REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud MAMMERI de TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil

Laboratoire de Modélisation expérimentale et numérique des Matériaux et Structures en génie civil

THÈSE DE DOCTORAT

En vue de l'obtention du diplôme de
Docteur en Génie Civil

Présentée par

BENYAHI Karim

Thème de la thèse

HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE ET FIABILITÉ DES ÉLÉMENTS DE STRUCTURES (APPLICATION AUX MATÉRIAUX COMPOSITES)

Devant le jury d'examen composé de :

M. TAHAKOURT Abdelkader	**Professeur**	**UAM Béjaia**	**Président**
M. BOUAFIA Youcef	**Professeur**	**UMMTO**	**Rapporteur**
M. NECHNECH Ammar	**Professeur**	**USTHB**	**Examinateur**
M. ZERIZER Abdelatif	**Professeur**	**UMB Boumerdès**	**Examinateur**
M. LARBI Said	**Maître de Conférences A**	**UMMTO**	**Examinateur**
M. DJEBALI Said	**Maître de Conférences A**	**UMMTO**	**Examinateur**

Soutenue le : 16 / 03 / 2019

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements au Professeur BOUAFIA Youcef, d'avoir bien voulu proposer et diriger ce travail de recherche et pour m'avoir permis de le réaliser dans d'excellentes conditions. Son appui, ses précieux conseils et orientations m'ont beaucoup apporté quant à la réalisation de ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à Monsieur KACHI Mohand Said, Professeur à l'UMMTO, pour ses conseils et orientations.

Je remercie vivement Monsieur TAHAKOURT Abdelkader, Professeur à l'UMMTO, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur NECHNECH Ammar, Professeur à l'USTHB, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur ZERIZER Abdelatif, Professeur à l'UMB Boumerdés, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur LARBI Said, Maître de conférences A à l'UMMTO, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur DJEBALI Said, Maître de conférences A à l'UMMTO, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

J'adresse également ma profonde reconnaissance et ma sympathie la plus vive à mes collègues pour leurs encouragements. Je pense en particulier à Madame Benakli, Madame Hamri, Madame Smahi, Monsieur Kachi, Monsieur Bouchafa.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis (es) pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

DÉDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

- Mes très chers parents à qui je dois tout et à qui je ne rendrais jamais assez.
- Mon cher frère et mes chères sœurs.
- Mes beaux frères et mes neveux.
- Tous mes amis (es) et toute la famille.

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans le cadre de la recherche du domaine de sécurité des éléments de structure en matériaux composites. Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche fiabiliste. Les événements de l'environnement (champ de forces, action, …) et comportement des matériaux (matrice, inclusions, …) sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste, apportée par un dimensionnement mécanique, peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure.

Il s'agit d'une part, d'appliquer la méthode d'homogénéisation périodique pour déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées des matériaux composites. L'homogénéisation des matériaux composites est effectuée en deux étapes :

- Homogénéisation du composite (matrice avec inclusions),
- Les caractéristiques du matériau composite homogénéisé étant définies, on effectue une simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastiques.

Il s'agit ensuite d'introduire l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation, c'est-à-dire ; une fois que les caractéristiques homogénéisées sont appréciées en l'absence de l'endommagement amorcé par les microfissures et micro cavitations, il est alors possible de revenir au problème de localisation par une démarche de « relocalisation » pour analyser les champs locaux et mettre notamment en jeu des critères de rupture ou d'instabilité.

D'autre part, il s'agit d'estimer le risque de défaillance des éléments de structures; cela en appliquant une approche probabiliste basée sur le principe du couplage mécano-fiabiliste. Dans cette étude, afin de réaliser le couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, il y a lieu d'utiliser une approche appelée méthode de surface de réponse (MSR) permettant la construction de la fonction d'état limite, ce qui permet grâce à l'utilisation de techniques de fiabilité, l'estimation de l'indice de fiabilité, des scénarios et de la probabilité de défaillance.

Nous validons notre formulation et modélisation du modèle mécanique, en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux ou à des solutions analytiques. Nous validons aussi la démarche probabiliste de l'analyse de fiabilité sur les modèles mécaniques étudiés.

MOTS CLÉS

Homogénéisation – endommagement – relocalisation – modélisation – non linéarité – composite – probabilité – fiabilité – surface de réponse – probabilité de défaillance.

ABSTRACT

The present study is part of the search for the field of safety of structural elements in composite materials. The problem is addressed by the definition of security by a probabilistic threshold: the reliabilistic approach is used. The events of the environment (field of forces, action, ...) and behavior of materials (matrix, inclusions, ...) are simulated by random and deterministic variables. The objective is to show how a reliable evaluation by a mechanical dimensioning, can be obtained. To do this, it is necessary to have a mechanical model and a reliable model correctly representing the behavior of this type of structure.

On the one hand, the method of periodic homogenization is applied in order to determine the homogenized mechanical characteristics of the composite materials. The homogenization of the composite materials is carried out in two stages:

- Homogenization of the composite (matrix with inclusions),
- The characteristics of the homogenized composite material being defined, a simulation of the behavior of elasto-plastic composite materials is carried out.

It is then necessary to introduce the damage into the problem of homogenization, that is to say; once the homogenized characteristics are appreciated in the absence of the damage initiated by the micro-cracks and micro cavitations, it is then possible to return to the localization problem by a "relocation" approach to analyze the local fields and in particular to of the criteria of rupture or instability.

On the other hand, it is to estimate the risk of failure of structural elements; by applying a probabilistic approach based on the principle of coupling mechano-reliability. In this study, in order to realize the coupling between the mechanical model and the reliabilistic model, an approach called the response surface method (MSR) is used, allowing the construction of the limit state function, which allows through the use of reliability techniques, reliability index estimation, scenarios and probability of failure.

We validate our formulation and modeling of the mechanical model by comparing the results of our calculations with experimental results or with analytical solutions. We also validate the probabilistic approach of the reliability analysis on the mechanical models studied.

KEY WORDS

Homogenization - damage - relocation - modeling - nonlinearity - composite - probability - reliability - response surface - probability of failure.

SOMMAIRE

RÉSUMÉ ..... **III**

ABSTRACT ..... **IV**

LISTE DES FIGURES ..... **IX**

LISTE DES TABLEAUX ..... **XII**

NOTATIONS PRINCIPALES ..... **XIII**

INTRODUCTION GÉNÉRALE **2**

CHAPITRE I :
ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I. 1. Introduction **7**
I. 2. Aperçu sur les matériaux composites à matrice métallique **8**
I. 3. Quelques idées sur les techniques d'homogénéisation **13**
I. 4. Un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement **17**
I. 5. Fiabilité des éléments de structures **20**
I. 6. Les lois de comportement **25**
I. 6.1. Modélisation des matériaux 25
I. 6.1.1. Comportement du béton ordinaire 25
I. 6.1.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin 26
I. 6.1.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon Grelat 27
I. 6.1.2. Comportement des aciers 29
I. 6.1.2.1. Comportement des aciers passifs 29
I. 6.1.2.2. Comportement des aciers actifs 31
I. 6.2. Modèles constitutifs 32
I. 6.2.1. Modèle Neo-Hookean compressible 32
I. 6.2.2. Modèle élasto-plastique 32
I. 7. Conclusions **34**

CHAPITRE II :

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE

II. 1. Introduction 37
II. 2. Problématique de l'homogénéisation périodique 37
II. 2.1. Choix de la cellule de base 37
II. 2.2. Méthodologie 38
II. 2.2.1. Condition aux limites périodiques 38
II. 2.2.2. Méthode d'homogénéisation périodique 42
II. 3. Validation de la procédure d'homogénéisation 49
II. 3.1. Imposition de conditions aux limites périodiques à l'échelle micro 49
II. 3.2. Implémentation des équations pour des conditions aux limites périodiques 50
II. 3.3. Organigramme général de mise en œuvre sur le code de calcul Abaqus 52
II. 4. Problématique de l'endommagement 53
II. 4.1. Modèle d'endommagement de Mazars 54
II. 4.1.1. Implémentation du modèle de Mazars dans le code de calcul Abaqus 57
II. 4.2. Modèle d'endommagement de Bouafia et al 57
II. 4.2.1. Implémentation du modèle de Bouafia et al dans le code de calcul Abaqus ... 60
II. 4.3. Organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement 61
II. 5. Extension de l'homogénéisation périodique à des comportements non linéaires 62
II. 5.1. Homogénéisation non linéaire des composites hétérogènes élasto-plastique 62
II. 5.2. Algorithme d'homogénéisation non linéaire 66
II. 5.3. Organigramme d'homogénéisation non linéaire 67
II. 5.4. Équations constitutives 68
II. 5.4.1. Matériaux avec écrouissage 68
II. 5.4.1.1. L'écrouissage isotrope 68
II. 5.4.1.2. L'écrouissage cinématique 70
II. 6. Conclusions 72

CHAPITRE III :

FIABILITÉ ET APPLICATION DU COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE

III. 1. Introduction 74
III. 2. Variables de base 75
III. 3. Fonction d'état limite 75
III. 4. Probabilité de défaillance 75
III. 5. Transformation isoprobabiliste 76
III. 6. Indice de fiabilité 77
III. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell 77
III. 6.2. Indice de Hasofer et Lind 79

III. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant 79
III. 8. Recherche du point de conception 80
III. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL} 81
III. 9.1. Résumé de l'algorithme 83
III. 9.2. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) 84
III. 9.3. Exemple illustratif 85
III. 10. Couplage mécano-fiabiliste 86
III. 10.1. Introduction 86
III. 10.2. Méthode par surface de réponse 87
III. 10.2.1. Surface de réponse analytique 88
III. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse 89
III. 11. Application du couplage mécano-fiabiliste au pont à poutres triangulées 90
III. 12. Conclusions 98

CHAPITRE IV :

VALIDATION ET CONFRONTATION DES RÉSULTATS

IV. 1. Introduction 100
IV. 2. Application de la théorie d'homogénéisation 100
IV. 2.1. Application du modèle d'homogénéisation périodique au béton 100
IV. 2.1.a. Variation du module d'Young du béton en fonction du module de mortier. 101
IV. 2.1.b. Variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats 102
IV. 2.1.c. Variation du module de coulomb en fonction du pourcentage en granulats 102
IV. 3. Comparaison numérique des modèles d'homogénéisation semi-analytique et d'homogénéisation périodique à l'expérience 103
IV. 3.1. Composite en béton léger 104
IV. 3.2. Composite en béton de résine 105
IV. 3.2.a. Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales 107
IV. 3.2.b. Prise en compte de l'influence de la géométrie et des porosités 108
IV. 3.3. Composite cimentaire avec grain de sable (Mortier de sable) 110
IV. 4. Estimation des caractéristiques mécaniques par un modèle d'homogénéisation périodique et prise en compte de l'endommagement d'un composite à inclusion 112
IV. 4.1. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions sphéroïdales 112
IV. 4.1.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 115
IV. 4.2. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions ellipsoïdales 118
IV. 4.2.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 121
IV. 4.3. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions cylindriques 124
IV. 4.3.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 127
IV. 5. Simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique 129
IV. 5.1. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales 129

IV. 5.2. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales 133
IV. 5.3. Matériaux composites à matrice métallique renforcés d'inclusions sphéroïdales 135
IV. 5.4. Matériaux composites renforcés d'inclusions cylindriques 137
IV. 6. Validation et évaluation de la fiabilité des composites étudiées 140
IV. 6.1. Application du couplage mécano-fiabiliste au calcul de l'endommagement d'un composite (matrice-inclusions cylindrique) 140
IV. 6.2. Application du couplage mécano-fiabiliste à la simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique (AL-SIC4.1) 144
IV. 7. Conclusions 149

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES 155

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 159

ANNEXES 177

LISTE DES FIGURES

Fig. I.1. Vue de coupe d'un composite à matrice métallique à mono filament [2] 8
Fig. I.2. Diagramme représentant la loi de comportement du béton [137] 25
Fig. I.3. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [138] 26
Fig. I.4. Comportement de béton ordinaire avant fissuration [139] 27
Fig. I.5. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton ordinaire sur le bord tendu selon Grelat [139]..... 28
Fig. I.6. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique avec raffermissement) [140] 29
Fig. I.7. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite) [140] ..30
Fig. I.8. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis [140] 30
Fig. I.9. Comportement des aciers précontraint [141] 31

Fig. II. 1. Choix de la cellule de base [148] 38
Fig. II. 2 : Description d'une cellule de base [149] 39
Fig. II.3. Points et surfaces recevant les conditions aux limites de périodicité 40
Fig. II.4. Schéma représentant une cellule de base en 2D avec des conditions aux limites 41
Fig. II.5. Schéma représentant une cellule de base en 2D avec continuité de traction 41
Fig. II.6. Microstructures tridimensionnelles avec inclusions multiples : (a) Fritzen et al. [152], (b) Delannay et. [153], (c) Brassart et al. [154], (d) Mortazavi et al. [155] ; [156] 45
Fig. II.7. Notation de l'élément de volume représentatif 49
Fig. II.8. Organigramme de la modélisation par la méthode d'homogénéisation périodique 52
Fig. II.9. Tracé de la zone seuil dans le plan de contrainte (σ_1 , σ_2) du modèle de Mazars [145] 55
Fig. II.10. Modèle de Mazars en traction et en compression [145] 56
Fig. II.11. Schéma de l'algorithme du modèle d'endommagement de Mazars 57
Fig. II.12. Loi de comportement ($\sigma - \varepsilon$) en traction du béton de fibres en acier ([146], [147])..... 60
Fig. II.13. Schéma de l'algorithme du modèle d'endommagement de Bouafia et al 60
Fig. II.14. Organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement 61
Fig. II.15. Modélisation incrémentale du comportement effectif [161] 63
Fig. II.16. Organigramme d'homogénéisation non linéaire 67
Fig. II.17.a. Essai de traction pour un matériau élastique parfaitement plastique [162] 68
Fig. II.17.b. Essai de traction pour un matériau avec écrouissage isotrope linéaire [162]..... 68
Fig. II.18. Modification de la surface seuil pour un écrouissage isotrope [163] 69
Fig. II.19. Modification de la surface seuil pour un écrouissage cinématique [163] 70

Fig. III.1. Représentation de l'indice de Cornell [168] 77
Fig. III.2. Point de conception [164] 80
Fig. III.3. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) 84
Fig. III.4. Représentation du portique [165] 85
Fig. III.5. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse 89
Fig. III.6 : Pont à poutre triangulée [169] 90
Fig. III.7. Condition de chargement du pont à poutre triangulée [169] 90
Fig. III.8. Pont à poutre triangulée - Courbe charge – flèche 91
Fig. III.9.a. Lois de probabilité de la variable aléatoire λ 92
Fig. III.9.b. Lois de probabilité de la variable aléatoire U/L 92
Fig. III.10. État limite dans l'espace physique G $(\lambda, U/L)$ 94
Fig. III.11. État limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ $(\lambda, U/L)$ 95
Fig. III.12. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires $(\lambda, U/L)$ 95
Fig. III.13. État limite approché des différents cas dans l'espace centré réduit 96

Fig. IV.1. Variation de module d'Young du béton en fonction du module du mortier 101
Fig. IV.2. Variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats 102
Fig. IV.3. Variation du module de Coulomb en fonction du pourcentage en granulats 103
Fig. IV.4. Variation du module d'Young équivalent en fonction du pourcentage en granulats 104
Fig. IV.5. Module d'Young pour les différents modèles 106
Fig. IV.6. Module de cisaillement pour les différents modèles 106
Fig. IV.7. Comparaison du module d'Young 107
Fig. IV.8. Comparaison du module de cisaillement 108
Fig. IV.9. Comparaison du module d'Young 109
Fig. IV.10. Comparaison du module de cisaillement 109
Fig. IV.11. Modélisation des inclusions sphéroïdales sur le code de calcul Abaqus 111
Fig. IV.12. Module d'élasticité des mortiers de granulats d'argile expansée 111
Fig. IV.13. Modélisation du composite (matrice-inclusions) 113
Fig. IV.14. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions sphéroïdales 114
Fig. IV.15. Comportement local contrainte-déformation 116
Fig. IV.16. Evolution du dommage en fonction de la déformation 116
Fig. IV.17. Influence du paramètre A_t sur le comportement local contrainte-déformation 117
Fig. IV.18. Influence du paramètre A_t sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation . 117
Fig. IV.19. Modélisation du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales) 119
Fig. IV.20. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions ellipsoïdales 120
Fig. IV.21. Comportement local contrainte-déformation 122
Fig. IV.22. Evolution du dommage en fonction de la déformation 122
Fig. IV.23. Influence du paramètre A_t sur le comportement local contrainte-déformation 123
Fig. IV.24. Influence du paramètre A_t sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation .. 123
Fig. IV.25. Modélisation du composite (matrice-inclusions cylindriques) 125
Fig. IV.26. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions cylindriques 126
Fig. IV.27. Comportement local contrainte-déformation 128
Fig. IV.28. Evolution du dommage en fonction de la déformation 128
Fig. IV.29.a. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphériques sous chargement statique ... 130

Fig. IV.29.b. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions ellipsoïdales sous chargement statique . 131
Fig. IV.30.a. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphériques sous chargement cyclique ... 132
Fig. IV.30.b. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions ellipsoïdales sous chargement cyclique 132
Fig. IV.31. Géométrie et répartition des inclusions du modèle élément fini 134
Fig. IV.32. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphériques 134
Fig. IV.33. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement statique ... 136
Fig. IV.34. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement cyclique ... 136
Fig. IV.35. Géométrie et répartition des renforts du modèle élément fini 137
Fig. IV.36.a. Comparaison des simulations numériques du composite AL-SIC5 à des données expérimentales 138
Fig. IV.36.b. Comparaison des simulations numériques du composite AL-SIC4.1 à des données expérimentales 139
Fig. IV.37. Evolution du dommage en fonction de la déformation 140
Fig. V.38.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire D 141
Fig. V.38.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire ε 141
Fig. IV.39. État limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (D, ε) 143
Fig. IV.40. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (D, ε) 143
Fig. V.41.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire σ 145
Fig. V.41.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire ε 145
Fig. IV.42. État limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (σ, ε)..... 147
Fig. IV.43. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (σ, ε) 147

LISTE DES TABLEAUX

Tab. II.1. Propriétés effectives en fonction de la perturbation et la propriété du matériau 46
Tab. II.2. Equations pour des conditions aux limites périodiques 47

Tab. III.1 : La moyenne et l'écart-type des variables du problème 81
Tab. III.2 : Résultats du problème 81
Tab. III.3. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite 88
Tab. III.4. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste 90
Tab. III.5. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires 91
Tab. III.6. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités 92

Tab. IV.1. Les propriétés élastiques des constituants du composite en béton 95
Tab. IV.2. Variation du module d'Young du béton en fonction du module du mortier (matrice) et du pourcentage en granulats 96
Tab. IV.3. Les propriétés élastiques des constituants du composite en béton léger 99
Tab. IV.4. Les propriétés élastiques des constituants du mortier de résine 100
Tab. IV.5. Les propriétés élastiques des constituants du mortier de sable 105
Tab. IV.6. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions sphéroïdales) 107
Tab. IV.7. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions sphéroïdales) 110
Tab. IV.8. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales) 113
Tab. IV.9. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales) 116
Tab. IV.10. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions cylindriques) 119
Tab. IV.11. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions cylindriques) 122
Tab. IV.12. Les propriétés élastiques des constituants du composite 124
Tab. IV.13. Les propriétés élasto-plastiques de la matrice du matériau 124
Tab. IV.14. Les propriétés élasto-plastiques des constituants du composite 128
Tab. IV.15. Les propriétés élastiques des constituants du composite 130
Tab. IV.16. Les propriétés élasto-plastiques de la matrice du matériau 130
Tab. IV.17. Les propriétés mécaniques des constituants du composite 132
Tab. IV.18. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (pour une fraction volumique de 15%) 135
Tab. IV.19. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (D, ε) 137
Tab. IV.20. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste 137
Tab. IV.21. Les propriétés mécaniques des constituants du composite (AL-SIC4.1) 139
Tab. IV.22. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (σ, ε) 141
Tab. IV.23. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste du composite (AL-SIC4.1) 141

NOTATIONS PRINCIPALES

$\varphi(\varepsilon)$	Définit le comportement réel des matériaux,
E_{b0}	Module d'élasticité longitudinal du béton à l' origine,
ε_{b0}	Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,
f_{cj}	Résistance à la compression du béton à l'âge j,
k_b et $\grave{k}_b$	Paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin,
E_{b0}	Module d'élasticité longitudinale du béton,
f_{tj}	Résistance du béton à la traction,
ε_{ft}	Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,
ε_{rt}	Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,
ε_{bt}	Déformation de la fibre du béton la plus tendue,
ε_{s1}	Déformation correspondant à la fin du palier plastique,
ε_{s2}	Déformation correspondant à la fin du raffermissement,
ε_{su}	Déformation de rupture,
E_a	Module longitudinal de l'acier,
ε_e	Déformation limite élastique de l'acier,
σ_e	Contrainte limite élastique de l'acier,
ε_u	Déformation ultime de l'acier,
E_a	Module d'Young de l'acier à l'origine,
σ_e	Limite élastique conventionnelle à 2‰,
$0{,}7.\sigma_e$	Contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
σ_p	Contrainte dans l'acier de précontrainte,
ε_p	Déformation dans l'acier de précontrainte,
E_p	Module d'Young à l'origine,
f_{peg}	Limite élastique conventionnelle à 0,1%,
$0{,}9\ .\ f_{peg}$	Contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
$1{,}06\ .\ f_{peg}$	Contrainte de rupture,
$\bar{\varepsilon}_{ij}$	Tenseur des déformations macroscopiques de la structure périodique,
$\bar{\varepsilon}_{ij}.x_j$	Champ linéaire de déplacement,
$u_i'(x_i)$	Fonction périodique d'une cellule à une autre,
k^+ et k^-	Indices pour identifier la k^{ieme} paire de deux surfaces limites parallèles opposées d'un VER,
t^+ et t^-	Tractions correspondant au niveau des surfaces limites,
S_j	La $j^{ième}$ surface,
n_j	La normale unitaire,
u_i	Le $i^{ème}$ déplacement,
$\bar{u}_i$	Le $i^{ème}$ déplacement moyen,
S_j	La limite extérieure du VER,
$\bar{C}_{ijkl}$	Module de rigidité correspondant à l'application du mode de déformation,
γ_{ij}	La déformation de cisaillement mécanique,
E_{11}, E_{22} et E_{33}	Les modules d'élasticité d'extensions le long des directions 1, 2 et 3 respectivement,
ν_{ij} (i, j = 1, 2, 3)	Les coefficients de poisson,
G_{12}, G_{13}, et G_{23}	Les modules de cisaillement,
u_i^P	Variable nodale au nœud P, degré de liberté i,

A_N	Les coefficients qui définissent le mouvement relatif du nœud.
E	La matrice d'Hooke,
D	Variable d'endommagement,
ε^e	Déformation élastique,
ε_{d0}	Déformation seuil d'endommagement,
β	Coefficient pour améliorer le comportement en cisaillement,
A_t , A_c , B_t , et B_c	Paramètres matériaux à identifier,
$\overline{\omega}$	Pourcentage en volume des fibres,
θ_0	Coefficient d'orientation des fibres,
l_r	Longueur de référence,
β	Constante du modèle,
h	Hauteur de la section transversale de béton,
l_f	Longueur d'une fibre,
E_f	Module élastique de l'acier,
E_{b0}	Module initial du béton en compression,
n	Coefficient d'équivalence acier-béton,
τ_u	Contrainte d'adhérence ultime fibre-matrice béton,
ϕ	Diamètre d'une fibre,
F_{ft}	Résistance à la traction du composite,
ε_{ft}	Déformation de fissuration du béton,
ε_{rf}	Déformation de rupture des fibres,
ε_{rt}	Déformation de rupture du composite en traction,
$\varepsilon(x)$	Champ de déformations macroscopique,
q(t)	Vecteur de variables internes au niveau microscopique,
$C^{tan}(t)$	Module tangent dépendant de l'état de déformation et de l'histoire du chargement,
$\bar{C}^{tan}(t)$	Module tangent effectif dépendant de l'état de déformation réelle et de l'histoire du chargement,
$C(x)$	Tenseur élastique,
$\dot{\sigma}(x,t)$	Taux de contrainte,
$\dot{\varepsilon}(x,t)$	Taux de déformation,
$\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}$	Incrément de déformation macroscopique,
$\varepsilon_{n+1}(x)$	Champ de déformations microscopique,
$q_{n+1}(x)$	Vecteur de variables internes,
$A_{n+1}(x)$	Tenseur de localisation,
B(x)	Matrice de dérivées de fonctions de forme,
U^e	Vecteurs de déplacements nodaux,
$\tilde{u}$	Fluctuation de l'incrément de déplacement périodique,
$f_x(x_1,\dots,x_n)$	Densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x,
Φ	Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (m = 0 et σ = 1),
F_{X_i}	Fonction de distribution de la variable x_i,
m_R	Moyennes de la résistance R,
m_S	Moyennes de la résistance S,
σ_R	Ecarts-types de la résistance R,
σ_S	Ecarts-types de la résistance S,
P^*	Point de défaillance le plus probable,
$\alpha^{(k)}$	Vecteur des cosinus directeurs de H en $P^{(k)}$.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

- **Contexte de la thèse :**

Les matériaux composites sont des solides non homogènes et anisotropes. Ils sont le résultat d'une combinaison ou association de deux ou plusieurs constituants dont les caractéristiques sont complémentaires. Cela permet d'obtenir un matériau avec des propriétés mécaniques et physiques meilleures et de haute résistance. La prédiction de leur comportement fait appel aux caractéristiques des différents matériaux constitutifs, ainsi qu'à leur interaction éventuelle pouvant résulter, entre autres, de leur adhérence.

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse au matériau composite à matrice métallique (CMM). Les composites à matrice métallique (CMM) sont constitués d'une matrice métallique renforcée d'inclusion. Les inclusions peuvent être considérées de forme sphéroïdales, ellipsoïdales, cylindriques de diamètre et longueur connu. Elles sont disposées dans la matrice métallique avec un pourcentage en masse prédéterminé. Pour les pourcentages d'inclusions incorporées, de longueur assez courte, peuvent être supposés réparties de façon uniforme ou bien de façon aléatoire dans le volume élémentaire représentatif (VER). La modélisation est effectuée en utilisant les principes de l'homogénéisation périodique. Celle-ci est conduite en trois phases :

- Tout d'abord, on détermine les caractéristiques mécaniques effectives homogénéisées des matériaux composites (matrice comprenant des inclusions de forme sphéroïdale, ellipsoïdale, cylindrique) par une technique d'homogénéisation périodique.

- Il s'agit ensuite d'introduire l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation, c'est-à-dire ; une fois que les caractéristiques mécaniques effectives homogénéisées sont appréciées en l'absence de l'endommagement amorcé par les microfissures et micro cavitations, il est alors possible de revenir au problème de localisation par une démarche de « relocalisation », pour analyser les champs locaux et mettre notamment en jeu des critères de rupture ou d'instabilité.

- Enfin, on effectue une simulation du comportement non linéaire des matériaux composites à comportement (élastique/élasto-plastiques et élasto-plastiques/élasto-plastiques) par une technique d'homogénéisation périodique.

Les résultats numériques obtenus seront comparés à d'autres résultats théoriques (obtenus par d'autres chercheurs) et avec d'autres méthodes de calcul, et ils seront aussi comparés à des résultats expérimentaux.

Une telle analyse est aujourd'hui indispensable, et contribue sans aucun doute à l'élaboration et à la connaissance du comportement mécanique effectif des matériaux composites qui connaissent actuellement un essor important, dans tous les domaines, en particulier les constructions de génie civil.

D'autre part, une telle analyse ne permet pas de prendre en compte les incertitudes aléatoires liées aux propriétés matérielles, aux chargements, ou à la géométrie. C'est pour cela de nos jours, il est indispensable d'élaborer une méthode qui permet d'obtenir des prédictions numériques fiables. Cette nécessité a conduit à faire appel à l'analyse fiabiliste qui est basée sur le calcul probabiliste.

Dans ce présent travail; il y a lieu de développer un outil numérique suffisamment performant et précis pour l'estimation de la fiabilité des structures étudiées. Puis, il y a lieu de combiner entre les techniques de fiabilité et le modèle d'homogénéisation périodique, qui constituent la méthode de fiabilité des structures ou éléments de structures par couplage mécano-fiabiliste.

La démarche suivie dans ce travail est à la fois théorique et numérique. Elle commence par l'adoption d'une méthode d'homogénéisation périodique, et l'introduction de l'endommagement par une technique de relocalisation, suivi de la modélisation numérique du comportement non linéaire de l'homogénéisation périodique pour des matériaux composites hétérogènes élasto-plastique, puis l'adaptation et la modélisation d'un modèle fiabiliste. Enfin, on termine par des applications numériques, où les matériaux étudiés sont des composites biphasés. Quant aux comparaisons, elles sont menées de manière classique sur le comportement local et global, dans les domaines linéaires et non-linéaires.

- **Objectifs :**

Les objectifs principaux de cette thèse se résument comme suit :

- Proposition et adaptation d'un modèle d'homogénéisation périodique appliqué à des éléments de structures ;

- Introduction des modèles d'endommagement dans une méthode d'homogénéisation périodique par une démarche de relocalisation ;

- Modélisation numérique du comportement non linéaire de l'homogénéisation périodique pour des matériaux composites hétérogènes élasto-plastique ;

- Adaptation et modélisation d'une méthode classique de fiabilité ;

- Enfin, après avoir implémenté le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, on procèdera à leur combinaison avec une méthode de couplage indirecte afin d'estimer l'indice de fiabilité des scénarios et d'évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques en fiabilité.

- **Organisation de la thèse :**

Le premier chapitre présente un aperçu sur les matériaux composites à matrice métallique (CMM) ; quelques idées sur les méthodes d'homogénéisation des éléments de structures ; un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement. Enfin, il traite aussi un aperçu sur les méthodes d'analyse de la fiabilité des systèmes mécaniques, permettant d'estimer la fiabilité des éléments de structures, et les différentes lois de comportement des matériaux.

Le second chapitre décrit la formulation et modélisation adoptée, par une technique d'homogénéisation périodique appliquée à des volumes élémentaires représentatifs (VER) de matériaux composites. Il décrit aussi, l'introduction des lois d'endommagement dans la méthode d'homogénéisation périodique par une démarche de relocalisation. Enfin en dernière étape, il décrit la modélisation numérique du comportement non linéaire de l'homogénéisation périodique, pour des matériaux composites hétérogènes élasto-plastique.

Le troisième chapitre décrit la formulation adoptée pour le calcul fiabiliste, et aborde le couplage mécano-fiabiliste dans le cas des structures et des éléments de structures. La méthode adoptée est une technique classique de calcul de la fiabilité des structures et éléments de structures (méthode d'Hasofer-Lind), qui fait appel aux probabilités et aux statistiques. Puis, on a associé la méthode de fiabilité adoptée à l'analyse des problèmes non linéaires par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle mécanique) à l'aide d'une méthode de couplage indirecte.

Enfin, le dernier chapitre présente une série d'exemples d'applications et de confrontations à des résultats expérimentaux et numériques, afin de valider l'implémentation qui a été faite du modèle d'homogénéisation périodique. Les lois d'endommagement sont appliquées, mais aussi l'implémentation numérique du modèle d'homogénéisation périodique non linéaire pour des matériaux composites hétérogènes élasto-plastique. Puis, on a validé l'implémentation du modèle fiabiliste en évaluant la précision des résultats obtenus, par une estimation de leurs fiabilités via le couplage mécano-fiabiliste.

On termine par une conclusion générale et quelques perspectives à ce travail.

CHAPITRE I

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire

I. 1. Introduction 7
I. 2. Aperçu sur les matériaux composites à matrice métallique 8
I. 3. Quelques idées sur les techniques d'homogénéisation 13
I. 4. Un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement 17
I. 5. Fiabilité des éléments de structures 20
I. 6. Les lois de comportement 25
I. 6.1. Modélisation des matériaux 25
I. 6.1.1. Comportement du béton ordinaire 25
I. 6.1.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin 26
I. 6.1.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon Grelat 27
I. 6.1.2. Comportement des aciers 29
I. 6.1.2.1. Comportement des aciers passifs 29
I. 6.1.2.2. Comportement des aciers actifs 31
I. 6.2. Modèles constitutifs 32
I. 6.2.1. Modèle Neo-Hookean compressible 32
I. 6.2.2. Modèle élasto-plastique 32
I. 7. Conclusions 34

I. 1. Introduction :

Le terme « homogénéisation » est un processus qui permet de calculer les propriétés mécaniques effectives, et le terme « localisation » est utilisé pour déterminer la contrainte et la déformation locale (**Suquet** [1]). Lorsqu'on applique une homogénéisation à un matériau, généralement on utilise la loi des mélanges ou les modules d'élasticité homogénéisés sont les moyennes des modules d'élasticité des constituants, pondérés par leurs fractions volumiques. Cette méthode est simple mais peu rigoureuse. On se propose dans ce qui suit de donner un aperçu bibliographique, et une présentation aussi claire que possible du processus d'homogénéisation des milieux continu à structure périodique, afin d'estimer les propriétés mécaniques effectives d'un matériau hétérogène.

La maitrise de la modélisation des dommages, et de ses effets sur les propriétés mécaniques permet une utilisation efficace des matériaux. Le terme « endommagement » désigne la détérioration plus ou moins progressive d'un matériau, due à l'apparition et au développement de micro vides et microfissures. On se propose dans ce qui suit de donner un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement.

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : le rapport entre une charge variable et une force variable déterminée par une approche déterministe. Pour une structure complexe, ces efforts sont mal connus et sa force est incertaine, de sorte qu'il y a toujours un risque de rupture de la structure. Pour ce faire, l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de la fiabilité des systèmes mécaniques, développés au cours des dernières années. Nous exposerons dans ce qui suit une revue bibliographique des connaissances et des travaux portant sur la fiabilité des éléments de structures.

La modélisation des structures était basée sur le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au XIX^{ème} siècle en considérant un matériau à comportement linéaire, homogène et intègre. Or, il n'existe aucun matériau dont le comportement est strictement linéaire élastique lors d'une étude aux états limites ultimes. Depuis quelques années, le développement accéléré des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, a permis d'élaborer des approches plus réalistes pour la simulation du comportement des structures les plus complexes qui exigent une modélisation exacte de la géométrie, des lois constitutives réalistes et une technique de résolution efficace. On se propose dans ce qui suit, un ensemble de lois de comportement permettant la modélisation des comportements non linéaires des matériaux sous un chargement instantané et monotone jusqu'à la ruine.

I. 2. Aperçu sur les matériaux composites à matrice métallique (CMM) :

Les composites à matrice métallique sont beaucoup plus utilisés dans l'industrie automobile et aéronautique, et cela malgré leur coût et leur complexité de mise en forme. Dans l'industrie aéronautique, on a tendance à utiliser les alliages d'aluminium pour leur faible densité et leur bonne résistance à la corrosion. Cependant, ils résistent mal en haut température, alors il y a lieu de les remplacer par des éléments à haute tenue en température. C'est pour cette raison, on a tendance à élaborer de nouveaux matériaux composites, qui sont constitués d'une matrice (alliages d'aluminium) et des renforts (fibres courtes, longues, particulaires).

Les premiers matériaux composites à matrice métallique (CMM), étaient des composites composés d'une matrice à base d'aluminium. Un composite à matrice métallique est constitué d'une matrice métallique dans lequel sont inséré des fibres, des particules ou encore des filaments qu'on appelle trichite (« Whiskers ») [2]. Pour ce qui est des fibres, il existe des fibres courtes et des fibres continues (mono filament ou multi filaments). La figure (Fig. I.1) représente une vue de coupe qui montre la disposition des fibres dans une matrice métallique à mono filament. Quant à la figure a coté, elle illustre une des fibres à mono filament, le cœur en noir s'agit de carbure de silicium qui est entouré de bores.

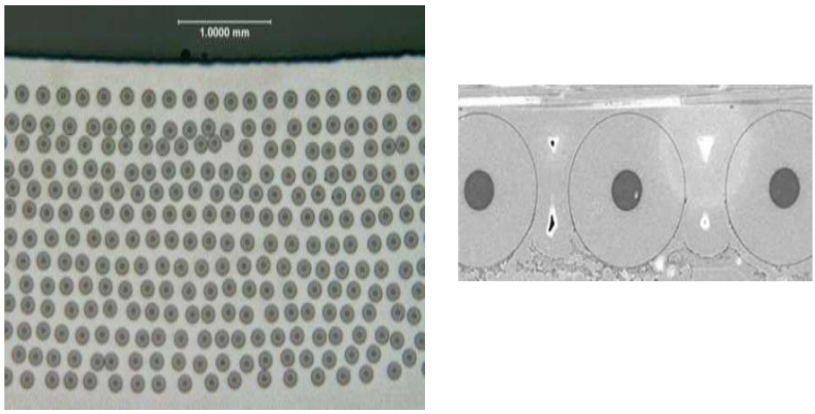

Fig. I.1. Vue de coupe d'un composite à matrice métallique à mono filament [2].

Les composites contenant un certain pourcentage de fibre (15% à 25%), généralement contiennent du carbure de silicium (SiC) ou d'alumine. Ce type de matériau composite améliore la résistance maximale, la rigidité spécifique, la résistance à haute température et réduit le coefficient d'expansion thermique. Comme, il possède des inconvénients, le composite est fragile par rapport à la matrice pure absorbe moins d'énergie à la déformation, aussi les procédés de

transformation et de mise en forme sont plus couteux que ceux des polymères ou encore ceux des métaux simples. Par ce fait, on retrouve peu d'applications utilisant des fibres discontinuent et presque aucune utilisant des fibres [3].

Les composites à matrice métallique (CMM) utilisent généralement un métal résistant et rigide constitué de renfort (fibres), ce qui lui donne un comportement ductile. Parmi les avantages de la matrice pure et des composites à matrice polymérique [4] : rigidité ; résistance à la traction ; résistance thermique ; résistance à la fatigue ; résistance à l'impact ; aucune moisissure. Par contre, parmi leurs inconvénients : coût de fabrication ; matériau peu connu ; difficile à former ; problème de corrosion.

A partir des années (1960-1965), les matériaux composites à matrice métallique (CMM) ont été développés, où leurs applications étaient exclusivement orientées vers l'aéronautique et l'espace. Puis dans les années 80, de nouvelles fibres céramiques ont permis de relancer des travaux dans ce domaine, plus particulièrement des exemples d'applications industrielles ont été développés dans l'automobile et l'électronique [5].

Sachant que les matériaux composites à matrice métallique (CMM) sont constitués d'une matrice métallique et aussi des renforts. Alors, le choix des métaux ou alliages métalliques et renforts utilisés dans la fabrication des composites à matrice métallique (CMM), ils sont fonction de leurs propriétés spécifiques dans l'état non renforcé.

Les métaux les plus couramment utilisés comme matrices sont l'aluminium, le titane et le magnésium, et les inclusions qui sont généralement employées comme renforts sont les particules de carbure de silicium (SiC) et d'oxyde d'aluminium (Al2O3), ou parfois de borure de titane (TiB2), de carbure de titane (TiC) ou de carbure de bore (B4C). Les procédés de fabrication des composites à matrice métallique (CMM) dépendent de l'état que se trouve la matrice lors de l'introduction des renforts, elle peut avoir un état liquide (forgeage liquide, fonderie moyenne pression), ou un état semi-solide ou un état solide (métallurgie des poudres). Les composites à matrice métallique (CMM) présentent généralement de bonnes caractéristiques mécaniques spécifiques, une bonne résistance en température et aux chocs thermiques ainsi qu'une bonne résistance à l'usure et à l'abrasion ([6], [7]), et cela suivant la nature des éléments dispersés contenus dans la matrice métallique.

La plupart des recherches menées dans le domaine des composites à matrice métallique (CMM), sont généralement orientées vers le développement des matrices à base d'alliages légers de type (Al, Mg, Ti), comme il existe quelques travaux orientés sur les composites à matrice métallique (CMM) à base de matrice d'acier qui sont essentiellement étudiés pour leur résistance à l'abrasion. Pour ce qui est de la matrice la plus utilisée dans les composites à matrice métallique (CMM), on trouve qu'il s'agit de la matrice d'aluminium, qui présente une faible masse volumique et des propriétés mécaniques et physiques relativement élevées.

Par contre, pour ce qui est du renfort le plus utilisé, il s'agit du renfort (SiC) [8], bien qu'on utilise également des renforts de type (Ai203, B4C). Le choix du type de renfort se fait en fonction des paramètres principaux suivants :

- Forme et dimensions (Propriétés géométriques);
- Module d'Young et résistance à la traction (propriétés mécaniques) ;
- Densité, coefficient de dilatation thermique (Propriétés physiques);
- Compatibilité du renfort avec la matrice ;
- Coût du renfort ;

Les composites à matrice métallique (CMM) constituent un vaste sujet de recherche et beaucoup de travaux ont été faits, et cela en étudiant le comportement élasto-plastique du composite, tout en tenant compte des facteurs microscopiques (fraction volumique, le rapport d'élancement, les différents types de fibres (cylindriques, sphériques, ellipsoïdales), et la répartition des fibres). On peu cité, quelques travaux réalisés portant sur le comportement mécanique des composites à matrice métallique (CMM) :

Une étude centrée sur un composite (AL/SiCw) a été menée par **Baptiste** ([9], [10]) par une approche micro-macro, aboutissant à des critères macroscopiques d'endommagement qui, rendaient compte de l'influence des paramètres microstructuraux.

Birt et Johnson [11] ont étudié l'influence de la nature des renforts (particules ou whiskers) sur les propriétés mécaniques d'un CMM (A-U4G + 15 % Vol. SiC) et ils ont comparé les propriétés de celui-ci à celles de la matrice. Où, ils ont trouvé une augmentation simultanée de la résistance en traction et du module d'Young par rapport à l'alliage non renforcé, aux dépens de la ductilité.

