7. Les équations de Bernoulli : [13]

La complicité des fonctions de base NURBS, nous conduit à chercher une méthode de trouver les deux matrices globales de rigidités et de masses $[K]$ et $[M]$.

C'est une méthode employée pour répondre à l'élément poutre dans cette partie des éléments isogéométriques, ces équations sont représentées comme suit :

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \frac{d^2 N^T}{dx^2} EI \frac{d^2 N}{dx^2} dx \quad (\text{III.15})$$

$$\mathbf{M}_e = \int_0^l N^T \rho A N dx \quad (\text{III.16})$$

ρ : Masse volumique du matériau

A : Section droite de la poutre

E : Le module de Young

I : Moment d'inertie de la poutre

N : Les fonctions de forme des déplacements et rotations

l : Longueur d'un élément poutre

III.8. Résumé des principales notions de l'analyse isogéométrie [11]

- ✓ Le maillage par les NURBS est défini par le produit des vecteurs nœuds, pour une structure unidimensionnelle par le vecteur nodal Ξ et par le produit vectoriel $\Xi \times H$ pour une structure bidimensionnelle.
- ✓ L'espace inter-nodal subdivise le domaine en éléments.
- ✓ Le support de chaque fonction de base s'étend suivant un nombre restreint d'éléments figure III.4.
- ✓ Les points de contrôles définissent la géométrie.
- ✓ Le concept iso-paramétrique est invoqué, les champs (déplacements, vitesse, température,...) sont représentés avec les mêmes fonctions de base que celles de la géométrie. Les coefficients des fonctions de base sont des degrés de liberté, ou des variables de contrôle.
- ✓ Trois stratégies différentes de raffinement sont possibles :
 - h raffinement : par des insertions de nœud
 - p raffinement : par l'élévation de l'ordre des fonctions de base
 - k raffinement : élévation d'ordre et une continuité élevée

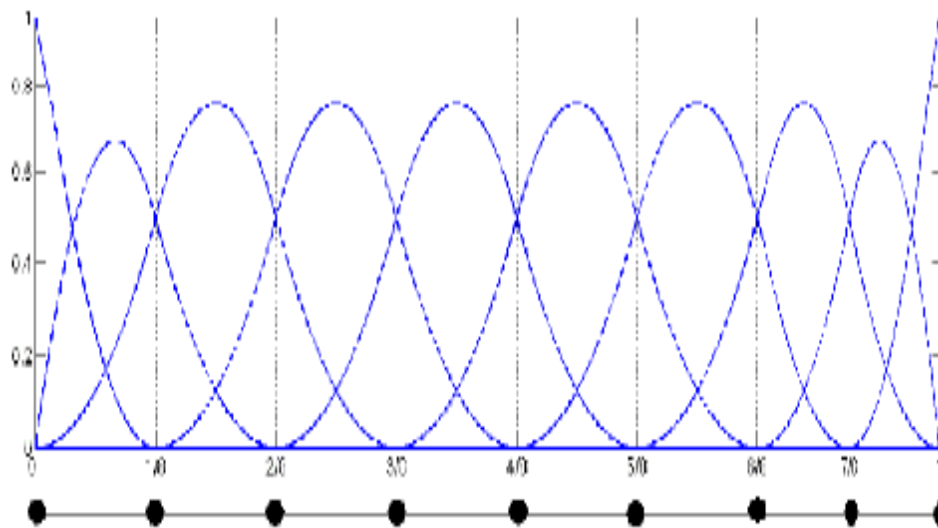


Figure (II-6) : Chaque fonction de base est définie sur un intervalle de l'espace paramétrique comprenant un nombre restreint d'éléments.

Chapitre IV : Application de deux méthodes

IV.1 Introduction :

Dans ce chapitre on se propose de faire une application sur une poutre simple en acier en utilisant la méthode des éléments finis classiques, et la méthode isogéométrique sur le même modèle (poutre).

On commence par la discrétisation du modèle en dix (10) éléments identiques afin de trouver les déplacements de cette poutre et cela en passant par les différentes étapes pour les deux méthodes, et après on fait une comparaison de ces deux méthodes.

