

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI -TIZI-OUZOU  
FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE



## MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME MASTER EN GENIE MECANIQUE  
OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

### THÈME

*Détection d'endommagement par la  
méthode de courbure de la charge uniforme  
surfactive (ULS)*

Présenté par :

Mr : TIACHACHT Samir

Réalisé par :

Mr : BOUDJEMAI Takfarinas

*Promotion 2013/2014*

## Remerciement

*Louange à Dieu, qui m'a guidé, et sans lui je n'aurais jamais été sur la bonne voie.*

*Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leurs patiences.*

*Je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de loin ou de près ont contribué à finaliser ce travail que j'espère sera à la hauteur de leurs engagements.*

*Je cite nommément :*

- *Mon encadreur, Mr TIACHAHT pour qui j'exprime ma gratitude pour son encadrement, son aide, sa confiance, et son soutien incessant durant mon projet.*

- *Les membres de jury qui me font l'honneur de présider et d'examiner ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes enseignants ayant crus en moi et ce depuis le primaire.*

# Dédicaces

*Je dédie ce travail, particulièrement, à mes parents ; Ali  
et Fatma.*

*A mes frères : Karim, Mouhwali et Massi.*

*A mes sœurs : Meriem et Nadia ainsi qu'à son mari Ali et leur  
adorable petite fille Ellicia.*

*Ainsi qu'à toute la famille BOUDJEMAI en général.*

*Sans oublier tous mes amis(es) avec qui j'ai passé des moments  
inoubliables durant tout mon cursus du primaire à l'université  
et à tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.*

**SOMMAIRE**

Remerciements.....	i
Dédicace.....	.ii
Sommaire.....	iii
Liste des figures.....	vi
Liste des tableaux.....	x
Nomenclature .....	xi
<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1: Recherche bibliographies</b>	
1.1. Introduction .....	3
1.2. Analyse de vibration .....	5
1.2.1. Analyse de vibration en utilisant la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli.....	10
1.2.2. Analyse vibratoire avec une fissuration par fatigue.....	13
1.2.3. Analyse vibratoire en utilisant la théorie de la poutre de Timoshenko.....	14
1.3. Grandeur d'endommagements.....	15
1.3.1. Utilisation de la fréquence pour l'estimation .....	15
1.3.2. L'évaluation en utilisant les déformées modales (MAC) .....	19
<b>Chapitre 2 : Méthode des éléments finis</b>	
2.1 Généralités.....	24
2.2 Démarche éléments finis .....	25
2.2.1 Discrétisation géométrique.....	26
2.2.2. Approximation nodale.....	26
2.2.2.1. Définition de l'approximation nodale .....	27
2.2.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements. ....	27
2.2.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.....	28
2.2.5. Calcul des matrices élémentaires .....	28
2.2.6. Assemblage des matrices élémentaires .....	29
2.2.7. Elément fini barre.....	29

2.2.7.1. Définition .....	29
2.2.7.2. Elément barre dans le plan .....	31
➤ Identification du problème .....	31
➤ Fonction d'interpolation.....	31
➤ Relation entre déformation et déplacement .....	32
➤ Matrice de rigidité d'une barre dans le repère local .....	33
➤ Matrice de masse d'une barre dans le repère local .....	33
➤ Transformation dans le repère global .....	33
2.2.7.3. Elément barre tridimensionnelle .....	35
2.3. Elément fini poutre .....	36
2.3.1. Définition .....	36
2.3.2. Elément poutre dans le plan .....	37
➤ Identification du problème : .....	37
➤ Fonction d'interpolation .....	38
➤ Déplacements - déformations.....	38
➤ matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan.....	39
➤ Matrice de masse d'un élément poutre dans un plan .....	40
➤ Transformation dans le repère global .....	41
2.3.3. Elément poutre tridimensionnelle .....	41
➤ La matrice de rigidité .....	41
➤ La matrice de masse .....	43
➤ Transformation dans le repère global .....	43
2.3.4. Charges appliquées sur les éléments.....	48
2.3.5. Assemblage des matrices élémentaires .....	49
2.3. Système d'équations aux valeurs propres .....	51
2.4. Conclusion .....	53
<b>Chapitre 3: Méthode de courbure de la charge uniforme surfacique (ULS)</b>	
3.1. Introduction .....	54

3.2. Théorie .....	55
3.2.1 L'ULS estimé par la flexibilité modale.....	55
3.2.2. Courbure d'ULS.....	56
3.2.3. Courbure de NULS .....	58
3.2.4. La localisation d'endommagement par des changements de la courbure dans la NULS sous des mesures bruyantes .....	61

## **Chapitre 4 : Application de la méthode de courbure d'ULS**

4.1. Introduction .....	62
4.2. Cas d'une poutre encastree-libre.....	63
4.2.1. Les propriétés des modèles et les descriptions d'endommagements .....	63
4.2.2. Simulation des endommagements sur la structure.....	64
4.3. Simulation numérique .....	65
4.3.1. Un seul élément endommagé .....	65
4.3.2. Deux éléments endommagés.....	72
4.3.3. Trois éléments endommagés .....	78
4.3.4. Quatre éléments endommagés .....	81
4.4. Conclusion.....	84
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>85</b>
Liste des références bibliographiques.....	86

## Liste des figures

- Fig. 1.1 :** poutre fonctionnellement évalué fissurée sur une base de Winkler-Pasternak .....6
- Fig. 1.2 :** Poutre encastrée ayant un cas d'endommagements induit aux deux éléments 4 et 12 .....6
- Fig. 1.3 :** Poutre encastrée ayant 15 éléments, dans lesquels les éléments 4 et 12 sont endommagés .....7
- Fig. 1.4 :** La géométrie de la poutre analysée.....7
- Fig. 1.5 :** Maillage par éléments finis d'une poutre encastrée entaillée .....7
- Fig. 1.6 :** La déflexion d'une poutre encastrée fissurée avec la MEF.....7
- Fig. 1.7 :** Modélisation par élément fini de la poutre fissurée.....8
- Fig. 1.8 :** Un élément de type poutre fissuré a été soumis à une force axiale, à la force de cisaillement et au moment de flexion (poutre en coupe rectangulaire) .....9
- Fig. 1.9 :** Analyse d'une poutre encastrée : (a) une poutre discrétisée avec une fissure à  $i^{\text{ème}}$  pas; (b) une fissure modélée par un ressort de rotation équivalent .....10
- Fig. 1.10 :** Déflexion statique d'une poutre encastrée : (a) chargement concentré et (b) chargement uniformément réparti .....10
- Fig. 1.11 :** La poutre encastrée modélé avec une fissure à l'arête : (a) une poutre encastrée avec une fissure à l'arête ; (b) un modèle de deux-segment avec un ressort de rotation sans masse ; (c) chargement incliner-concentré et (d) chargement uniformément distribuée .....11
- Fig. 1.12 :** Modèle élément fini à deux dimensions .....11
- Fig.1.13 :** Une poutre encastrée avec une fissure ouverte à l'arête sous un chargement mobile .....11

## Liste des figures

---

<b>Fig. 1.14</b> : Modèle structural.....	11
<b>Fig. 1.15</b> : Un schéma d'un échantillon et la méthodologie d'excitation .....	12
<b>Fig. 1.16</b> : Installation expérimentale.....	13
<b>Fig.1.17</b> : Model élément fini représentant les endommagements d'une poutre encastrée-libre .....	13
<b>Fig. 1.18</b> : La géométrie de la poutre encastrée fissurée .....	14
<b>Fig. 1.19</b> : La géométrie d'une poutre encastrée fissurée .....	16
<b>Fig. 1.20</b> : Modèle schématique de poutre.....	16
<b>Fig. 1.21</b> : Modélisation des poutres à plusieurs fissures.....	16
<b>Fig. 1.22</b> : Poutre encastrée : (a) avec la fissure ; (b) modèle double-fissuré de poutre encastrée.....	17
<b>Fig. 1.23</b> : L'installation de matériels.....	19
<b>Fig. 1.24</b> : La géométrie de la poutre encastrée avec une fissure à l'arête.....	20
<b>Fig. 1.25</b> : Prototype fissuré de poutre encastrée.....	20
<b>Fig. 1.26</b> : La relation entre le 1-COMAC par rapport au degré de liberté. ....	22
<b>Fig.2.1</b> : Erreur de discrétisation géométrique.....	26
<b>Fig. 2.2</b> : Géométrie d'un élément barre .....	29
<b>Fig. 2.3</b> : Modélisation d'un élément barre. ....	30
<b>Fig. 2.4</b> : Élément barre dans le repère local $(i, \bar{x}, \bar{y})$ .....	31
<b>Fig. 2.5</b> : Élément dans le repère global.....	34
<b>Fig. 2.6</b> : Élément barre spatiale.....	35
<b>Fig. 2.7</b> : Élément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté.....	37
<b>Fig. 2.8</b> : Élément poutre tridimensionnelle.....	42
<b>Fig. 2.9</b> : Axes locaux d'un élément poutre.....	44
<b>Fig. 2.10</b> : Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.....	44

## Liste des figures

---

<b>Fig. 2.11</b> : Axes principaux d'un élément poutre.....	46
<b>Fig. 2.12</b> : Rotations correspondant à un élément vertical.....	47
<b>Fig. 2.13</b> : Charges sur un élément.....	49
<b>Fig. 2.14</b> : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis.....	49
<b>Fig. 3.1</b> : les forces internes induites par des endommagements : (a) la structure intacte et (b) la force interne agissant sur l'élément endommagé .....	57
<b>Fig. 3.2</b> : Diagramme de la méthode proposé de détection d'endommagements .....	60
<b>Fig. 4.1</b> : le modèle numérique de la poutre encastree-libre, et les endroits des endommagements: (a) vue de côté; (b) vue de face pour le model intact; (c) vue de face pour un seul endommagement; et (d) vue de face pour des endommagements multiple .....	62
<b>Fig.4.2</b> : Structure saine .....	66
<b>Fig. 4.2.1(a)</b> : l'endommagement au niveau du 1 <sup>er</sup> élément de 10% .....	66
<b>Fig. 4.2.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau du 1 <sup>er</sup> élément de 10%.....	67
<b>Fig. 4.2.1(b)</b> : l'endommagement au niveau du 1 <sup>er</sup> élément de 80% .....	67
<b>Fig. 4.2.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau du 1 <sup>er</sup> élément de 80%.....	68
<b>Fig. 4.3.1(a)</b> : l'endommagement au niveau du 15 <sup>er</sup> élément de 20% .....	69
<b>Fig. 4.3.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau du 15 <sup>er</sup> élément de 20% .....	69
<b>Fig. 4.3.1(b)</b> : l'endommagement au niveau du 30 <sup>er</sup> élément de 60% .....	70
<b>Fig. 4.3.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau du 30 <sup>er</sup> élément de 60% .....	70
<b>Fig. 4.4.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 10 de 10 et 50% respectivement .....	73
<b>Fig. 4.4.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 10 de 10 et 50% respectivement .....	73
<b>Fig. 4.4.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 25 de 10 et 60% respectivement .....	74

## *Liste des figures*

---

<b>Fig. 4.4.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 25 de 10 et 60% respectivement .....	74
<b>Fig. 4.5.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 10 et 20% respectivement.....	76
<b>Fig. 4.5.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 10 et 20% respectivement.....	76
<b>Fig. 4.5.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 20 et 20% respectivement .....	77
<b>Fig. 4.5.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 20 et 20% respectivement .....	77
<b>Fig. 4.6.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 15 et 25 de 10, 20 et 50% respectivement .....	79
<b>Fig. 4.6.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 15 et 25 de 10, 20 et 50% respectivement .....	79
<b>Fig. 4.6.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12 et 30 de 10, 20 et 50% respectivement .....	80
<b>Fig. 4.6.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12 et 30 de 10, 20 et 50% respectivement .....	80
<b>Fig. 4.7.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 18 et 25 de 10, 20, 45 et 60% respectivement .....	81
<b>Fig. 4.7.1.1(a)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 18 et 25 de 10, 20, 45 et 60% respectivement .....	82
<b>Fig. 4.7.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 22 et 30 de 10, 20, 50 et 70% respectivement .....	82
<b>Fig. 4.7.1.1(b)</b> : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 22 et 30 de 10, 20, 50 et 70% respectivement .....	83

**Liste des tableaux**

**Tableau N°4.1 : Paramètres du model structurel .....63**

**Tableau N°4.2.1 .....65**

**Tableau N°4.2.2 .....68**

**Tableau N°4.3.1 .....72**

**Tableau N°4.3.2 .....75**

**Tableau N°4.4 .....78**

**Tableau N°4.5 .....81**

## Nomenclature

$u$ :	Vecteur des déplacements
$N$ :	La matrice ligne des fonctions d'interpolation
$\varepsilon$ :	Les déformations axiales
$\sigma$ :	Les contraintes normales
$D$ :	La matrice d'élasticité.
$F^e$ :	Le chargement extérieur élémentaire
$U^e$ :	Les déplacements aux nœuds
$K^e$ :	La matrice de rigidité élémentaire
$M^e$ :	La matrice de masse élémentaire
$\rho$ :	La masse volumique
$E$ :	Le module de Young
$A$ :	La section uniforme
$L$ :	Longueur
$f$ :	Les forces aux nœuds
$EI_z$ :	La rigidité de flexion.
$K^G$ :	La matrice de rigidité globale
$M^G$ :	La matrice de masse globale
$F^G$ :	Le chargement extérieur global
$\Psi$ :	La déformée modale
$\Lambda$ :	La matrice de valeurs propres

$\Phi$ :	La matrice des vecteurs propres
$G$ :	La matrice de flexibilité
$\Lambda_m$ :	La matrice de valeurs propres normalisée
$\Phi_m$ :	La matrice des vecteurs propres normalisée
$G_m$ :	La matrice de flexibilité normalisée
$u_i^D$ :	Vecteur des déplacements des éléments endommagés
$u_i^I$ :	Vecteur des déplacements éléments intacts
$M(x)$ :	les forces internes dues au chargement uniforme
$\alpha(i)$ :	Le critère d'endommagement
$NF_i(i)$ :	L'indice aberrant normalisé pour la localisation des endommagements

## **Introduction générale**

L'infrastructure civile, telle que des passerelles, des réseaux de pipe-lines, et des bâtiments, est susceptible des endommagements structurels avec le temps dû à la fatigue comme : la corrosion, les risques naturels, les endommagements invisibles etc. peuvent avoir comme conséquence la défaillance des structures, qui est très coûteuse en termes de vies humaines et dégâts matériels. Il est nécessaire d'acquérir l'information précise et en temps réel sur l'état d'endommagements de ces structures pour empêcher la défaillance catastrophique, pour augmenter la rentabilité de la maintenance, et pour prolonger la durée de vie. À cette fin, la SHM acronyme pour – structural health monitoring –, qui est la surveillance de l'état des structures a suscité l'attention considérable. Pendant les dernières trois décennies, la recherche sur l'identification d'endommagements à base de vibrations avait rapidement augmenté en utilisant de diverses caractéristiques de vibration, telles que des fréquences naturelles, des déformées modales, des courbures de la déformée modale, et la flexibilité modale.

Récemment, la flexibilité modale s'est montrée pour être un descripteur prometteur d'endommagements dû à sa sensibilité élevée pour s'endommager. La recherche dans l'identification d'endommagements à base des vibrations était une méthode de détection d'endommagements qui utilise des changements de la flexibilité modale. Les variantes notables ont utilisé la charge uniforme surfacique (ULS) acronyme pour – the uniform load surface –, prévue à partir de la flexibilité modale. La méthode d'ULS peut identifier un emplacement simple et elle se trouve aussi qu'il est facile de localiser des emplacements multiples d'endommagements. La localisation des vecteurs d'endommagements (DLV) acronyme pour – the damage locating vector –, sont basés sur des changements de flexibilité modale et utilisent un modèle d'élément fini intact. La méthode de DLV peut localiser des emplacements multiples d'endommagements aussi bien que l'emplacement simple de ce dernier. Cependant, elle a besoin d'un modèle d'élément fini intact pour exécuter la localisation d'endommagements. La méthode de courbure d'ULS, d'une part, peut

indiquer un emplacement endommagé simple avec sensibilité. Cependant, la sensibilité aux endommagements dépend des emplacements des sites multiples.

Ce travail, est consacré à l'étude d'une méthode numérique de détection d'endommagements dans une structure en poutre encastree-libre, en utilisant ses données modales. Pour une meilleure compréhension, il est structuré comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons d'abord une synthèse bibliographique des méthodes de détection et localisation d'endommagements.

Dans le chapitre 2, nous présentons les concepts de base de la méthode des éléments finis pour calculer des paramètres modaux.

Dans le chapitre 3, nous présentons la méthode proposée de détection des endommagements en utilisant la flexibilité modale.

Dans le chapitre 4 concerne la validation numérique de la méthode.

Finalement, une discussion des résultats de simulation numérique suivie d'une conclusion sur le travail termine le mémoire.

# **CHAPITRE 1**

## ***RECHERCHE BIBLIOGRAPHIES***

## Recherche bibliographies

### 1.1. Introduction

Les poutres sont considérées en tant qu'un des composants les plus importants dans des applications d'ingénierie. Les exemples de ces applications sont les poutres encastrées utilisés dans les modèles mécaniques et aérospatiaux tels que les ailes fixes d'avions, les pales de ventilateur d'hélicoptère etc. en outre, l'ingénierie de construction civile utilise ces structures dans les passerelles en porte-à-faux et les balcons. Les machineries et les structures de construction devraient être plus flexibles et capables de résister à des niveaux plus élevés de contraintes. Par conséquent, les meilleures conceptions de poutre encastrée sont basées sur l'optimisation de plusieurs objectifs à savoir, la force maximale et la longue durée de vie ajoutées au poids minimum et la rentabilité. Un certain nombre de techniques non destructives sont disponibles pour détecter des endommagements dans une structure. Leur utilisation et fiabilité sont par conséquent devenues un facteur important dans l'évaluation de l'état de la structure étudiée. Beaucoup d'ingénieurs et de scientifiques ont consacré leur temps et efforts afin de développer des techniques plus fiables, plus efficaces pour la détection d'endommagement [1].

L'idée de base dans toutes les techniques de détection d'endommagement par essais vibratoires réside dans l'idée que les paramètres modaux (fréquences, coefficient d'amortissement, déformés propres), mesurés sous fonction des propriétés physiques de la structure (rigidité, masse, amortissement). De ce fait, les modifications pouvant intervenir sur les propriétés physiques ou mécaniques doivent être détectables à travers des changements des paramètres modaux.

Récemment, l'identification d'endommagements structurels à base de vibrations a gagné beaucoup d'intérêt pour la recherche d'ingénierie. La théorie de base d'identification d'endommagements structurels à base des essais vibratoires est les

changements des propriétés structurales telles que la rigidité et la Masse. La présence des endommagements influence la réaction de vibration aussi bien que les propriétés dynamiques de la structure donnée.

Les propriétés dynamiques d'une structure sont en général : les fréquences naturelles, les déformées modales et les constantes d'amortissement. Ces propriétés sont utilisées comme des indicateurs d'endommagements de la structure testée. La détection des endommagements structurels un peu plutôt permet aux travaux de maintenance et de réparation d'étendre la vie du système. Afin d'assurer l'état et la fiabilité de la structure, il est nécessaire d'exécuter le long terme, la surveillance de l'état de la structure pendant sa durée de vie continue à court terme.

Dans l'identification d'endommagements des structures à base des essais vibratoires, il est très important d'extraire des informations des paramètres basés sur des mesures de réponse structurelle. L'information globale d'une structure fournit l'exactitude et les données critiques pour déterminer le statut de la structure, qui réfléchit sur les propriétés dynamiques à savoir la fréquence naturelle. L'analyse modèle expérimentale a été employée couramment dans la communauté de la recherche d'ingénierie pour extraire des paramètres de modèle structural tels que des fréquences naturelles, la déformée modale et la constante d'amortissement à partir des mesures de vibration. Ces paramètres modèles sont nécessaires pour la classification d'endommagements structurels et la surveillance de l'état la structure. Les effets des endommagements structurels peuvent être classifiés comme linéaires ou non linéaires. Définit un système de classification pour des méthodes d'identification d'endommagements comme suit :

Niveau 1 : Détermination de l'existence d'endommagement dans la structure.

Niveau 2 : Localisation d'endommagement.

Niveau 3 : Quantification de sévérité de l'endommagement.

Niveau 4 : Prédiction de la durée de vie résidentielle.

## 1.2. Analyse de vibration

Basé sur les changements des propriétés dynamiques des structures pour détecter les endommagements, la détection d'endommagements à base de mesures de vibrations (DEBV) est une technique de surveillance de l'état d'une structure étudiée expérimentalement et numériquement.

Nassar M, Matbuly MS et Ragb O. [2] ont introduit les effets des caractéristiques géométriques et élastiques de poutre encastrée sur la fréquence naturelle.

La méthode différentielle de quadrature a été utilisée pour analyser la vibration libre d'une poutre encastrée fissurée reposant sur la base élastique. Un modèle de ligne de ressort est employé pour simuler la fissure du matérielle fonctionnelle évaluée du porte-à-faux (Fig. 1.1). Les résultats des auteurs sont conformes au résultat d'études précédent.

Les différents paramètres de la fissure (emplacement, hauteur et longueur) dans la plaque rectangulaire encastrée ont été étudié par Chen LH, Sun Y et Zhang W.[3] pour étudier leur effet sur les caractéristiques de vibration. En outre, la fréquence naturelle et la déformée modale ont été analysées. L'étude a utilisé deux fonctions du modèle : d'abord, une plaque rectangulaire intact comme une combinaison des fonctions de poutre, en second lieu, des fonctions d'angle présentant la discontinuité du déplacement et de la pente le long de la fissure. Ils ont montré que, la méthode de Ritz peut être prises comme une fonction modale pour obtenir les fréquences naturelles et les déformées modales.

Le déplacement de vibration et la fréquence naturelle d'une force microscope atomique (AFM) d'une poutre fissurée ont été obtenus par la Lee HL et Chang WJ. [4]. L'étude incluse l'analyse des effets de la flexibilité de la fissure, de l'emplacement de la fissure, et de la longueur d'extrémité sur le déplacement de vibration

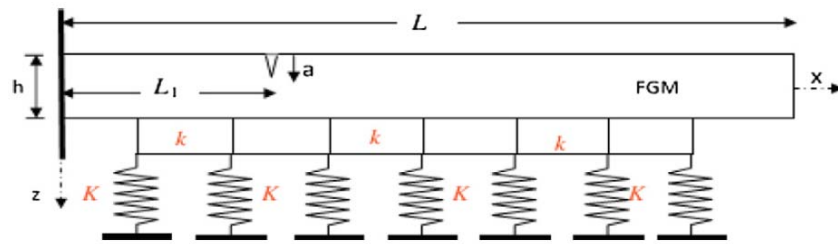


Fig. 1.1 : poutre fonctionnellement évalué fissurée sur une base de Winkler-Pasternak.

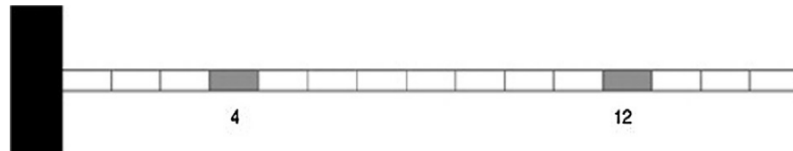
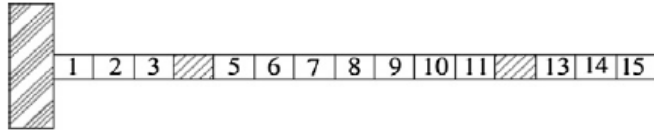


Fig. 1.2 : Poutre encadrée ayant un cas d'endommagements induit aux éléments 4 et 12.