Arsenault et al. [12] ont étudié l'influence de la taille des particules sur la limite d'élasticité à 0,2% sur un CMM (1100 + 20 %Vol. SiCp). Cette étude met en évidence une diminution de l'effet durcissant avec l'augmentation de la taille des particules.

Hirano [13] a étudié l'influence du sens de prélèvement de l'échantillon (L ou T) sur les propriétés mécaniques d'un alliage de type 7075 renforcé par (17,1 %Vol. SiCw extrudé). Ces résultats montrent le caractère fortement anisotrope des CMM renforcés par des inclusions (whiskers). Cette étude montre que la résistance du composite est plus grande dans le sens longitudinal (L) que dans le sens transversal (T), et elle a pour but d'orienter les inclusions (whiskers) parallèlement à une direction privilégiée.

Bourgeois et al. [14] ont étudié les mécanismes d'endommagement d'un CMM (A356 +20% Vol. SiCp). Ils ont observé principalement, lors d'un essai de traction monotone dans l'enceinte d'un microscope électronique à balayage, la rupture des panicules dans les zones les plus sollicitées.

Ribes et al. [15] ont étudié l'influence de l'oxydation des particules par chauffage à l'air pendant 2 heures avant élaboration, sur un CMM (A-S7G03 + 10% Vol. SiCp-T4); les particules étaient recouvertes d'un film de 50 nm de SiO_2. L'étude du faciès de rupture a montré un comportement différent entre le matériau avec particules non oxydées (forte adhésion particules/matrice) et celui avec les particules oxydées (faible adhésion particules/matrice avec présence de composés intermétalliques à l'interface).

Logsdon et Liaw [16] ont étudié l'influence de la nature du renfort (particules ou whiskers) sur la ténacité d'un CMM (6061 + 25 %Vol. SiC- T6). Où, ils ont montré que la ténacité du composite renforcé par particules est nettement plus élevée que celle du composite renforcé par les inclusions whiskers.

Morimoto et al. [17] ont étudié la résistance au fluage d'un CMM (6061 + 15% Vol. SiCwT6) et de la matrice à une température de 300°C. Le composite a été obtenu par (M/P), puis extrudé. Ils ont constaté que la présence des SiCw a amélioré de façon significative la résistance au fluage par rapport à celle de l'alliage non renforcé, mais que cette amélioration est surtout effective dans le domaine des faibles vitesses de déformation.

Masuda et al. [18] ont étudié la résistance à la fatigue de plusieurs CMM : un (2024+ SiCw) élaboré par (M/P) puis extrudé et traité T6 et des CMM A356 (A-S7G03) + SiCp et A357 (A-S7G05) + SiCp obtenus par moulage et traités T6. Pour

chaque type de composite, les teneurs de (10% Vol. et 20% Vol.) en renfort ont été étudiées. Où, ils ont constaté que dans le cas de composites renforcés par (SiCw) que la résistance en fatigue augmente avec la teneur en renforts et que les composites (2024 + SiCw- T6) sont plus résistants en fatigue que la matrice.

Llorca et al. [19] ont étudié l'influence de la fraction volumique sur le durcissement cyclique d'un composite (A-U3) renforcé par 6, 13 et 20% Vol. SiCp, élaboré par fonderie ainsi que sur celui de l'alliage non renforcé. Ils ont observé, que pour un même niveau de déformation plastique, un durcissement d'autant plus important que le taux de renfort est élevé.

Hirano [20] a étudié l'influence du sens de prélèvement (sens (L-T) ou (T-L)) sur la résistance à la fissuration d'un CMM (2025 + 21 %Vol. SiCw extrudé). Où, il a montré la forte anisotropie du composite vis-à-vis du comportement en fissuration par fatigue ; dans le sens (L-T) les vitesses de propagation sont nettement plus faibles comparées à celles en sens (T-L), surtout à de faibles vitesses de propagation (notamment près du seuil).

Enfin, **Toitot** [21] a étudié le phénomène de rochet thermique pour un alliage d'aluminium (6061) renforcé de fibres de (SiC), induit par des cycles en température (inférieure à 200° C).

I. 3. Quelques idées sur les techniques d'homogénéisation :

Un matériau paraît homogène à l'échelle macroscopique. Pourtant quand on l'étudie à l'échelle microscopique, on a affaire la plupart du temps à un matériau hétérogène (structure granulaire, existence de plusieurs phases, précipités...).

Dans ce paragraphe une revue non exhaustive est proposée des modèles de l'approche micro-mécanicienne, elle traite les modèles de comportements linéaires et non-linéaires. Dans cette étude nous nous limitons principalement aux comportements élastiques et élasto-plastiques non-linéaires.

Il existe plusieurs modèles d'homogénéisation analytiques, qui permettent de prédire les propriétés d'élasticité mécaniques effectives d'un matériau hétérogène biphasé à partir des propriétés de ses constituants, et qui sont proposés dans la littérature. Les premiers travaux introduisant des méthodes d'homogénéisations spatiales basées sur des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique ont été menés par (**Eshelby** [22], **Hashin** [23], **Hill** [24], **Mori et Tanaka** [25]), permettant de définir un comportement macroscopique entre des quantités moyennes "effectives".

Les travaux d'**Eshelby** [26] ont servi de base au modèle de **Mori et Tanaka** [25], et au schéma auto-cohérent introduit par **Hill** [27].

Mori et al. [25] ont proposé une méthode de calcul de la contrainte moyenne et de l'énergie élastique stockée dans la matrice d'un matériau contenant une fraction volumique d'inclusions. **Benveniste** [28] à interpréter ce modèle ; le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice, alors le volume élémentaire représentatif (VER) est soumis a l'infini à la déformation moyenne de la matrice dans le composite.

Ces modèles d'homogénéisation semi-analytiques ne permettaient pas de remonter aux propriétés locales de la solution. Alors, c'est par rapport à ce dernier et par la complexité des phénomènes microscopiques ont donné naissance à des méthodes dites "Unit Cell Methods" introduite par (**Christman et al** [29], **Tvergaard** [30], **Sluis et al** [31]).

L'approche micromécanique permet de donner un comportement global des matériaux composites à partir des caractéristiques de leurs constituants et cela par l'analyse d'un volume élémentaire représentative (VER) suivant les modèles (**Aboudi**

[32]; **Nemat-Nasser et Hori** [33]), mais aussi permet d'étudier les divers mécanismes tels que l'initiation et la propagation des dommages.

La première méthode d'homogénéisation des milieux périodiques a été initiée par Sanchez-Palencia (**Sanchez-Palencia** [34], [35]), et qui est basée sur l'analyse asymptotique.

Ponte-Castaneda [36] a proposé une méthode d'homogénéisation du second ordre pour déterminer la loi de comportement effectif de matériaux composites non linéaires poreux et renforcés.

Krôner [37] qui a initié les travaux d'homogénéisation des composites élasto-plastiques, puis suivi par **Budiansky et Wu** [38] qui ont proposé un modèle auto-cohérent pour les poly-cristaux dans lequel les interactions entre les phases sont seulement élastiques. Cela a conduit à des réponses trop raides.

Hill [39] a proposé une approche qui permet de linéariser les lois de comportement locales écrites en forme de taux, et a aussi introduit un module tangent instantané afin de calculer la réponse mécanique des matériaux élasto-plastiques par une procédure itérative. Pour des non-linéarités élevées, les prédictions deviennent très proches d'une limite supérieure. **Berveiller et Zaoui** [40] ont proposé une loi d'interaction isotrope à la place de l'anisotropie utilisée par Colline.

Les premiers modèles simples ont été proposés par **Voigt** [41] pour un chargement, et en déplacement imposé par **Reuss** [42] pour une traction imposée. Ces modèles, fournissent respectivement les bornes supérieures et inférieures des constantes élastiques effectives. **Voigt** [41] et **Reuss** [42] ont tous deux proposé différentes approximations simples pour les données matérielles effectives élastiques linéaires hétérogènes des matériaux, qui ont été la base d'un résultat primaire par **Hill** [24].

Hashin et Shtrikman ([43], [44], [45]) ont proposé des limites plus serrées pour l'élasticité linéaire, ils sont basés sur des principes variationnels. Ou, ils engagent le principe de l'énergie potentielle minimale, et le principe de l'énergie potentielle complémentaire minimale.

L'introduction du modèle d'**Eshelby** ([22], [26]) au milieu du 20ème siècle est l'une des principales réalisations dans l'approche analytique pour prédire les propriétés matérielles efficaces de microstructures hétérogènes en plus des précédentes bornes.

De nombreux modèles sont basés sur cette analyse qui remonte aux travaux d'**Eshelby** ([22], [26]) qui a trouvé une solution générale pour une particule ellipsoïdale matrice infinie en élasticité linéaire.

Le modèle de **Mori et Tanaka** [25] est adapté aux matériaux composites avec une fraction volumique d'inclusion modérée. Pour plus de détails sur sa formulation et son implémentation numérique voir les travaux de **Doghri et Ouaar** [46].

Le modèle **Halpin et al.** [47] initialement développé pour les composites de fibres continues et qui a été dérivé du modèle auto-cohérent de **Hermans** [48] et **Hill** [49]. Ce modèle permet de prédire les constantes élastiques pour les composites alignés à fibres courtes.

La plupart des méthodes numériques sont développées uniquement pour des lois matérielles linéaires et pour de petites déformations. Tout récemment et en raison de l'augmentation en puissance de calcul disponible, un ensemble de méthodes pour traiter les problèmes d'élasticité non linéaire et le comportement de matériau non-linéaire a été développé. Où, le travail théorique peut être trouvé dans les travaux de (**Huet** ([50], [51]) et **Torquato** [52]).

Zohdi et Wriggers ([53], [54]) ont travaillé sur le calcul géométrique linéaire de l'homogénéisation et éventuellement sur des microstructures matériellement non-linéaires. **Döbert** [55] a travaillé sur les matériaux renforcés de fibres, y compris la délamination à de petites couches. **Larsson et Runesson** [56] ont travaillé sur des problèmes généraux en 2D avec des conditions aux limites de Dirichlet remplies uniquement dans l'intégrale.

Schröder [57], **Miehe** [58], **Miehe et al.** [59] ont travaillé sur l'homogénéisation à des contraintes finies et éventuellement à un comportement inélastique. Cette approche donne une rigidité tangente effective dépendante de la charge et de cette façon est applicable aux méthodes multi-échelles. Quant aux méthodes à plusieurs échelles ont été étudiées par **Ortiz** [60].

Il existe plusieurs méthodes d'homogénéisation, parmi les théories d'homogénéisation les plus utilisées : déformation homogène au contour (KUBC)[1], contrainte homogène au contour (SUBC)[2] et homogénéisation périodique (PBC)[3], en petites perturbations et grandes déformations.

Les problèmes (KUBC), (SUBC) et (PBC) nécessitent une résolution numérique, dans la plupart des cas, faisant appel à des techniques de discrétisation par la

méthode des éléments finis. Dans le cadre des milieux biphasés macroscopiquement isotropes, un certain nombre de bornes et d'estimations analytiques ou semi-analytiques sont disponibles dans la littérature, donnant les modules de compressibilité et de cisaillement effectifs.

Pour des comportements non linéaires des différents constituent, il y a lieu d'adaptées les différentes méthodes présentées. La loi de comportement effectif devient alors non linéaire, dépendante de l'histoire et/ou du niveau de chargement. On peut toujours, supposant l'existence d'un Volume Elémentaire Représentatif (VER), résoudre les problèmes d'évolutions associés aux méthodes (KUBC), (SUBC) et (PBC) avec les comportements non-linéaires des phases, et ainsi déterminer numériquement la réponse moyenne.

(1). Kinematic Uniform Boundary Conditions

(2). Static Uniform Boundary Conditions

(3). Periodic Boundary Conditions

I. 4. Un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement :

Kachanov [61] et **Rabotnov** [62] ont initié la théorie d'endommagement, où elle est décrite par une variable interne scalaire schématisant la variation relative de la rigidité du matériau, cette théorie est limitée au cas isotrope. Puis, plusieurs travaux de recherche ont été menés par (**Chaboche** [63], **Cordebois** [64], **Lemaitre et al.** [65]).

L'idée de base consiste à introduire une variable représentant la détérioration de la matière. Le cas monodimensionnel est bien connu ainsi que le cas tridimensionnel avec endommagement isotrope. Cependant, les essais expérimentaux ([66], [67]) montrent que l'endommagement est essentiellement, dans son apparition comme dans son évolution, un phénomène anisotrope.

Mazars [66] propose de schématiser l'endommagement par deux variables qui sont liées à l'influence de la sollicitation de traction ou de compression dans son évolution.

Kachanov [68] considère dans son premier modèle que l'endommagement comme un scalaire. Différents chercheurs ont suggéré des modifications du modèle scalaire, et que le modèle scalaire correspond parfaitement pour des matériaux très ductiles qui sont caractérisés par un endommagement sous forme d'une multitude de micro vides sphériques.

Krajcinovic et Fonseka [69] se sont intéressés du passage aux variances d'ordre supérieur. **Davidson et Stevens** [70] ont proposé des modèles thermodynamiquement cohérents basés sur une représentation vectorielle de l'endommagement, ou ils définissent les défauts planaires "planars voids" par un vecteur normal au plan de la fissure et de grandeur égale à sa surface.

Vakulenko et Kachanov [71] établissent la première caractérisation de l'endommagement sous forme d'un tenseur du second ordre, qui dénotent qu'une fissure peut évoluer à la fois en mode I ou modes II et III. Les modèles d'endommagement à tenseur du second ordre ont été développés par plusieurs travaux. On a également envisagé des tenseurs de 4^{éme} ordre **Chaboche** [72], voir du 8^{éme} ordre ([73], [74]).

Ortiz [75], **Ladeveze** [76] ont introduit le tenseur de rigidité connue variable interne pour des matériaux isotropes comme le béton, le développement de ce dernier modèle conduit à définir un endommagement surfacique et un autre volumique.

Ibenslimane et Bosc [77] ont mis en évidence l'influence du mode de chargement et de la présence d'un gradient de déformation pour la définition d'un critère de résistance expérimental représentatif. Il s'appuie sur le critère de Yamada-Tada établi à partir d'essais en torsion sur des éprouvettes cylindriques soumises à la torsion accompagnée d'une compression.

Ketata [78] propose de partir d'une écriture basée sur la notion des contraintes effectives appliquer à un cas de sollicitation en traction-torsion. On obtenant un comportement symétrique en traction et en compression, ce qui a permis de proposer une représentation des contraintes effectives contenant le signe des contraintes principales et une variable d'endommagement scalaire pour agir différemment en traction et en compression. La caractéristique d'endommagement d'un matériau représente la réduction de la rigidité du matériau.

Lemaitre [79] a proposé un modèle d'endommagement isotrope, basé sur l'hypothèse de la définition d'une contrainte effective qui est plus grande que la contrainte de Cauchy et prend en compte la réduction de l'aire du matériau qui résulte de la micro-fissuration.

Chaboche [80] a proposé un modèle d'endommagement où le taux de l'endommagement accumulé est une fonction explicite de la vitesse de déformation. Ces modèles peuvent être calibrés pour caractériser la réponse du béton soumis à un chargement uniaxial et cyclique.

Rosende et Martins [81] ont proposé un modèle d'endommagement anisotrope, et dans lequel différentes règles d'endommagement sont proposées, pour caractériser l'endommagement dans les modes déviatorique et volumétrique de la réponse.

Govingee et al. [82] ont aussi proposé un modèle d'endommagement anisotrope, et ont proposé dans leur modèle une surface de rupture caractérisant le domaine initial élastique. Un état de contrainte d'essai, analogue à celui proposé en formulation plastique, en dehors du domaine élastique indique l'initiation de l'endommagement du matériau.

Chaboche et Lemaître [83] propose un modèle ou tout comportement à une déformation unidimensionnel ou tridimensionnel, d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective. En d'autres termes, l'équivalence en déformation définit la contrainte effective comme étant la contrainte qu'il faut appliquer à l'élément de volume vierge, supposé homogène pour obtenir la même

déformation que celle provoquée par la contrainte nominale appliquée à l'élément de volume endommagé.

La Borderie [84] a proposé un modèle qui est adapté à la description de certains phénomènes observés au cours de chargements cycliques (la diminution de la raideur du matériau, la restauration progressive de la raideur qui se produit à la fermeture de la fissuration et les déformations irréversibles, induites par l'endommagement).

Jason [85] a proposé un modèle élasto-plastique endommageable, basé sur le principe d'une contrainte effective plastique, il simule à la fois la diminution de la raideur élastique et l'évolution des déformations plastiques. Dans cette loi de comportement, l'évolution de l'endommagement est décrite par le modèle isotrope développé par **Mazars** [86]. La plasticité est décrite avec l'aide d'une surface seuil continue, inspirée d'**Etse et Willam** [87] et modifiée par **Crouch et Tahar** [88].

I. 5. Fiabilité des éléments de structures :

C'est en 1928, que la notion de coefficient de sécurité était dépourvue de sens réel dans le cadre d'un forum international par **Streletskyi** [89].

De la conception des structures on, a pu relever les contraintes admissibles et cela en diminuant le coefficient de sécurité. Le recourt à des outils traitant la variabilité des charges et des résistances et leur bonne définition, permet d'améliorer les règles de conception basées sur le principe des contraintes admissibles.

En 1926, **Mayer** [90] proposa d'utiliser en conception les valeurs moyennes et les variances des variables.

Rjanitzyne ([91], [92]) introduit la notion de l'indice de fiabilité qui est définie comme l'inverse du coefficient de variation d'une fonction de performance.

Calgaro [93] avaient soulevé deux problèmes par la formulation de la sécurité suivant le principe des contraintes admissibles : remplacer les critères de contraintes admissibles par d'autres critères, rationaliser les modalités d'introduction de la sécurité. C'est pour cela de nombreux ingénieurs ont tenté d'aborder le problème sous un angle différent en définissant la sécurité par un seuil de probabilité.

Cornel [94] a introduit un indice de fiabilité à partir duquel **Hasofer et Lind** [95] montra la possibilité de déduire des coefficients de sécurité. Cette procédure a permis l'émergence de la démarche semi-probabiliste de la sécurité des structures, elle est présente dans la plupart des règlements de calcul des ouvrages neufs.

L'introduction des coefficients partiels de sécurité dans les règlements et codes de calcul, est due à la méconnaissance du comportement réel des structures vis-à-vis des actions extérieures (séisme, variation de la charge d'exploitation), ces coefficients empiriques sont déterminés et calibrés par le retour d'expérience (**Lemaire** [96]). Ce qui permet de faire un dimensionnement sûr malgré les incertitudes liées aux approximations des modèles, aux aléas sur les grandeurs, et aux phénomènes non pris en compte. Un dimensionnement basé sur une approche déterministe ne permet pas d'évaluer les risques liés à la défaillance d'une structure, donc sa fiabilité (**Peyras et al** [97]).

Aujourd'hui devant la nécessité de construire des ouvrages plus fiables et économiques (**Cremona** [98]), les ingénieures du domaine ont développé un nouveau

concept de sécurité basé sur la théorie de la fiabilité structurale et de ses outils de calcul qui devrait satisfaire ses exigences.

L'évaluation de la performance des ouvrages de génie civil, constitue un enjeu majeur des maitres d'ouvrage. Cette action vise à quantifier l'écart entre les modes de fonctionnement acceptables et les modes de fonctionnement à éviter de ces structures, et cela en fonction des caractéristiques de résistance et des actions susceptibles de conduire à sa défaillance (**Dehmous** [99]). Cette action est appelée aussi évaluation de la fiabilité structurelle.

Carvajal et al. [100] ont proposé une méthode d'évaluation de la probabilité qu'un système soumis à des aléas (séisme, vent, fatigue,…), soit capable de satisfaire l'intégralité de ces besoins et ce pour une durée de vie donnée, qui est décrite comme suite :

- Définir un modèle mécanique déterministe adapté au problème traité. Ce modèle intègre la géométrie de la structure, les propriétés mécaniques des matériaux et les conditions aux limites.
- Identifier les paramètres aléatoires du modèle et de les caractériser par des lois de probabilité adéquates.
- Définir la ou les fonctions d'états limites dont on veut évaluer la probabilité qu'ils soient dépassés.
- Evaluer des probabilités de dépassement des états-limites et études de sensibilité éventuelle.

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : le rapport entre une charge variable et une force variable déterminée par une approche déterministe. Pour une structure complexe, ces efforts sont mal connus et sa force est incertaine, de sorte qu'il y a toujours un risque de fracture de la structure. Pour ce faire, l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de la fiabilité des systèmes mécaniques développés au cours des dernières années.

Dans l'étude de la fiabilité des structures, les méthodes FORM et SORM [101] sont des méthodes d'approximation permettant de déterminer un point de conception de structures particulières et donc d'estimer la probabilité de défaillance. Ces méthodes sont donc intrinsèquement liées à ce fameux point de conception qui permet de définir la distance entre le point de conception et le point de surface de rupture dans l'espace d'origine. Cette distance est appelée : fiabilité ou indice de sécurité.

Ravindra et al. [102] ont utilisé la méthode dite de l'indice de sécurité pour concevoir des poutres en béton armé et des éléments en acier de charpente.

Karamchandani et Cornell [103] ont développé une méthode qui rapproche la sensibilité des paramètres par rapport aux paramètres de distribution qui peuvent prendre en compte l'effet de second ordre, sur la base de la méthode SORM et de la méthode des différences finies.

N. Vu-Bac et al. [104] ont effectué une analyse de sensibilité (AS) basée sur leurs résultats MD pour quantifier l'influence de paramètres d'entrée incertains sur la limite d'élasticité et le module d'élasticité prévus. L'analyse de sensibilité (SA) est basée sur des modèles de surfaces de réponse (régression polynomiale et des moindres carrés mobiles). Ils ont utilisé des dérivées partielles (SA locale) et des méthodes basées sur la variance (SA globale). Dans cette étude un coefficient de détermination (COD) est calculé pour permettre une estimation de la qualité de l'approximation.

N. Vu-Bac et al. [105] ont utilisé des simulations de dynamique moléculaire (MD) ou ils ont étudié l'effet du rayon de nanotubes de carbone à paroi simple (SWCNT), de la température et de la vitesse de traction sur la contrainte de cisaillement inter faciale (ISS). Pour l'efficacité de calcul, l'analyse de sensibilité (SA) est basée sur des modèles de substitution (régression polynomiale, moindres carrés mobiles (MLS), et hybride en régressions polynomiales quadratiques et MLS).

N. Vu-Bac et al. [106] ont proposé un cadre stochastique basé sur des méthodes d'analyse de sensibilité (AS) pour quantifier les paramètres d'entrée clé, utilisés pour évaluer le module d'Young du polymère (époxy) nano composite d'argile (PCN). Ils ont comparé le calcul des indices de sensibilité, et le temps de simulation entre le modèle de régression de krigeage (KR) et le modèle de régression quadratique (QDR).

N. Vu-Bac et al. [107] ont réalisé une analyse de sensibilité consistant à quantifier l'influence de paramètres d'entrée incertains sur des sorties de modèles incertains. Les résultats sont basés sur une fonction de densité de probabilité (PDF) fournie pour les paramètres d'entrée. Il a été démontré que le modèle de régression spline est plus robuste que le modèle de régression polynomiale. Il est nécessaire de prendre en compte les modèles de régression spline pénalisés en utilisant des pénalités globales séparées ou des pénalités globales distinctes afin de rapprocher les données observées.

N. Vu-Bac et al. [108] ont utilisé un modèle hiérarchique multi-échelle reliant quatre échelles (nano, micro, méso et macro) pour étudier l'effet des entrées incertaines du modèle sur le module d'Young macroscopique et le coefficient de Poisson. Ils ont utilisé des méthodes d'analyse de sensibilité (SA) pour estimer l'effet des entrées corrélées (dépendantes) incertaines sur le module d'Young et le coefficient de poisson, pour le modèle multi-échelle dans le contexte d'une analyse de sensibilité (SA) globale. Les estimations des paramètres corrélés sont effectuées pour les indices de sensibilité du premier ordre et de la sensibilité totale.

Les méthodes fiabilistes peuvent être classées en fonction de la sophistication dans l'évaluation de la fiabilité comme suite ([109], [110]) :

- Méthodes de niveau I :
  Caractérisent des variables aléatoires qui sont représenté par une seule valeur (valeurs caractéristiques) correspondant à une valeur nominale, à l'espérance mathématique [111], qui est évaluée à partir de l'appréciation du concepteur. Afin de conserver une marge entre ces valeurs caractéristiques, il est introduit un facteur de sécurité. Cette méthode correspond à une démarche déterministe traditionnelle.

- Méthodes de niveau II :
  C'est une méthode qui est la plus utilisée dans les codes de calcul, caractérisé par ses propriétés de distribution : moyenne et écart-type. Ces variables de base peuvent généralement être le chargement, la résistance, la géométrie, les propriétés des matériaux et toute autre variable incertaine sensible au mode de défaillance. Généralement ces variables de base suivent une distribution normale. **Cornell** fut le premier à fournir un indice de la fiabilité pour ce type de problème caractérisant la marge normale implicite entre la résistance et la sollicitation [112], il est arrivé que pour l'appréciation de probabilités de défaillance très faibles, la distribution normale ne soit plus adaptée pour la caractérisation des variables étant donnée la forte influence de la modélisation des queues de distribution des paramètres incertains sur les résultats de calcul.

- Méthodes de niveau III :
  Ces méthodes prennent en compte des variables aléatoires quelconques. Puis, pour évaluer la fiabilité par des méthodes d'approximation (FORM / SORM) ou de simulation (Intégration numérique, Monte-Carlo), il y a lieu d'abord de faire des transformations de l'espace physique vers un espace normal.

- Méthodes de niveau IV :
  Ces méthodes permettent de faire l'optimisation de la fiabilité d'un système par rapport à son dimensionnement, à sa maintenance et sous des contraintes économiques pour des inspections. Dans la caractérisation des variables aléatoires, des fonctions de pénalités peuvent être incorporées.

Une méthode fiabiliste permet d'estimer la probabilité de défaillance d'un système soumis à un certain chargement externe, et la probabilité de défaillance d'un système qui est représenté par une fonction d'état limite (**Ditlevsen et al.** [113]). Dans une approche déterministe, certains facteurs de sûreté peuvent être évalués pour assurer un certain niveau de fiabilité (**Ardillon et al.** [114]).

La fonction d'état limite peut ne pas être explicite, alors pour cela il y a lieu d'utiliser des méthodes simplifiées (approximation de la réponse) basées sur l'analyse par élément fini comme par exemple dans **Rahman** ([115], [116], [117]). Quant au couplage entre les méthodes fiabilistes et la méthode des éléments finis, plusieurs travaux ont été faits par **Rahman et Kim** [116], **Lemaire** [118], **Mohamed et al.** [119] en utilisant différentes méthodes. Aussi, des repères entre différents codes de fiabilité et d'éléments finis ont été réalisés par **Hornet et al.** [120].

Der Kiureghian et al. ([121], [122], [123]) ont initié ces travaux dans le contexte de l'analyse par élément fini, et ont été suivis par de nombreuses recherches (**Lemaire et al.** ([118], [124]), **Sudret et al.** ([125] - [131])). Puis des méthodes de fiabilité par élément fini ont été appliquées dans des contextes industriels par plusieurs travaux de recherche (**Imaia et al.** [132], **Frangopol et al.** ([133], [134]), **Pendola et al.** [135], **Mohamed et al.** [136], **Sudret et al.** [131]).

I. 6. Les lois de comportements :

I. 6.1. Modélisation des matériaux :

En élasticité non linéaire, les contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante :

$$\sigma = \varphi(\varepsilon) \qquad \text{(I.1)}$$

Ou :

$\varphi(\varepsilon)$: définit le comportement réel des matériaux.

Nous allons donc présenter les lois des comportements réels retenus pour le béton et l'acier.

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contrainte-déformation ci-dessous :

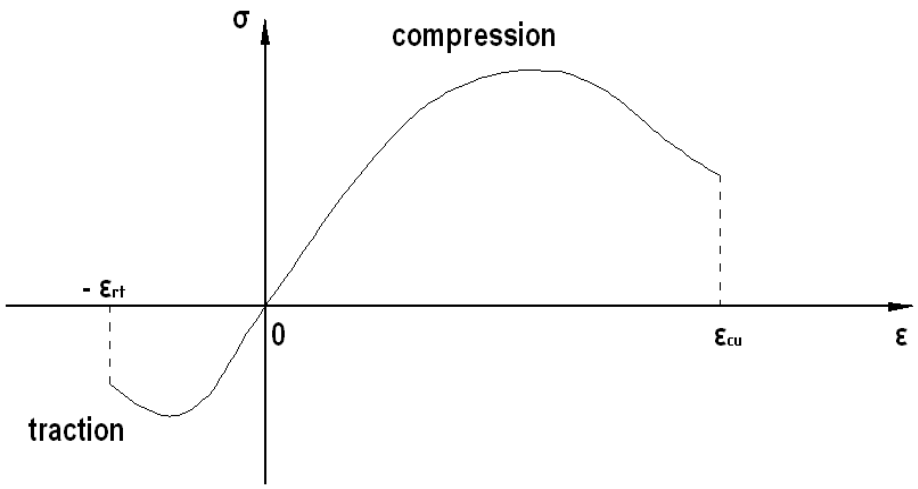

Fig. I.2. Diagramme représentant la loi de comportement du béton [137].

Cette courbe se caractérise par la valeur de $\varphi(\varepsilon)$ qui est considéré comme nulle au-delà de la rupture du béton en compression et en traction (respectivement pour des déformations ε_{cu} et $-\varepsilon_{rt}$).

I. 6.1.1. Comportement du béton ordinaire :

Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton. Nous adoptons ici la loi de **Sargin** [138] pour le comportement du béton ordinaire en compression, et le modèle de **Grelat** [139] pour le comportement du béton ordinaire en traction.

I. 6.1.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [138] :

Les relations qui lient les contraintes aux déformations instantanées des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque. Ces lois sont définies en fonction des paramètres : E_{b0} , f_{cj} , ε_{b0} , ε_u .

L'aspect qualitatif de la loi de comportement contrainte-déformation, prend la forme de la courbe représentée ci-dessous :

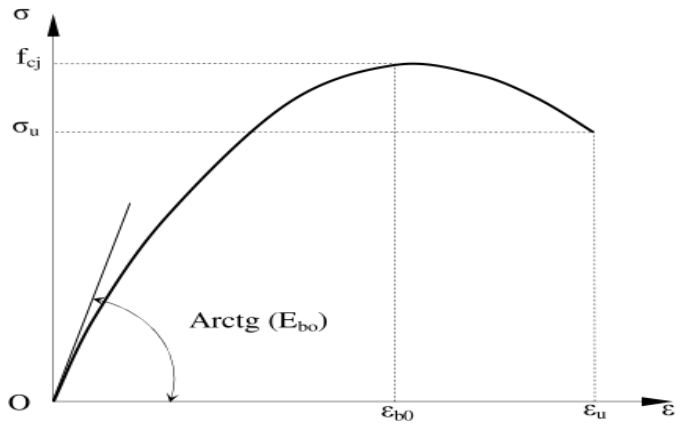

Fig. I.3. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [138].

Ce modèle est essentiellement utilisé dans le calcul des structures en béton armé et précontraint, et présente deux branches :

- Branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un module tangent initial E_{b0}, et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_{cj} ;

- Branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

En admettant un comportement élastique non linéaire, la contrainte est décrite par la loi de SARGIN suivante :

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b.\bar{\varepsilon}+(\grave{k}_b-1).\bar{\varepsilon}^2}{1+(k_b-2).\bar{\varepsilon}+\grave{k}_b.\bar{\varepsilon}^2} \qquad (I.2)$$

Tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \quad \text{et} \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{cj}} \quad \text{et} \quad E_{b0} = 11000.\sqrt[3]{f_{cj}}$$

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton a l'origine,

ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j,

k_b et $\grave{k}_b$: Sont des paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin.

Le paramètre $\grave{k}_b$ influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante :

$\grave{k}_b = 0$ ⇒ On obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, correspondant à des bétons ayant un comportement fragile,

$\grave{k}_b = 1$ ⇒ On obtient des courbes assez plates correspondant à des bétons ayant un comportement ductile.

Nous pourrons adopter d'après [138] :

$$\grave{k}_b = \begin{cases} k_b - 1 & \text{pour} \quad f_{cj} \leq 30\text{MPa}. \\ 0 & \text{pour} \quad f_{cj} \geq 55\text{MPa}. \\ (k_b - 1).\left(\frac{55-f_{cj}}{25}\right) & \text{pour} \quad 30\text{ MPa} < f_{cj} < 55\text{ MPa} \end{cases} \qquad (I.3)$$

I. 6.1.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon Grelat [139] :

La formulation de **Grelat** [139] attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Fig. I.4), dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

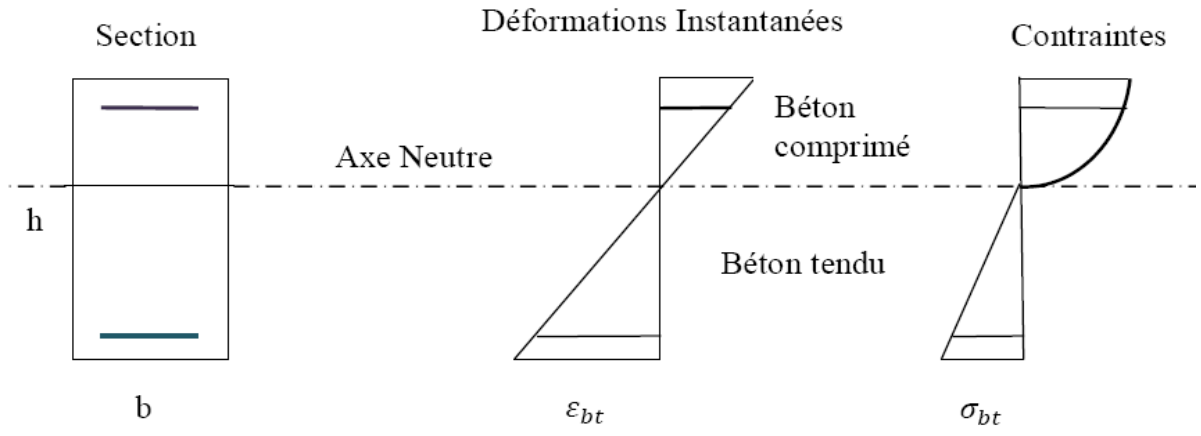

Fig. I.4. Comportement de béton ordinaire avant fissuration [139].

Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} sont définies à partir de la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \qquad (I.4)$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives.

La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus. Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section situé entre deux fissures, donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} & \text{si} \quad |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft} \rightarrow \text{Pas de fissuration, participation complète du béton avec le module } E_{b0}. \\ \sigma_{bt} = -f_{tj} \cdot \frac{(\varepsilon_{bt}-\varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt}-\varepsilon_{ft})^2} & \text{si} \quad \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration avec participation du béton tendu.} \\ \sigma_{bt} = 0 & \text{si} \quad |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration sans participation du béton tendu.} \end{cases} \qquad (I.5)$$

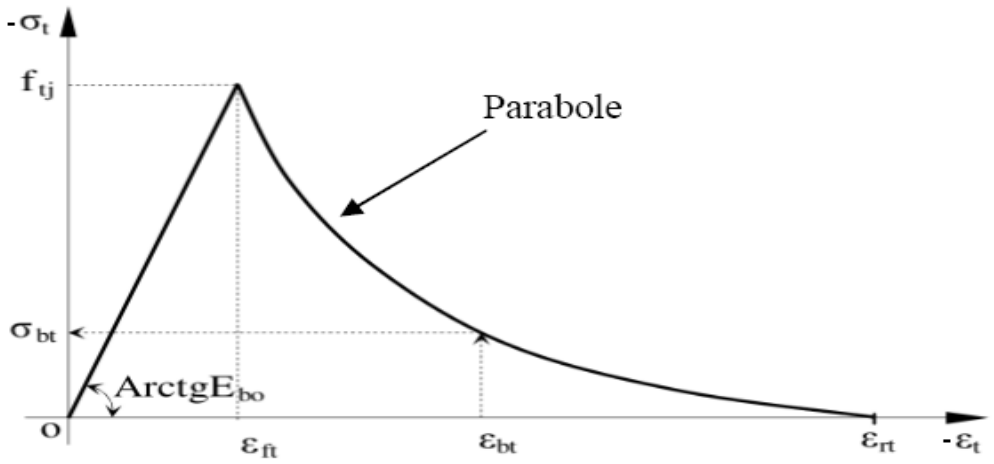

Fig. I.5. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton ordinaire sur le bord tendu selon Grelat [139].

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{tj} : Résistance du béton a la traction,

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

ε_{bt} : Déformation de la fibre du béton la plus tendue.

I. 6.1.2. Comportement des aciers :

La loi contrainte-déformation pour l'acier a un comportement symétrique en compression et en traction sous chargement monotone, elle dépend de la nature de l'acier.

I. 6.1.2.1. Comportement des aciers passifs :

Généralement deux types d'aciers passifs sont utilisés pour le renforcement du béton : les aciers naturels et les aciers écrouis.

- **Aciers naturels :**

Les aciers naturels sont caractérisés par un diagramme issu de la loi de comportement élasto-plastique avec raffermissement, (Fig. I.6).

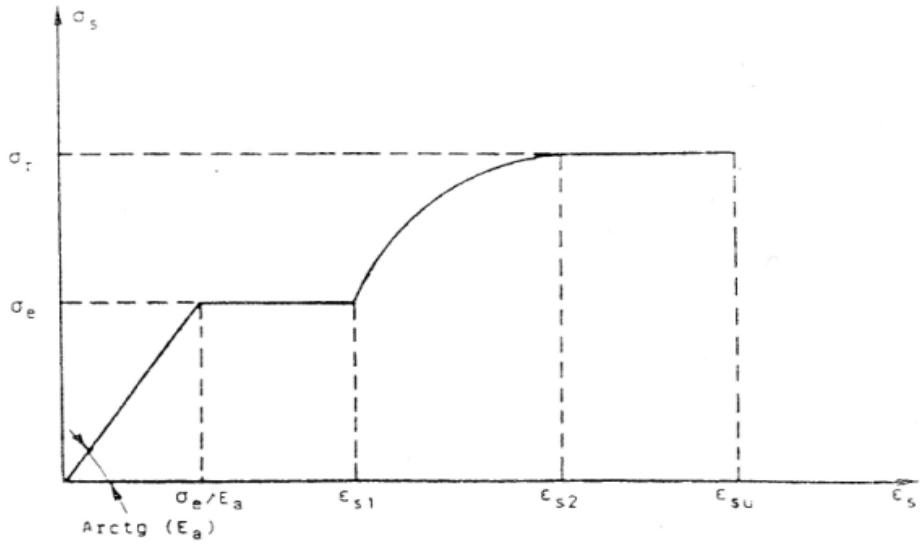

Fig. I.6. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique avec raffermissement) [140].

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon_s & \text{pour} \quad 0 \le \varepsilon_s < \sigma_e / E_a \\ \sigma_e & \text{pour} \quad \sigma_e / E_a \le \varepsilon_s \le \varepsilon_{s1} \\ \sigma_e + (\sigma_r - \sigma_e).\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})}.\left[2 - \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})}\right] & \text{pour} \quad \varepsilon_{s1} \le \varepsilon_s \le \varepsilon_{s2} \\ \sigma_r & \text{pour} \quad \varepsilon_s > \varepsilon_{s2} \end{cases} \qquad (I.6)$$

Avec :

ε_{s1} : Déformation correspondant à la fin du palier plastique,

ε_{s2} : Déformation correspondant à la fin du raffermissement,

ε_{su} : Déformation de rupture.

Pour des calculs aux états limites de résistance ou l'évaluation précise des déformations n'est pas nécessaire, on adopte la loi de comportement élasto-plastique parfaite (Fig. I.7).

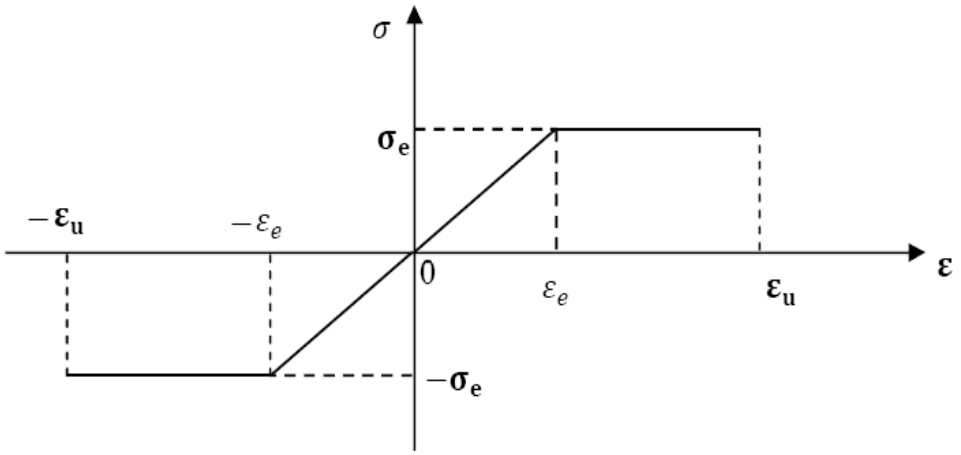

Fig. I.7. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite) [140].

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon & \text{pour} \quad 0 \leq \varepsilon_r < \varepsilon_e \\ \sigma_e & \text{pour} \quad \varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 0 & \text{pour} \quad \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \qquad (I.7)$$

Avec :

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

- **Aciers écrouis :**

Dits aciers écrouis, correspondent a des aciers écrouis généralement par torsion ou traction pour améliorer leurs capacités, (Fig. I.8).