Tous les calculs de cette application se font avec la programmation en utilisant le logiciel MATLAB qui est utilisé dans ce mémoire.

a) Définition du modèle :

Le modèle à étudier est une poutre simple prismatique encastree – libre, la figure suivante présente le modèle :

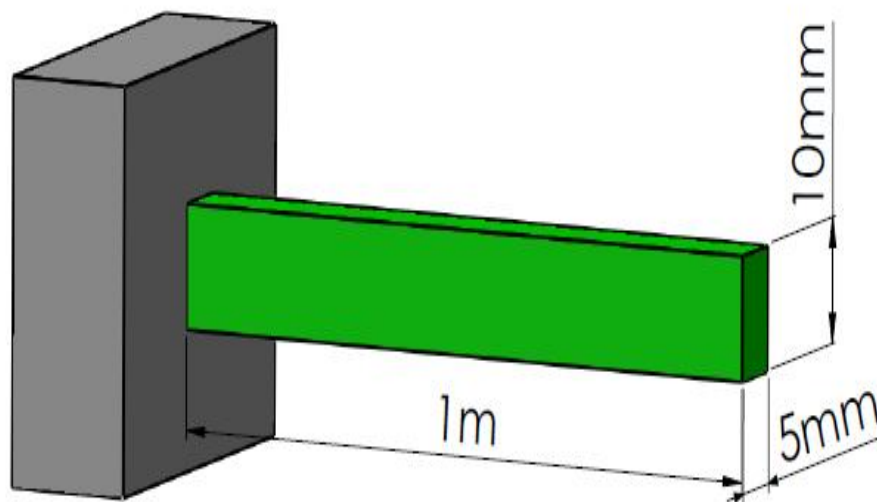


Figure (IV-1) : la représentation du modèle à analyser

b) Propriétés et dimensions du modèle :

On considère que le matériau de la poutre est un matériau isotrope avec :

La longueur de la poutre $L=1m$

Masse volumique du matériau $\rho = 7800Kg/m^3$

Module d'élasticité $E = 210000Mpa$

La largeur $b = 5mm$

La hauteur $h = 10m$

Le moment d'inertie $I = \frac{bh^3}{12} = 4.16 \times 10^{-10} m^4$

IV.1. méthode des éléments finis classiques :

IV.1.1. discrétisation de la géométrie :

Le modèle sera subdivisé en 10 éléments identiques, chaque nœud a 3 DDL (déplacements), donc le nombre total des DDL est égal à 33 DDL.

La figure suivante nous montre la géométrie subdivisée :