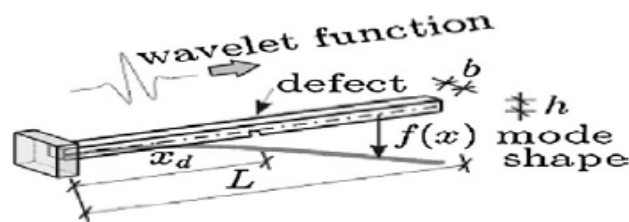
Seyedpoor [9] a proposé un procédé en deux étapes pour identifier l'emplacement et l'ampleur des multiples endommagements d'une poutre (Fig. 1.2). Un indicateur basé sur l'énergie de déformation modale (MSEBI) est la première étape de procédé utilisé pour localiser exactement l'endommagement ultime d'une poutre, qui sont a calculé en fonction de l'analyse du modèle extrait d'une modélisation éléments finis. La quantification de l'endommagement est déterminée dans la deuxième étape, en utilisant un indicateur d'optimisation en fonction des résultats de la première étape. Par conséquent, la combinaison des deux indicateurs lui permet de localisée avec précision les endommagements dans la structure.

Naseralavi et al [6] présente un algorithme qui utilisent les fréquences naturelles pour la détection des endommagements. Cette méthode est basée sur une analyse de sensibilité de la structure, elle se compose de deux étapes principales : dans la première étape, tous les éléments de la structure sont ordonnés en fonction de leur probabilité d'endommagements dans un vecteur désigné comme un vecteur de référence de la probabilité d'endommagements d'éléments. Dans la deuxième étape, une assez petite partie des vecteurs de probabilité d'endommagements d'éléments sont judicieusement choisi pour former un système d'équations non linéaires, qui sont ensuite résolues pour détecter les endommagements potentiels.



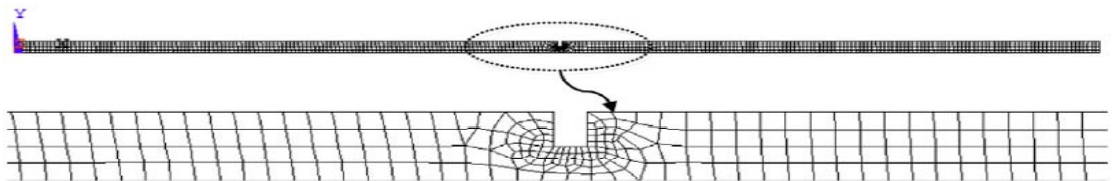
**Fig. 1.3 :** Poutre encadrée ayant 15 éléments, dans lesquels les éléments 4 et 12 sont endommagés.

Rucka M. [7] a utilisé la technique de détection de dommages basée sur les ondelettes sur une poutre cantilever avec des endommagements sous la forme d'une seule fissure de différentes profondeurs. L'auteur à présenter des résultats d'analyses expérimentales et numériques de la détection d'endommagements qui se base sur l'exploitation des modes d'ordre supérieur. Huit premiers modes sont pris en compte et l'influence de l'ordre du mode sur l'efficacité de la détection des endommagements par la transformée en ondelettes continue sont analysées.



**Fig. 1.4 :** La géométrie de la poutre analysée.

Wu et *al.* [8] ont rapporté une recherche de détection de fissure sur une poutre cantilever d'aluminium sous un déplacement statique par l'exploitation la transformée d'ondelette spatiale. Ce procédé est amélioré pour détecter la position de la fissure. Ondelettes de Gabor est utilisé pour analyser et identifier le profil statique de poutre cantilever dont la fissure soumis à un déplacement statique.

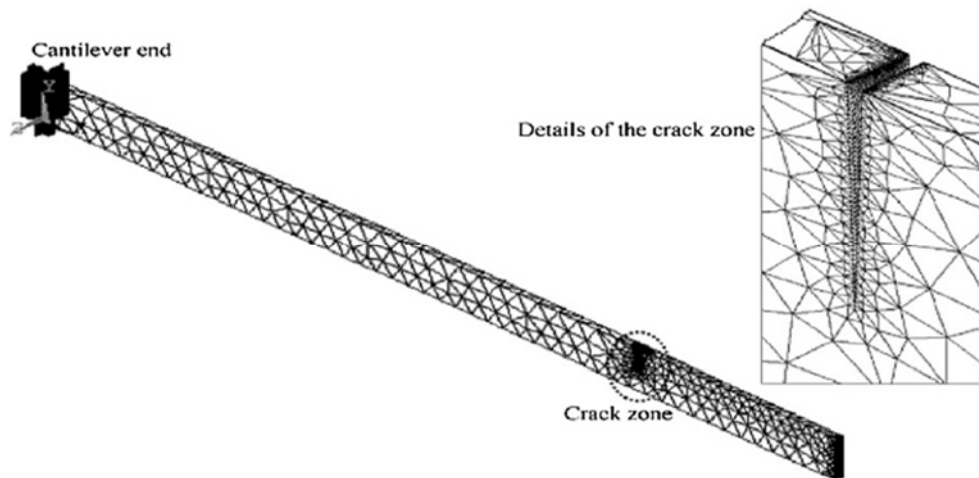


**Fig. 1.5 :** Maillage par éléments finis d'une poutre encadrée entaillée.



**Fig. 1.6 :** Le déflexion d'une poutre encadrée fissurée avec la MEF.

L'analyse d'une fissure et deux fissures dans une poutre cantilever sous l'effet des vibrations forcées ont été traité par Orhan [9]. Des informations appropriées au sujet de la détection de fissures simples et deux ont été fournis à partir des résultats d'analyse de vibrations libres, tandis que, la présence d'une fissure ne peut être prédite par l'analyse de vibrations forcées. Pour décrire les changements d'emplacement et la profondeur de la fissure, la réponse dynamique des vibrations forcées est mieux que la réponse dynamique de vibrations. La réduction de la fréquence propre est inférieure lorsque l'emplacement de la fissure se déplace vers l'extrémité libre. Il a été trouvé que la direction des fissures a un effet sur les propriétés dynamiques, où la présence de fissures dans l'impact unidirectionnel est supérieure. En cas de plusieurs fissures dans diverses directions, cette volonté de réduire l'impact sur les propriétés dynamiques et la baisse est moins. Par conséquent, lorsque l'emplacement de la fissure au sommet il sera affecté plus que lorsque la poutre a deux fissures dans différents côtés (haut et bas).



**Fig. 1.7** : Modélisation par élément fini de la poutre fissurée.

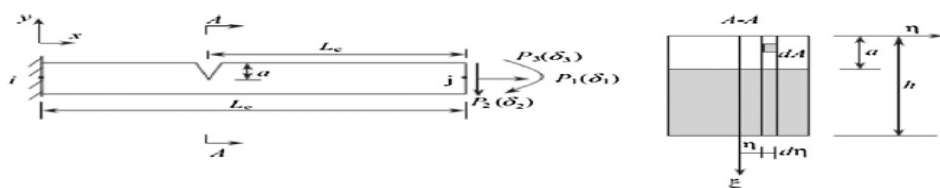
Cam et *al* [10] ont étudié l'analyse dynamique d'une poutre fissurée en fonction de la méthode impact choc. L'investigation de l'effet de l'emplacement et de la profondeur des fissures ont été fait expérimentalement. L'étude visait à recueillir de l'information sur les différentes profondeurs et l'emplacement de la fissure dans une poutre fissuré par l'analyse vibratoire. La comparaison des résultats expérimentaux

avec le modèle éléments finis construit par le logiciel ANSYS était satisfaisante. Les conclusions de l'étude étaient les suivants :

- a. La fréquence propre augmentée et l'amplitude de basses fréquences diminuées lorsque l'emplacement de la fissure était proche de l'extrémité fixe.
- b. L'amplitude des vibrations augmente et haute fréquence diminue lorsque la profondeur de la fissure augmente en raison de la réduction de la rigidité qui est inversement proportionnelle à la profondeur d'une fissure.
- c. une grande précision a été obtenue.

Sinou et *al* [11] ont étudié l'influence des fissures transversales. Le but principal de l'étude était d'étudier les effets de la fissure en tenant compte du comportement dynamique non linéaire dû à la présence de fissure transversale afin d'obtenir quelques indications qui pourraient être utilisé dans la détection de la présence d'une fissure dans le système de rotation. La variation de la fréquence de l'arbre, ainsi que le composant harmonique de la réponse du système dynamique sont les principaux effets dus à la présence d'une fissure dans un arbre.

Zheng DY et Kessissoglou NJ. [12] ont obtenu les fréquences naturelles et les déformées modales d'une poutre qui a une fissure rectangulaire en utilisant la méthode des éléments finis. Pour une poutre fissurée, une nouvelle fonction de forme d'interpolation a été développée avec succès pour calculer les modes de vibration, qui peuvent parfaitement satisfaire les conditions locales de flexibilité aux emplacements des fissures (Fig. 1.8). En comparaison avec des résultats d'analyse trouvés la nouvelle matrice de rigidité obtenue en utilisant la matrice de flexibilité supplémentaire globale peut donner des fréquences naturelles plus précises que ceux résulté de l'utilisation de la matrice de flexibilité supplémentaire locale.



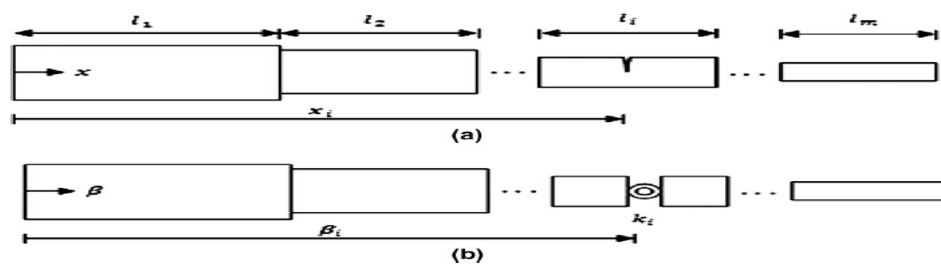
**Fig. 1.8** : Un élément de type poutre fissuré a été soumis à une force axiale, à la force de cisaillement et au moment de flexion (poutre en coupe rectangulaire).

### 1.2.1. Analyse de vibration en utilisant la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli

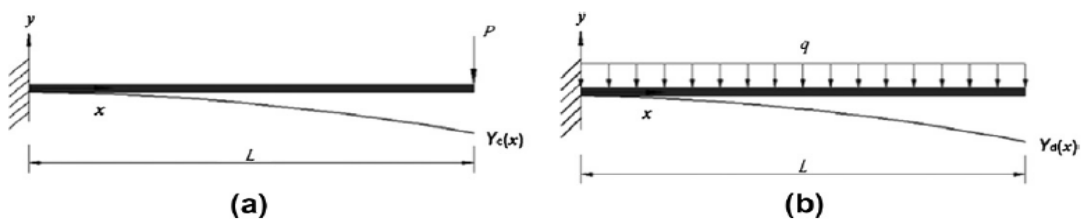
Basé sur la méthode d'énergie, une analyse a été faite par la réf. [13] pour détecter, localiser, et quantifier les fissures pour les poutres d'Euler-Bernoulli. Les fréquences naturelles sont employées pour mesurer et estimer les déformées modales des poutres non-fissurées.

Les fissures sont modélisées comme des ressorts de rotation et indiquent un rapport entre les fréquences naturelles, les emplacements des fissures et leurs profondeurs. Des exemples numériques pour une poutre encadrée ont été présentés pour illustrer une, deux et trois fissures pour authentifier la méthode (Fig. 1.9). Régulièrement, la déformée modale et la déflexion statique sont extrêmement similaires dans les configurations employées pour identifier les endommagements dans une poutre (Fig. 1.10).

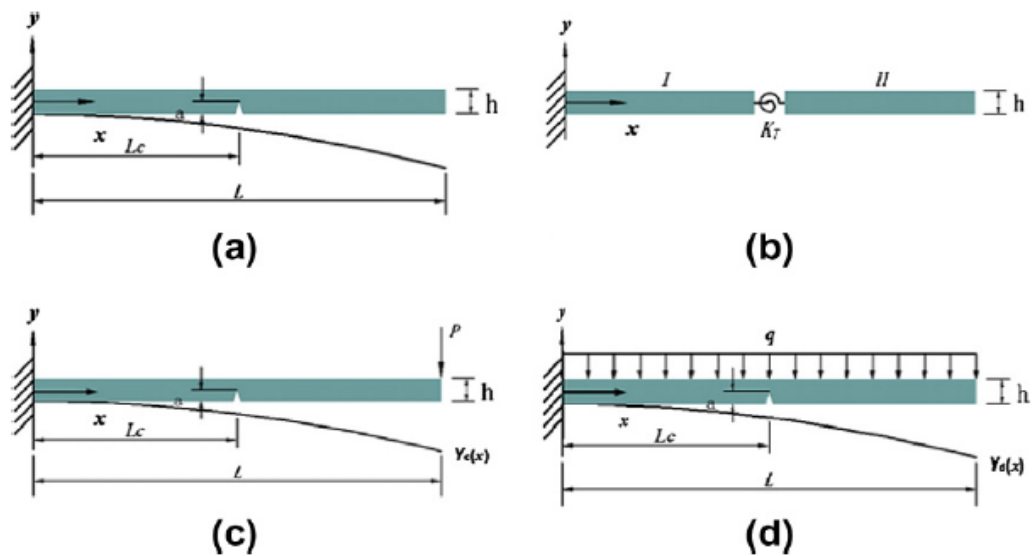
Une étude analytique sur les vibrations libre et forcée a été présentée par réf. [14], elle indique que les poutres homogènes adoptées d'Euler-Bernoulli contiennent des fissures ouvertes (Fig. 1.13). L'étude était sur trois genres de poutres ; poutres encadrée, articulées-articulées, et encadrées- encadrées pour obtenir les solutions analytiques des fréquences naturelles et des déflexions dynamiques.



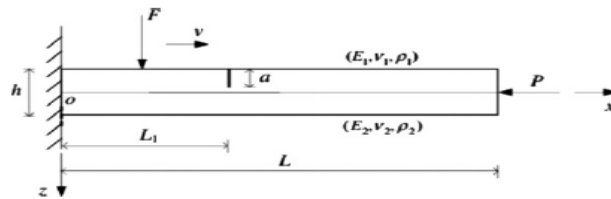
**Fig. 1.9** : Analyse de poutre encadrée : (a) une poutre discrétisée avec une fissure à  $j^{\text{ème}}$  pas ; (b) une fissure modélisée par un ressort de rotation équivalent.



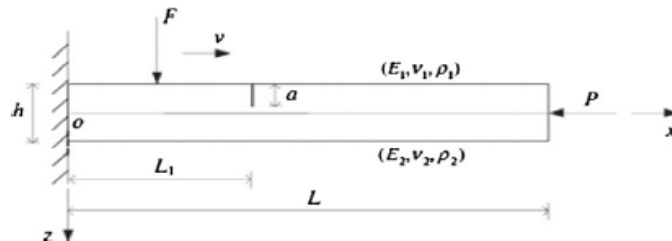
**Fig. 1.10** : Déflexion statique d'une poutre encadrée : (a) chargement concentré et (b) chargement uniformément réparti



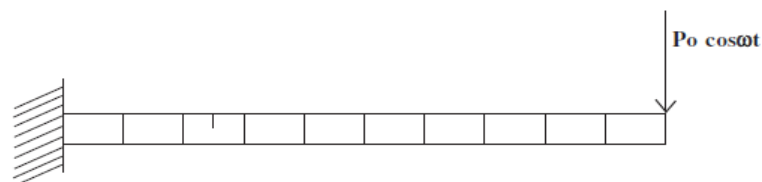
**Fig. 1.11** : La poutre encastree modelé avec une fissure : (a) une poutre encastree avec une fissure à l'arête ; (b) un modèle de deux-segment avec un ressort de rotation sans masse ; (c) chargement incliner-concentré et (d) chargement uniformément distribuée.



**Fig. 1.12** : Modèle éléme fin à deux dimensions.



**Fig. 1.13** : Une poutre encastree avec une fissure ouverte à l'arête sous un chargement mobile.



**Fig. 1.14** : Modèle structural.

Le but du travail de recherches de la réf. [15] était d'évaluer la réponse forcée d'une poutre fissurée d'Euler-Bernoulli. Ils ont utilisé beaucoup d'exemples numériques des poutres encastrees avec une simple fissure. La méthode d'éléme

fini a été employée pour développer un modèle mathématique de la poutre (Fig. 1.14). La méthode a pris la non-linéarité pour introduire la fissure en tant que matrice de la rigidité d'une structure pendant la vibration. L'équation différentielle du mouvement linéaire a été résolue par la méthode harmonique et balancée l'analyse de Fourier. Ils ont constaté que, le pic d'amplitude de résonance augmentée quand la taille de la fissure augmente et la position est maintenue fermée à l'extrémité, en revanche, la fréquence de résonance diminuée.

### 1.2.2. Analyse vibratoire de fissuration par fatigue

Une nouvelle méthode a été introduite par la réf. [16] pour détecter et localiser des endommagements par fatigue dans une poutre encastrée en aluminium (Fig. 1.15). Une taille différente avec l'emplacement différent, des endommagements a été réalisée dans une poutre. Basé sur des paramètres modaux mesurés, l'analyse a inclus une tentative d'identification d'endommagements avec les indicateurs d'endommagements les plus employés souvent. Pour définir les nouveaux indicateurs d'endommagements en utilisant les changements des fréquences naturelles et de la déformée modale (mesurée ou modélée) car la mesure des fréquences a beaucoup moins de perte de temps par rapport à la mesure totale de déformée modale.

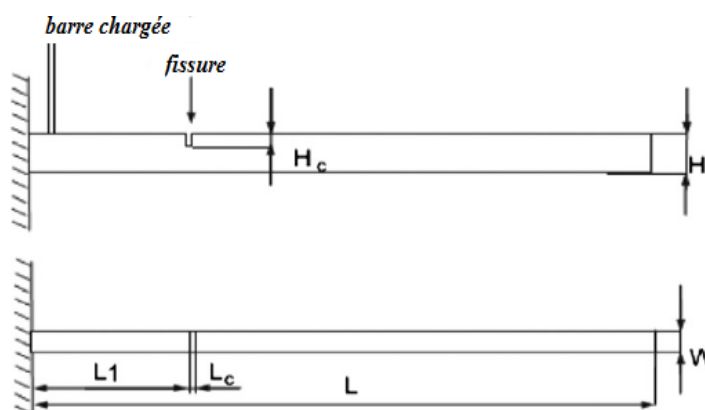


Fig. 1.15 : Un schéma d'un échantillon et la méthodologie d'excitation.

Le comportement dynamique d'une structure avec une fissure par fatigue change avec le niveau de la force d'excitation, de cette idée [17] a enregistré une nouvelle méthode pour identifier les endommagements dans une poutre encastrée. Ils ont

proposé une vraie fissure par fatigue qui n'exige pas la mesure relative sur une structure intégrale, et ils ont fait plusieurs mesures sur une poutre endommagée avec de différents niveaux de forces d'excitation (Fig. 1.16). Les auteurs ont employé le domaine de fréquence pour calculer les différences entre le comportement dynamique de la poutre avec une fissure par fatigue à une basse excitation et l'autre à une excitation élevée. L'analyse par éléments finis avec des résultats expérimentaux a montré un bon accord pour définir l'emplacement et le niveau de la fissure en utilisant la méthode d'incrément d'endommagements (Fig. 1.17).

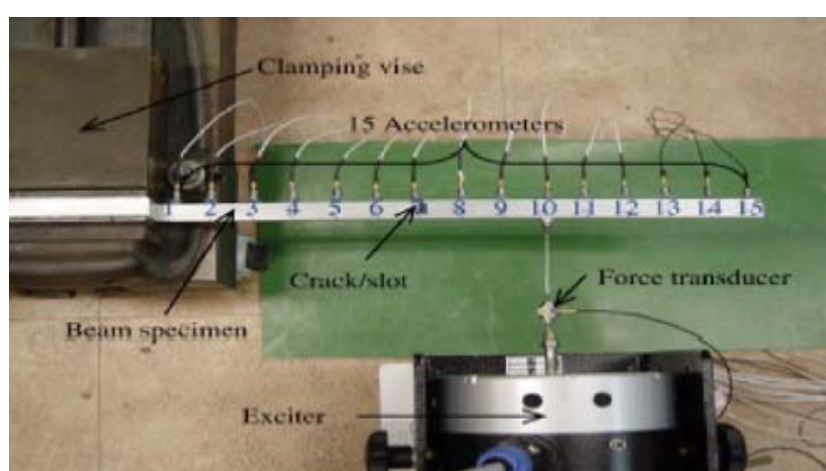


Fig. 1.16 : Installation expérimentale.

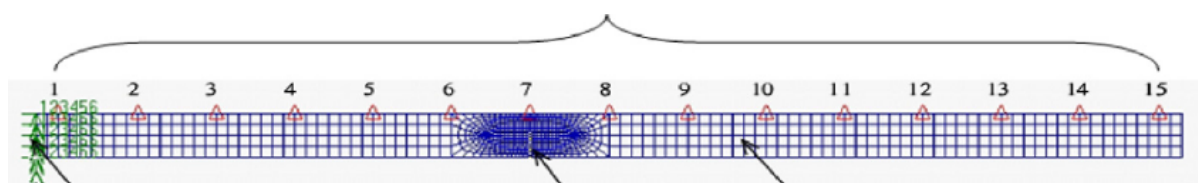


Fig.1.17: Finite element model representing the damaged cantilever beam structure.

### 1.2.3. Analyse vibratoire en utilisant la théorie de la poutre de Timoshenko

La recherche de Viola et *al.* [18] a inclus les changements de l'importance de la fréquence naturelle et le modèle de réponse introduit par la présence d'une fissure sur une poutre de Timoshenko de chargement axialement uniforme en utilisant une théorie de membre particulier. La théorie a été expliquée par deux exemples d'illustration de flexion. D'abord, des poutres couplé flexion-torsion avec différents conditions aux limites. En second lieu, l'influence de la force axiale, de la

déformation de cisaillement et de l'inertie rotationnelle sur les fréquences naturelles est étudiée. Des résultats précédents, ils ont notés que l'ouverture de la fissure a un effet plus significatif sur la fréquence quand les différentes profondeurs des fissures sont considérées.

Les caractéristiques de vibration d'une poutre de Timoshenko fissurée sont analysées par Kisa M et *al.* [19]. Ils ont appliqué deux méthodes : mode synthèse de composante et élément fini. La poutre divisée en deux segments en utilisant une matrice de flexibilité (Fig. 1.18). La théorie de mécanique de rupture dérivée des forces comme la conformité de la matrice inverse. Les calculs ont utilisé les facteurs d'intensité de contrainte et l'énergie de déformation. La théorie de la poutre de Timoshenko a modélisé chaque sous-structure en utilisant l'élément fini avec deux nœuds et trois degrés de liberté. L'approche présentée qui était appliquée, mènent au développement de la mise en place de conception qui a satisfait l'analyse précise des effets d'interface non linéaires.

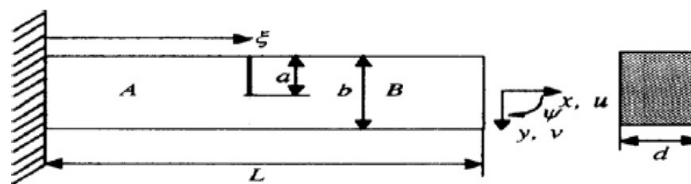


Fig. 1.18 : La géométrie de la poutre encastree fissurée.

### 1.3. L'ampleur d'endommagements

Beaucoup de recherche analytique précédente inclus, théorique et expérimental étudiés en employant les propriétés dynamiques pour déterminer l'ampleur des endommagements.

#### 1.3.1. Utilisation de la fréquence pour l'estimation

Une nouvelle méthode a été proposée par Loutridis S et *al.* [20] pour détecter la fissure dans une poutre selon la fréquence instantanée (IF). L'étude a porté le comportement dynamique pour la poutre avec une fissure de respiration (Fig. 1.19). La recherche a été effectuée sous une excitation harmonique avec l'exploitation des résultats expérimentaux et théoriques. Les données de réponse de la simulation et de

l'essai expérimental ont été analysées avec le logiciel MATLAB. La relation a été établie entre la profondeur de la fissure et la principale différence de la fréquence instantanée. La fréquence instantanée était un bon indicateur de la taille de la fissure.