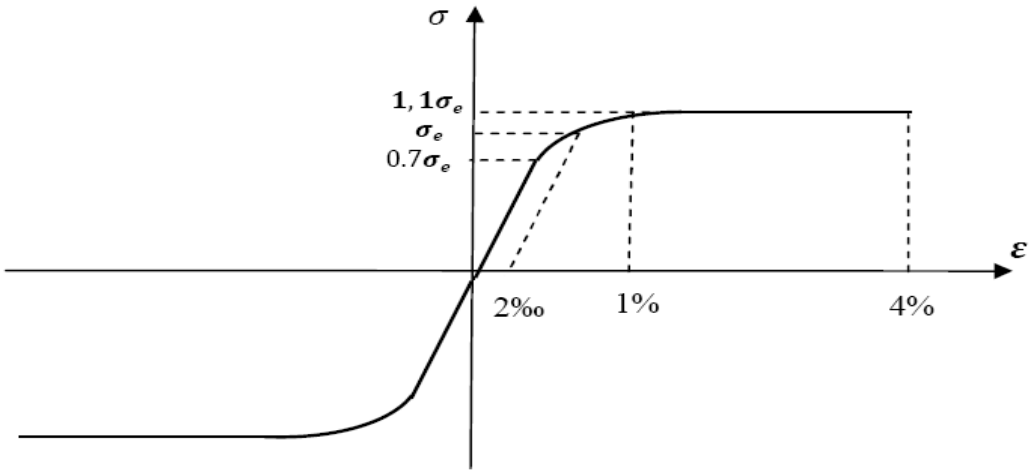

Fig. I.8. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis [140].

Pour ce type d'acier, on adopte la loi préconisée par le règlement qui suppose un comportement élastique linéaire jusqu'à 70 % de la limite élastique. Mais au-delà, et jusqu'à des déformations de 1 % , on adopte une courbe de cinquième degré.

Pour des déformations supérieures à 1 % la contrainte reste constante, jusqu'à la déformation limite de 4 %. Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a \,.\, \varepsilon_s & \text{pour} \quad 0 \le \sigma_s \le 0{,}7.\sigma_e \\ \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0{,}823.\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0{,}7\right)^5 & \text{pour} \quad 0{,}7.\sigma_e < \sigma_s < 1{,}1.\sigma_e \\ \sigma_s = 1{,}1.\sigma_e & \text{pour} \quad 1\,\% \le \varepsilon_s < \varepsilon_r \end{cases} \qquad (I.8)$$

Avec :
E_a : Est le module d'Young de l'acier à l'origine,
σ_e : Est la limite élastique conventionnelle à 2‰,
$0{,}7.\sigma_e$: Est la contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire.

I. 6.1.2.2. Comportement des aciers actifs :

Le comportement des armatures de précontrainte (les fils tréfilés et les torons) est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le nouveau règlement BPEL91 [141], (Fig. I.9.).

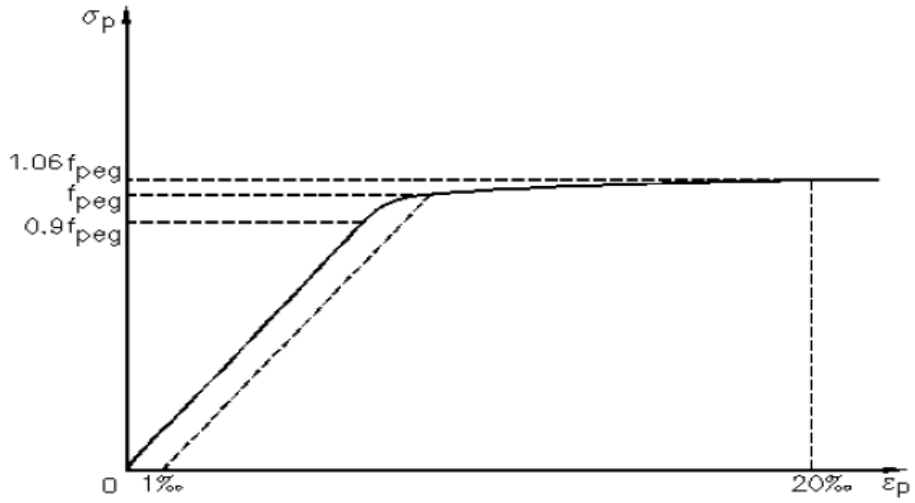

Fig. I.9. Comportement des aciers précontraint [141].

$$\begin{cases} \sigma_p = E_p \,.\, \varepsilon_p & \text{pour} \quad 0 \le \sigma_p < 0{,}9.f_{peg} \\ \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100.\left(\frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0{,}9\right)^5 & \text{pour} \quad 0{,}9.f_{peg} \le \sigma_p < 1{,}06.f_{peg} \\ \sigma_p = 1{,}06.f_{peg} & \text{pour} \quad \varepsilon_p \ge 0{,}02 \end{cases} \qquad (I.9)$$

Ou :
σ_p : Est la contrainte dans l'acier de précontrainte,
ε_p : Est la déformation dans l'acier de précontrainte,
E_p : Est le module d'Young à l'origine,
f_{peg} : Est la limite élastique conventionnelle à 0,1%,
0,9 . f_{peg} : Est la contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
1,06 . f_{peg} : Est la contrainte de rupture.

I. 6.1. Modèles constitutifs :

Les modèles constitutifs qui peuvent être utilisés pour la modélisation des constituants microstructuraux dans divers exemples numériques étudié tout au long de ce travail sont brièvement résumés.

I. 6.1.1. Modèle Neo-Hookean compressible [142] :

Dans le modèle isotrope compressible hyperélastique neo-hookean, la relation constitutive est donnée par :

$$\tau = K\,(J-1)\,I + G\,\bar{B}^{d} \qquad (I.10)$$

$$\bar{B} = J^{-2/3}\,B \qquad (I.11)$$

Avec : $B = F.F^{c}$

Où :
$\tau = J\sigma$: désigne le tenseur des contraintes de Kirchhoff,
$J = \det(F)$: le rapport volumique,
$\bar{B}^{d}$: le déviateur du tenseur isotrope Cauchy-Green gauche,
K : le module de compressibilité,
G : le module de cisaillement.

I. 6.1.2. Modèle élasto-plastique [143] :

Dans ce modèle hypo-élasto-plastique le tenseur de déformation :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,((\nabla\vec{v})^{c} + \nabla\vec{v}) \qquad (I.12)$$

Avec : $\vec{v}$: la vitesse d'un point matériel.

Ce modèle est décomposée de manière additive en une partie élastique ε_e et une partie plastique ε_p.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \qquad (I.13)$$

La partie élastique ε_e est couplée à la contrainte de Cauchy σ par la relation hypo-élastique :

$$\sigma = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \varepsilon_e \tag{I.14}$$

Le tenseur de quatrième ordre $\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}}$ est le tenseur élastique isotrope du matériau.

$$\overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} II + \frac{E}{1+\upsilon} \overline{\overline{\overline{\overline{I}}}} \tag{I.15}$$

Avec :
E : le module d'Young ;
υ : le coefficient de Poisson.

Les incréments de déformation peuvent être élastiques ou élasto-plastiques. Une fonction de rendement f est utilisée pour déterminer si une déformation élastique ou élasto-plastique a lieu.

Le taux de déformation dans un point matériel est élastique si le chargement élastique ($f < 0$) ou le déchargement élastique ($\dot{f} < 0$) se produit.

Au cours de la déformation élasto-plastique, ($f = 0$) et $\left(\dot{f} = 0\right)$s'appliquent (cette dernière condition est connue comme la relation de cohérence).

La fonction de rendement von Mises, utilisée dans le présent travail, est donnée par :

$$f\left(\sigma, \bar{\epsilon}_p\right) = \bar{\sigma}^2 - \sigma_y^2 \tag{I.16}$$

Dans lequel la contrainte équivalente de von Mises est définie comme suite :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma^d : \sigma^d} \tag{I.17}$$

La limite d'élasticité actuelle $\sigma_y = \sigma_y\left(\bar{\epsilon}_p\right)$ est une fonction donnée (relation de durcissement) de la déformation plastique équivalente $\bar{\epsilon}_p$, définie par l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_p^d : \varepsilon_p^d} \tag{I.18}$$

Le taux de déformation plastique est donné par la règle de flux associée, qui peut s'écrire comme suite :

$$\varepsilon_p = \frac{3\dot{\bar{\epsilon}}_p}{2\sigma_y}\sigma^d \tag{I.19}$$

I. 7. Conclusions :

A travers ce chapitre nous avons tout d'abord traité un aperçu sur les matériaux composites à matrice métallique, ils permettent la fabrication des structures pour lesquels les matériaux traditionnels ne conviennent pas ou ne sont plus efficaces et ou le matériau peut véritablement être composé en fonction de sa destination.

Puis, on a traité dans ce chapitre un aperçu sur les différents travaux et techniques d'homogénéisation, où les principes généraux y sont brièvement décrits. Cela nous a aidés à opter pour une méthode d'homogénéisation que l'on développera en détail dans le chapitre qui suit. Cette méthode retenue consiste en la résolution d'un problème de localisation, en y introduisant des degrés de liberté supplémentaires supportant les composantes des déformations macroscopiques. Les relations linéaires entre les degrés de liberté supplémentaires sont prises en compte par une méthode d'élimination via le code de calcul Abaqus. Il sera utilisé un pilotage à déformation ou à contrainte moyenne imposée qui consiste à imposer la valeur des degrés de liberté supplémentaires ou les forces nodales associées. Dans cette présente étude, il y a lieu d'utilisé et de tester cette méthode d'homogénéisation périodique retenue, qui sera comparée à des résultats numériques et aussi à des résultats expérimentaux.

On a aussi exposé un historique sur l'évolution de la théorie de l'endommagement, ainsi qu'une revue non exhaustive des différents travaux et modèles d'endommagement. Cela nous a aidés à choisir des modèles d'endommagement à introduire dans notre étude ; où on utilisera le modèle de **Mazars** ([144], [145]) pour des composites à grains (inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales), et le modèle de **Bouafia et al.** ([146], [147]) pour des composites à fibres (inclusions cylindriques). Il y a lieu d'introduire ses modèles d'endommagement dans le problème de l'homogénéisation par une méthode de relocalisation, et cela via une Subroutine (Umat) sur le code de calcul Abaqus.

Puis, nous avons abordé quelques travaux portant sur l'analyse fiabiliste pour estimer l'indice de fiabilité et déterminer la probabilité de défaillance des structures. Cela nous a aidés à opter pour une technique classique pour le calcul de la fiabilité (méthode d'Hasofer-Lind de niveau 2) qui utilise les probabilités et les statistiques que l'on développera en détail dans le chapitre III. Elle permet ainsi de vérifier la fiabilité des structures et éléments de structures, et aussi d'assurer un dialogue entre le modèle mécanique et le modèle de fiabilité avec une méthode de couplage indirect. Le modèle fiabiliste et son couplage avec le modèle mécanique seront écrits en langage de programmation fortran. Pour ce qui est du modèle mécanique, il s'agit d'utiliser le modèle d'homogénéisation périodique dans le domaine non linéaire

pour des matériaux composites à comportement hétérogène, que l'on développera en détail dans le chapitre II. Par contre pour ce qui est du modèle fiabiliste, il y a lieu de modéliser le problème de fiabilité par le principe d'Hasofer-Lind pour l'estimation de l'indice de fiabilité, et la détermination de la probabilité de défaillance du système étudié. Une fois que le modèle mécanique et le modèle fiabiliste soient disponibles, le couplage entre les deux modèles sera fait en utilisant une méthode de couplage indirecte par surface de réponse, puis il y a lieu de faire le choix des lois de distributions (lois de probabilité) pour les variables aléatoires retenues afin de rapprocher la loi statistique (loi réelle).

Enfin, on a traité un aperçu sur un ensemble de lois de comportement permettant la modélisation des comportements non linéaires des matériaux sous un chargement instantané et monotone jusqu'à la ruine. Où, le comportement du composite « béton » en traction est plutôt du type fragile. Pour renforcer ce matériau, autrement que par les armatures traditionnelles (béton armé), des fibres de différentes natures (acier, fonte, fibres de verre ou de carbone...) sont introduites dans le béton. Elles permettent au matériau d'avoir un comportement ductile. Cependant, ce comportement dépend de plusieurs facteurs : dosage (pourcentage en fibres), adhérence fibres-matrice, orientation et disposition des fibres dans la matrice, composition de la matrice.

CHAPITRE II

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE

Sommaire

II. 1. Introduction 37
II. 2. Problématique de l'homogénéisation périodique 37
II. 2.1. Choix de la cellule de base 37
II. 2.2. Méthodologie 38
II. 2.2.1. Condition aux limites périodiques 38
II. 2.2.2. Méthode d'homogénéisation périodique 42
II. 3. Validation de la procédure d'homogénéisation 49
II. 3.1. Imposition de conditions aux limites périodiques à l'échelle micro 49
II. 3.2. Implémentation des équations pour des conditions aux limites périodiques 50
II. 3.3. Organigramme général de mise en œuvre sur le code de calcul Abaqus 52
II. 4. Problématique de l'endommagement 53
II. 4.1. Modèle d'endommagement de Mazars 54
II. 4.1.1. Implémentation du modèle de Mazars dans le code de calcul Abaqus 57
II. 4.2. Modèle d'endommagement de Bouafia et al 57
II. 4.2.1. Implémentation du modèle de Bouafia et al dans le code de calcul Abaqus ... 60
II. 4.3. Organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement 61
II. 5. Extension de l'homogénéisation périodique à des comportements non linéaires 62
II. 5.1. Homogénéisation non linéaire des composites hétérogènes élasto-plastique 62
II. 5.2. Algorithme d'homogénéisation non linéaire 66
II. 5.3. Organigramme d'homogénéisation non linéaire 67
II. 5.4. Équations constitutives 68
II. 5.4.1. Matériaux avec écrouissage 68
II. 5.4.1.1. L'écrouissage isotrope 68
II. 5.4.1.2. L'écrouissage cinématique 70
II. 6. Conclusions 72

II. 1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode numérique de l'homogénéisation périodique. Dans un premier temps, on appliquera les conditions aux limites périodiques (PBC), en y introduisant des degrés de liberté supplémentaires supportant les composantes des déformations macroscopiques. Les relations linéaires entre les degrés de liberté supplémentaires sont prises en compte par une méthode d'élimination implémenté sous des scripts sur le langage Python via le code de calcul Abaqus. Puis, il y a lieu de déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées des composites étudiés sur la base d'un volume élémentaire représentatif (VER).

Ensuite, nous introduirons des modèles d'endommagement dans le problème de l'homogénéisation périodique par une démarche de relocalisation, où on appliquera le modèle de **Mazars** ([144], [145]) pour des composites à grains (inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales), et le modèle de **Bouafia et al.** ([146], [147]) pour des composites à fibres (inclusions cylindriques), et cela sous des Subroutines (Umat) sur le langage de programmation Fortran via le code de calcul Abaqus.

Enfin, on traitera l'homogénéisation périodique dans le domaine non linéaire pour des matériaux composites à comportement hétérogènes (élastique/élasto-plastique, élasto-plastique/élasto-plastique), basée sur une approche incrémentale permettant de linéariser le problème d'homogénéisation non linéaire, puis de calculer numériquement l'opérateur tangent effectif. Où, les calculs seront effectués par l'utilisation de la méthode des éléments finis via le code de calcul Abaqus.

II. 2. Problématique de l'homogénéisation périodique :

II. 2.1. Choix de la cellule de base :

L'homogénéisation périodique passe par la définition d'un volume élémentaire représentatif « VER » du matériau hétérogène, alors appelé cellule de base. Dans ce travail, on effectue une étude dans l'espace (en 3D). La cellule de base est un élément cubique de volume unitaire comprenant des inclusions de différentes formes (sphéroïdales, ellipsoïdales ou cylindriques). Les dimensions, la forme, l'orientation et le pourcentage des inclusions sont générés par un générateur d'objets répartis aléatoirement dans un volume fini.

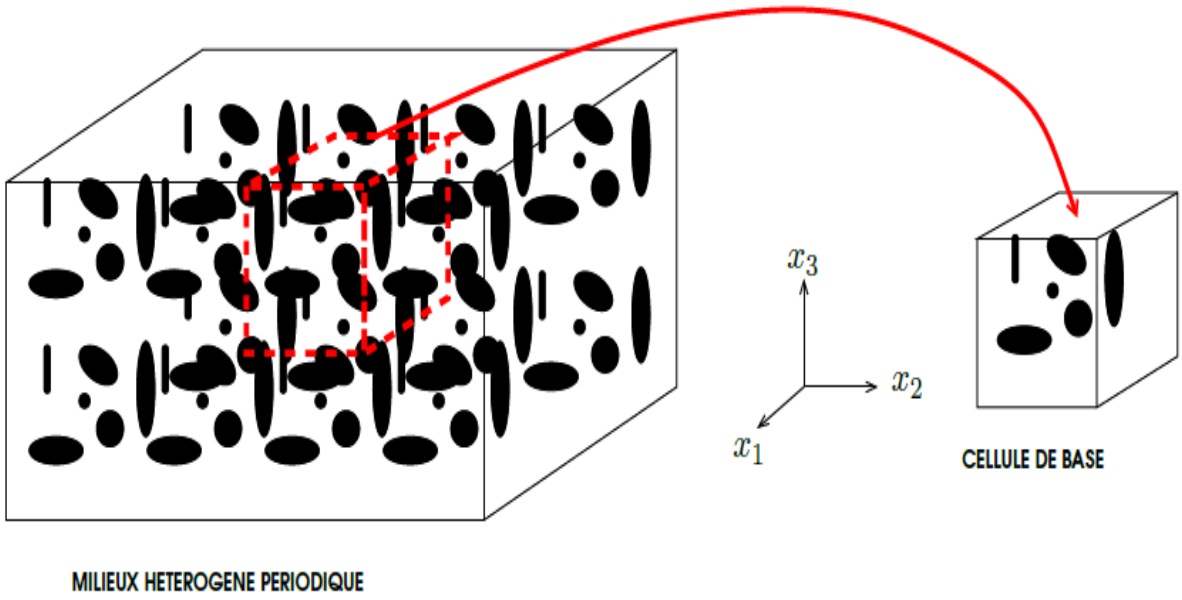

Fig. II.1. Choix de la cellule de base [148].

Les matériaux qui seront étudiés possèdent une microstructure périodique, cette propriété affecte indépendamment ou de façon couplée, tant les propriétés géométriques que les propriétés matérielles.

Une fois qu'on a choisi un élément de volume représentatif du matériau formant une cellule de base (Fig. II.1), on définit les grandeurs macroscopiques (la contrainte Σ et la déformation E) à partir de leurs homologues microscopiques (la contrainte σ et la déformation ε).

II. 2.2. Méthodologie :

II. 2.2.1. Conditions aux limites périodiques :

Les théories d'homogénéisation les plus utilisées sont : déformation homogène au contour (KUBC), contrainte homogène au contour (SUBC) et homogénéisation périodique (PBC), en petites perturbations et grandes déformations (en 2D ou 3D). Un certain nombre de chercheurs ont prouvé qu'en appliquant une condition aux limites périodiques (PBC), nous permet d'obtenir des résultats plus raisonnables, comparer avec d'autres conditions aux limites (KUBC, SUBC). C'est l'une des raisons pour lesquels, on a choisi pour cette étude la méthode d'homogénéisation avec condition aux limites périodiques (PBC).

Considérons une structure périodique constituée de réseau périodique de cellules répétées unitaires. Dans le cas d'un matériau à microstructure périodique, on peut définir une « cellule de base » et des vecteurs de périodicité (Fig. II.2).

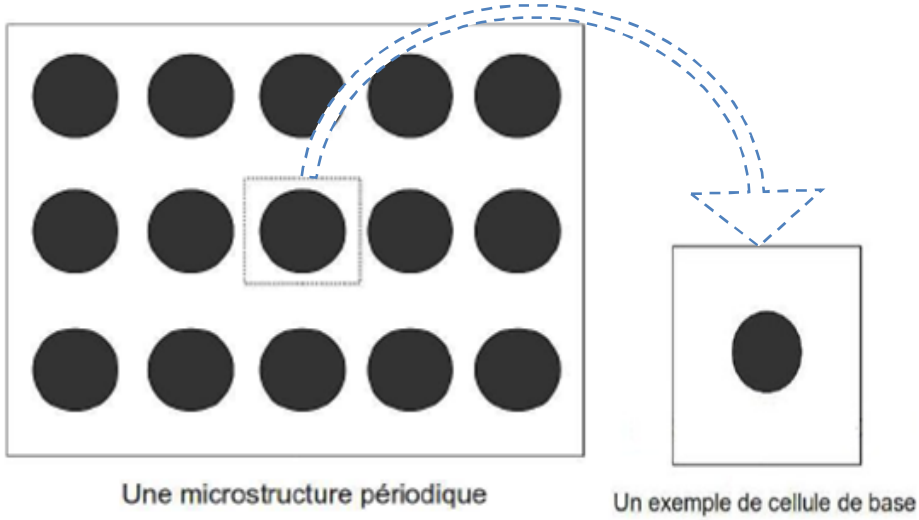

Fig. II.2. Description d'une cellule de base [149].

Le champ de déplacement pour la structure périodique peut être exprimé [150] sous la forme suivante :

$$u_i(x_i) = \bar{\varepsilon}_{ij}.x_j + u_i'(x_i), \quad u_i' \text{ périodique} \qquad \text{(II.1)}$$

$\bar{\varepsilon}_{ij}$: est le tenseur des déformations macroscopiques de la structure périodique,
$\bar{\varepsilon}_{ij}.x_j$: représente un champ linéaire de déplacement,
$u_i'(x_i)$: est la fonction périodique d'une cellule à une autre.

La fonction périodique $u_i'(x_i)$ représente une modification du champ de déplacement linéaire en raison de l'hétérogénéité de la structure composite.

Les conditions aux limites périodiques impliquent les deux faits suivants :

- Pour deux surfaces opposées, la déformation et l'orientation devraient être les mêmes.
- Afin d'avoir une continuité de contrainte à travers les limites, les vecteurs de contrainte agissant sur chaque deux côtés opposés sont opposés en direction.

L'hypothèse du champ de déplacement sous la forme de l'équation (II.1), ne peut être appliquée directement aux limites puisque la partie périodique $u_i'(x_i)$ est généralement inconnue.

Pour chaque cellule unitaire, ses surfaces limites (Fig. II.3) doivent toujours apparaître en paires parallèles, les déplacements sur une paire de surfaces limites opposées parallèles peuvent être écrits comme suite :

$$u_i^{k+} = \bar{\varepsilon}_{ij}\, x_j^{k+} + u_i' \quad \text{(II.2)}$$

$$u_i^{k-} = \bar{\varepsilon}_{ij}\, x_j^{k-} + u_i' \quad \text{(II.3)}$$

Où :

k^+ et k^- : sont des indices pour identifier la k^{ieme} paire de deux surfaces limites parallèles opposées d'un volume élémentaire représentatif (VER).

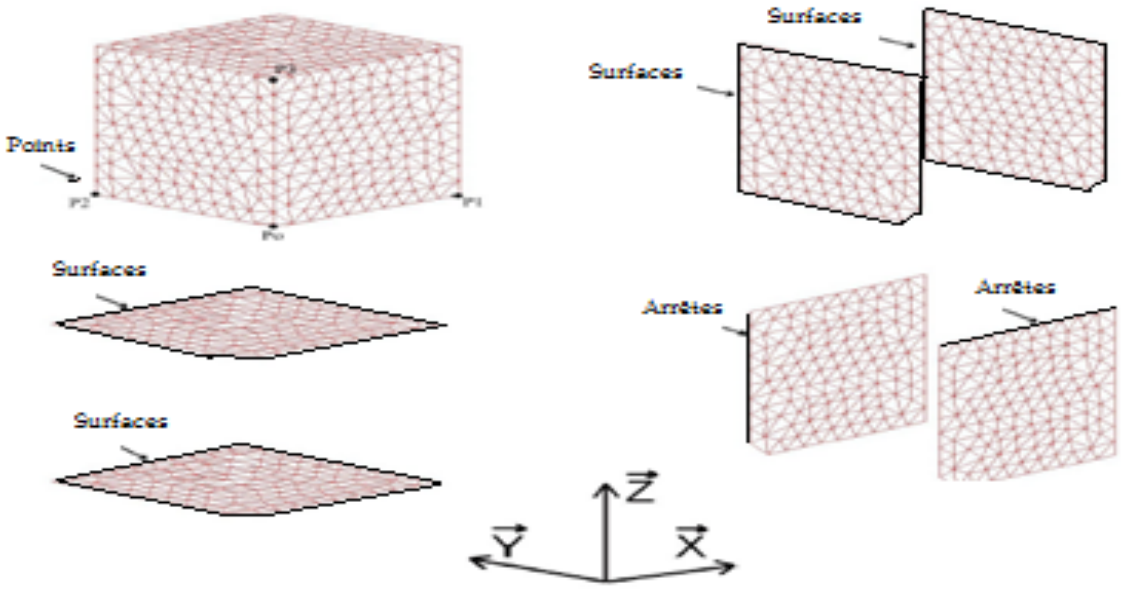

Fig. II.3. Points, arrêtes et surfaces recevant les conditions aux limites de périodicité.

On notera que $u_i'(x_i)$ est la même pour deux frontières parallèles (périodicité), par conséquent, la différence entre les deux équations (II.2) et (II.3) est donnée comme suite :

$$u_i^{k+} - u_i^{k-} = \bar{\varepsilon}_{ij}\left(x_j^{k+} - x_j^{k-}\right) = \bar{\varepsilon}_{ij}\,\Delta x_j^k \quad \text{(II.4)}$$

Δx_j^k : sont des constantes pour chaque paire de surfaces limites parallèles,

Etant donnée $\bar{\varepsilon}_{ij}$ est connu et Δx_j^k sont constants, alors le côté droit devient constant, et ces équations peuvent être facilement appliquées à l'analyse par élément fini comme des équations de contrainte de déplacement nodal [150].

Si un volume élémentaire représentatif (VER) est analysé en utilisant une méthode par éléments finis à base de déplacement, l'application de l'équation (II.4) peut garantir l'unicité de la solution et les conditions de continuité en traction sont automatiquement satisfaites au lieu d'appliquer l'équation (II.1) directement comme conditions aux limites.

Une représentation schématique d'une cellule de base unitaire en 2D sous contrainte avec des conditions aux limites périodiques macroscopiques est représentée à la figure (Fig. II.4).

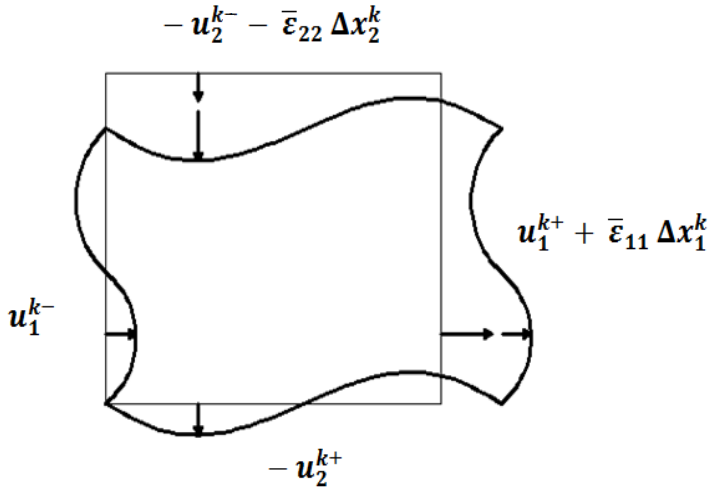

Fig. II.4. Schéma représentant une cellule de base en 2D avec des conditions aux limites périodiques.

Les conditions de continuité en traction peuvent être écrites comme suit :

$t^+ - t^- = 0$ (II.5)

Ou : $t = \sigma.n$

t^+ et t^- : sont des tractions correspondant au niveau des surfaces limites qui sont parallèles dans chaque face opposée respectivement.

Un schéma représentant la continuité en traction d'une cellule de base unitaire en 2D est représenté à la figure (Fig. II.5).

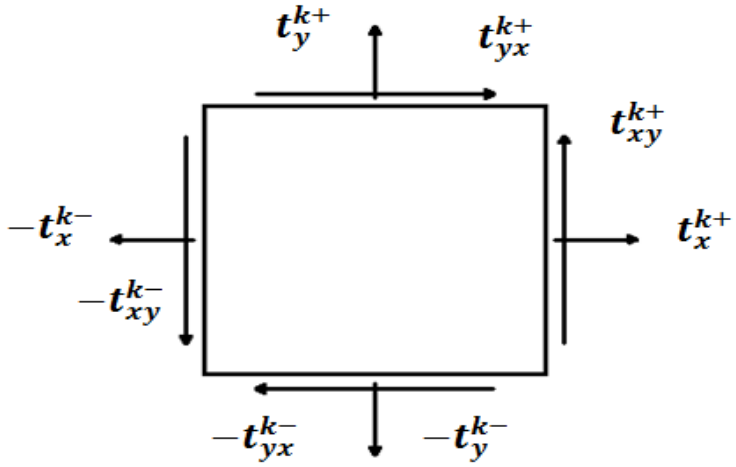

Fig. II.5. Schéma représentant une continuité en traction d'une cellule de base en 2D.

En général, pour des problèmes de la valeur limite périodiques, les équations (II.4) et (II.5) constituent un ensemble complet de conditions aux limites en dehors du mouvement de corps rigides.

Cependant, dans ce travail, la cellule unitaire est analysée en utilisant la méthode des éléments finis à base de déplacement, l'application de seulement l'équation (II.4) peut garantir l'unicité de la solution, et ainsi l'équation (II.5) est automatiquement satisfaite. En d'autres termes, cette dernière condition aux limites n'est pas nécessaire de l'appliquer de façon explicite dans notre analyse.

II. 2.2.2. Méthode d'homogénéisation périodique :

Le volume élémentaire représentatif (VER) est considéré comme un milieu orthotrope homogène, avec des propriétés effectives décrivant les propriétés moyennes du matériau composite [151]. Pour obtenir ce module macroscopique, une procédure d'homogénéisation est introduite lors du calcul reliant l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

L'une des méthodes les plus utilisées pour l'homogénéisation périodique, consiste à intégrer sur le volume élémentaire représentatif (VER) pour faire la moyenne des tenseurs de contrainte et de déformation :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}(x,y,z)dV \qquad (II.6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}(x,y,z)dV \qquad (II.7)$$

Nous devons démontrer que, cette procédure peut conserver l'équivalence de l'énergie de déformation entre le composite hétérogène et le composite homogène de la moyenne des tenseurs de contrainte et de déformation. Afin de démontrer l'équivalence de l'énergie, nous supposons que nous avons une traction et un déplacement u_i au niveau des extrémités.

L'énergie de déformation dans un matériau homogène de volume V est :

$$U = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}V \qquad (II.8)$$

L'énergie de déformation stockée dans le matériau hétérogène de volume V est :

$$U^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \qquad (II.9)$$

$$U^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}\right)dV \quad (II.10)$$

$$U^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}\right)dV + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{ij}\int_V \sigma_{ij}dV \quad (II.11)$$

Comme nous l'avons illustré dans l'équation (II.8), nous avons donc :

$$U^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}\right)dV + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}\,V \quad (II.12)$$

$$U^* = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{ij}\right)dV + U \quad (II.13)$$

$$U^* - U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right)dV \quad (II.14)$$

$$U^* - U = \frac{1}{2}\int_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u_i - \bar{u}_i) + \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\,(u_i - \bar{u}_i)\right)}{\partial x_j}\right]dV \quad (II.15)$$

En utilisant l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (II.16)$$

Nous pouvons écrire la différence d'énergie, comme suite :

$$U^* - U = \frac{1}{2}\int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}(u_i - \bar{u}_i)\right]dV \quad (II.17)$$

En utilisant le théorème de Gauss, nous pouvons transformer l'intégration sur le volume en l'intégration sur la surface, comme suite :

$$U^* - U = \frac{1}{2}\int_{S_j} \sigma_{ij}\,(u_i - \bar{u}_i)\,n_j\,dS_j \quad (II.18)$$

Où :

S_j : est la $j^{ième}$ surface,

n_j : est la normale unitaire,

u_i : est le $i^{ème}$ déplacement,

$\bar{u}_i$: est le $i^{ème}$ déplacement moyen.

Sur la surface S_j, on a :

$$u_i = \bar{u}_i \quad (II.19)$$

Nous concluons donc que :

$$U^* - U = 0 \quad (II.20)$$

La dérivation ci-dessus montre que l'homogénéisation que nous avons utilisée, assure l'équivalence entre le volume élémentaire représentatif (VER) hétérogène et homogénéisé.

Les quantités moyennes des contraintes et des déformations définies dans l'équation (II.6) et l'équation (II.7), elles assurent l'équivalence en énergie de déformation entre le matériau homogène équivalent et le matériau hétérogène d'origine.

Les contraintes moyennes peuvent être liées aux déplacements limites des volumes élémentaires représentatifs (VER) en utilisant le théorème de Gauss. La déformation moyenne dans l'équation (II.7) peut être convertie en :

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V}\int_{S_j}\left(u_i\, n_j - u_j\, n_i\right)\, dS_j \qquad \text{(II.21)}$$

Où :
S_j : désigne la limite extérieure du volume élémentaire représentatif (VER).

La relation donnée par l'équation (II.21) permet d'évaluer les contraintes moyennes du volume en utilisant les déplacements aux limites, puis en évitant l'intégration du volume [04].

Afin d'évaluer les propriétés effectives $\bar{C}_{ijkl}$, premièrement, nous devrions évaluer la moyenne de la contrainte et de la déformation, des équations (II.6) et (II.7) avec l'application de différentes conditions de contour, puis les introduire dans la relation constitutive comme suit :

$$\bar{C}_{ijkl} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\bar{\varepsilon}_{kl}} \qquad \text{(II.22)}$$

Où :
$\bar{C}_{ijkl}$: est un module de rigidité correspondant à l'application du mode de déformation.

Dans le cas d'une déformation de cisaillement pure, l'expression du tenseur de déformation de cisaillement est comme suite :

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2\,\varepsilon_{ij} \qquad \text{(II.23)}$$

Où :

γ_{ij} : est la déformation de cisaillement mécanique.

Le volume élémentaire représentatif (VER) est un matériau orthotrope, mais il peut s'agir de matériaux isotropes transversalement lorsque l'inclusion est au centre du volume élémentaire représentatif (VER). La matrice de rigidité des matériaux est transversalement isotropes (constitué de cinq constantes indépendantes), elle est obtenue par analyse d'un volume élémentaire représentatif (VER) sur le code de calcul Abaqus.

On représente ci-dessous (Fig. II.6) différentes microstructures tridimensionnelles à inclusions multiples utilisées dans la littérature par différents auteurs, et dont elle sera utilisé dans cette étude.

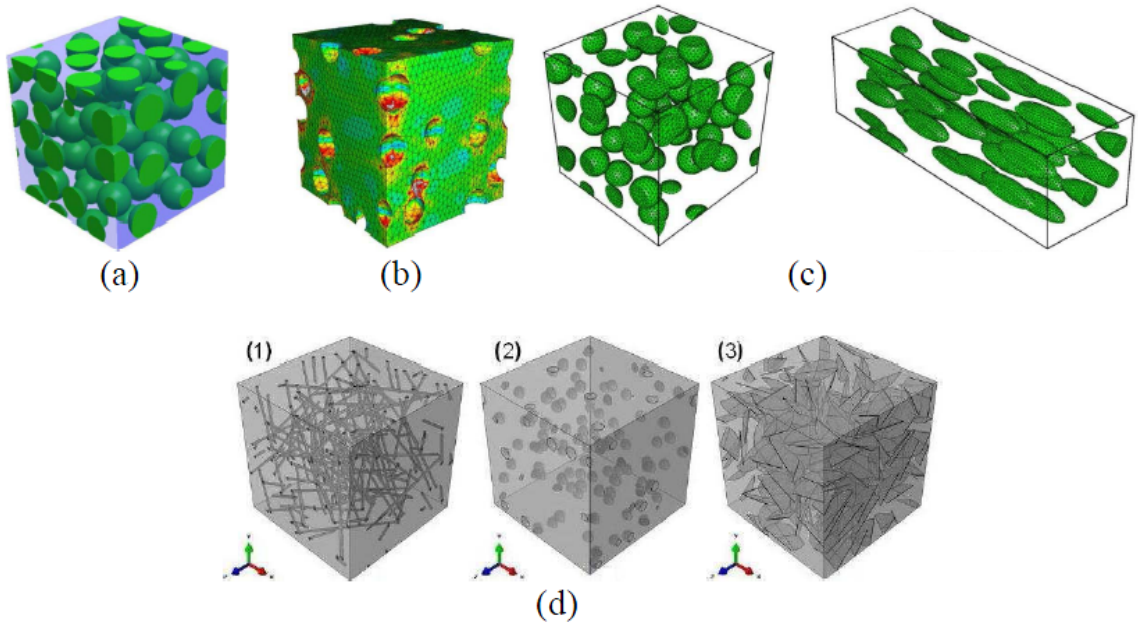

Fig. II.6. Microstructures tridimensionnelles avec inclusions multiples : (a) Fritzen et al [152], (b) Delannay et al [153], (c) Brassart et al [154], (d) Mortazavi et al ([155], [156]).

Le tenseur de raideur s'exprime comme indiqué dans l'équation (II.24) :

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.24)}$$

Le tenseur de souplesse s'exprime comme indiqué dans l'équation (II.25) :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(II.25)}$$

De plus, à partir de la relation entre la matrice de souplesse S, et la propriété élastique, nous pouvons calculer des propriétés élastiques effectives à partir de la matrice de rigidité du volume élémentaire représentatif (VER).

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad \text{(II.26)}$$

Ou :

E_{11}, E_{22} et E_{33} : sont les modules d'élasticité d'extensions le long des directions 1, 2 et 3, respectivement,

ν_{ij} (i, j = 1, 2, 3) : sont les coefficients de poisson,

G_{12}, G_{13}, et G_{23} : sont les modules de cisaillement.

Il n'y a que cinq constantes de matériaux indépendantes (E_{11}, E_{33}, ν_{12}, ν_{31}, G_{32}) pour un matériau isotrope transversalement. Ou ν_{13} dépend de E_{11}, E_{33}, ν_{12}, ν_{31} et peut être calculé par la relation suivante :

$$\frac{\nu_{31}}{E_{33}} = \frac{\nu_{13}}{E_{11}} \quad \text{(II.27)}$$

Un matériau est isotrope lorsque sa propriété est la même dans les trois directions. Dans ce cas, $E_{11} = E_{22} = E_{33} = E$, $\nu_{12} = \nu_{31} = \nu_{32} = \nu$ et $G_{12} = G_{31} = G_{32} = G$. Il n'existe que deux constantes de matériaux indépendantes (E, ν) pour un matériau isotrope.

Cependant, les matériaux anisotropes ont des valeurs non nulles dans les parties supérieures droite et inférieure gauche de leurs matrices de souplesse et de rigidité. Il existe une relation entre les composantes de la matrice de souplesse avec les composantes de la matrice de rigidité, qui est comme suite :

$$S_{11} = \frac{(\bar{C}_{11}.\bar{C}_{33}-\bar{C}_{13}^2)}{(\bar{C}_{33}.\bar{C}_{11}^2-2.\bar{C}_{11}.\bar{C}_{13}^2-\bar{C}_{12}^2.\bar{C}_{33}+2.\bar{C}_{12}.\bar{C}_{13}^2)} = \frac{1}{E_{11}} \quad \text{(II.28)}$$

$$S_{12} = -\frac{(\bar{C}_{12}.\bar{C}_{33}-\bar{C}_{13}^2)}{(\bar{C}_{33}.\bar{C}_{11}^2-2.\bar{C}_{11}.\bar{C}_{13}^2-\bar{C}_{12}^2.\bar{C}_{33}+2.\bar{C}_{12}.\bar{C}_{13}^2)} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad \text{(II.29)}$$

$$S_{13} = -\frac{\bar{C}_{13}}{(\bar{C}_{11}.\bar{C}_{33}-2.\bar{C}_{13}^2+\bar{C}_{12}.\bar{C}_{33})} = -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} \quad \text{(II.30)}$$

$$S_{33} = \frac{(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{12})}{(\bar{C}_{11}.\bar{C}_{33}-2.\bar{C}_{13}^2+\bar{C}_{12}.\bar{C}_{33})} = \frac{1}{E_{33}} \quad \text{(II.31)}$$

$$S_{44} = \frac{1}{C_{44}} = \frac{1}{G_{12}} \quad \text{(II.32)}$$

$$S_{55} = \frac{1}{C_{55}} = \frac{1}{G_{13}} \quad \text{(II.33)}$$

La détermination des propriétés élastiques effectives dépend de la perturbation, et aussi de la propriété du matériau composite (cas isotrope ou orthotrope) du volume élémentaire représentatif (VER). Ils sont définis dans le tableau ci-dessous (Tab. II.1) :

Tab. II.1. Propriétés effectives en fonction de la perturbation et la propriété du matériau.