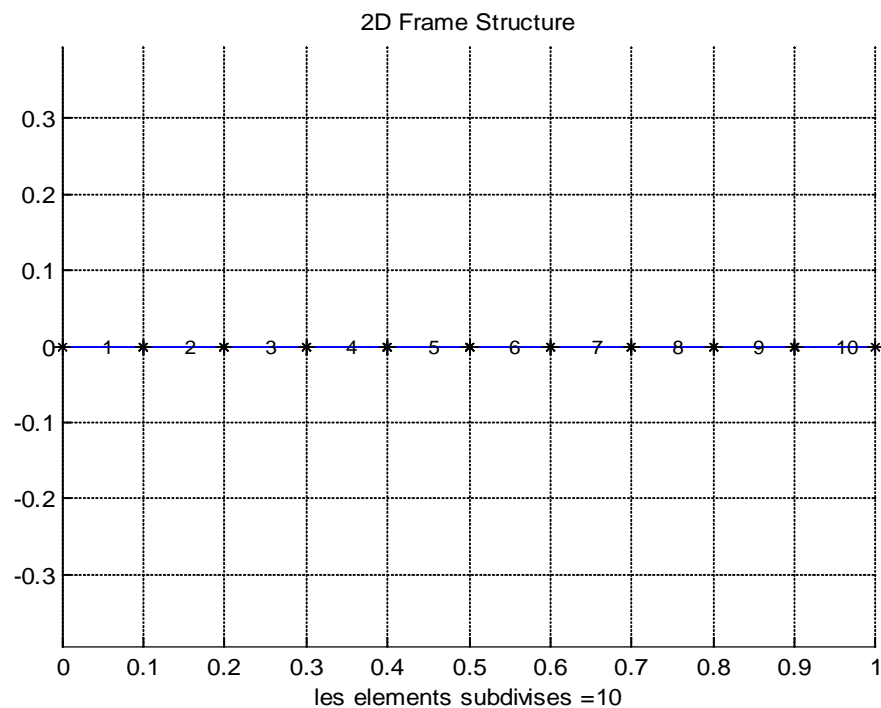


Figure (IV-2): modèle subdivisé en 10 éléments

IV.1.2. Calcul des matrices élémentaires :

Les matrices de raideur et de masse sont obtenues à partir des formes précédentes respectivement (II-12), (II-13): suivantes :

$$[k^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[M^e] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Les matrices élémentaires $[k^e]$ et $[M^e]$ seront de dimensions (6,6) ,6 lignes et 6 colonnes pour un élément poutre.

Exemple : résultat d'un élément

Pour l'élément 10 la matrice de rigidité et de masse sont respectivement :

$$K_{e10} = 10^8 \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 & -1.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0525 & 0 & 0 & -0.0263 & 0.0013 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0 & -0.0013 & 0 \\ -1.05 & 0 & 0 & 1.05 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0263 & -0.0013 & 0 & 0.0263 & -0.0013 \\ 0 & 0.0013 & 0 & 0 & -0.0013 & 0.0001 \end{bmatrix} \text{ N/m} \quad (\text{IV.1})$$

$$M_{e10} = \begin{bmatrix} 0.026 & 0 & 0 & 0.0065 & 0 & 0 \\ 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0.005 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 \\ 0.0065 & 0 & 0 & 0.013 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0.0001 & 0 & 0.0145 & -0.0002 \\ 0 & -0.0001 & 0 & 0 & -0.0002 & 0 \end{bmatrix} \text{ Kg} \quad (\text{IV.2})$$

IV .1.3. Assemblage et résolution :

Dans la programmation par MATLAB on a obtenu toutes les matrices de rigidité et de masse élémentaire pour les dix éléments de la poutre, on fait l'assemblage pour passer à la résolution.

Le problème dans la résolution est de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du modèle. On utilise l'équation suivante :

$$([K] - \lambda_i [M])\{\varphi\} = 0$$

$$\lambda_i = \omega^2$$

On calcule les fréquences naturelles du système avec l'équation :

$$f = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{IV.3})$$

Les fréquences propres du modèle sont présentées dans la figure suivante

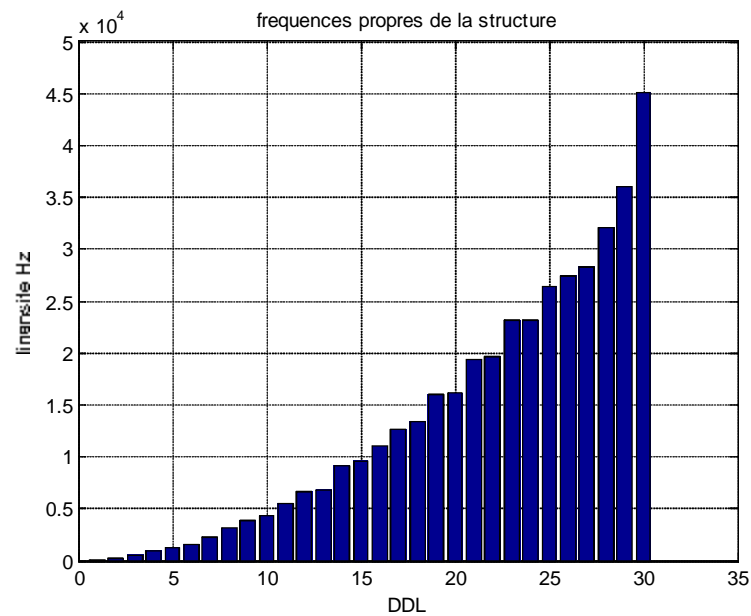


Figure (IV-3): fréquences propres du modèle

Tableau 4 : fréquences propres du modèle

Nœuds (DDL)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquences naturelles	0,0021	0,0912	0,2263	0,4253	0,6837	1,0993	1,6021	1,9617	2,6414	3,2029
$[\times 10^4 \text{ Hz}]$	0,0166	0,1299	0,3175	0,5500	0,9100	1,2652	1,6064	2,3116	2,7435	3,6069
	0,0465	0,1510	0,3928	0,6654	0,9542	1,9328	1,9328	2,3244	2,8345	4,5139