Nahvi H et *al.* [21] ont adopté une méthode de recherche expérimentale et analytique pour identifier l'emplacement et la profondeur de la fissure d'une poutre uniforme (Fig. 1.20). La théorie linéaire de mécanique de la rupture a été développée par les auteurs. La poutre fissurée construite et modélisée en utilisant l'élément fini pour déterminer les propriétés dynamiques (déformée modale et fréquence). Les résultats d'une analyse expérimentale et théorique ont prouvé que la position et la taille de la fissure ont un effet sur la première et la deuxième fréquence naturelle dans la poutre fissurée. En outre, l'emplacement de la fissure a un effet significatif au cas où il serait situé à l'extrémité fixe ; par conséquent la réduction de la fréquence était plus importante. Leur étude a fourni un procédé pour la prévision de la taille de la fissure.

Plusieurs fissures dans une poutre encastree détectée par des fréquences dans une formulation de problème d'optimisation non linéaire, a été enregistrée par Khiem NT et *al.* [22] en utilisant les fonctions de MATLAB. Pour l'équation fréquence, la fissure est simulée comme un modèle de ressort en fonction de la rigidité dynamique de la poutre fissurée. Les paramètres de positionnement de la fissure à prévoir ont inclus la profondeur et l'emplacement aussi bien que les fissures probables. Les résultats numériques pour les trois cas étudiés (un, deux et trois fissures) dans une poutre encastree (Fig. 1.21) ont illustré l'efficacité liée à leur proposition.

Douka E et *al.* [23] ont proposé une méthode pour localiser l'emplacement et la profondeur de la fissure dans une poutre encastree avec une double fissure comme dans la (Fig. 1.22). Ils constatent que la fissure présente a entraîné une évolution importante dans les fréquences d'anti-résonance. Ainsi, les modifications d'anti-résonance ont fourni des détails supplémentaires au sujet de l'aspect de la fissure qui a équilibré la modification de la fréquence naturelle, Ces informations

complémentaires ont pu être employées pour détecter la fissure. La fissure a été modélisée comme ressorts équivalent pour connecter les segments de la poutre.

Lu Q et *al.* [24] ont proposé un nouveau procédé qui convenait pour prévoir une petite fissure. Ils ont étudié une méthode efficace pour l'emplacement multiple d'endommagements dans une structure poutre. Ils ont appliqué deux méthodes en utilisant les simulations modèles d'élément fini (MEF) sur une structure poutre. D'abord, ils ont calculé des changements de flexibilité et de courbure de flexibilité d'une poutre en béton armé avec de diverses configurations d'endommagements. Ils ont également comparé des sensibilités de flexibilité et de courbure de flexibilité pour les configurations d'endommagements étroitement distribuées de diverses amplitudes. La courbure de flexibilité a été recommandée pour l'emplacement multiple d'endommagements dû à la distribution étroite des endommagements. Deuxièmement, ils ont confirmé le rapport entre les changements de la fréquence analytique et de la fréquence relative par analyse de la méthode des éléments finis.

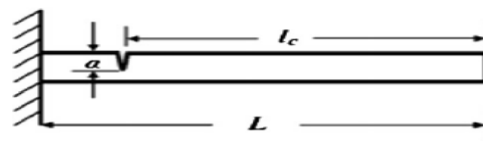


Fig. 1.19 : La géométrie d'une poutre encastrée fissurée.

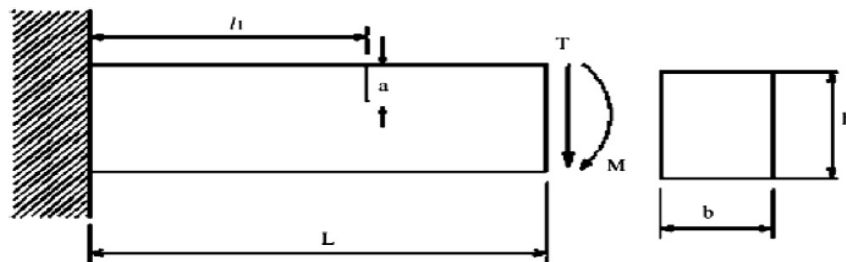


Fig. 1.20 : Modèle schématique de poutre.

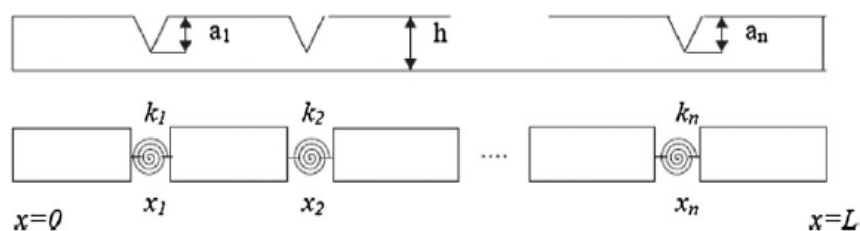


Fig. 1.21 : Modélisation des poutres à plusieurs fissures.

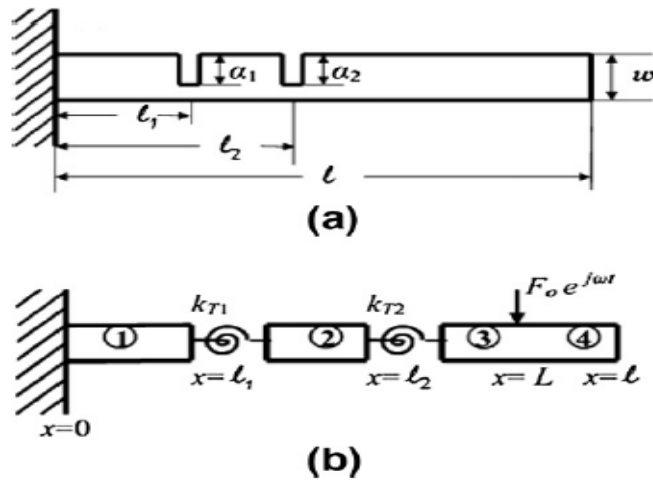


Fig. 1.22 : Poutre encadrée : (a) avec fissure ; (b) modèle double-fissuré de poutre encadrée.

Morassi A. [25] ont détecté les fissures dans une tige vibrante en sachant les endommagements introduits dans une paire de fréquences. L'étude expérimentale et analytique a été faite avec les mêmes conditions aux limites. La fissure est simulée comme une connexion de ressort entre deux segments, en fonction de la sensibilité de l'analyse. Les résultats concordent bien avec l'analyse des fissures sur une croix en acier.

Une nouvelle méthode s'est développée par Khiem NT et *al.* [26], qui dépend d'un modèle de ressort rotationnel et la méthode de la matrice transversale d'une fissure pour l'analyse des fréquences naturelles d'une poutre avec un nombre de fissures aléatoire. Pour la poutre avec plusieurs fissures, l'équation de fréquence appliquée dans le procédé, a été obtenue en calculant une matrice de dimensions  $4 \times 4$ . L'équation fréquentielle étudiée est basée sur l'influence de l'emplacement, de la profondeur et du nombre de fissures. La diminution du temps pour l'estimation des fréquences naturelles était l'un des avantages de la méthode proposée.

Ledonard F et *al.* [27] ont illustré un modèle du comportement d'une poutre encadrée avec une fissure ouverte (Fig. 1.23) basée sur l'état de vibration. Les spectrogrammes de la réponse ont été utilisés pour expliquer l'amortissement et de temps précis de la fréquence naturelle. Trois cas de vibration ont été observés

pendant l'étude qui est relié à la profondeur de la fissure ; le premier cas, la fissure s'ouvre et se ferme alternativement ; deuxième cas, avec une fissure partiellement ouverte, et le troisième cas, la force agisse alternativement avec la fermeture de la fissure. La phase du spectrogramme et la méthode de transformation ont été développés pour calculer la précision de montrer le comportement de la poutre sans fissure, une raideur non linéaire légère générée par le serrage.

Viola E et *al.* [28] ont étudié la variation de la position et l'ampleur de la fissure en examinant les changements dans le comportement dynamique de la structure. La théorie de la poutre fissurée de Timoshenko a été développée pour modéliser une structure en utilisant l'analyse par éléments finis. Pour obtenir la matrice de masse de la poutre avec une fissure sur l'arête (Fig. 1.24), ils utilisent le déplacement transversal et rotationnel pour la fonction de forme. La matrice de masse et la matrice de rigidité qui a été affectée par la présence d'une fissure a été étudiée aussi. Le procédé proposé était d'identifier les fissures dans une poutre en utilisant les données de l'essai sur maquette. L'effet de la fissure sur la flexibilité locale a été ignoré parce que la surface de la fissure transversale s'est considérée toujours ouverte.

Nikolakopoulos PG et *al.* [29] ont proposé une nouvelle méthode pour détecter l'emplacement et la profondeur d'une fissure dans la structure plus facilement. Ils ont employé les fréquences propres mesurées pour identifier l'emplacement et la profondeur de la fissure examinée dans une structure. Il a été approuvé qu'il y ait un effet significatif des paramètres de la fissure sur le comportement dynamique de la poutre. Cette influence a été principalement basée sur l'emplacement et la taille de la fissure. La méthode dépend des mesures des deux ou des trois premières fréquences propres de la structure. L'emplacement et la profondeur des fissures peuvent être estimés en traçant des contours.

Rizos PF et *al.* [30] ont étudié une poutre de section rectangulaire encastree avec une fissure transversale. La fissure transversale était uniformément le long de la largeur de la poutre suivant les indications de la (Fig. 1.25). Les résultats analytiques

sont employés pour trouver une relation entre la profondeur de la fissure et son emplacement, avec les modes de vibration mesurés. La profondeur et l'emplacement de la fissure sont estimés avec une précision acceptable a été faite par des mesures d'amplitude entre deux points dans une structure vibrante à l'un de ses modes, la solution analytique, et de fréquence de réponse dynamique. La méthode est basée sur les mesures du modèle afin d'identifier la fissure. La méthode a besoin de deux emplacements pour mesurer l'amplitude, elle convient à la dimension des structures, et elle est facile, simple et précise pour la réaliser dans une maquette avec une simple imagination.

### 1.3.2. L'évaluation en utilisant les déformées modales (MAC)

Des vecteurs de la déformée modale sont utilisés pour l'affichage graphique du comportement de déformation de la structure. Le principe fondamental de l'utilisation des déformées modales pour identifier des défauts dans une structure quand il y a des endommagements limités. Par conséquent, les dérivés dans la déformée modale seront modifiés selon l'emplacement d'endommagements. L'évaluation de la fréquence sera facile en prenant des mesures en un point sur la structure. En outre, pour obtenir une déformée modale ; des mesures doivent être prises à plusieurs points sur la structure. Quand le nombre de mesure est plus élevé l'évaluation d'exactitude de la déformée modale sera plus grande.

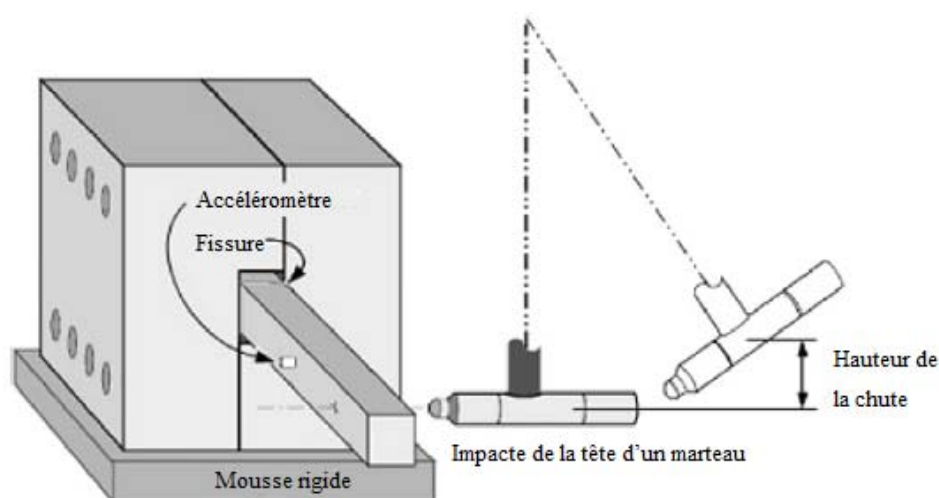


Fig. 1.23 : L'installation de matériels.

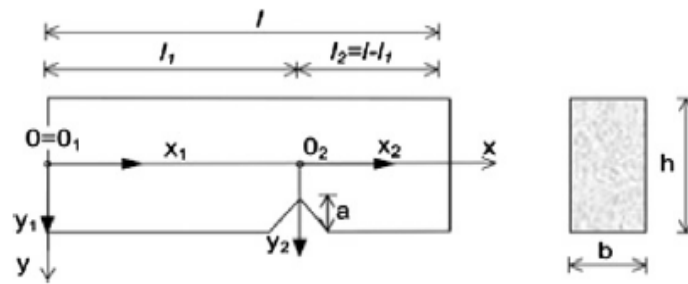


Fig. 1.24 : La géométrie de la poutre encadrée avec une fissure à l'arête.

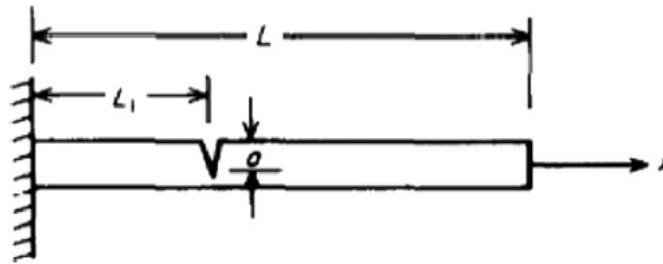


Fig. 1.25 : Prototype fissuré de poutre encadrée.

Pour identifier l'emplacement de la fissure, Taci TC et *al.* [31] ont utilisé la variation des déformées modales fondamentales. La fissure est modélisée entre l'arbre fissuré et non-fissuré par un joint de ressort local, La fissure dans la poutre a été simulée par plusieurs auteurs et utilisé la courbure et la déformée modale pour trouver l'emplacement de la fissure. Un critère qui mesure la déformée modale change dans la structure entière se nomme en tant que critère modal d'assurance (MAC).

Plusieurs études ont été faites pour étudier le changement de la déformée modale et ont détecté la présence et l'emplacement des endommagements. Les critères relatifs d'assurance pour la corrélation entre deux modes [32], a été présenté dans une vue d'ensemble de l'utilisation des valeurs de MAC. Les propriétés dynamiques (fréquence et modes propres) sont importantes et elles sont utilisées comme critères de validation pour que les essais de vibration puissent être utilisés pour la correction du modèle d'élément fini.

Un exemple numérique et une étude de référence avec de vraies données mesurées ont été présentés par Baghiee N et *al* [33]. L'étude a indiqué les avantages

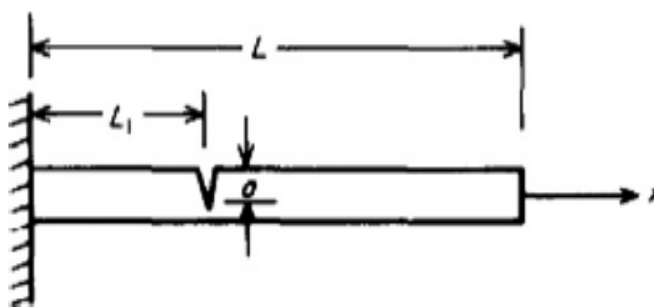
de l'énergie améliorée basée sur le critère par rapport au MAC traditionnel. Le MAC mathématique pur est employé pour améliorer par des informations physiques supplémentaires du modèle numérique en termes des modèles d'énergies de déformation.

La valeur de MAC, indique donc le degré de corrélation entre deux modes et varie de 0 à 1, avec 0 représentant le cas où il n'y a aucune corrélation et 1 pour le cas avec la corrélation parfaite. Une indication des endommagements dans la structure pourrait être interprétée par l'écart de 1 pour une valeur de MAC dérivée d'une comparaison de deux mesures de déformée modale sur une structure donnée [34].

La possibilité de détecter des endommagements en utilisant une comparaison entre le vecteur du changement mesuré de la fréquence due à l'endommagement et le vecteur des changements prévus de la fréquence naturelle à un emplacement connu a été étudiée par Messina A et *al* [35]. Le changement de la déformée modale est un indicateur plus sensible que le changement des fréquences pour des endommagements dans une structure [36]. La variation des valeurs de MAC a été employée pour comparer entre des déformées modales endommagés et d'autres intacts. Pour détecter les endommagements dans une structure, le MAC était la première recherche systématique proposée par West WM. [37]. Pour la structure avec ou sans endommagements, statiquement un indicateur associait les déformées modales sans l'utilisation d'un modèle élément fini antérieur. L'auteur avait utilisé le MAC, pour déterminer la limite de la corrélation entre les déformées modales. Les déformées modales de la structure ont été divisées, en utilisant les différents arrangements; Le MAC a été employé à travers les différentes techniques pour localiser les endommagements de la structure.

Les données des essais théoriques et expérimentaux pour la poutre en béton ont été utilisées pour vérifier les caractéristiques du modèle par Baghiee N et *al*. [33]. Le modèle théorique basé sur les théories de Timoshenko et d'Euler-Bernoulli et les résultats obtenus ont été comparés aux résultats expérimentaux. Dans leur étude, les

méthodes à savoir ; des coordonnées du critère modal d'assurance, critère modal d'assurance, modifications de fréquences et la courbure modale (COMAC, MAC, FC et MC) ont été utilisées. Selon les paramètres du modèle, l'identification de ces méthodes a été étudiée. Par la comparaison entre les quatre méthodes, il était clair que la méthode de modifications de fréquence n'ait pas pu complètement prévoir et détecter les endommagements dans la poutre. La valeur du MAC peut détecter le changement de la rigidité de la poutre. Tandis que, COMAC et les méthodes de courbure modales ont évalués les variations de la rigidité de la poutre pour chaque degré de liberté. Selon les comparaisons, la courbure modale était la meilleure méthode pour l'identification d'endommagements. La (Fig. 1.26) affiche la relation entre le 1-COMAC contre le degré de liberté.



**Fig. 1.26** : La relation entre le 1-COMAC par rapport au degré de liberté.

L'utilisation des valeurs de MAC et de COMAC pour trouver l'emplacement des endommagements, dépend oui ou non des modes et des mesures des emplacements utilisés dans l'analyse ont reflété convenablement les endommagements. COMAC est différencié de la définition de MAC comme il fournit l'information locale, aussi bien qu'il combine l'information de différents modes.

Un autre critère dans la détection d'endommagements est COMAC qui identifie les coordonnées quand deux ensembles de la déformée modale ne convient pas [38].

Si les déplacements du modèle à la coordonnée  $j$  de deux ensembles de mesures sont identiques, la valeur de COMAC égale à 1 pour cette coordonnée. La plus petite

valeur de COMAC indique à un point quelconque l'endroit le plus susceptible d'endommagements, [37].

## **CHAPITRE 2**

### ***METHODE DES ELEMENTS FINIS***

## Méthode des éléments finis

### 2.1 Généralités

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés pour la conception et l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème ;
- évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats;
- analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances sont utiles à la maîtrise des deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :

- Problèmes préliminaires à la phase de calcul;
- Problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception.

Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique. Il ne faut pas non plus oublier que le

modèle numérique ne fournit que des résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que simples, ces modèles permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur. Du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en œuvre de la méthode.

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments, il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer la méthode que je vous présenterai dans ce chapitre. Il ne restera alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires que nous vous présentons en suite pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs et que nous allons maintenant l'aborder.

## **2.2 Démarche éléments finis**

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines;
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine;
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème;
- Assemblage des matrices élémentaires;
- prise en compte des conditions aux limites;
- Résolution du système d'équations.

### 2.2.1 Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines:

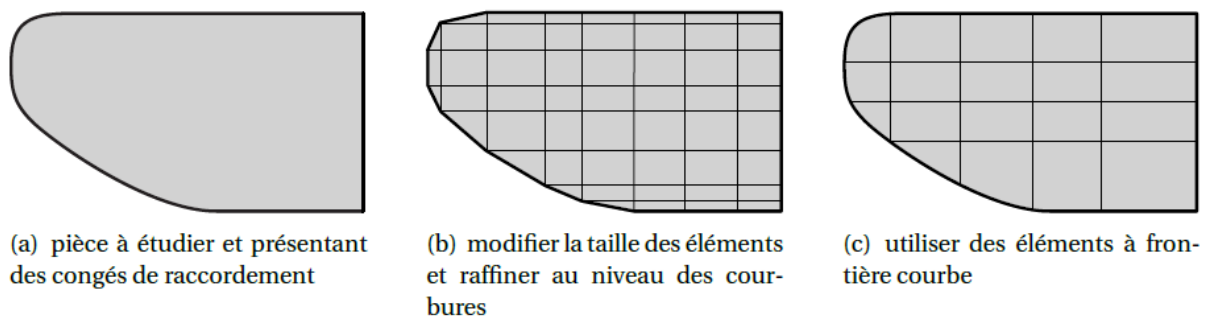
$$D_m = \sum_{e=1}^{n_e} D_e \text{ telque } \lim_{e \rightarrow 0} \left( \bigcup_e D_e \right) = D_m \quad (2.1)$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure 1.1. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.

### 2.2.2. Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation  $u^*$  du champ des variables  $u$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.



**Fig.2.1** : Erreur de discrétisation géométrique.

### 2.2.2.1. Définition de l'approximation nodale

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire  $D_e$  :

$$\forall m \in D_e, u^*(m) = N(m)u_n \quad (2.2)$$

où  $u^*(m)$  représente la valeur de la fonction approchée en tout point  $M$  de l'élément et  $N$ , la matrice ligne des fonctions d'interpolation de l'élément  $u_n$  variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

Dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante :

$$u^e(m) = N(m)\bar{U}^e \quad (2.3)$$

Les nœuds  $m_i$  sont des points de l'élément pour lesquels on choisit d'identifier l'approximation  $u^e$  à la valeur du champ de variables  $u$ .

Pour chaque élément, on choisit une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements  $u^e(x,y,z)$  à l'intérieur de cet élément en termes de déplacements nodaux  $U^e$ . Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté. Soit :

$$u^e(x,y,z) = N^T U^e \quad (2.4)$$

Où  $N$  est la matrice d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux.

### 2.2.3. Etablissement de la relation entre déformations et déplacements.

Il s'agit ici de trouver la matrice  $B$  reliant les déformations  $\varepsilon$  de l'élément à ses déplacements nodaux  $\bar{U}^e$ . Cette relation est exprimée par :

$$\{\varepsilon\} = B\bar{U}^e \quad (2.5)$$

#### 2.2.4. Etablissement de la relation entre contraintes et déformations.

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes  $\sigma$  sont des fonctions linéaires des déformations  $\varepsilon$ . Elles sont exprimées par l'expression :

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.6)$$

Où  $D$  est la matrice d'élasticité.

#### 2.2.5. Calcul des matrices élémentaires

Cette étape constitue la partie la plus importante du problème. Les déplacements  $U^e$  aux nœuds sont déterminés de telle façon que les contraintes engendrées dans l'élément équilibrent le chargement extérieur  $F^e$ , c'est-à-dire que :

$$K^e U^e = F^e \quad (2.7)$$

$K^e$  Est la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans le repère local. Elle est déduite de l'énergie de déformation de l'élément (ROCKY 1979) [39] et exprimée par :

$$K^e = \int_0^v B^T D B dv \quad (2.8)$$

Il faut aussi calculer la matrice de masse  $\bar{M}^e$  de chaque élément. Cette matrice est déduite de l'énergie cinétique de l'élément (ROCKY 1979) [39]. Dans le repère local de l'élément, cette matrice est donnée par l'expression :

$$M^e = \int_0^v \rho N^T N dv \quad (2.9)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du matériau constituant l'élément.

