République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université Mouloud MAMMERI Tizi Ouzou Faculté du Génie de la Construction Département de Génie Mécanique



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme de master académique en génie mécanique

Option : construction mécanique

THEME

Etude vibratoire non linéaire en dynamique des structures. Application sur ABAQUS

Proposé et dirigé par : *M. AMZIANI Ahcene* Réalisé par : *M. ICHEROUFENE Idir*

M. BOUDJAHROUNE Lounes

Promotion 2013



Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur Ahcene AMZIANI pour son aide, sa disponibilité et les conseils qu'il n'a cessé de nous prodiguer pour l'aboutissement de ce modeste travail, qu'il trouve ici notre profonde gratitude et toute notre reconnaissance et notre respect.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin a toutes et tout ceux qui ont contribué au déroulement de ce travail.

Que tout les enseignants ayant contribués et participés a notre formation trouvent ici notre profond respect.





Ce travail, et bien au-delà, je le dois à mes très chers parents qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots. Que dieu vous protège et vous garde pour nous.

A mes sœurs

A mes frères

A mes beaux frères

A mes nièces

Enfin a tout(e)s mes ami(e)s

Idir



Ce travail, et bien au-delà, je le dois à mes très chers parents qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots. Que dieu vous protège et vous garde pour nous.

A mes sœurs

A mes frères

A mes beaux frères

A mes nièces

Enfin a tout(e)s mes ami(e)s

Lounes

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Sommaire	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux	xi
Nomenclature	xii
Introduction générale	1
Chapitre I : Etude bibliographique et revue littérature sur les vibrations non linéa	ires
I.1. Introduction	4
I.2. A propos des vibrations non linéaires	4
I.2.1. Les première approche de vibration	4
I.2.1.1. Approche linéaire	4
I.2.1.2 Approche non linéaire	5
I.2.2 Origine du non linéarité	7
I.2.2.1. Les non-linéarités matérielles	7
I.2.2.2. Les non-linéarités de contact	7
I.2.2.3. Les non-linéarités géométriques	7
I.3. Equations différentielles non linéaires	7
I.4. Méthodes de calcul des systèmes dynamiques non linéaire	8
I.5. Les Modes Normaux Non linéaires(MNNs)	8
I.5.1 Approche Rosenberg	8
I.5.2 Approche Shaw et Pierre	9
I.5.3 Approche formes normales	10

Chapitre II : Généralités et rappels

II.1. Introduction	12
II.2. Définitions	12
II.2.1. Systèmes dynamiques et systèmes différentiels	12
II.2.2. Équations différentielles	13
II.2.3. Théorème de superposition	13
II.3. Vibrations	14
II.3.1. Etude des systèmes à un degré de liberté	14
II.3.1.1 Systèmes libres à un degré de liberté	15
II.3.1.2. Systèmes forcées à un degré de liberté	18
a. Excitations harmoniques	18
b. Excitations périodiques	19

c. Excitations quelconques	20
II.3.2. Etude des systèmes à n degrés de liberté	20
II.4. Calcul modal	21
II.4.1. Systèmes non amortis en mouvement libre	21
II.4.2. Propriétés des solutions propres	22
II.5. Discrétisation temporelle	22
II.5.1. Représentation des fonctions du temps	
II.5.2. Schéma d'intégration	23
II.6. Rappel sur les éléments finis	24
II.6.1. Choix des fonctions de base	24
II.6.1.1. Fonctions locales	24
II.6.1.2. Maillage	25
II.6.1.3. Fonctions	25
II.6.2 Ecriture sous forme élémentaire	26
II.6.2.1. Intérêts	26
II.6.2.2. Calcul des termes de raideur	26
II.6.2.3. Calcul des termes de forces généralisées	26
II.7. Conclusion	27

Chapitre III : Généralités sur les matériaux composites

III.1. Introduction	29
III.2. Définition	
III.3. Types de matériaux composites	29
III.3.1. Composites grande diffusion (GD)	30
III.3.2. Composites haute performance (HP)	30
III.4. Classification des matériaux composites	30
III.4.1. Classification suivant la forme des constituants	30
III.4.1.1. Composites à fibres	30
III.4.1.2. Composites à particules	30
III.4.2. Classification suivant la nature des constituants	31
III.4.2.1. Composites à matrice organique	31
III.4.2.2. Composites à matrice métallique	31
III.4.2.3. Composites à matrice minérale	31
III.5. Les constituants d'un matériau composite	31
III.5.1. La matrice	31
III.5.1.1. Les résines thermodurcissables	32
III.5.1.2. Les résines thermoplastiques	33
III.5.1.3. Les matrices métalliques	34
III.5.1.4. Les matrices céramiques	35
III.5.2. Les fibres	35
III.5.2.1. Fibres de verre	36
III.5.2.2. Fibres de carbone	36
III.5.2.3. Fibres d'aramide	37

III.5.2.4. Fibres de bore	37
III.5.2.5. Fibres de silice (ou de quartz)	37
III.5.2.6. Fibres de polyéthylène de haut module	38
III.5.3.Architectures des fibres	38
III.5.4. Ensimage	39
III.6. Architecture des matériaux composites	40
III.6.1. Composites sandwichs	40
III.6.2. Stratifiés	41
III.6.2.1. Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels	41
III.6.2.2. Stratifiés hybrides	41
III.6.3. Désignation des structures stratifiées	42
III.7. Propriétés mécaniques des matériaux composites	43
III.8. Procédés de fabrication	45
III.8.1. Moulage au contact	45
III.8.2. Moulage par projections simultanées	46
III.8.3. Moulage sous vide	47
III.8.4. Moulage par centrifugation	47
III.8.5. Moulage par injection de résine RTM (Résine Transfert Molding)	48
III.8.6. Moulage par enroulement filamentaire	49
III.8.7. Moulage par compression de mat pré-imprégné – SMC	50
III.9. Conclusion	51

Chapitre IV : Etude théorique sur les vibrations non linéaires

IV.1. Introduction	53
IV.2. Origine des non linéarités	53
IV.2.1. Les non-linéarités matérielles	54
IV.2.2. Les non-linéarités de contact	54
IV.2.3. Les non-linéarités géométriques	55
IV.3. Différentes formes de non-linéarités	56
IV.3.1. Non-linéarités de raideur	56
IV.3.2. Non-linéarités d'amortissement	57
IV.4. Méthode de résolution des systèmes non linéaires	58
IV.4.1. Approche Rosenberg	58
IV.4.2. Approche formes normales	59
IV.4.3. Méthode asymptotique numérique (MAN)	60
IV.4.4. Méthode de balance harmonique	63
IV.4.5. Méthode des échelles multiples	64
IV.4.6. Méthode de Newmark	64
IV.5. Application de quelques méthodes	66
IV.6. Etude des systèmes non linéaires	69
IV.6.1. système avec non linéarité de raideur cubique	70
IV.6.2. Etude d'un pendule simple en dynamique non-linéaire	76
IV.7. Vibration non linéaires des structures minces	81

IV.7.1. Modèle poutre mince type Euler-Bernoulli	82
IV.7.2. Modèle de type Kirchhoff-Love	83
IV.7.2.1. Description géométrique	83
IV.7.2.2. Les hypothèses de modèle Kirchhoff-Love	84
IV.7.2.3. Hypothèse et champ de déplacement de Kirchhoff-Love	84
IV.7.3. Modèles poutres et plaques minces de Von Karman	85
IV.7.3.1. Déplacements	85
IV.7.3.2. Déformations	86
IV.8. Conclusion	87

Chapitre V : Application sur abaqus

V.1. Introduction	89
V.2. A propos d'ABAQUS	89
V.2.1. L'intégration directe selon un schéma implicite	90
V.2.2. L'intégration directe selon un schéma explicite	93
V.3.Application	95
V.3.1. Simulation N°1	95
V.3.1.1. Caractéristiques de la structure	95
V.3.1.2. Résultats	96
V.3.1.3. Discussion des résultats	97
V.3.2. Simulation N°2	
V.3.2.1. Caractéristiques	97
V.3.2.2. Calcul par éléments finis	98
V.3.2.3. Résultats	98
V.3.2.4. Discussion des résultats	102
V.4. Conclusion	103

Liste des tableaux

Chapitre III

Tab III.1	Caractéristiques des résines thermodurcissables	32
Tab III.2	Principales propriétés des thermodurcissables et thermoplastiques	34
Chapitre IV		
Tab IV.1	Domaines de stabilité	65
Tab IV.2	Liste de méthodes classiques associées à des valeurs particulières	65
	de γ et β	

Chapitre IV

Tab V.1	Valeurs propres de la plaque	96
Tab V.2	Valeurs propres de la poutre. Simulation (2)-Cas (a)	99
Tab V.3	Valeurs propres de la poutre. Simulation (2)-Cas (b)	100
Tab V.4	Valeurs propres de la poutre. Simulation (2)-Cas (c)	101

Liste des figures

Chapitre II

Figure II.1	Système à un seul degré de liberté	15
Figure II.2	réponse d'un système-cas sous amorti	16
Figure II.3	réponse d'un système-cas critique	17
Figure II.4	réponse d'un système-cas sur-amorti	17
Figure II.5	Approximation de couverture du domaine	25

Chapitre III

Figure III.1	Constituants d'un matériau composite	29
Figure III.2	Différentes familles de matrice.	32
Figure III.3	Principaux matériaux de renfort	35
Figure III.4	Fibres de verre	36
Figure III.5	Fibres de carbone	36
Figure III.6	Fibres de Kevlar	37
Figure III.7	Formes de mats : (a) mat à fibres courtes, (b) mat à fibres continues	38
Figure III.8	Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus	38
Figure III.9	Tissages cylindrique et conique	39
Figure III.10	(a) : Tissage 3D orthogonal, (b) : Tissage 4D	39
Figure III.11	Composite sandwich	40
Figure III.12	Stratification	41
Figure III.13	Désignation d'un stratifié	43
Figure III.14	Figure III.14 : Pli composite unidirectionnel	44
Figure III.15	Moulage au contact	45
Figure III.16	Principe du moulage par projection simultanée	46
Figure III.17	Moulage sous vide	47
Figure III.18	Moulage centrifugation	48
Figure III.19	Moulage par injection de résine	48
Figure III.20	Moulage par enroulement filamentaire circonférentiel	49

Chapitre IV

Figure IV.1	Comportement dynamique d'un système linéaire	53
Figure IV.2	Force de rappel de l'oscillateur de Duffing	57
Figure IV.3	Approche Rosenberg	59
Figure IV.4	Calcul des branches de solutions par la MAN	61
Figure IV.5	Système non linéaire à deux degrés de liberté, au repos (gauche),	67
	déformé (droite)	
Figure IV.6	: Réponse forcée du système IV.1 - Comparaison échelles	68
	multiples/équilibre harmoniques pour H variable : α_1 en fonction	
	de /@01	
Figure IV.7	Réponse forcée du système IV.1 pour $\alpha 2 = 0$ (non linéarités	69
	cubiques)- Comparaison EH-EM	
Figure IV.8	Réponse forcée du système IV.1 pour $\alpha 3 = 0$ (non linéarités	69
	quadratiques)- Comparaison EH-EM	
Figure IV.9	Le schéma discrétisé de l'oscillateur de Duffing	70
Figure IV.10	Réponse en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite r	74
	pour les amplitudes de forces	
Figure IV.11	Réponses en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite au	75
	carré r ²	
Figure IV.12	Réponses en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite r	76
	pour les taux d'amortissement	
Figure IV.13	énergie potentille du pendule non linéaire	77
Figure IV.14	Portrait de phase du pendule non-linéaire	81
Figure IV.15	Transformation d'une fibre d'un milieu continu en grand	82
	déplacement	
Figure IV.16	modèle plaque deKirchhoff-Love	83
Figure IV.17	Modèle de poutre et de plaque	85

50

Chapitre V

Figure VI.1	poutre en composite
Figure V.2	Amplitude maximale en fonction de la fréquence.
Figure V.3	Amplitude maximale en fonction de rapport de fréquences.
Figure V.4	Amplitude maximale en fonction de la fréquence[50].
Figure V.5	Amplitude maximale en fonction de la fréquence.
Figure V.6	Amplitude maximale en fonction de rapport de fréquences.
Figure V.7	Amplitude maximale en fonction de la fréquence[50]
Figure V.8	Amplitude maximale en fonction de la fréquence.
Figure V.9	Amplitude maximale en fonction de rapport de fréquences.
Figure V.10	Amplitude maximale en fonction de la fréquence[50]
Figure V.11	Amplitude maximale en fonction de rapport de fréquences.
Figure V.12	Amplitude maximale en fonction de la fréquence.
Figure V.13	Amplitude maximale en fonction de rapport de fréquence[51]

Liste des symboles

t_0	Instant initial
m	Masse
k	Raideur
c	Coefficient d'amortissement
[<i>M</i>]	matrice de masse
[<i>C</i>]	matrice d'amortissement
[<i>K</i>]	matrice de rigidité
u	déplacement axial
v	déplacement transversal
w	Déplacement vertical
Wc	Déplacement vertical critique
x	Déplacement du système
<i>x</i>	Vitesse du système
ż	Accélération du système
f(t)	Excitation du système à l' instant t
ω_n	la pulsation propre (naturelle) de système
ζ	coefficient d'amortissement visqueux de système
arphi	déphasage de la réponse par rapport a l'excitation
X	amplitude d'excitation
X _{st}	déplacement statique
Т	Période
ω_k	fréquences propres

Ω	Fréquence d'excitation
$\{\phi\}$	Vecteur propre
${\cal K}$	la non-linéarité de raideur
<i>k</i> ₃	Raideur cubique
<i>k</i> ₂	raideur quadratique
С	la non-linéarité d'amortissement
η	rapport de la raideur non linéaire sur la raideur linéaire
r	le rapport adimensionnel des fréquences
τ	temps normalisé
ψ_k	formes propres
ε	un petit paramètre
ρ	Masse volumique
L	Longueur
b	Largeur
h	Epaisseur
F	Force
t	Temps
I	la transformée de Laplace
Ec	Energie cinétique
Ep	Energie potentielle
E	Energie mécanique
P d	Puissance de dissipation
\mathbf{T}_{f}	Température de fusion
ε_t^R	Déformation à la rupture en traction
σ_t^R	Contrainte à la rupture en traction

σ_c^R	Contrainte à la rupture en compression
Ei	Module de Young dans la direction i
$ u_{ij}$	Coefficient de Poisson dans le plan correspondant
G _{ij}	Module de cisaillement dans le plan correspondant.
ε	Déformation relative dans la direction j
Υij	Glissement de cisaillement dans le plan correspondant
σ_i	Contrainte dans la direction i
$ au_{ij}$	Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant
α et β	Paramètre de l'algorithme de Newmark
α et β g	Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité
lpha et $etagKt(j)$	Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité la matrice jacobienne
lpha et $etagK_{t_{(j)}}\partial_i(.)$	Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité la matrice jacobienne Dérivée par rapport à la i ^{ième} variables
$\alpha \text{ et } \beta$ g $K_{t_{(j)}}$ $\partial_i(.)$ $(.)'$	Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité la matrice jacobienne Dérivée par rapport à la i ^{ième} variables Dérivée par rapport au temps normalisé
$\alpha \text{ et } \beta$ g $K_{t_{(j)}}$ $\partial_i(.)$ $(.)'$ $(.)^t$	Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité la matrice jacobienne Dérivée par rapport à la i ^{ième} variables Dérivée par rapport au temps normalisé Transposée de (.)
$\alpha \text{ et } \beta$ g $K_{t_{(j)}}$ $\partial_i (.)$ $(.)'$ $(.)^t$ $(.)$	 Paramètre de l'algorithme de Newmark La gravité la matrice jacobienne Dérivée par rapport à la i^{ième} variables Dérivée par rapport au temps normalisé Transposée de (.) Dérivée par rapport au temps

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

L'évolution de l'industrie exige de plus en plus que les structures soient légère et résistantes, pour cela les ingénieurs trouvent la solution en améliorant les procédures de calcul et dimensionnements en introduisant les phénomènes non linéaires souvent négliger dans ces structures, et en utilisant des matériaux qui rependent aux exigences(légèreté, facilité de manipulation...), comme les matériaux composites qui sont largement utiliser dans le monde industriel d'aujourd'hui.

Afin d'étudier le phénomène de la non linéarité, qui se manifeste dans les structures, dont l'origine est très diverse qui peut être liée à la géométrie, au matériau ou même au contact, l'analyse vibratoire nous permet d'obtenir un résultat relativement proche de la solution recherchée. Comme les modèles linéaires ne sont alors plus adaptés pour représenter le comportement de ces structures, des modèles non linéaires plus précis sont alors développés par de nombreux chercheurs et cela depuis des années. Les travaux scientifiques concernant les vibrations non linéaires ne sont pas abondantes en raison de la complexité des problèmes engendrés. Ceux-ci sont difficiles a étudié et conduisent habituellement un temps de calcul important.

Le travail mené ici, ce situe dans cette optique de modélisation du comportement vibratoire non linéaire sous sollicitation dynamique. L'idée est d'exploiter les capacités logicielles du code de calcul éléments finis ABAQUS pour résoudre ces problèmes comportementaux, le choix de ce logiciel de calcul est justifier par sa puissance et l'implémentation de code de calcul de dynamique non linéaire dans ses solveurs (processus de calcul).

Ce mémoire est composé de cinq chapitres.

Le premier chapitre fait une synthèse bibliographique sur les vibrations non linéaire. Dans un premier temps, on liste les différentes approches en vibrations linéaire et non linéaire, l'origine de non linéarités et les équations différentielles qui en découlent. On aborde ensuite les méthodes de calcul des systèmes dynamiques non linéaires ainsi que leurs modes normaux en citant quelques approches utilisables pour la résolution de ces systèmes. Dans le deuxième chapitre, on fait quelques rappels sur les systèmes dynamiques, ainsi que les vibrations linéaires à un et N degrés de libertés, libres et forcés, ensuite on fait un petit tour d'horizon sur la méthode des éléments finis, en indiquant le choix des fonctions de bases et l'écriture sous forme élémentaire.

Une présentation des matériaux composites est mené dans le chapitre trois, celle-ci nous permet de donner quelque notion de base sur ces matériaux qui ne cesse d'évolués.

Le quatrième chapitre propose une étude théorique sur les vibrations non linéaires, tout en abordant les méthodes de résolution des systèmes non linéaire. On va aussi voir quelque cas de systèmes et de théories liées au non linéarités.

Le dernier chapitre est consacré à la simulation numérique de quelques structures sur le logiciel ABAQUS, avant d'entamer les calculs, on présente le logiciel et les différents schémas d'intégration utilisés dans ce code de calcul. Ensuite, on fait l'application sur deux cas tests. Le premier sur une poutre en composite, en faisant varier les conditions aux limites et le coefficient d'amortissement, le deuxième sur une plaque carrée soumise à une excitation harmonique transversale concentrée au centre.

CHAPITRE I

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE ET REVUE LITTERATURE SUR LES VIBRATIONS NON LINEAIRES

I.1. Introduction

La démarche générale d'étude d'un système physique est de tenter de le caractériser par une famille de variables et de décrire son évolution à l'aide des équations. Un phénomène est non-linéaire notamment lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une à l'autre. L'étude des vibrations non linéaires est une thématique importante, qui touche de nombreux domaines, tels que l'aéronautique, le génie civil, l'acoustique musicale ou encore le génie nucléaire...

Pour le traitement de ce phénomène (vibrations non linéaires), quelque soient les non linéarités considérées, géométriques, matériau ou de contacte, une gamme de techniques ou de logiciels est dédiés à l'étude expérimentale ou numérique, mais reste très limité (relativement au cas des vibrations linéaires), ce sujet connaît actuellement un regain d'intérêt du fait du besoin d'optimiser, d'alléger les structures qui doivent être minces et légères d'une part, soumises à des niveaux d'excitation importants d'autre part, d'où la difficulté d'identification ou de calcul des modes non linéaires. En effet une propriété essentielle de tels phénomènes est qu'ils n'obéissent pas au principe de superposition, c'est là une propriété générale qui rend l'étude plus compliquée puisqu'on ne peut plus superposer de solutions.