IV.1.4. Les déplacements de la poutre :

On a vu dans les chapitres précédents que les poutres ont généralement deux déplacements : une translation et une rotation.

Après avoir calculé les valeurs propres du système, et pour trouver les déplacements on utilise l'équation au début du chapitre des éléments finis :

$$[K] \{U\} = \{F\}, \text{ équation du système global}$$

$[K]$: La matrice de rigidité globale de système

$\{U\}$: les déplacements au nœud

$\{F\}$: les efforts extérieurs (forces) imposés au modèle

Mais le développement de ces équations matricielles nous conduit à calculer les déplacements verticaux $v(x)$ aux nœuds avec l'équation (MATLAB) :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{(\mathbf{K}_G - \mathbf{W}^2) \times \mathbf{M}_G} \quad (\text{IV.4})$$

\mathbf{v} : Les déplacements verticaux de la poutre [mm]

\mathbf{F} : Les efforts extérieurs (forces) imposés au modèle [N]

\mathbf{K}_G : La matrice de rigidité globale du modèle N/mm

\mathbf{M}_G : La matrice de masse globale du modèle [g]

\mathbf{W} : Les valeurs propres [rad/s]

IV 1.5. Application :

IV 1.5.1. Déplacements verticaux :

La figure suivante nous montre les déplacements verticaux pour chaque élément de la poutre, on prend les conditions aux limites (dans notre cas c'est une poutre encastree) on prend une force extérieure $F=10\text{N}$ (la force est applique sur le dernier nœud), une valeur propre $w=900\text{rad/s}$, on utilise l'équation (IV.4), on trouve avec MATLAB :

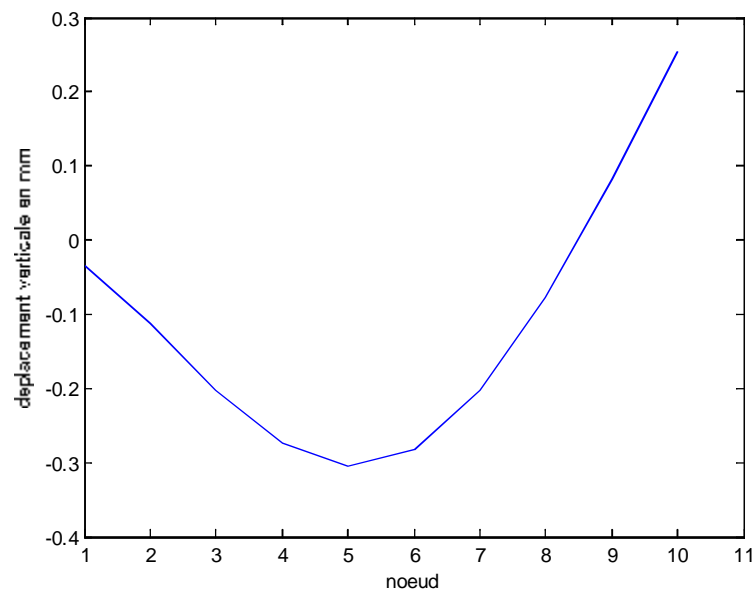


Figure (IV-4): les déplacements verticaux $v(x)$

IV 1.5.1.a. Explication :

En ce qui concerne les déplacements verticaux $v(x)$ de la poutre, pour chaque élément nous remarquons des valeurs positives et négatives. Pour les éléments 1 jusqu'à 8, ils sont négatives donc la poutre se déplace légèrement vers le haut, mais à partir des éléments 9 à 10 la poutre se déplace vers le bas.