Finalement, on exprime les matrices  $K^e$ ,  $M^e$ ,  $U^e$  et  $F^e$  dans le repère global défini pour toute la structure.

### 2.2.6. Assemblage des matrices élémentaires

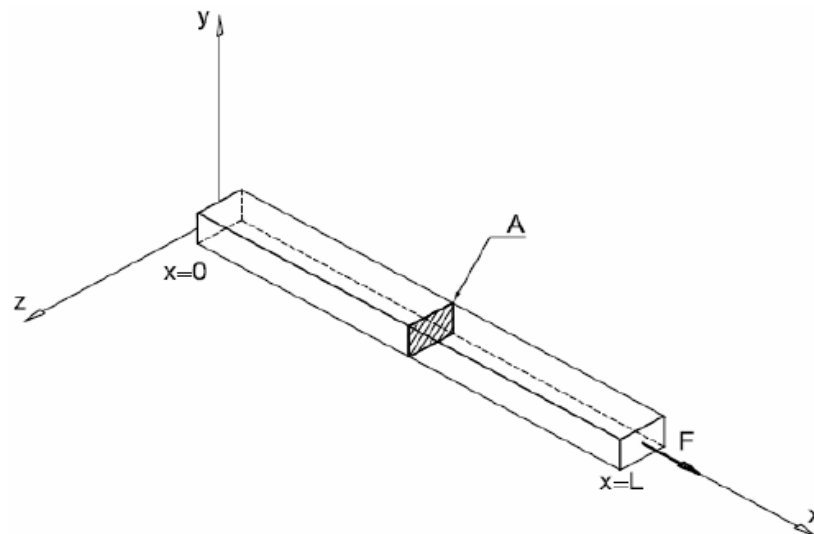
La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices  $K, M$  et  $F$  de la structure complète à partir des matrices élémentaires  $K^e, M^e, U^e$  et  $F^e$ , exprimées dans le repère global, des différents éléments en sommant les énergies de déformation et cinétique de chaque élément.

Pour une structure formée de poutres, on ne peut pas sommer les matrices directement. Pour chaque élément, il faut localiser la position des variables nodales dans le vecteur des déplacements de l'ensemble des nœuds de la structure.

### 2.2.7. Élément fini barre

#### 2.2.7.1. Définition

Géométriquement parlant une barre est définie par ses deux extrémités qui sont les nœuds dont le nombre est deux, comportant chaque un, trois degrés de liberté (d.d.l.) et qui représentent les composantes de son déplacement dans l'espace, et dans le repère local la barre est orienté dans la direction  $x$ . Les dimensions dans le plan  $(y-z)$  normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale (Fig. 2.5). Un élément fini barre (Fig. 2.6) schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression.



**Fig. 2.2 :** Géométrie d'un élément barre.

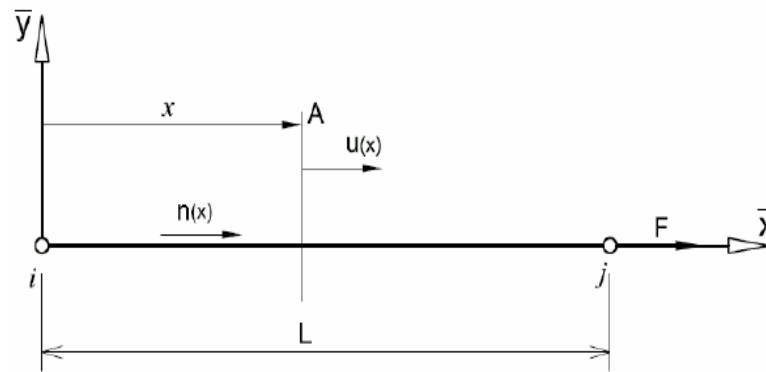


Fig. 2.3 : Modélisation d'un élément barre.

Les principales hypothèses pour un élément barre rectiligne qui ne travaille qu'en traction ou compression (ROCKY 1979) [39] sont :

— Petits déplacements :

$$U_{(M,t)} = U_{(M,t)} X \quad (2.10)$$

— Déformations en petits déplacements :

$$\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.11)$$

— Loi de Hooke dans un milieu isotrope homogène élastique :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.12)$$

Avec  $\sigma$  est la contrainte dans la barre et  $E$  est le module de Young du matériau.

En intégrant les contraintes sur la section  $A$  nous obtenons la loi du comportement intégrée des barres :

$$n(x) = EA\varepsilon \quad (2.13)$$

Où  $n(x)$  est l'effort normal dans la barre dû à la force nodale  $F$ .

### 2.2.7.2. Élément barre dans le plan

#### ➤ Identification du problème

Considérons un élément barre dans le plan défini par deux nœuds  $i$  et  $j$ , de longueur  $L$  et de section uniforme  $A$ , (Fig. 2.4).

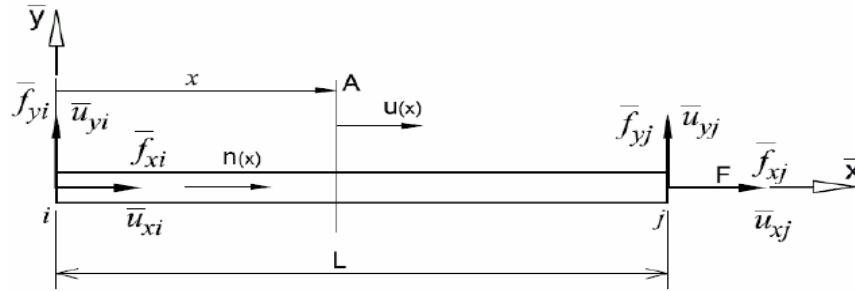


Fig. 2.4 : Élément barre dans le repère local  $(i, \bar{x}, \bar{y})$ .

Dans le repère local  $(i, \bar{x}, \bar{y})$ , on note par  $\bar{U}_{xi}$  et  $\bar{U}_{yj}$  les déplacements aux nœuds  $i$  et  $j$  et  $j$ , et par  $\bar{f}_{xi}$  et  $\bar{f}_{xj}$  les forces aux nœuds  $i$  et  $j$ .

Le vecteur force relatif à l'élément  $e$  est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \quad \bar{f}_{yi} \quad \bar{f}_{xj} \quad \bar{f}_{yj}]^T \quad (2.14)$$

Le vecteur déplacement est donné par:

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \quad \bar{u}_{yi} \quad \bar{u}_{xj} \quad \bar{u}_{yj}]^T \quad (2.15)$$

Dans le cas qui nous occupe  $\bar{f}_{xj}$ ,  $\bar{f}_{yj}$ ,  $\bar{u}_{xj}$  et  $\bar{u}_{yj}$  sont nuls puisque l'élément barre ne travaille qu'en traction ou compression.

#### ➤ Fonction d'interpolation

Pour un problème statique, lorsque l'élément est chargé au niveau de ses nœuds, l'effort normal est uniforme. Compte tenu des Eqs. (2.8) et (2.10) la solution  $u(x)$  sera linéaire. Pour chercher cette solution, nous allons utiliser une approximation polynomiale linéaire de la forme (Krishnamoorthy, 1987) [40] :

$$U(x) = N_1 u_{xj} + N_2 u_{xi} \quad (2.16)$$

Où  $N_1$  et  $N_2$  sont les coordonnées naturelles.

Nous identifions aux nœuds  $i(x=0)$  et  $j(x=L)$  la valeur de l'approximation des déplacements axiaux. Nous en déduisons :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (2.17)$$

Sous forme matricielle nous écrivons :

$$U(x) = N^T \bar{U}^e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{xj} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

La matrice  $N$  d'interpolation reliant les déplacements d'un point intérieur de l'élément aux déplacements nodaux est donc :

$$N^T = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### ➤ Relation entre déformation et déplacement

La déformation est déduite des Eqs (2.11) et (2.16). Soit :

$$\{\varepsilon\} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = B \bar{U}^e \quad (2.20)$$

La matrice  $B$  reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est alors :

$$B = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

➤ **Matrice de rigidité d'une barre dans le repère local**

La forme de la matrice de rigidité  $\bar{K}^e$  de l'élément dans le repère local est donnée par Eq (2.8). La matrice d'élasticité  $D$  se réduit au scalaire  $E$  (module de Young du matériau). Soit, après intégration :

$$K^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

➤ **Matrice de masse d'une barre dans le repère local**

La matrice de masse  $\bar{M}^e$  dans le repère local est déterminée à partir de l'Eq. (2.9). Soit, après intégration :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

➤ **Transformation dans le repère global**

Soit  $u_{xi}, u_{yi}, u_{xj}$  et  $u_{yj}$  les déplacements aux nœuds  $i$  et  $j$  exprimés dans le repère global (Fig. 2.5). La relation entre les déplacements exprimés dans le repère local et ceux exprimés dans le repère global est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xi} &= u_{xi}c_x + u_{yi}c_y \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj}c_x + u_{yj}c_y \end{aligned} \quad (2.24)$$

Où  $c_x$  et  $c_y$  sont les cosinus directeurs définis par :

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i) \quad \text{et} \quad c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i) \quad (2.25)$$

Avec  $L$  est la longueur de l'élément calculée à partir des coordonnées des nœuds.

Soit :

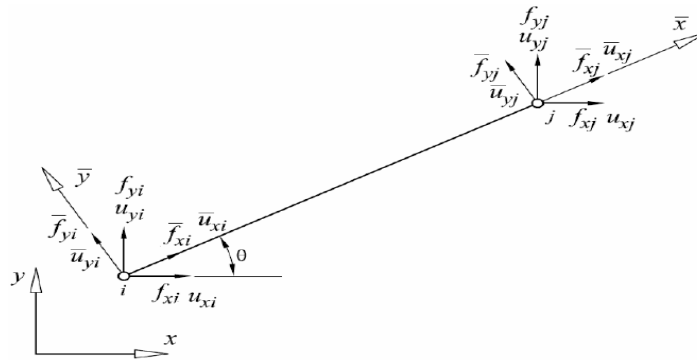
$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (2.26)$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{xi} \\ \bar{u}_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La matrice transformation du repère local au repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_x & c_y \end{bmatrix} \quad (2.28)$$



**Fig. 2.5 :** Élément dans le repère global.

La matrice de rigidité exprimée dans le repère global sera déduite de la matrice de rigidité exprimée dans le repère local par la relation :

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (2.29)$$

De même, la matrice de masse de l'élément barre dans le plan exprimée dans le repère global est :

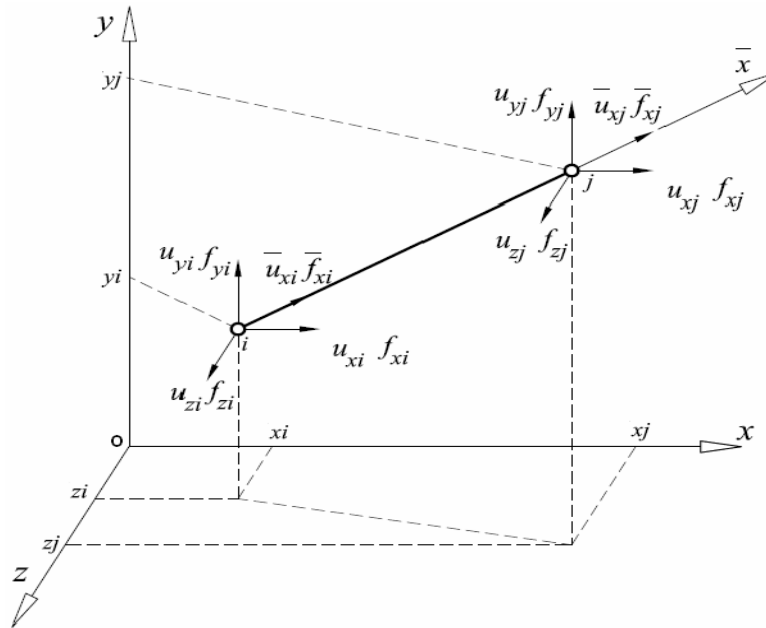
$$M^e = T^T \bar{M}^e T \quad (2.30)$$

**2.2.7.3. Élément barre tridimensionnelle**

La **Fig. 2.6** illustre un élément barre tridimensionnelle. Le vecteur force relatif à l'élément  $e$  est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \quad \bar{f}_{yi} \quad \bar{f}_{zi} \quad \bar{f}_{xj} \quad \bar{f}_{yj} \quad \bar{f}_{zj}]^T \tag{2.31}$$

Avec quatre composantes nulles.



**Fig. 2.6** : Élément barre spatiale.

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\bar{U}^e = [\bar{U}_{xi} \quad \bar{U}_{yi} \quad \bar{U}_{zi} \quad \bar{U}_{xj} \quad \bar{U}_{yj} \quad \bar{U}_{zj}]^T \tag{2.32}$$

Avec quatre composantes nulles.

De la même manière que pour un élément barre dans le plan, les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément barre tridimensionnelle sont données par :

$$\begin{aligned} \bar{u}_{xi} &= u_{xi}c_x + u_{yi}c_y + u_{zi}c_z \\ \bar{u}_{xj} &= u_{xj}c_x + u_{yj}c_y + u_{zj}c_z \end{aligned} \tag{2.33}$$

Avec :

$$c_x = \frac{1}{L}(x_j - x_i), c_y = \frac{1}{L}(y_j - y_i), c_z = \frac{1}{L}(z_j - z_i) \quad (2.34)$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (2.35)$$

La matrice de transformation est donc :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

La matrice de rigidité d'une barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est donnée par :

$$K^e = T^T \bar{K}^e T \quad (2.37)$$

$\bar{K}^e$  est donnée par l'Eq (2.22).

De même, la matrice de masse de l'élément barre tridimensionnelle exprimée dans le repère global est :

$$M^e = T^T \bar{M}^e T \quad (2.38)$$

$\bar{M}^e$  est donnée par l'Eq. (2.23).

## 2.3. Élément fini poutre

### 2.3.1. Définition

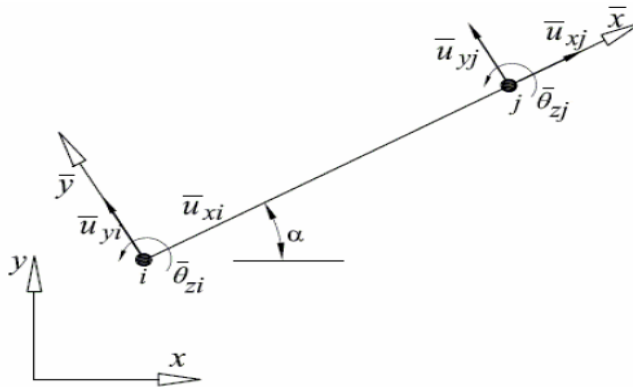
Un élément fini poutre est un élément dont le comportement est tridimensionnel. Ce comportement dans le cadre de la théorie linéaire est obtenu par superposition de trois modèles mathématiques : le modèle de traction, le modèle de torsion et le modèle de flexion (Krishnamoorthy, 1987) [40]. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 6 inconnues ou d.d.l. par nœud associés aux composantes de son déplacement et de sa rotation dans l'espace. Pour une poutre plane, chaque nœud possède trois degrés de liberté par nœud (deux déplacements et

une rotation), alors que pour une poutre tridimensionnelle, le nombre de degrés de liberté par nœud est six : trois rotations et trois translations.

### 2.3.2. Élément poutre dans le plan

#### ➤ Identification du problème :

La **Fig. 2.7** illustre un élément poutre dans le plan ( $x-y$ ) orienté suivant son axe local  $\bar{x}$



**Fig. 2.7** : Élément poutre dans le plan avec 6 degrés de liberté.

Cet élément possède six degrés de liberté correspondant au vecteur déplacement suivant :

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \quad \bar{u}_{yi} \quad \bar{\theta}_{zi} \quad \bar{u}_{xj} \quad \bar{u}_{yj} \quad \bar{\theta}_{zj}]^T \quad (2.39)$$

Où  $\bar{u}_{xi}$ ,  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{u}_{xj}$  et  $\bar{u}_{yj}$  sont les déplacements aux nœuds  $i$  et  $j$  suivant  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ ;  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$  sont les rotations aux nœuds  $i$  et  $j$  autour de l'axe  $\bar{z}$ .

Les coefficients de la matrice de rigidité de cet élément qui sont dus aux déplacements axiaux sont ceux définis pour un élément barre et n'influence pas le comportement de l'élément sous l'effet de  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{u}_{yj}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$ . Dans la suite nous cherchons à déterminer les coefficients de la matrice de rigidité relatifs aux déplacements  $\bar{u}_{yi}$ ,  $\bar{u}_{yj}$ ,  $\bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj}$ .

➤ **Fonction d'interpolation**

On choisit une fonction d'interpolation qui définit d'une façon approximative l'état de déplacement de tous les points de l'élément. Puisque l'élément possède quatre degrés de liberté  $(\bar{u}_{yi}, \bar{u}_{yj}, \bar{\theta}_{zi}$  et  $\bar{\theta}_{zj})$ , quatre coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle du déplacement (Krishnamoorthy, 1987) [40]. Soit :

$$\bar{u}^e = a_1 N_1^3 + a_2 N_2^3 + a_3 N_1^2 N_2 + a_4 N_2^2 N_1 \quad (2.40)$$

Où  $N_1$  et  $N_2$  sont les coordonnées naturelles données par l'expression (2.17) et  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des coefficients à déterminer.

Sous forme matricielle l'Eq. (2.40) s'écrit :

$$\bar{u}_y = N^T \bar{U}^e \quad (2.41)$$

La rotation  $\theta$  est liée au déplacement  $\bar{u}_y$  par la relation :

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} = \frac{1}{L} \left[ 3a_2 N_2^2 + a_3 N_1^2 + 2a_4 N_1 N_2 - 3a_1 N_1^2 - 2a_3 N_1 N_2 - a_4 N_2^2 \right] \quad (2.42)$$

$$N = \left[ N_1^2 (3 - 2N_1) \quad N_1^2 N_2 L \quad N_2^2 (3 - 2N_2) \quad -N_1 N_2^2 L \right]^T \quad (2.43)$$

➤ **Déplacements - déformations**

La seule déformation à considérer est la courbure autour de l'axe  $y$ . Le vecteur de déformation est donné par :

$$\varepsilon(x, y) = -y \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.44)$$

La contrainte  $\sigma$  et le moment  $m_z$  dus à la flexion dans le plan  $(\bar{x} - \bar{y})$  sont (Kerguignas, 1977)[41] :

$$\sigma = -Ey \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.45)$$

$$m_z = -EI_z \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

Si  $E$  est le module de Young du matériau et  $I_z$  est le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\bar{z}$ .

Compte tenu des Eqs. (2.41) et (2.43), on a :

$$m_z = [(6-12N_1) \quad L(2N_2-4N_1) \quad (6-12N_2) \quad L(4N_2-2N_1)] \bar{U}^e \quad (2.47)$$

Les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$  correspondant au moment interne dans la poutre sont reliées par la relation :

$$\sigma = D\{\varepsilon\} = DB\bar{U}^e \quad (2.48)$$

Dans ce cas particulier, la matrice  $D$  contient un seul terme correspondant à la rigidité de flexion  $EI_z$ . La matrice reliant les déformations de l'élément à ses déplacements nodaux est donc :

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{array} \right] \quad (2.49)$$

➤ **matrice de rigidité d'un élément poutre dans le plan :**

La matrice de rigidité de l'élément poutre à 4 d.d.l. dans le repère local est calculée à partir de l'Eq. (2.8). Soit :

$$\bar{K}^e = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{array} \right] \quad (2.50)$$

En tenant compte du coefficient dû au déplacement suivant l'axe  $\bar{x}$ , la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le plan (à 6 d.d.l.) exprimée dans le repère local de l'élément est :

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

➤ **Matrice de masse d'un élément poutre dans un plan**

En utilisant les Eqs. (2.9) et après intégration la matrice de masse pour un élément poutre à 4 d.d.l. exprimée dans le repère local est donnée par :

$$\bar{M}^e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & 13 \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ 13 & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Pour un élément poutre à 6 d.d.l. la matrice de masse est la superposition des deux matrices données par les Eqs. (2.23) et (2.51). Soit

$$\bar{M}^e = \frac{\partial AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & 13 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & 13 & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

➤ **Transformation dans le repère global**

On procède de la même façon que pour un élément barre tridimensionnelle, la matrice de transformation dans le repère global est :

$$T = \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_y & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Où  $c_x$  et  $c_y$  sont les cosinus directeurs définis par l'Eq. (2.34).

### 2.3.3. Élément poutre tridimensionnelle

➤ **La matrice de rigidité :**

Considérons l'élément poutre tridimensionnelle représenté à la (Fig. 2.8). L'axe  $\bar{x}$  de la poutre coïncide avec l'axe neutre de cette dernière. Il est positif de  $i$  vers  $j$ . Les axes  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  sont choisis de telle sorte que les plans  $(\bar{x}-\bar{y})$  et  $(\bar{x}-\bar{z})$  soient les plans principaux de la flexion.

Notons par  $\bar{u}_{xi}$ ,  $\bar{u}_{yi}$  et  $\bar{u}_{zi}$  les déplacements au nœud  $i$  et par  $\bar{\theta}_{xi}$ ,  $\bar{\theta}_{yi}$  et  $\bar{\theta}_{zi}$  les rotations, respectivement, autour de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  au même nœud  $i$ .  $\bar{f}_{xi}$ ,  $\bar{f}_{yi}$ ,  $\bar{f}_{zi}$ ,  $\bar{m}_{xi}$ ,  $\bar{m}_{yi}$  et  $\bar{m}_{zi}$  sont les forces et les moments au nœud  $i$ .

Le vecteur force est donné par :

$$\bar{F}^e = [\bar{f}_{xi} \quad \bar{f}_{yi} \quad \bar{f}_{zi} \quad \bar{m}_{xi} \quad \bar{m}_{yi} \quad \bar{m}_{zi} \quad \bar{f}_{xj} \quad \bar{f}_{yj} \quad \bar{f}_{zj} \quad \bar{m}_{xj} \quad \bar{m}_{yj} \quad \bar{m}_{zj}]^T \quad (2.55)$$

Le vecteur déplacement est donné par:

$$\bar{U}^e = [\bar{u}_{xi} \quad \bar{u}_{yi} \quad \bar{u}_{zi} \quad \bar{\theta}_{xi} \quad \bar{\theta}_{yi} \quad \bar{\theta}_{zi} \quad \bar{u}_{xj} \quad \bar{u}_{yj} \quad \bar{u}_{zj} \quad \bar{\theta}_{xj} \quad \bar{\theta}_{yj} \quad \bar{\theta}_{zj}]^T \quad (2.56)$$

Cet élément est la superposition de quatre éléments dont les matrices de rigidité ont déjà été déterminées : élément barre, élément poutre en torsion, élément poutre fléchie autour de  $z$  dans le plan  $(\bar{x} - \bar{y})$  et élément poutre fléchie autour de  $\bar{y}$  dans le plan  $(\bar{x} - \bar{z})$ . La matrice de rigidité d'un élément poutre tridimensionnelle est donc :

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

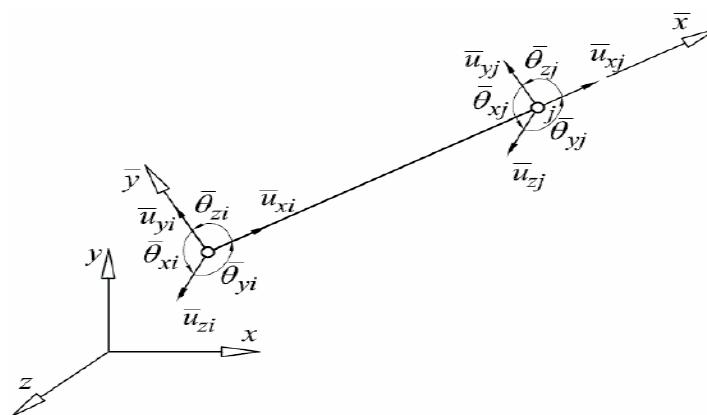


Fig. 2.8 : Élément poutre tridimensionnelle.