I.2. A propos des vibrations non linéaires

Les premières observations sur les vibrations datent de l'antiquité par les Grecs, qui ont remarqué que certaines fréquences d'excitation produisent d'importantes amplitudes de vibrations. À l'aube de la renaissance, *Galilée* ainsi que *De Vinci* se sont tous deux penchés sur ce phénomène. Ce qu'ils ont observé et tenté de l'expliquer. Les concepts de linéarité et de non linéarité des systèmes n'étaient pas apparus à ce moment et il faudra attendre plusieurs siècles avant que les développements permettent aux effets non linéaries d'expliquer plusieurs phénomènes physiques.

I.2.1. Les première approche de vibration

I.2.1.1. Approche linéaire

D'un point de vue historique [1], *Rayleigh* fut l'un des premiers, en 1877, à formuler la théorie des vibrations telle qu'on la connaît aujourd'hui. Il a introduit le concept fondamental d'oscillations d'un système linéaire. Ensuite, au cours des années 1920, les besoins de

structures légères en aéronautique ont permis de développer l'étude des problèmes de vibration et de dynamique. Il s'agissait entre autres de prédire le comportement aéroélastique des avions.

Puis, la naissance et le développement de l'informatique au cours des années soixante a entraîné l'apparition des méthodes matricielles (discrétisation d'expressions vibrationnelles) puis le développement de codes éléments finis, s'adaptant à l'augmentation de la taille des systèmes traités. De même, l'informatique a beaucoup apporté au traitement de résultats expérimentaux, avec le développement de techniques d'analyse modale et celui de logiciels dédiés à l'analyse vibratoire expérimentale de structures.

De nombreux ouvrages traitent du thème de la dynamique et des vibrations linéaires, dont on cite celui de *Geradin* en 1993 [1], ou *Timoshenko* en 1939[2]...

Cependant, la limitation de l'étude au cas linéaire occulte de nombreux phénomènes physiques, et pour certains systèmes, la prise en compte des non linéarités s'avère rapidement nécessaire si l'on souhaite en modéliser correctement le comportement réel.

I.2.1.2 Approche non linéaire

Historiquement, la découverte des aspects de la physique non linéaire classique a débuté au 19^{éme} siècle, en mécanique céleste, avec la mesure ou plutôt l'observation des effets anciens liés au non linéarité de la loi d'attraction de *Newton*. Les premiers travaux majeurs sur les systèmes non linéaires ont été effectués à la fin de ce siècle par le français *Henri Poincaré* et le suédois *Anders Lindstedt*. Ils ont fondé les bases de certaines caractéristiques des systèmes non linéaires ainsi qu'un développement d'une technique basée sur la perturbation, aussi appelée la méthode *Lindstedt-Poincaré*.

En suite de nombreuses recherches ont été mené dans ce sens et plusieurs approches ont été établi et considéraient en suite comme modèle pour de nombreuses recherches dont on peut citer: Les modèles (où la cinématique) de *Kirchhoff-Love*, Dans le cas des plaques, où ils ont considéré que le cisaillement transverse est négligé, principalement du fait que l'épaisseur supposée très petite devant les autres dimensions de la plaque. Dans ce sens *Euler et Bernoulli* ont développé pour le cas des poutres. En suite *Reissner-Mindlin*, Dans le cas des plaques épaisses, ils ont considéré le cisaillement transverse qui se développe de façon privilégiée. Encore, à partir des hypothèses de *Reissner-Mindlin*, *Timoshenko* a développé

pour les poutres épaisses. On trouve aussi les modèles de *Von Kármán* fondés sur les travaux de *Kirchhoff* pour le cas des plaques et coques minces...

A partir de ces hypothèses on trouve:

Nicolas Quaegebeur [3] a développé dans sa thèse une modélisation du comportement vibratoire et acoustique de haut-parleurs en incluant les phénomènes non linéaires apparaissant en régime de grandes amplitudes en utilisant les analogues dynamiques des équations de *Von Kármán*.

Arthur Lebée [4] a travaillé sur l'homogénéisation de plaques périodiques épaisses, application aux panneaux sandwichs à âme pliable en chevrons avec le modèle de *Reissner-Mindlin. Mehdi ben Thaier* [5] aussi a développé un utile numérique pour résoudre les problèmes des plaques et des coques mécaniques et piézo-électriques multicouches basé sur ce modèle. Ainsi, *Emmanuel Verhille* [6] a consacré son travaille pour l'étude d'estimateur d'erreur a posteriori de type flux équilibrés et résiduels pour la résolution des équations de ce modèle.

Dans l'article [7], pour une approche d'homogénéisation de l'analyse dynamique non linéaire des poutres multicouches, *T. Benmansour, K. Bensmail, A. Sekhri* ont utilisé l'analyse vibratoire du mouvement transverse libre de la poutre basé sur l'hypothèse *Euler-Bernoulli*.

On trouve aussi:

Georg Duffing [8], a publié en 1918 ses travaux sur le comportement des poutres et les systèmes oscillatoires contenant des forces de rappel élastiques non linéaires, dont l'équation différentielle porte le nom. Il y propose l'introduction d'un terme de raideur dépendant du cube du déplacement ajouté au terme de raideur linéaire. L'oscillateur de Duffing réussit non seulement à traiter des systèmes mécaniques, mais aussi certains permet de réaliser ses premières applications sur la réduction de bruit des machines industrielles.

Il est important de citer les livres: "*Nayfeh and Mook*"[9] qui fait référence sur le sujet des vibrations, dédié exclusivement au cas non linéaire et avec une approche plutôt analytique qui traite de manière générale des oscillations non linéaires, "*Nicolas Bogolyoubovo* et *Iouri mitropolski*"[10], qui traite les méthodes asymptotique en théorie des oscillations non linéaires et "*Marco Amabili*"[11] dédié au vibration non linéaire des plaques et coques.

I.2.2 Origine du non linéarité

Les problèmes mécaniques rencontrés en ingénierie contemporaine comportent de nombreuses non-linéarités.

On rencontre usuellement trois grandes familles en mécanique et en dynamique [12]:

I.2.2.1. Les non-linéarités matérielles

Elles proviennent d'une relation de comportement non-linéaire du matériau : la relation entre les contraintes et les déformations dans le matériau est non-linéaire, dont on peut trouver plusieurs travaux sur ce sujet : *Samuel Blanchard* (2009) [13], *Lois de comportement non-linéaires des matériaux* [14],...

I.2.2.2. Les non-linéarités de contact

Dans cette famille, on classe toutes les non-linéarités liées au contact entre solides dont plusieurs travaux de recherche et publications sont faites: *Flavio D'Ambrosio* [15], *Jean-Jacques SINOU* [16] dont le but est de développer une procédure d'analyse non-linéaire des systèmes vibrants et application aux systèmes de freinage et *Xavier LORANG* [17] dont il fait une application au crissement des freins de TGV...

II.2.2.3. Les non-linéarités géométriques.

Elles apparaissent dans des structures ou des mécanismes soumis à des mouvements de grande amplitude, on trouve plusieurs travaux de recherche : *Franck Pérignon* [18] où il présente les vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires. *Sébastien Bourdreux* [19], où il présente des exemples d'effets de non-linéarité sur le comportement d'un oscillateur. *Olivier Thomas* [20], Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques. On trouve aussi les références [21, 22, 23, 24, ...].

I.3. Equations différentielles non linéaires

Les équations différentielles remontent à l'invention du calcul différentiel et intégral, fait indépendamment par le Britannique *Newton* et l'Allemand *Leibniz* dans les années 1670-1680. Au début, ces équations servaient à résoudre des problèmes géométriques, comme la détermination d'une courbe dont les tangentes sont soumises à une condition donnée. C'est seulement vers 1730 que le mathématicien suisse *Leonhard Euler* a commencé à les utiliser

pour traiter des problèmes de dynamique. Aujourd'hui, elles apparaissent dans presque tous les domaines de la science et de la technique mathématiques, physique, chimie, biologie, ingénierie, économie, etc.

I.4. Méthodes de calcul des systèmes dynamiques non linéaire:

De nombreuses méthodes existent, plus ou moins adaptées selon le type de problème traité. A partir des premières approches de *Lindstedt-Poincaré*, on trouve la méthode de *Newton-Raphson* [25] adapté à la plus par des cas statiques non linéaire, la méthode de *Newmark* présenté dans [26, 27] est largement appliquée pour les cas dynamiques. L'article [18] a présenté plusieurs méthode sur les quelle on cite: Méthode des échelles multiples, présenté aussi dans [9], méthode de l'équilibrage harmonique (EH), Méthode de la balance harmonique trouvé aussi dans [3] ainsi *Vincent JAUMOUILLE* [28] a fait un développement de diverses extensions à cette méthode. Les méthodes asymptotiques numériques qui ont été développé à partir des méthodes asymptotiques proposées par *Freed et Walker* en 1992 [29, 30] dont le principe est d'exprimer les équations différentielles avec plusieurs discrétisations.

I.5. Les Modes Normaux Non linéaires(MNNs)

Les problèmes de la mécanique non-linéaire sont de plus en plus rencontrés en ingénierie. Ces problèmes sont non seulement difficiles à modéliser, mais aussi difficiles à résoudre, si bien que diverses stratégies ont longtemps été mise au point, soit pour éviter ces comportements, soit pour les traiter de manière simplifiée. Les structures souples et flexibles, ou les structures dont la loi de comportement est non linéaire, sont de plus en plus utiliser. Si bien que la nécessité de l'utilisation des méthodes de résolution appropriées. C'est dans ce cadre-là que des recherches sont menées afin d'étendre les notions de modes de vibration aux problèmes non-linéaires, amenant à définir des modes non-linéaires.

Plusieurs définitions des modes normaux non linéaires (MNNs) ont été proposées, où on peut cite:

I.5.1 Approche Rosenberg

D'après [31], la généralisation du concept de modes normaux aux systèmes non linéaires a commencé avec les travaux de *Lyapunov* en1907 dont le théorème montre l'existence d'une famille de solutions périodiques (les modes normaux non linéaires), synchronisées, au voisinage de points d'équilibre stables de systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté. *Rosenberg* ensuite a été le premier à avoir formulé et développé une théorie des modes normaux non linéaires. Il propose une approche radicalement nouvelle pour le calcul de vibrations de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Il utilise une approche géométrique et étudie les trajectoires dans l'espace de configuration. Il considère un système conservatif, composé de masses reliées par des ressorts non linéaires, il propose pour les modes normaux non linéaires la définition "*vibrations à l'unisson d'un système autonome*"

Rosenberg à également donné une définition des lignes modales qui sont, dans l'espace de configuration, des trajectoires des modes normaux. Dans le cas ou le rapport entre les déplacements des masses est constant, les modes normaux non linéaires (MNNs) sont appelés modes similaires et les lignes modales sont des droites (un mode similaire ne dépend pas de l'amplitude de vibration).

A noter que l'approche de *Rosenberg* ne s'applique qu'à des systèmes discrets, conservatifs, avec des forces internes non linéaires qui sont des fonctions polynomiales impaires des composantes des déplacements.

I.5.2 Approche Shaw et Pierre [32]

Shaw et Pierre ont proposé une définition et une méthode de calcul des modes normaux non linéaires basée sur le concept mathématique d'invariant de l'espace des phases et sur le théorème de la variété centrale. Ils ont étudié l'invariance de l'espace bidimensionnel constitué par l'espace des déplacements et celui des vitesses. Pour des conditions initiales qui se trouve sur une surface invariante d'un mode, les réponses du système restent sur cette surface à tout instant (Pour un système linéaire cette surface est un plan).

Dans leur approche, un mode est choisi comme mode « maitre ». Les mouvements et les vitesses de tous les autres degrés de libertés (DDLs), appelés « esclaves » s'expriment en fonction du couple déplacement-vitesse du mode « maitre ». Les surfaces invariantes dans le cas non-linéaire sont tangentes, au point zéro, au plan invariant du mode linéaire associe. Pour calculer les modes non linéaires, des variables « esclaves » sont approchées par des séries polynomiales en termes de variables du mode « maitre ».

I.5.3 Approche "formes normales" [18,16]

L'approche "formes normales" consiste à proposer un changement de variable non linéaire, pour transformer le système non linéaire de départ en un système plus simple (relativement ...) où ne sont conservés que les termes non linéaires importants pour la dynamique. Le principe de cette méthode est basé sur les théorèmes de *Poincaré* et *Poincaré*-*Dulac*. L'application de ce principe aux vibrations de systèmes mécaniques consiste donc à réécrire le système de départ comme la somme d'une partie linéaire et de termes non linéaires.

CHAPITRE II

GENERALITES ET RAPPELS

II.1. Introduction

Les vibrations mécaniques apparaissent dans toutes les structures, elles ont une influence considérable sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Les excitations dynamiques, qui sont une cause des vibrations, sont nombreuses. Elles proviennent, soit de l'environnement extérieur (atmosphère, contacts ou chocs avec d'autres structures), soit de dispositifs internes mobiles (machines intégrées à la structure). Le plus souvent ces vibrations sont néfastes pour les structures (usure, rupture ...) comme pour les personnes (bruits, confort, fatigue) est peuvent conduire à un danger pour la santé. Ces problèmes doivent être pris en compte au niveau de la conception des structures. C'est bien que des études et des recherches ont été menées pour résoudre les phénomènes non linéaires qui sont souvent rencontrés dans la plus part des phénomènes physiques. L'étude de ces derniers à rencontrer beaucoup de problèmes à cause de leur difficulté et leur diversité soit pour les résoudre ou pour les identifier.

Dans ce chapitre on va rappeler quelque notion sur le système dynamique, les équations différentielles et leur résolution ainsi que les éléments finis.

II.2. Définitions

II.2.1. Systèmes dynamiques et systèmes différentiels

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique... ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps. L'étude de l'évolution d'un système nécessite donc la connaissance de son état initial, c'est-à-dire son état à l'instant (t_0) et de sa loi d'évolution.

Un système peut être:

• à temps continu: on le nome alors "système dynamique continu" qui est définie par une équation différentielle.

• à temps discret: on le nome alors " système dynamique discret" qui est définie par une itération successive d'une fonction.

Il peut également être :

• autonome: si sa loi d'évolution ne dépend pas du temps (la loi est alors dite stationnaire);

• non autonome: sa loi d'évolution dépend alors du temps.

II.2.2.Équations différentielles

Les équations différentielles peuvent être partagées en deux classes principales : les équations différentielles linéaires et les équations différentielles non linéaires.

Une équation différentielle est linéaire si elle est constituée d'une somme de termes linéaires en y(t) et ses dérivées comme dans les deux exemples suivants :

Exemple 1 : $\dot{y} + 12y = 4$

Exemple 2 : $5\ddot{y} + \dot{y} + 12y = 2x$

Une équation différentielle non linéaire contient des termes non linéaires en y(t) et/ou en ses dérivées. Les exemples suivants représentent des équations différentielles non linéaires.

Exemple 1 : $\dot{y}^3 + y = 2$

Exemple 2 : $x\dot{y} + 2\dot{y}y + y^2 = e^x$

Exemple 3 : \dot{y} + 2 cos y = x

Les équations différentielles non linéaires ne disposent pas d'une méthode générale ou d'une théorie générale permettant de les résoudre analytiquement, alors la résolution des ces équations dépend de la forme de non linéarité.

II.2.3. Théorème de superposition [33]

Si un système soumis à une excitation $x_1(t)$ pour des conditions initiales $\{y_1(0), \dot{y}_1(0)\}$ a une réponse $y_1(t)$ et si il soumit séparément à une autre excitation $x_2(t)$ pour des conditions initiales $\{y_2(0), \dot{y}_2(0)\}$, a une réponse $y_2(t)$. Le principe de superposition est vérifie si sa réponse à une excitation $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$, pour des conditions initiales $\{\alpha y_1(0) + \beta y_2(t), \alpha \dot{y}_1(0) + \beta \dot{y}_2(0)\}$ la réponse de système est $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$, quels que soient α et β

• Exemple :

Soit l'équation suivante: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

Si $x_1(t)$ est solution de cette équation et si $x_2(t)$ l'est également, alors $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ est aussi sa solution:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{1} + c\dot{x}_{1} + kx_{1} = f(t)_{1} \\ m\ddot{x}_{2} + c\dot{x}_{2} + kx_{2} = f(t)_{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \qquad avec \ f = f_{1} + f_{2}$$

Le théorème de superposition tient au fait que l'équation différentielle de l'oscillateur est linéaire. Dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, il ne s'applique plus.

II.3. Vibrations

L'étude du comportement dynamique des structures en vibrations peut se partager en deux parties:

1- l'étude des vibrations libres: soit un mouvement oscillatoire non entretenu (pendule).

2-les **vibrations forcées**: soit un système soumis à des sollicitations extérieures, où on distingue trois cas d'excitations: harmoniques, périodique et des excitations quelconques.

Pour l'étude de ces derniers, on peut trouver beaucoup de d'ouvrages où nous ferons référence à quelque un ([34], [35], [36])

II.3.1. Etude des systèmes à un degré de liberté

Les systèmes a un degré de liberté peuvent être assimilés à une masse (m) reliée à un point fixe par intermédiaire d'un ressort de raideur (k) et un amortisseur visqueux (C) .cette masse est soumise à une excitation extérieure F(t), fonction du temps *t*, et le seul degré de liberté est son déplacement *x*.

L'équation dynamique de ce système à chaque instant *t* ce traduit par:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \tag{II.1}$$



Figure II.1 : Système à un seul degré de liberté.

II.3.1.1 Systèmes libres à un degré de liberté

Pour les systèmes libre, f(t) = 0, la solution de l'équation (II.1) peut être sous la forme suivante:

$$x(t) = Ae^{rt} \tag{II.2}$$

où A et r sont des constantes.

Substituant (2) dans (1), on obtient l'équation caractéristique suivante:

$$mr^2 + cr + k = 0$$
 (II.3)

où les racines sont:

$$r_{1,2} = \left[-\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{4k}{m}} \right] \tag{II.4}$$

La solution générale de x(t)est:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} (II.5)$$

où A_1 et A_2 sont obtenus en utilisant les conditions initiales.

En désignant par

 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$: la pulsation propre (naturelle) de système (rad/s) $\zeta = \frac{c}{c_0} = \frac{c}{2m\omega_n}$: coefficient d'amortissement visqueux de système avec $c_0 = 2m\omega_n$: coefficient d'amortissement critique Nous obtenons alors:

$$r_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{II.6}$$

Selon le signe de ζ^2 – 1, on distingue trois cas:

• cas sous-amorti $\zeta < 1$

C'est le cas le plus important et le plus rencontré en pratique

$$x(t) = \left[A_1 \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right)\right]e^{-\zeta} \qquad (II.7)$$

ou
$$x(t) = \operatorname{Asin}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right)e^{-\zeta\omega_n t}$$
 (II.8)

avec,

$$r_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{II.9}$$



Figure II.2: réponse d'un système-cas sous amorti.

• cas critique $\zeta = 1$

C'est un cas très rare dans les systèmes mécaniques

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{-\zeta \omega_n t}$$
 (II. 10)

$$a \operatorname{vec} r_{1,2} = -\omega_n \tag{II.11}$$



Figure II.3: réponse d'un système-cas critique.

• cas sur-amorti $\zeta > 1$

De même, ce cas est rarement rencontré

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_1 e^{r_1 t}$$
(II.12)

avec,

$$r_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2}$$
 (II.13)



Figure II.4: réponse d'un système-cas sur-amorti .

Note:

Pour le développement de la solution selon les trois cas précédant est développé dans les références [34], [35], [36] et [37].