Le tableau suivant présente les valeurs numériques de ces déplacements et même pour les rotations :

Tableau 5 : les valeurs numériques $v(x)$ et θ_y

Les nœuds	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Les déplacements [mm]	0.03	0.11	0.20	0.27	0.30	0.28	0.20	0.07	-0.08	-0.25
Les rotations en [rad]	0.62	0.89	0.84	0.53	0.05	0.51	0.51	1.04	1.68	1.75

IV 1.5.2. Les rotations :

Les rotations de la poutre sont calculées par la formule suivante :

$$\theta_y = -\frac{dw}{dx}$$

Mais les calculs sont faits par MATLAB et la figure suivante nous montre les rotations pour chaque élément de la poutre discrétisé :

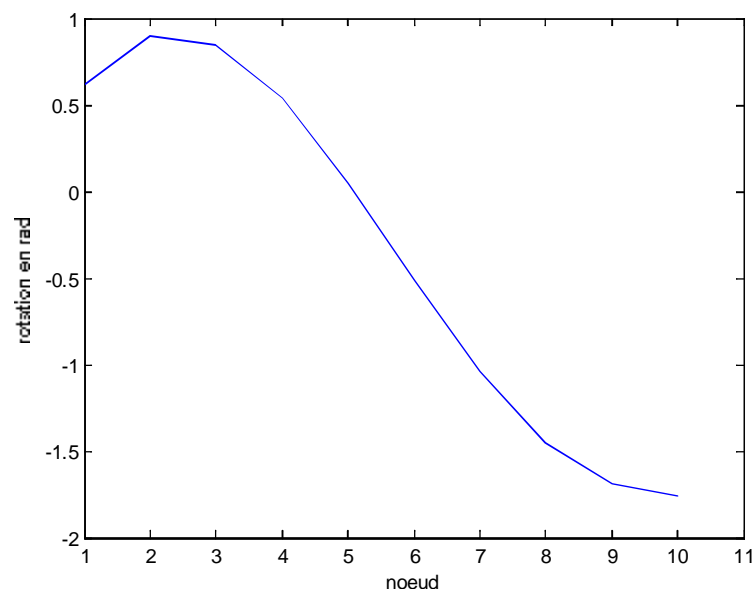


Figure (IV-5): les rotations en rad

Remarque :

- Pour les sens des déplacements, ils sont considérés positifs de bas vers le haut tandis que le sens positif des rotations correspond au sens anti-horaires.
- Les déplacements horizontaux sont nuls.
- L'intensité de la force a de l'influence sur la poutre (les déplacements)
- Les résultats (les déplacements) changent avec le changement des dimensions.
- On remarque aussi que si on remplace le matériau (changement de E et ρ) en gardant les mêmes dimensions de la poutre les résultats diffèrent.

IV.2. Méthode des éléments finis isogéométriques :

La méthode du calcul des éléments finis isogéométriques est la même que dans les éléments finis classiques, la différence est dans la façon de représenter la géométrie.

IV.2.1. création du modèle :

Comme le concept de l'analyse isogéométrique l'indique, nous allons commencer par modéliser la géométrie par une courbe NURBS. Vu la simplicité de la géométrie, elle sera représentée par une simple droite reliant les deux point de contrôles $x_1=0$ et $x_2=100$ associés à deux fonctions de base NURBS ($n=2$), d'ordre $p=1$ et de vecteur nodal $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$ et de poids $w = \{1, 1\}$. La figure (IV-6) montre l'allure des fonctions de base

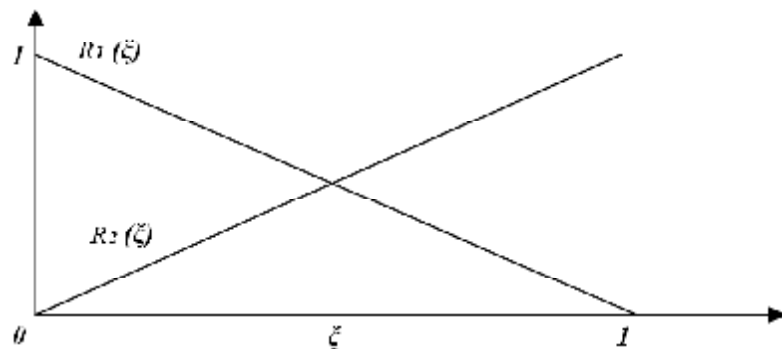


Figure (IV-6): allure des fonctions de base NURBS d'ordre 1 définissant la poutre