➤ **La matrice de masse :**

La matrice de masse d'un élément poutre tridimensionnelle est obtenue par la superposition des matrices de masse des éléments poutres en traction, torsion et flexion dans les deux plans  $(\bar{x} - \bar{y})$  et  $(\bar{x} - \bar{z})$  Soit :

$$\bar{M}^e = \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_t}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_t}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

➤ **Transformation dans le repère global**

Dans le cas d'un élément barre tridimensionnelle, la position des deux nœuds d'extrémités suffit pour définir son orientation dans l'espace. Pour un élément poutre, la ligne liant les nœuds  $i$  et  $j$  définit l'axe local  $\bar{x}$  de la poutre. Un troisième nœud  $k$  est nécessaire pour définir les deux plans principaux de flexion  $(\bar{x} - \bar{y})$  et  $(\bar{x} - \bar{z})$  (Fig. 2.9).

Pour aboutir à la matrice de transformation, le repère global est amené à coïncider avec le repère local par une séquence de rotations d'angles  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$  respectivement autour des axes  $y$ ,  $z$  et  $x$  (Fig. 2.10).

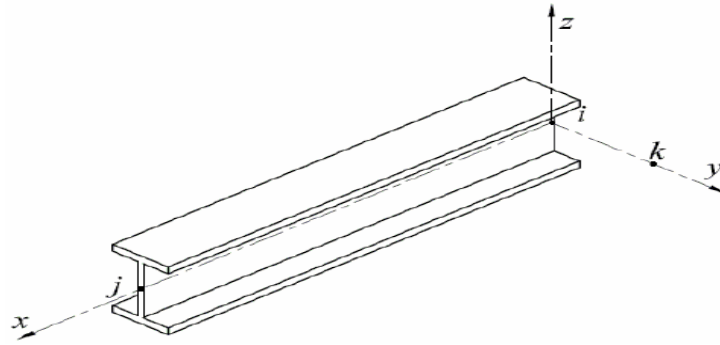


Fig. 2.9 : Axes locaux d'un élément poutre.

La première rotation autour de l'axe  $y$  avec un angle  $\beta$  place l'axe  $x$  en position  $x_\beta$  qui est la projection de l'axe  $\bar{x}$  sur le plan  $(x-z)$ . L'axe  $z$  est placé en position  $z_\beta$ . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Avec  $\cos \beta = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}}$  et  $\sin \beta = \frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}}$  (2.60)

Où  $c_x, c_y$  et  $c_z$  sont les cosinus directeurs définis par l'Eq. (2.34).

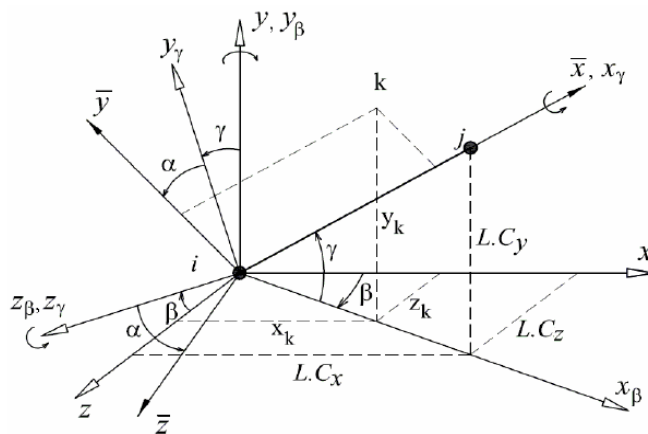


Fig. 2.10 : Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle.

La deuxième transformation consiste à faire tourner le nouveau système d'axes  $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$  autour de  $z_\beta$  d'un angle  $\gamma$  pour faire coïncider l'axe  $x_\beta$  avec l'axe  $\bar{x}$ .

Nous obtenons un nouveau système d'axes  $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Avec  $\cos \gamma = \sqrt{c_x^2 + c_z^2}$  et  $\sin \gamma = c_y$  (2.62)

Finalement, le système d'axes  $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$  tourne d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $x_\gamma$  pour amener les axes  $y_\gamma$  et  $z_\gamma$  à se confondre avec les axes  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$ . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Le nœud  $k$  est choisi sur l'axe principal  $\bar{y}$  de la section (Fig. 2.11). Les coordonnées de ce nœud par rapport à  $i$  exprimées dans le repère global sont :

$$\begin{aligned} x_{xi} &= x_k - x_i \\ y_{xi} &= y_k - y_i \\ z_{xi} &= z_k - z_i \end{aligned} \quad (2.64)$$

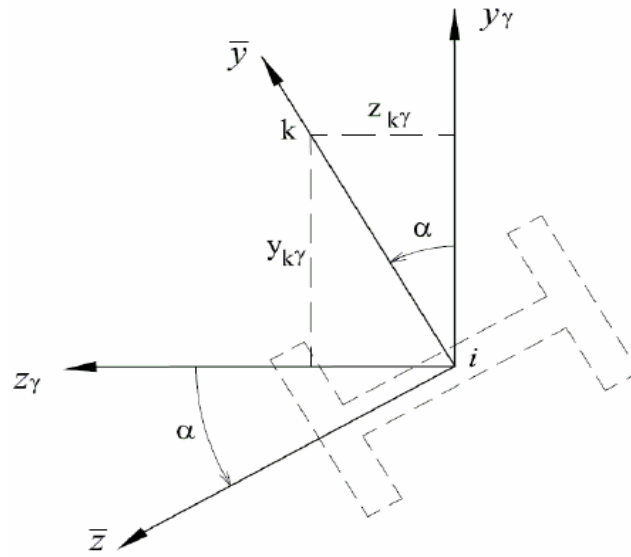


Fig. 2.11 : Axes principaux d'un élément poutre.

Les coordonnées du nœud  $k$  exprimées dans repère  $(i, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$  sont :

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = T_\gamma T_\beta \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Après simplification nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_{k\gamma} &= c_x x_{ki} + c_y y_{ki} + c_z z_{ki} \\ y_{k\gamma} &= -\frac{c_y c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \sqrt{c_x^2 + c_z^2} y_{ki} - \frac{c_y c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki} \\ z_{k\gamma} &= -\frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} x_{ki} + \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} z_{ki} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Nous en déduisons l'angle  $\alpha$  qui peut être calculé par ses lieux trigonométriques comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (2.67)$$

Finalement la transformation correspondant à l'ensemble des rotations d'angles  $\beta, \gamma$  et  $\alpha$  est :

$$T = T_\alpha T_\beta T_\gamma \quad (2.68)$$

Cette transformation n'est pas applicable pour des membrures dont l'axe local  $\bar{x}$  est parallèle à l'axe global  $x$  ( $c_x$  et  $c_z$  sont nuls). Dans ce cas de figure, il y a uniquement deux rotations : la première correspond à  $\gamma = 90^\circ$  ou  $\gamma = 270^\circ$  selon que la valeur de  $c_y$  est positive ou négative, la deuxième autour de l'axe  $\bar{x}$  avec un angle  $\alpha$  (Fig. 2.12).

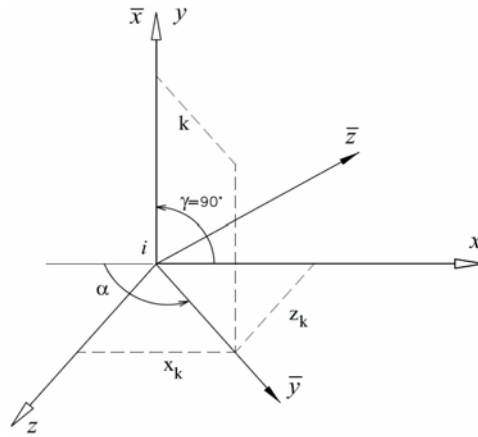


Fig. 2.12 : Rotations correspondant à un élément vertical.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c_y & 0 \\ -c_y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ c_y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Et les lieux trigonométriques de l'angle  $\alpha$  sont évalués comme suit

$$\sin \alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = -\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} c_y \quad (2.70)$$

### 2.3.4. Charges appliquées sur les éléments

Dans le cas d'une charge répartie  $q$  sur un élément, celle-ci est rapportée aux nœuds d'extrémités (Fig. 2.13). Le vecteur de charge nodale correspondant est (Krishnamoorthy, 1987) [40]:

$$\bar{F}_r^e = \iint N^T q ds \quad (2.71)$$

Pour une charge uniformément répartie sur un élément poutre dans le plan (Fig. 2.13(a)) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = q \int_0^L N^T dl \quad (2.72)$$

Soit, donc, après intégration :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{qL}{2} \quad \frac{qL^2}{12} \quad 0 \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \right]^T \quad (2.73)$$

Dans le cas d'une charge répartie qui varie linéairement le long de l'élément (Fig. 2.13(b)) le vecteur de charges nodales équivalent est :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{(7q_1 + 3q_2)L}{20} \quad \frac{(3q_1 + 2q_2)L^2}{60} \quad 0 \quad \frac{(3q_1 + 7q_2)L}{20} \quad -\frac{(2q_1 + 3q_2)L^2}{60} \right]^T \quad (2.74)$$

Dans le cas d'une charge ponctuelle  $P$  appliquée sur l'élément (Fig 2.13(c)) le vecteur de charges nodales  $\bar{F}_r^e$  prend la forme :

$$\bar{F}_r^e = \left[ 0 \quad \frac{Pb^2}{L^3}(3a + b) \quad \frac{Pab^2}{L^2} \quad 0 \quad \frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b) \quad -\frac{Pa^2b}{L^2} \right]^T \quad (2.75)$$

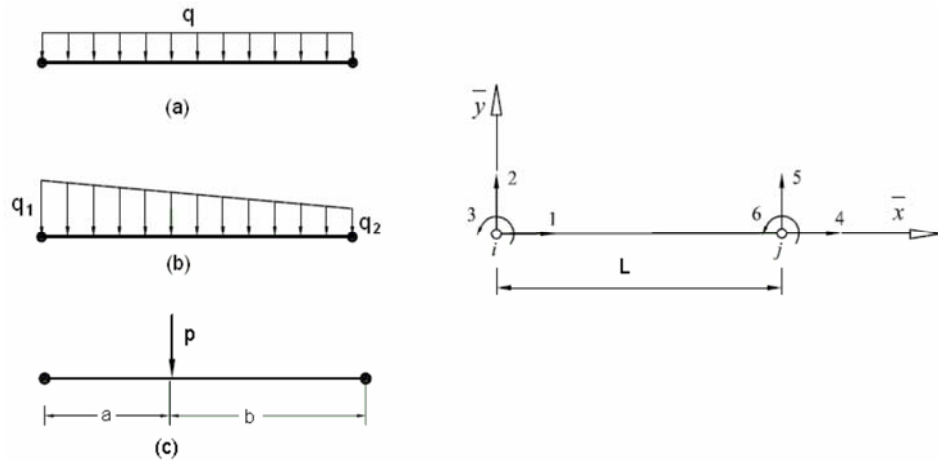


Fig. 2.13 : Charges sur un élément.

Pour une barre de treillis, la notion de charge répartie transversale n'est pas cohérente avec la théorie, la modélisation de type barre ne prenant pas en compte la raideur flexionnelle. Le poids propre d'une barre doit être modélisé par deux forces, concentrées aux nœuds d'extrémités, statiquement équivalentes au poids total de la barre (Fig. 2.14).



Fig. 2.14 : Cas du poids propre d'une barre d'un treillis.

### 2.3.5. Assemblage des matrices élémentaires

La phase de l'assemblage consiste à construire les matrices  $K^G$ ,  $M^G$ , et  $F^G$  de la structure complète à partir des matrices  $K^e$ ,  $M^e$ , et  $F^e$  des différents éléments tout en respectant la compatibilité des déplacements et l'équilibre des forces aux nœuds. Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle  $\Pi$  totale de la structure est obtenue par sommation des énergies potentielles  $\Pi^e$  des éléments (Imbert 1979)[42]. Si on a une structure formée de  $n_e$  éléments, cette énergie s'écrit, sous forme matricielle :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \Pi^e = \sum_1^{n_e} \left( \frac{1}{2} U^{eT} K^e U^e - U^{eT} F^e + \frac{1}{2} U^{eT} M^e \ddot{U}^e \right) \quad (2.76)$$

Le premier terme de cette expression exprime l'énergie de déformation, le second correspond au travail des forces extérieures et le troisième traduit l'effet de l'inertie. La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle du type :

$$U^e = C^e \cdot U \quad (2.77)$$

$C^e$  est la matrice de localisation ou de connectivité géométrique d'ordre  $n \times m$  ( $n$  : nombre de d.d.l. de l'élément,  $m$  : nombre de d.d.l. de la structure).  $C$  est une matrice booléenne dont les éléments sont des 0 ou des 1. Chaque terme dont le d.d.l. coïncide avec celui du système prend la valeur 1. Cette relation permet de localiser pour chaque élément ces d.d.l. dans l'ensemble des d.d.l. de la structure. En utilisant cette relation dans l'Eq. (2.76), on aura :

$$\Pi = \sum_1^{n_e} \left( \frac{1}{2} U^T C^{eT} K^e C^e U - U^T C^e F^e + \frac{1}{2} U^T C^{eT} M^e C^e \ddot{U} \right) \quad (2.78)$$

$$\text{Soit} \quad \Pi = \frac{1}{2} U^T K^G U - U^T F^G + \frac{1}{2} U^T K^G \ddot{U} \quad (2.79)$$

$$\text{Avec} \quad K^G = \sum_1^{n_e} C^{eT} K^e C^e \quad (2.80)$$

$$M^G = \sum_1^{n_e} C^{eT} M^e C^e \quad (2.81)$$

$$F^G = \sum_1^{n_e} C^e F^e \quad (2.82)$$

Les matrices  $M^G$  et  $K^G$  sont symétriques, définies positives et elles dépendent du matériau et de la forme de la structure.

### 2.3.6. Système d'équations aux valeurs propres

La recherche des fréquences et modes naturels d'une structure s'appelle l'analyse modale. Compte tenu de l'Eq. (2.79) et en négligeant les amortissements de type visqueux, l'énergie potentielle  $\Pi$  totale de la structure due aux vibrations libres de l'élément est

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K^G U + \frac{1}{2} U^T K^G \ddot{U} \quad (2.83)$$

Les extremums de cette énergie sont donnés par la relation

$$\partial \Pi / \partial U = M^G \ddot{U} + K^G U = 0 \quad (2.84)$$

et l'équation matricielle associée à l'analyse élastodynamique pour un régime libre est définie par

$$M^G \ddot{U} + K^G U = 0 \quad (2.85)$$

Les solutions recherchées pour l'Eq. (2.85) sont régies par une loi temporelle et, pour autant que la matrice de rigidité soit non singulière, sont de type harmonique [Gmür, 1997]

$$u(t) = pa \cos(\omega t - \varphi) \quad (2.86)$$

$a$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  sont des nombres réels dénotant respectivement l'amplitude de référence, la pulsation et la phase de la fonction. Cette relation traduit physiquement que chaque d.d.l. de la structure suit un mouvement en phase avec tous les autres déplacements généralisés.

Compte tenu de cette expression, l'Eq. (2.85) associée au régime libre devient

$$(K^G - \omega^2 M^G) p = 0 \quad (2.87)$$

Ce système homogène de  $n$  équations linéaires admet  $n$  solutions non triviales  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) telles que soit vérifiées les équations

$$(K^G - \omega_i^2 M^G) p_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.88)$$

alors que

$$u_i = p_i a_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) \quad (2.89)$$

est le mode propre élastique de rang  $i$  à l'amplitude de référence  $a_i$  et de déphasage  $\varphi_i$ .

En termes de mécanique des structures le vecteur  $p_i$  est le vecteur modal et  $\omega_i$  est la pulsation propre associée, mesurée en rd/s. les grandeurs  $\omega_i^2$  sont les racines de l'équation algébrique suivante

$$\det(K^G - \omega^2 M^G) = 0 \quad (2.90)$$

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations élémentaires et globales utilisées dans le code de conception assistée par ordinateur MATLAB pour l'analyse statique et modale des structures formées de poutres par la méthode des éléments finis. La formulation élémentaire consiste à déterminer une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de l'élément en termes de déplacements nodaux puis à calculer, pour chaque élément, ses caractéristiques élémentaires : matrice de rigidité, matrice de masse et vecteur des forces. La formulation globale consiste à rechercher, pour la structure complète, l'expression matricielle de l'énergie potentielle en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure. Ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité, de masses, vecteurs forces) de tous les éléments. Ainsi, à partir des formulations énergétiques nous aboutissons à un système d'équations linéaires qui régissent le comportement statique et modal de la structure.

## **CHAPITRE 3**

# ***METHODE DE COURBURE DE LA CHARGE UNIFORME SURFACIQUE (ULS)***

## Méthode de courbure de la charge uniforme surfacique (ULS)

### 3.1. Introduction

Cette nouvelle méthode de détection d'endommagements à base des vibrations pour des structures telle qu'une poutre qui emploie la courbure d'une charge uniforme surfacique normalisée (NULS) obtenue par flexibilité modale.

Les études analytiques sur la méthode de courbure de la NULS pour des structures telle qu'une poutre, qui suivent la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli, ont prouvé que les changements de la courbure de la NULS se produisent seulement aux éléments endommagés et pas au niveau des éléments intacts parce que les forces internes induites par des endommagements agissent seulement sur les éléments endommagés et pas sur les éléments intacts. Par conséquent, le calcul des changements de l'ensemble de courbure de la NULS indiquant seulement les éléments endommagés à un niveau normal est central à l'approche [43].

En outre, on propose un indice d'endommagements basé sur l'analyse aberrante pour expliquer le bruit mesuré. Afin de confirmer la praticabilité de la méthode proposée, une poutre encastree a été numériquement étudié en utilisant le logiciel MATLAB. Les résultats ont prouvé que la méthode proposée pourrait exactement localiser des endroits multiples d'endommagements aussi bien que les endroits simples sans aucune détection d'erreur positive ou erreur négative. Pour la comparaison, la détection d'endommagements a été également conduite en utilisant la méthode de courbure de la charge uniforme surfacique (ULS). La méthode de courbure d'ULS a clairement identifié des endroits simples d'endommagements. En conclusion, la méthode proposée a exécuté mieux en détectant des endommagements que les deux autres méthodes en termes de sensibilité pour endommager indépendamment de l'endroit et de la robustesse contre les signaux bruyants produits du calcul de la courbure de déformée modale.

## 3.2. Théorie

### 3.2.1 L'ULS estimé par la flexibilité modale

L'équation caractéristique dynamique structurale peut être obtenue comme

$$M^G \Psi \Lambda = K^G \Lambda, \quad (3.1)$$

Où  $M^G$  et  $K^G$  sont les matrices de la masse et de rigidité d'une structure,  $\Psi$  est la déformée modale non-ajusté obtenue à partir de l'analyse modale de sortie seulement [47.48], et  $\Lambda$  est la matrice diagonale de la fréquence normale  $\omega_2$  de  $i^{\text{ème}}$ . Quand la déformée modale non-ajusté  $\Psi$  est mesurée à la forme normale de masse de mode  $\Phi$  (c.-à-d.,  $\Phi^T M \Phi = I$ ), la matrice  $K$  de rigidité et la matrice  $G$  de flexibilité peut être exprimé comme

$$K^G = \Phi^{-T} \Lambda \Phi^{-1}, \quad (3.2)$$

$$G = \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T, \quad (3.3)$$

Dans la pratique, tous les modes structuraux sont rarement identifiés des données mesurées de vibration ; cependant, la matrice de flexibilité peut être exactement estimée à partir seulement de quelques modes inférieurs parce qu'elle est inversement proportionnelle aux carrés des fréquences naturelles [49]. En utilisant des modes inférieurs de  $m$  la matrice modale de flexibilité peut être obtenue comme

$$G_m = \Phi_m \Lambda_m^{-1} \Phi_m^T, \quad (3.4)$$

Où  $K_m = [\omega^2]$  pour lequel les  $\omega_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  fréquence naturelle,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\Phi_m = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m\}$ ; et le  $\phi_i$  est la déformée modale  $i^{\text{ème}}$  avec une

normalisation de masse qui peut être effectuée par la méthode de masse ajoutée [50.51]. Le profil de déplacement sous un chargement arbitraire  $f$  en utilisant la matrice modale de flexibilité peut être estimé par une multiplication simple de matrice comme

$$u = G_m f, \quad (3.5)$$

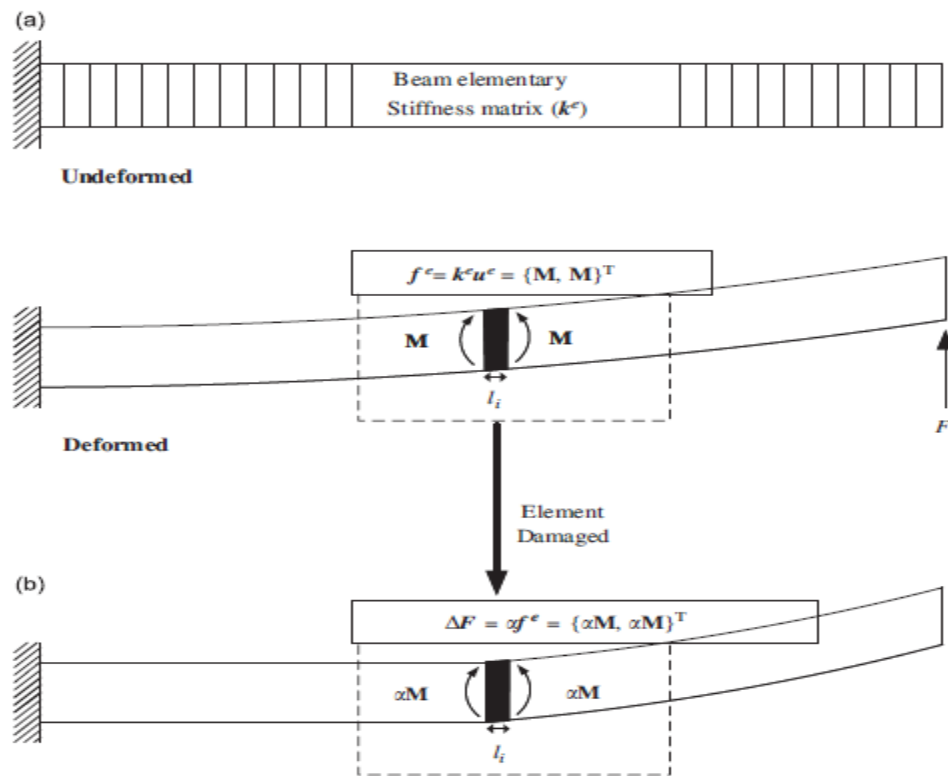
Où  $u$  est le vecteur de déplacement correspondant au vecteur de force  $f$  afin de produire ULS, le chargement d'unité avec la même direction a été utilisé comme le vecteur de force  $f$  détaillé sur la méthode de ULS peut être trouvé dans la Réf. [45.46].