• Equation normalisée d'un système à 1 degré de liberté

L'équation différentielle du mouvement d'un système à 1 ddl est souvent représentée avec des termes normalisés par rapport à la masse m:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{II.14}$$

En considérant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et on a $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$, on obtient la relation $\frac{c}{m} = 2m\zeta$ qui conduit à la forme normalisée de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{II.15}$$

II.3.1.2. Systèmes forcées à un degré de liberté

Pour ces systèmes on a $f(t) \neq 0$ dans l'équation (1), et la solution de cette dernière dépond de l'excitation f(t). On peut partager les excitations en trois groupes:

a. Excitations harmoniques

Fréquemment nous nous intéressons au régime permanent de système, alors si on suppose que: $f(t) = F \sin \omega_0 t$

La solution sera de la forme suivante:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi) \tag{II.16}$$

Avec: *A* : amplitude de la phase

 φ : déphasage de la réponse par rapport a l'excitation

L'équation de mouvement s'écrit alors en notation complexe :

$$(-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_0 + \omega_0^2)Xe^{j\omega t} = -\frac{F}{m}e^{j\omega t}$$
(II.17)

L'amplitude complexe X de la solution particulière s'obtient facilement :

$$X = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j 2\zeta \omega_0 \omega}$$
(II.18)

Après avoir fait tous calculs:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\zeta\omega_0/\omega_n}{1-(\omega_0/\omega_n)^2}\right) \tag{II.19}$$

$$A = \frac{F}{\sqrt{(k - \omega_0^2)^2 + c^2 \omega_0^2}} = \frac{x_{st}}{\sqrt{(1 - (\omega_0/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta \omega_0/\omega_n)^2}}$$
(II.20)

Où $x_{st} = F/k$: déplacement statique

b. Excitations périodiques

Dans ce cas, la force est développée en série de Fourier. Si sa pulsation est $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$, alors

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[a_p \cos p\omega_0 t + b_p \sin p\omega_0 t \right]$$
(II.21)

Avec

$$a_p = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos p\omega_0 t \, dt$$
 $p = 1, 2, ...$ (II.22)

$$b_p = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin p\omega_0 t \, dt \qquad (II.23)$$

La solution des différents termes en régime permanent est:

La réponse pour les termes en cosinus:

$$x_{p1}(t) = \frac{a_p (1 - \beta_p^2) - b_p^2 \zeta \beta_p}{(1 - \beta_p^2)^2 - (\zeta \beta_p)^2} \cos p \omega_0 t \qquad (II.24)$$

Avec : $\beta_p = \frac{p\omega_0}{\omega_n}$

La réponse pour les termes en sinus:

$$x_{p2}(t) = \frac{b_p (1 - \beta_p^2) - a_p^2 \zeta \beta_p}{(1 - \beta_p^2)^2 - (\zeta \beta_p)^2} \sin p \omega_0 t \qquad (II.25)$$

La réponse totale est:

$$x(t) = \frac{1}{k} \left(a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \beta_p^2\right)^2 - \left(\zeta\beta_p\right)^2} \times \begin{cases} \left[a_p^2 \zeta\beta_p + b_p \left(1 - \beta_p^2\right)\right] \cos p\omega_0 t \\ + \left[a_p \left(1 - \beta_p^2\right) - b_p^2 \zeta\beta_p\right] \sin p\omega_0 t \end{cases} \right) \quad (II.26)$$

c. Excitations quelconque

En pratique, on utilise des méthodes numérique pas à pas, mais on peut aussi trouver la méthode de la transformée de Laplace.

Pour une fonction f(t) définie pour t > 0 et nulle pour t < 0, la transformée de Laplace est:

$$\mathfrak{J} = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)dt \qquad (II.27)$$
II.3.2. Etude des systèmes à n degrés de liberté

En générale, on ne va pas avoir à étudier le comportement d'une variable mais celui d'un ensemble de variables qui constitueront un vecteur rassemblant des DDL. Nous aurons alors à étudier un système matriciel.

Lorsqu'on a défini un système mécanique avec tous ses DDL, il est possible de déterminer [M] [C] et [K]:

Les méthodes énergétiques, nous permet d'écrire:

• <u>L'énergie cinétique</u>

$$Ec = \frac{1}{2} \{ \dot{x} \}^t [M] \{ \dot{x} \}$$
(11.28)

Où {x}est le vecteur des dérivées par rapport au temps des paramètres de position d'un système: Il s'agit donc du vecteur vitesse selon les DDL du système.

• <u>L'énergie potentielle</u>

$$Ep = \frac{1}{2} \{x\}^t [K] \{x\}$$
(11.29)

x étant un terme générique de déplacement (translation ou rotation)

• <u>Puissance de dissipation $\mathcal{P}d$ </u>

$$\mathcal{P}_{d} = \frac{1}{2} \{ \dot{x} \}^{t} [C] \{ \dot{x} \}$$
(11.30)

Note:

On peut aussi utiliser la méthode de Lagrange pour écrire les équations de système.

Finalement l'équation générale du système s'écrit sous la forme:

$$[M]{\dot{x}} + [C]{\dot{x}} + [K]{x} = {f(t)}$$
(II.31)

C'est l'équation générale de mouvement d'un système.

Ou :

- [*M*] : matrice de masse constante ;
- [*C*] : matrice d'amortissement constante ;
- [*K*] : matrice de rigidité ;
- $\{F(t)\}$: le vecteur des sollicitations extérieures.

II.4. Calcul modal

II.4.1. Systèmes non amortis en mouvement libre

L'équation d'équilibre dynamique se réduit dans ce cas à :

$$[M]{\ddot{x}} + [K]{x} = 0 (11.32)$$

Nous cherchons une solution de la forme :

$$x = Ae^{j\omega t} \tag{II.33}$$

Où : A est le vecteur des amplitudes.

Ce qui ne ramener alors au système suivant :

$$([K] - \omega^2[M])\{A\} = 0 \qquad (II.34)$$

qui est un problème de valeurs et vecteur propres, et fournira comme résultants les valeurs ω_i , et les vecteurs $\{\phi\}_i$ correspondants.

Les vecteurs $\{\phi\}_i$ sont dits formes modales ou formes propres, alors que chaque couple $(\omega_i, \{\phi\}_i)$ caractérise le *i^{éme}* mode de vibration du système.

II.4.2. Propriétés des solutions propres

Nous remarquons que :

$$\begin{cases} \phi \}_i^t [M] \{ \phi \}_j = 0 \\ et \forall \quad i \neq j \\ \{ \phi \}_i^t [K] \{ \phi \}_j = 0 \end{cases}$$
 (II. 35)

Ce qui se traduit par l'orthogonalité des modes par rapport aux matrices de masse et de raideur. Par suite, $[\phi]$ étant une matrice carré, les matrices $[\phi]^t[M][\phi]$ et $[\phi]^t[K][\phi]$ seront des matrices diagonales.

De plus, en revenant à l'équation d'équilibre, nous avons :

$$\omega_i[M]\{\phi\}_i = [K]\{\phi\}_i$$
 (11.36)

En pré-multipliant par $\{\phi\}_i^t$, il vient :

$$\omega_i^2 = \frac{\{\phi\}_i^t[K]\{\phi\}_i}{\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i} = \frac{k_i}{m_i}$$
(11.37)

Avec $k_i = \{\phi\}_i^t [K] \{\phi\}_i$ et $m_i = \{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i$ étant la raideur et la masse modale associées au $i^{\acute{eme}}$ mode.

Mais il est à noter que si le système contient plusieurs modes de corps rigide, c'est à dire des fréquences nulles, la matrice $\{\phi\}_i^t[M]\{\phi\}_i$ ne sera pas diagonale.

II.5. Discrétisation temporelle

II.5.1. Représentation des fonctions du temps

Les méthodes d'approximation en espace conduisent à représenter les fonctions sous la forme:

$$f(M) = q_i \omega_i(M); M \in \Omega \tag{II.38}$$

Lorsqu'on traite des problèmes d'évolution on cherche des solutions sous la forme f(M,t). L'approximation en espace consiste généralement à chercher ces fonctions sous la forme :

$$f(M,t) = q_i(t)\omega_i(M); M \in \Omega; t \in [0,T]$$
(II.39)

Il se pose pour la représentation des fonctions du temps $q_i(t)$ les mêmes problèmes que pour la représentation des fonctions d'espace. Des méthodes de représentation de type éléments finis à la fois pour l'espace et le temps existent, mais la méthode générale consiste à représenter les fonctions du temps par leurs valeurs à des instants particuliers appelés piquets de temps. L'intervalle [0,T] est divisé en h intervalles identiques et on appelle pas de temps la quantité :

$$\Delta t = \frac{T}{h} \tag{II.40}$$

Les piquets de temps sont alors définis par :

$$t_k = k\Delta t = k\frac{T}{h} ; k = 1, h \qquad (II.41)$$

La quantité de variables scalaires à stocker pour représenter la fonction f(M,t) est donc $N \times h$, où N est le nombre de degrés de liberté et h le nombre de piquets de temps. Pour la suite, on utilise la notation suivante :

$$q(t=t_k) = q^k \tag{II.42}$$

Par abus de langage, on confond la notion d'instant et la notion de piquet de temps : on appelle instants les piquets de temps où sont calculées les solutions.

II.5.2. Schéma d'intégration

On appelle schéma d'intégration, la relation qui lie les variables recherchées à un instant donné aux variables supposées connues aux instants précédents :

$$q^{t} = f(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1} \dots q^{t-2}; \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots)$$

$$\dot{q}^{t} = g(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1} \dots q^{t-2}; \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots) \qquad (II.43)$$

$$\ddot{q}^{t} = g(q^{t-1}, \dot{q}^{t-1}, \ddot{q}^{t-1} \dots q^{t-2}; \dot{q}^{t-2}, \ddot{q}^{t-2}, \dots)$$

On appelle schéma d'intégration à un pas, un schéma qui lie les variables cherchées uniquement aux variables connues à l'instant précédent.

II.6. Rappel sur les éléments finis [38]

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes .pour dominer ces projets, il a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physique complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur tel que mécanique des solides, des fluides, thermique ... permettent de décrire le comportement du système physique grâce a des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnus pour transformer les équations aux dérivés partielles en équations algébriques.

Elle fait appel aux trois domaines suivants :

- science de l'ingénieur pour construire les équations décrivant le comportement du système physique ;
- méthode numérique pour construire et résoudre les équations algébriques ;
- programmation informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateurs.

La méthode des éléments finis est maintenant très répandue dans les industries en particulier en construction aéronautique, aérospatiales, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides.

II.6.1. Choix des fonctions de base

II.6.1.1. Fonctions locales

Les fonctions de base utilisées par la MEF sont locales autour de points particuliers. Le domaine est représenté par un ensemble de points (les nœuds). Chaque fonction est associée à un nœud.

II.6.1.2. Maillage

En fait le domaine est représenté par un nombre fini d'éléments de forme simple. Les nœuds sont les sommets des éléments. Les éléments assurent la couverture du domaine avec un recouvrement maximal de manière à ce que : $\int_{\Omega} \dots d\Omega \simeq \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \dots d\Omega_e \qquad (II.44)$

Il s'agit là d'une deuxième approximation de la méthode car la couverture du domaine peut être incomplète (figure II.5).



Figure II.5 : Approximation de couverture du domaine.

II.6.1.3. Fonctions

Les fonctions de base sont choisies de telle manière que :

 $Q_i = 1$ au nœud *i* et $Q_i = 0$ au nœud *j* $\forall j \neq i$.

Et la fonction Q_i est non nulle sur les éléments doit le nœud *i* est un somment.

Ainsi lorsque

$$f_a(M) = q_i Q_i(M) \qquad \qquad i = 1...N$$

 q_i est directement la valeur de $f_a(M)$ au nœud *i*.

En pratique les fonctions Q_i sont simples (polynomiales de bas degré) et la richesse del'approximation est donnée par la taille des éléments du maillage (finesse du maillage).

La simplicité de forme des éléments permettra l'intégration des fonctions sur le domaine Ω .

II.6.2. Ecriture sous forme élémentaire

II.6.2.1. Intérêts

Le calcul des termes de rigidité et de raideur nœud par nœud (fonction de base par fonction de base) n'est pas tellement systématique car chaque fonction de base n'a pas le même domaine de couverture. On préfère calculer les contributions de chaque élément ce qui conduit à des calculs similaires sur chaque élément.

On parle alors de matrice de raideur élémentaire et de vecteur forces généralisées élémentaire.

Ces éléments seront assemblés entre eux pour formé la matrice et le vecteur complet.

II.6.2.2. Calcul des termes de raideur

Chaque terme de la matrice de raideur, K_{ij} , fait intervenir des produits des dérivées des deux fonctions Q_i et Q_j . Il n'est non nul que sur les éléments dont les nœuds *i* et *j* sont des sommets.

Par exemple, en élasticité :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} A \underbrace{\in}_{\Omega} (\vec{Q}_i) : \underbrace{\in}_{\Xi} (\vec{Q}_j) d\Omega$$
 (II.45)

Peut s'écrire

$$K_{ij} = \sum_{e} \int_{\Omega_e} A \underbrace{\in}_{\overline{\Omega_i}} (\overline{Q_i}) : \underbrace{\in}_{\overline{e}} (\overline{Q_j}) d\Omega_e = \sum_{e} K_{ij}^e$$
(II.46)

La matrice de raideur globale peut être construite comme un assemblage de matrices de raideur relatives à chacun des éléments. Elles sont appelées matrices de raideur élémentaires.

II.6.2.3. Calcul des termes de forces généralisées

Chaque terme du vecteur forces généralisées, F_i , fait intervenir la fonctions ω_i seulement. Il n'est non nul que sur les éléments dont le nœud *i* est un sommet.

Par exemple, en élasticité :

$$F_{i} = \int_{\Omega} \overline{f_{d}} \overline{Q_{i}} d\Omega + \int_{\partial \Omega} \overline{F_{d}} \overline{Q_{i}} dS$$
(II.47)

peut s'écrire

$$F_{i} = \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \overline{f_{d}} \,\overline{Q_{i}} d\Omega_{e} + \int_{\partial\Omega_{e}} \overline{F_{d}} \,\overline{Q_{i}} dS_{e} = \sum_{e} F_{i}^{e}$$
(II.48)

Le vecteur forces généralisées global peut être construit comme un assemblage de vecteurs forces généralisées relatifs à chacun des éléments. Ils sont appelés vecteurs forces généralisées élémentaires.

Donc, en générale les différentes étapes pour la résolution d'un problème en éléments finis:

- Maillage : découpage du domaine en éléments géométriques ;
- Choix de la formulation : Choix des fonctions de base ;

- Calcul des matrices de raideur : calcul des matrices élémentaires puis assemblage de la matrice globale ;
- Calcul du vecteur des forces généralisées ;
- Prise en compte des conditions aux limites sur les inconnues ;
- Résolution du système linéaire ;
- Détermination du champ en tout point ;
- Calcul des dérivées sur les éléments ;
- Détermination des réactions aux limites.

II.7. Conclusion

On a réservé tout un chapitre pour des généralités sur les vibrations linéaires et les éléments finis, pour montrer l'utilité de ces notions citées ci-dessus, dans les études et les calculs des structures en dynamiques ou en statique. Ces notions présentent une introduction pour les chapitres à venir afin de mieux comprendre le phénomène non linéaire.

CHAPITRE III

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

III.1. Introduction

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels,...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

III.2.Définition

Un matériau composite résulte d'un assemblage intime d'au moins de deux corps non miscibles (figure III.1) à structure différentes dont les qualités individuelles se combinent et se complètent en donnant un matériau hétérogène et fortement anisotrope dont les performances globales sont améliorées [39].



Figure III.1 : Constituants d'un matériau composite

III.3. Types de matériaux composites

Parmi les composites, on distingue deux types : les composites grandes diffusions (GD) et les composites hautes performances (HP).

III.3.1. Composites grande diffusion (GD)

Les composites grandes diffusions représentent 95% des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort avoisinant 30%. Dans 90% des cas, l'anisotropie n'existe pas ou n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters (95% des résines thermodurcissables) avec des fibres de verre (plus de 99% des renforts utilisés). Renforts et matrices sont à des coûts voisins [40].

III.3.2. Composites hautes performances (HP)

Les composites hautes performances, principalement utilisés dans l'aéronautique sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux composites grandes diffusions [40].

III.4. Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme des constituants ou suivant la nature des constituants.

III.4.1. Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes : les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

III.4.1.1.Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres. Celles-ci peuvent être soient continues ou discontinues.

III.4.1.2.Composites à particules

Un composite est dit à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules. Celles-ci sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait ; dans de nombreux cas; les particules sont simplement utilisées comme charge pour réduire le coût du matériau, sans en altérer les autres caractéristiques du matériau [39].

III.4.2. Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés en trois catégories :

III.4.2.1.Composites à matrice organique (résine, charges), avec :

- des fibres minérales : verre, carbone, etc.
- des fibres organiques : Kevlar, polyamides, etc.
- des fibres métalliques : bore, aluminium, etc.

III.4.2.2.Composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium, de titane), avec :

- des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC),
- des fibres métalliques : bore,
- des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

III.4.2.3.Composites à matrice minérale (céramique), avec :

- des fibres métalliques : bore ;
- des particules métalliques : cermets ;
- des particules minérales : carbures, nitrures, etc.

III.5.Les constituants d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué de deux constituants de base : la matrice et le renfort.

III.5.1. La matrice

Cette phase est indispensable à la liaison des divers éléments constitutifs, est composée d'une résine (polyester, époxyde, etc...) et d'une charge (carbonate de calcium, graphite, etc.). Leur rôle est de lier les renforts, de répartir les charges (contraintes, résistance à la traction et rigidité) et d'assurer la protection chimique contre les agents agressifs extérieurs tels que (acides, humidité, corrosion...) et donne la forme au produit réalisé. Le choix de la

matrice dépend de l'utilisation à laquelle est destinée le matériau composite. La figure III.2 présente les différentes familles de matrice.



Figure III.2 : Différentes familles de matrice.

III.5.1.1.Les résines thermodurcissables

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage [41] :

- Les résines polyesters instaurées : polyesters condensés, vinylesters, dérives allyliques, etc.
- Les résines de condensation : phénoliques, aminoplastes, etc.
- Les résines époxydes.

Résines	$\mathbf{T}_{f}[^{\circ}\mathbf{C}]$	ρ [kg/m ³]	ε_t^R [%]	σ_t^R [MPa]	σ_c^R [MPa]	E [GPa]
Polyesters	60 à 100	1140	2 à 5	50 à 85	90 à 200	2,8 à 3,6
Phénoliques	120	1200	2,5	40	250	3 à 5
Epoxydes	290	1100 à 1500	2 à 5	60 à 80	250	3 à 5

Tableau III.1 : Caractéristiques des résines thermodurcissables.

a. Les résines polyesters

Les résines polyesters instaurées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultat de son faible coût de production, de leur diversité offrant de multiples possibilités et aussi de son adaptation à des procédés de fabrication facile à mettre en œuvre et à automatiser, d'où un développement industriel sans cesse croissant.

b. Les résines de condensation

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques.

c. Les résines époxydes

Les résines les plus utilisées après les résines de polyesters instaurées sont les résines époxydes. Elles ne représentent cependant que de l'ordre de 5 % du marché composite, à cause de leur prix élevée (de l'ordre de cinq fois plus que celui des résines polyesters).

III.5.1.2. Les résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques faibles. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température. Les polychlorures de vinyle (PVC), les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène, polycarbonate et polyamide sont quelques exemples de ces résines thermoplastiques. Parmi les résines thermoplastiques classiquement rencontrées le polyéther-éther-cétone (PEEK).

Les principales propriétés des thermodurcissables et thermoplastiques sont donnés dans le tableau III.2.

Matrices	Thermodurcissables TD	Thermoplastiques TP
état de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage+ refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Meilleure	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	émanations de solvants	Propreté

Tableau III.2 : Principales propriétés des thermodurcissables et thermoplastiques [41].

III.5.1.3. Les matrices métalliques

La température maximale d'utilisation des polymères étant peu élevée, et le carbone risquant de s'oxyder à plus de 500°C, il faut parfois envisager d'utiliser des matrices dont l'inertie chimique est meilleure à plus haute température. Puisque certains métaux ou alliages métalliques peuvent éventuellement satisfaire à cette exigence, on a donc recours à ces matrices dans des conditions pareilles

Et elles présentent comme avantages :

- des propriétés mécaniques supérieures.
- tenue en température élevée.
- résistance à l'attaque de certains solvants.

III.5.1.4. Les matrices céramiques

Grâce à leurs propriétés intrinsèques (réfractaire, rigidité, résistance et bonne stabilité chimique), les céramiques sont potentiellement des matériaux capables de bien jouer le rôle de matrice dans des matériaux composites; dans ce cas, les fibres de renfort ont principalement pour but d'améliorer la ténacité de telles matrices, ainsi que leur résistance aux chocs thermiques.

Les techniques d'incorporation des fibres de renfort aux céramiques doivent tenir compte des procédés de fabrication spécifiques à celles-ci (en particulier, le frittage). On extrude la matrice (sous forme de poudres), qui contient un liant, et les fibres alignées dans une filière. Le liant durcit, ce qui permet d'assurer une cohésion suffisante de la matrice, ainsi que sa manipulation. On fritte ensuite cette matrice à haute température.