IV.2.2. discrétisation (raffinage):

Pour obtenir de bons résultats, nous devons raffiner la courbe NURBS en dix (10) éléments par insertion de nœuds et en élevant l'ordre de fonction de la base $p=4$ dans le choix de notre poutre, et le nouveau vecteur nodal est :

$$\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/10, 2/10, 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10, 1, 1, 1, 1, 1]$$

La figure suivante présente les fonctions de base de NURBS utilisé et ses dérivées :

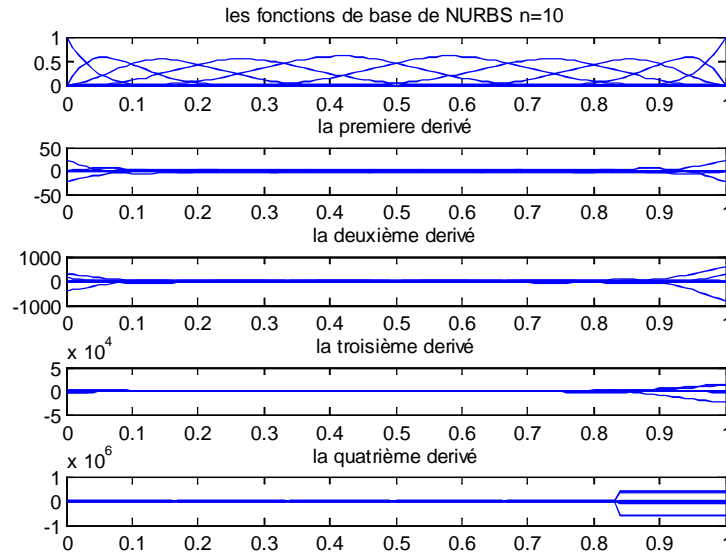


Figure (IV-7):fonctions de base NURBS et ses 4 dérivés

IV.2.3. Les matrices de masse et de rigidité :

Dans la méthode des éléments isogéométriques on s'intéresse beaucoup plus à la discrétisation de la géométrie.

Les matrices de raideur et de masse pour le modèle sont obtenues à partir des formes intégrales de BERNOULLI, les équations (III.15) et (III.16) vues précédemment :

$$\mathbf{K}_e = \int_0^l \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} EI \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} dx, \text{ pour calculer la rigidité de la poutre (modèle)}$$

$$\mathbf{M}_e = \int_0^l \mathbf{N}^T \rho A \mathbf{N} dx, \text{ pour calculer la matrice de masse de la poutre}$$

Les conditions aux limites sont introduites dans les calculs en supprimant la première ligne et la première colonne des matrices de rigidité et de masse. Les deux matrices sont de dimensions (9,9) après l'application ces conditions aux limites (encastrement).

IV.2.3. Les valeurs et les vecteurs propres : (modes propres)

Après avoir obtenu les deux matrices de rigidité et de masse du modèle, on passera aux valeurs propres et vecteurs propres avec l'utilisation et la résolution de l'équation :

$$([\mathbf{K}] - \lambda_i [\mathbf{M}])\{\varphi\} = 0$$

On peut trouver les modes propres de la structure.