### 3.2.2. Courbure d'ULS

Pour poutre-comme des structures avec les endommagements  $\Delta K$  d'élément, les forces supplémentaires  $\Delta F$  dues aux endommagements proportionnels à la réduction de rigidité peuvent être obtenues comme

$$\Delta F = \Delta K u = \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha f_e \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.6)$$

où le  $\Delta K = \text{diag}(0, \alpha, 0)$ ,  $\alpha$  est le taux de endommagements,  $0 < \alpha < 1$ ,  $K_e$  est la matrice élémentaire de rigidité de la poutre représentant l'état intact aux éléments endommagés, et le  $f_e = k_e u_e = \{M, M\}$  est les forces internes de l'élément de poutre dans l'état intact, suivant les indications de (Fig. 3.2 (a)). Eq. (3.41) indique que les forces internes induites par des endommagements agissent seulement sur les éléments endommagés et pas sur les éléments



**Fig. 3.1** : les forces internes induites par des endommagements : (a) la structure intacte et (b) la force interne agissant sur l'élément endommagé.

intacts, suivant les indications de (Fig. 3.1. (b)). Par conséquent, les forces internes induites par les endommagements qui se sont produits à  $i$  ème élément peuvent être exprimées comme

$$\Delta M(i) = EI \times \left( \frac{\Delta u_{i+1} - 2\Delta u_i + \Delta u_{i-1}}{l_i^2} \right), \quad (3.7)$$

Où  $\Delta M(i)$  est les forces internes induites par des endommagements exprimés comme  $\alpha(i)M(i)$  selon l'Eq. (3.6),  $\Delta u_i = u_i^D - u_i^I$  est débattement endommagement-induit provoqué par des endommagements sous ULS,  $u_i^D$  et  $u_i^I$  sont les déplacements basés sur la flexibilité modale des structures intacts et endommagées, respectivement, et le  $l_i$  est la longueur de l'élément. Cependant, la sensibilité aux endommagements de la courbure ULS dépend des emplacements

d'endommagements dus à  $M(i)$  en  $\Delta M(i)$ . Par conséquent, si les emplacements multiples d'endommagements se produisent simultanément dans les régions avec de petits et relativement grands moments, les endommagements dans le premier cas peuvent être manqués.

### 3.2.3. Courbure de NULS

Considérons une structure dans l'état intact sous un ULS. Puis, des forces internes dues à un chargement uniforme le long de l'axe des abscisses peuvent être exprimées comme  $M(x)$ . Si une structure a des endommagements à  $i$  ème élément, une force interne induite par des endommagements peut être exprimée comme  $\Delta M(i)$  dans l'Eq. (3.7). Basé selon le principe de superposition, des forces internes induites par un chargement uniforme et des endommagements peuvent être linéairement ajoutés comme  $M(x) + \Delta M(i)$ . En conclusion, des courbures de l'ULS pour une structure intacte et les endommagements des structures sous une ULS peuvent être obtenues comme  $M(x)/EI$  et  $\{M(x) + \Delta M(i)\}/EI$ , respectivement. Ainsi, des changements de la courbure ULS peuvent être exprimés comme

$$\text{changement de courbure de l'ULS} = \left\{ \frac{M(x) + \Delta M(i)}{EI} \right\} - \left\{ \frac{M(x)}{EI} \right\} = \frac{\Delta M(i)}{EI}, \quad (3.8)$$

Par conséquent, les changements de la courbure ULS se sont seulement produits à  $i$  ème élément endommagé dans l'Eqs. (3.6) - (3.8).

Les changements de la courbure ULS sont peu sensibles aux endommagements dans les régions avec de petits moments dus à  $M(i)$  en  $\Delta M(i)$ . Afin de résoudre ce problème, on propose la localisation d'endommagements en utilisant des changements de la courbure de NULS qui divise le  $\Delta M(i)$  par  $M(i)$ .

Ainsi, des changements de la courbure de NULS avant ou après des endommagements peuvent être obtenus comme

$$\alpha(i) = \frac{\Delta M(i)}{M(i)} = \left( \frac{\Delta u_{i+1} - 2\Delta u_i + \Delta u_{i-1} / l_i^2}{u_{i+1}^I - 2u_i^I + u_{i-1}^I / l_i^2} \right), \quad (3.9)$$

Où  $\Delta u_i = u_i^D - u_i^I$  est les dommages induit par la déflexion provoqué par des endommagements sous l'ULS et  $u^I$  et  $u^D$  sont les déplacements basés par flexibilité modale d'intact et les structures endommagées, respectivement, au  $i^{\text{ème}}$  nœud de capteur.

Par conséquent, les courbures de NULS se sont seulement produites  $i^{\text{ème}}$  élément endommagé avec une valeur normale selon Eqs. (3.8) et (3.9).

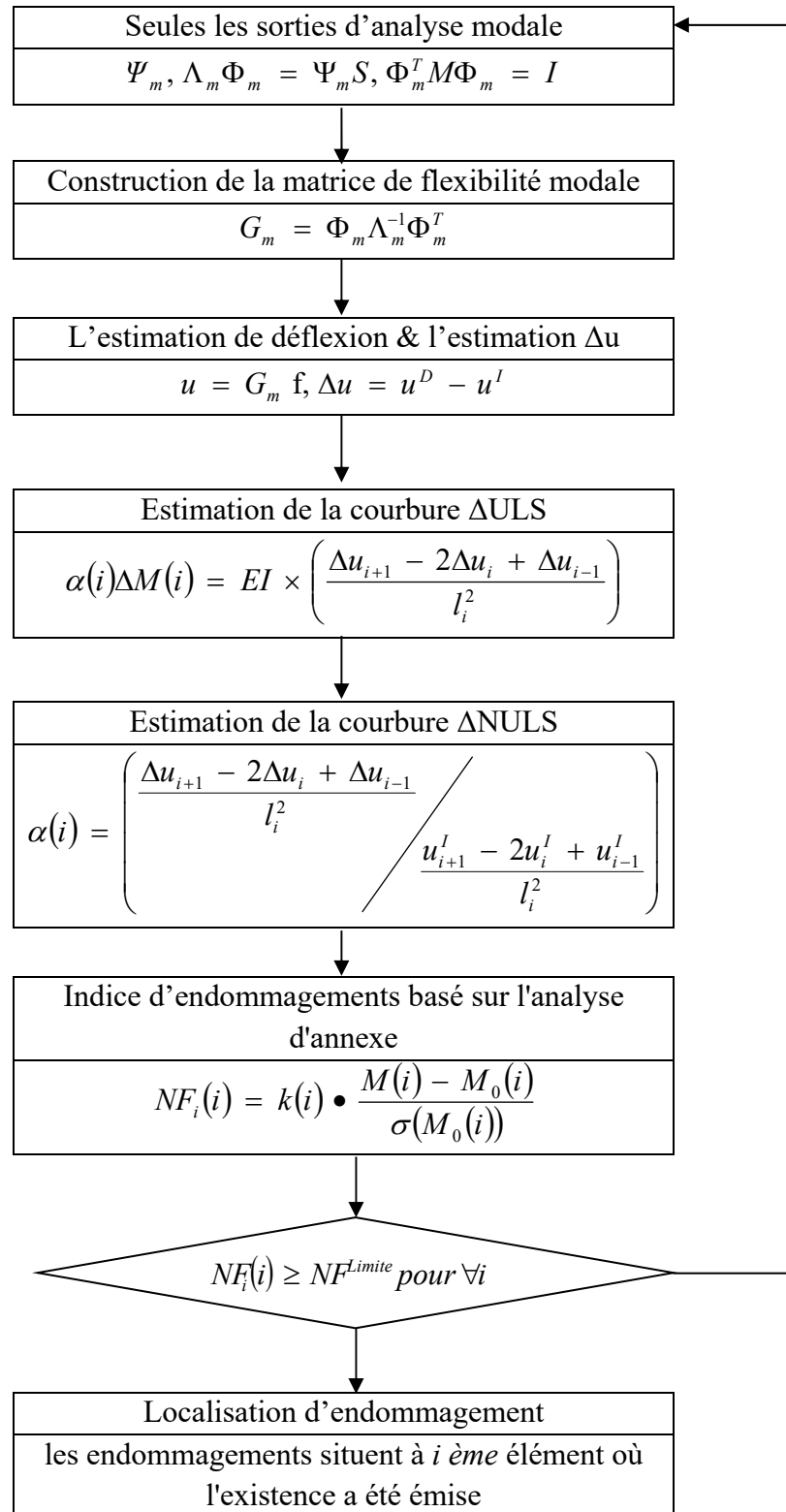


Fig. 3.2 : Diagramme de la méthode proposé de détection d'endommagements.

### 3.2.4. La localisation d'endommagement par des changements de la courbure dans la NULS sous des mesures bruyantes

Récapitulant les sections précédentes, la localisation des endommagements peut être exécutée en utilisant les changements de la courbure de NULS ( $i$ ) comme suit :

$$\text{Les endommagements se produisent à } i^{\text{ème}} \text{ élément} \Leftrightarrow \alpha(i) > 0, \quad (3.10)$$

Pour mettre en application l'Eq. (3.10) pour la détection d'endommagements, des élang statistiques sont dû préférés au bruit inévitable de mesure. Un indice aberrant normalisé  $NF_i(i)$  est proposé pour localiser les endommagements comme suit :

Des endommagements sont localisés à  $i^{\text{ème}}$  élément si  $NF_i(i) > NF^{\text{seuil}}$  pour chaque  $i$  (3.11)

$$NF_i(i) = \frac{\overline{\overline{M_0}}(i)}{\overline{M_0}(i)} \cdot \frac{M(i) - \overline{M_0}(i)}{\sigma(M_0(i))} = \kappa(i) \cdot Z_i(i) \quad (3.12)$$

Où  $M(i)$  est une valeur concomitante de la courbures ULS,  $\sigma(M_0(i))$  est l'écart type des courbures ULS pour les structures intactes,  $Z_i(i)$  est l'indice des valeurs aberrantes basé sur la distribution normale standard,  $\overline{M_0}(i)$  est la valeur moyenne des courbures ULS de la structure intacte,  $\overline{\overline{M_0}}(i)$  est la valeur moyenne de  $\overline{M_0}(i)$  et  $\kappa(i)$  est la constante pour normaliser l'indice des valeurs aberrantes, respectivement.

La procédure de détection d'endommagements est résumée dans la Fig. 3.2.

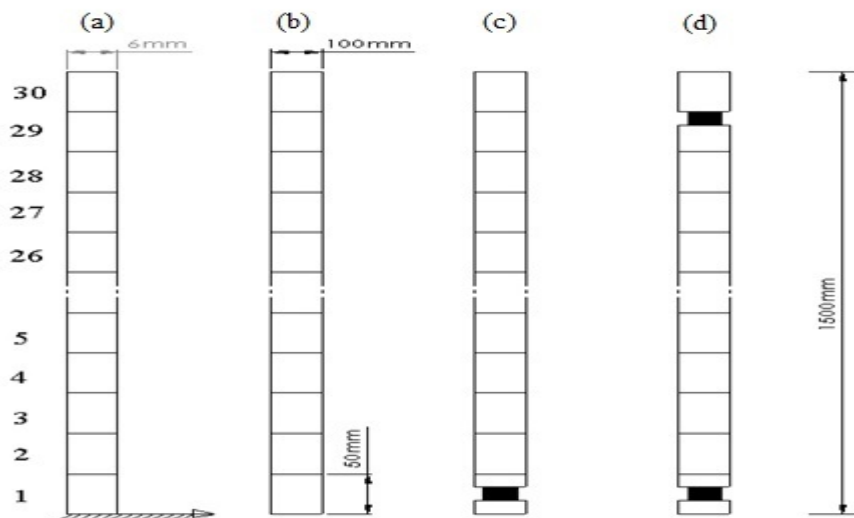
## **CHAPITRE 4**

### ***APPLICATION DE LA METHODE DE COURBURE D'ULS***

#### 4.1. Introduction

Afin de vérifier la faisabilité de la méthode de détection des endommagements proposés, un type de structure « une poutre encastrée-libre » a été numériquement étudiée par des simulations d'application d'une charge sur l'extrémité libre de la poutre structure à l'aide du logiciel MATLAB. Pour simuler les structures endommagées, les endommagements introduit dans le modèle élément finis porte sur les modules d'Young E.

Puis un bruit de 5% est ensuite ajouté aux solutions propres identifiées



**Fig. 4.1** : le modèle numérique de la poutre encastrée-libre, et les endroits des endommagements : (a) vue de côté ; (b) vue de face pour le model intact ; (c) vue de face pour les endommagements 1 ; et (d) vue de face pour les endommagements 2.

## 4.2. Cas d'une poutre encastrée-libre

### 4.2.1. Les propriétés des modèles et les descriptions d'endommagements

La méthode de détection d'endommagement proposée a été numériquement étudiée en utilisant une poutre encastrée de mesures  $100 \times 6 \times 1500 \text{ mm}^3$  modélisée par 30 éléments avec les propriétés du matériau de la (Fig. 4.3) et dans le (Tableau 1). Des capteurs limités ont été supposés à être disponibles à des intervalles égaux le long du modèle, comme le montre la (Fig. 4.1). L'information modale a été obtenue à partir des simulations d'un essai de flexion pour les structures intactes /endommagés. Les endommagements ont été simulés en réduisant la rigidité en flexion ( $EI$ ) des éléments touchés. Deux catégories d'endommagements « en un seul endroit et en plusieurs endroits » ont été envisagées, comme le montre la (Fig. 4.1) et les tableaux (N° : 4.2.1, 4.2.2, 4.3.1, 4.3.2, 4.4 et 4.5)

**Tableau N°4.1**

Paramètres du model structurel

Paramètres	valeurs
Densité de la masse	7850 kg/m <sup>3</sup>
Coefficient de poisson	0.28
Module d'élasticité	200 GPa
Longueur de la poutre	1.5 m

### 4.2.2. Simulation des endommagements sur la structure

Pour des raison de non fiabilité du matériel, d'appareillage et d'observation, nous sommes obligé de prendre en considération l'effet du bruit. Ces erreurs sont introduites de la façon suivante :

$$y_i = y_i + gn \cdot \max(\text{abs}(y_i)) \cdot (y_i bt) \quad (4.1)$$

Où  $y_i b$  : vecteur déplacement bruité au  $i^{\text{ème}}$  capteur.

$y_i$  : vecteur déplacement simulé au  $i^{\text{ème}}$  capteur.

$gn$  : pourcentage du bruit introduit.

$\text{abs}(y_i)$  : valeur absolue de  $y_i$ .

$y_i bt$  : vecteur contenant des valeurs aléatoires entre 0 et 1 uniformément distribuées et donné par :

$$y_i bt = y_i b1 \quad (4.2)$$

avec 
$$y_i b1 = 2 \cdot \text{rand}(nn, 1) - on \quad (4.3)$$

où  $y_i b1$  : vecteur de bruit additionné au vecteur  $y_i$ .

$nn$  : dimension du vecteur réponse.

$on$  : vecteur unité de dimension  $nn$ .

$\text{rand}(nn, 1)$  : vecteur de distribution uniforme de nombres entre 0 et 1.

### 4.3. Simulation numérique

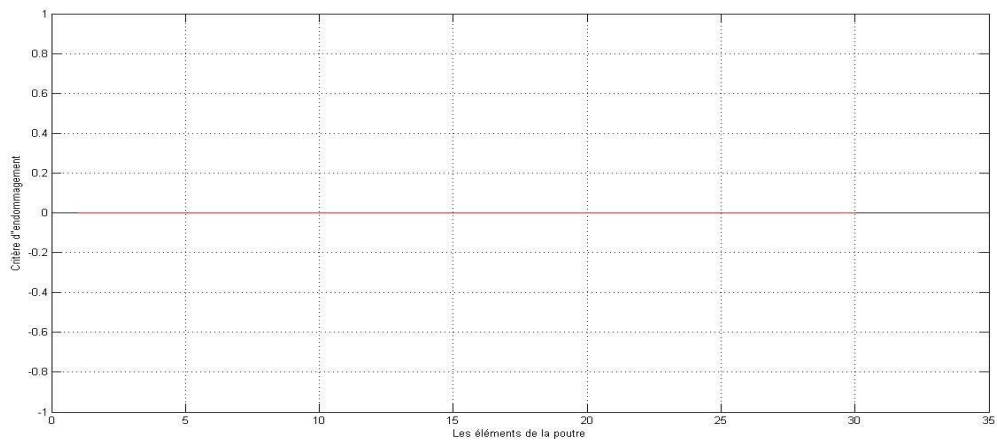
#### 4.3.1. Un seul élément endommagé

Tableau N° 4.2.1

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction de bruit	Forme d'endommagement
Intact	rien	rien		rien
Cas(a)	à 1 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 10%	sans	Fig. 4.2.1(a)
			avec	Fig. 4.2.1.1(a)
Cas(b)	à 1 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 80%	sans	Fig. 4.2.1(b)
			avec	Fig. 4.2.1.1(b)

On perturbe un seul élément en variant sa position, son taux d'endommagement et le paramètre perturbé, pour voir la sensibilité de l'indicateur à ces changements.

L'élément 1 qui se situe sur un bord encasté est perturbé une fois d'un taux de 10% (Fig.4.2.1(a) et Fig.4.2.1.1(a)) et une autre fois d'un taux de 80% (Fig.4.2.1(b) et Fig.4.2.1.1(b)).

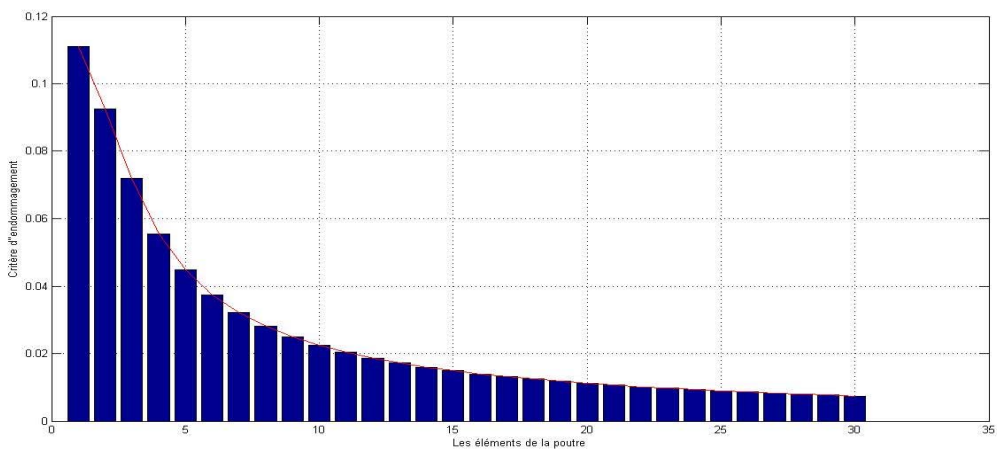


**Fig.4.2** : Structure saine

La (Fig.4.4) représente la structure dans son état intact qui ne montre aucun critère d'endommagement.

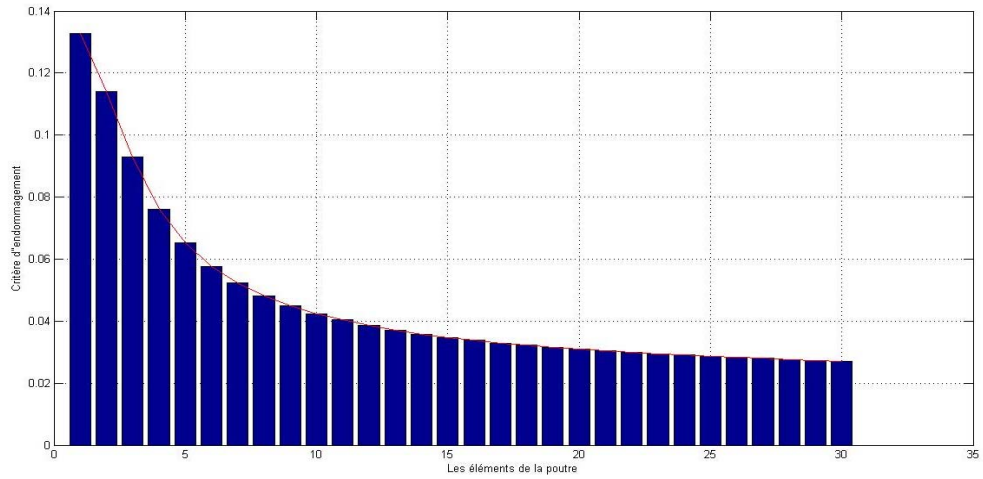
**Cas(a)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.2.1(a)** : l'endommagement au niveau du 1<sup>er</sup> élément de 10%

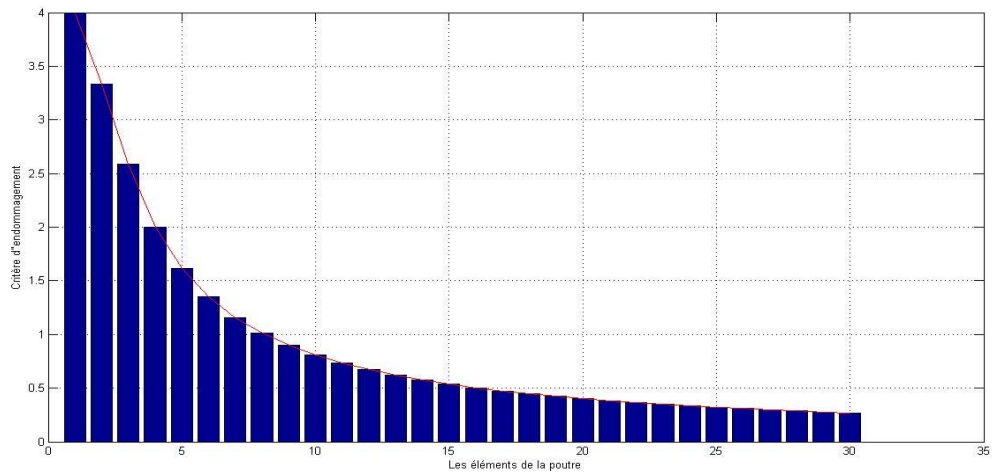
**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.2.1(a) :** l'endommagement au niveau du 1<sup>er</sup> élément de 10%

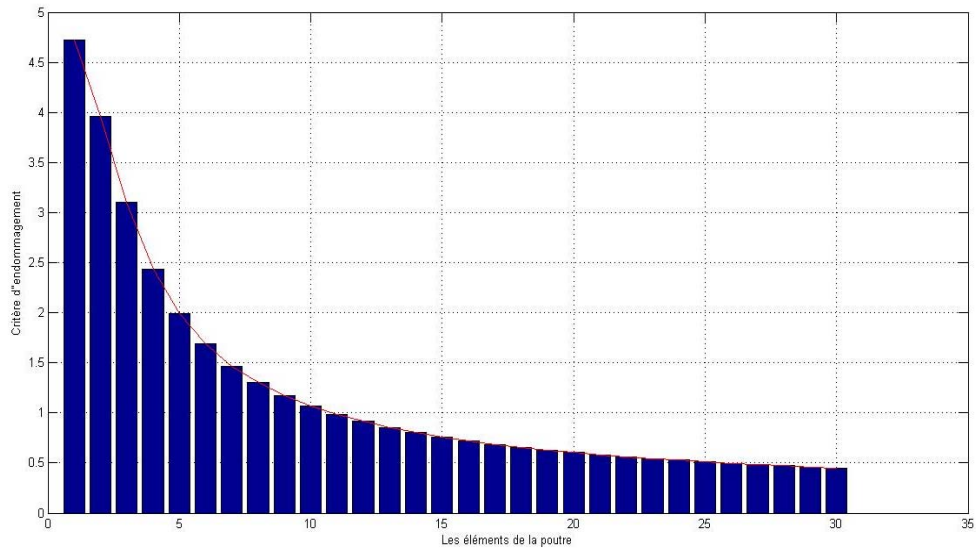
**Cas(b)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.2.1(b) :** l'endommagement au niveau du 1<sup>er</sup> élément de 80%

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.2.1.1(b) : l'endommagement au niveau du 1<sup>er</sup> élément de 80%**

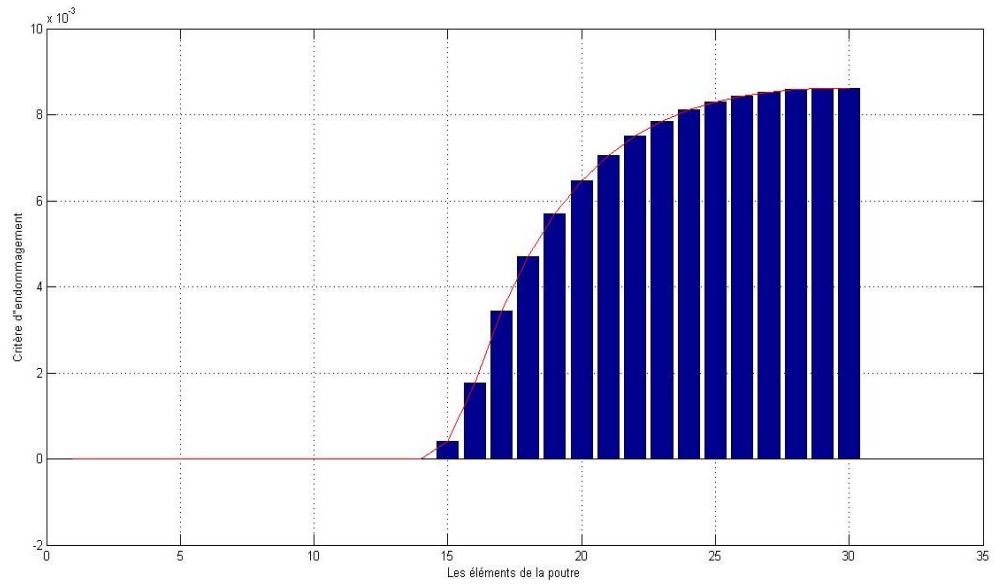
**Tableau N° 4.2.2**

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction d'un bruit	Forme d'endommagement
Cas(a)	au 15 <sup>ème</sup> element dans le model numérique	de 20%	sans	Fig.4.3.1(a)
			avec	Fig. 4.3.1.1(a)
Cas(b)	au 30 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 60%	Sans	Fig. 4.3.1(b)
			avec	Fig. 4.3.1.1(b)

L'élément 15 qui se situe sur un bord encasté est perturbé d'un taux de 20%.