III.5.2. Les fibres [42]

Ils sont de nature filamentaire; ils constituent l'armature ou le squelette du matériau composite avec une fraction volumique de (30 à 70%). Ils sont destinés à améliorer ou assurer la tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, à la traction) telle que cette dernière est proportionnelle au rapport longueur /diamètre (l/d). La figure I.5 présente les principaux matériaux de renfort.



Figure III.3 : Principaux matériaux de renfort.

III.5.2.1.Fibres de verre

Elles constituent le renfort essentiel des composites de grande diffusion (figure III4). Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie, oxyde de bore). On distingue trois types de fibres :

- E : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- R : pour les composites hautes performances ;
- D : pour la fabrication de circuits imprimés (propriétés diélectriques).



Figure III.4 : Fibres de verre.

- Les avantages des fibres de verre
- ✓ Rapport performances mécanique/prix ;
- ✓ Bonne résistance spécifique (pour verre E) ;
- ✓ Bonne adhérence avec toutes les résines ;
- ✓ Tenue à température élevée, etc.

III.5.2.2.Fibres de carbone

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyactylonitrile) (figure III.5). Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres :

- fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 $^{\circ}$ C ;
- fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à2000 °C.



Figure III.5 : Fibres de carbone.

III.5.2.3.Fibres d'aramide

Souvent appelée KEVLAR, la fibre d'aramide est issue de la chimie des polyamides aromatiques. Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes :

- les fibres bas module : utilisées pour les câbles et les gilets pare-balles ;
- les fibres hauts module : employées dans le renforcement pour les composites hautes performances.



Figure III.6 : Fibres de Kevlar.

III.5.2.4. Fibre de bore

Fibres de haut module et insensibles à l'oxydation à hautes températures, elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène.

III.5.2.5. Fibre de silice (ou de quartz)

Elles sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée.

III.5.2.6. Fibres de polyéthylène de haut module

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.

III.5.3.Architectures des fibres [39, 42]

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts :

- Les mèches : ensembles des fibres discontinues ;
- *Stratifils*: assemblage des fils de base sous torsion ;
- Les mats : Ils sont des nappes de fils continus ou discontinus (figure III.7) ;



Figure III.7 : Formes de mats : (a) mat à fibres courtes, (b) mat à fibres continues.

• *Un tissu (ou ruban) :* est un ensemble surfacique de fils, de mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser (figure III.8) ;



Figure I.8 : Les principaux types d'armures utilisées pour le tissage des tissus.

• Tissage cylindrique ou conique (figure III.9) ;



Figure III.9 : Tissages cylindrique et conique.

• Tissage 3D, 4D (figure III.10).



Figure III.10 : (a) : Tissage 3D orthogonal, (b) : Tissage 4D.

III.5.4. Ensimage

Les renforts destinés à la fabrication des composites reçoivent un ensimage. L'ensimage est une dispersion aqueuse spécifique comportant un agent collant, un agent pontant et des antistatiques, permettant d'assurer différents rôles :

- compatibilité de la liaison fibre matrice ;
- cohésion inter-filamentaire (raideur du fil) pour qu'il soit manipulable ;
- protection contre l'abrasion générée par la mise en œuvre (frottement contre pièces métalliques);
- élimination des charges électrostatiques dues aux frottements ;
- augmentation du mouillage de la fibre au cours de l'imprégnation.

III.6. Architecture des matériaux composites

III.6.1. Composites sandwichs [39]

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer à une âme (cœur), possédant de bonnes propriétés en compression, deux « feuilles » appelées peaux, possédants de bonnes propriétés en traction (figure III.11). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité ; toutefois, il faut s'assurer d'une bonne solidarisation de l'ensemble âme-peaux, de façon à répartir les efforts entre les différents constituants. L'assemblage se fait par collage, à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



Figure III.11 : Composite sandwich.

Les matériaux les plus couramment utilisés sont :

- Pour les âmes pleines :
 - le balsa ou bois cellulaires ;
 - diverses mousses cellulaires ;
 - des résines chargées de microsphères creuses de verre.

> Pour les âmes creuses, essentiellement nid d'abeilles et profilés :

- des alliages métalliques légers ;
- du papier Kraft ;
- du papier polyamide, type papier Nomex.

Les peaux sont les plus souvent des stratifiés (verre, carbone, Kevlar) ou de feuilles d'alliages légers.

III.6.2. Stratifiés [39]

On appelle ainsi se qui résulte de la superposition de plusieurs couches (plis), de nappes unidirectionnelles, de tissus ou de mats, avec des orientations propres à chaque pli : c'est l'opération de drapage (figure III.12).

L'un des avantages fondamentaux des stratifiées réside dans la possibilité d'adapter et de contrôler l'orientation des fibres pour que le matériau résiste à des sollicitations déterminées dans les meilleurs conditions. Il convient donc de savoir comment les plis réagissent aux efforts qui leurs sont appliqués, compte tenu de leur orientation par rapport aux sollicitations. Il existe divers types de stratifiés :

III.6.2.1. Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels sont constitués de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

III.6.2.2. Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de nature différentes, qu'il sera nécessaire de les mentionner dans la désignation. Ils permettent d'avoir un composite plus performant, en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles. Parmi les différents hybrides on peut distinguer :



Figure III.12 : Stratification.

- des hybrides inter-couches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente;
- des hybrides intra-couches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents ;

• des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

III.6.3. Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de fibres unidirectionnelles sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis.

L'épaisseur d'une couche est généralement très faible, de l'ordre de 0,125mm pour un matériau carbone-époxy de type aéronautique, et de 0.3mm pour ceux utilisés dans l'industrie nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x ;
- les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / »;
- les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique ;
- en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche ;
- en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole « s » indique la symétrie.

Exemple de désignation

Désignation : [30/90₂/-45/0/45] (Figure III.13).



Figure III.13 : Désignation d'un stratifié.

III.7. Propriétés mécaniques des matériaux composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'une structure en matériau traditionnel, métallique par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, aussi bien en raideur qu'en résistance, assurées par les fibres. Or, si l'on excepte quelques cas particuliers tels les câbles ou les tirants, une structure doit supporter des efforts dans plusieurs directions, et le matériau constitutif correspondant doit être obtenu par la mise en œuvre d'arrangements de couches soigneusement dimensionnées et orientées.

• Relation contraintes-déformations d'un composite unidirectionnel

$$\begin{cases} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \varepsilon_{3} \\ \varepsilon_{3} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{1}} & \frac{-\nu_{31}}{E_{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{1}} & \frac{1}{E_{2}} & \frac{-\nu_{32}}{E_{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{1}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{2}} & \frac{1}{E_{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{21}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1} \\ \sigma_{2} \\ \sigma_{3} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$
(III. 1)

Avec : 1,2 et 3 directions de symétrie (Figure III.14)

Avec, pour raison de symétrie :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad ; \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \quad ; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \tag{III.2}$$

Cette matrice, qui permet d'obtenir des déformations relatives connaissant les contraintes, est généralement appelée matrice de souplesse, est notée [S]. La matrice inverse, notée[C], est généralement appelée matrice des complaisances (ou des rigidités). Elle permet d'obtenir les contraintes en fonction des déformations relatives. Compte tenu de la symétrie de la matrice, neuf constantes sont nécessaires pour décrire le matériau s'il n'est pas isotrope transverse. Cependant dans la plupart des cas, le matériau n'est utilisé que dans un plan, et sa relation de Hooke généralisée se simplifie grandement dans la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1} \\ \varepsilon_{2} \\ \gamma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{1}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{2}} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{1}} & \frac{1}{E_{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1} \\ \sigma_{2} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}$$
(III. 3)

Soit :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \tag{III.4}$$



Figure III.14 : Pli composite unidirectionnel

Les constantes qu'il est nécessaire de déterminer sont alors au nombre de quatre : le module de Young sens fibres E_1 , le module de Young sens transverse E_2 , le coefficient de cisaillement G_{12} et le coefficient de Poisson principal v_{12} . Plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

- la méthode expérimentale est en principe la meilleure, mais elle nécessite la réalisation d'éprouvettes et de séries de mesures, inabordables dans les premiers stades d'étude ;
- les méthodes de calcul par homogénéisation font appel à des théories complexes qui nécessitent la conduite de calculs informatiques, parfois non négligeable [43];

• les méthodes d'estimation par formules approchées [43] [44].

Quelques soient les méthodes retenues et leur précision, il ne faudrait pas négliger un phénomène important qui pourrait se produire lorsque la structure est mise sous chargement extensif, la première fois lors d'un essai de réception par exemple, et ensuite au cours de sa vie opérationnelle. La microfissuration de la matrice qui va apparaitre au niveau des plis, en fonction des contraintes transverses et de cisaillement induites, généralement bien avant la ruine proprement dite de la structure, se traduira par une chute des valeurs des divers modules. Cette chute est faible pour le module de Young dans le sens des fibres et conséquente dans les autres directions.

III.8.Procédés de fabrication

Les techniques de fabrication jouent un rôle dans les composites car chacune des opérations influe de manière irréversible sur le résultat final. On distingue les différents procédés suivant

III.8.1. Moulage au contact [39]

Pour le moulage au contact, la première étape est la préparation du moule (polissage, cirage), puis le dépôt d'un agent de démoulage (gel-coat) : plusieurs couches de renforts (tissus, mats...) sont ensuite successivement appliquées, chacune étant enduite en résine (généralement en polyester) et toutes les bulles éliminées, jusqu'à obtention de l'épaisseur désirée ; la polymérisation de la résine est effectuée à température ordinaire ou par chauffage. Cette technique permet la réalisation de pièces lourdes et de grandes dimensions (coques de bateau).



Figure III.15 : Moulage au contact.

Domaines d'application

- ✓ Nautisme
- ✓ Piscine
- ✓ Génie chimique
- ✓ Transport, carrosserie (petites séries)
- ✓ Bâtiment, travaux public (coffrage)

III.8.2. Moulage par projections simultanées [39]

Le moulage est effectué par projection simultanée de fibres coupées et résine catalysée sur un moule. L'équipement à projeter est constitué d'une machine à couper le stratifil et d'un pistolet projetant la résine et les fibres coupées, l'ensemble fonctionnant par air comprimé. La couche de fibres imprégnées de résine est ensuite compactée et débarrassée des bulles au rouleau cannelé.



Figure III.16 : Principe du moulage par projection simultanée.

• Applications

- ✓ Production de bateaux
- ✓ Revêtements
- ✓ Bâtiments : façade, articles sanitaires
- ✓ Travaux public : coffrages
- ✓ Capotage industriel
- ✓ Panneaux sandwiches pour camions isothermes

VII.3. Moulage sous vide [39]

Ce procédé est encore appelé moulage en dépression ou moulage au sac (Figure III.17). Comme le moulage au contact, on utilise un moule ouvert sur lequel on dispose les couches de renfort imprégné, ainsi éventuellement que les âmes de remplissage lorsqu'il s'agit de matériaux sandwiches. Une feuille de plastique vient couvrir le tout hermétiquement (pose d'un joint d'étanchéité sur le périmètre de la pièce). On fait le vide sous la feuille plastique.

Il y a alors compactage par tissu de pompage. L'ensemble est ensuite soumis à polymérisation : en étuve ; en autoclave, avec suppression (7 bars dans le cas du carbone/époxyde pour obtenir une meilleure résistance mécanique).



Figure III.17 : Moulage sous vide.

- Domaines d'application
- ✓ Bâtiment : coupoles d'éclairage zénithal
- ✓ Transports : panneaux sandwiches pour camion isothermes, conteneurs
- ✓ Pièces diverses : casques de protection enveloppants, capotages...

III.8.4. Moulage par centrifugation [39]

Ce procédé est utilisé pour la fabrication des tubes. Il permet une répartition homogène de la résine et des états de surface soignés, y compris sur la face interne du tube. La longueur des tronçons est limitée par celle du moule (Figure III.18). Le démoulage se fait par retrait des résines polyesters. Les cadences varient avec le diamètre et la longueur des pièces.



Figure III.18 : Moulage centrifugation.

- Exemple d'application
- ✓ Tuyaux : jusqu'à 2 m de diamètre
- ✓ Cuves (diamètre 1 à 2 m)
- ✓ Silos (diamètre 4 à 5 m, longueur 10 à 12 m)
- ✓ Cages de pressoirs à vin

III.8.5. Moulage par injection de résine RTM (Résine Transfert Molding) [43]

Le moulage consiste, par injection de résine sous pression, à imprégner un renfort placé à l'intérieur d'un ensemble moule et contre-moule très rigide et fermé (Figure III.19). L'alimentation automatique des résines élimine leur manipulation. La proportion de renfort peut être élevée, d'où l'obtention de pièces à caractéristiques mécaniques élevées.

Ce procédé de moulage convient à la réalisation de pièces profondes et de formes compliquées.



Figure III.19 : Moulage par injection de résine.

Domaines d'application

- ✓ Eléments de carrosserie pour véhicules de tourisme ou utilitaires
- ✓ Petits articles sanitaires

- ✓ Cuves de petites et moyennes dimensions
- ✓ Capotages
- ✓ Pièces industrielles diverses
- ✓ Fourches de vélo, raquettes de tennis

III.8.6. Moulage par enroulement filamentaire [39]

Le renfort (fil continu, ruban, etc.) imprégné de résine catalysée est enroulé avec une légère tension, sur un mandrin cylindrique ou de révolution en rotation (figure III.20).Ce type de moulage est bien adapté aux surfaces cylindriques et sphériques, et permet une conception avancée des pièces. Les stratifiés obtenus peuvent comporter des proportions élevées de renfort (jusqu'à 80% en volume), permettant donc d'obtenir de hautes caractéristiques mécaniques. L'investissement en matériel est très important.

Suivant les mouvements relatifs du mandrin, on distingue divers types d'enroulements : l'enroulement circonférentiel, l'enroulement hélicoïdal, l'enroulement polaire.



Figure III.20: Moulage par enroulement filamentaire circonférentiel.

• Domaine d'application

- ✓ Tuyaux devant résister à de fortes pressions, citernes de transport, réservoirs de stockage
- ✓ Appareillage de génie chimique
- ✓ Industrie électrique
- ✓ Armement (tubes lance-roquettes...)
- ✓ Automobile : ressorts de suspension
- ✓ Sport : perche, canne à pêche, bouteille de plongée

III.8.7. Moulage par compression de mat pré-imprégné - SMC [43]

Le mat préimprégné SMC (SheetMolding Compound) est constitué d'une nappe de fils coupés ou continus, imprégnée entre pellicules par mélange de résine polyester, de charges et d'adjuvants spécifiques divers. Au bout d'un certain temps, la viscosité du mélange devient telle que le produit peut être défilmé et manipulé sans coller.

Découpé en flans de masse et dimensions déterminées, le mat préimprégné est moulé à chaud

(140 à 160 °C) par compression entre moule et contre -moule acier usiné. La pression (50 à

100 bars) entraîne le fluage de la matière et le remplissage de l'empreinte. Le temps de durcissement très court (en fonction de l'épaisseur) permet un démoulage rapide.



Figure III.21 :Moulage par compression de mat preimprégné – SMC.

• Domaines d'applications

- Industrie automobile (tourisme et utilitaire) : pièces de carrosseries sous capots, pièces de protection ;
- ✓ Industrie électrique : coffrets de comptage, réglette d'éclairage ;
- ✓ Pièces industrielles diverses.

III.9. Conclusion

Les matériaux composites sont aujourd'hui largement utilisés dans des domaines très divers, grâce à leurs propriétés mécaniques..., la connaissance parfaite de certaines caractéristiques, elles ne pourront d'être qu'avec la considération de l'anisotropie du matériau afin de mieux définir son rôle et optimiser ses performances, et pour connaitre mieux le comportement des matériaux composites qui est un paramètre très important dans l'étude des matériaux, il faut faire appel aux études dans le domaine non linéaire.

CHAPITRE IV

ETUDE THEORIQUE SUR LES VIBRATIONS NON LINEAIRES

IV.1. Introduction

Il est plus simple de définir un système linéaire, si bien qu'on définit souvent un système non linéaire comme un système qui n'est pas linéaire.

Un phénomène est linéaire lorsqu'un changement de l'intensité de la cause produit un changement de l'effet dans les mêmes proportions. Les systèmes non linéaires ont donc en général un comportement qui dépend de cause. Par exemple, les fréquences particulières d'un système non linéaire (fréquences de résonance, fréquence d'oscillations libres) dépendent de l'amplitude de l'excitation.

D'une autre manière un système est linéaire, donc, pour un signal d'entrée sinusoïdal pur, on aura une réponse sinusoïdale pure, de même fréquence. Ainsi, une propriété forte des systèmes linéaires est de conserver le contenu fréquentiel du signal d'entrée en modifiant simplement son intensité. Cette propriété est perdue dans le cas des systèmes non linéaires.



Figure IV.1 : Comportement dynamique d'un système linéaire.

Un système linéaire a la propriété d'obéir au principe de superposition qui est un outil très important pour résoudre les problèmes de ces systèmes, en revanche cette propriété est perdu dans le cas des systèmes non linéaires.

Après avoir évoqué ce qui caractérise la linéarité d'un système, la suite donne un aperçu des différentes causes, ou mécanismes, qui donnent lieu à la perte de linéarité et donc qui sont à la source des phénomènes non linéaires.

IV.2.Origine des non linéarités

On se restreint ici à la mécanique des solides, pour laquelle on peut classer ces mécanismes en trois grandes familles.

IV.2.1. Les non-linéarités matérielles

Dans ce cas, c'est la loi de comportement du matériau qui est non-linéaire. On peut citer comme exemples :

- Les matériaux élasto-plastiques : le passage des déformations élastiques aux déformations plastiques correspond à une relation contrainte/déformations non régulière, les déformations plastiques obtenues sont irréversibles et se manifestent par un comportement hystérétique, trois caractéristiques non linéaires. La plupart des métaux présentent ce comportement, lorsque les contraintes dépassent leur limite élastique.
- Les matériaux élastiques non linéaires : dans ce cas, les déformations sont parfaitement réversibles (c'est le caractère élastique) et régulières, mais c'est la relation contraintes / déformations qui est non linéaire. Ces matériaux sont aussi en général fortement dissipatifs. C'est le cas des élastomères, par exemple.
- Les alliages à mémoire de forme. Ce sont des matériaux qui changent de phase métallurgique en fonction des contraintes et des déformations qui leurs sont appliquées. La principale caractéristique non linéaire est que la relation contrainte / déformations présente une hystérésis non régulière.

IV.2.2. Les non-linéarités de contact

Ce sont des non-linéarités qui apparaissent à l'interface entre plusieurs constituants d'un système. On peut citer :

les contacts dit localisés, lorsque la surface de contact entre deux éléments est de dimension réduite (On dit aussi que le contact est non conforme). Dans ce cas, le déplacement d'un élément par rapport à l'autre et la force qui crée ce rapprochement est en relation non linéaire. Ils sont prédits en particulier par la théorie de Hertz (Par exemple, pour une bille sur une surface plane, on a P = Kδ^{3/2}, où P est la force, δ le déplacement et K une constante). Les exemples technologiques les plus répandus sont les liaisons par éléments roulants (roulements à billes, roulements à rouleaux etc.) et les engrenages.

- le frottement sec, lorsque deux éléments d'un système sont en contact non lubrifié.
 Dans ce cas, on observe des alternances entre de l'adhérence et du glissement, qui crée une relation non régulière (et donc non linéaire) entre la force de frottement et la vitesse de glissement. Le modèle de Coulomb est largement utilisé pour décrire ces phénomènes.
- Les contacts intermittents entre deux éléments d'un système en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ces non-linéarités s'apparentent à des non-linéarités de choc.

Un bon exemple de machine industrielle qui met en jeu toutes les non-linéarités de contact est le moteur d'avion : le guidage en rotation des arbres est réalisé par des paliers à roulements, le contact entre les pieds des aubes et les disques se fait avec frottement sec et du contact intermittent est observé entre les têtes des aubes et le carter environnant.

IV.2.3. Les non-linéarités géométriques

On dit couramment qu'elles proviennent de grands déplacements du système. Lorsqu'elles sont la seule source de non-linéarités, on les rencontre en pratique dans deux familles de systèmes : Les mécanismes en grands déplacements et Les structures minces en grands déplacements.