<table>
<tr><th colspan="4">Cas isotrope</th></tr>
<tr><td>Perturbation suivant la direction X-X</td><td>Perturbation suivant la direction Y-Y</td><td>Perturbation suivant la direction Z-Z</td><td></td></tr>
<tr><td>$E^{eff} = E_{11}^{eff} = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$

$\nu^{eff} = \frac{\nu_{12}^{eff} + \nu_{13}^{eff}}{2}$
Avec :
$\begin{cases} \nu_{12}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \\ \nu_{13}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} \end{cases}$</td><td>$E^{eff} = E_{22}^{eff} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}}$

$\nu^{eff} = \frac{\nu_{21}^{eff} + \nu_{23}^{eff}}{2}$
Avec :
$\begin{cases} \nu_{21}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \\ \nu_{23}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}} \end{cases}$</td><td>$E^{eff} = E_{33}^{eff} = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}}$

$\nu^{eff} = \frac{\nu_{31}^{eff} + \nu_{32}^{eff}}{2}$
Avec :
$\begin{cases} \nu_{31}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \\ \nu_{32}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} \end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">Cas orthotrope / isotrope transversalement</th></tr>
<tr><td>Perturbation suivant la direction X-X</td><td>Perturbation suivant la direction Y-Y</td><td>Perturbation suivant la direction Z-Z</td><td>Perturbation suivant la direction X-Y</td></tr>
<tr><td>$E_{11}^{eff} = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$

$\nu_{12}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$</td><td>$E_{22}^{eff} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}}$

$\nu_{23}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}}$</td><td>$E_{33}^{eff} = \frac{\sigma_{33}}{\varepsilon_{33}}$

$\nu_{31}^{eff} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}$</td><td>$G_{12}^{eff} = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}}$

$G_{32}^{eff} = \frac{\sigma_{32}}{\gamma_{32}}$
Avec :
$\begin{cases} \gamma_{12} = 2 . \varepsilon_{12} \\ \gamma_{32} = 2 . \varepsilon_{32} \end{cases}$</td></tr>
</table>

Il n'existe que deux constantes de matériaux indépendantes (E, ν) pour un matériau isotrope. Par contre, il y a cinq constantes de matériaux indépendantes $(E_{11}, E_{33}, \nu_{12}, \nu_{31}, G_{32})$ pour un matériau orthotrope / isotrope transversalement.

II. 3. Validation de la procédure d'homogénéisation :

II. 3.1. Imposition de conditions aux limites périodiques à l'échelle micro :

Pour appliquer les conditions aux limites périodiques à l'échelle micro, il existe trois types d'ensemble de nœuds : les faces, les arêtes et les sommets. Pour cela, on introduit des équations supplémentaires pour des conditions aux limites périodiques à l'échelle micro [157].

D'abord, il y a lieu de choisir les régions sur les limites du volume élémentaire représentatif (VER), puis il y a lieu de faire une notation des nœuds comme représenté sur la figure ci-dessous (Fig. II.7) :

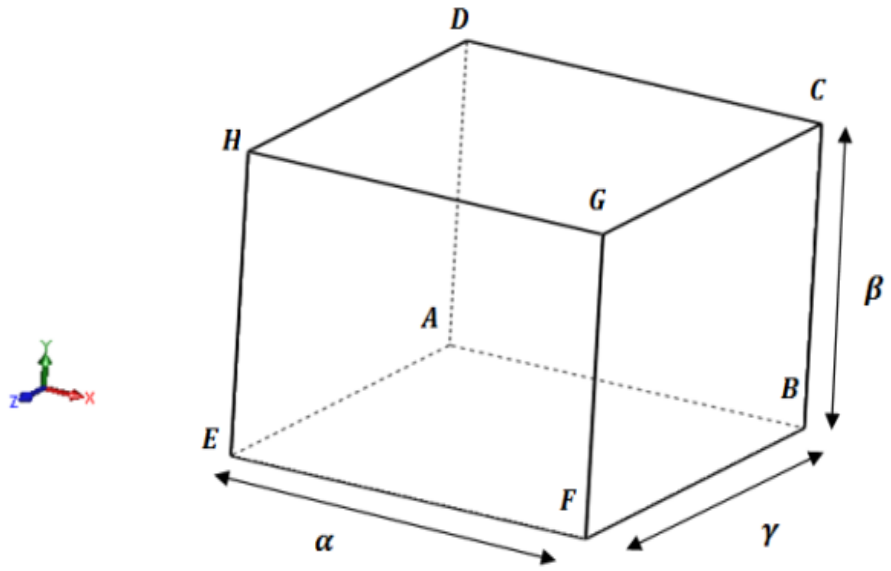

Fig. II.7. Notation de l'élément de volume représentatif.

Un ensemble de nœuds d'un sommet contient un seul nœud, alors que chaque ensemble de nœuds pour les arêtes et les faces peuvent contenir plusieurs nœuds. Les équations de toutes les faces, les arêtes, et les sommets sont résumés dans le tableau ci-dessous (Tab. II.2) :

Tab. II.2. Equations pour des conditions aux limites périodiques.

Equations des faces		
$\begin{cases} u_{BCGF} - u_{ADHE} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x \\ v_{BCGF} - v_{ADHE} = 0 \\ w_{BCGF} - w_{ADHE} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{CDHG} - u_{BAEF} = 0 \\ v_{CDHG} - v_{BAEF} = \beta\,\bar{\varepsilon}_y \\ w_{CDHG} - w_{BAEF} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{FEHG} - u_{BADC} = 0 \\ v_{FEHG} - v_{BADC} = 0 \\ w_{FEHG} - w_{BADC} = \beta\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$
Equations des arêtes		
$\begin{cases} u_{FG} - u_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ v_{FG} - v_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xy} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_{FG} - w_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	$\begin{cases} u_{HG} - u_{AB} = \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yx} + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ v_{HG} - v_{AB} = \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_{HG} - w_{AB} = \gamma\,\bar{\varepsilon}_z + \beta\,\bar{\varepsilon}_{xy} \end{cases}$	$\begin{cases} u_{CG} - u_{AE} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{yx} + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ v_{CG} - v_{AE} = \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ w_{CG} - w_{AE} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_x \end{cases}$
$\begin{cases} u_{FG} - u_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x - \gamma\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ v_{FG} - v_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xy} - \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_{FG} - w_{AD} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} - \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	$\begin{cases} u_{HG} - u_{AB} = \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yx} - \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ v_{HG} - v_{AB} = \beta\,\bar{\varepsilon}_y - \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_{HG} - w_{AB} = \gamma\,\bar{\varepsilon}_z - \beta\,\bar{\varepsilon}_{xy} \end{cases}$	$\begin{cases} u_{CG} - u_{AE} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{yx} - \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ v_{CG} - v_{AE} = \beta\,\bar{\varepsilon}_y - \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ w_{CG} - w_{AE} = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{yz} - \beta\,\bar{\varepsilon}_x \end{cases}$
Equations des sommets		
$\begin{cases} u_G - u_A = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ v_G - v_A = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xy} + \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_G - w_A = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	$\begin{cases} u_F - u_D = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{xz} \\ v_F - v_D = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xy} + \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_F - w_D = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	
$\begin{cases} u_H - u_B = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yx} \\ v_H - v_B = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xy} + \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yz} \\ w_H - w_B = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_{xy} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	$\begin{cases} u_C - u_E = \alpha\,\bar{\varepsilon}_x + \beta\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yx} \\ v_C - v_E = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{xz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_y + \gamma\,\bar{\varepsilon}_{yx} \\ w_C - w_E = \alpha\,\bar{\varepsilon}_{yz} + \beta\,\bar{\varepsilon}_x + \gamma\,\bar{\varepsilon}_z \end{cases}$	

II. 3.2. Implémentation des équations pour des conditions aux limites périodiques :

Dans le module d'interaction du code de calcul Abaqus, il est possible de définir différents types d'interactions au niveau du modèle étudié. On peut introduire des équations linéaires composées de coefficient qui s'applique pour chaque nœud à un degré de liberté. L'expression d'une équation linéaire supplémentaire est comme suite :

$$A_1 u_i^P + A_2 u_j^Q + \ldots + A_N u_k^R = 0 \qquad \text{(II.34)}$$

Où :

u_i^P : est une variable nodale au nœud P, de degré de liberté i,

A_N : sont les coefficients qui définissent le mouvement relatif du nœud.

Dans le volume élémentaire représentatif (VER) modéliser sous forme d'un parallélépipède en 3D, il y a lieu d'appliquer des conditions aux limites périodiques, ou la matrice macroscopique de déformation $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{ij}$ avec i, j = x, y, z.

Afin d'inclure la déformation macroscopique de composante $\bar{\varepsilon}_{ij}$, il y a lieu de créer six points de référence RP-1, RP-2, RP-3, RP-4, RP-5, RP-6. Ou leur degré de liberté de déplacement a une relation avec $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_{xy}$, $\bar{\varepsilon}_{xz}$, $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_{yz}$, $\bar{\varepsilon}_z$ respectivement comme suite :

$$\begin{cases} U^1_{RP-1} = \bar{\varepsilon}_x \\ U^1_{RP-2} = \bar{\varepsilon}_{xy} \\ U^1_{RP-3} = \bar{\varepsilon}_{xz} \\ U^1_{RP-4} = \bar{\varepsilon}_y \\ U^1_{RP-5} = \bar{\varepsilon}_{yz} \\ U^1_{RP-6} = \bar{\varepsilon}_z \end{cases} \quad \text{(II.35)}$$

Une fois que les points de référence sont introduit dans le modèle, on crée les équations supplémentaires avec la commande Python afin d'appliquer les conditions aux limites périodiques dans le code de calcul Abaqus. Pour appliquer la perturbation dans une direction donnée, il y a lieu de l'appliquer sur un nœud fictif qui n'est pas relié aux éléments du modèle.

Pour faire cette analyse, tout d'abord, il faut créer un fichier (.cae) dans le code de calcul Abaqus, où il y a lieu d'introduire la géométrie, propriété des constituants du matériau composite (inclusions - matrice), puis effectuer le maillage symétrique et le chargement macroscopique. Enfin, on introduit les lois de comportement des constituants de notre matériau composite via l'implémentation des Subroutines (Umat) dans le code de calcul Abaqus.

Les conditions aux limites périodiques sont imposées, en utilisant des équations supplémentaires multipoints sur le code de calcul Abaqus, qui permettent d'imposer une relation entre différents degrés de liberté dans le modèle. En général, plusieurs degrés de liberté dépendants peuvent être liés à un seul degré de liberté indépendant.

Ensuite, on exécute les scripts Python qui permettent d'ajouter les points de référence dans le code de calcul Abaqus, créant automatiquement les équations supplémentaires aux nœuds. Enfin, on exécute la simulation dans le code de calcul Abaqus, où on obtient les résultats de notre modélisation. La contrainte microscopique pourrait être exportée à partir de la base de données du code de calcul Abaqus, la contrainte macroscopique est la condition utilisée entrée initiale.

II. 3.3. Organigramme général de mise en œuvre sur le code de calcul Abaqus :

La méthode d'homogénéisation périodique proposée a été implémentée numériquement en utilisant un script Python, pour invoquer la solution dans le code de calcul par élément fini Abaqus. L'algorithme itératif est présenté sur la (Fig. II.8).

À chaque étape incrémentielle de l'analyse, la Subroutine des propriétés des matériaux (Umat) ou bien lois de comportement a été utilisée pour effectuer la communication entre Python et le solveur Abaqus. Le code Python modifie les conditions aux limites en un fichier d'entrée Abaqus, appliqué à une cellule élémentaire ou élément de volume représentatif.

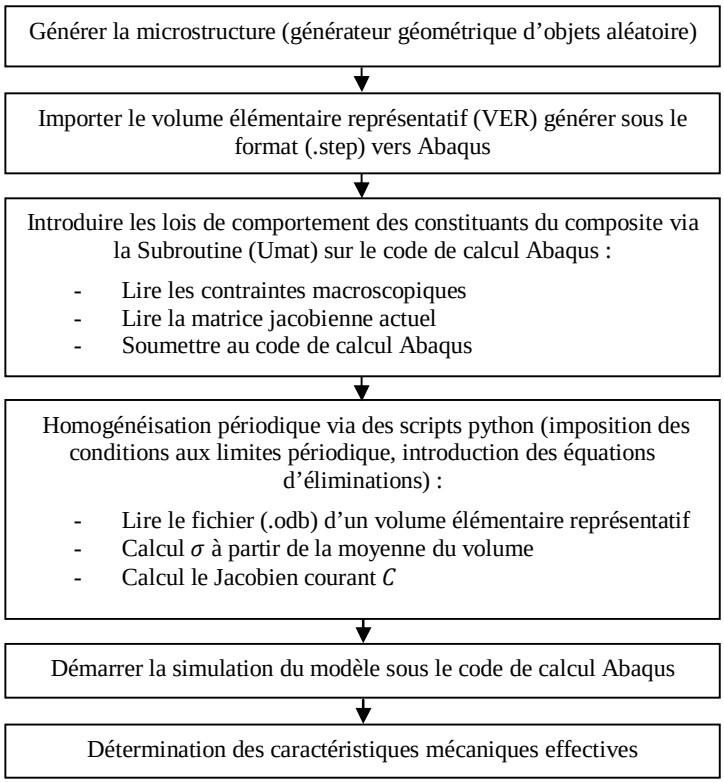

Fig. II.8. Organigramme d'implémentation du modèle d'homogénéisation périodique.

La programmation d'une Subroutine (Umat) dans le code de calcul Abaqus, nécessite la résolution numérique des équations différentielles décrivant le comportement du matériau, ainsi que la détermination de la matrice tangente cohérente avec le schéma d'intégration choisi (Euler implicite dans notre étude).

II. 4. Problématique de l'endommagement :

A partir de l'approche de **Rabotnov** [158] et **Kachanov** [159], la mécanique de l'endommagement consiste en l'introduction d'un paramètre scalaire D, qui prend la valeur 0 pour un matériau sain et la valeur 1 pour un matériau rompu. Ce paramètre D décrit l'état d'endommagement d'une section S d'un échantillon.

Pour caractériser la transition de comportement élastique - plastique au niveau de la limite d'élasticité, il est défini par une surface seuil (critère de plasticité scalaire). Cette fonction de charge est fonction du tenseur de contrainte du matériau et peut prendre plusieurs formes selon le critère choisi. Le critère fait en général suite à des essais multiaxiaux qui ont permis de déterminer l'allure du domaine de plasticité du matériau.

Les matériaux sont supposés obéir au critère de **Von Mises** [160] (ou critère de Maxwell–Huber–Hencky–Mises), fonde son critère sur le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes. Ceci a pour conséquence, que la surface définie par Mises est un cylindre dans l'espace des contraintes principales avec la trisectrice du repère comme axe de révolution.

La plasticité du composite étant gouvernée par celle de la matrice, alors le critère global de plasticité sera obtenu à partir de celui de la matrice.

Nous supposons que la matrice obéit ponctuellement au critère de Von Mises qui s'écrit en tout point P de Ω.

$$f = J_2\left(\sigma^d(P) - x(P)\right) \tag{II.36}$$

Ou :

$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ est le déviateur des contraintes en tout point P.

Le critère moyen s'écrit donc :

$$J_2\left(\sigma_1^d - x_1\right) - k \leq 0 \tag{II.37}$$

Ou :

$J_2\left(\sigma^d\right) = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma^d : \sigma^d)}$ est le second invariant du tenseur des contraintes.

Ainsi : $J(\Sigma - X) = J_2\left(\sigma_1^d - x_1\right)$ (II.38)

Soit : $J_2(\Sigma - X) - k \leq 0$

II. 4.1. Modèle d'endommagement de Mazars :

Le modèle de comportement de **Mazars** ([144], [145]) permet de décrire le comportement élastique endommageable. On utilisera un modèle tridimensionnel, isotrope et qui s'appuie sur un critère d'endommagement écrit en déformation et décrivant la dissymétrie traction-compression.

Le modèle de **Mazars** ([144], [145]) a été élaboré dans le cadre de la mécanique de l'endommagement. La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = (1 - D)E\,\varepsilon^{e} \tag{II.39}$$

Avec :

E : La matrice de Hooke,

D : La variable d'endommagement,

ε^{e} : La déformation élastique.

La variable d'endommagement D est comprise entre 0 : matériau sain, et 1 : matériau rompu. L'endommagement est piloté par la déformation équivalente ε_{eq} qui permet de traduire un état triaxial par une équivalence à un état uni-axial. Comme les extensions sont primordiales dans le phénomène de fissuration du béton, la déformation équivalente introduite est définie à partir des valeurs propres positives du tenseur des déformations, soit :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle\varepsilon\rangle_{+} : \langle\varepsilon\rangle_{+}} \tag{II.40}$$

Où dans le repère principal du tenseur de déformations :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle\varepsilon_1\rangle_{+}^{2} + \langle\varepsilon_2\rangle_{+}^{2} + \langle\varepsilon_3\rangle_{+}^{2}} \tag{II.41}$$

Sachant que la partie positive $\langle\ \rangle_{+}$ est définie de telle sorte que, si ε_i est la déformation principale dans la direction i :

$$\begin{cases} \langle\varepsilon_i\rangle_{+} = \varepsilon_i \text{ si } \varepsilon_i \geq 0 \\ \langle\varepsilon_i\rangle_{+} = 0 \text{ si } \varepsilon_i < 0 \end{cases} \tag{II.42}$$

ε_{eq} : est un indicateur de l'état de tension dans le matériau qui génère l'endommagement. Cette grandeur définit la surface de charge f telle que :

$$f = \varepsilon_{eq} - K(D) = 0 \qquad (II.43)$$

Avec :

$K(D) = \varepsilon_{eq}$ si $D = 0$.

ε_{d0} : La déformation seuil d'endommagement.

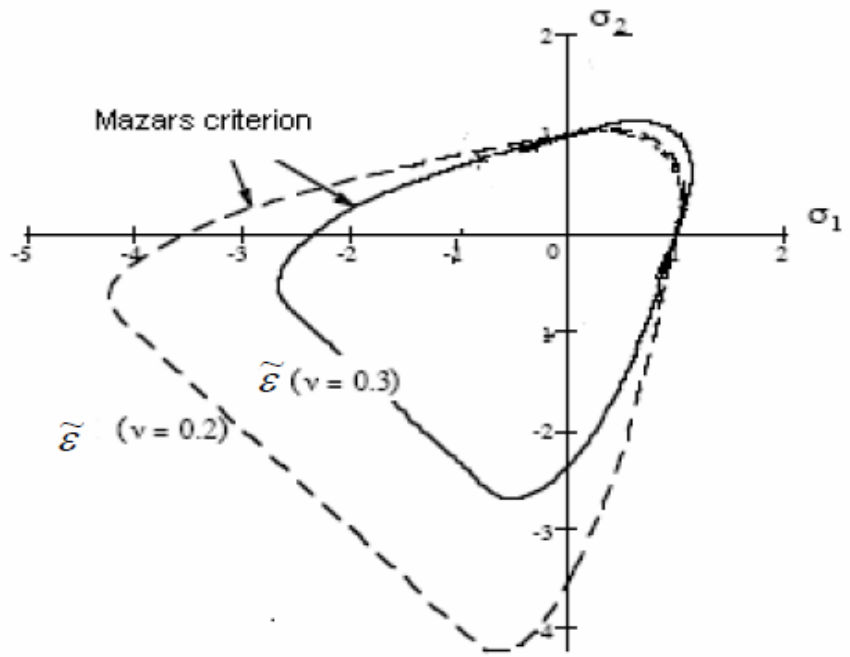

Fig. II.9. Tracé de la zone seuil dans le plan de contrainte (σ_1 , σ_2) du modèle de Mazars [145].

Lorsque la déformation équivalente atteint cette valeur, l'endommagement s'active. D est défini comme une combinaison de deux modes d'endommagement définis par D_t et D_c, variant entre 0 et 1 selon l'état d'endommagement associé, et correspondant respectivement à l'endommagement en traction et en compression. La relation liant ces variables est la suivante :

$$D = \alpha_t^{\beta} D_t + \alpha_c^{\beta} D_c \qquad (II.44)$$

β : est un coefficient qui a été introduit ultérieurement pour améliorer le comportement en cisaillement. Usuellement la valeur de β est fixée à 1,06.

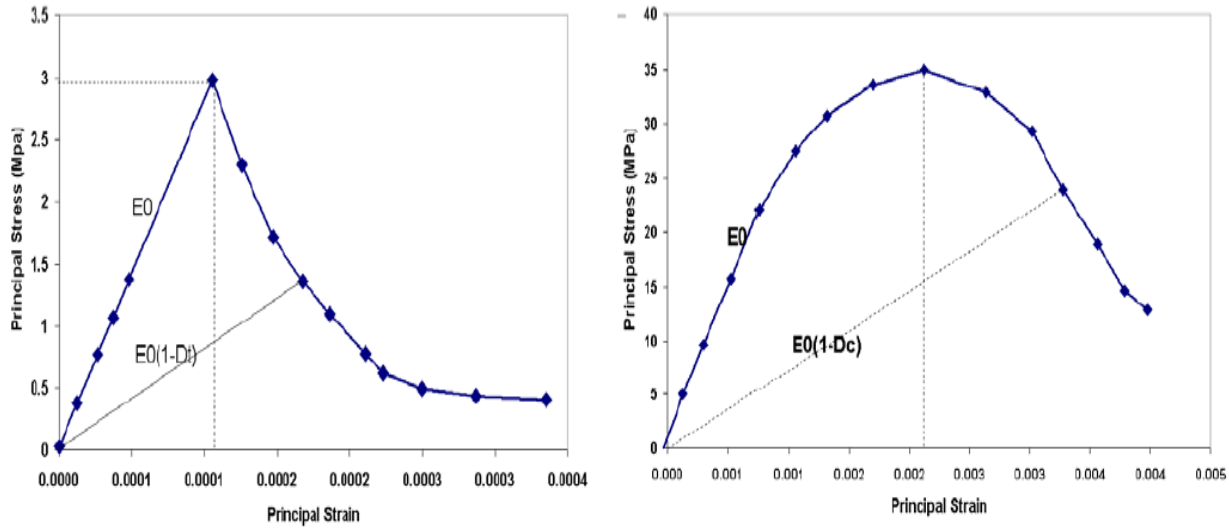

Fig. II.10. Modèle de Mazars en traction et en compression [145].

Les coefficients α_t et α_c réalisent un lien entre l'endommagement et l'état de traction ou de compression. Lorsque la traction est activée $\alpha_t = 1$ alors que $\alpha_c = 0$ et inversement en compression.

Une particularité de ce modèle est son écriture explicite, ce qui implique que toutes les grandeurs se calculent directement sans utiliser un algorithme de linéarisation comme celui de Newton-Raphson. Ainsi, les lois d'évolution des endommagements D_t et D_c s'expriment seulement à partir de la déformation équivalente ε_{eq}.

$$D_t = 1 - \frac{(1-A_t)}{\varepsilon_{eq}} - A_t \exp\left(-B_t\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)\right) \quad \text{(II.45)}$$

$$D_c = 1 - \frac{(1-A_c)}{\varepsilon_{eq}} - A_c \exp\left(-B_c\left(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}\right)\right) \quad \text{(II.46)}$$

Avec :

A_t , A_c , B_t , et B_c : sont des paramètres matériaux à identifier.

Ces paramètres permettent de moduler la forme de la courbe post-pic. Ils sont obtenus à l'aide d'essais de traction et d'un essai de compression.

II. 4.1.1. Implémentation du modèle de Mazars dans le code de calcul Abaqus :

Le modèle de **Mazars** ([144], [145]) simulant un comportement élastique-endommageable isotrope, est implémenté dans le code de calcul Abaqus. L'algorithme ainsi obtenu est présenté sur la figure (Fig. II.11).

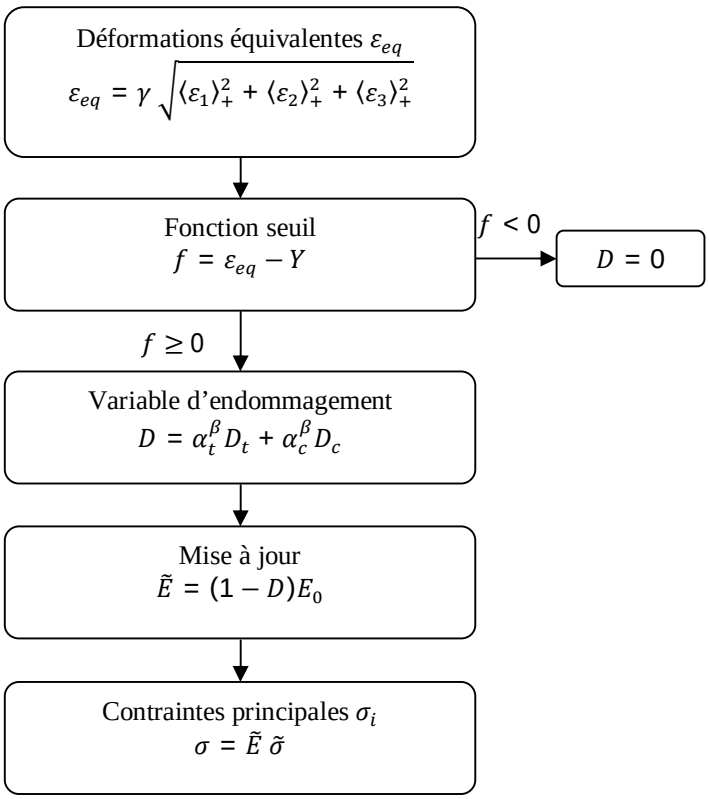

Fig. II.11. Schéma de l'algorithme du modèle d'endommagement de Mazars.

II. 4.2. Modèle d'endommagement de Bouafia et al. :

Pour décrire le comportement du béton de fibres en traction, on a choisi les relations proposées par **Bouafia et al.** ([146], [147]) dans le cadre de la théorie des poutres avec prise en compte du dommage. Les fibres sont dispersées dans le béton de façon aléatoire et la modélisation est effectuée en considérant une répartition uniforme.

La variable du dommage en traction uni axiale, est donnée par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\mathrm{ft}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{u}} \quad \Rightarrow \quad D_{t1}(\varepsilon) = 1 - \dfrac{\sigma_{uc}}{E_{ct}\,\varepsilon_{\mathrm{t}}} - \left[\dfrac{(\sigma_{uc} - f_{ft})\,(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{u}})^6}{(E_{ct}\,\varepsilon_{\mathrm{t}})\,(\varepsilon_{\mathrm{ft}} - \varepsilon_{\mathrm{u}})^6}\right] \\ \varepsilon_{\mathrm{u}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\mathrm{r}} \quad \Rightarrow \quad D_{t2}(\varepsilon) = 1 - \dfrac{\sigma_{uc}}{E_{ct}\,\varepsilon_{\mathrm{t}}} . \left[1 - \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{u}})^6}{(\varepsilon_{\mathrm{r}} - \varepsilon_{\mathrm{u}})^6}\right] \end{cases} \tag{II.47}$$

L'endommagement est évolutif dans le domaine des déformations. Pour un état de traction uni axiale, la déformation équivalente $\left(\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon(D_{t1}, D_{t2})\right)$ dans le domaine non linéaire est tel que :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \Rightarrow \varepsilon(D_{t1}) = \frac{\sigma}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E_{ct}(1-D_{t1})} = \frac{\varepsilon}{(1-D_{t1})} \\ \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon(D_{t2}) = \frac{\sigma}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E_{ct}(1-D_{t2})} = \frac{\varepsilon}{(1-D_{t2})} \end{cases} \quad \text{(II.48)}$$

Et

$$\varepsilon_{ft} \leq \varepsilon(D_{t1}) \leq \varepsilon_r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(\varepsilon, D_{t1}) = \varepsilon(D_{t1}) - \varepsilon_{ft} \geq 0 \\ f(\varepsilon, D_{t2}) = \varepsilon(D_{t2}) - \varepsilon_r \geq 0 \end{cases} \quad \text{(II.49)}$$

La fonction seuil définit deux états limites :

- Un état élastique (ε_{ft}).
- Une limite a la rupture donnée par la valeur (ε_r).

$$\text{Tel que :} \quad f(\varepsilon, D_{t1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_{ft} \Leftrightarrow D_{t1} = 0 \\ \varepsilon = \varepsilon_r \Leftrightarrow D_{t2} = 0 \end{cases} \quad \text{(II.50)}$$

Avec :

□ : Pourcentage en volume des fibres,
θ_0 : Coefficient d'orientation des fibres,
l_r : Longueur de référence,
β : Constante du modèle,
h : Hauteur de la section transversale de la matrice béton,
l_f : Longueur d'une fibre,
E_f : Module élastique de la fibre,
E_{b0} : Module initial de la matrice béton en compression,
n : Coefficient d'équivalence acier-béton,
τ_u : Contrainte d'adhérence ultime fibre-matrice béton,
□ : Diamètre d'une fibre,
f_{ft} : Résistance à la traction du composite,
ε_{ft} : Déformation de fissuration de la matrice béton,
ε_{rf} : Déformation de rupture des fibres,
ε_{rt} : Déformation de rupture du composite en traction.

La contrainte ultime maximale du composite (fonction des caractéristiques des fibres) :

$$\sigma_{uc} = \frac{\bar{\omega}.\theta_0.l_f.\tau_u}{\phi} \quad \text{(II.51)}$$

La longueur de référence est liée à la hauteur de la section h :

$$l_r = \beta.h \quad \text{(II.52)}$$

Le module initial du composite en traction, est donné par :

$$E_{ct} = E_{b0}.(1 + n.\theta_0.\bar{\omega}) \quad \text{(II.53)}$$

La déformation ultime correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres-matrice est donnée par :

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{ft} + \frac{\tau_u.{l_f}^2}{3.E_f.\phi.\beta.h} \quad \text{(II.54)}$$

Lorsqu'il y a arrachement des fibres, la déformation de rupture du composite est donnée par :

$$\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{ft} + \frac{\tau_u.{l_f}^2}{3.E_f.\phi.\beta.h} + \frac{l_f}{4.\beta.h} \quad \text{(II.55)}$$

Cette déformation est une conséquence d'une ouverture des fissures trop importante. Où, cette déformation de rupture des fibres est limitée comme suite (Fig. II.12) :

$$\varepsilon_{rt} = \varepsilon_{ft} \quad \text{(II.56)}$$

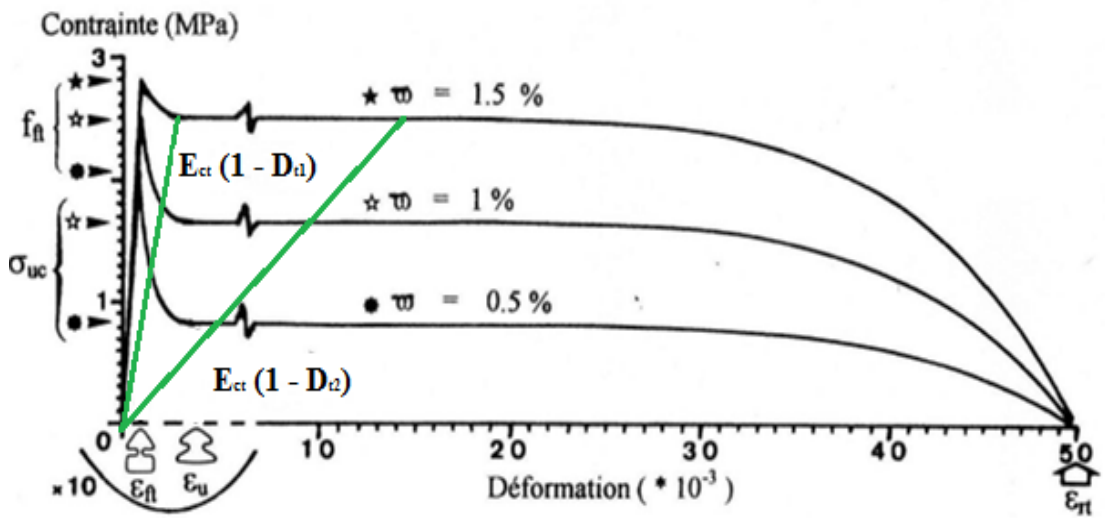

Fig. II.12. Loi de comportement ($\sigma - \varepsilon$) en traction du béton de fibres en acier ([146], [147]).

II.4.2.1. Implémentation du modèle de Bouafia et al dans le code de calcul Abaqus :

Le modèle de **Bouafia et al.** ([146], [147]) simulant un comportement élastique-endommageable isotrope en traction, est implémenté dans le code de calcul Abaqus. L'algorithme ainsi obtenu est présenté sur la figure (Fig. II.13).

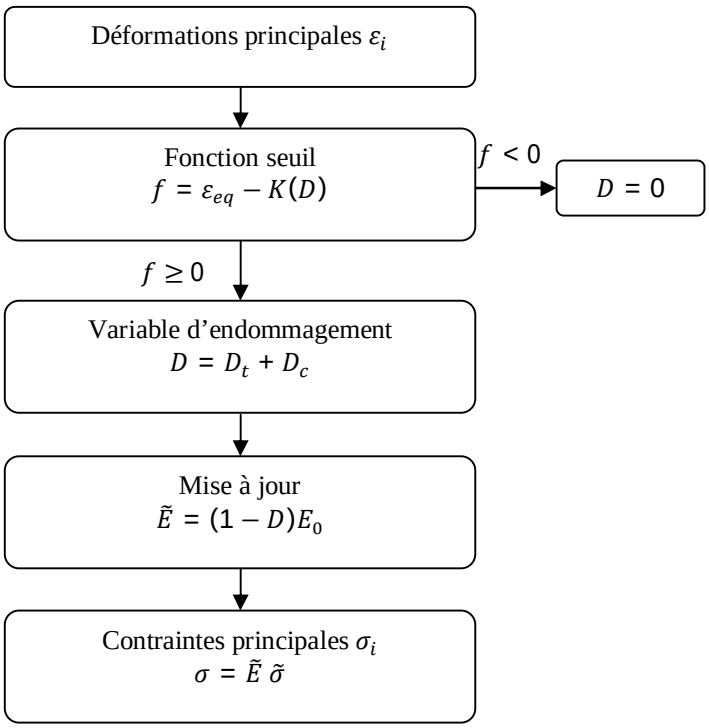

Fig. II.13. Schéma d'implémentation de l'algorithme du modèle d'endommagement de Bouafia et al.

II. 4.3. Organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement :

L'organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement dans un problème d'homogénéisation périodique est présenté ci-dessous (Fig. II.14) :

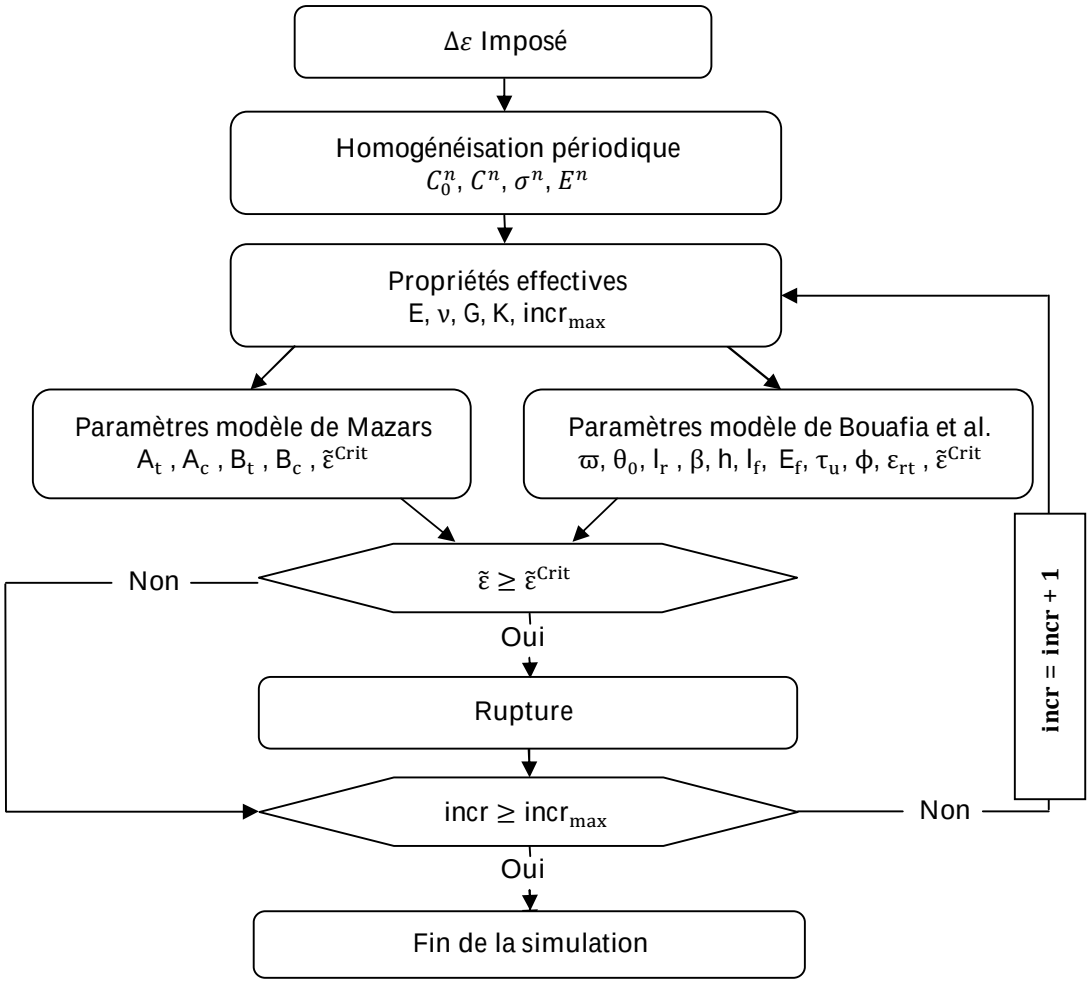

Fig. II.14. Organigramme de recherche et d'introduction de l'endommagement.

II.5.Extension de l'homogénéisation périodique à des comportements non linéaires

II.5.1. Homogénéisation non linéaire des composites hétérogènes élasto-plastique :

Dans cette présente étude, il y a lieu de résoudre numériquement un problème local consistant en la loi de comportement qui est non linéaire, ou on utilisera une méthode d'homogénéisation non linéaire issue des travaux de **T. H. Hoang** [161] pour les matériaux composites hétérogènes élasto-plastiques.

Ainsi, le problème d'homogénéisation périodique avec comportement non linéaire des matériaux composites hétérogènes (élasto-plastique) est résolu numériquement par une méthode incrémentale, on faisant une linéarisation de l'incrément de chargement, quant au tenseur effectif élastique tangent est obtenu par une méthode de superposition du chargement. Dans cette présente étude, une méthode numérique incrémentale sera utilisée pour résoudre les lois de comportement effectif.

Pour commencer, les déformations et contraintes microscopiques d'un volume élémentaire représentatif (VER) sont liées aux quantités macroscopiques, ils sont présentés par les relations suivantes :

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon(x) \rangle \tag{II.57}$$

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma(x) \rangle \tag{II.58}$$

Ou : $\langle . \rangle$ indique l'opération de moyenne sur le domaine Ω.

Le problème d'homogénéisation consiste à chercher $\varepsilon(x,t)$ tel que :

$$\text{div}\,\sigma\big(x, q(t)\big) = 0 \qquad \text{dans}\ \Omega \tag{II.59}$$

$\varepsilon(x)$: est un champ de déformations macroscopique ;
$q(t)$: est un vecteur de variables internes au niveau microscopique.

Dans cette étude, on utilisera une approche incrémentale numérique pour résoudre le problème non linéaire, et cela en utilisant une méthode de linéarisation afin de déterminer numériquement l'opérateur tangent effectif.

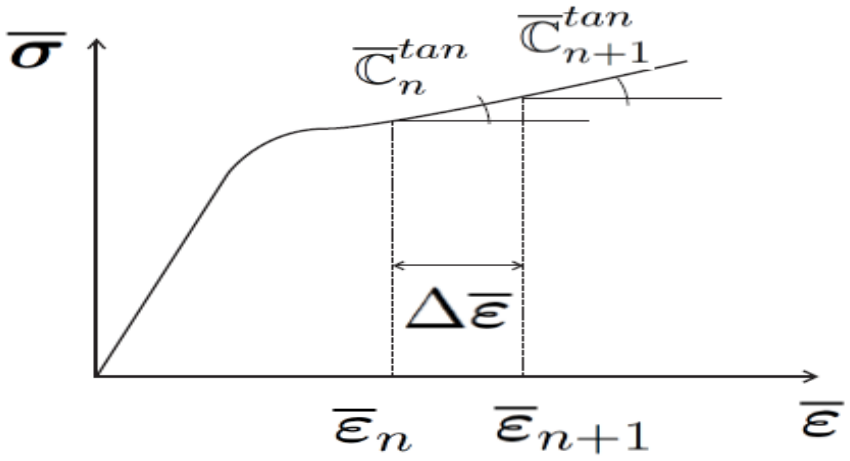

Fig. II.15. Modélisation incrémentale du comportement effectif [161].

Pour un problème d'homogénéisation élastique linéaire, on a :

$$R_1 = \text{div}\,\sigma(x, q, t) \tag{II.60}$$

La discrétisation du temps est sous la forme ci-dessous :

$$T = \{0, t_1, t_2, \dots\dots, t_n, t_{n+1}, \dots, T\} \tag{II.61}$$

Et on posant :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_n \tag{II.62}$$

$$\varepsilon(t + \Delta t) = \varepsilon_{n+1} \tag{II.63}$$

Après une approximation, on obtient :

$$\dot{\varepsilon}(t_{n+1}) \backsimeq \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t} \tag{II.64}$$

Puis en faisant un développement de Taylor de R_1 à l'ordre 1, on obtient :

$$R_1(\varepsilon_{n+1}) = R_1(\varepsilon_n) + D_{\Delta u}\, R_1(\varepsilon_n) \tag{II.65}$$

A partir de l'équation (II.65), conduit au problème linéarisé à l'instant *t* :

$$D_{\Delta u}\, R_1(\varepsilon_n) = -R_1(\varepsilon_n) \tag{II.66}$$

Ou : $D_{\Delta u}$: est la dérivée directionnelle, qui est définie par :

$$D_v\, f(u) = \left[\frac{d}{d\epsilon} f(u + \epsilon v)\right]_{\epsilon=0} \tag{II.67}$$

On obtient, à partir de l'équation (II.66) :

$$D_{\Delta u}\, R_1(\varepsilon_n) = \text{div}\left(D_{\Delta u}\, \sigma(\varepsilon)\right) = \text{div}\left(\frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} : D_{\Delta u}\, \varepsilon\right) \quad \text{(II.68)}$$

$$D_{\Delta u}\, R_1(\varepsilon_n) = \text{div}\left(C^{\tan} : \varepsilon(\Delta u)\right) = \text{div}\left(C^{\tan} : \Delta\varepsilon\right) \quad \text{(II.69)}$$

En introduisant la discrétisation en temps, l'équation (II.68) s'exprime comme suite :

$$\varepsilon(t + \Delta t) = \bar{\varepsilon}(t + \Delta t) \quad \text{(II.70)}$$

Sachant que :

$$\langle \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1} \rangle = \bar{\varepsilon}_n + \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.71)}$$

En supposant $\langle \varepsilon_n \rangle = \Delta\bar{\varepsilon}_n$ vérifiée, on obtient :

$$\langle \Delta\varepsilon_{n+1} \rangle = \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.72)}$$

Finalement, on aboutit au problème linéarisé à l'instant t_n:

$$\text{div}\left(C_n^{\tan} : \Delta\varepsilon_{n+1}\right) = -\text{div}\left(\sigma_n\right) \quad \text{(II.73)}$$

Avec :

$$\langle \Delta\varepsilon(x)_{n+1} \rangle = \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.74)}$$

Le problème traité ci-dessus étant linéaire, alors il est possible d'appliquer le principe de superposition.