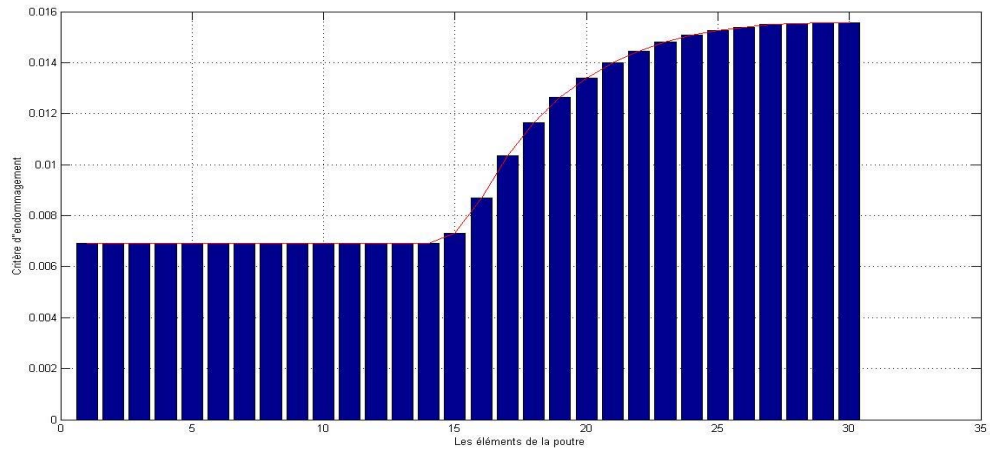
**Cas(a)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.3.1(a) :** l'endommagement au niveau du 15<sup>er</sup> élément de 20%

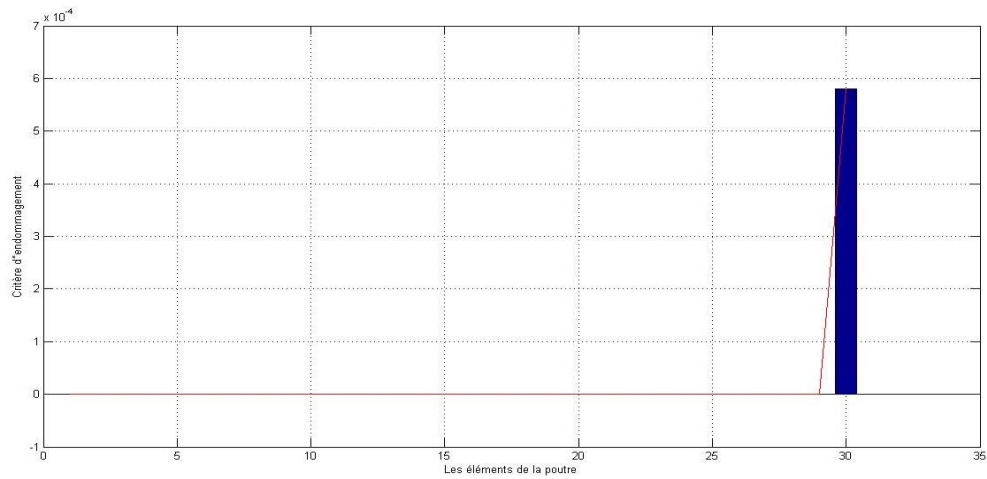
**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



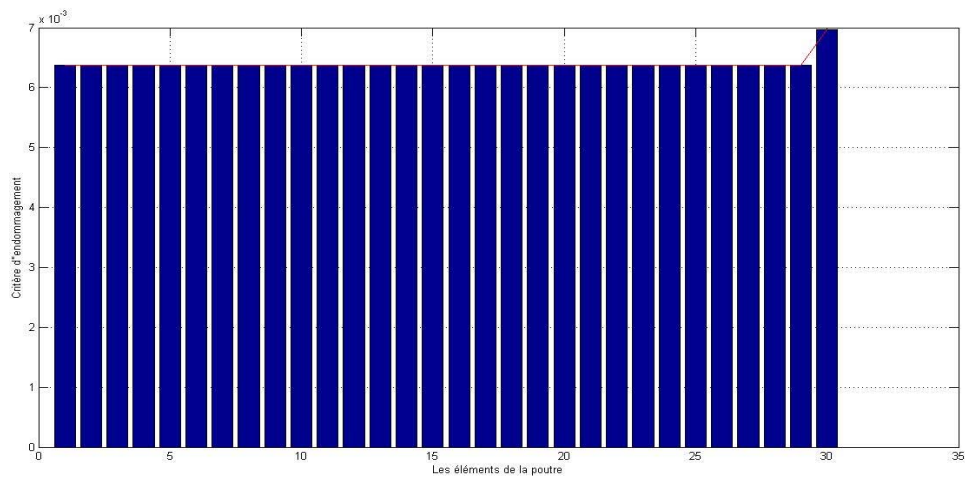
**Fig. 4.3.1.1(a) :** l'endommagement au niveau du 15<sup>er</sup> élément de 20%

**Cas(b)****Scenario 1 (sans bruit)**

L'élément 30 qui se situe sur un bord encastré est perturbé d'un taux de 60% .



**Fig. 4.3.1(b)** : l'endommagement au niveau du 30<sup>er</sup> élément de 60%

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**

**Fig. 4.3.1.1(b)** : l'endommagement au niveau du 30<sup>er</sup> élément de 60%

On remarque que l'application d'une charge à l'extrémité libre de la poutre encastrée portant une fissure au niveau du premier élément, affecte tout la structure d'une manière décroissante en s'éloignant de l'endroit endommagé représenté par le pic le plus grand dans (Figs.4.2(a) et (b)).

Par contre dans le deuxième cas où la poutre est perturbée au niveau du 15<sup>ème</sup> élément l'endroit endommagé n'est pas représenté par le pic le plus grand mais par la cassure de la courbure qui relie les pics du diagramme (Figs.4.3(a)) et qui épargne la partie située à gauche de la fissure dans le cas où nous n'avons pas introduit un bruit. Dans le troisième cas, on a perturbé le 30<sup>ème</sup> élément donc le dernier sur l'extrémité libre et le résultat est représenté par un seul pic au niveau de l'élément perturbé (Fig.4.3.1(b)) dans le cas où le bruit est nul.

Et dans le cas où nous avons introduit un bruit nous avons remarqué que la structure est entièrement affectée mais on distingue toujours les parties endommagées des parties saines (Fig.4.3.1.1(b)).

### 4.3.2. Deux éléments endommagés

Dans ces deux cas test on perturbe deux éléments à la fois pour chaque cas

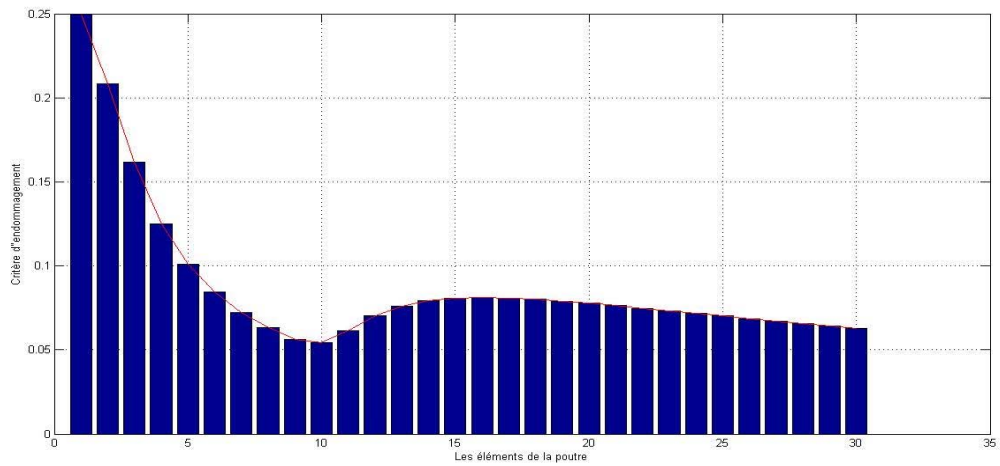
**Tableau N° 4.3.1**

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction d'un bruit	Forme d'endommagement
Cas(a)	au 1 <sup>ème</sup> et au 10 <sup>ème</sup> éléments dans le model numérique	de 10% et 50%	sans	Fig. 4.4.1(a)
			avec	Fig. 4.4.1.1(a)
Cas(b)	au 1 <sup>ème</sup> et au 25 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 10% et 60%	Sans	Fig. 4.4.1(b)
			avec	Fig. 4.4.1.1(b)

On perturbe les deux éléments 1 et 10 des taux de 10 et 50% respectivement comme le montre les figures (Figs.4.4(a)).

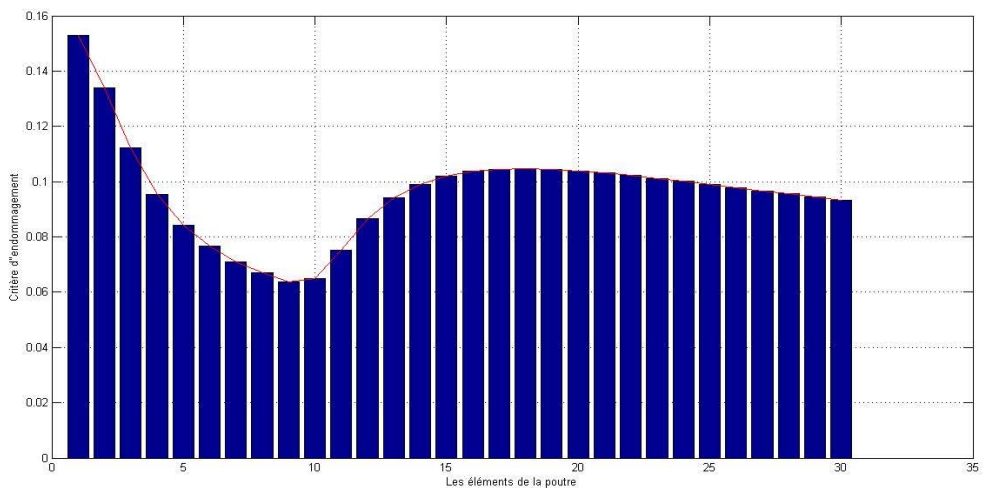
**Cas(a)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.4.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 10 de 10 et 50% respectivement

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**

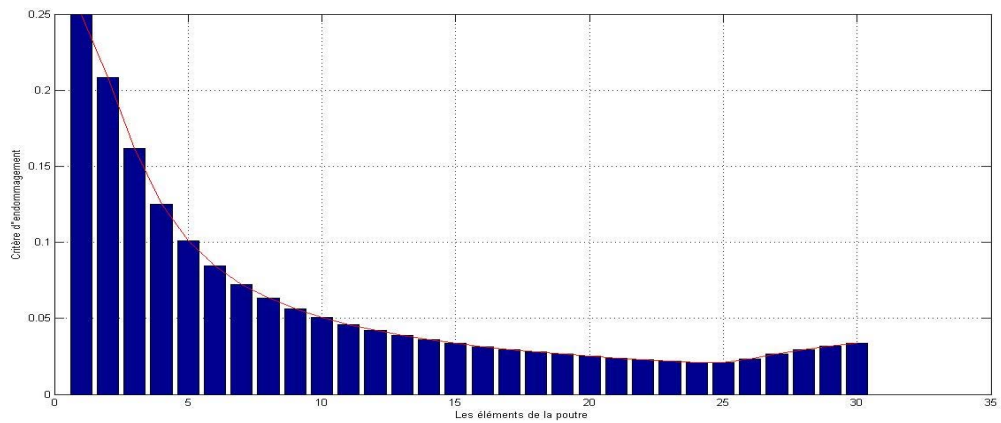


**Fig. 4.4.1.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 10 de 10 et 50% respectivement

On perturbe les deux éléments 1 et 25 des taux de 10 et 50% respectivement comme le montre les figures (Fig.4.4(b)).

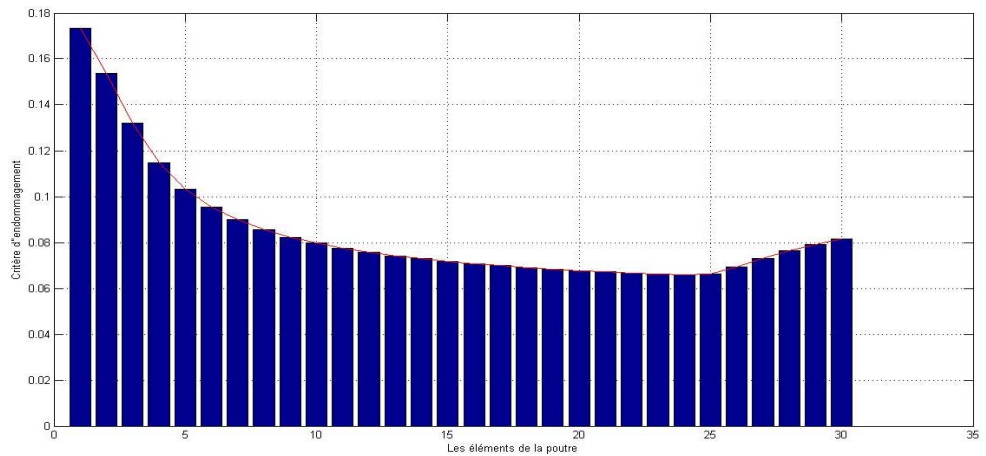
**Cas(b)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.4.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 25 de 10 et 60% respectivement

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.4.1.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 1 et 25 de 10 et 60% respectivement

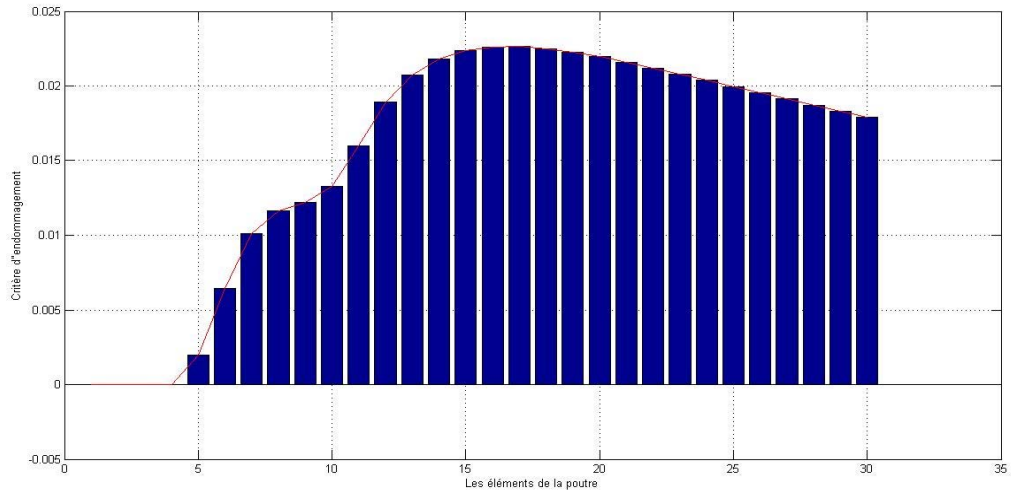
Dans ce premier scenario l'endommagement dans le premier élément représenté par le critère (pic) le plus grand car c'est la zone la plus importante de la structure puis se décroisse jusqu'au deuxième élément endommagé qui se situe au niveau du petit critère dans le diagramme mais cette fois est représenté par le changement brusque de la courbure qui relie les pics.

Tableau N° 4.3.2

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction d'un bruit	Forme d'endommagement
Cas(a)	au 5 <sup>ème</sup> et 10 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 10 et 20%	sans	Fig. 4.5.1(a)
			avec	Fig. 4.5.1.1(a)
Cas(b)	au 5 <sup>ème</sup> et au 20 <sup>ème</sup> élément dans le model numérique	de 10 et 20%	Sans	Fig. 4.5.1(b)
			avec	Fig. 4.5.1.1(b)

**Cas (a)**

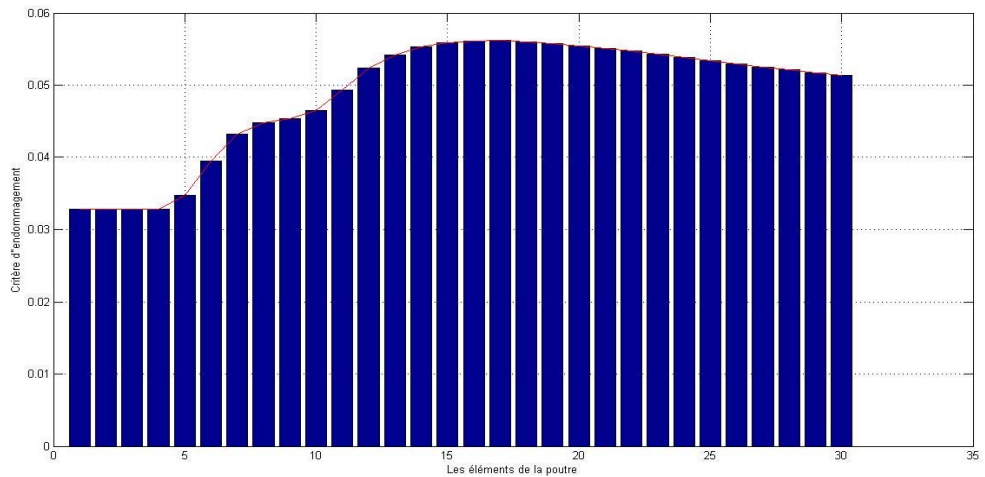
**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig.**

**4.5.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 10 et 20% respectivement

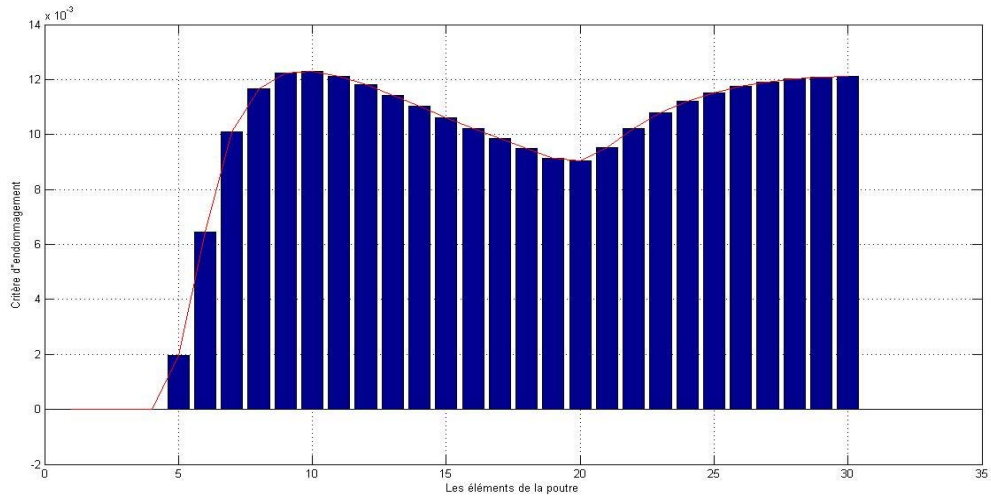
**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.5.1.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 5 et 10 de 10 et 20% respectivement

**Cas (b)**

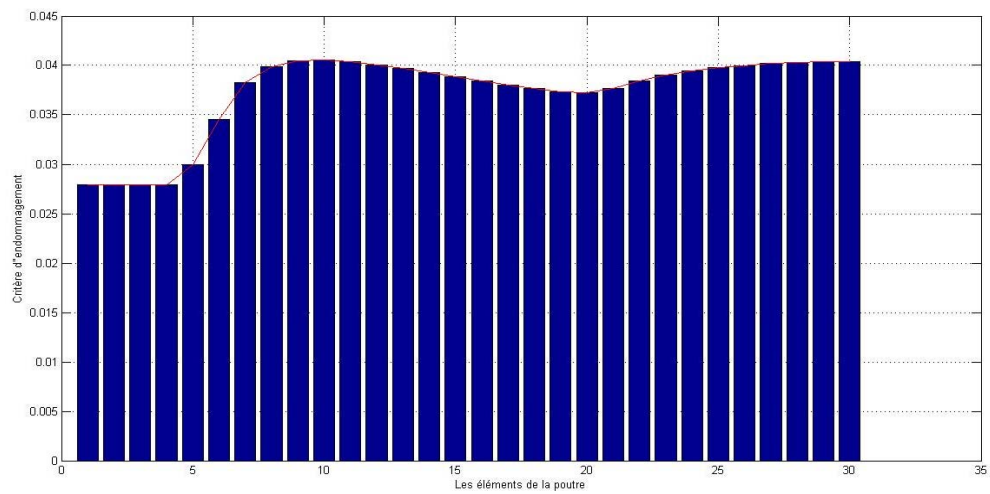
**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig.**

**4.5.1(b) :** l'endommagement au niveau des éléments 5 et 20 de 10 et 20% respectivement

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.5.1.1(b) :** l'endommagement au niveau des éléments 5 et 20 de 10 et 20% respectivement

### 4.3.3. Trois éléments endommagés

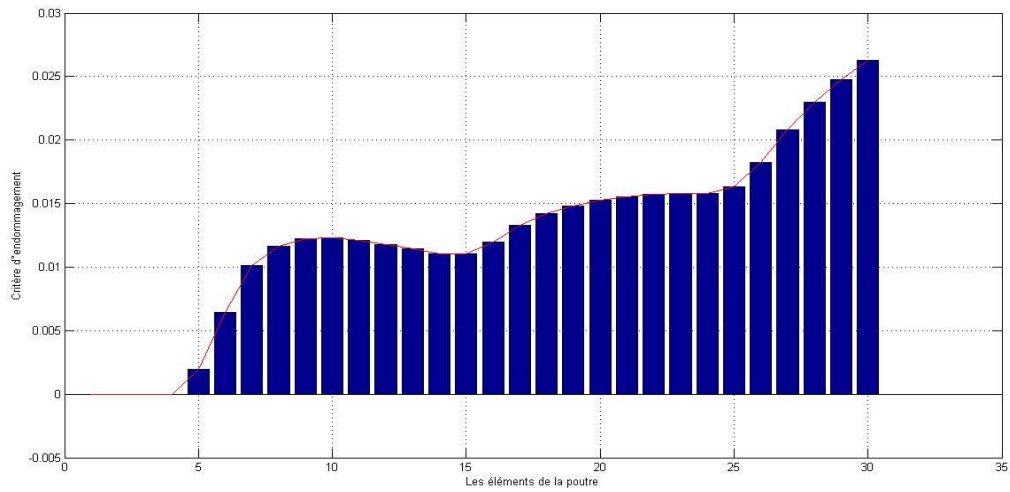
Tableau N° 4.4

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction d'un bruit	Forme d'endommagement
Cas(a)	au 5 <sup>ème</sup> , 15 <sup>ème</sup> et au 25 <sup>ème</sup> éléments dans le model numérique	de 10, 20 et 50%	sans	Fig. 4.6.1(a)
			avec	Fig. 4.6.1.1(a)
Cas(b)	au 5 <sup>ème</sup> , 12 <sup>ème</sup> et au 30 <sup>ème</sup> éléments dans le model numérique	de 10, 20 et 50%	Sans	Fig. 4.6.1(b)
			avec	Fig. 4.6.1.1(b)