- Les mécanismes en grands déplacements : Des problèmes de non linéarité sont relativement facile a résoudre, on regroupe dans cette famille tous les systèmes composés de solides rigides liés entre eux par des liaisons. Les non-linéarités proviennent de grandes rotations des composants du système les uns par rapport aux autres, qui créent des relations non linéaires entre les efforts de liaison et les déplacements des solides. L'exemple le plus simple est le pendule pesant.
- Les structures minces en grands déplacements : dans ce cas, il s'agit de la même cause de non-linéarité que pour les mécanismes en grands déplacements : ce phénomène se traduit par des relations non linéaires entre les déplacements et les déformations des points de la structure. Généralement les non linéarités géométriques sont associent aux structures minces à cause de leur faible rigidité transversale, qui autorise des grands déplacements pour des efforts usuels modérés.

On peut aussi trouver des systèmes où la relation contraintes-déformations est non linéaire associe au cas des grands déplacements et grandes déformations. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non linéaire des structures.

IV.3. Différentes formes de non-linéarités

En général la non linéarité peut se manifester dans une équation de mouvement d'un système en ajutant des termes non linéaires selon le cas considérer, soit dans la matrice de raideur, la matrice d'amortissement ou dans les deux au même temps [37].

IV.3.1 Non-linéarités de raideur

Couramment la non-linéarité de raideur a pour deux causes principales, soit elle provient du matériau qui est souvent non linéarire ou des systèmes qui ont des non linéarités géométriques.

Dans ce cas l'équation (II.1) devient:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \mathcal{K}(x(t)) = f(t)$$
(IV.1)

où $\mathcal K$ décrit la non-linéarité de raideur.

Le plus souvent \mathcal{K} est sous une forme polynomiale.

• L'exemple le plus couramment étudier est *l'oscillateur de Duffing*, pour lequel la raideur dépendant du cube du déplacement:

$$\mathcal{K}(x(t)) = kx(t) + k_3 x^3(t) \tag{IV.2}$$

Où k₃.peut être positif ou négatif :

- Si k₃ > 0, le système est dit *rigidifiant*, car pour des hauts niveaux d'excitation, la force de rappel est plus grande que pour un système de raideur linéaire ;
- Si k₃< 0, le système est dit *adoucissant*, mais il faut noter que ce système n'a pas de sens physique tel quel, car l'adoucissement fait que le signe de la force de rappel change à partir d'un certain point ; en pratique, le terme cubique est toujours accompagné de termes d'ordre supérieur avec des coefficients positifs.
On peut voir une représentation de la force de rappel en fonction du déplacement pour chacun de ces cas dans la figure IV.2.



Figure IV.2 : Force de rappel de l'oscillateur de Duffing.

On peut aussi trouver l'exemple le plus simple est celui de la raideur quadratique, qui est telle que :

$$\mathcal{K}(x(t)) = kx(t) + k_2 x^2(t) \tag{IV.3}$$

Mais comme ce système devient instable quand le niveau d'excitation est trop élevé, on préfère remplacer la raideur quadratique par un terme de la forme $k_2x^2(t)|x(t)|$, et alors l'étude est similaire à celle de l'oscillateur de Duffing, bien-que légèrement plus complexe à mener.

IV.3.2 Non-linéarités d'amortissement

La cause principale de ce type est souvent le comportement non linéaire dissipatif dû à la friction générée par le mouvement relatif entre deux surfaces, l'écriture générale de l'équation (II.1) est:

$$m\ddot{x}(t) + \mathcal{C}(\dot{x}(t)) + kx(t) = f(t) \tag{IV.4}$$

où \mathcal{C} décrit la non-linéarité d'amortissement, le plus souvent sous une forme polynomiale.

• L'exemple le plus courant est celui du frottement fluide à grande vitesse, qui vérifie:

$$\mathcal{C}(\dot{x}(t)) = c\dot{x}(t) + c_2\dot{x}(t)|\dot{x}(t)| \tag{IV.5}$$

 $c_2 \dot{x}(t) |\dot{x}(t)|$: est le terme qui traduit l'action d'un fluide en écoulement rapide autour d'un objet solide.

• On peut aussi avoir une force d'excitation avec des termes non linéaire. L'équation de mouvement d'un non linéaire système, s'écrit sous la forme générale:

$$m\ddot{x}(t) + \mathcal{C}(\dot{x}(t)) + \mathcal{K}(x(t)) = f(t)$$
(IV. 6)
ou $m\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$

IV.4. Méthode de résolution des systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires ne disposent pas d'une méthode générale ou d'une théorie générale permettant de les résoudre, alors la résolution des ces systèmes dépend de cas de ces dernier et la forme de non linéarité, les solutions donc sont souvent des approches.

IV.4.1. Approche Rosenberg

Rosenberg [31] a développé une théorie des modes normaux non linéaires ou il utilise une approche géométrique et étudie les trajectoires dans l'espace de configuration. Considérant un système conservatif, composé de masses reliées par des ressorts non linéaires, il propose les hypothèses suivantes :

- la fréquence de chaque composante du système est la même ;
- toutes les masses passent par leur position d'équilibre 0 au même instant ;
- toutes les masses atteignent leur translation maximale au même instant ;
- le mouvement de chaque masse, à chaque instant *t*, est une fonction univoque du mouvement de l'une d'elles, qui peut être arbitrairement choisie à cet instant. Ce qui conduit à paramétrer le mouvement en posant :

$$u_i(t) = X_i\left(u_{ref}(t)\right)$$

 $u_{ref(t)}$ étant un degré de liberté "référence" choisi arbitrairement.

Rosenberg à également donné une définition des lignes modales, ces lignes modales sont des courbes tangentes au point d'équilibre stable (point zéro) au mode linéaire associe.



Figure IV.3 : Approche Rosenberg, ligne modale pour un système à deux degrés de liberté, $u_2 = X_{2(uref)}$: courbes passant par l'origine et finissant sur les surfaces équipotentielles pour un niveau d'énergie fixé.

IV.4.2. Approche "formes normales"

L'approche présenté dans [18] et [16] consiste à proposer un changement de variable non linéaire, pour transformer le système non linéaire de départ en un système plus simple (relativement ...) où on ne conserve que les termes non linéaires importants pour la dynamique.

Considérons le système linéaire suivant:

$$[M]\ddot{U} + [K]U = 0 (IV.7)$$

Les modes sont définis comme des solutions périodiques du problème libre conservatif et donner par:

$$U_k(t) = \psi_k(a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) = \psi_k q_k(t)$$
(IV.8)

Les a_k et b_k étant des constantes déterminés par les conditions initiales.

 ψ_k (formes propres) et (ω_k fréquences propres) sont des constantes indépendantes du temps, obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres suivant:

$$([K] - \omega_k^2[M])\psi_k = 0$$
 (IV.9)

Donc toutes solution peut se décomposée de manière suivante:

$$U(t) = \psi_k q_k(t) \tag{IV. 10}$$

Le changement donc est à rapprocher de la formule (IV.10) utilisée en linéaire, en vue de construire un modèle réduit par superposition modale. Le principe de cette méthode est issu de la théorie des formes normales, base sur les théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac. Ce théorème affirme qu'en l'absence de relation de résonance entre les valeurs propres de [K], opérateur linéaire, un système d'équations non linéaires du type:

$$\dot{U} = [K]U + F(U) \tag{IV.11}$$

avec F représente les termes non linéaires tel que F(0) = 0, il existe un changement de variable non linéaire, U = Y + h(Y), tel que (IV.11) se réduise à sa partie linéaire et s'écrive :

$$\dot{Y} = KY \tag{IV. 12}$$

L'application de ce principe aux vibrations de systèmes mécaniques consiste donc à chercher h(Y) pour réécrire le système de départ comme la somme d'une partie linéaire et de termes résonants non linéaires.

IV.4.3. Méthode asymptotique numérique (MAN)

La MAN est une méthode de perturbation-discrétisation-continuation [18], permettant de résoudre des systèmes algébriques non linéaires dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Son principe consiste à développer les inconnues et paramètres en séries entières (perturbation) ce qui permet de décomposer le système initial en une série de problèmes linéaires, facilement résolvables. La validité des solutions est donnée par le calcul du rayon de convergence des séries. On obtient ainsi une branche de solution, (i.e. inconnue en fonction d'un paramètre). Ensuite pour obtenir la solution complète, on recommence l'opération (continuation) à partir d'un nouveau point solution de départ, à la limite du rayon de convergence de la branche précédente. L'aspect discrétisation est lui aussi très important car c'est la combinaison de la MAN avec une méthode élément fini qui fait son efficacité.

Présentation générale de la MAN

Soit le système algébrique non linéaire suivant :

$$R(U, \eta) = 0$$
 (IV.13)

R et *U* sont de dimension *n*, η est un paramètre quelconque. On a donc un système avec plus d'inconnues que d'équations, qui va être résolu par une méthode de continuation, qui conduira au calcul de branches de solution U en fonction du paramètre η (figure IV.4).

On générale la solution du système (IV.13) est recherché sous forme de séries entières d'un paramètre de chemin a:

$$U = U_0 + \sum_{0}^{\infty} a^k U_k , \quad \eta = \eta_0 + \sum_{0}^{\infty} a^k \eta_k$$
 (IV. 14)

 (U_0,η_0) est un point solution de départ, connu.



Figure IV.4 Calcul des branches de solutions par la MAN

L'introduction des développements (IV.14) dans (IV.) conduit à :

$$R(U,\eta) = aR_1 + a^2R_2 + \dots = 0$$
 (IV. 15)

ceci étant valable pour tout *a*, on obtient une série de problèmes linéaires :

$$R_1 = \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_0 U_1 + \frac{\partial R}{\partial \eta} \Big|_0 \eta_1 = 0$$
 (IV. 16)

$$R_{p} = \frac{\partial R}{\partial U}\Big|_{0} U_{p} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\Big|_{0} \eta_{p} - F_{p}^{nl} = 0 \qquad (IV. 17)$$

Soit $K_{t_{(j)}}$ la matrice jacobienne, (de taille n × (n+1)), de R au point (U_j, η_j) , autrement dit sa matrice de rigidité tangente :

$$K_{t_{(j)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial U} \end{bmatrix}_{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{j}$$
(IV. 18)

Pour ($R_P=0$), l'équation (*IV*. 17) denient :

$$K_{t_{(0)}}\begin{bmatrix} U_p\\ \eta_p \end{bmatrix} = F_p^{nl} \tag{IV.19}$$

Les F_p^{nl} , sont des termes non linéaires mais dépendent exclusivement des ordres précédents et sont donc entièrement déterminés à l'ordre p. Le calcul de ces "seconds membres" est le point crucial de la MAN. On ajoute donc une condition qui correspond à la définition du paramètre de chemin a. On l'écrit sous la forme générale, inspirée de la définition du paramètre de longueur d'arc classique :

$$a = {}^{t}U_{1}P(U - U_{0}) + \alpha \eta_{1}(\eta - \eta_{0})$$
 (IV. 20)

P est une matrice diagonale et α un scalaire. En fixant ces deux grandeurs, on choisit quelles composantes de U on souhaite faire intervenir dans la longueur d'arc. La validité des solutions obtenues par les résolutions successives des systèmes (IV.17) est donnée par le calcul du rayon de convergence des séries (IV.14). Deux critères sont proposés, le premier est basé sur une constatation empirique. On cherche donc a_{max} , amplitude maximale de a, telle que :

$$\frac{\left\|U_{(N)} - U_{(N-1)}\right\|}{\left\|U_{(N)} - U_{(0)}\right\|} = \frac{\left\|a^{N}U_{N}\right\|}{\left\|aU_{1} + \dots + a^{N}U_{N}\right\|} \le \epsilon$$
(IV. 21)

soit, en approchant le dénominateur par $||au_{(1)}||$:

$$a_{max} = \left(\epsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_N\|}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$
(IV. 22)

Le second critère est obtenu en minimisant l'augmentation du résidu d'une branche à l'autre. Soit donc R_0 le résidu initial, on veut :

$$R - R_0 = aR_1 + \dots + a^{n+1}R_{n+1} + \dots \le \epsilon$$
 (IV. 23)

Pour des séries (IV.14) tronquées à l'ordre *n*, les R_i sont nuls pour i = 1..n (simple application de (IV.17)). Le terme déterminant est $a^{n+1}R_{n+1}$ et on montre facilement que $R_{n+1} = F_p^{nl}$ et donc :

$$a_{max} = \left(\frac{\epsilon}{\left\|F_{N+1}^{nl}\right\|}\right)^{\frac{1}{N-1}}$$
(IV. 24)

Concrètement, on calcule les termes des séries (IV.14) en résolvant (IV.17) puis on évalue a_{max} avec (IV.24). Ensuite (U(a_{max}), η (a_{max})) donne un nouveau point de départ pour une nouvelle perturbation.

IV.4.4. Méthode de balance harmonique

La méthode de balance harmonique présentée dans [37] est connue aussi sous le nom l'équivalent harmonique, est une des plus anciennes méthodes utilisée pour le traitement des systèmes non linéaires. Elle est basée sur l'utilisation des séries de Fourier .son principe est de minimiser une intégrale dite résidu sous la forme :

$$\int_{0}^{T} \mu^{2}(t)d(t) = \int_{0}^{T} \left(y(t) - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ci} \cos i\omega_{0}t - \sum_{i=1}^{\infty} a_{ci} \sin(i\omega_{0}t)^{2} \right) dt \qquad (IV.25)$$

Elle consiste à intégrer une équation non linéaire de la forme :

$$\dot{y} + F(y + \dot{y}) = f(vt) \tag{IV.26}$$

Donc la solution recherchée est sous la forme :

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_{ci} \cos i\omega_0 t + a_{ci} \sin i\omega_0 t)$$
 (IV. 27)

Ou *i* est l'indice de l'harmonique.

La balance des deux termes de l'équation différentielle est possible pour $v=n\omega_0$ qui nous permet de poser :

$$F(y, \dot{y}) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (F_{ci} \cos i\omega_0 t + F_{si} \sin i\omega_0 t)$$
 (IV.28)

$$f(vt) = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{ci} \cos i\omega_0 t + f_{si} \sin i\omega_0 t)$$
 (IV. 29)

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que les équations sont transcendantes, ce qui rend leur résolution plus compliquée. De plus, il est impossible d'affirmer que la solution approximative (IV.28 et IV.29) correspond au comportement d'un système mais il faut deviner la forme de la solution d'après l'expérience. L'application de la méthode exige d'avoir une idée sur la solution y(t).

IV.4.5. Méthode des échelles multiples

D'après [18] et [9], il s'agit d'un développement asymptotique de plusieurs variables (les échelles) ; en introduisant T_0 , T_1 , T_2 ..., tels que $T_i = \epsilon^i t$, puis on cherche une solution :

$$U(t; \epsilon) = \epsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) \dots$$
(IV.30)

Le nombre d'échelles varie en fonction de la précision souhaitée (une précision en $O(\epsilon^{i+1})$ est obtenue en allant jusqu'à l'échelle T_i).

A noter que, bien que plus lourdes en calculs que les précédentes, les échelles multiples permettent de traiter les systèmes non conservatifs.

IV.4.6. Méthode de Newmark

La méthode de Newmark [45], permet la résolution numérique d'équations différentielles du second ordre. Elle convient, non seulement pour des systèmes différentiels linéaires, mais aussi pour des systèmes fortement non-linéaires avec une matrice de masse et une force appliquée qui peuvent dépendre à la fois de la position et du temps. Dans ce second cas, le calcul nécessite à chaque pas une boucle d'itération

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant *t* à partir des mêmes grandeurs à l'instant $t - \Delta t$. Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. Diverses hypothèses permettent de remplacer cette dérivée troisième par l'accélération au temps précédent en introduisant deux paramètres γ et β . On peut écrire le schéma correctif suivant :

$$x_t = x_{t-dt} + dt\dot{x}_{t-dt} + \frac{dt^2}{2}[(1-2\beta)\ddot{x}_{t-dt} + 2\beta\ddot{x}_t]$$
 (IV.24 31)

$$\dot{x}_{t} = \dot{x}_{t-dt} + dt \left[(1-\gamma) \ddot{x}_{t-dt} + \gamma \ddot{x}_{t} \right]$$
(*IV*.25 32)

Des deux paramètres dépendent les propriétés de l'algorithme, en particulier la stabilité, et son caractère implicite ou explicite.

Domaine	Stabilité	
$\gamma \leq 1/2$	Instable	
$1/2 \leq \gamma \ et \ 2\beta \leq \gamma$	conditionnellement stable	
$1/2 \leq \gamma \ et \ \gamma \leq 2\beta$	inconditionnellement stable	

Tableau IV.1 : Domaines de stabilité.

Nom de la méthode	γ	β	Propriétés
Différences Centrées	1/2	0	explicite et conditionnellement stable
Fox Goodwin	1/2	1/12	conditionnellement stable
Accélération linéaire	1/2	1/6	conditionnellement stable
Accélération Moyenne	1/2	1/4	inconditionnellement stable

Tableau IV.2 : Liste de méthodes classiques associées à des valeurs particulières de γ et β .

On rappelle qu'une méthode est dite explicite quand les déplacements au pas de temps t dépendent explicitement des variables au pas de temps $t - \Delta t$ (c'est le cas lorsque $\beta = 0$). Les méthodes implicites font dépendre le déplacement au pas de temps t des vitesses à ce même pas de temps.

La méthode est également utilisée pour résoudre numériquement des équations différentielles comportant de fortes non linéarités, mises sous la forme de l'équation (IV.6)

Il faut donc recalculer les forces pour chaque position et vitesse, éventuellement par des calculs très lourds mais, à la différence d'autres méthodes d'intégration numérique, l'algorithme est particulièrement simple.

Début

{Les valeurs au pas précédent deviennent les anciennes valeurs}

$$x_t = x_{t-dt}$$
, $\dot{x}_t = \dot{x}_{t-dt}$, $\ddot{x}_t = \ddot{x}_{t-dt}$

Répéter

{Les nouvelles valeurs deviennent les anciennes valeurs}

$$x_a = x_t$$
, $\dot{x}_a = \dot{x}_t$

{Calcul de la nouvelle accélération en fonction des anciennes valeurs}

$$\ddot{x}_t = \frac{1}{M} f(x_a, \dot{x}_a, t)$$

{Calcul de la nouvelle vitesse et la nouvelle position en fonction de la nouvelle accélération}

$$\dot{x}_{t} = \dot{x}_{t-dt} + \frac{1}{2}(\ddot{x}_{t} + \ddot{x}_{t-dt})dt$$

$$x_{t} = x_{t-dt} + \dot{x}_{t-dt} + \frac{1}{2}(\ddot{x}_{t-dt} + \frac{\ddot{x}_{t}}{dt})dt^{2}$$

$$x_{t} = x_{t-dt} + x_{t-dt}at + \frac{1}{3}(x_{t-dt} + \frac{1}{2})at$$

Jusqu'à $|x_t - x_a| < \varepsilon$ {La nouvelle approximation diffère assez peu de l'ancienne}

Fin.

C'est une méthode pratique applicable à des problèmes qui peuvent être extrêmement complexes. Elle converge raisonnablement quand le pas de temps est suffisamment petit par rapport aux périodes impliquées (périodes propres du système ou périodes d'excitation).

IV.5. Exemple d'application de quelques méthodes :

FRANCK PERIGNON [18], a traité en détail le calcul de la réponse forcée autour de la première pulsation propre, ω_{01} , pour un système à deux degrés de liberté, composé d'une masse m, mobile sur un plan, reliant deux ressorts (voir figure IV.4). Les non linéarités sont polynomiales de type quadratique et cubique.



Figure IV.5 : Système non linéaire à deux degrés de liberté, au repos (gauche), déformé (droite).