La solution $\Delta\varepsilon_{n+1}(x)$ peut alors être reliée à l'incrément de déformation macroscopique $\Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}$ par le biais d'un tenseur de localisation $A_{n+1}(x)$ tel que :

$$\langle \Delta\varepsilon_{n+1}(x) \rangle = A_{n+1}(x) : \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.75)}$$

Avec :

$$\left[A_{ijkl}\right]_{n+1}(x) = \varepsilon_{ij}^{(kl)}(x) \quad \text{(II.76)}$$

Où : $\varepsilon_{ij}^{(kl)}(x)$ est la solution locale du problème de l'équation (II.73)

Avec :

$$(\Delta\bar{\varepsilon}_{kl})_{n+1} = \frac{1}{2}(e_k \otimes e_l + e_l \otimes e_k) \quad \text{(II.77)}$$

Où : e_i, (i = 1, 2 en 2D) : sont des vecteurs unitaires de base.

La condition de l'équation (II.74) peut être vérifiée pour l'une des conditions suivantes sur $\partial\Omega$:

$$\Delta u(x) = \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}\, x + \tilde{u} \quad \text{(II.78)}$$

$$\Delta u(x) = \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1}\, x \quad \text{(II.79)}$$

Où : $\tilde{u}$ est une fluctuation de l'incrément de déplacement périodique.

Connaissant l'expression de $C_n^{tan}(x)$, exprimer comme suite :

$$\dot{\sigma}(x,t) = C^{tan}(x,t) : \dot{\varepsilon}(x,t) \quad \text{(II.80)}$$

En remplace l'équation (II.80) par l'approximation suivante :

$$\Delta\sigma(x) = C_n^{tan}(x, q_n) : \Delta\varepsilon_{n+1}(x,t) \quad \text{(II.81)}$$

En utilisant l'équation (II.75), on obtient :

$$\Delta\sigma(x) = C_n^{tan}(x, q_n) : A_{n+1}(x) : \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.82)}$$

En prenant la moyenne spatiale de l'équation (II.82) :

$$\langle\Delta\sigma(x)\rangle = \langle C_n^{tan}(x, q_n) : A_{n+1}(x)\rangle : \Delta\bar{\varepsilon}_{n+1} \quad \text{(II.83)}$$

On définit le module tangent homogénéisé :

$$\bar{C}_{n+1}^{tan} = \langle C_n^{tan}(x, q_n) : A_{n+1}(x)\rangle \quad \text{(II.84)}$$

Connaissant la relation macro :

$$\dot{\sigma} = \bar{C}^{tan} : \dot{\varepsilon} \quad \text{(II.85)}$$

Elle peut être remplacée par la relation ci-dessous :

$$\overline{\sigma}_{n+1} = \overline{\sigma}_{n+1} + \overline{C}^{tan}_{n+1} \ \Delta\overline{\varepsilon}_{n+1} \quad (II.86)$$

Sachant :

$$\varepsilon_{n+1}(x) = \varepsilon_n(x) + A_{n+1}(x) : \Delta\overline{\varepsilon}_{n+1} \quad (II.87)$$

La forme associée à $A_{n+1}(x)$ est donné par :

$$A_{n+1}(x) = B(x)\, U^e \quad (II.88)$$

Avec :
B(x) : Une matrice de dérivées de fonctions de forme ;
U^e : Les vecteurs de déplacements nodaux dans les éléments obtenus par la résolution des différents problèmes élémentaires.

II. 5.2. Algorithme d'homogénéisation non linéaire :

L'algorithme d'homogénéisation non linéaire est résumé par les étapes suivantes :

1- Initialiser $\varepsilon_0(x) = 0$; $q_0(x) = 0$; $C_0^{tan}(x) = C(x)$; $\overline{\sigma}_0(x) = 0$; $\overline{C}_0^{tan} = \overline{C}$;

2- Connaissant $q_n(x)$; $\varepsilon_n(x)$; $C_n^{tan}(X)$; $\overline{\sigma}_n$; $\overline{C}_n^{tan}$;

3- Calculer le tenseur de localisation $A_{n+1}(x)$;

4- Calculer $\overline{C}_{n+1}^{tan} = \langle C_n^{tan}(q_n) : A_{n+1}(x) \rangle$;

5- Actualiser les variables internes q_{n+1} ;

6- Actualiser le champ de déformations microscopiques dans le VER ;

$$\varepsilon_{n+1}(x) = \varepsilon_n(x) + A_{n+1}(x) : \Delta\overline{\varepsilon}$$

7- Calculer le module tangent ;

8- Actualiser les contraintes macroscopiques.

$$\overline{\sigma}_{n+1} = \overline{\sigma}_n + \overline{C}_{n+1}^{tan} : \Delta\overline{\varepsilon}$$

II. 5.3. Organigramme d'homogénéisation non linéaire :

L'organigramme général d'homogénéisation non linéaire est présenté ci-dessous (Fig. II.16) :

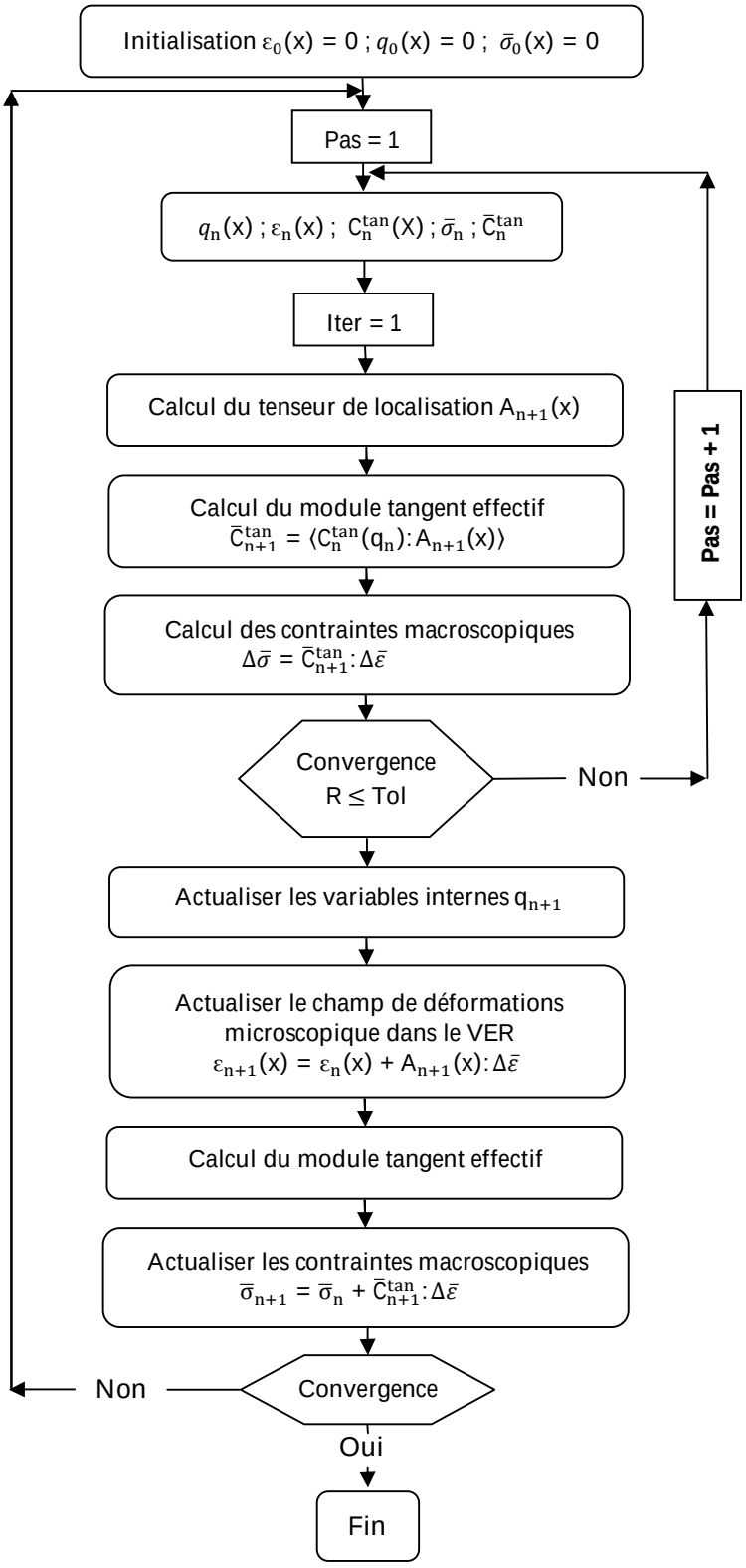

Fig. II.16. Organigramme d'homogénéisation non linéaire.

II. 5.4. Équations constitutives :

Le comportement élasto-plastique d'un matériau est défini par sa déformation élastique et sa déformation plastique, mais aussi par un critère de plasticité, une loi d'écoulement et d'écrouissage.

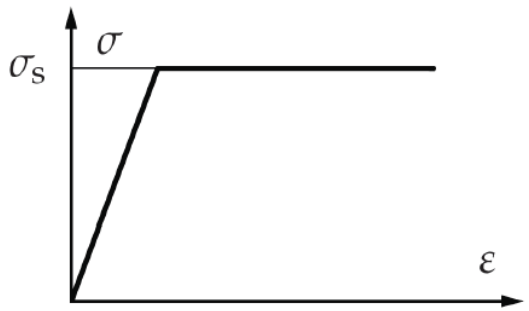

Fig. II.17.a. Essai de traction pour un matériau élastique parfaitement plastique [162].

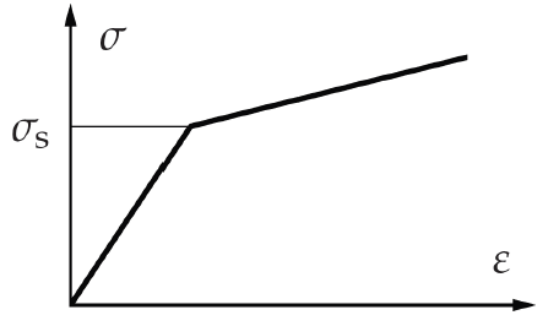

Fig. II.17.b. Essai de traction pour un matériau avec écrouissage isotrope linéaire [162].

II. 5.4.1. Matériaux avec écrouissage :

Il existe deux types d'écrouissage : l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. La frontière d'écoulement, dépend de l'historique de chargement subi par le matériau.

II. 5.4.1.1. L'écrouissage isotrope :

La surface d'écoulement augmente de façon homothétique avec la déformation de Von Mises.

$$f(\sigma, R_e) = \frac{\sigma}{R_e(\bar{\varepsilon}^p)} = 1 \qquad \text{(II.89)}$$

$\bar{\varepsilon}^p$ *:* Est une mesure de la déformation plastique cumulée.
R_e : La limite de plastification correspondante à la déformation plastique cumulée $\bar{\varepsilon}^p$.

La figure (Fig. II.18) donne pour un matériau subissant un écrouissage isotrope son évolution de la frontière.

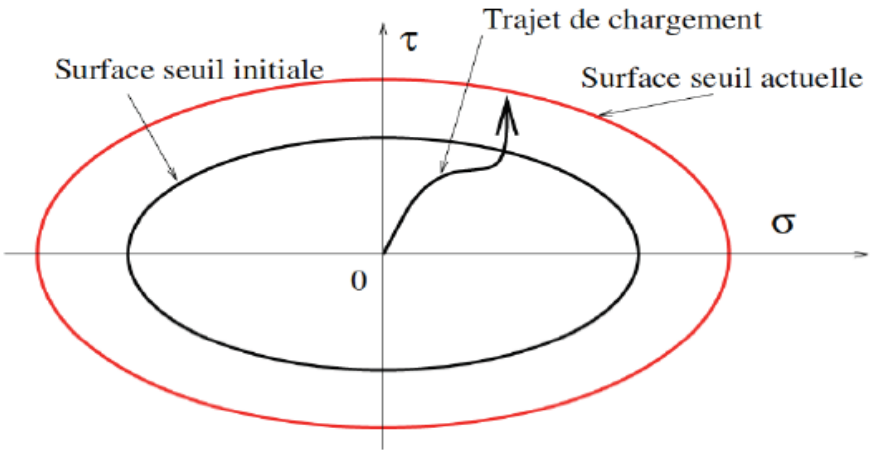

Fig. II.18. Modification de la surface seuil pour un écrouissage isotrope [163].

La loi d'écrouissage s'exprime par une fonction de loi de puissance, qui est donnée comme suite :

$$\bar{\sigma} = R_e = \sigma_0 \left(1 + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0}\right)^n \quad \text{(II.90)}$$

σ_0 : est la contrainte d'écoulement initiale (sans déformation plastique),
ε^p : est la déformation plastique cumulée,
n : est le taux d'écrouissage.

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad \text{(II.91)}$$

Le taux d'écrouissage n varie entre 0 et 1.

Si $n = 0$, le matériau est élastique parfaitement plastique.

n est généralement proche de 0,3 à 0,5 pour des déformations a froid.

Cependant, pour beaucoup de matériaux à matrice métalliques, le coefficient n n'est pas constant pendant la déformation et si une déformation plastique augmente, alors il a tendance à diminuer.

La cause principale de la diminution du coefficient d'écrouissage est la recristallisation des matériaux à matrice métalliques. Cependant, ce phénomène est significatif pour la déformation à chaud.

II. 5.4.1.2. L'écrouissage cinématique :

L'écrouissage cinématique rentre dans le cadre de la formulation standard dans la plasticité de Von Mises, les variables d'écrouissage sont soustraites au tenseur de contraintes, avant de calculer l'invariant de Von Mises. Le critère de plastification s'écrit alors :

$$f\left(\bar{\bar{\sigma}}, \bar{\bar{X}}, R_e\right) = \frac{\left(\overline{\bar{\sigma} - \bar{\bar{X}}}\right)}{R_e} \qquad \text{(II.92)}$$

$\left(\overline{\bar{\sigma} - \bar{\bar{X}}}\right)$: représente l'invariant de Von Mises, qui est calculé à partir de la différence des tenseurs contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ et de la variable cinématique $\bar{\bar{X}}$.

L'évolution possible de la frontière d'un matériau subissant un écrouissage cinématique est représentée à la figure (Fig. II.19).

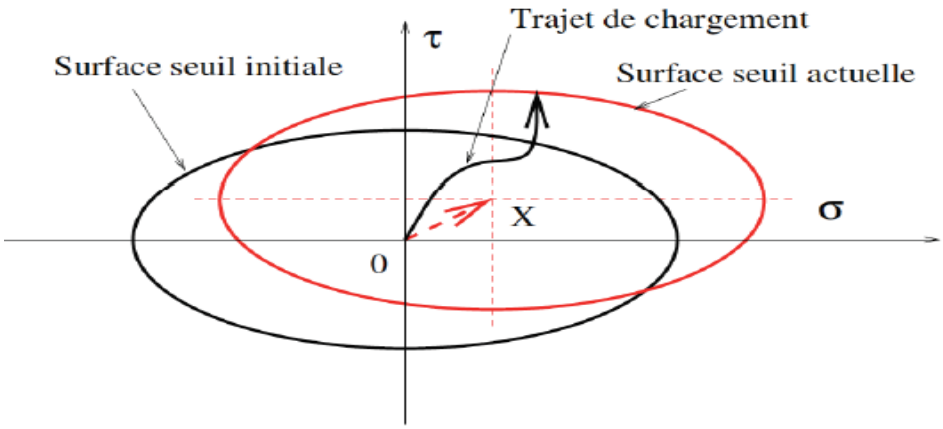

Fig. II.19. Modification de la surface seuil pour un écrouissage cinématique [163].

Les conditions de « charge – décharge » s'expriment comme suite :

Domaine élastique si : $f(\sigma, R) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}\right)$

Décharge élastique si : $f(\sigma, R) = 0$ et $\left(\dot{f}(\sigma, A_i)\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}\right)$

Écoulement plastique si : $f(\sigma, R) = 0$ et $\left(\dot{f}(\sigma, A_i)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}^p\right)$

La variable d'écrouissage R qui intervient dans f est exprimée comme suite :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - \sigma_y \qquad \text{(II.93)}$$

R : Est la dimension du domaine d'élasticité.

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la déformation plastique cumulée p, variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique :

$$\dot{p} = |\dot{\varepsilon}^p| \tag{II.94}$$

Il n'y a pas de différence pour un chargement monotone croissant. Dans ce cas, il faut vérifier que la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité.

Pour l'écrouissage isotrope :

$$\sigma = R + \sigma_y \tag{II.95}$$

Pour l'écrouissage cinématique, cela s'écrit :

$$\sigma = X + \sigma_y \tag{II.96}$$

II. 6. Conclusions :

Le travail présenté dans ce chapitre, a consisté à faire une modélisation numérique de l'homogénéisation périodique pour déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées effectives des composites à comportement élastique. Cette méthode retenue consiste en la résolution d'un problème de localisation, en y introduisant des degrés de liberté supplémentaires supportant les composantes des déformations macroscopiques. Les relations linéaires entre les degrés de liberté supplémentaires sont prises en compte par une méthode d'élimination via le code de calcul Abaqus. On a utilisé un pilotage à déformation moyenne imposée qui consiste à imposer la valeur des degrés de liberté supplémentaires ou les forces nodales associées.

Une fois que les caractéristiques mécaniques homogénéisées sont appréciées en l'absence de l'endommagement amorcé par les microfissures et micro cavitations, on a pu introduire des modèles d'endommagement dans le problème de l'homogénéisation par une démarche de relocalisation, et cela à l'aide de Subroutines (Umat) implémentées en langage Fortran sur le code de calcul Abaqus. Où, on a appliqué le modèle de **Mazars** ([144], [145]) pour des composites à grains (inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales), et le modèle de **Bouafia et al.** ([146], [147]) pour des composites à fibres (inclusions cylindriques).

Enfin, on a fait une modélisation numérique du comportement non linéaire de l'homogénéisation périodique pour des matériaux composites hétérogènes élasto-plastiques, ou on a utilisé une méthode d'homogénéisation non linéaire issue des travaux de **T. H. Hoang** [161]. A chaque incrément de chargement, le principe de superposition (linéarisation du problème) est effectué permettant de calculer numériquement le tenseur élastique tangent effectif, puis on a utilisé la méthode des éléments finis afin de déterminer les différents opérateurs nécessaire au calcul du tenseur élastique tangent.

CHAPITRE III

FIABILITÉ ET APPLICATION DU COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE

Sommaire

III. 1. Introduction 74
III. 2. Variables de base 75
III. 3. Fonction d'état limite 75
III. 4. Probabilité de défaillance 75
III. 5. Transformation isoprobabiliste 76
III. 6. Indice de fiabilité 77
III. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell 77
III. 6.2. Indice de Hasofer et Lind 79
III. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant 79
III. 8. Recherche du point de conception 80
III. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL} 81
III. 9.1. Résumé de l'algorithme 83
III. 9.2. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) 84
III. 9.3. Exemple illustratif 85
III. 10. Couplage mécano-fiabiliste 86
III. 10.1. Introduction 86
III. 10.2. Méthode par surface de réponse 87
III. 10.2.1. Surface de réponse analytique 88
III. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse 89
III. 11. Application du couplage mécano-fiabiliste au pont à poutres triangulées 90
III. 12. Conclusions 98

III. 1. Introduction :

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : rapport entre une variable de chargement et une variable de résistance établie par une approche déterministe. Pour une structure complexe ses efforts sont mal connus, et sa résistance est incertaine, alors il existe toujours un risque de voir la structure ruinée. Pour cela, l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de fiabilité des systèmes mécaniques développés au cours de ces dernières années, ces méthodes d'évaluation de la fiabilité peuvent être classées par niveaux :

- Niveau 1 : méthode de dimensionnement assurant un certain niveau de sécurité par l'utilisation de coefficient de sécurité partielle, appliquée aux valeurs caractéristiques des différentes variables, qui ne sont alors définies que par un paramètre.

- Niveau 2 : méthode utilisant des calculs itératifs pour obtenir une approximation de la surface de ruine par son hyperplan tangent au point le plus proche de l'origine, lorsque la fonction a été transformée dans un espace de variables normales centrées réduit. À la place de la probabilité de ruine, on utilise la notion d'indice de sécurité, qui ne dépend que des moyennes et des variances. Elle regroupe les méthodes d'approximation FORM et SORM, et les méthodes de surface de réponse.

- Niveau 3 : méthode déterminant la probabilité de ruine exacte d'une structure ou dans le cas de la résistance, la probabilité de ruine d'un élément de construction. Ces méthodes utilisent une description probabiliste exacte des différentes variables, et tiennent compte de leurs caractéristiques individuelles réelles. Elle regroupe les méthodes de simulation, dans la pratique, les méthodes de simulation de Monte-Carlo sont utilisées pour valider les résultats obtenus par les méthodes (FORM, SORM).

On se propose dans ce chapitre, de faire dans une première étape, une étude fiabiliste (méthode d'hasofer-lind de niveau 2) permettant la vérification de la fiabilité des structures, puis dans une seconde étape d'assurer un dialogue entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste avec une méthode de couplage indirecte par surface de réponse. Une présentation exhaustive des techniques et méthodes proposées par la théorie de la fiabilité peut être trouvées dans les références [164],[165], [166], [167].

III. 2. Variables de base :

Appelées aussi variables de conception, elles sont les composantes d'un vecteur X. Ce sont des variables aléatoires d'entrée d'un calcul de fiabilité. Elles sont caractérisées par une loi de densité conjointe de probabilité $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots)$, où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est le vecteur des réalisations des variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Cette information est souvent indisponible, elle est limitée à la connaissance des deux propriétés suivantes :

- La loi marginale de chaque variable X_i: $f_{X_i}(x_i)$;
- La corrélation entre chaque couple de variables (X_i, X_j) : $\rho_{ij}(X_i, X_j)$.

III. 3. Fonction d'état limite :

Appelée aussi fonction de performance et notée $G(X)$, son intersection avec l'hyperplan des variables définit la frontière entre le domaine de sécurité *Ds* et le domaine de ruine *Df*. Une valeur positive de G signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité, et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant $G(X) = 0$ est appelée courbe d'état limite. Lorsque la fonction d'état s'écrit sous la forme de la différence d'une résistance et d'une sollicitation *G* = *R*-*S*, elle est appelée marge de sécurité et notée *M*. Cette fonction d'état limite nous permet donc de préciser au-delà duquel le système physique étudié n'est plus considéré comme fiable.

III. 4. Probabilité de défaillance :

C'est la probabilité d'avoir une valeur négative d'une réalisation de la fonction d'état $G(X)$, elle est notée P_f (probability of failure).

Dans le cas général, on peut écrire $G(X)$ comme la différence de la résistance de la structure R et de la sollicitation S, comme suit :

$$G(X) = R - S \qquad \text{(III.1)}$$

À partir de l'équation (III.1), on peut dire qu'un scénario de fonctionnement est produit lorsque la disponibilité d'une résistance est supérieure à la sollicitation, et dans le cas contraire (c.-à-d. la disponibilité d'une résistance est inférieure ou égale à la sollicitation) on aura un scénario de non-fonctionnement.

La fiabilité est alors définie par :

$$P_r = P(G(X) > 0) = \int_{G(X)>0} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \quad \text{(III.2)}$$

La probabilité de défaillance est le complément à 1 de la fiabilité :

$$P_f = 1 - P_r = \int_{G(X)\leq 0} f_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \quad \text{(III.3)}$$

Où : $f_x(x_1, \dots, x_n)$ représente la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x.

Lorsque les n variables aléatoires X_i de base sont indépendantes, l'expression de la densité de probabilité conjointe est égale au produit de toutes les densités de chaque variable :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \quad \text{(III.4)}$$

III. 5. Transformation isoprobabiliste :

La transformation du vecteur aléatoire x dans l'espace physique en un vecteur aléatoire gaussien centré réduit u, dont la moyenne est zéro et la matrice de covariance est la matrice unitaire, est nécessaire à la détermination du point de conception. Si les variables sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation T la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable x_i en une variable u_i normale centrée réduite par :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i \Leftrightarrow \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad \text{(III.5)}$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1) et F_{X_i} la fonction de distribution de la variable x_i. On obtient donc :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i)\right) \quad \text{(III.6)}$$

Réciproquement, si F_{X_i} est inversible pour toute valeur de x_i , la transformation inverse est définie :

$$u_i \xrightarrow{T^{-1}} x_i = {F_{X_i}}^{-1}\left(\Phi(u_i)\right) \quad \text{(III.7)}$$

La fonction d'état limite est notée dans le nouvel espace gaussien comme suit :

$$H(u) = G(x) \tag{III.8}$$

Lorsque les variables sont corrélées, on utilise en particulier les transformations de Rosenblatt ou de Nataf.

III. 6. Indice de fiabilité :

On trouve dans la littérature plusieurs types d'indices de fiabilité, en commençant par l'indice de Rjanitzyne en 1950, l'indice de Cornell en 1970, Hasofer et Lind en 1974 et l'indice généralisé de Ditlevsen en 1979.

III. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell :

Cet indice est obtenu à partir de la moyenne m_Z divisée sur l'écart-type σ_Z de la variable de marge $Z = R - S$.

$$\beta_c = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \tag{III.9}$$

L'indice β_c apparaît comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire Z. Nous constatons sur la figure (Fig. III.1), que l'indice de fiabilité représente le nombre d'écarts types nécessaires pour s'éloigner de la moyenne m_Z vers l'état limite ($z = 0$) afin de se placer en sécurité.

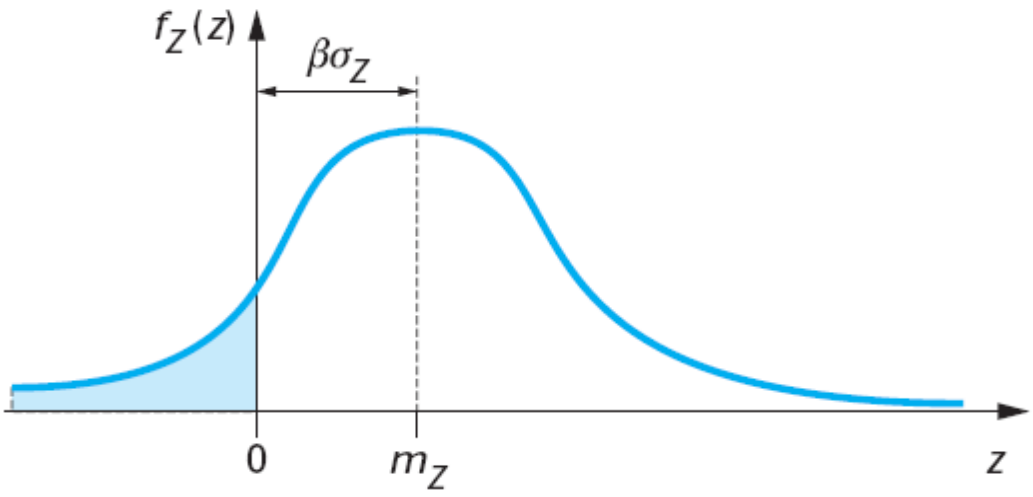

Fig. III.1. Représentation de l'indice de Cornell [168].

- *Cas élémentaire R-S :*

Le cas le plus simple est celui d'une fonction d'état limite linéaire comportant deux variables normales et indépendantes.

La marge de sécurité de cet état limite linéaire s'exprime comme suite :

$$Z = R - S \tag{III.10}$$

La moyenne et l'écart-type de Z sont obtenus directement par la propriété de la sommation de deux variables normales.

$$\begin{cases} m_Z = m_R - m_S \\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma^2{}_R - \sigma^2{}_S} \end{cases} \Rightarrow \beta_c = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma^2{}_R - \sigma^2{}_S}} \tag{III.11}$$

Où : m_R et m_S sont les moyennes de la résistance R et de la sollicitation S, et σ_R et σ_S leurs écarts types.

Si les variables sont corrélées, le résultat est valable en notant que :

$$\sigma^2{}_Z = \sigma^2{}_R + \sigma^2{}_S - 2\,cov[R,S] \tag{III.12}$$

Si les variables R, S sont des variables Gaussiennes, Z est également gaussienne et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \int_{-\infty}^{0} f_Z(z)\,dz = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right) dz \tag{III.13}$$

Et, en posant $u = \frac{z - m_Z}{\sigma_Z}$:

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta_C} exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(-\beta_C) \tag{III.14}$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

III. 6.2. Indice de Hasofer et Lind :

Dans cette présente étude, l'indice de Hasofer-Lind sera utilisé car il permet de résoudre le problème dû à la non-invariance. Pour pallier ce problème, Hasofer et Lind ont proposé de ne pas se placer dans l'espace des variables physiques, mais d'effectuer un changement de variable, vers un nouvel espace de variables gaussiennes statistiquement indépendantes de moyennes nulles et d'écarts types unitaires :

$X_i \longrightarrow U_i$ vecteur gaussien $\mathcal{N}(0,1)$, $\mu_{U_i} = 0$, $\sigma_{U_i} = 1$, $\rho_{ij} = 0$, $\forall i$, $\forall j$

Dans le cas de variables gaussiennes indépendantes, la transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) est isoprobabiliste :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad \text{(III.15)}$$

Pour des variables non corrélées de loi quelconque, le principe de la transformation consiste à écrire l'égalité des fonctions de répartition :

$$\Phi(u) = F_X(x) \quad \Rightarrow x \longrightarrow u = \Phi^{-1}\big(F_X(x)\big) \quad \text{(III.16)}$$

III. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant :

L'indice de fiabilité notée β_{HL} est une mesure de la fiabilité, et il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Il correspond à la distance euclidienne entre l'origine de l'espace normalisé et la surface d'état limite (c.-à-d. entre l'origine O et le point p^*). L'indice est obtenu en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \quad \text{(III.17)}$$

$$\beta_{HL} = \min_{g\{x_i(u_j)\}\leq 0} \sqrt{\{u\}^T\{u\}} \quad \text{(III.18)}$$

Sous contrainte $g(X) \leq 0$

P^* : Point de défaillance le plus probable, est le point de l'espace normalisé qui réalise ce minimum.

L'indice β_{HL} est compté positif si le point origine appartient au domaine de sûreté, sinon il est négatif.

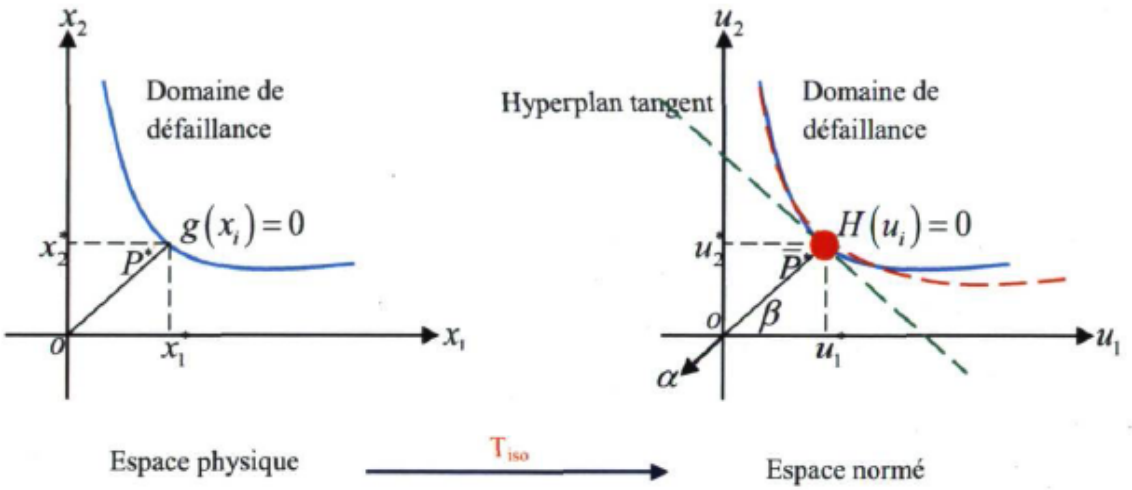

Fig. III.2. Point de conception [164].

Le point P^* est proportionnel au vecteur unitaire α^*, vecteur des cosinus directeurs, normal à la surface de défaillance en u^*, soit :

$$u^* = \beta_{HL}.\alpha^* \tag{III.19}$$

Le point u^* est déterminé comme la limite d'une séquence $u^{(1)}, u^{(2)},..., u^{(m)},...$. Le vecteur unitaire normal à la surface de défaillance définie par H(u) au point $u^{(m)}$ est noté $\alpha^{(m)}$. Le vecteur $\alpha^{(m)}$ est parallèle au vecteur gradient en $u^{(m)}$ et dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha^{(m)} = -\frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \tag{III.20}$$

III. 8. Recherche du point de conception :

Le point de conception (ou point de défaillance le plus probable) est le point de la surface d'état-limite, où la densité de probabilité de U est maximale. Il est aussi défini comme le point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine :

$$\beta_{HL} = \min_{g\{x_i(u_j)\}\leq 0} \sqrt{\{u\}^T\{u\}} \tag{III.21}$$

Sous contrainte $H(u) \leq 0$

Dans cette étude, le problème de minimisation sous contraintes sera résolu, en utilisant l'algorithme d'Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler qui est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception.

III. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL} :

Il existe de nombreux algorithmes permettant la résolution du problème d'optimisation. En pratique, l'algorithme de Rackwitz-Fiessler est le plus employé à cause de sa simplicité et ses bons résultats. L'algorithme d'Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception. L'algorithme d'Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est une amélioration de l'algorithme de Hasofer-Lind (HL), qui suppose que les variables de base sont gaussiennes et non corrélées. Quant à lui (HL-RF) est plus générale. Il n'a aucune restriction concernant les variables de base. L'algorithme qui sera utilisé dans ce qui suit, est celui qu'on trouve dans l'ouvrage de **Lemaire** [165].

Les hypothèses considérées dans l'algorithme :

- La fonction d'état limite H admet un gradient au point de coordonnée u.
- Le gradient $\nabla H(u)$ est non nul en tout point de l'hyper surface d'état limite.

Pour déterminer le point de conception, on se place dans l'espace normé en un point $P^{(\mathrm{k})}$ de coordonnée $\{u\}^{(\mathrm{k})}$, point origine de l'itération (k). Ce point n'appartient pas nécessairement à la contrainte et $H(u)$ peut etre différent de zéro. Le développement en série de Taylor de la fonction d'état limite $H(u)$ autour du point $P^{(\mathrm{k})}$ donne :

$$H(u) = H\left(u^{(k)}\right) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} \left(\{u\} - \{u\}^{(k)}\right) + O\left(\{u\} - \{u\}^{(k)}\right)^2 \qquad \text{(III.22)}$$

L'équation de l'hyper-plan tangent a $H(u)$ en $\{u\}^{(k)}$:

$$\langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} \{u\} + c = 0 \qquad \text{(III.23)}$$

Avec $\nabla H\left(u^{(k)}\right)$ le gradient de $H(u)$ au point $P^{(\mathrm{k})}$. On définit alors $P^{(\mathrm{k+1})}$ par :

$$H\left(u^{(k+1)}\right) = H\left(u^{(k)}\right) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} \left(\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\right) = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

En divisant l'équation par la norme $\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}$ et en introduisant les cosinus directeurs de *H* en P^{k} on obtient :

$$\frac{H\left(u^{(\mathrm{k})}\right)}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} + \langle \alpha \rangle^{(k)} \left(\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\right) = 0 \qquad \text{(III.25)}$$

Il vient :

$$\langle u\rangle^{(k+1)}\{\alpha\}^{(k)} = \langle u\rangle^{(k)}\{\alpha\}^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad \text{(III.26)}$$

Avec $\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}}$ le vecteur des cosinus directeurs (ou le vecteur du gradient normalisé) de *H* en $P^{(k)}$.

A la limite quand $k \to \infty$, $d(u^{(k)}) = \beta$ et $\{u\} = -\beta\{\alpha\}$ si l'algorithme est convergent. A litération (k), posons :

$$\{u\}^{(k+1)} = -\beta^{(k)}.\{\alpha\}^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \beta^{(k)} = -\langle u\rangle^{(k+1)}.\{\alpha\}^{(k)} \quad \text{(III.27)}$$

Ce qui conduit à la relation itérative donnant l'indice de fiabilité :

$$\beta^{(k)} = -\langle u\rangle^{(k)}\{\alpha\}^{(k)} + \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad \text{(III.28)}$$

L'algorithme de recherche de l'indice de fiabilité s'arrête lorsque la norme $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

Et $\{u\}^{(k+1)}$, est déduit en remplaçant l'équation (III.28) dans (III.27) par :

$$\{u\}^{(k+1)} = \left(\langle u\rangle^{(k)}\{\alpha\}^{(k)}\right)\{\alpha\}^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}}\{\alpha\}^{(k)} \quad \text{(III.29)}$$

III. 9.1. Résumé de l'algorithme :

L'algorithme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est résumé par les étapes suivantes :

1. Choisir un point de départ $\{u\}^{(0)}$;

2. Évaluer la fonction d'état-limite $H(u^{(k)})$;

3. Calculer le gradient de l'état-limite $\{\nabla H(u)\}^{(\mathrm{k})}$ et sa norme $\|\nabla H(u)\|^{(\mathrm{k})}$, en déduire $\{\alpha\}^{(k)}$ par :

$$\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(\, u^{(\mathrm{k})})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} ;$$

4. Calculer l'indice de fiabilité $\beta^{(k)}$;

5. Calculer la coordonnée de la prochaine itération $\{u\}^{(k+1)}$;

6. Teste de convergence :

   Si $\left\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\right\| \leq \varepsilon$, arrêter le calcul ;
   Sinon mettre k = k + 1 et aller en 2.

III. 9.2. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) :

L'organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), est décrit ci-dessous :

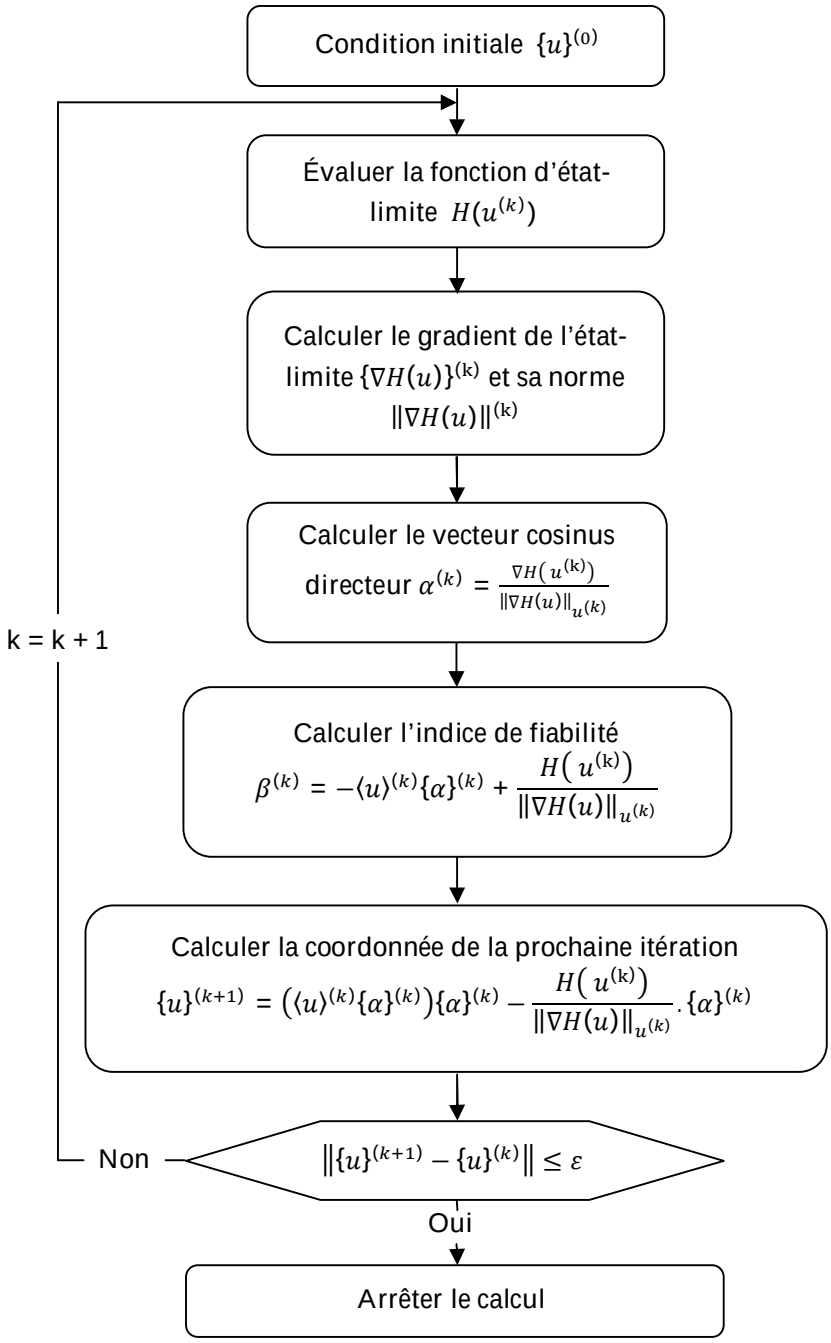

Fig. III.3. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).