Nous avons perturbé les éléments 5, 15 et 25 des taux de 10, 20 et 50 % respectivement

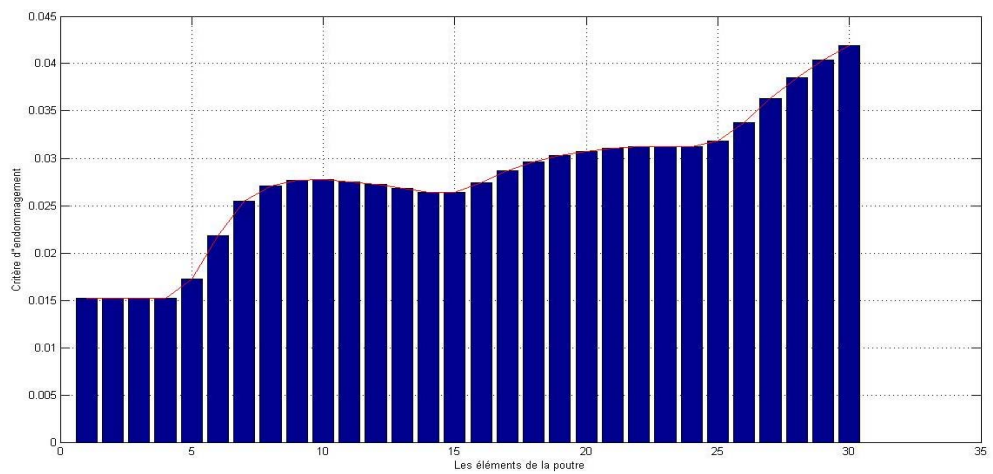
**Cas(a)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.6.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 15 et 25 de 10, 20 et 50% respectivement

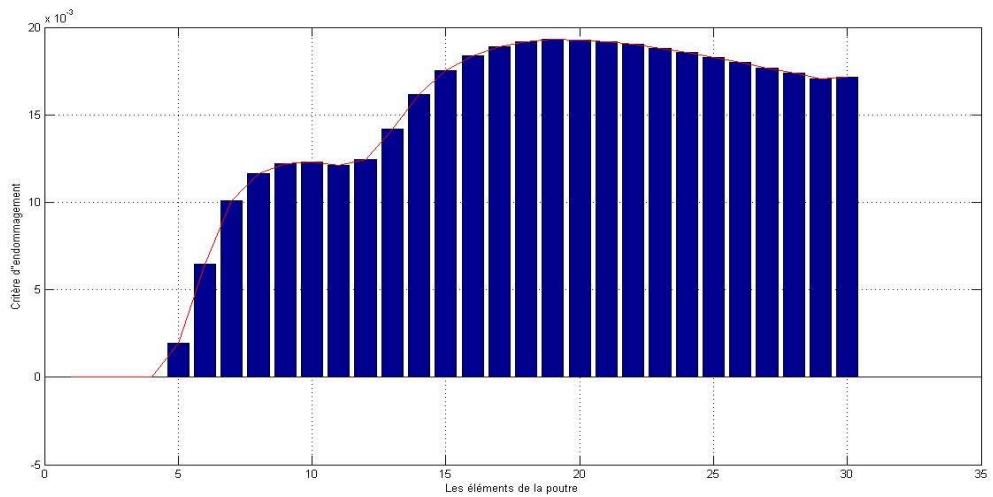
**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.6.1.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 15 et 25 de 10, 20 et 50% respectivement

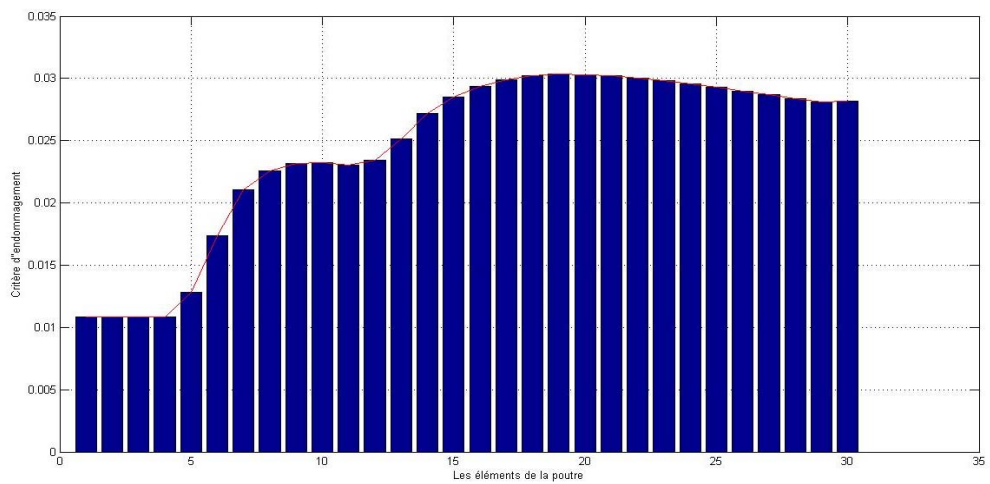
**Cas(b)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.6.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12 et 30 de 10, 20 et 50% respectivement

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



**Fig. 4.6.1.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12 et 30 de 10, 20 et 50% respectivement

### 4.3.4. Quatre éléments endommagés

Tableau N° 4.5

Cas	emplacement d'endommagement	réduction de la rigidité en flexion de l'élément	Introduction d'un bruit	Forme d'endommagement
Cas(a)	au 5 <sup>ème</sup> , 12 <sup>ème</sup> , 18 <sup>ème</sup> et au 25 <sup>ème</sup> éléments dans le model numérique	de 10, 20, 45 et 60%	sans	Fig. 4.7.1(a)
			avec	Fig. 4.7.1.1(a)
Cas(b)	au 5 <sup>ème</sup> , 12 <sup>ème</sup> , 22 <sup>ème</sup> et au 30 <sup>ème</sup> éléments dans le model numérique	de 10, 20, 50 et 70%	Sans	Fig. 4.3.1(b)
			avec	Fig. 4.7.1.1(b)

#### Cas (a)

#### Scenario 1 (sans bruit)

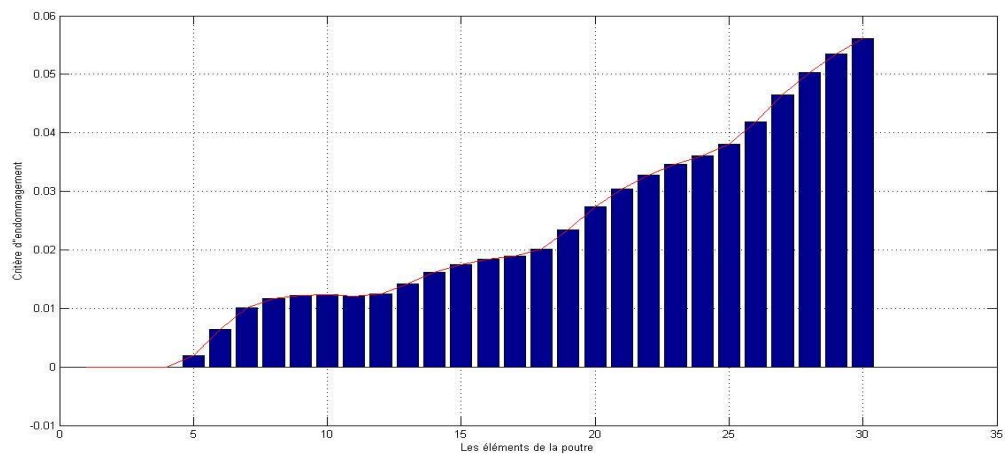
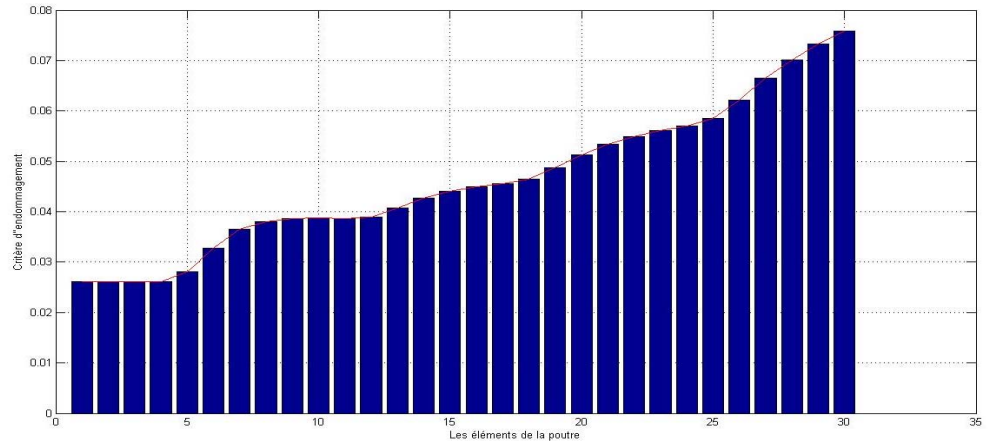


Fig. 4.7.1(a) : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 18 et 25 de 10, 20, 45 et 60% respectivement

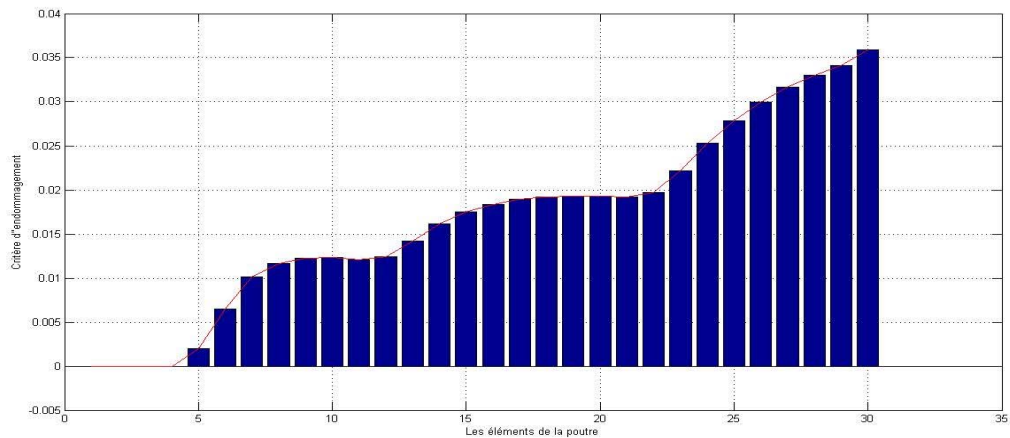
**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**



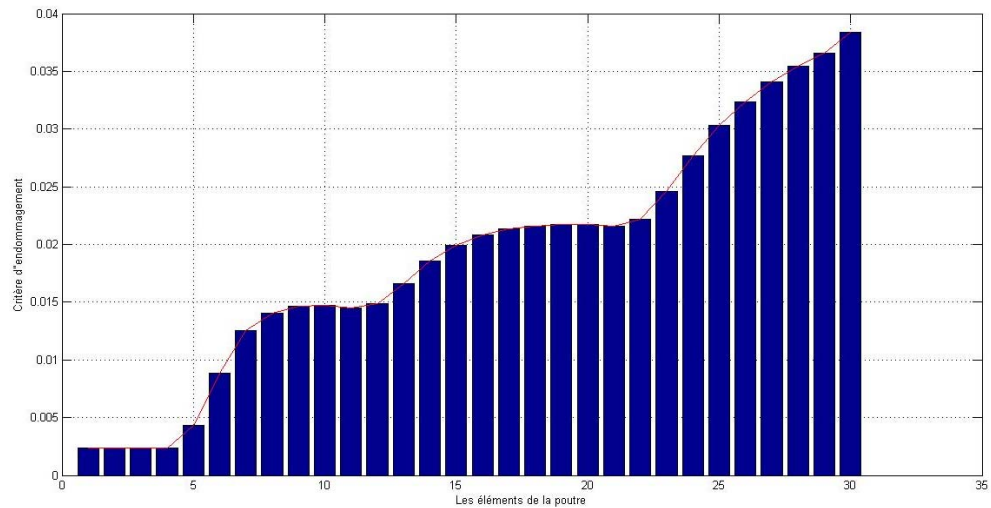
**Fig. 4.7.1(a)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 18 et 25 de 10, 20, 45 et 60% respectivement

**Cas (b)**

**Scenario 1 (sans bruit)**



**Fig. 4.7.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 22 et 30 de 10, 20, 50 et 70% respectivement

**Scenario 2 (avec introduction d'un bruit)**

**Fig. 4.7.1.1(b)** : l'endommagement au niveau des éléments 5, 12, 22 et 30 de 10, 20, 50 et 70% respectivement

On repère les emplacements des endommagements que nous avons simulés grâce aux changements brusques de la courbe qui relie les extrémités de la barre et qu'ils sont parfaitement visible pour qu'on peut les remarquer et que les éléments proches des emplacements des endommagements ont été affecté d'une manière croissante comme le montre les figures (4.5, 4.6 et 4.7),

#### 4.4. Conclusion

Les endommagements sont représentés par les changements brusques de la courbure reliant les sommets des barres qui représentent les critères, excepté l'endommagement du premier élément ou le critère sera le plus grand de tous les autres car c'est la zone la plus importante de la structure et la plus exposée au cisaillement.

On comparant les résultats relevés d'avant et après l'introduction d'un bruit aléatoire de 5%, on a observé que le bruit n'affecte plus les résultats d'avant le bruit, mais rien empêche que la méthode de l'ULS remplisse son rôle en détectant les endroits perturbés avec précision sans aucune erreur détectées.

On a observé aussi que la méthode proposée présente deux avantages principaux: haute sensibilité à s'endommager indépendamment de son emplacement et la robustesse contre les signaux bruyants générés par le calcul de la courbure de la déformée modale.

## **Conclusion générale**

Dans ce mémoire, nous avons modélisé une poutre encastrée-libre en éléments finis, et nous l'avons étudié en simulant des endommagements à l'aide du logiciel de calcul MATLAB en réduisant la rigidité des éléments endommagés. L'étude analytique que nous avons fait sur la méthode de courbure de l'ULS pour la structure poutre encastrée-libre, qui suivent la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli, nous a prouvé que la méthode est d'une très bonne précision. Les changements brusques de la courbe qui relie les sommets des barres dans les diagrammes représentant dans les figures se produisent seulement aux éléments endommagés et pas au niveau des éléments intacts parce que les forces internes induites par des endommagements agissent seulement sur les éléments endommagés et pas sur les éléments intacts.

La procédure développée dans la simulation, qui consiste à perturber les rigidités des éléments endommagés, confirme bien la robustesse de cette méthode, car les résultats trouvés après quantification et analyse, nous a permis de retrouver les éléments perturbés exactes mais à partir d'un certain pourcentage, cette méthode perd un peu la précision avec un bruit très élevé, mais elle reste toujours une technique fiable dans la pratique.

Vus les résultats obtenus par cette méthode, elle ne devrait pas être seulement testée par simulation, mais aussi des données de mesures réelles, ce dernier est d'une importance particulière, car les erreurs des bruits ou de mesures sont présent dans la pratique. Il est encore un défi d'appliquer la méthode actuelle pour les cas réels.

Pour conclure, on recommande l'utilisation de cette méthode pour l'analyse des structures endommagées vue les résultats obtenus.

**Liste des Références Bibliographiques**

- [1] - Owolabi GM, Swamidas ASJ, Seshadri R. Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. *J Sound Vib* 2003;265:1–22.
- [2] - Nassar M, Matbuly MS, Ragb O. Vibration analysis of structural elements using differential quadrature method. *J Adv Res* 2013;4:93–102.
- [3] - Chen LH, Sun Y, Zhang W. Study of vibration characteristics of cantilever rectangular plate with side crack. *Appl Mech Mater* 2012;226-28:113–8.
- [4] - Lee HL, Chang WJ. Dynamic response of a cracked atomic force microscope cantilever used for nanomachining. *Nanoscale Res Lett Springer Open J* 2012;7:131.
- [5] - Seyedpoor SA. Two stage method for structural damage detection using a modal strain energy based index and particle swarm optimization. *Int J Nonlinear Mech* 2012;47(1):1–8.
- [6] - Naseralavi SS, Fadaee MJ, Salajegheh J. Subset solving algorithm: a novel sensitivity-based method for damage detection of structures. *Appl Math Modell* 2011;35(5):2232–52.
- [7] - Rucka M. Damage detection in beams using wavelet transform on higher vibration modes. *J Theor Appl Mech* 2011;49(2):399–417.
- [8] - Wu N, Wang Q. Experimental studies on damage detection of beam structures with wavelet transform. *Int J Eng Sci* 2011;49(3):253–61.
- [9] - Orhan S. Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam. *NDT&E Int J* 2007;40:443–50.
- [10] - Cam E, Orhan S, Luy M. An analysis of cracked beam structure using impact echo method. *NDT&E Int J* 2005;38:368–73.
- [11] - Sinou JJ, Lees AW. The influence of cracks in rotating shafts. *J Sound Vib* 2005;285:1015–37.
- [12] - Zheng DY, Kessissoglou NJ. Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. *J Sound Vib* 2004;273:457–75.
- [13] - Maghsoodi A, Ghadami A, Mirdamadi HR. Multiple-crack damage detection in multi-step beams by a novel local flexibility-based damage index. *J Sound Vib* 2013;332:294–305.

## *Liste des références bibliographiques*

---

- [14] - Yang J, Chen Y, Xiang Y, Jia XL. Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load. *J Sound Vib* 2008;312:166–81.
- [15] - Pugno N, Ruotolo R, Surace C. Analysis of the harmonic vibrations of a beam with a breathing crack. In: *Proceedings of the 15th international modal analysis conference, Japan, 502-09; 1997.*
- [16] - Radzienski M, Krawczuk M, Palacz M. Improvement of damage detection methods based on experimental modal parameters. *Mech Syst Sig Proc* 2011;25(6):2169–90.
- [17] - Kim DG, Lee SB. Structural damage identification of a cantilever beam using excitation force level control. *Mech Syst Sig Proc* 2010;24(6):1814–30.
- [18] - Viola E, Ricci P, Aliabadi MH. Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method. *J Sound Vib* 2007;304(1–2):124–53.
- [19] - Kisa M, Brandon J, Topcu M. Free vibration analysis of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods. *Comput Struct* 1998;67:215–23.
- [20] - Loutridis S, Douka E, Hadjileontiadis LJ. Forced vibration behavior and crack detection of cracked beams using instantaneous frequency. *NDT&E Int* 2005;38:411–9.
- [21] - Nahvi H, Jabbari M. Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *Int J Mech Sci* 2005;47:1477–97.
- [22] - Khiem NT, Lien TV. Multi crack detection for beam by the natural frequencies. *J Sound Vib* 2004;273:175–84.
- [23] - Douka E, Bamnios G, Trochidis A. A method for determining the location and depth of cracks in double-cracked beams. *Appl Acoust* 2004;65:997–1008.
- [24] - Lu Q, Ren G, Zhao Y. Multiple damage location with flexibility curvature and relative frequency change for beam structures. *J Sound Vib* 2002;253:1101–14.
- [25] - Morassi A. Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies. *J Sound Vib* 2001;242:577–96.
- [26] - Khiem NT, Lien TV. A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *J Sound Vib* 2001;245:737–51.
- [27] - Ledonard F, Lanteigne J, Lalonde S, Turcotte Y. Free-vibration behavior of cracked cantilever beam and crack detection. *Mech Syst Sig Proc* 2001;15:529–48.

## *Liste des références bibliographiques*

---

- [28] - Viola E, Federici L, Nobile L. Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis. *Theory Appl Fract Mech* 2001;36:23–35.
- [29] - Nikolakopoulos PG, Katsareas DE, Papadopoulou CA. Crack identification in frame structures. *Comput Struct* 1997;64:389–406.
- [30] - Rizos PF, Aspragathos N. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *J Sound Vib* 1990;138:381–8.
- [31] - Taci TC, Wang YZ. Vibration analysis and diagnosis of a cracked shaft. *J Sound Vib* 1996;192:607–20.
- [32] - Allemang RJ. The modal assurance criterion (MAC): 20 years of use and abuse. *J Sound Vib* 2003;14–21.
- [33] - Baghiee N, Esfahani MR, Moslem K. Studies on damage and FRP strengthening of reinforced concrete beams by vibration monitoring. *Eng Struct* 2009;31:875–93.
- [34] - Ewins DJ. *Modal testing, theory, practice and application*. 2nd ed. Bladock (Hertfordshire, England): Research Studies Press Ltd.; 2000.
- [35] - Messina A, Williams EJ, Contursi T. Structural damage detection by a sensitivity and statistical-based method. *J Sound Vib* 1998;216:791–808.
- [36] - Srinivasan M, Kot CA. *Effect of damage on the modal parameters of a cylindrical shell*. IL (United States): Argonne National Lab; 1992.
- [37] - West WM. Illustration of the use of model assurance criterion to detect structural changes in an orbit test specimen. In: *Proceedings of air force conference on aircraft structural integrity (NASA)*; 1986. p. 1–6
- [38] - Lieven N, Ewins D. Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC). In: *Proceeding of the 6th international modal analysis conference, Kissimmee, FL*; 1988. p. 690–5.
- [39] - ROCKY, 1979.
- [40] - Krishnamoorthy, 1987.
- [41] - Kerguignas, 1977.
- [42] – Imbert, 1979.
- [43] - S.H. Sung, H.J. Jung n, H.Y. Jung. Damage detection for beam-like structures using the normalized curvature of a uniform load surface. *J Sound Vib* 2013;332;1501-1519.

## *Liste des références bibliographiques*

---

- [44] - Z.A. Jassim, N.N. Ali, F. Mustapha, N.A. Abdul Jalil. A review on the vibration analysis for a damage occurrence of a cantilever beam. *Engineering Failure Analysis*; 2013; 31; 442-461.
- [45] - T. Toksoy, A.E. Aktan, Bridge-condition assessment by modal flexibility, *Experimental Mechanics* 34 (1994) 271–278.
- [46] - J. Wang, P. Qiao, Improved damage detection for beam-type structures using a uniform load surface, *Structural Health Monitoring* 6 (2007) 99–110.
- [47] - R. Brincker, L. Zhang, P. Andersen, Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition, *Smart Materials and Structures* 10 (2001) 441–445.
- [48] - B. Peeters, G. DeRoeck, Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis, *Mechanical Systems and Signal Processing* 13 (1999) 855–878.
- [49] - Z. Duan, G. Yan, J. Ou, B.F. Spencer, Damage localization in ambient vibration by constructing proportional flexibility matrix, *Journal of Sound and Vibration* 284 (2005) 455–466.
- [50] - R. Brinker, P. Andersen, A way of getting scaled mode shapes in output-only modal testing, *Proceedings of the 21st Modal Analysis Conference (IMAC XXI)*, (CD Rom), 2002.
- [51] - D. Bernal, Modal scaling from known mass perturbations, *Journal of Engineering Mechanics* 130 (2004) 1083–1088.