La programmation faite pour $n=10$ donne les modes propres suivants :

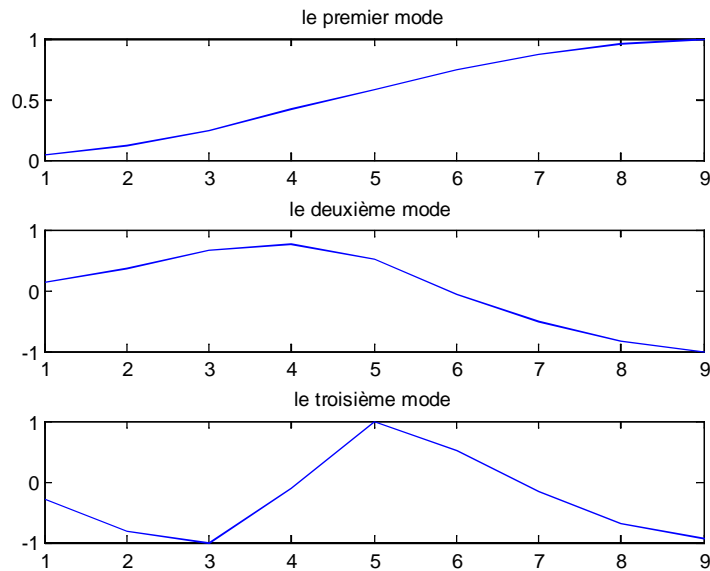


Figure (IV-8): les modes propres du modèle

Remarque :

La méthode et la procédure de travail dans les deux méthodes sont les mêmes, la méthode des éléments finis classiques et la méthode isogéométrique, dans la première (MEF) on a fini la résolution, mais pour la deuxième on s'est limité à calculer les modes propres du modèle puisque la suite est la même.

IV.2.4. Augmentation des fonctions de base et l'ordre :

Dans l'analyse isogéométrique on peut augmenter les fonctions de bases NURBS et même l'ordre sans changement du modèle et avoir des résultats différents et meilleurs. Les figures ci-dessous montrent le changement de ces fonctions et modes :

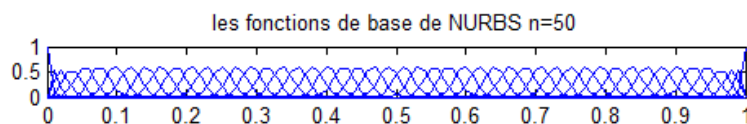


Figure (IV-9): Fonction de base $n=50$ et $p=4$

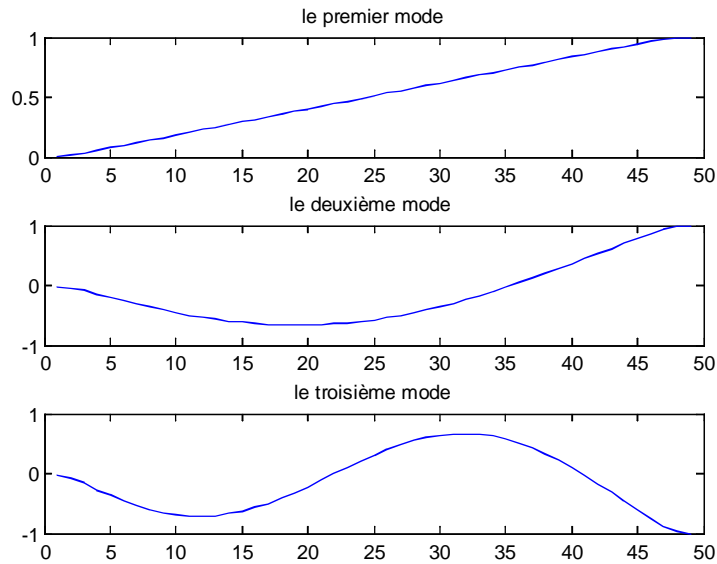


Figure (IV-10): Mode propre $n=50$ et $p=4$

IV.2.5. Comparaison des deux méthodes :

Pour la méthode des éléments finis classiques (MEF), nous avons donné les résultats des fréquences propres du modèle (poutre) et les déplacements des nœuds pour une force donnée.

Pour la méthode isogéométrique, on a prit le même modèle, l'utilisation de logiciel MATLAB pour les calculs nous a permis de trouver un programme pour toute la poutre discrétisé. On a trouvé les modes propres (déplacements) du modèle pour les fonctions de bases NURBS $n=10$.

Par la suite on a augmenté dans le même programme le nombre de fonctions de base avec $n=50$ c'est-à-dire qu'on a discrétisé (raffiné) la poutre en 50 éléments ce qui nous donne des résultats meilleurs que ceux de la MEF.