III. 9.3. Exemple illustratif :

On se propose de calculer l'indice de fiabilité à partir de notre implémentation sur un exemple simple dont le calcul analytique a été fait par **Lemaire** [165], afin de valider l'algorithme présenté ci-dessus et son implémentation.

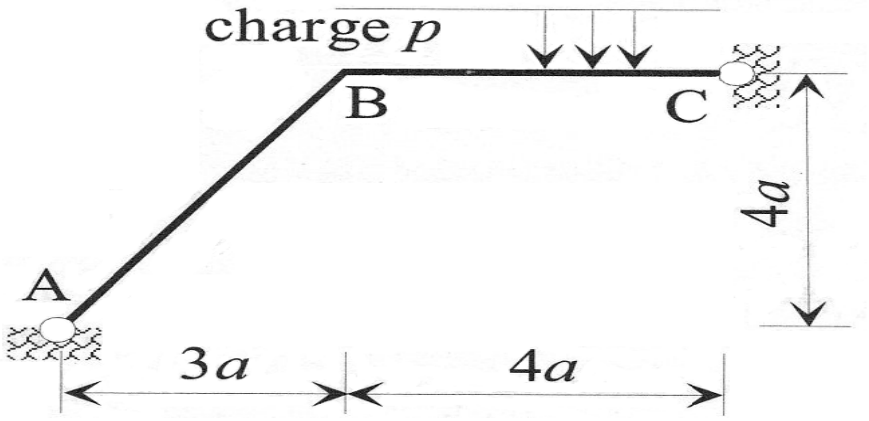

Fig. III.4. Représentation du portique [165].

Après un calcul de RDM du portique, la valeur du moment fléchissant en B s'exprime comme suite : $M_B = -0.496\, p\, a^2$

Ou p est la charge répartie aléatoire, et a est une unité de longueur déterministe prise égale à 1. Le moment résistant M_R est considéré comme variable aléatoire.
Pour cet exemple la défaillance est produite lorsque : $|M_B| \geq M_R$.

Les données du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Tab. III.1 : La moyenne et l'écart-type des variables du problème.

Variable X	Variable U	m_X	σ_X	Loi
p	U_1	1000	200	Normale
M_R	U_2	800	40	Normale

Les résultats du problème obtenus par le programme qu'on a développé sont confrontés au calcul analytique de **Lemaire** [165], et sont présentés dans le tableau suivant :

Tab. III.2 : Résultats du problème.

	β	α_1	α_2
Lemaire [165]	2.84	-0.927	0.374
Notre calcul	2.8422	-0.9274414720	0.3739683355
Erreur (%)	0.077	0.047	- 0.0084

III. 10. Couplage mécano-fiabiliste :

III. 10.1. Introduction :

Dans les problèmes mécaniques linéaires, l'algorithme de calcul de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β suppose que la fonction d'état limite $G(X)$ est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base. Par contre dans les problèmes mécaniques tenant compte de la non-linéarité géométrique ou mécanique, les expressions analytiques des fonctions d'état limite en fonction des variables x_i sont indisponibles. La marge de sécurité ne peut donc être obtenue que sous forme implicite.

L'association des méthodes de fiabilité et des simulations par élément fini constitue ce que l'on appelle un couplage mécano-fiabiliste, le code élément fini est piloté par le modèle fiabiliste qui permet d'analyser les résultats et de prendre continuellement les décisions appropriées. Les principales tâches du modèle mécanique consistent à évaluer la fonction de performance et à calculer les gradients, quant aux tâches du modèle fiabiliste consistent à estimer l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance du modèle mécanique étudiée.

Pour réaliser ce couplage, il existe trois méthodes de pilotage [165] :

- Le **couplage direct**, dans lequel le code fiabiliste appelle le code élément fini chaque fois que le calcul de $G(X_i)$ est nécessaire ;

- Le **couplage par surface de réponse**, dans lequel un plan d'expériences numériques permet de construire une réponse explicite approchée de la fonction de performance $G(X_i)$;

- Le **couplage par optimisation**, dans lequel le problème d'optimisation conduisant au calcul de l'indice β est résolu par les procédures d'optimisation disponibles dans le code élément fini.

Dans cette présente étude, le couplage mécano-fiabiliste sera réalisé par surface de réponse.

III. 10.2. Méthode par surface de réponse :

Dans cette méthode, l'état limite est approché par une surface, dite surface de réponse. L'idée est de remplacer la fonction d'état limite qui représente la défaillance de la structure et qui est indisponible sous une forme explicite, dans l'espace physique $g(x)$ ou normé $H(u)$, par une fonction explicite équivalente $\hat{g}(x)$ ou $\widehat{H}(u)$, afin de pouvoir appliquer les différentes méthodes d'analyse de la fiabilité.

Il existe trois méthodes pour construire une surface de réponse :

- Méthode de **surface de réponse analytique,** est basée sur une approximation d'un modèle de la fonction de performance sur une base de données sélectionnée en utilisant des fonctions mathématiques, en particulier des polynômes. Cette méthode est la plus utilisée en ingénierie.

- Méthode de **surface de réponse physique,** l'utilisation de lois déterministes dans lesquelles sont introduites des variables aléatoires pour prendre compte des variables intrinsèques.

- Méthode de **réseau neurones,** s'appuie sur l'utilisation de la méthode de réseau neurones dans la construction de la surface de réponse approchée.

Les méthodes de surface de réponse physique et de réseau neurones sont des méthodes dont leur principe ne sera pas détaillé dans cette thèse, mais le lecteur pourra se référer aux références [164], [166], [167], [168]. Alors dans cette présente étude, nous traiterons la construction d'une surface de réponse analytique qui est la plus souvent utilisée.

III. 10.2.1. Surface de réponse analytique :

La méthode de surface de réponse analytique consiste à remplacer la fonction de performance inconnue $g(x)$ par une fonction approchée $\hat{g}(x)$. Le choix d'un ordre élevé du polynôme permet de mieux représenter le modèle. Très souvent, une forme quadratique est choisie pour l'écriture du substitut $\hat{g}(x)$ de la fonction de performance $g(x)$. Autrement dit, le substitut s'écrie de la manière suivante :

$$g(x) \approx \hat{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + \sum_{i=1}^{n} c_{ii} {X_i}^2 \quad \text{(III.30)}$$

$$g(x) \approx \hat{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} X_i X_j \quad \text{(III.31)}$$

Où :
X : Le vecteur des *n* variables de base,
c_i , c_{ij} : Les coefficients du polynôme recherché.

Les coefficients sont les inconnues du problème, ils sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation dans la région autour du point de conception. L'évaluation de ses coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques, qui correspondent à des calculs numériques avec des paramètres d'entrée sélectionnés conformément à un plan d'expérience.

Remarque :
Dans cette présente étude, on a utilisé l'outil Excel pour déduire la fonction approchée $\hat{g}(x)$.

III. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse :

L'organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse analytique, est décrit ci-dessous :

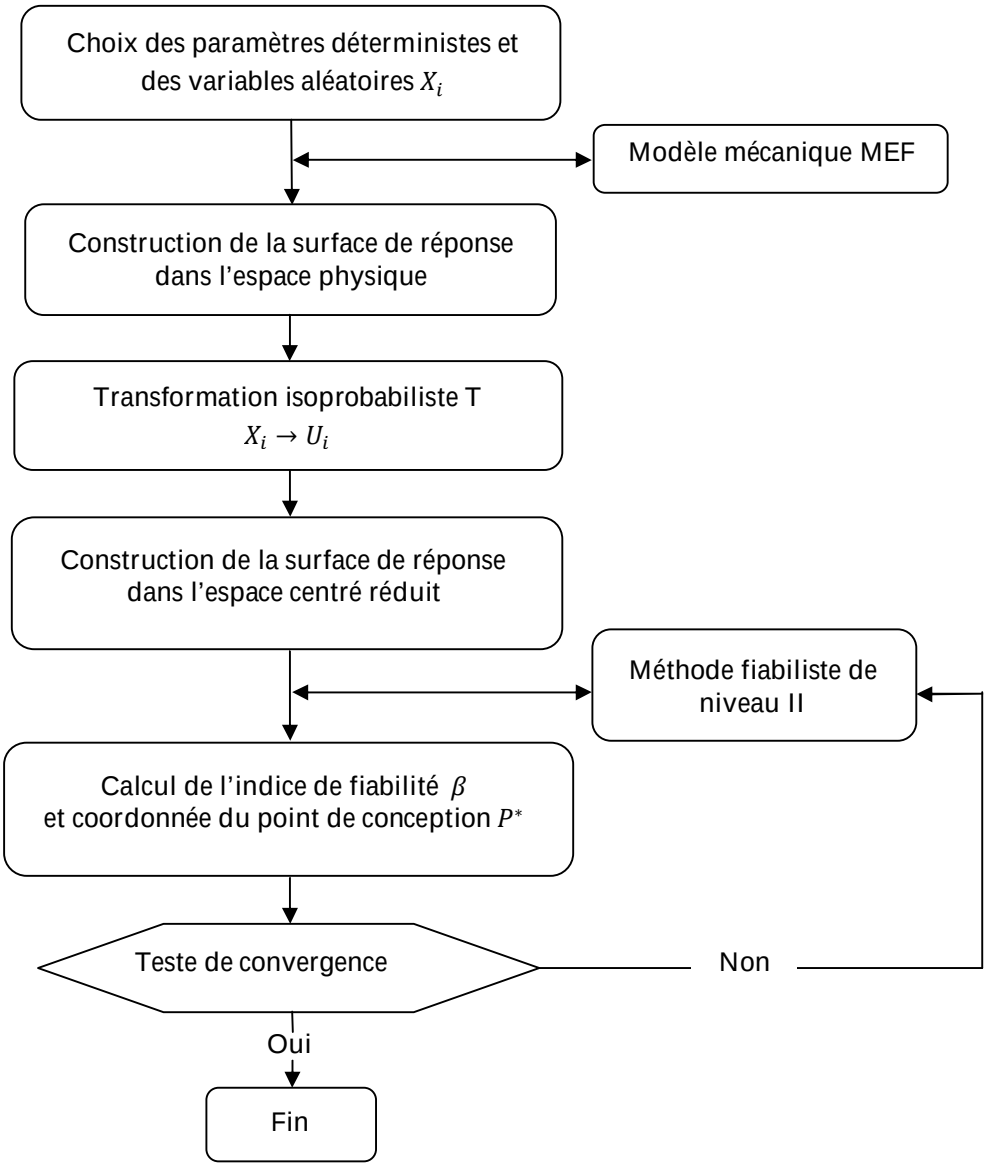

Fig. III.5. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse.

III. 11. Application du couplage mécano-fiabiliste au pont à poutres triangulées :

La figure (Fig. III.6) montre le pont à poutre triangulée de type Warren de 7,32 m de hauteur et 36,6 m de longueur. La relation contrainte-déformation a été supposé élastique parfaitement plastique avec un module d'élasticité de 200000 MPa.

La section transversale en W8 × 18 avec une limite d'élasticité de 248 MPa a été utilisée pour les membrures tendues, y compris les membrures inférieures et diagonales. Et la section transversale de 305 × 305 × 13 mm avec une limite d'élasticité de 317 MPa a été utilisé pour les membrures soumises à la compression, y compris les membrures supérieures.

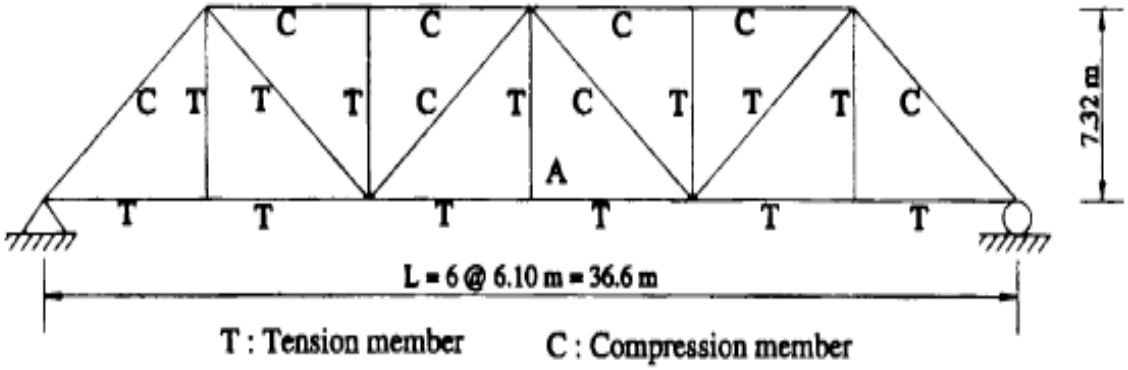

Fig. III.6. Pont à poutre triangulée [169].

Ce pont à poutre triangulée a fait l'objet d'une étude numérique de la part de **Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et Se-Hyu Choi** [169].

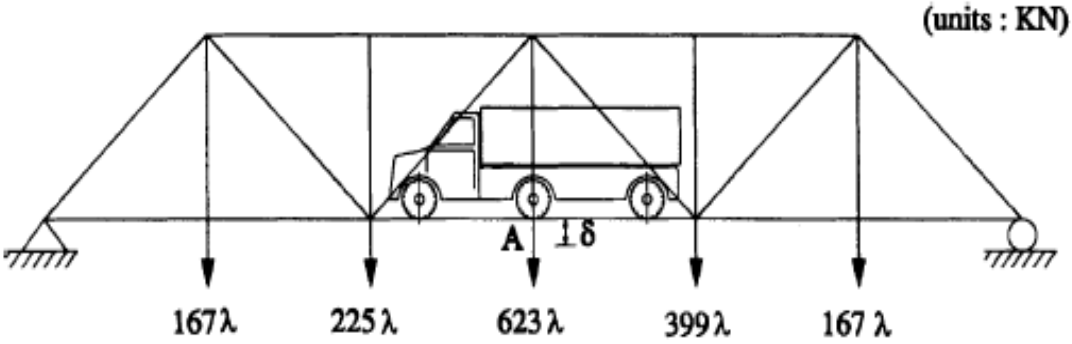

Fig. III.7. Condition de chargement du pont à poutre triangulée [169].

Le programme de calcul non linéaire (non-linéarité mécanique) des structures en treillis **Benyahi et al.** [I], effectue une analyse pas à pas de la structure pour des valeurs croissantes d'un paramètre λ. Sous un accroissement des charges extérieures appliquées aux nœuds, le paramètre λ passe de λ_r a λ_{r+1}, est donné par :

$\lambda_{r+1} = \lambda_r + \Delta\lambda$
Avec : λ_r = 0.02 (ininitialisé).

Le programme se met alors à la recherche de l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ des nœuds de la structure engendrés par l'accroissement de charges appliqué à l'étape r :

$\{\Delta P\}^r = \lambda_{r+1}.\{P_v\}$

Ou : $\lambda.\{P_v\}$: Chargement variable, d'intensité proportionnelle au paramètre λ.

Le facteur de charge ultime (λ) trouvé par **Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et Se-Hyu Choi** [169] est égal à 1,06. Le facteur de charge ultime (λ) calculée est de 1,07, soit un écart de 0,934%. On constate que le pont à poutres triangulées a cédé par rupture plutôt que par flambement, et que la concordance entre le calcul de **Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et Se-Hyu Choi** [169] et notre calcul est très bonne.

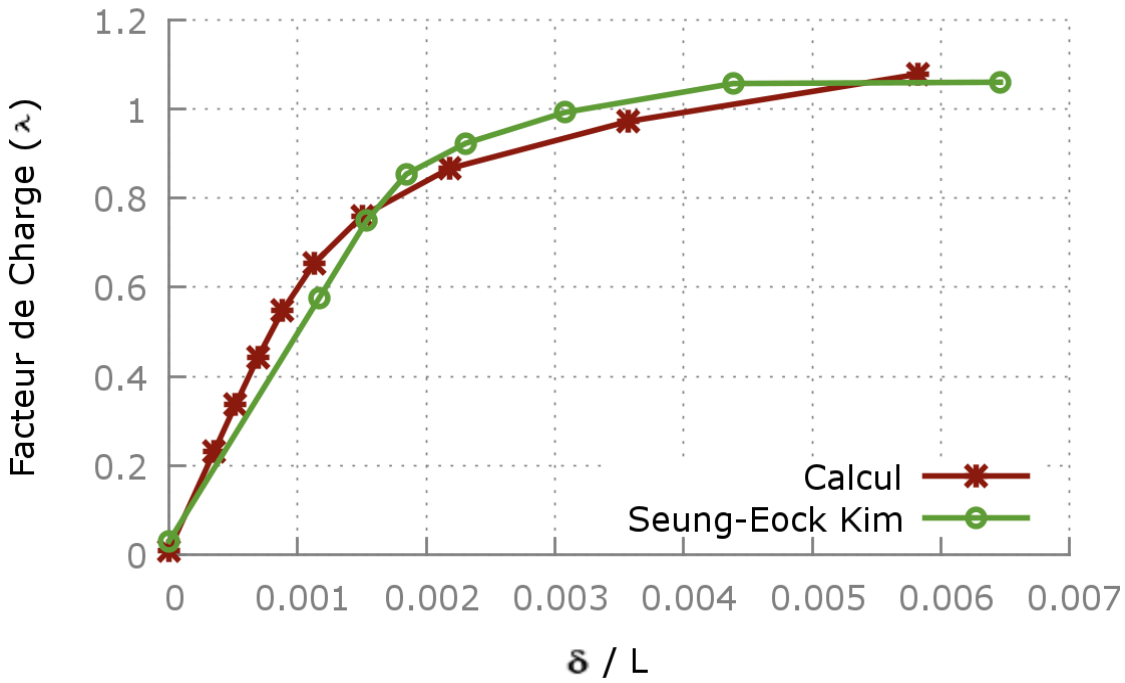

Fig. III.8. Pont à poutre triangulée - Courbe charge – flèche.

On procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (loi réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution log-normale ou exponentielle va mieux la représenter.

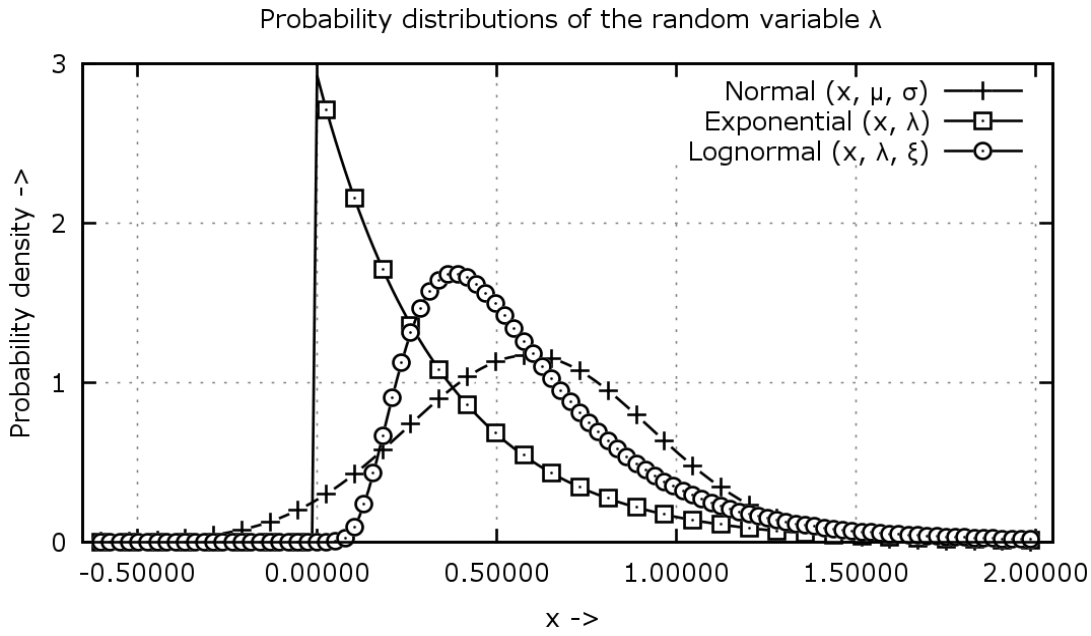

Fig. III.9.a. Lois de probabilité de la variable aléatoire λ.

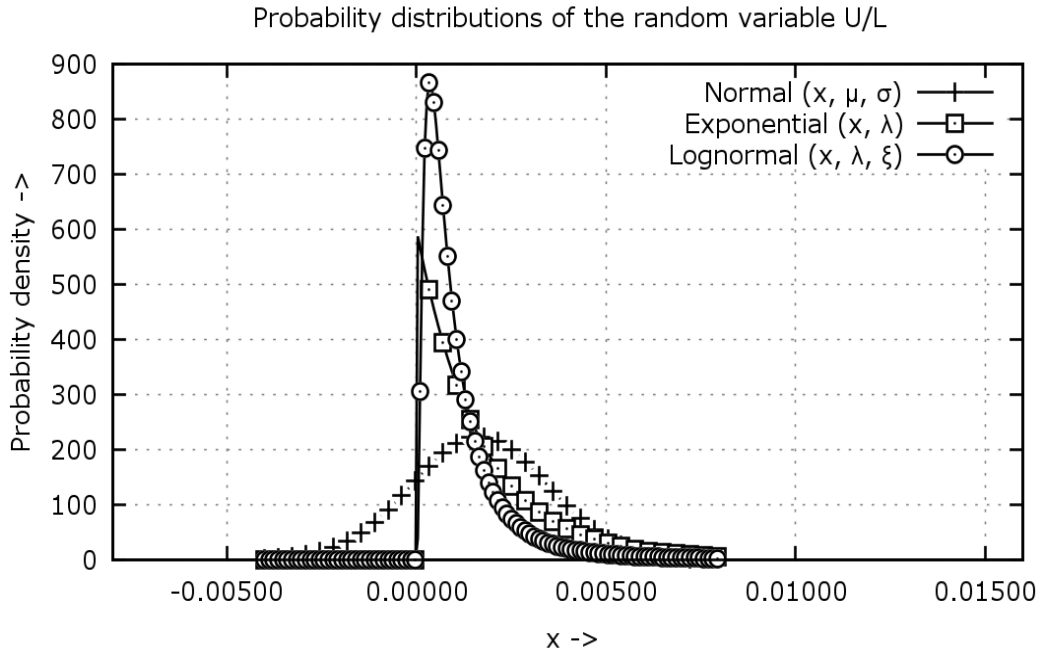

Fig. III.9.b. Lois de probabilité de la variable aléatoire U/L.

Les figures (Fig. III.9.a) et (Fig. III.9.b) présentent le résultat d'estimation de la distribution des lois de probabilité des variables aléatoires retenues, par des lois normale, log-normale et exponentielle.

Les résultats obtenus sur la figure (Fig. III.9.a) donnent ; pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire λ soit négative, et pour la loi log-normale une densité de probabilité inférieur à celle trouvée pour la loi exponentielle ; cette dernière loi semble mieux représenter ce paramètre par rapport aux deux autres types de lois. Et ceux de la figure (Fig. III.9.b) donne aussi pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire U/L soit négative, quant aux lois log-normale et exponentielle semblent mieux représenter ce paramètre par rapport a la loi normale, sauf que la loi log-normale donne une précision des phénomènes inconnus mieux que la loi normale ou exponentielle car elle simule bien la loi normale par une courbe avec des résultats plus ramassés que cette dernière loi, et aussi parce qu'elle donne une densité de probabilité supérieur à celle des deux autres types de lois.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et sont représentées par le vecteur X, qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sorties à l'état-limite (λ, U/L), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi exponentielle et log-normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau (Tab. III.3).

Tab. III.3. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite.

Vecteur X	Variables aléatoires	Loi de distribution	Moyenne μ_X^N	Écart-type σ_X^N
X1	λ	Exponentielle	0.589735	0.34098745
X2	U/L	Log-normale	0.0016639	0.00179006

- Les autres paramètres (variables aléatoires d'entrées) comme le module d'élasticité E et les limites élastiques (σ_{e1}, σ_{e2}) sont considérées comme déterministes.

La fonction d'état-limite G ($\lambda, U/L$) est une fonction non linéaire implicite (connue numériquement à partir de notre calcul non linéaire), dont la défaillance du système est observée quand $G(x) \geq 0$.

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est impossible de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité. Alors, il devient nécessaire de construire une surface de réponse.

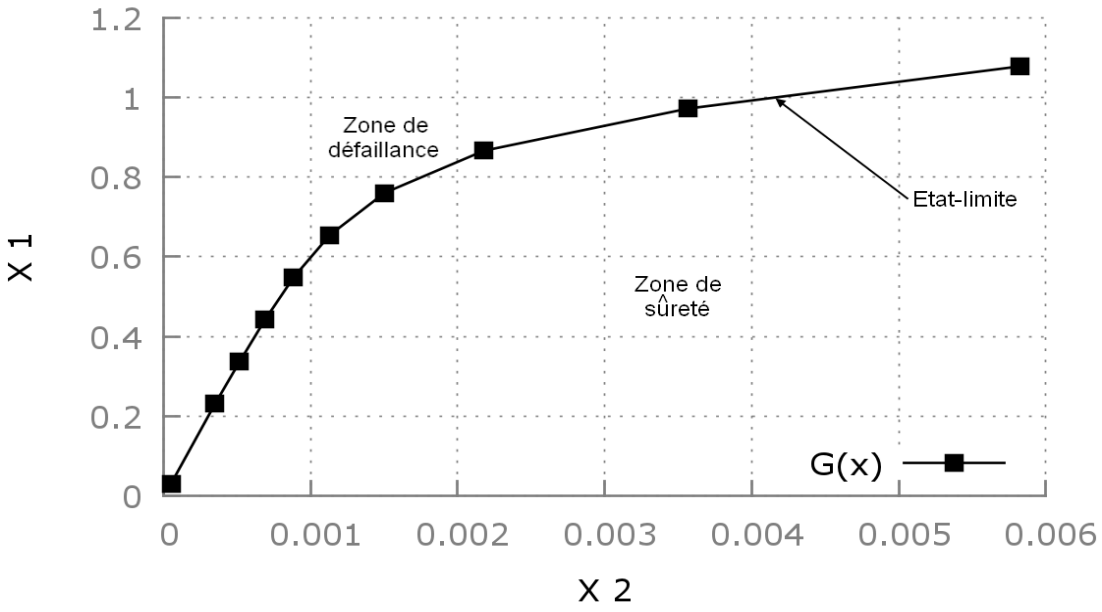

Fig. III.10. État limite dans l'espace physique $G\ (\lambda, U/L)$.

La méthode de surface de réponse à pour objectif de remplacer la fonction d'état limite obtenue sous forme implicite par une autre fonction explicite, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité pour estimer l'indice de fiabilité des scénarios et la probabilité de défaillance de la structure étudiée. Pour cela on suit les étapes suivantes :

- Dans une première étape, construction de la fonction d'état limite dans l'espace physique.

- Dans une deuxième étape, modélisation des variables aléatoires.

- La troisième étape est de transformer la fonction d'état limite de l'espace physique vers un espace centré réduit, selon la loi de la variable aléatoire.

$$\mathrm{G}\ (\lambda, U/L) \xrightarrow{\quad T \quad} \mathrm{H}\ (\lambda, U/L)$$

- La quatrième étape est de procéder au choix d'une forme mathématique à la surface de réponse dans l'espace centré réduit.

$$\mathrm{H}\ (\lambda, U/L) \xrightarrow{\quad fonction\ approchée \quad} \widehat{\mathrm{H}}\ (\lambda, U/L)$$

- Enfin la cinquième étape, consiste à appliquer la méthode de résolution (méthode d'HL-RF) pour estimer l'indice de fiabilité, et calculer la probabilité de défaillance.

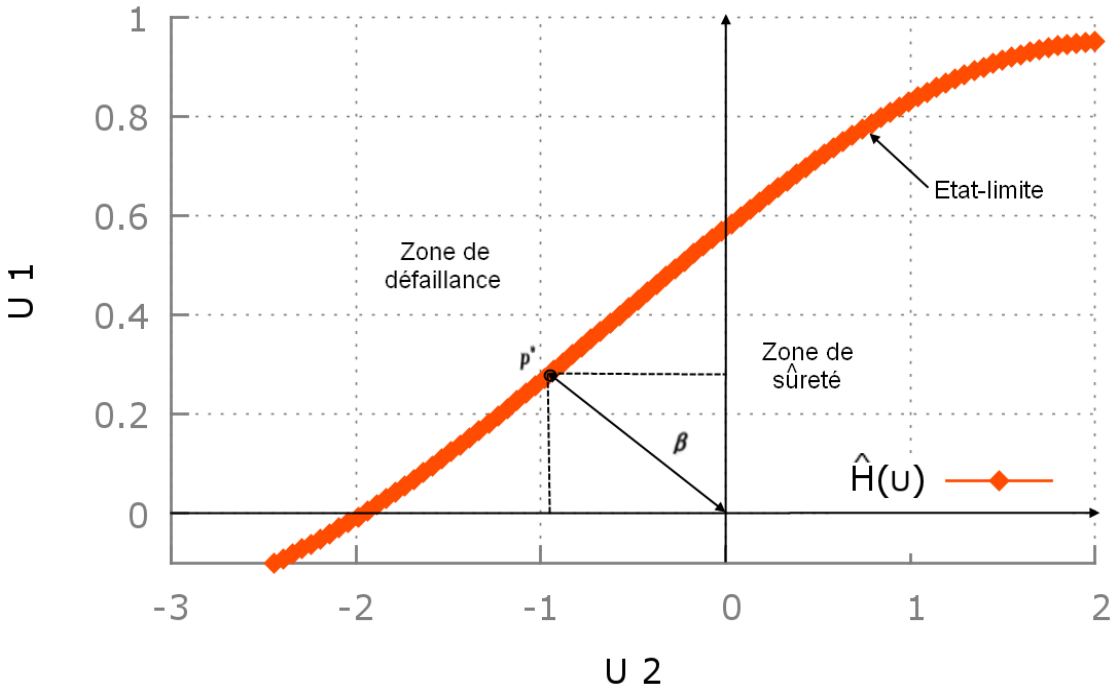

Fig. III.11. État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}$ $(\lambda, U/L)$.

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Tab. III.4. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste.

Indice de Fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur ($\alpha 1, \alpha 2$)	Point de conception (U1, U2)	Point de conception (X1, X2)
1.0300	0.1515 (15.15%)	(-0.2794, 0.9601)	(0.2878, -0.9889)	(0.3622, 0.000639)

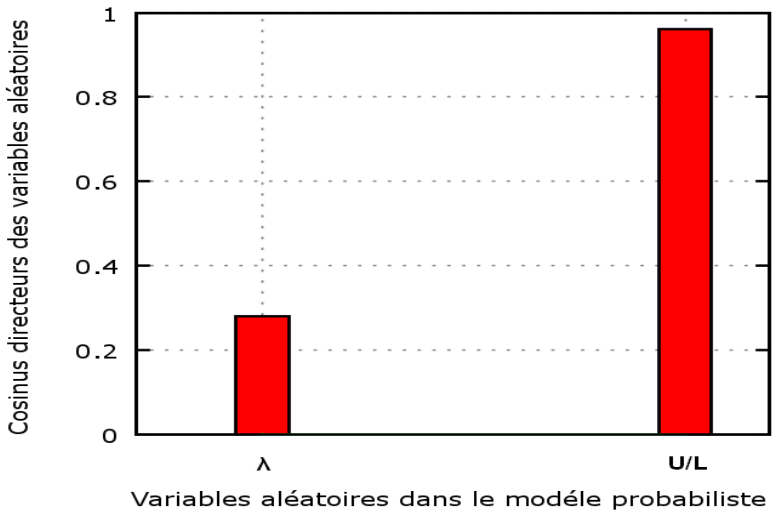

Fig. III.12. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires $(\lambda, U/L)$.

La figure (Fig. III.11) présente l'état limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (λ, U/L), et aussi les résultats de la recherche du point de conception P^*.

L'indice de fiabilité retrouvé β = 1.0300, ce qui correspond à une probabilité de défaillance de la poutre en treillis estimée à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 15.15%, d'où une fiabilité de 84.85%.

Remarque : la probabilité de défaillance est calculée par la formule : $P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$
Ou : $\Phi(-\beta)$: est la densité de β obtenue de l'annexe III.

Dans ce qui suit on procède à une autre méthode ; où on combine entre les lois des variables aléatoires continues afin d'approcher le plus possible des lois de probabilités réelles des variables aléatoires utilisées dans cet exemple, pour cela en se limite à sept cas de combinaison des lois de distribution. Les sept cas retenus des variables aléatoires sont représentés dans le tableau (Tab. III.5), et leur état limite approché (surface de réponse) dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (λ, U/L) sont représentés dans la figure (Fig. III.13).

Tab. III.5. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires.

Variables aléatoires	Lois de distributions						
	Cas 1	**Cas 2**	**Cas 3**	**Cas 4**	**Cas 5**	**Cas 6**	**Cas 7**
λ	Normale	Log-normale	Exponentielle	Exponentielle	Exponentielle	Log-normale	Log-normale
U/L	Normale	Log-normale	Exponentielle	Log-normale	Normale	Normale	Exponentielle

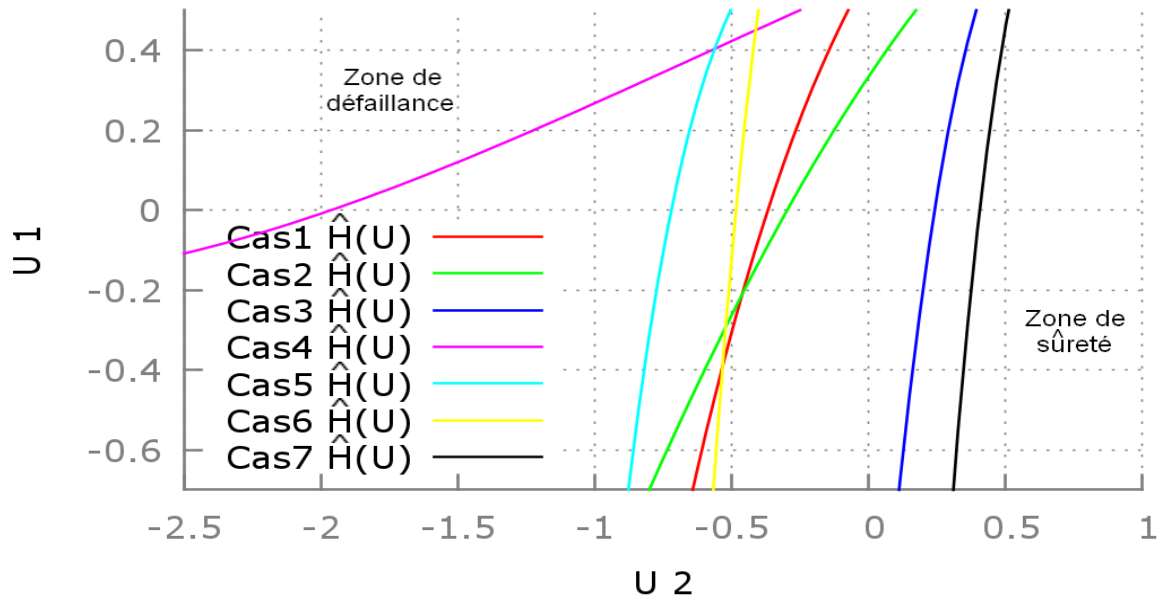

Fig. III.13 : État limite approché des différents cas dans l'espace centré réduit.

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste des sept cas de combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, la méthode fiabiliste d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Tab. III.6. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités.

Cas	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur ($\alpha 1$, $\alpha 2$)	Point de conception (U1, U2)	Point de conception (X1, X2)
Cas 1	0.3385	0.3674 (36.74%)	(-0.4174, 0.9086)	(0.1413, -0.3076)	(0.6942, 0.0014)
Cas 2	0.2506	0.4010 (40.10%)	(-0.5398, 0.8417)	(0.1353, -0.2109)	(0.6406, 0.0012)
Cas 3	0.2360	0.4067 (40.67%)	(0.2460, -0.9692)	(-0.0580, 0.2287)	(0.226, 0.00033)
Cas 4	1.0300	0.1515 (15.15%)	(-0.2794, 0.9601)	(0.2878, -0.9889)	(0.362, 0.00063)
Cas 5	0.7535	0.2255 (22.55%)	(-0.2558, 0.9667)	(0.1928, -0.7283)	(0.6811, 0.0013)
Cas 6	0.4710	0.3188 (31.88%)	(-0.2491, 0.9684)	(0.1173, -0.4561)	(0.7426, 0.0014)
Cas 7	0.4364	0.3312 (33.12%)	(0.4279, -0.9037)	(-0.1867, 0.3944)	(0.476, 0.00077)

On constate pour les différentes variables aléatoires retenues en utilisant la même loi de distribution (cas 1, 2, 3), on obtient des indices de fiabilité beaucoup plus petits que tous les indices de fiabilité trouvés en utilisant des lois de distributions différentes (cas 4, 5, 6, 7). Par conséquent, on note un écart entre la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution identiques (cas 1, 2, 3), et la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution différentes (cas 4, 5, 6, 7). Cela est dû au fait qu'en réalité les variables aléatoires peuvent ne pas suivre tous une même loi.

On constate aussi que le cas 4 donne le plus grand indice de fiabilité β = 1.0300, d'où une fiabilité de 84.85%, ce qui confirme la validité de la première méthode utilisée d'estimation des lois de probabilités qui permet d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

Dans notre étude, on a considéré que des variables aléatoires continues et indépendantes, alors qu'en réalité ce n'est toujours pas le cas pour tous les systèmes.

III. 12. Conclusions :

Dans ce chapitre, on a présenté en premier lieu la méthode de fiabilité d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) de niveau 2 dite approchée, elle est l'une des méthodes les plus utilisées en ingénierie. Son organigramme a été implémenté sous fortran 90 (Annexe II). Cette méthode utilise les probabilités et les statistiques, elle permet de vérifier la fiabilité des structures et éléments de structures.

Puis, afin d'assurer un dialogue entre le modèle mécanique et le modèle de fiabilité, on a utilisé une méthode de couplage indirect (méthode de surface de réponse analytique, qui est utilisée dans le cas où la fonction d'état limite est implicite). Cette méthode de surface de réponse analytique a pour objectif la construction d'un état limite explicite, afin de permettre aux méthodes classiques de fiabilité d'être appliquée.

Enfin, on a présenté l'organigramme utilisé dans notre étude qui résume le couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, afin d'estimer l'indice de fiabilité ainsi que la probabilité de défaillance d'une structure.

Le modèle fiabiliste couplé au modèle mécanique appliqué à une structure en treillis (pont à poutres triangulées) nous a permis dans cette étude, d'évaluer l'indice de fiabilité relative à la ruine des systèmes mécaniques à comportement non linéaire et à variables non normales.

Les résultats obtenus par combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, montrent que la méthode d'estimation des lois de probabilités que nous avons utilisée en première approche, nous a permis d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

CHAPITRE IV

VALIDATION ET CONFRONTATION DES RÉSULTATS

Sommaire

IV. 1. Introduction 100
IV. 2. Application de la théorie d'homogénéisation 100
IV. 2.1. Application du modèle d'homogénéisation périodique au béton 100
IV. 2.1.a. Variation du module d'Young du béton en fonction du module de mortier. 101
IV. 2.1.b. Variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats 102
IV. 2.1.c. Variation du module de coulomb en fonction du pourcentage en granulats 102
IV. 3. Comparaison numérique des modèles d'homogénéisation semi-analytique et d'homogénéisation périodique à l'expérience 103
IV. 3.1. Composite en béton léger 104
IV. 3.2. Composite en béton de résine 105
IV. 3.2.a. Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales 107
IV. 3.2.b. Prise en compte de l'influence de la géométrie et des porosités 108
IV. 3.3. Composite cimentaire avec grain de sable (Mortier de sable) 110
IV. 4. Estimation des caractéristiques mécaniques par un modèle d'homogénéisation périodique et prise en compte de l'endommagement d'un composite à inclusion 112
IV. 4.1. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions sphéroïdales 112
IV. 4.1.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 115
IV. 4.2. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions ellipsoïdales 118
IV. 4.2.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 121
IV. 4.3. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions cylindriques 124
IV. 4.3.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation 127
IV. 5. Simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique 129
IV. 5.1. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales 129
IV. 5.2. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales 133
IV. 5.3. Matériaux composites à matrice métallique renforcés d'inclusions sphéroïdales 135
IV. 5.4. Matériaux composites renforcés d'inclusions cylindriques 137
IV. 6. Validation et évaluation de la fiabilité des composites étudiées 140
IV. 6.1. Application du couplage mécano-fiabiliste au calcul de l'endommagement d'un composite (matrice-inclusions cylindrique) 140
IV. 6.2. Application du couplage mécano-fiabiliste à la simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique (AL-SIC4.1) 144
IV. 7. Conclusions 149

IV. 1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présenterons, dans une première partie des exemples d'applications qui ont fait l'objet d'études expérimentales ainsi que des simulations numériques effectuées avec d'autres codes de calcul. Nous confronterons le résultat de nos calculs aux résultats numériques et expérimentaux. Nous commencerons d'abord, par vérifier le bon fonctionnement de l'implémentation du modèle d'homogénéisation périodique en estimant les caractéristiques mécaniques des matériaux composites à inclusion, où il sera testé sur des volumes élémentaires représentatifs (VER).

Puis, nous introduirons dans le modèle d'homogénéisation périodique des modèles d'endommagement (**Mazars** ([144], [145]) pour des composites à grains (inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales), et **Bouafia et al.** ([146], [147]) pour des composites à fibres (inclusions cylindriques)) qui seront appliquées sur des volumes élémentaires en matériaux composites à inclusion. Enfin, nous simulerons le comportement du modèle d'homogénéisation périodique dans le domaine non linéaire pour des matériaux composites à comportement hétérogènes (élastique / élasto-plastique, élasto-plastique / élasto-plastique).