Considérant le système (Figure IV.5), ci-dessous, avec une force mono-harmonique appliquée selon la direction x_1 telle que $E_1(t) = F \cos\Omega t$:

Les équations du mouvement sont :

$$\ddot{u}_{1} + \omega_{01}^{2}u_{1} + \alpha_{2} \left(\frac{3}{2}\omega_{01}^{2}u_{1}^{2} + \frac{1}{2}\omega_{01}^{2}u_{1}^{2} + \omega_{02}^{2}u_{1}u_{2}\right) + \alpha_{3} \frac{\omega_{01}^{2} + \omega_{02}^{2}}{2}(u_{1}^{2} + u_{2}^{2})u_{1} = E_{1}(t)$$

$$\ddot{u}_{1} + \omega_{02}^{2}u_{2} + \alpha_{2} \left(\frac{3}{2}\omega_{02}^{2}u_{2}^{2} + \frac{1}{2}\omega_{02}^{2}u_{1}^{2} + \omega_{01}^{2}u_{1}u_{2}\right) + \alpha_{3} \frac{\omega_{01}^{2} + \omega_{02}^{2}}{2}(u_{1}^{2} + u_{2}^{2})u_{2} = 0$$
(IV.33)

Les non linéarités présentes sont polynomiales, quadratiques ou cubiques. Les coefficients α_2 et α_3 ont été introduits afin de quantifier l'influence respective de ces deux types de non linéarités. Pour $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ on retrouve le système linéaire associé, dont les fréquences propres sont $\omega_{0i}^2 = \frac{ki}{m}$, i = 1, 2. Le cas $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ correspond au système "complet".

Franck Pérignon a utilisé la méthode des échelles multiple qui consiste à rechercher les solutions sous la forme d'un développement asymptotique d'un petit paramètre ϵ . Pour cela, il a posé:

$$F = \epsilon^{3} f, \qquad \Omega = \omega_{01} + \epsilon^{2} \sigma, \qquad T_{i} = \epsilon^{i} t$$
$$u_{i}(t,\epsilon) = \epsilon u_{i1}(T_{0}, T_{1}, T_{2}) + \epsilon^{2} u_{i2}(T_{0}, T_{1}, T_{2}) + \epsilon^{3} u_{i3}(T_{0}, T_{1}, T_{2}) + \cdots$$
(IV. 34)

Puis il propose une autre solution en utilisant la méthode de l'équilibre harmonique, afin de comparer les résultats à ceux fournit par la méthode des échelles multiples. En posant $u_i(t) = a_i \cos \Omega t$; (IV. 33)conduit à:

$$a_1 = \frac{F}{\omega(a_1)^2 - \Omega^2} \text{pour } \omega(a_1) = \sqrt{\omega_{01}^2 + \frac{3}{8}\alpha_3(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)a_1^2}$$
(IV. 35)

Il arrive aux résultats et conclusion suivantes:



Figure IV.6 : Réponse forcée du système IV.1 - Comparaison échelles multiples/équilibre harmoniques pour H variable : α_1 en fonction de / ω_{01} .

Les corrections apportées par les non linéarités cubiques sont identiques dans les deux méthodes (termes proportionnels à α_3). Par contre, le comportement obtenu par application de l'équilibre harmonique à un terme est raidissant, ce qui est en contradiction avec le résultat "échelles multiples". En fait les non linéarités issues des termes quadratiques ne sont pas pris en compte (pas de terme en α_2), ce qui conduit à un résultat faux. Pour pallier à ce dernier point, il applique cette fois la méthode en incluant plus de termes, et en calculant les solutions par continuation sur la pulsation en utilisant le logiciel ManLab. Les résultats sont tracés sur la figure IV.6, pour H=2, 3, 5 et 8 termes. On trace le coefficient du terme en $\cos\Omega t$, a_1 , en fonction de la pulsation d'excitation. Cette fois, dès que H supérieur ou égal à 2, c'est à dire dès l'instant ou des harmoniques paires sont incluses dans le modèle, la réponse est mollissante, les non linéarités quadratiques sont bien prises en compte et on obtient le bon comportement. Pour de faibles amplitudes, les modèles échelles multiples et équilibre harmonique concordent à partir de H=3.

Enfin, pour confirmer l'influence respective des termes cubiques et quadratiques, la réponse du système pour α_2 ou $\alpha_2 = 0$ est représentée sur les figures IV.7 et IV.8. On retrouve une bonne concordance entre équilibre harmonique et échelles multiples pour de faibles amplitudes, ainsi que le caractère mollissant des non linéarités quadratiques, et raidissant des cubiques.



Figure IV.7: Réponse forcée du système IV.1 pour $\alpha_2 = 0$ (non linéarités cubiques)-Comparaison EH-EM.



Figure IV.8 : Réponse forcée du système IV.1 pour $\alpha_3 = 0$ (non linéarités quadratiques)-Comparaison EH-EM.

IV.6. Etude des systèmes non linéaires

Un système non linéaire est défini, au sens large, comme un système qui ne respecte pas le principe de superposition. On s'en rend aisément compte en étudiant la réponse d'un phénomène décrit par la fonction $y = f(x) = x^2$ à une excitation $x = x_1 + x_2$: cette réponse est $f(x_1 + x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2 x_1 x_2$. Elle ne correspond pas à la somme des réponses séparées aux deux excitations : il existe maintenant un terme d'interaction 2 $x_1 x_2$ dit terme dit terme d'interférence qui rend l'étude plus compliquée. Dans l'étude d'un système, les caractéristiques dites non linéaires, donc qui empêchent la superposition, sont toute forme d'une force d'amortissement dépendant du carré de la vitesse, une raideur dépendant du cube du déplacement ou encore la forme originale de l'équation du pendule contenant le terme $mgL \sin \theta$, sont autant d'exemples de termes non linéaires. Lorsque-ceux ci sont introduits dans une équation différentielle gouvernant le mouvement d'une masse, ils provoquent plusieurs effets importants. L'effet le plus marquant est la difficulté accrue de la résolution de l'équation différentielle obtenue. La majorité des systèmes non linéaires ne possède pas de solutions exactes. Ainsi, une grande partie des solutions développées pour ces systèmes sont des approximations.

Dans cette partie on va présenter quelque exemple de ces non linéarités.

IV.6.1. système avec non linéarité de raideur cubique:

Comme dite au paragraphe précédant l'exemple le plus étudie est oscillateur de duffing, L'oscillateur de Duffing [8]. La figure IV.9 montre le mouvement x(t) d'une masse *m* simplement supportée par un élément flexible contenant une raideur dépendante du déplacement et un amortissement dépendant de la vitesse. Pour l'oscillateur de Duffing, la force élastique est constituée d'un terme de raideur linéaire et d'un terme cubique alors que l'amortissement est proportionnel à la vitesse. Le terme cubique de la raideur est une fonction impaire tout comme le terme linéaire. F(t) est une force extérieure qui agit sur la masse.



Figure IV.9: Le schéma discrétisé de l'oscillateur de Duffing.

L'équation différentielle gouvernant le mouvement de la masse soumise à une excitation périodique sinusoïdale $F(t) = F \sin(\omega t)$ est:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k_1 x(t) + k_3 x^3(t) = F \sin(\omega t)$$
(IV. 36)

Il est souhaitable de normaliser l'équation différentielle avant tout calcul. La première étape est d'insérer les termes de fréquence naturelle linéaire $\omega_n^2 = \frac{k_1}{m}$, de rapport de raideurs $\eta = \frac{k_3}{k_1}$ et du taux d'amortissement $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$.

Après substitution, l'équation différentielle devient :

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) + \eta \omega_n^2 x^3(t) = \frac{F}{m} \sin(\omega t)$$
(IV. 37)

Il est aussi préférable d'utiliser un temps normalisé τ qui est défini comme $\tau = \omega t$ et qui a une période d'oscillation de 2π . L'opérateur de dérivée est donc dt = $d\tau/\omega$ et la dérivation par rapport au temps *t* se traduit par

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d^2 x(\tau)}{\frac{d\tau^2}{\omega^2}} = \omega^2 \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = \omega^2 x''(\tau)$$
(IV. 38)

L'équation différentielle, sous forme normalisée peut donc d'écrire :

$$\omega^2 x''(\tau) + 2\zeta \omega_n \omega x'(\tau) + \omega_n^2 x(\tau) + \eta \omega_n^2 x^3(\zeta) = \frac{F}{m} \sin(\tau)$$
(IV. 39)

Pour un système linéaire non conservatif excité par une force sinusoïdale, la solution en régime permanent est bien connue et se compose d'une amplitude multipliant un terme harmonique contenant un déphasage. En ajoutant le terme cubique à la raideur, comme l'a fait Duffing, la solution n'est plus une simple harmonique avec une amplitude et un retard de phase. Par contre, afin d'approximer la réponse, il est courant de faire l'hypothèse que la réponse est presque une harmonique simple d'amplitude X et de déphasage ϕ . On note $\bar{x}(\theta)$ l'estimation de la solution avec θ comme nouvelle variable temporelle, soit :

$$\bar{x}(\theta) = Xsin(\theta); \quad ou \ \theta = \tau - \phi$$
 (IV. 40)

Plutôt que de considérer la réponse en retard par rapport à la force d'excitation, on peut considérer la force comme étant en avance par rapport à la réponse. Le temps décalé θ est

introduit afin d'amener le début du cycle de la réponse à l'origine ($\theta = 0$). La variable θ a, comme le temps normalisé τ , une période d'oscillation de 2π . Ceci est l'équivalent de poser la force d'excitation en avance sur la réponse ($\tau = \theta + \phi$). Étant donné que ϕ est constante, les différentielles d θ et d τ sont égales et donc la dérivée selon θ équivaut à la dérivée selon τ (x'(τ) = x'(θ)). En insérant la solution approximative $\bar{x}(\theta)$ dans l'équation différentielle (IV.38) l'équation n'est plus parfaitement satisfaite.

$$\omega^2 \bar{x}''(\theta) + 2\zeta \omega_n \omega \bar{x}'(\theta) + \omega_n^2 \bar{x}(\theta) + \eta \omega_n^2 \bar{x}^3(\zeta) - \frac{F}{m} \sin(\theta + \phi) \approx 0 \qquad (\text{IV. 41})$$

Un terme d'erreur E (θ) est donc introduit. Celui-ci est défini par les termes du côté droit de l'équation (IV.41). Avec l'estimation de la solution (IV.40), l'erreur devient

$$E(\theta) = -\omega^2 X sin(\theta) + 2\zeta \omega_n \omega X cos(\theta) + \omega_n^2 X sin(\theta) + \eta \omega_n^2 X^3 sin^3(\theta) - \frac{F}{m} sin(\theta + \phi)$$
(IV. 42)

qui est fonction des paramètres du système (m, η et ω_n), des termes X, ϕ , F et ω , et aussi de la phase θ . La variable θ n'apparaissant que dans les termes sinusoïdaux et co-sinusoïdaux, on peut déduire que l'erreur E(θ) est périodique. Il est possible d'exprimer toute fonction périodique par une série de Fourier infinie :

$$E(\theta) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (E_{cn} \cos(n\theta) + E_{sn} \sin(n\theta))$$
(IV. 43)

Où

$$E_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \, d\theta$$
$$E_{cn} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \cos(n\theta) \, d\theta \qquad (IV. 44)$$
$$E_{sn} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \sin(n\theta) \, d\theta$$

Afin d'obtenir la meilleure solution possible, on cherche à minimiser le terme d'erreur. Idéalement, les coefficients de la série (IV.43) devraient tous être nuls. Considérant l'estimation de la solution $\bar{x}(\theta)$ définie à l'équation (IV.40) et considérant qu'elle correspond à une solution d'ordre 1, on propose de poser les termes d'erreurs E_0 , E_{c1} et E_{s1} nuls de façon à trouver X et ϕ qui sont inconnues, soit :

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \ d\theta$$

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \cos(\theta) \ d\theta$$
 (IV. 45)
$$0 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} E(\theta) \sin[\theta] \ d\theta$$

La substitution du terme d'erreur E (θ) (IV.42) dans les équations (IV.45) permet l'évaluation des intégrales. Le résultat de la première intégrale produit une valeur nulle, ainsi la première équation est parfaitement satisfaite. L'évaluation des deux autres intégrales de (IV.45) produit les équations algébriques suivantes

$$0 = X(\omega_n^2 - \omega^2) + \frac{3}{4}\omega_n^2 \eta X^3 - \frac{F}{m}\cos(\phi)$$
$$0 = 2\zeta \omega_n \omega X - \frac{F}{m}\sin(\phi)$$
(IV. 46)

ce qui constitue un système à deux équations contenant deux inconnues, X et ϕ . En isolant respectivement cos (ϕ) et sin(ϕ) dans les expressions de (IV.46). Il est ensuite possible de les substituer dans l'identité trigonométrique sin² (ϕ) + cos² (ϕ) -1 = 0. Ce qui mène à l'équation (IV.47) où la variable ω représentant la fréquence d'excitation est modifiée pour devenir $\omega = r \omega_n$, où r est le rapport adimensionnel des fréquences.

$$\left(\omega_n^2 X \left(1 - r^2\right) + \frac{3}{4} \omega_n^2 \eta X^3\right)^2 + (2\zeta \omega_n \omega X)^2 - \left(\frac{F}{m}\right)^2 = 0$$
(IV. 47)

Il est aussi possible de former le rapport tan (ϕ) = sin (ϕ) / cos (ϕ) pour former l'équation suivante.

$$\tan(\phi) = \frac{2\zeta r}{(1-r^2) + \frac{3}{4}\eta X^2}$$
(IV.48)

La variable d'amplitude X est la seule inconnue de l'expression (IV.47) et peut donc être déterminée. La résolution analytique est possible car l'expression (IV.47) est un polynôme en X de degré 6 qui peut se réduire à un polynôme de degré 3 en Y par le changement de variables $Y = X^2$. L'équation cubique est donc utilisée pour déterminer Y. L'amplitude X ainsi déterminée est ensuite injectée dans l'équation (IV.48) pour trouver la phase ϕ .

Afin d'illustrer le comportement typique d'un système non linéaire PATRICK MOTTARD [8] a donné la réponse en amplitude et en phase des équations (IV.47) et (IV.48) pour les paramètres suivants : m = 1kg, $\zeta = 0,25$, $\omega_n = 1$ rad/s et $\eta = 0,1$ m⁻². L'amplitude X a d'abord été résolue par l'équation (IV.47), avec une valeur de r prédéfinie. La figure IV.10 présente la réponse en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite r pour F = 1 N, 5 N *et 10* N. Au contraire d'un système linéaire, les trois réponses ne sont pas superposées. On remarque aussi la variation de l'amplitude X/F maximale ainsi que de la fréquence de résonance avec le changement du niveau d'excitation.



Figure IV.10: Réponse en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite r pour les amplitudes de forces F = 1N, 5N et 10N (m = 1 kg, $\zeta = 0.25$, $\omega_n = 1$ rad/s et $\eta = 0.1$ m⁻²).

La non-linéarité de l'oscillateur de Duffing est associée au paramètre η qualifiant le coefficient du terme cubique de raideur par rapport au terme linéaire. La figure IV.11 montre l'effet de la variation du paramètre η sur l'amplitude relative X/F lorsque F est fixée à 2,5 N. Les courbes sont tracées en fonction de r² afin de bien montrer les variations entre elles. Les valeurs utilisées des paramètres du système sont : m = 1 kg, ζ = 0,25 et ω_n = 1 rad/s. Ces courbes ont elles aussi étés obtenues par la résolution

analytique de l'équation (IV.47). La courbe en trait continu (—) représente l'amplitude relative *X/F* lorsque la raideur du système est linéaire ($\eta = 0$ et k₃ = 0). Cette figure montre que le terme n fait aussi varier la fréquence à laquelle survient la résonance. Il est possible d'apercevoir que la courbe $\eta = 0.5$ m⁻² comporte une plage de fréquences réduites *r* où la courbe présente plusieurs solutions possibles. Il est cependant impossible de déterminer analytiquement les valeurs de *r* où il existe trois solutions réelles : le discriminant de l'équation cubique mène à un polynôme de degré 12 en *r* et un changement de variable menant à un polynôme de degré 2 ou 3 est impossible.



Figure IV.11: Réponses en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite au carré r² pour $\eta = 0.01 \text{ m}^2$, 0 m^2 , 0.1 m^2 et 0.5 m⁻² (m = 1 kg, $\zeta = 0.25$, $\omega_n = 1$ rad/s et F = 2.5N).

• La figure IV.12 montre l'effet du taux d'amortissement ζ sur la réponse en amplitude X/F pour un oscillateur ayant m = 1 kg, $\omega_n = 1$ rad/s, $\eta = 0.25$ m⁻² et F = 2.5 N. L'effet du taux d'amortissement est plus important près de la fréquence de résonance du système, une caractéristique aussi observée avec les systèmes linéaires. La courbe en trait discontinu montre l'amplitude relative X/F lorsque le taux d'amortissement ζ est nul et que l'amplitude de l'excitation est elle aussi nulle (F = 0). En d'autres mots, cette courbe représente la vibration libre et non amortie. Elle montre la relation entre la fréquence d'oscillation libre non amortie et son amplitude. Cette courbe n'étant pas une ligne verticale, on peut en conclure que la fréquence d'oscillation non-amortie est dépendante de l'amplitude de vibration.



Figure IV.12: Réponses en amplitude X/F en fonction de la fréquence réduite r pour les taux d'amortissement $\zeta = 0,05$, $\zeta = 0,1$ et $\zeta = 0,25$ (m = 1kg, $\omega_n = 1$ rad/s, $\eta = 0,25$ m⁻² et F = 2,5 N) ainsi que la réponse en amplitude X pour $\zeta = 0$, m = 1 kg, $\omega_n = 1$ rad/s, $\eta = 0,25$ m⁻² et F = 0 (-----).

IV.6.2. Etude d'un pendule simple en dynamique non-linéaire:

Cet exemple est présenté dans référence [19] ou on envisage un pendule simple constitué d'un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable reliant une masse m à un point fixe O (on négligera toute force de frottements).

On se limite au mouvement de ce pendule pesant dans un plan vertical ou sa position est à chaque instant repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante. La conservation de l'énergie mécanique de ce système isolé s'écrira, tous calculs faits,

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$
(IV. 49)

et c'est en dérivant cette expression que l'on obtient, après multiplication par $1/ml^2\dot{\theta}$ l'équation pendulaire

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta = 0$$
 (IV. 50)

En posant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

Notons tout de suite que cette équation différentielle du second ordre en θ n'est pas linéaire à cause du terme en sin θ . Cette mise en équation aurait pu être effectuée via le PFD ou le théorème du moment cinétique. Remarquons qu'elle n'admet aucune solution qui s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires, mais cette approche énergétique permet une discussion qualitative du mouvement.

En effet, reprenons l'expression de l'énergie mécanique du système : elle conduit à l'expression



$$\dot{\theta}^2 = \frac{2m}{l^2} [E - mgl(1 - \cos\theta)] \tag{IV.51}$$

Figure IV.13 : énergie potentille du pendule non linéaire.

Le mouvement ne peut avoir lieu qu'à la condition où $\dot{\theta}^2 \ge 0$, soit

$$E \ge mgl(1 - \cos\theta) \tag{IV.52}$$

Dans le cas (1), E < 2mgl et le mouvement ne peut avoir lieu que si $\theta \in [-\theta_m, +\theta_m]$: il s'agit d'un mouvement oscillant d'amplitude θ_m dont la période se calcule exactement à l'aide de l'intégrale

$$T = 2 \int_{-\theta m}^{+\theta m} dt = 2\sqrt{2m} \int_{-\theta m}^{+\theta m} \frac{d\theta}{\sqrt{E - mgl(1 - \cos\theta)}}$$
(IV. 53)

Notons que ce mouvement d'oscillation n'est, à priori, pas sinusoïdal.

Dans le cas (2), E > 2mgl et rien ne limite θ : il s'agit d'un mouvement révolutif de fronde s'effectuant toujours dans le même sens.

Dans le cas (3), si le pendule part de $\theta = 0$ avec l'énergie E = 2mgl, il atteint soit la position $\theta = \pi$ soit la position $\theta = -\pi$ avec une vitesse nulle. Il passe donc, avec une vitesse nulle, par une position d'équilibre instable.

• Approximation linéaire

Si nous supposons que E << 2mgl, la discussion précédente montre que $\theta \ll \pi$: il s'agit d'oscillations de faible amplitude pour lesquelles θ reste petit, de sort que, dans l'équation pendulaire, on confondra θ et son sinus.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \tag{IV.54}$$

On reconnaît ainsi l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{IV.55}$$

Cette formule est pratique puisqu'elle permet notamment d'approcher des valeurs de g facilement, en se plaçant dans la description idéale des faibles oscillations. A ce degré d'approximation, cette période T_o est indépendante de l'amplitude θ_m : c'est ce qu'on appelle l'isochronisme des petites oscillations

• Apparition des harmoniques

Lorsque l'amplitude θ d'un pendule n'est plus assez faible pour justifier l'égalité

 $\sin \theta = \theta$

L'équation du mouvement s'écrit en toute généralité
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0$$
 (IV. 56)

Le mouvement d'un tel pendule est oscillatoire ou révolutif suivant la valeur de son énergie initiale ; les oscillations sont sinusoïdales au voisinage immédiat du minimum d'énergie potentielle.