Autrement dit : le modèle analyse a été subdivisé en plusieurs éléments et on peut élever la subdivision.

IV.2.6. Différence entre les deux méthodes :

Le tableau suivant présente quelques différences entre l'analyse isogéométrique en utilisant les NURBS et l'analyse aux éléments finis classiques :

Tableau 6 : la comparaison entre MEF classique et isogéométrie nouvelle

Analyse isogéométrique utilisant les NURBS	Analyse aux éléments finis classiques
<ul style="list-style-type: none">-description exacte de la géométrie-utilise les points de contrôles-utilise les variables de contrôles-h-p-k raffinement- Continuité élevée et facilement contrôlée	<ul style="list-style-type: none">- description approximative de la géométrie-utilise les points nodaux-utilise les variables nodales-h-p raffinement-continuité C^0, fixée

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale :

Dans ce travail nous avons tout d'abord présenté la modélisation géométrique en utilisant les différents techniques de modélisation DAO, comme le modèle de Bézier qui utilise les fonctions de base de Bernstein ensuite le modèle B-Spline qui est plus complexe par rapport au premier à mettre en œuvre mais il présente tous les avantages de ce dernier sauf ces inconvénients, le modèle B-Spline nous donne des degrés de liberté supplémentaires, il dépend des points de contrôle, mais aussi des vecteurs nœuds pour représenter la géométrie. Ensuite les fonctions de base NURBS sont présentées, cette partie du travail nous a permis de maîtriser ces modèles en vue de les utiliser comme fonctions de base pour les éléments finis isogéométriques.

Nous avons aussi résumé le modèle aux éléments finis classiques pour les éléments poutre et le nouveau modèle d'analyse basé sur les NURBS.

Le but de ce travail était la comparaison entre deux méthodes analytiques, la méthode classique et la nouvelle méthode (isogéométrique) afin de trouver la plus bonne, et comme application, nous avons développé le modèle isogéométrique pour les poutres.

Enfin, nous pouvons conclure que la méthode des éléments finis isogéométriques adonne des résultats exactes pour une géométrie précise et facilite la subdivision des domaines (raffinement) en plusieurs éléments très proches entre eux.

Ce travail nous a permis encore de maîtriser des outils numériques d'une nouvelle génération d'éléments finis tout en exploitant des méthodes numériques universelles.

A titre de conclusion générale, théoriquement l'analyse isogéométrique est meilleure, mais il reste à le prouver ou la comparer avec des mesures expérimentales pour pouvoir valider l'exploration numérique établie.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE

Bibliographie :

- [1]. **BOURIF.K et HAMOUR.M**, Conception et usinage des formes complexes, mémoire d'ingénieur (UMMTO) 2005
- [2]. **Les piegl Wayne Tiller**, The NURBS book 2nd Edition, 1996].
- [3]. **J-C FIOROT & P JEANNIN**, courbe et surface rationnelle (application en CFAO) .Edition MASSON 1989].
- [4]. **THOMAS.J.R.Hughes, J.A.cottrell, Y.Bazilevs.Isogeometric** analysist oward integration of CAD and FEA, 2010
- [5]. **Prof. Dr. Eleni Chatzi**, the Finite Element Method for the Analysis of, Non-Linear and Dynamic Systems, 24September, 2010].
- [6]. **A.Wall, MoritzA.Frenzel, Christian Cyron** Isogeometric structural shape optimization Comput.Methods Appl.Mech.Engrg.197 (2008)2976–2988.
- [7]. **A.Wall, MoritzA.Frenzel, ChristianCyron** Isogeometric structurals hape optimization Comput.MethodsAppl.Mech.Engrg.197
- [8]. **ALESSANDRO REALI**, an Isogeometric Analysis Approach for the Study of Structural Vibrations, Pavia, October 2004
- [9]. **Seung-Hyun H**, Isogeometric Shape Design Optimization Using NURBS Basis Functions, Thesis SEOUL National University, February 2010.
- [10]. **MR.SEGHIR A**: method des elements finis (MEF) universite A Mira BEJEAIA