La seconde partie sera consacrée à la validation de l'approche fiabiliste qui a été décrite dans le chapitre précédent. Cette validation consiste à coupler le modèle mécanique avec le modèle fiabiliste par une méthode de surface de réponse, afin d'estimer l'indice de fiabilité des scénarios et d'évaluer la probabilité de défaillance des systèmes étudiés.

IV. 2. Application de la théorie d'homogénéisation au béton avec différentes compositions en granulats :

IV. 2.1. Application du modèle d'homogénéisation périodique au béton :

Il s'agit de faire une étude paramétrique des résultats obtenus avec la présente modélisation, afin de connaitre les paramètres qui influencent la détermination des caractéristiques mécanique. Le calcul est effectué pour un pourcentage différent en granulats et un diamètre moyen des granulats qui est de 12 mm.

Tab. IV.1. Les propriétés élastiques des constituants du composite en béton.

Béton léger	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Matrice	60	0.20
Granulats	30	0.20

IV. 2.1.a. Variation du module d'Young du béton en fonction du module du mortier :

La variation du module d'Young du mortier pour différents pourcentages en granulats entraîne une variation du module homogénéisé du béton. Les résultats obtenus (voir tableau (Tab. IV.2)) montrent que le module du béton augmente en fonction des deux paramètres cités précédemment. La représentation graphique est donnée à la figure (Fig. IV.1).

Tab. IV.2. Variation du module d'Young du béton en fonction du module du mortier (matrice) et du pourcentage en granulats.

Module d'Young du mortier E_{mor} (MPa)	Module d'Young du béton homogénéisé (E_H) en (MPa)				
	30 % de granulats	40 % de granulats	50 % de granulats	60 % de granulats	70 % de granulats
15000	28035.5	32466.4	36941.4	41461	46026
18000	30260.2	34410.1	38592.2	42807	47054.7
20000	31721.5	35680.6	39666.2	43678.5	47717.7
23000	33891.8	37561.4	41250.8	44960.1	48689.5
25000	35328.2	38803.2	42294.5	45802.3	49326.6
28000	37471.4	40652.7	43846.3	47052.2	50270.4
30000	38894.3	41879	44873.8	47878.6	50893.6

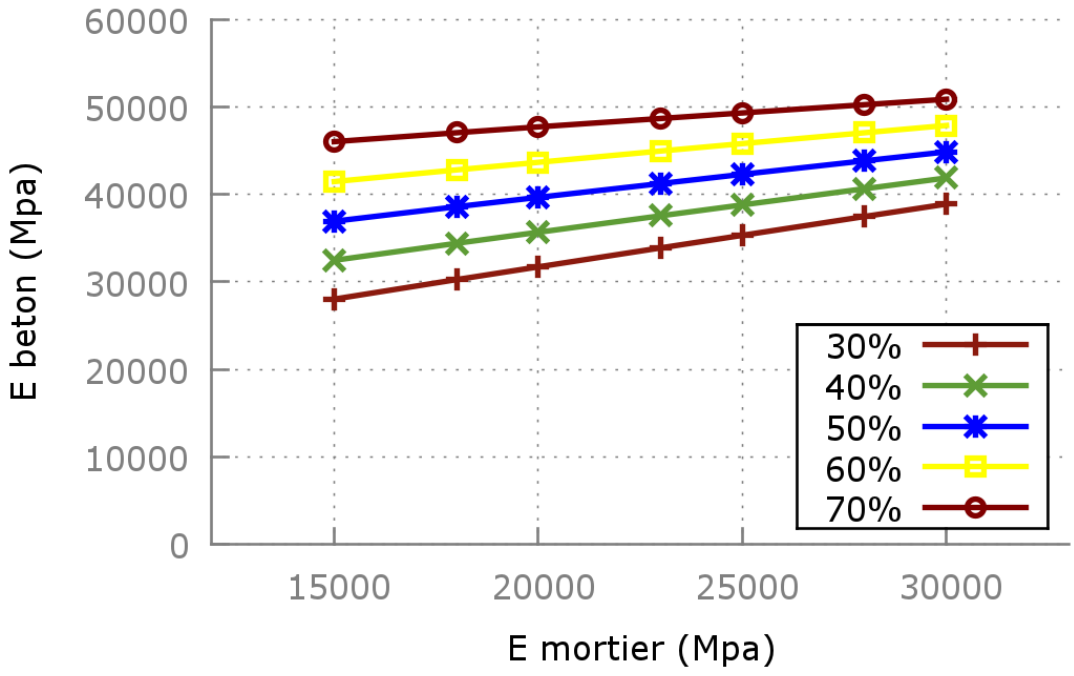

Fig. IV.1. Variation de module d'Young du béton en fonction du module du mortier.

On constate de la figure (Fig. IV.1), que l'augmentation du module d'Young du mortier, fait croître linéairement le module d'Young du béton. Aussi qu'en augmentant le pourcentage en granulats (de 30% jusqu'à 70 %), donne de plus grandes valeurs du module d'Young du béton.

IV. 2.1.b. Variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats :

La variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats, pour des modules du mortier de 15000 MPa et 20000 MPa, est donnée à la figure (Fig. IV.2).

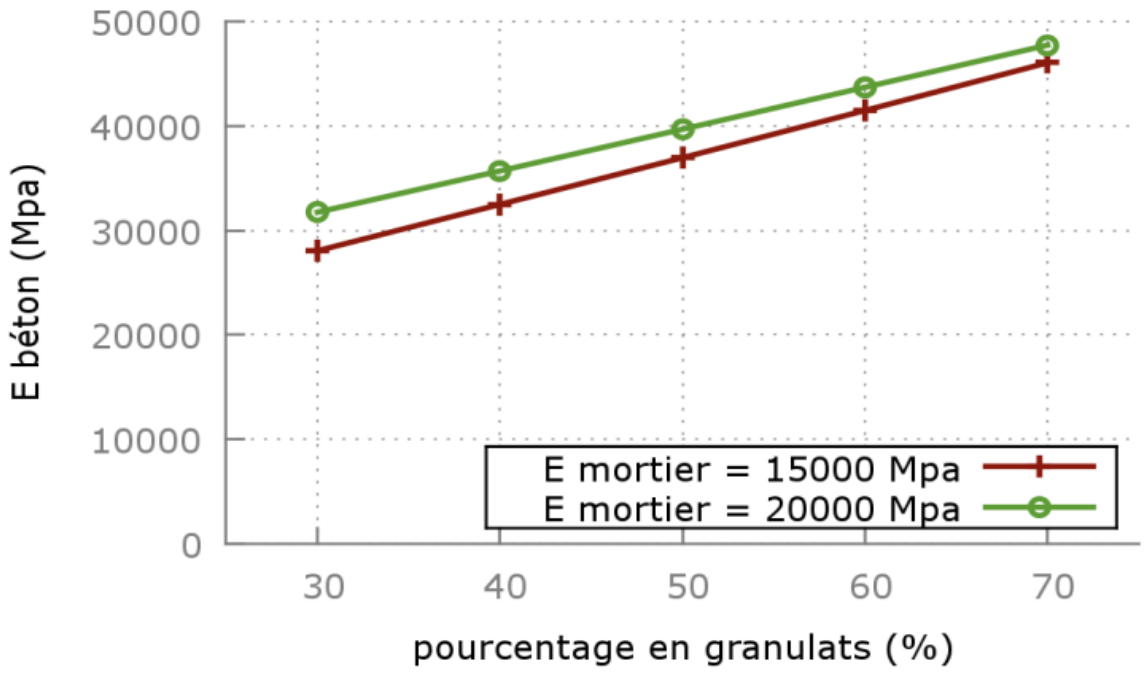

Fig. IV.2. Variation du module d'Young en fonction du pourcentage en granulats.

On constate de la figure (Fig. IV.2), qu'en augmentant le pourcentage en granulats (jusqu'à 70 %), le module d'Young croît linéairement et pratiquement de la même manière pour différent module d'Young du mortier.

IV. 2.1.c. Variation du module de Coulomb en fonction du pourcentage en granulats :

La variation du module de Coulomb en fonction du pourcentage en granulats, pour aussi des modules d'Young du mortier de 15000 MPa et 20000 MPa, est représentée à la figure (Fig. IV.3).

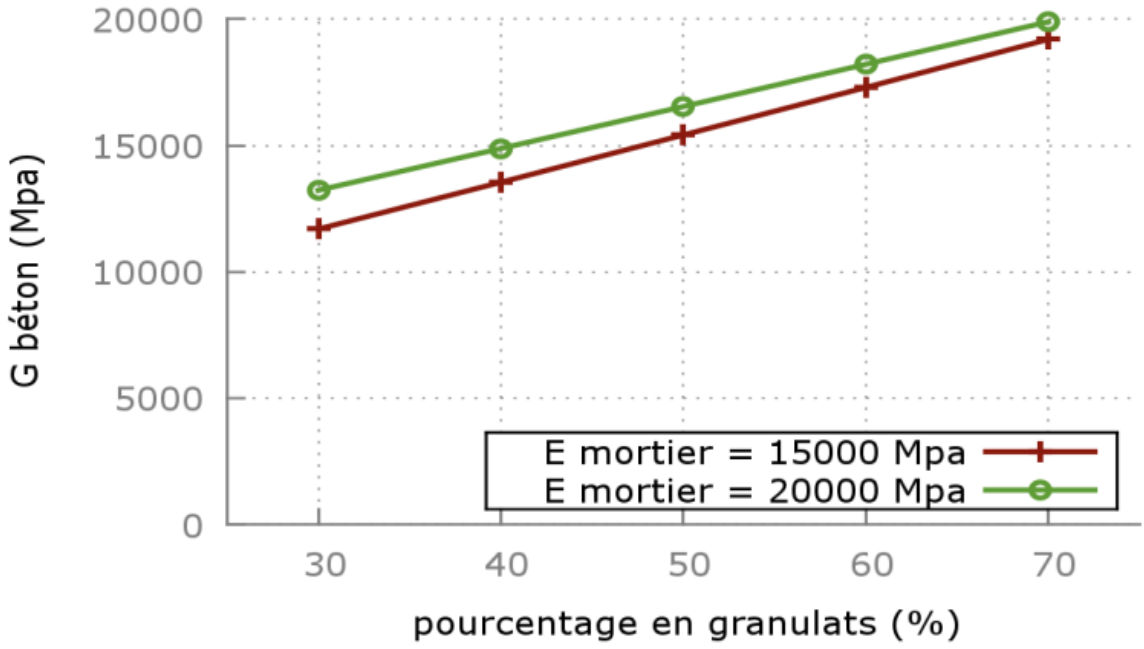

Fig. IV.3. Variation du module de Coulomb en fonction du pourcentage en granulats.

On constate de la figure (Fig. IV.3), que l'augmentation du pourcentage en granulat dans le mortier (la matrice) fait augmenter linéairement aussi le module de Coulomb et pratiquement de la même manière pour différent module d'Young du mortier.

IV. 3. Comparaison numérique des modèles d'homogénéisation semi-analytique et d'homogénéisation périodique à l'expérience :

Les différents modèles numériques d'homogénéisation périodique et semi-analytique présentés au chapitre II et en annexe I respectivement, sont implémentés afin de déterminer les caractéristiques mécaniques effectives d'un composite « béton », et où les résultats numériques issus de ces méthodes d'homogénéisation ont été comparés aux résultats expérimentaux. Une comparaison est faite entre les modèles d'homogénéisation semi-analytique (Modèle de Mori-Tanaka et Auto-cohérent) et le modèle d'homogénéisation périodique afin d'estimer les caractéristiques mécaniques équivalentes, quant à la prise en compte de l'influence de la géométrie des inclusions et des porosités par la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka et la méthode d'homogénéisation périodique sont alors discutées.

IV. 3.1. Composite en béton léger :

Dans cet exemple, le béton utilisé est hydrauliques de granulats légers, la matrice est cimentaire alors que les granulats sont en argile expansée. Les propriétés élastiques des constituants sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.3. Les propriétés élastiques des constituants du composite en béton léger.

Béton léger	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Matrice	23.630	0.20
Granulats (argile expansée)	5.679	0.15

Dans cet exemple, il s'agit de comparer les résultats numériques obtenus (méthode d'homogénéisation semi-analytique (Mori-Tanaka et Auto-cohérent) / méthode d'homogénéisation périodique) aux résultats expérimentaux [190] obtenus à partir d'essais de compression réalisés sur des éprouvettes cylindriques (16 x 32 mm), obtenues pour différentes fractions volumiques de granulats légers : 0.125, 0.25, 0.375 et 0.45.

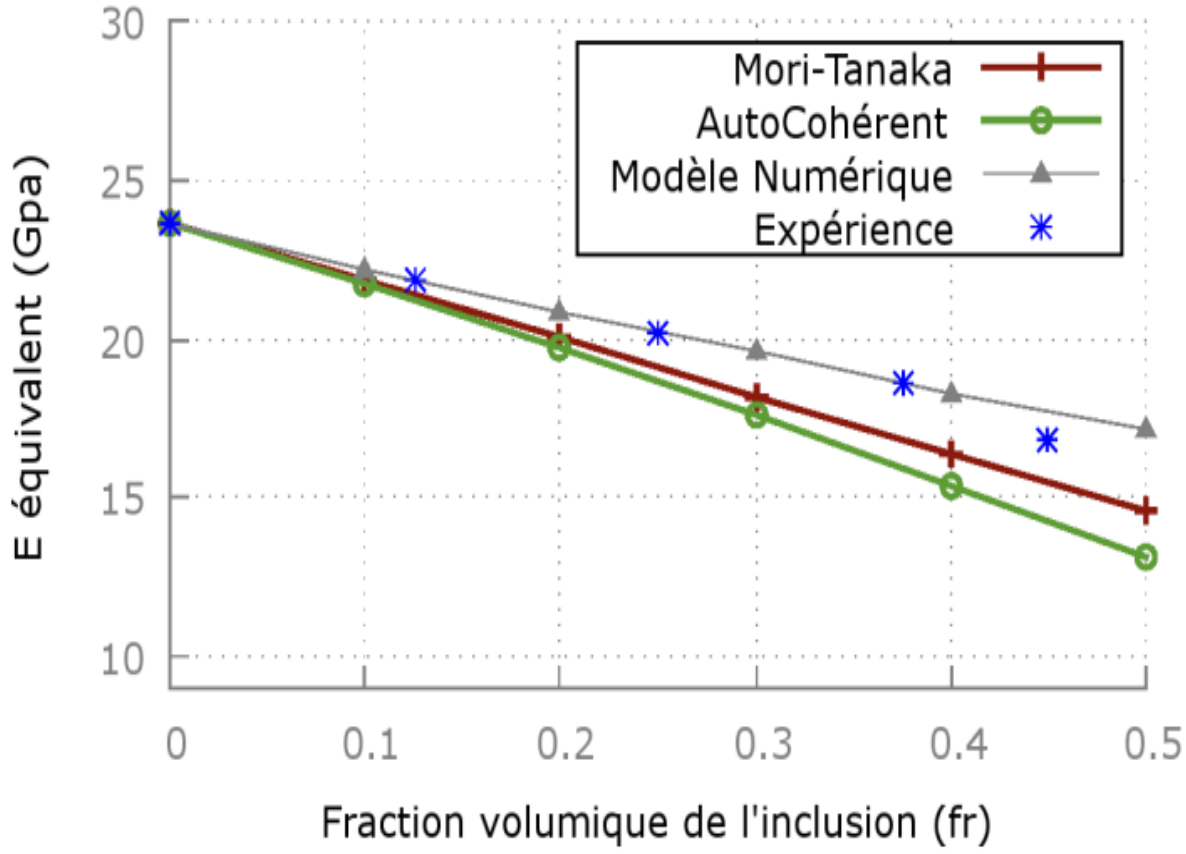

Fig. IV.4. Variation du module d'Young équivalent en fonction du pourcentage en granulats.

On remarque que les valeurs du module d'Young équivalentes trouvées par la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka sont proches des valeurs expérimentales [190], et que les valeurs obtenues avec le modèle d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka et le modèle d'homogénéisation semi-analytique Auto-cohérent sont identiques pour une fraction volumique des inclusions (< 0,2). Par contre, le modèle d'homogénéisation périodique (modèle numérique) donne de bons résultats qui approchent l'expérience et cela pour différentes fractions volumiques.

IV. 3.2. Composite en béton de résine :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice en résine époxyde et des inclusions de sable normalisé. Les propriétés élastiques des constituants du mortier de résine sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.4. Les propriétés élastiques des constituants du mortier de résine.

Béton de résine	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Résine époxyde	2.518	0.413
Sable normalisé	73.08	0.172

Il s'agit de comparer les résultats numériques aux résultats expérimentaux, les propriétés élastiques de la résine époxyde sont obtenues en utilisant la méthode de propagation des ondes ultrasonores et ceux du sable sont des valeurs moyennes [170].

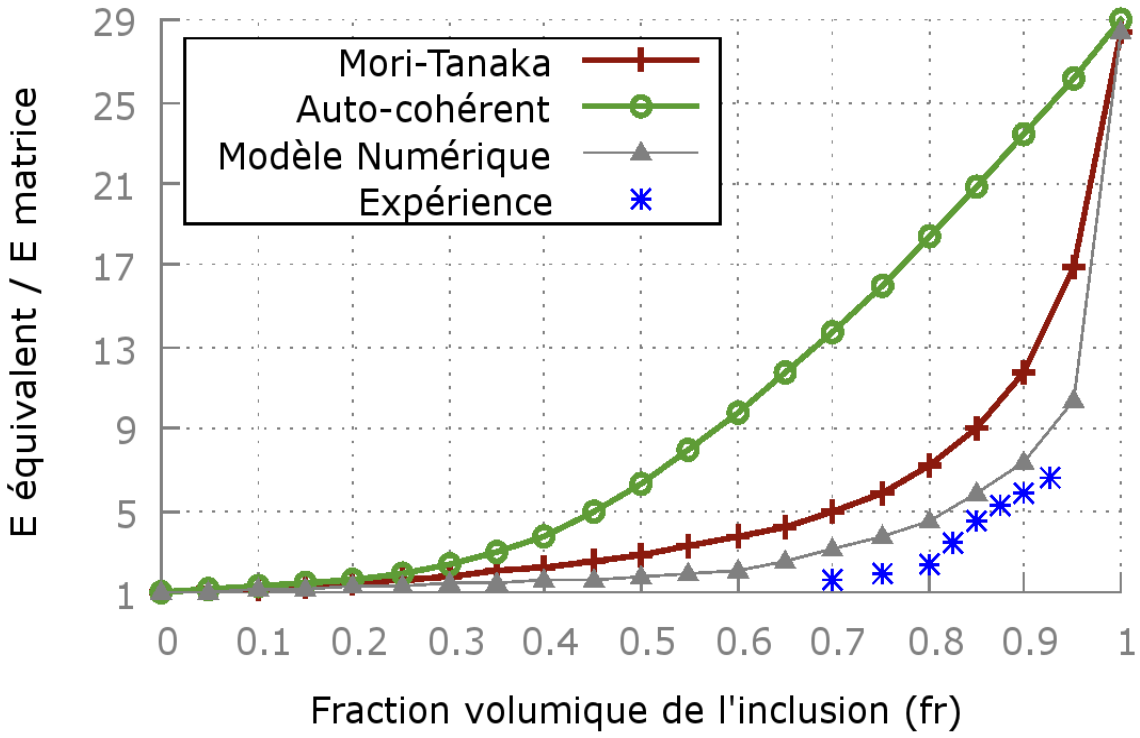

Fig. IV.5. Module d'Young pour les différents modèles.

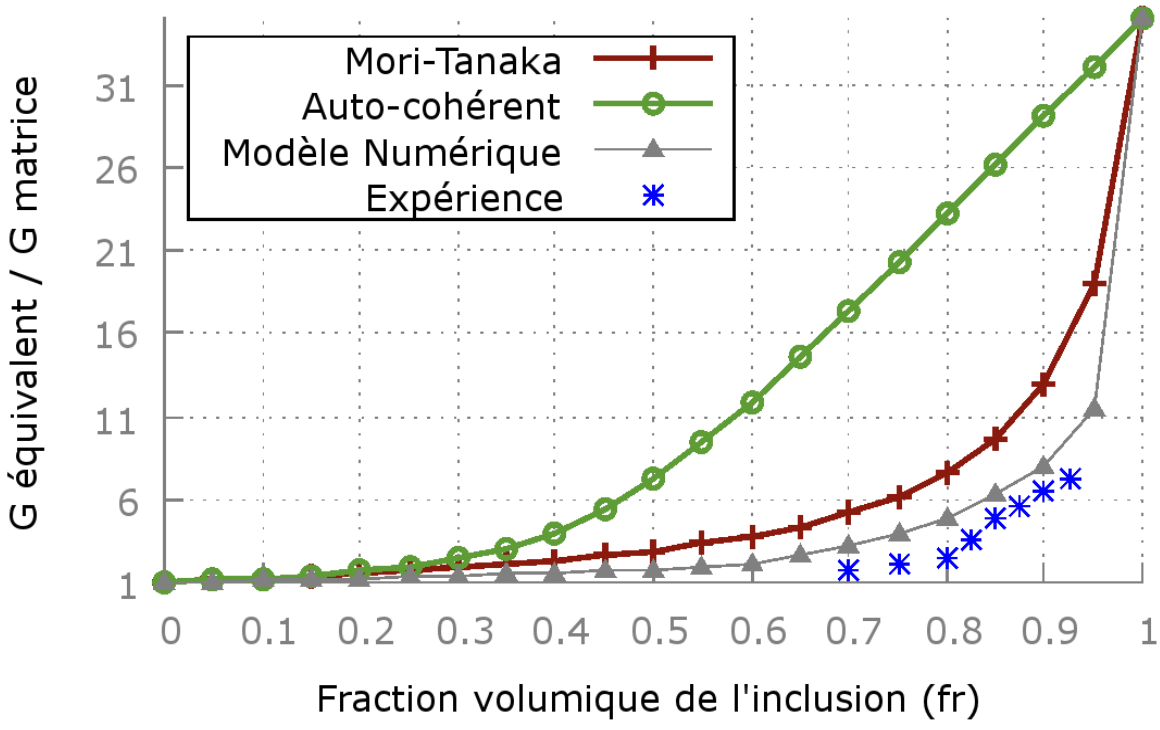

Fig. IV.6. Module de cisaillement pour les différents modèles.

Les résultats trouvés par la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka sont proches des valeurs expérimentales [170], on remarque que les estimations du modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka et ceux du modèle d'homogénéisation Auto-cohérent sont assez proches, et cela pour des fractions volumiques très faibles (<0,2). Par contre, le modèle d'homogénéisation périodique (modèle numérique) approche mieux l'expérience.

IV. 3.2.a. Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales :

Les grains de sable sont modélisés par des sphères. Une comparaison entre les méthodes d'homogénéisation semi-analytique (modèles d'homogénéisation Auto-cohérent et de Mori-Tanaka) et la méthode d'homogénéisation périodique (modèle numérique) avec les résultats expérimentaux [170] est représentée aux figures (Fig. IV.7) et (Fig. IV.8).

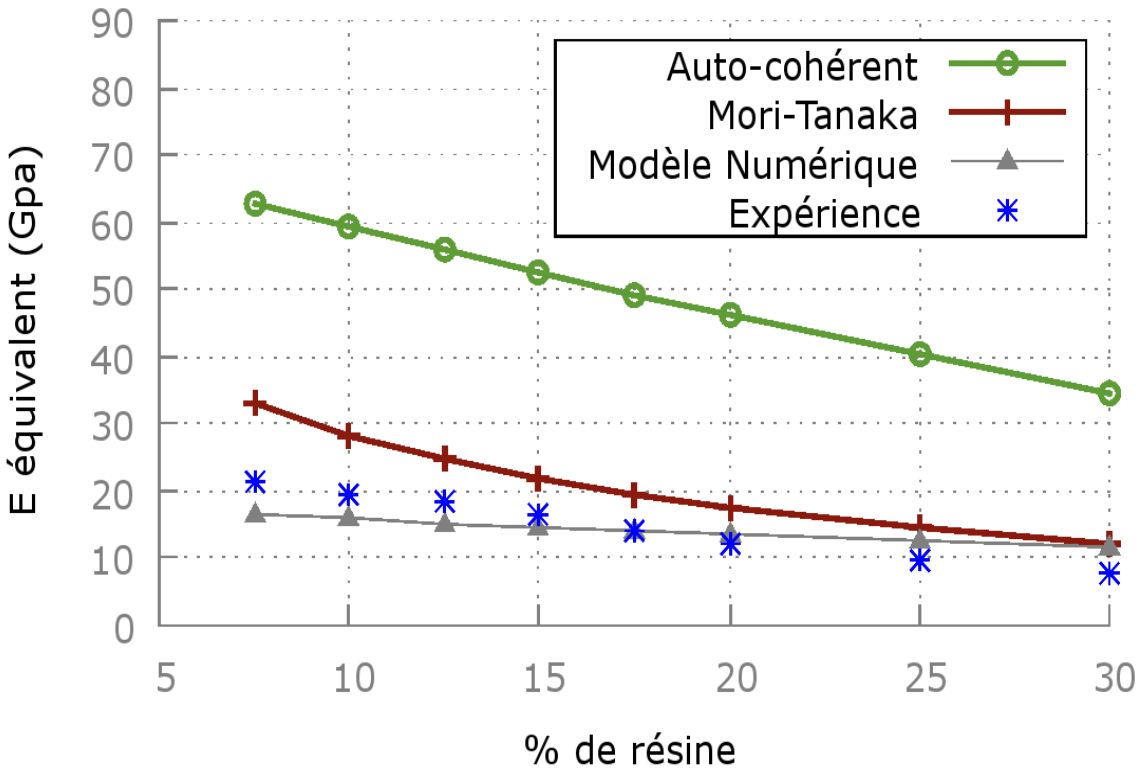

Fig. IV.7. Comparaison du module d'Young.

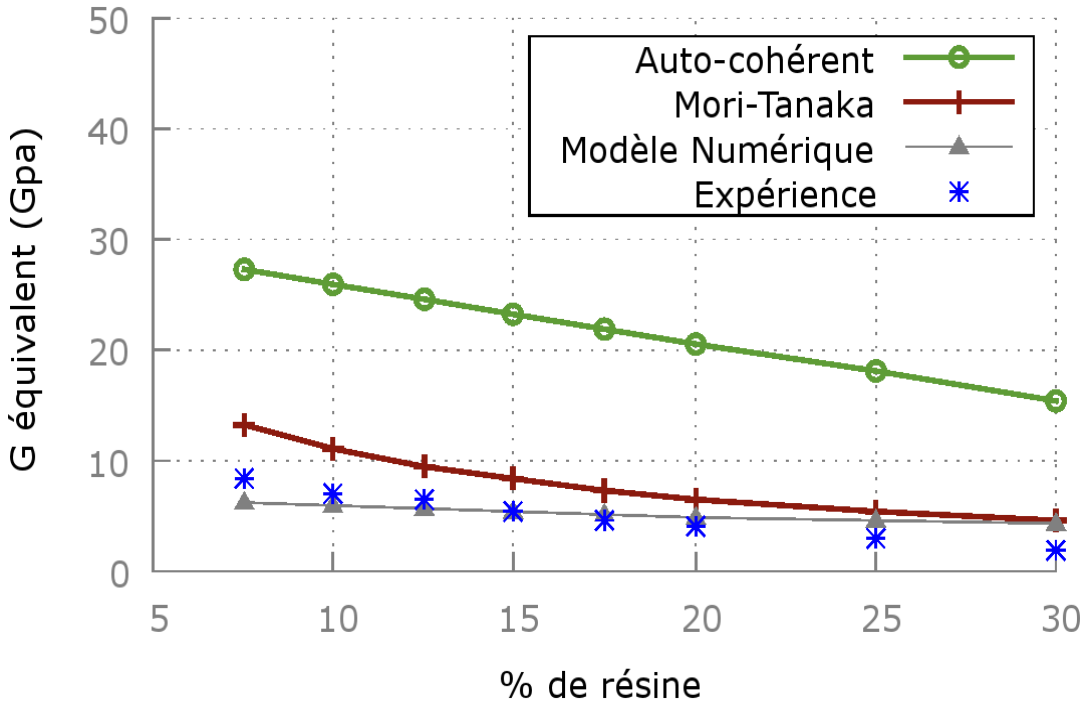

Fig. IV.8. Comparaison du module de cisaillement.

On remarque que le modèle d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka approche mieux les caractéristiques élastiques du mortier de résine par rapport au schéma Auto-cohérent.

Par contre, le modèle d'homogénéisation périodique (modèle numérique) donne de bons résultats qui approchent l'expérience et cela pour différentes caractéristiques du matériau (module d'Young ; module de cisaillement), et aussi pour différents pourcentages en résine.

IV. 3. 2.b. Prise en compte de l'influence de la géométrie et des porosités :

Ces exemples [170] nous permettent de prendre en compte de l'influence de la géométrie et des porosités.

- Mortier de résine avec inclusions ellipsoïdales : Mori-Tanaka 01
- Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales : Mori-Tanaka02
- Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales, ellipsoïdales et porosités : Mori-Tanaka 03
- Mortier de résine avec inclusions sphéroïdales, ellipsoïdales et porosités : Modèle Numérique

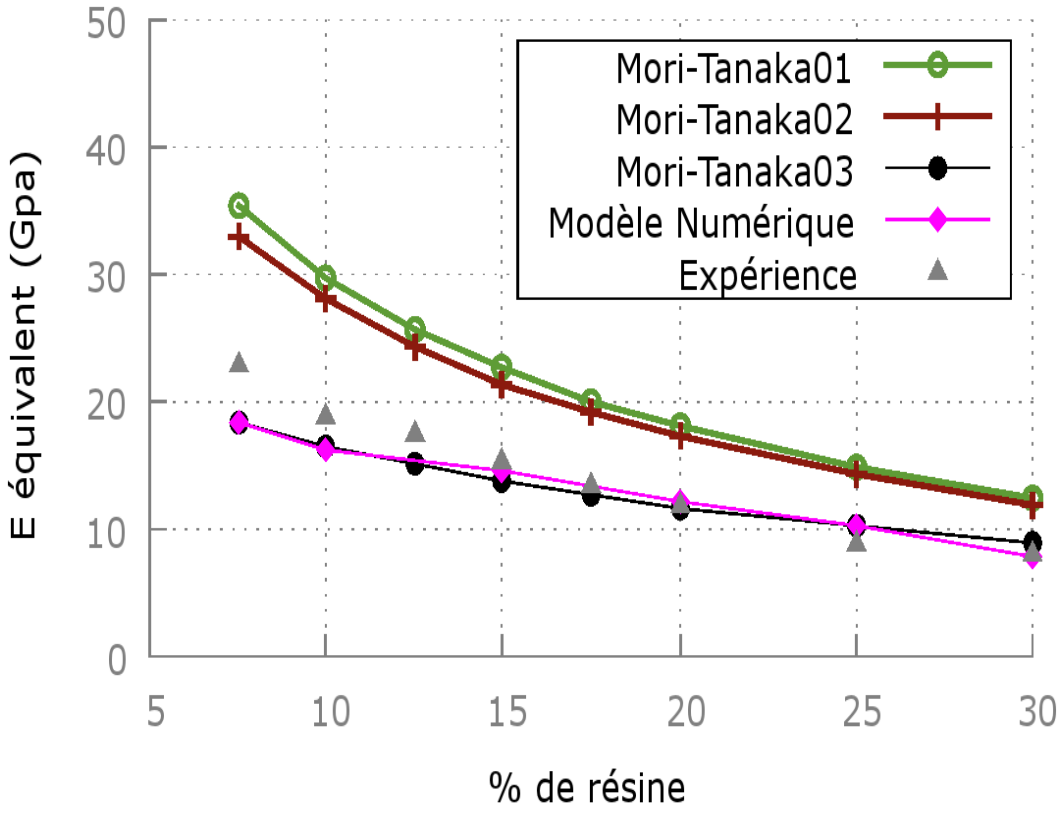

Fig. IV.9. Comparaison du module d'Young.

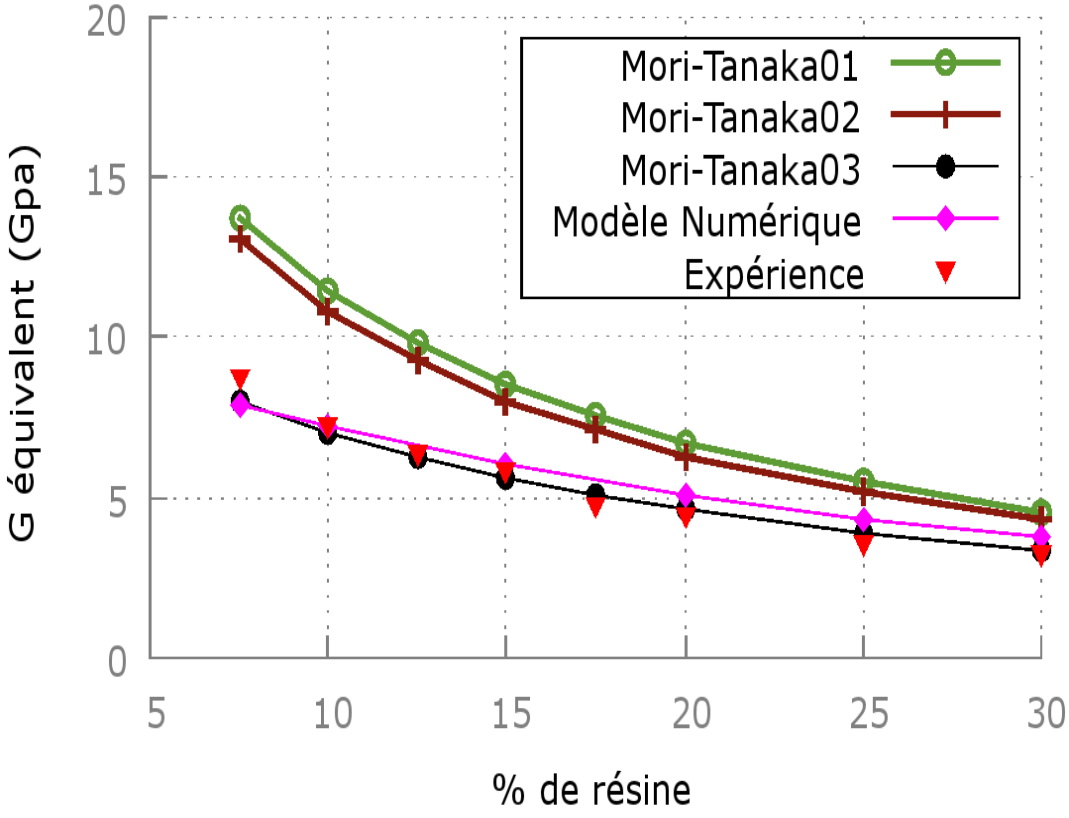

Fig. IV.10. Comparaison du module de cisaillement.

On comparant les deux premiers modèles (Mori-Tanaka 01 et Mori-Tanaka 02) avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka, on remarque que la géométrie influe légèrement sur les caractéristiques mécaniques (module d'Young, module de cisaillement). Par contre, on étudiant le troisième modèle (Mori-Tanaka 03) avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka, nous remarquons que la porosité influe considérablement et cela nous a permis d'approcher les valeurs expérimentales [170]. Pour ce qui est du modèle d'homogénéisation périodique (modèle numérique) donne des résultats comparables à ceux du modèle (Mori-Tanaka 03), et cela avec un léger écart comparé à l'expérience.

IV. 3.3. Composite cimentaire avec grains de sable (Mortier de sable) :

Le module d'élasticité des grains de sable a été pris égal à celui des granulats siliceux, soit 107 GPa, le coefficient de Poisson a été pris égal à 0,15. La mesure du module d'élasticité de la pâte de ciment a donné 6 GPa. Pour améliorer le calibrage de la courbe entre module et volume de sable, il a été pris égal à 7 GPa. Le coefficient de Poisson a été pris égal à 0,25.

Dans cet exemple le matériau hétérogène est constitué d'une matrice et des inclusions sphéroïdales. Les propriétés élastiques des constituants sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.5. Les propriétés élastiques des constituants du mortier de sable.

Béton	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Matrice (pate de ciment)	7	0.25
Inclusion (sable)	107	0.15

Une comparaison des caractéristiques mécaniques entre le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka, le modèle d'homogénéisation périodique (modèle numérique) et les mesures expérimentales est représentée à la figure (Fig. IV.12).

Il s'agit de comparer les résultats obtenus par le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka et par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle numérique) aux résultats expérimentaux, les propriétés élastiques des matériaux isotropes (de la matrice cimentaire et ceux du sable) sont des valeurs moyennes et sont obtenues pour différentes fractions volumiques de granulats de forme sphéroïdale.

Le Volume Elémentaire Représentative (VER) utilisé dans cet exemple est généré par un modeleur à objet aléatoire, et cela avec une répartition aléatoire des inclusions sphéroïdales (avec un nombre de 10 particules dans un VER) et avec différentes fractions volumiques.

Les inclusions du Volume Elémentaire Représentative (VER) sont générées de manière aléatoire, en se basant sur un motif de sphère. Une fois la génération aléatoire des inclusions du (VER) est réalisée, on va l'intégrer au code de calcul Abaqus. La taille des (VER) ne change pas, seule la fraction volumique qui évolue. L'objectif de cette étude consiste à déterminer le comportement effectif d'un composite (matrice - inclusion de forme sphéroïdale).

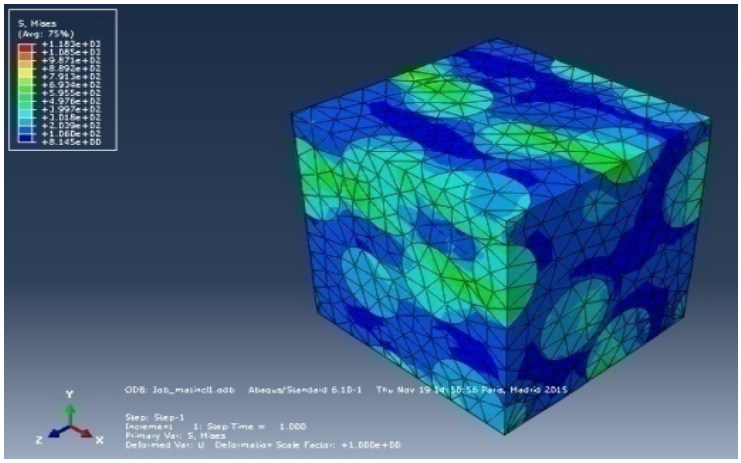

Fig. IV.11. Modélisation des inclusions sphéroïdales sur le code de calcul Abaqus.

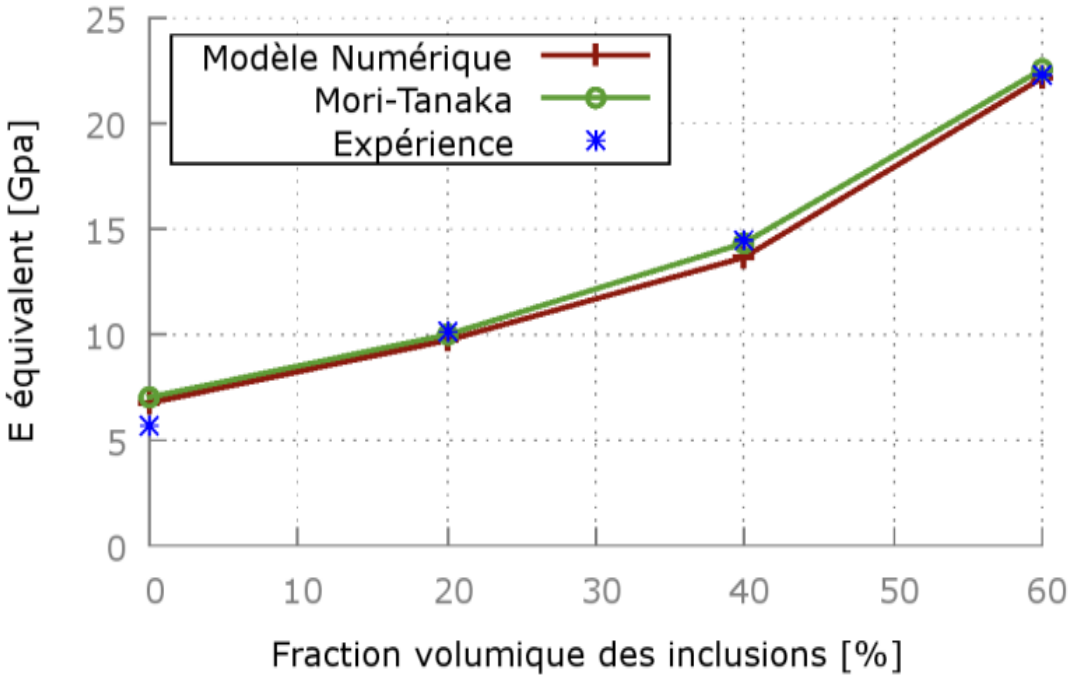

Fig. IV.12. Module d'élasticité des mortiers de granulats d'argile expansée.

On remarque que les estimations du modèle d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka, les résultats obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle numérique) et les résultats issus de l'expérience sont assez proches, et cela pour différentes fractions volumiques.

IV. 4. Estimation des caractéristiques mécaniques par un modèle d'homogénéisation périodique et prise en compte de l'endommagement d'un composite à inclusion :

Dans cette partie, on traitera plusieurs exemples afin de valider le modèle d'homogénéisation périodique et cela en faisant varier le pourcentage et la forme des inclusions pour des volumes élémentaires représentatifs (VER) de matériaux composites. Dans cette étude, on comparera nos résultats du modèle d'homogénéisation périodique qui sont représenté par (Numerical Homogenization) avec ceux de **Ghayath** [171] qui sont représenté par (Mori-Tanaka Model).