Rappelons que

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + 0(\theta^4)$$
 (IV. 57)

soit, en substituant ce développement poussé à l'ordre trois dans l'équation différentielle,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$
 (IV. 58)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0 \tag{IV.59}$$

La présence du terme en θ^3 souligne bien le caractère non linéaire de l'équation pendulaire et de l'approximation réalisée. Qualitativement, ie. à partir de la solution harmonique ω linéaire, en remplaçant dans le terme "correctif" en θ^3 par une solution sinusoïdale de pulsation ω , on voit qu'on introduit des harmoniques de rang 3 (en 3ω), d'où une modification de la fréquence.

En effet,

$$\sin^{3}(\omega t) = \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2i}\right)^{3} = \frac{\left(e^{3j\omega t} - e^{-3j\omega t}\right) - \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)}{-8i}$$
(IV. 60)

$$\sin^3(\omega t) = \frac{\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)}{4}$$
(IV. 61)

D'où l'idée de chercher des solutions approchées de l'équation (IV.59) sous la forme

$$\theta = \theta_m[\sin(\omega t) + \varepsilon \sin(3\omega t)]$$
(IV. 62)

En supposant que $|\theta_m| \ll 1$ et $|\varepsilon| \ll 1$. on obtient

$$-\omega^2 \theta_m [\sin \omega t + 9\varepsilon \sin 3\omega t] + \omega_0^2 \theta_m [\sin \omega t + \varepsilon \sin 3\omega t] - \frac{\omega_0^2 \theta_m^3}{6} \sin^3 \omega t = 0 \quad (\text{IV. 63})$$

et, en insérant le développement du sinus cube,

$$\sin \omega t = \left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_m^2}{8}\right] + \sin 3\omega t \left[\varepsilon(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{\omega_0^2 \theta_m^3}{24}\right] = 0 \qquad (IV. 64)$$

Cette équation devant être vérifiée à tout instant, les coefficients des sinus doivent être identiquement nuls. Pour le premier,

$$\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_m^2}{8} \right) \tag{IV.65}$$

D'où, puisque $\theta_m \ll 1$,

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_m^2}{8} \right)^2 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_m^2}{16} \right) \tag{IV. 66}$$

et

$$T \simeq T_0 \left(1 - \frac{\theta_m^2}{16} \right) \tag{IV. 67}$$

Ceci constitue la formule de *Borda* : la période de l'oscillateur non linéaire dépend aussi de son amplitude initiale. C'est sa valeur minimale qui correspond à la période propre T_0 , valeur obtenue seule dans l'approximation linéaire.

En ce qui concerne le coefficient de sin $3\omega t$, compte tenu du fait que ω et ω_0 sont voisins,

$$\varepsilon \simeq \frac{\theta_0^2}{192}$$
 (IV. 68)

La non-linéarité affecte légèrement la période et engendre des harmoniques. L'apparition de telles harmoniques était tout à fait prévisible : si on ne se limite pas à l'approximation linéaire, le mouvement oscillant correspondant au cas E < 2mgl n'est pas nécessairement sinusoïdal. On peut le décomposer en une série de Fourier dont le calcul approche mené ici a fait apparaître les deux premiers termes. L'apparition plus ou moins importante d'harmoniques accompagnera tous les phénomènes périodiques régis par des équations non-linéaires.

• Portrait de phase

En revenant à l'équation de conservation de l'énergie, où E est défini initialement,

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = 0$$
 (IV. 69)

Nous pouvons utiliser une représentation des trajectoires envisageables dans un repère $(\theta, \dot{\theta})$.



Figure IV.14:Portrait de phase du pendule non-linéaire.

Dans le cas (1), $E \ll 2mgl$ et l'oscillateur est très proche d'un oscillateur harmonique et, avec les coordonnées choisies, les trajectoires dans le plan de phase sont pratiquement confondues avec des cercles.

Dans le cas (2), E < 2mgl: il s'agit toujours d'oscillateurs mais la trajectoire s'éloigne nettement du cercle, ce qui est dû aux termes non-linéaires.

Le cas (3) est un cas limite, E = 2mgl, et la trajectoire dans le plan de phase est une courbe particulière qui porte le nom de séparatrice ; elle admet des points singuliers en $x = (2p + 1)\pi$ (p est un entier). Ces points correspondent à des positions d'équilibre instable pour le système. La séparatrice "sépare" justement les régimes oscillants des régimes du type "fronde".

Dans le cas (4), E > 2mgl et on observe effectivement un mouvement du type "fronde" où $\dot{\theta}$ garde un signe constant.

IV.7.Vibration non linéaires des structures minces

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas des structures minces où la relation entre les déplacements et les déformations est non linéaire. Généralement la cause du non linéarité est la faible rigidité transversale, qui autorise des grands déplacements pour des efforts usuels modérés.



Figure IV.15:Transformation d'une fibre d'un milieu continu en grand déplacement.

Il est nécessaire de faire un rappelle sur quelques modèles et hypothèses souvent utiliser pour résoudre les problèmes vibratoires des structures minces. Dans le cas des poutres, on rencontre généralement deux modèles, modèle type Euler-Bernoulli associe aux structure minces et modèle type Timochenko pour les poutres épaisses. Pour les plaques de nombreuses modèle existent dont les plus connues sont celles de Kirchhoff-Love qualifié de modèle de plaque mince et celle de Reissner-Mindlin qualifié de modèle de plaque épaisse. Comme on trouve le modèle de Von Karman valable pour les poutres et plaques minces :

IV.7.1. Modèle poutre mince type Euler-Bernoulli

Dans ce paragraphe on va présenter une poutre mince de type Euler-Bernoulli en vibrations non linéaires géométriques proposer dans la référence [46].

• Déformations de la poutre

Soit u(x; t) et v(x; t) le déplacement axial et le déplacement transverse de la poutre. La déformation axiale ε et la courbure k se déterminent respectivement, par les formules suivantes:

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}[(u')^2 + (v')^2]$$
 (IV. 70)

$$k = \frac{(1+u')v'' - u'v'}{(1+u')^2 + (v')^2}$$
(IV. 71)

Le premier terme de (IV.70) représente la partie linéaire de la déformation axiale, tandis que les deux derniers termes correspondent à la partie non linéaire. On rappelle que dans le cas linéaire où l'hypothèse de petits déplacements est valable, la partie non linéaire de (IV.70) est négligée.

Dans les structures minces, l'hypothèse de petites déformations et de grands déplacements est faite

$$(u')^2 \ll u' \ll 1$$
 (IV.72)

Les expressions (IV.70) et (IV.71) sont alors simplifiées et réécrites comme suit :

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(u')^2$$
 (IV. 73)

$$k = v^{''} \tag{IV.74}$$

IV.7.2. Modèle de type Kirchhoff-Love [47]

On se donne ici, pour rester conforme à des notations couramment utilisées en théorie des plaques, un repère (O, x_1 , x_2 , x_3).

Les variables ou champ de vecteurs tridimensionnels sont représentés par des majuscules (<u>U</u>), tandis que les variables ou champ bidimensionnels sont représentés par des minuscules (\underline{u}_p).

IV.7.2.1.Description géométrique

Une plaque est défini par rapport a son épaisseur qu'est petite par rapport à ses autres dimensions. Son déplacement est régi en toute généralité par les équations tridimensionnelles. Compte tenu de la géométrie particulière d'un tel objet, il est naturel de chercher à restreindre le problème à une équation bidimensionnelle écrite dans le plan médian de la plaque.



Figure IV.16 : modèle plaque de Kirchhoff-Love.

IV.7.2.2. Les hypothèses de modèle Kirchhoff-Love

Le modèle de Kirchhoff-Love repose sur un certain nombre d'hypothèses qui portent sur la forme des champs de déplacement autorisés mais aussi sur la forme du tenseur des contraintes de Cauchy, ce qui aura une incidence directe sur la loi de comportement du matériau. Ces hypothèses vont nous permettre de réinterpréter le principe des puissances virtuels afin d'obtenir un jeu d'équations qui porte uniquement sur des variables définies dans la surface médiane.

IV.7.2.3. Hypothèse et champ de déplacement de Kirchhoff-Love

• Hypothèse 1 (des sections droites): *Toute section droite avant déformation* reste droite *après déformation*.

L'épaisseur de la plaque étant négligeable devant les autres dimensions de la plaque, on peut négliger la courbure du déplacement effectuée par une section droite. Cela revient, en quelque sorte, à linéariser le déplacement d'une section droite par rapport à l'épaisseur. Cette hypothèse est usuellement attribuée à Reissner ou à Mindlin. Tout segment droit possède alors un mouvement de solide rigide

• **Hypothèse 2 :** Il n'y a pas de déformation transversale, soit : $\varepsilon_{33}=0$

On aura donc $\partial_3 U_3 = 0$ ce qui implique

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2)$$
(IV.75)

Ces deux hypothèses (1, 2) nous permettent alors de restreindre l'ensemble des déplacements autorisés à des déplacements de la forme:

$$U_{\alpha}(x_1, x_2, x_3) = u_{\alpha}(x_1, x_2) - x_3 \theta_{\alpha}(x_1, x_2)$$
(IV. 76)
$$U_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2)$$

• Hypothèse 3 (de Kirchhoff-Love) *Toute section droite* reste normale à la médiane au cours du déplacement.

On aura alors :

$$\underline{\theta} = \underline{\nabla} u_3 \tag{IV.77}$$

On néglige ainsi les phénomènes de cisaillement transverse. L'intérêt d'un tel choix de champ de déplacement autorisé est qu'on a totalement explicité la dépendance en x_3 des trois composantes du champ <u>U</u>. L'inconnu est maintenant le déplacement de la surface médiane \underline{u}_p défini dans ω qui ne dépend que des seules variables x_1 et x_2 . On a donc ramené un problème posé dans le domaine tridimensionnel Ω à un problème posé dans le domaine bidimensionnel ω .

IV.7.3. Modèles poutres et plaques minces de Von Karman :

Le principe de ces modèles est de tronquer la partie non linéaire du tenseur de Green-Lagrange en ne retenant que les premiers termes quadratiques en fonction du déplacement transverse dans les déformations longitudinales. Cette troncature a été proposée par Von Karman [48] en 1910 dans le cadre de la statique des plaques minces. Ces modèles sont directement reliés à la troncature, qui signifie qu'ils permettent de prendre en compte les effets non linéaires créées par les rotations des fibres, à conditions qu'elles ne soient pas trop importantes. Cette théorie est applicable pour tous les milieux minces (poutres, arches, membranes, plaques, coques. . .), dans un nombre conséquent d'études, à la fois analytiques et numériques.



Figure IV.17 :Modèle de poutre et de plaque.

IV.7.3.1.Déplacements

On se limite au cas où les sections droites ont un mouvement de corps rigide et restent normales à la déformée de la ligne moyenne (hypothèses de Love-Kirchhoff). Les déplacements sont alors entièrement déterminés, par ceux de la ligne moyenne pour la poutre et par ceux de la surface moyenne pour la plaque, notés (\bar{u} ,w) dans x₁,x₂,x₃, avec \bar{u} , = u₁(x, t), w = w(x, t) pour une poutre et \bar{u} , = {u₁(x, y, t), u₂(x, y, t)}, w = w(x, y, t) pour une plaque. On a alors :

$$u(x, y, z, t) = \left[u_{\alpha} - z \frac{\partial \omega}{\partial x_{\alpha}}\right] x_{\alpha} + \omega x_{3}$$
(IV. 78)

avec $\alpha = 1$ pour une poutre et variant de 1 à 2 pour une plaque.

IV.7.3.2.Déformations

A cela on ajoute l'hypothèse des rotations modérées (les termes de rotations sont petits mais non négligeables par rapport aux gradients des déplacements), ce qui conduit à l'écriture de:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \underbrace{e^{l}_{\alpha\beta}(\bar{u}) + e^{nl}_{\alpha\beta}(\omega,\omega)}_{e_{\alpha\beta}} + zk_{\alpha\beta}(\omega)$$
(IV.79)

Pour

$$e_{\alpha\beta}^{l}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \right)$$
$$e_{\alpha\beta}^{nl}(\omega,\omega) = \frac{1}{2} \omega_{,\alpha} \omega_{,\beta}$$
$$(IV.80)$$
$$k_{\alpha\beta}(\omega) = -\omega_{,\alpha\beta}$$

(e) représente les déformations de membrane (tension pour une poutre) et k celles de flexion parfois appelées courbure. On introduit ensuite les contraintes généralisées suivantes (avec $\Delta = \left[\frac{-h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ pour une plaque et $\Delta = \sum$ pour une poutre) :

$$N_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} S_{\alpha\beta} \, d\Delta \, et \, M_{\alpha\beta} = \int_{\Delta} z \, S_{\alpha\beta} \, d\Delta \qquad (IV.81)$$

Nommés respectivement efforts normaux et moments de flexion

Note :

• pour la théorie de Von Kármán, la relation moment de flexion / déplacements est linéaire, c'est le couplage membrane / flexion la source des non-linéarités ;

• pour les grandes rotations, la relation moment de flexion / déplacements est non linéaire : c'est la source des non-linéarités ;

• pour les structures unidimensionnelles (cordes, poutres, arches), les modèles de Von Kármán ne s'appliquent que si le déplacement axial est contraint ;

• pour les structures bidimensionnelles (membranes, plaques et coques), dans presque tous les cas, le couplage membrane / flexion est activé et les modèles de Von Kármán permettent de décrire correctement les vibrations non linéaires.

IV.8. Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est consacré à l'étude des vibrations non linéaires. Le but est définir les paramètres responsables de la non linéarité et influant sur le comportement dynamique des structures, où on a considéré que le cas de la non linéarité géométrique de type raideur (pas de non linéarité d'amortissement). On a présenté quelques méthodes de la résolution des systèmes non linéaire puis un exemple d'application de la méthode des échelles multiples et l'équivalente harmonique ainsi qu'une étude d'un système avec non linéarité cubique (oscillateur de Duffing), a la fin de chapitre on a présenté quelque hypothèses et cinématique dédier au calcul des structure minces.

CHAPITRE V:

APPLICATION SUR ABAQUS

V.1. Introduction

La simulation et l'analyse numérique se sont développées ces dernières années dans la recherche industrielle privée ou publique pour but d'optimiser le prototypage virtuel. La solution d'analyse par éléments finis est utilisée dans nombreux logiciels comme ABAQUS, NASTRAN, MARCS, RADIOS...

Pour notre simulation nous utiliserons le logiciel ABAQUS (analyse dynamique non linéaire).

Au premier temps on va donner quelque généralité sur le logiciel et les méthodes utilisées pour la résolution des problèmes non linéaires géométriques des structures. Puis deux simulations seront proposées, une plaque pour illustré le comportement non linéaire et une poutre pour représenté l'influence de certain paramètres sur le comportement non linéaire. Nos résultats seront comparés avec ceux d'une référence où les résultats sont obtenus avec des méthodes différentes a la notre, afin d'assuré que la méthode utilisée est bonne.

V.2. A propos d'ABAQUS

Fondé en 1978, ABAQUS [49], est l'un des premiers fournisseurs mondiaux de logiciels et services pour l'analyse par éléments finis. La gamme de logiciels d'ABAQUS est particulièrement réputée pour sa technologie, sa qualité et sa fiabilité. Elle s'est imposée comme partie intégrante des processus de conception de sociétés de renommées mondiale dans tous les secteurs industriels. ABAQUS offre les meilleures solutions pour des problèmes linéaires, non linéaires, explicites et dynamiques. Le logiciel fournit un environnement inégalé pour l'analyse par éléments finis, proposant un grand nombre d'alternatives aux opérations impliquant des fournisseurs et des produits multiples. ABAQUS, c'est une structure de plus de 350 personnes, 24 agences implantées dans le monde et un réseau de distributeurs sur les marchés émergents.

Il se compose de trois produits : ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE.

• ABAQUS/Standard : est un solveur généraliste qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.

- Le solveur **ABAQUS/Explicit** emploie un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires.
- ABAQUS/CAE constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour lesdits solveurs.

Chacun de ces produits est complété par des modules additionnels et/ou optionnels, spécifiques à certaines applications.

Les produits ABAQUS, ABAQUS/CAE notamment, sont écrits intégralement avec les langages C++, Fortran pour les parties calcul et Python pour les scripts et les paramétrisations.

Description du logiciel :

Le logiciel est divisé en neuf modules indépendants les uns des autres :

- Part;
- Property;
- Assembly;
- Step;
- Interaction;
- Load;
- Mesh;
- Job;
- Visualisation;
- Sketch.

V.2.1. L'intégration directe selon un schéma implicite

Les méthodes d'intégration directe sont des méthodes numériques basées sur l'intégration directe des équations du mouvement par des algorithmes de progression pas à pas dans le temps.

Les opérateurs d'intégration sont le plus souvent construits par différences finies temporelles. Le pas de temps associé est un paramètre fondamental. La taille du pas de temps doit tenir compte non seulement du contenu fréquentiel de la réponse mais aussi de la discrétisation spatiale du système car il doit être cohérent avec la vitesse de propagation des ondes dans le modèle.

L'algorithme d'intégration directe de Newmark consiste à approximer le calcul de l'accélération par quadrature numérique. Dans le cas des systèmes linéaires, il se présente ainsi (d'après Géradin et Rixen [50]) :

1. Les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité (M, C, K) sont déterminées. Forces extérieures P connues de même que les champs des déplacements nodaux et des vitesses nodales initiaux.

2. Calcul de l'accélération initiale :

$$\ddot{q}_0 = M^{-1}(P_0 - C\dot{q} - Kq_0)$$
 (V.1)

3. Incrémentation temporelle :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \tag{V.2}$$

4. prédiction du déplacement et de la vitesse au pas suivant

$$q_{n+1}^* = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}_n \tag{V.3}$$

$$\dot{q}_{n+1}^* = \dot{q}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_n$$
 (V.4)

5. calcul de l'accélération :

$$S = M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K$$
 (V.5)

$$S\ddot{q}_{n+1} = P_{n+1} - C\dot{q}_{n+1}^* - Kq_{n+1}^*$$
 (V.6)

6. Correction du déplacement et de la vitesse:

$$q_{n+1} = q_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \ddot{q}_{n+1}$$
 (V.7)

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1} \tag{V.8}$$

7. Calcul optionnel des énergies et retour en 3.

La méthode HHT (Hilbert Hugues Taylor), similaire à la méthode de l'accélération moyenne, la remplace avantageusement dans le cas des systèmes non linéaires où il est nécessaire de contrôler l'amortissement numérique. Dans l'algorithme de Newmark, on a $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ pour la méthode de l'accélération moyenne. Pour HHT, on a $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$ et $\beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}$ avec $\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$.

Le paramètre α introduit dans la méthode HHT constitue le moyen de pondérer les forces élastiques et les forces extérieures sur l'intervalle de temps. Il est assimilable à l'amortissement numérique et prend usuellement la valeur 0.05. L'algorithme donne lieu à une dissipation numérique importante dans le domaine des hautes fréquences mais conserve une excellente précision dans les basses fréquences. Le schéma est inconditionnellement stable dans le cas des systèmes linéaires.

Pour les systèmes non-linéaires, le calcul implicite de la réponse se fait de la manière suivante [50] :

- 1. La matrice de masse M, les forces intérieures F, les forces extérieures P, la matrice d'itération S (vaut $K^t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C^t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M$), q_0,\dot{q}_0 sont connus ou déterminés .
- 2. Calcul de l'accélération initiale :

$$\ddot{q}_0 = M^{-1}(P_0 - F(q_0, \dot{q}_0)) \tag{V.9}$$

3. Incrémentation temporelle:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \tag{V.10}$$

4. Prédiction:

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}_n \qquad (V.11)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{q}_n \tag{V.12}$$

$$\ddot{q}_{n+1} = 0 \tag{V.13}$$

5. Evaluation de résidu :

$$r_{n+1} = M\ddot{q}_{n+1} + F_{n+1} - G_{n+1} \tag{V.14}$$

6. Convergence ? Si oui, retour en 3 :

$$\|r_{n+1}\| < \in \|f_{n+1}\| \tag{V.15}$$
7. Calcul de la correction :

$$S(q_{n+1})\Delta q = -r_{n+1} \tag{V.16}$$

8. Correction et retour en 5:

$$q_{n+1} = q_{n+1} + \Delta q \tag{V.17}$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta q \tag{V.18}$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_{n+1} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta q \tag{V.19}$$

V.2.2. L'intégration directe selon un schéma explicite

Selon Gérardin et Rixen [50], un opérateur d'intégration de type implicite est généralement préféré pour les problèmes où les basses fréquences prédominent et où les forces dissipatives sont importantes. Lorsque la réponse est avant tout dominée par les hautes fréquences, il s'agit d'un problème de propagation d'ondes et un opérateur explicite est préférablement utilisé. Un opérateur explicite se révèle aussi à son avantage pour des problèmes peu dissipatifs et dans les cas de systèmes hautement non-linéaires (déformations et vitesses de déformations importantes).

L'intégration explicite par la méthode de la différence centrée (Newmark avec $\beta = 0$ et $\gamma = \frac{1}{2}$) se fait selon l'algorithme suivant :

1. La matrice de masse M, les forces intérieures F, les forces extérieures P, q_0 , \dot{q}_0 sont connus ou déterminés.

2. Calcul de l'accélération initiale et de la vitesse au demi-pas de temps :

$$\ddot{q}_0 = M^{-1}(P_0 - F(q_0, \dot{q}_0))$$
 (V.20)

$$\dot{q}_{\frac{1}{2}} = \dot{q}_0 + \frac{\Delta t_1}{2} \ddot{q}_0 \tag{V.21}$$

3. Incrémentation temporelle(1) :

$$t_n = t_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t_n \tag{V.22}$$

4. Incrémentation des déplacements :

$$q_n = q_{n-1} + \Delta t_n \ \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} \tag{V.23}$$

5. Incrémentation temporelle(2) :

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \Delta t_{n+1} \tag{V.24}$$

6. calcul des accélérations:

$$\ddot{q}_n = M^{-1}(P_n - F(q_n, \dot{q}_n))$$
 (V.25)

7. incrémentation des vitesses et retour en 3:

$$\dot{q}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{q}_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t_{n+\frac{1}{2}}\ddot{q}_n$$
 (V. 26)

Dans les phénomènes est gouverné par les basses fréquences. Les remarques précédentes tendent à montrer que l'utilisation du schéma implicite est préférable. L'utilisation du schéma explicite n'est pourtant pas à exclure et peut même se révéler avantageuse à l'usage. Dans le schéma implicite, le choix du pas de temps est critique sur deux points : la qualité de la réponse prédite et le temps de calcul. Si le pas de temps est trop grand, la périodicité de la réponse calculée est faussée de facon notable ; certains phénomènes transitoires peuvent aussi être masqués. Si le pas de temps est trop petit, le temps de calcul devient considérable. En utilisant un contrôle automatique de l'incrémentation temporelle, on se heurte à un autre problème qui est celui du choix de la précision désirée. L'utilisation d'une telle méthode nécessite de définir une tolérance sur le résidu au demi pas de temps. Si le résidu est supérieur à la tolérance, le pas de temps est alors diminué jusqu'à ce que la valeur du résidu devienne acceptable. Evaluer la tolérance requise se révèle aussi peu évident que le choix d'un pas de temps approprié. Si la tolérance de départ est trop grande, alors la qualité de la réponse prédite peut être dramatiquement altérée. Au contraire, si la tolérance est trop faible, on se ramène à la situation de pas de temps trop faibles et à des temps de calcul conséquents. Le pas de temps Δt pour assurer la stabilité du calcul explicite est, pour un système conservatif, tel que :

$$\Delta t \le \frac{2}{\omega_{max}} \tag{V.27}$$

où ω_{max} est la pulsation propre la plus élevée du système. En d'autres termes, le pas de temps nécessaire à la stabilité de l'algorithme correspond au temps de propagation d'onde de dilatation le plus faible dans les éléments. La limite de stabilité est donc réécrite comme :

$$\Delta t = min_e \left(\frac{L^e}{c_{od}}\right) \tag{V.28}$$

où L^e est la longueur élémentaire et c_{od} la vitesse de l'onde de dilatation. Cela conduit à une valeur très faible qui peut cependant entraîner une réduction sensible du temps de calcul total par rapport au calcul implicite. En effet, moins de calculs sont effectués à chaque itération pour le schéma explicite que pour l'implicite. Il est nécessaire néanmoins d'introduire artificiellement de l'amortissement pour dissiper le bruit numérique dans les hautes fréquences si l'on souhaite utiliser ce schéma. Par contre, l'ajout d'amortissement dans le système impacte négativement la valeur du pas de temps critique comme le montre la relation suivante :

$$\Delta t \le \frac{2}{\omega_{max}} \left(\sqrt{1 + \zeta_{max}^2} - \zeta_{max} \right) \tag{V.29}$$

Où ζ_{max} correspond dans ce cas au facteur d'amortissement du mode le plus élevé.

V.3.Application

Dans cette partie on présente une simulation avec le code de calcul ABAQUS-standard du deux structures, une plaque carrée en aluminium et une poutre en composite. La méthode utilisée pour la simulation est la méthode HHT avec un chemin d'intégration implicite.

V.3.1. Simulation N°1

La première simulation est faite pour une plaque carrée en aluminium soumises à une excitation harmonique afin d'illustré le comportement non linéaire.

V.3.1.1. Caractéristiques de la structure

On considère une plaque carrée simplement appuyée soumise à une excitation harmonique transversale concentrée au centre F=1.74N, de coefficients d'amortissement α =0.065, β =0, de longueur L=0.3m, largeur b=0.3m et épaisseur h=0.001m. Le matériau est en aluminium avec un module d'Young E=70.E9 Pa, la masse volumique ρ =2778 kg/m³ et le coefficient de Poisson ν =0,3. La plaque est modélisée en utilisant des éléments coques a quatre nœuds, ayant des fonctions d'interpolation bilinéaires et avec intégration réduite (S4R). . Un maillage à 625(25×25) éléments a été choisi.

V.3.1.2. Résultats

• Le tableau suivant montre les valeurs propres de la plaque en vibration

Mode	1	2	3	4
fréquence[Hz]	19.10	42.34	52.66	103.31

Tab V.1 : Valeurs propres de la plaque. Simulation (1)

• Les figures en dessous montrent les résultats obtenus avec le code de calcul abaqus et celles de la référence[51].



V.3.1.3. Discussion des résultats

- La méthode choisie (HHT-ABAQUS/Standard) donne de bons résultats, on les comparant avec ceux de la référence [51].
- Le résultat obtenu est un pique incliné au niveau de la fréquence 15 car les fréquences dépendent de l'amplitude. C'est cette propriété qui caractérise le comportement non linéaire, contrairement au cas linéaire où les fréquences ne dépendent pas de l'amplitude et le pique sera vertical (non incliné).
- L'inclinaison de pique traduit aussi l'influence de certain paramètres (taux de chargement, taux d'amortissement, la non linéarité de la raideur ...) sur la structure, plus l'inclinaison est importante plus la structure est moins rigide (souple).

V.3.2. Simulation N°2

La deuxième simulation est faite pour une poutre en composite soumises à une excitation harmonique. Afin d'illustré l'influence des conditions aux limites, le taux d'amortissement et le taux de chargement sur comportement non linéaire de la poutre. On propose trois cas: Poutre en appuie simple-appuie simple (AS-AS) avec $F_0=1.2N$ et $\zeta=0.1$, Poutre encastrée-encastrée (E-E) avec $F_0=5N$ et $\zeta=0.1$ et une poutre encastrée-encastrée (E-E), avec $F_0=5N$, et $\zeta=0.05$.

V.3.2.1. Caractéristiques

On considère les vibrations transverses d'une poutre composite de fibre de carbone époxy et une matrice en époxy, dont les dimensions sont les suivantes : longueur L=956mm, largeur b=106 mm et épaisseur h=4.16 mm. Elle est composée de 16 plis en séquence symétrique {90/45/0/-45}2S. Les propriétés du matériau sont les suivantes : modules de Young E₁₁=160 GPa; E₂₂=8600 MPa; E₃₃=E₂₂, coefficients de Poisson v_{12} =0.32 ; v_{12} = v_{13} ; v_{23} =0.40 et coefficients de cisaillement G₁₂=4.85GPa; G₁₃=G₁₂; G₂₃=2/3*G₁₂. On cherche à prédire la courbe de réponse non linéaire forcée et amortie pour le cas d'une poutre encastrée ou simplement appuyée aux deux extrémités.



Figure VI.1: poutre en composite

V.3.2.2. Calcul par éléments finis

Un calcul en dynamique non-linéaire a été effectué avec le code de calcul éléments finis ABAQUS/Standard. La structure est modélisée en utilisant des éléments coques a quatre nœuds, ayant des fonctions d'interpolation bilinéaires et avec intégration réduite (S4R). Ces éléments tiennent compte de la rigidité due au cisaillement transverse. Un maillage à $400(80 \times 5)$ éléments a été choisi.

V.3.2.3. Résultats

On a considérer 3 cas selon les conditions aux limites et le coefficient d'amortissement, pour des fréquences d'excitation proches de la première fréquence propre de vibration. Les figures en dessous montrent les résultats obtenus avec le code de calcul abaqus comparées à celles de la référence[52].

<u>**a.** 1^{er} cas</u>: Poutre en appuie simple-appuie simple (AS-AS), avec une force excitatrice $F_0=1.2N$, et un coefficient d'amortissement $\zeta=0.1$.

Mode	1	2	3
Fréquences[Hz]	13.95	55.29	124.94

Tab V.2 : Valeurs propres de la poutre. Simulation (2)-Cas (a)

Chapitre V





Chapitre V

<u>b.</u> 2^{eme} **cas**: Poutre encastrée-encastrée (E-E), avec une force excitatrice F₀=5N, et un coefficient d'amortissement ζ =0.1.

Mode	1	2	3
Fréquences[Hz]	31.60	87.19	171.31







Chapitre V

<u>c. 3^{eme} cas</u>: Poutre encastrée-encastrée (E-E), avec une force excitatrice $F_0=5N$, et un coefficient d'amortissement $\zeta=0.05$.

Mode	1	2	3
Fréquences[Hz]	31.60	87.19	171.31



Tab V.4 : Valeurs propres de la poutre. Simulation (2)-Cas (c)



La figure (V.11) au dessous représente les trois cas précédent au même temps pour voir la variation de comportement d'un cas à l'autre.



V.3.2.4. Discussion des résultats

- Les résultats obtenus sont les même que ceux de la référence [52], ce qui implique que la méthode utilisée est efficace.
- Dans les trois cas la fréquence dépend de l'amplitude de vibration, donc les réponses sont non linéaires. La réponse de premier cas (AS-AS, F=1.2, ζ=0.1) est plus souple que les autre cas.
- Le changement des conditions aux limites et la force d'excitation au deuxième cas (E-E, F=5, ζ=0.1) se traduit par une diminution de l'amplitude due a l'augmentation de la force d'excitation (figure en bleu) et un durcissement de la réponse due au changement des conditions aux limites. Les figures montrent clairement que la condition aux limites simplement appuyées apporte une réponse "plus souple" que les poutres encastrées. La courbe AS-AS (en rouge) est plus incliné que la courbe E-E (en vert et en bleu) ce qui veut dire que réponse est moins rigide.
- Le changement de taux d'amortissement dans le troisième cas (E-E, F=5, ζ =0.05) se traduit par une variation de l'amplitude, plus l'amortissement est petit plus l'amplitude

est grande. On voie clairement que l'amplitude au troisième cas (en vert) est plus importante que celle de deuxième cas (en bleu).

V.4. Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire est une étude des vibrations non linéaires avec le code de calcul ABAQUS, deux structures sont simulées, une plaque carrée en aluminium et une poutre en composite où on a remarqué l'influence des conditions aux limites et l'amortissement sur la réponse

La méthode de simulation donne d'excellents résultats. C'est une méthode efficace pour tous les problèmes bien posés. Mais l'importance des couts numériques quelles engendrent limite pratiquement leur applications.

CONCLUSION GENERALE

Conclusions générales

La dynamique non linéaire à reçu ces dernières années une attention considérable de la part des chercheurs ce qui s'est traduit par la publication de nombreux travaux et le développement des outils de calcul pour cette discipline. L'équipe de recherche et de développement du groupe ABAQUS, n'ont pas failli à cette règle, puisque le logiciel n'a guère cessé d'évoluer dans ce domaine et propose des améliorations permanentes de ses codes de calcul, ce qui lui confère sa place de leader dans le mode du calcul éléments finis.

Les objectifs principaux de ce mémoire sont : une investigation sur le comportement vibratoire non linéaire en tenant compte de ses particularités et l'utilisation du code de calcul éléments finis précédemment évoqué (ABAQUS) pour calculer la réponse des structures en grandes déformations soumises à une force excitatrice périodique, tout en comparant les résultats obtenus avec ceux présentés dans la littérature.

On a simulé deux types de structures, la première étant une poutre composite multicouche et la deuxième est une plaque en matériau isotrope, sous différents cas de conditions aux limites, de chargement et d'amortissement, pour entrevoir l'influence de ces paramètres sur la réponse non linéaire.

Les résultats obtenus par la simulation sont satisfaisant et ressemble grandement à ceux obtenus dans la littérature scientifique, ce qui conforte encore une fois la puissance et l'évolution du code ABAQUS, la seule chose qu'on peut lui reproché se sont ses couts numériques qui sont relativement élevés surtout en dynamique implicite (DynamicImplicit).

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUES

[1]: J.S. Strutt (Lord Rayleigh).

Theory of sound. Dover publications, 1945.

[2]: S. Timoshenko.

Théorie des vibrations. Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1939.

[3]: Nicolas Quaegebeur.

Vibrations non linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur, Doctorat de l'Ecole Polytechnique, 2007.

[4]: Arthur Lebée.

Homogénéisation de plaques périodiques épaisses, application aux panneaux sandwichs à âme pliable en chevrons, Université Paris-Est, 2010.

[5]: Mehdi Ben Thaier.

Modélisations numérique de plaques et coques composite à l'aide d'une approche au sens de Reissner-Mindlin enrichie pour les problèmes mécaniques piézo-mécanique, 2010.

[6]: M. Emmanuel Verhille.

Méthode élément finis a posteriori pour les équations de Reissner-Mindlin, Université des sciences et technologie de Lille, 2012.

[7]: T. Benmansour, K. Bensmail, A. Sekhri.

Approche d'homogénéisation pour l'analyse dynamique non linéaire des poutres multicouches dissipatives d'énergie, 1st International Conference on Sustainable Built Environment Infrastructures in Developing Countries, ENSET Oran (Algeria) - October 12-14, 2009

[8]: Patrick Mottard.

Méthodes semi-analytiques en vibration non linéaire, Université Laval, 2011

[9]: Nayfeh & Mook.

Nonlinear Oscillations, Wiley classics library, Edition Published 1995.

[10]: Nicolas Bogolioubov et Iouri mitropolski.

Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires, traduit par G. JACOBI. 1962.

[11]: Marco Amabili.

Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates, University of Parma, Italy

[12]: Groupe Scientifique et Technique.

« Modes non-linéaires : Définitions et applications » . Année 2005.

[13]: Samuel Blanchard.

Caractérisation du comportement non-linéaire des matériaux à partir d'essais statiquement indéterminés et de champs de déformation fortement hétérogènes, université de valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2009.

[14]: J. Besson, G. Cailletaud, S. Forest.

Centre des Matériaux, Lois de comportement non linéaires des matériaux, Ecole des Mines de Paris,

[15]: Flavio D'Ambrosio.

Comportement dynamique des structures en présence de frottement sec, l'institut national des sciences appliquées de Lyon, 2004.

[16]: Jean-Jacques Sinou.

Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage, école centrale de Lyon, 2002.

[17]: Xavier Lorang.

Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV, Ecole Polytechnique SNCF, 2004.

[18]: Franck Pérignon.

Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires, université Aix-Marseille II, 2004

[19]: Sébastien Bourdreux.

Exemples d'effets de non-linéarité sur le comportement d'un oscillateur, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand, 2003

[20] Olivier THOMAS,

Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2001

[21] Olivier THOMAS.

Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN, 2011 [22] Cédric Camier.

Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites. Application aux cymbales. ENSTA, ParisThech,2009.

[23] Mélodie Monteil.

Vibrations non linéaires de Steeldrums. Caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique,2010.

[24] Cyril Touzé.

Vibrations non linéaires géométriques de structures minces & Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos. 2009.

[25]: The Newton-Raphson Method, article.

[26]: Najib Mahjoubi.

Méthode générale de couplage de schéma d'intégration multi-échelles en temps en dynamique des structures, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.

[27]: Damien Sellier.

Analyse numérique du comportement mécanique d'arbres sous sollicitation aérodynamique turbulente, Université Bordeaux I, 2004.

[28]: Vincent Jaumouillé.

Dynamique des structures à interfaces non linéaires extension des techniques de balance harmonique, école centrale de Lyon, 2011.

[29]: Freed, A. D. et Walker, K. P.

«Exponential integration algorithm for first-order ODEs with application to viscoplasticity». ASME Summer Conf. On Mechanics and Materials Recent Advances on Damage Mechanics and Plasticity, Tempe, 1992.

[30]: Freed, A. D. et Walker, K. P.

«Exponential integration algorithms applied to viscoplasticity». 3rd Int. Conf. On Computational Plasticity, p. 1757-1768, Barcelona, 1992.

[31]: R.M. Rosenberg.

On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. Advances in applied mechanics, pages 155–242, 1966.

[32]: S.W. Shaw et C. Pierre.

Normal modes for non-linear vibratory systems. Journal of Soundand Vibration, 164(1):85–124, 1993a.

[33]: Guillaume PUEL.

Mise en évidence et recalage des non-linéarités locales en dynamique des structures, Université Paris 6, 2000-2001.

[34]: Jean-Claude Pascal, vibrations et acoustique 1,2007-2008.

[35]: Serge SAMPER, Vibrations des structures et des systèmes mécaniques

[36]: Vibrations des systèmes à 1 degré de liberté, article

[37]: MORSLI Mohammed.

« méthode de détection d'endommagements dans les structures mécaniques linéaires où faiblement non linéaires ». Thèse de magister de l'université de TIZI OUZOU. 2008.

[38]: L. CHAMPANEY.

Méthodes Numériques pour la Mécanique, Université de Versailles

[39]: Jean-Marie BERTHELOT.

Mécanique des matériaux et structures composites. ISMANS, 2010

[40]: Nadia BAHLOULI,

Cours matériaux composites. DESS Mécanique avancée et Stratégie, 2004. industrielle

[41]: Louis BERREUR, Bertrand DEMAILLARD.

L'industrie Française des Matériaux composites, étude stratégique réalisée pour le compte de la DiGITIP/SIM Rév 2 du 13 mai 2002

[42]: Glossaire des matériaux composites, C.A.R.M.A. (Centre d'Animation Régional en Matériaux Avances)

[43]: Y. Chevalier.

"Micromécanique des composites: Prévision en élasticité, viscoélasticité et à la rupture", *Techniques de l'ingénieur*, 1989, A7780

[44]: P. Krawczak.

"Essais des plastiques renforcés", Techniques de l'ingénieur, 1997, AM5405.

[45]: méthode de newmark wikipedia

[46]: Tien Minh NGUYEN.

Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification, ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES, 2007

[47] Grégoire DERVEAUX.

Modélisation numérique de la guitare acoustique, L'ECOLE POLYTECHNIQUE, 2002.

[48]: Olivier THOMAS

Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN, 2011, paragraphe (2.1.3).

[49]: Olivier ANSART, Fabien AVRILLAS, Eric KREMER, Ibrahima NIANG, Karim ZANNIR

Apprentissage du crash sur abaqus.

[50]Gerardin M., Rixen D.

Théorie des vibrations - application à la dynamique des structures. Masson, 1

[51]: F. Boumediene, J. M. Cadou, A. Miloudi, L. Duigou, E. H. Boutyour.

Vibrations non linéaires forcées de plaques minces amorties par une méthode asymptotique numérique, Université Hassan I, BP 577, Settat, Maroc.

[52]: N. Moustaghfir, N. Jacques, E.M. Daya

Etude comparative des vibrations non-linéaires amorties de structures composites, Université Paul Verlaine Metz