Une fois les caractéristiques mécaniques sont appréciées, on introduit des modèles d'endommagement dans le modèle d'homogénéisation périodique pour des volumes élémentaires représentatifs (VER) en matériaux composites, via une implémentation dans le code de calcul Abaqus, et cela en utilisant la Subroutine utilisateur (Umat) sous le langage de programmation Fortran.

IV. 4.1. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions sphéroïdales :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice et des inclusions sphéroïdales. Les propriétés élastiques des constituants sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.6. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions sphéroïdales).

Matériaux	Module d'Young E (Mpa)	Coefficient de Poisson ν
Matrice	2800	0.35
Inclusions (sphéroïdales)	72000	0.172

Le VER est constitué de deux phases : la matrice et l'inclusion de forme sphéroïdale qui suivent un comportement isotrope, il s'agit d'un cas 3D en petites perturbations. La matrice est modélisée en tant qu'élément cubique, et l'inclusion est modélisée sous une forme sphéroïdale et en tant que corps rigides.

Les conditions aux limites homogènes ne donnent pas d'autres contraintes que dans la direction de perturbation. Par conséquent, ils se traduisent par un état de contrainte uni-axiale sous un chargement de traction. Le VER utilisé dans cet exemple est généré par un modeleur à objet aléatoire, et cela avec une répartition aléatoire des inclusions sphéroïdales (avec un nombre de 10 particules dans un VER) et avec différentes fractions volumiques.

Les inclusions du Volume Elémentaire Représentatif (VER) sont générées de manière aléatoire, en se basant sur un motif de sphère. Une fois la génération aléatoire des inclusions du (VER) est réalisée, on va l'intégrer dans le code de calcul Abaqus. La taille des (VER) ne change pas, seule la fraction volumique qui évolue. L'objectif de cette étude consiste à déterminer le comportement effectif d'un composite (matrice - inclusions de formes sphéroïdales).

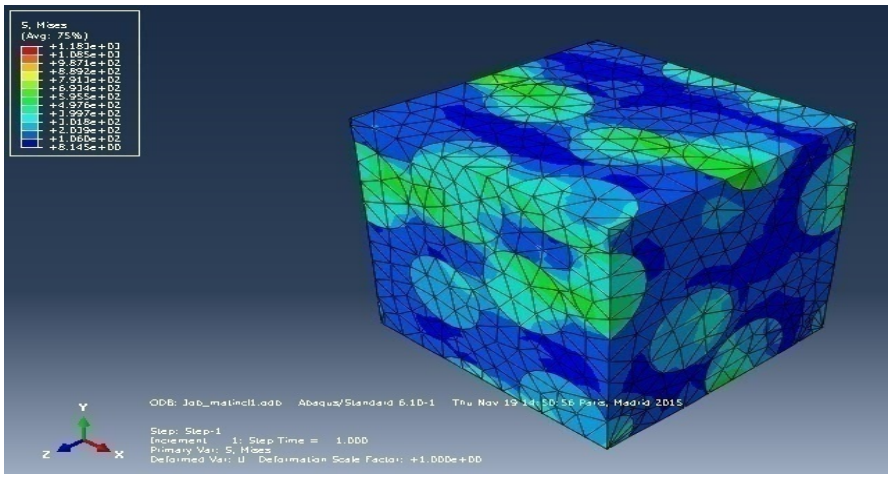

Fig. IV.13. Modélisation du composite (matrice-inclusions sphéroïdales).

Les résultats obtenus à la figure (Fig. IV.13), montrent que toutes les contraintes principales de la microstructure sont accumulées dans la direction x, ou au niveau de la direction de perturbation en utilisant des conditions aux limites périodiques.

Une comparaison des caractéristiques mécaniques entre la méthode d'estimation de Mori-Tanaka (Mori-Tanaka Model) [191] et le modèle d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) développé dans cette étude est représentée à la figure (Fig. IV.14), et cela pour différentes fractions volumiques de granulats de formes sphéroïdales.

Il s'agit de comparer les résultats numériques obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle élément fini ayant des conditions aux limites périodiques) aux résultats obtenus par le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (résultats tirés de **Ghayath** [171]).

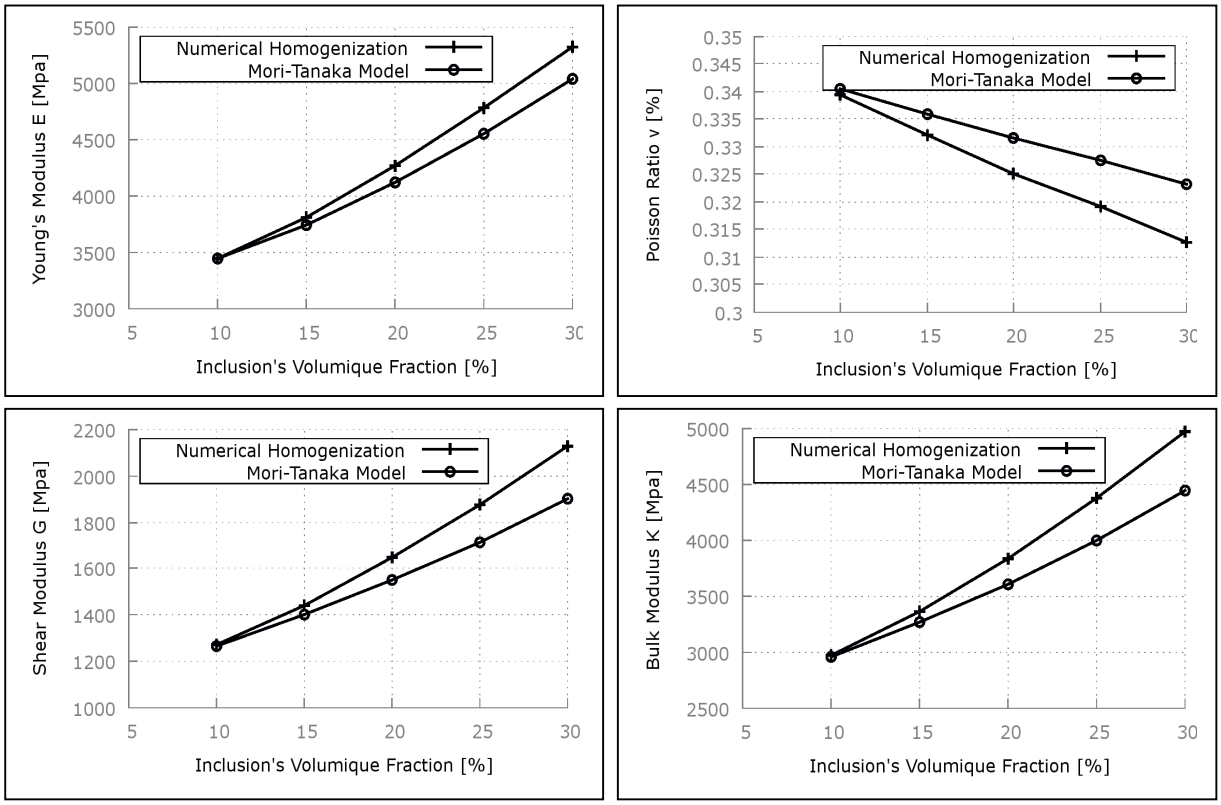

Fig. IV.14. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions sphéroïdales.

Les propriétés élastiques des matériaux isotropes (de la matrice et ceux de l'inclusion) sont obtenues pour différentes fractions volumiques d'inclusions sphéroïdales.

On remarque qu'à des fractions volumiques faibles, on observe une très petite différence avec le modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]), tandis que pour de grandes fractions volumiques, on observe une plus grande différence. On remarque aussi, que les estimations du modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (Mori-Tanaka Model) (**Ghayath** [171]), et ceux de la méthode d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) développée dans cette étude sont assez proches, et cela pour des fractions volumiques très faibles (< 20%).

On conclut, que la méthode d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) donne des caractéristiques mécaniques plus rigides que ceux du modèle d'homogénéisation semi-analytique (Mori-Tanaka Model).

IV. 4.1.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation :

Nous avons implémenté un modèle d'endommagement de **Mazars** ([144], [145]) dans le code de calcul Abaqus via l'utilisation d'une Subroutine (Umat) programmé sous le langage Fortran. Des calculs sur un volume élémentaire représentatif (VER) constitué de 10 particules avec des conditions de localisation de type (PBC), nous ont permis d'étudier l'influence de la variation de la fraction volumique des inclusions sphéroïdales pour ce modèle d'endommagement sur la réponse de la microstructure.

Les propriétés effectives des volumes élémentaires représentatifs (E_{eff} , ν_{eff}) sont ceux obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique, correspondant à chaque fraction volumique. L'élément de volume est sollicité en traction pure. Le chargement se fait à déplacement imposé en déformation tridimensionnel. Les caractéristiques mécaniques du matériau composite sont les suivantes :

Tab. IV.7. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions sphéroïdales).

Fraction Volumique (%)	E_h	ν_h	A_C	B_C	A_t	B_t	ε_{D0}
10	3440.433	0.3335	1.4	240.830	0.8	2752.346	0.001
15	3764.6	0.3351	1.4	263.522	0.8	3011.68	0.001
20	4264.9	0.3263	1.4	298.543	0.8	3411.92	0.001
25	4779.033	0.3160	1.4	334.532	0.8	3823.226	0.001
30	5324.7	0.3125	1.4	372.729	0.8	4259.76	0.001

Dans un premier cas, on représente dans les figures ((Fig. IV.15) et (Fig. IV.16)) la réponse locale contrainte-déformation et l'évolution du dommage respectivement, en fonction de la déformation d'un élément de volume sollicité en traction pure et sous différentes fractions volumiques. Dans un premier cas, on a fixé le paramètre A_t et fait varier le paramètre B_t.

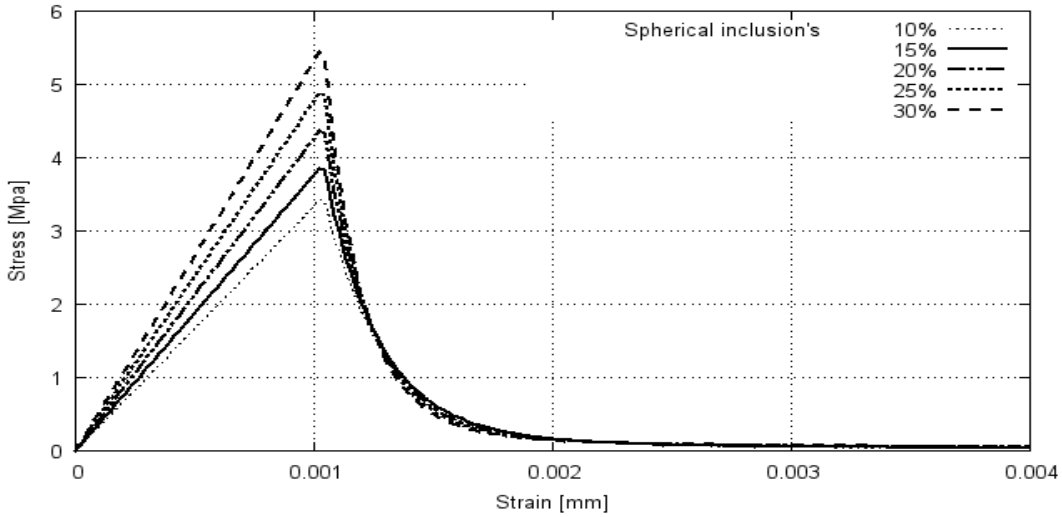

Fig. IV.15. Comportement local contrainte-déformation.

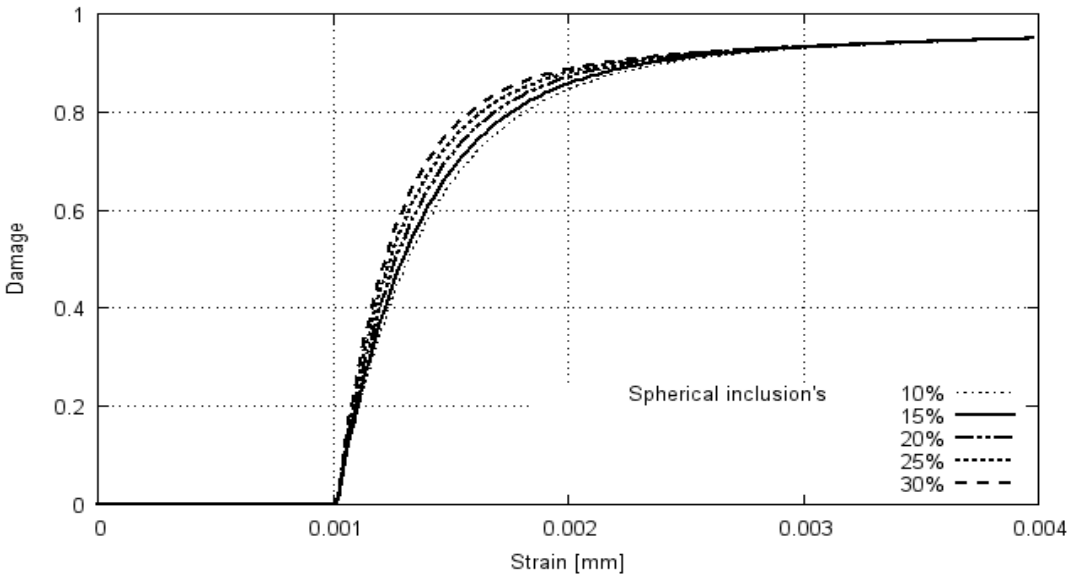

Fig. IV.16. Evolution du dommage en fonction de la déformation.

Les figures ((Fig. IV.15) et (Fig. IV.16)) nous montrent que la variation de la fraction volumique des inclusions sphéroïdales et du paramètre B_t jouent à la fois sur la raideur du composite et l'allure du dommage.

Dans un second cas, l'influence du paramètre A_t est donnée sur les figures ((Fig. IV.17) et (Fig. IV.18)) par rapport à la réponse locale contrainte-déformation et l'évolution du dommage respectivement, d'un élément de volume sollicité en traction pure, avec une fraction volumique moyenne des inclusions sphéroïdales (prise égale à 20%) et une valeur fixe du paramètre B_t correspondant à ce pourcentage.

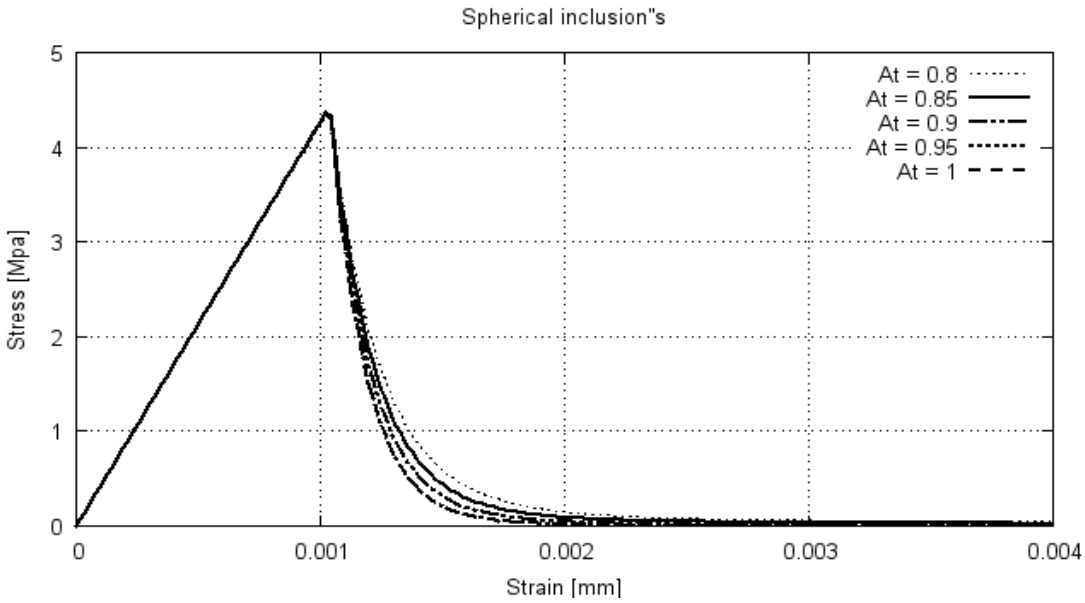

Fig. IV.17. Influence du paramètre A_t sur le comportement local contrainte-déformation.

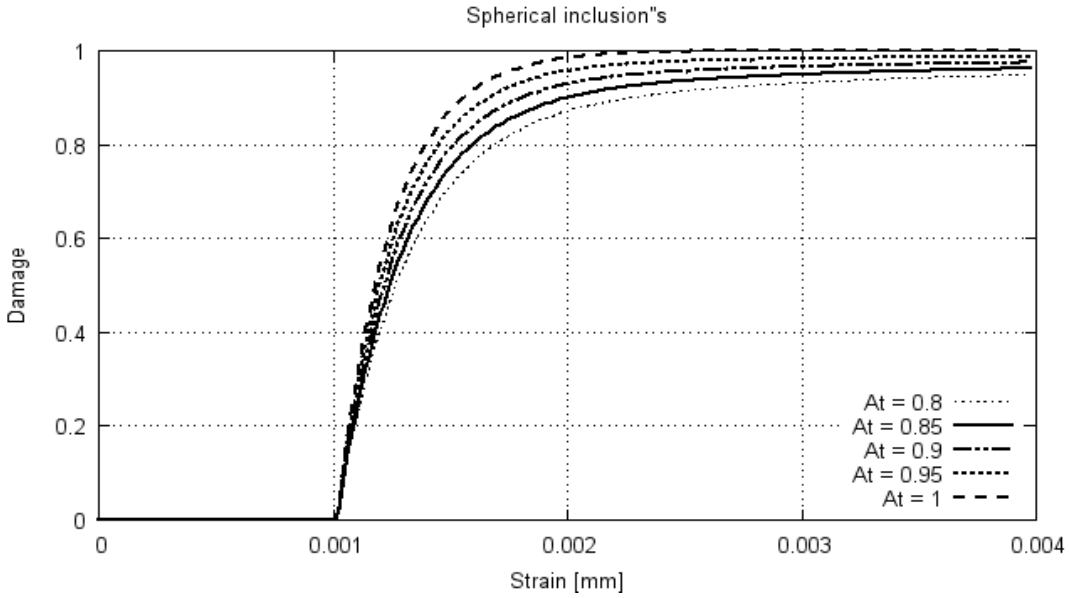

Fig. IV.18. Influence du paramètre A_t sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation.

Les figures ((Fig. IV.17) et (Fig. IV.18)) nous montre que la variation du paramètre A_t joue sur l'allure du composite, et sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation.

IV. 4.2. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions ellipsoïdales :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice et des inclusions ellipsoïdales. Les propriétés élastiques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.8. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales).

Matériaux	Module d'Young E (Mpa)	Coefficient de Poisson ν
Matrice	2800	0.35
Inclusions (ellipsoïdales)	72000	0.172

Le volume élémentaire représentatif (VER) est constitué de deux phases : la matrice et l'inclusion ellipsoïdale qui suivent un comportement isotrope. Il s'agit d'un cas 3D en petites perturbations. La matrice est modélisée en tant que cube élémentaire, et l'inclusion est modélisée sous une forme ellipsoïdale et en tant que corps rigides.

Les conditions aux limites homogènes ne donnent pas d'autres contraintes que dans la direction de perturbation. Par conséquent, ils se traduisent par un état de contrainte uni-axiale sous un chargement de traction.

Le VER utilisé dans cet exemple est généré par un modeleur à objet aléatoire, et cela avec une répartition aléatoire des inclusions ellipsoïdales (avec un nombre de 10 particules dans un VER) et avec différentes fractions volumiques.

Les inclusions du Volume Elémentaire Représentatif (VER) sont générées de manière aléatoire, en se basant sur un motif d'ellipse. Une fois la génération aléatoire des inclusions du VER est réalisée, on l'intègre dans le code de calcul Abaqus. La taille des VER ne change pas, seule la fraction volumique qui évolue. L'objectif de cette étude consiste à déterminer le comportement mécanique effectif d'un composite (matrice - inclusion de forme ellipsoïdale).

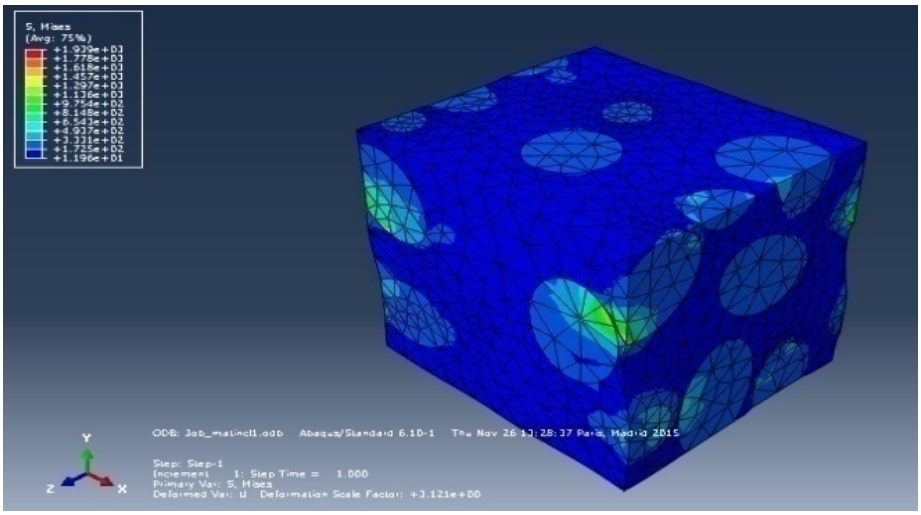

Fig. IV.19. Modélisation du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales).

Les résultats obtenus à la figure (Fig. IV.19), montrent que toutes les contraintes principales de la microstructure sont accumulées dans la direction x ou au niveau de la direction de perturbation en utilisant des conditions aux limites périodiques.

Une comparaison des caractéristiques mécaniques entre la méthode d'estimation de Mori-Tanaka (Mori-Tanaka Model) [171] et le modèle d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) est représentée à la figure (Fig. IV.20), et cela pour différentes fractions volumiques de granulats ellipsoïdales.

Il s'agit de comparer les résultats numériques obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle élément fini ayant des conditions aux limites périodiques) aux résultats obtenus par le modèle de Mori-Tanaka (résultats tirés de **Ghayath** [171]).

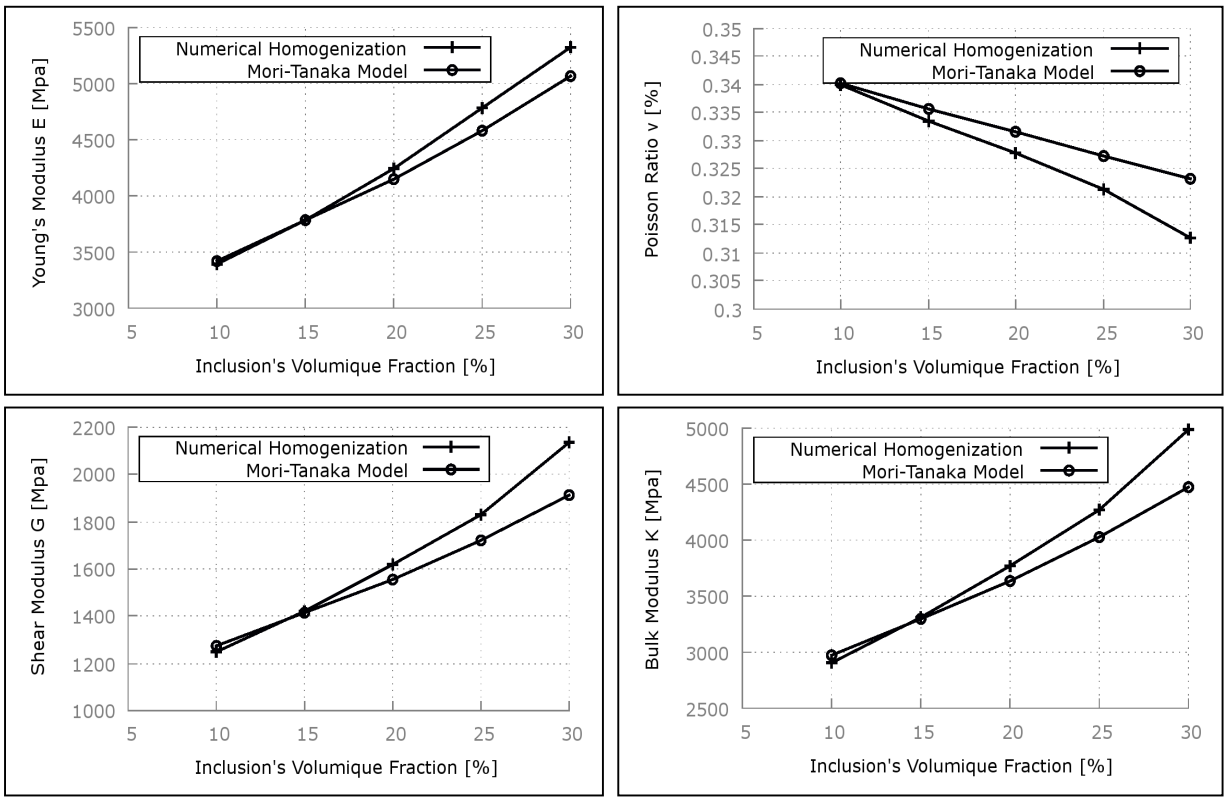

Fig. IV.20. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions ellipsoïdales.

Les propriétés élastiques des matériaux isotropes (de la matrice et ceux de l'inclusion) sont des valeurs moyennes, et sont obtenues pour différentes fractions volumiques d'inclusions ellipsoïdales.

On remarque qu'à des fractions volumiques faibles, on observe une très petite différence avec le modèle de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]), tandis que pour de grandes fractions volumiques, on observe une plus grande différence. On remarque aussi que les estimations du modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]) et ceux de la méthode d'homogénéisation périodique développée dans cette étude sont assez proches et cela pour des fractions volumiques très faibles (< 20%).

On conclut, que la méthode d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) donne des caractéristiques mécaniques plus rigides que ceux du modèle d'homogénéisation semi-analytique (Mori-Tanaka Model).

IV. 4.2.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation :

Nous avons implémenté un modèle d'endommagement de **Mazars** ([144], [145]) dans le code de calcul Abaqus, via l'utilisation d'une Subroutine (Umat) programmé sous le langage Fortran. Des calculs sur un VER de 10 particules avec des conditions de localisation de type (PBC), nous ont permis d'étudier l'influence de la variation de la fraction volumique des inclusions ellipsoïdales, pour ce modèle d'endommagement sur la réponse de la microstructure.

Les propriétés mécaniques effectives des volumes élémentaires représentatifs (E_{eff} , ν_{eff}) sont ceux obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique, correspondant à chaque fraction volumique. L'élément de volume est sollicité en traction pure. Le chargement se fait à déplacement imposé en déformation tridimensionnel. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont les suivantes :

Tab. IV.9. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions ellipsoïdales).

Fraction Volumique (%)	E	ν	A_C	B_C	A_t	B_t	ε_{D0}
10	3391.733	0.3401	1.4	237.421	0.8	2713.386	0.001
15	3787.733	0.3335	1.4	265.141	0.8	3030.186	0.001
20	4240.366	0.3278	1.4	296.825	0.8	3392.293	0.001
25	4784.433	0.3212	1.4	334.910	0.8	3827.546	0.001
30	5320.8	0.3125	1.4	372.456	0.8	4256.64	0.001

Dans un premier cas, on représente dans les figures ((Fig. IV.21), (Fig. IV.22)) la réponse locale contrainte-déformation et l'évolution du dommage respectivement, en fonction de la déformation d'un élément de volume sollicité en traction pure et sous différentes fractions volumiques. On a fixé le paramètre A_t et fait varié le paramètre B_t.

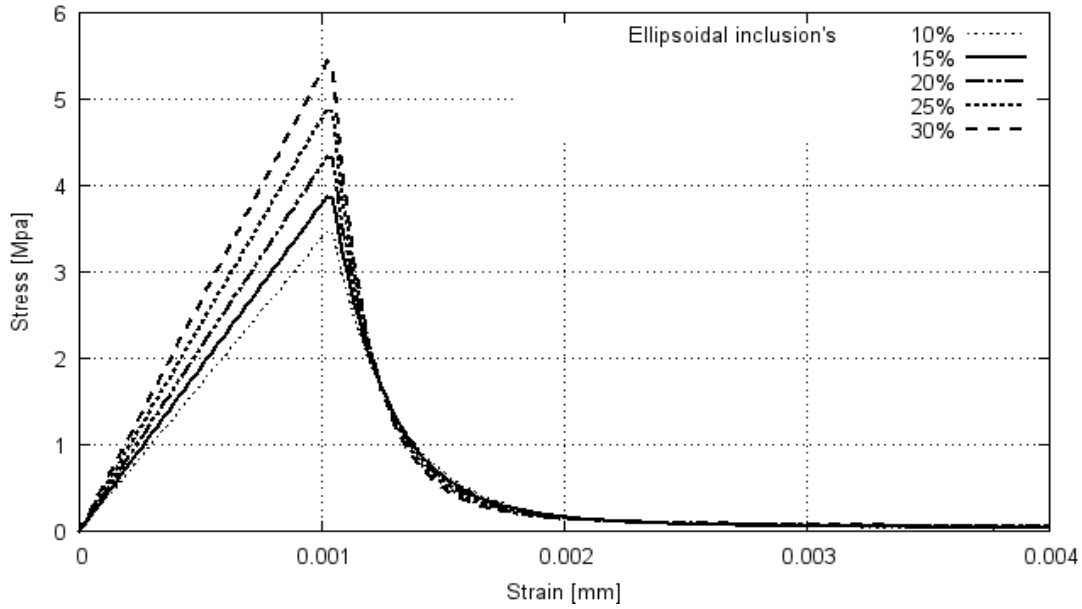

Fig. IV.21. Comportement local contrainte-déformation.

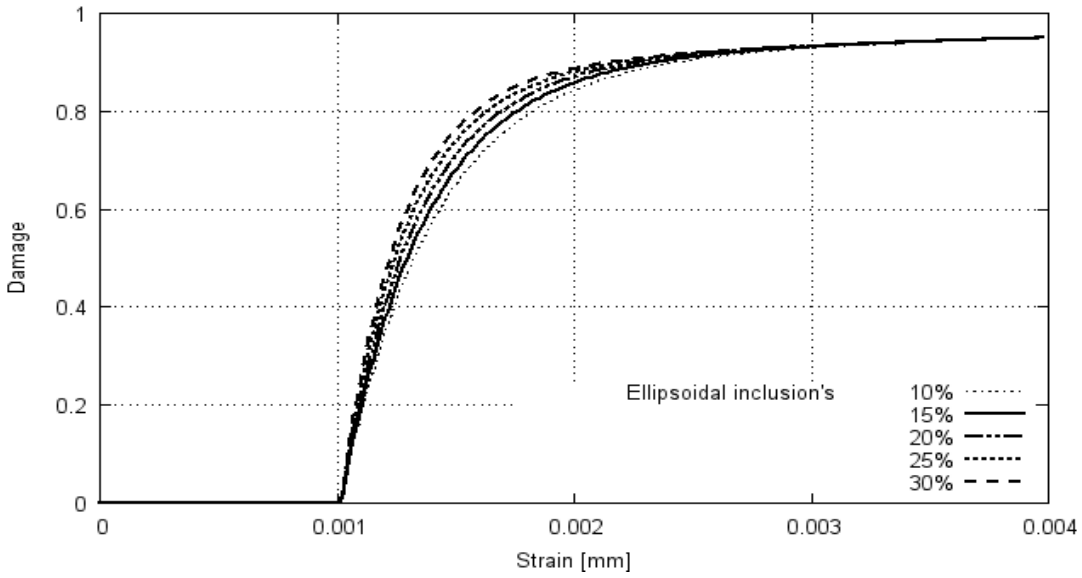

Fig. IV.22. Evolution du dommage en fonction de la déformation.

Les figures ((Fig. IV.21), (Fig. IV.22)) nous montrent que la variation de la fraction volumique des inclusions ellipsoïdales, et du paramètre B_t jouent à la fois sur la raideur du composite et l'allure du dommage.

Dans un second cas, l'influence du paramètre A_t est donnée sur les figures ((Fig. IV.23), (Fig. IV.24)) par rapport à la réponse locale contrainte-déformation et l'évolution du dommage respectivement, d'un élément de volume sollicité en traction pure, avec une fraction volumique moyenne (prise égale à 20%) et une valeur fixe du paramètre B_t correspondant à ce pourcentage.

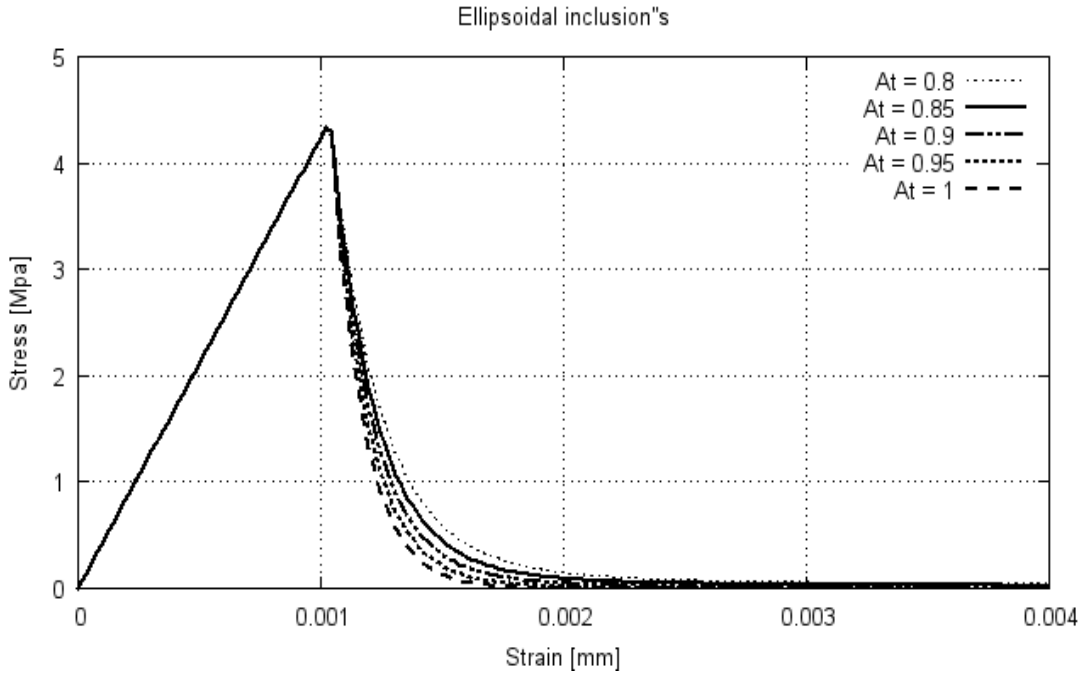

Fig. IV.23. Influence du paramètre A_t sur le comportement local contrainte-déformation.

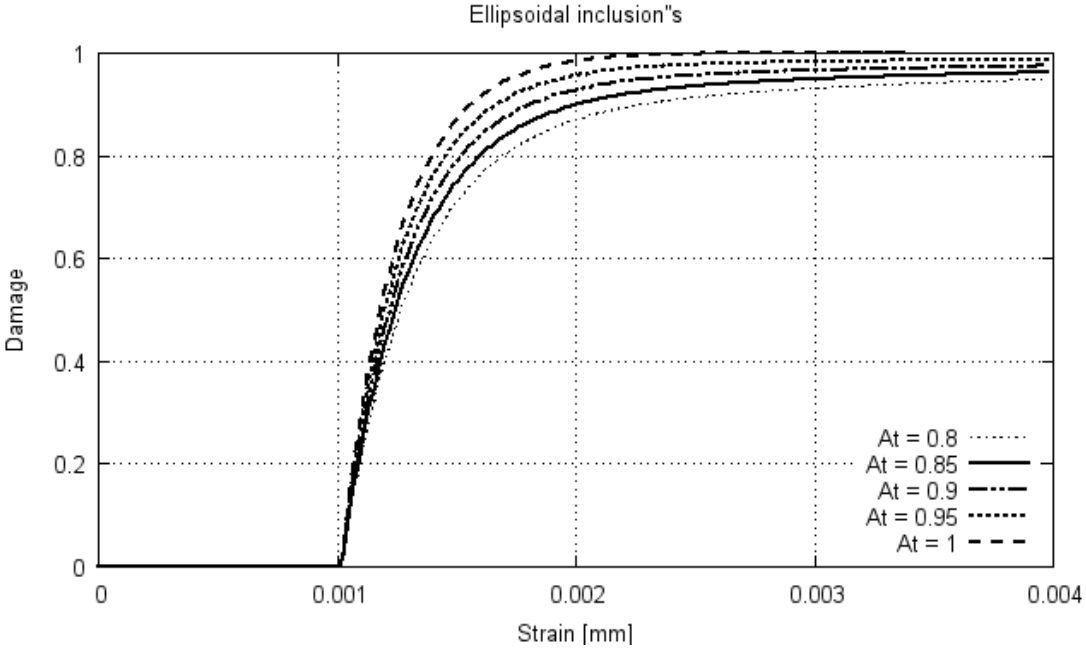

Fig. IV.24. Influence du paramètre A_t sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation.

Les figures ((Fig. IV.23), (Fig. IV.24)) nous montre que la variation du paramètre A_t joue sur l'allure du composite, et sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation.

IV. 4.3. Volume élémentaire représentatif d'une microstructure à inclusions cylindriques :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice en résine époxyde et des inclusions cylindriques. Les propriétés élastiques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.10. Les propriétés élastiques des constituants du composite (matrice-inclusions cylindriques).

Matériaux	Module d'Young E (Mpa)	Coefficient de Poisson ν
Matrice	2800	0.35
Inclusions (cylindriques)	72000	0.172

Le volume élémentaire représentatif (VER) est constitué de deux phases : la matrice et l'inclusion cylindrique qui suivent un comportement isotrope. Il s'agit d'un cas 3D en petites perturbations. La matrice est modélisée en tant que cube élémentaire, et l'inclusion est modélisée sous une forme cylindrique et en tant que corps rigides.

Les conditions aux limites homogènes ne donnent pas d'autres contraintes que dans la direction de perturbation. Par conséquent, ils se traduisent par un état de contrainte uni-axiale sous un chargement de traction.

Le VER utilisé dans cet exemple est généré par un modeleur à objet aléatoire, et cela avec une répartition aléatoire des inclusions cylindriques (avec un nombre de 10 particules dans un VER) et avec différentes fractions volumiques.

Les inclusions du Volume Elémentaire Représentatif (VER) sont générées de manière aléatoire, en se basant sur un motif de cylindre. Une fois la génération aléatoire des inclusions du VER est réalisée, on l'intègre dans le code de calcul Abaqus. La taille du VER ne change pas, seule la fraction volumique qui évolue. L'objectif de cette étude consiste à déterminer le comportement mécanique effectif d'un composite (matrice - inclusions de forme cylindriques).

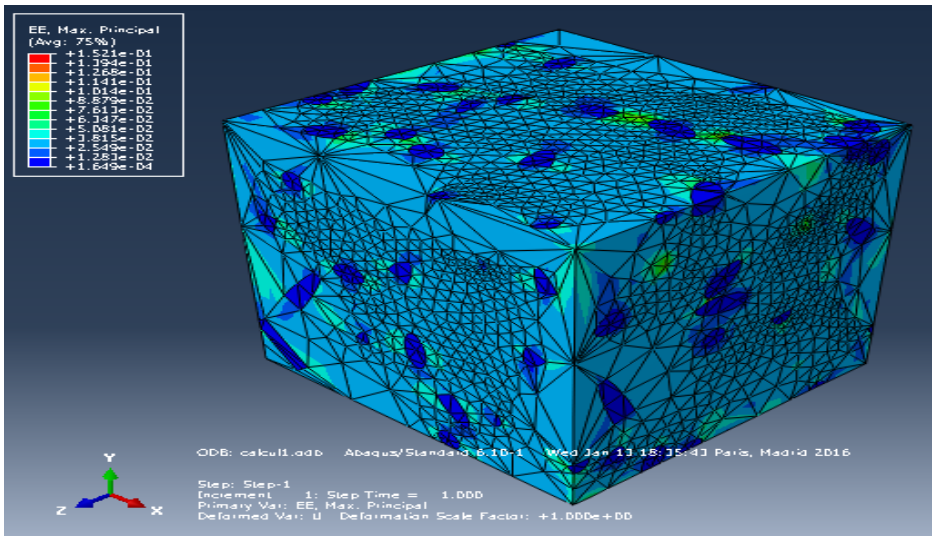

Fig. IV.25. Modélisation du composite (matrice-inclusions cylindriques).

Pour ce type d'inclusions, Il y a lieu de se limiter à une fraction volumique afin d'éviter une géométrie complexe qui nécessitera un maillage très fin qui conduirait à un nombre important d'éléments finis, c'est pour cette raison, on s'est limité à une fraction volumique moyenne des inclusions de l'ordre de 20 %.

Les résultats représentée à la figure (Fig. IV.25) montrent que toutes les contraintes principales de la microstructure sont accumulées dans la direction x, ou au niveau de la direction de perturbation en utilisant des conditions aux limites périodiques.

Une comparaison des caractéristiques mécaniques entre la méthode d'estimation de Mori-Tanaka (Mori-Tanaka Model) [171] et le modèle d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) est représentée à la figure (Fig. IV.26), et cela pour différentes fractions volumiques d'inclusions cylindriques.

Il s'agit de comparer les résultats numériques obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique (modèle élément fini ayant des conditions aux limites périodiques) aux résultats obtenus par le modèle de Mori-Tanaka (résultats tirés de **Ghayath** [171]).

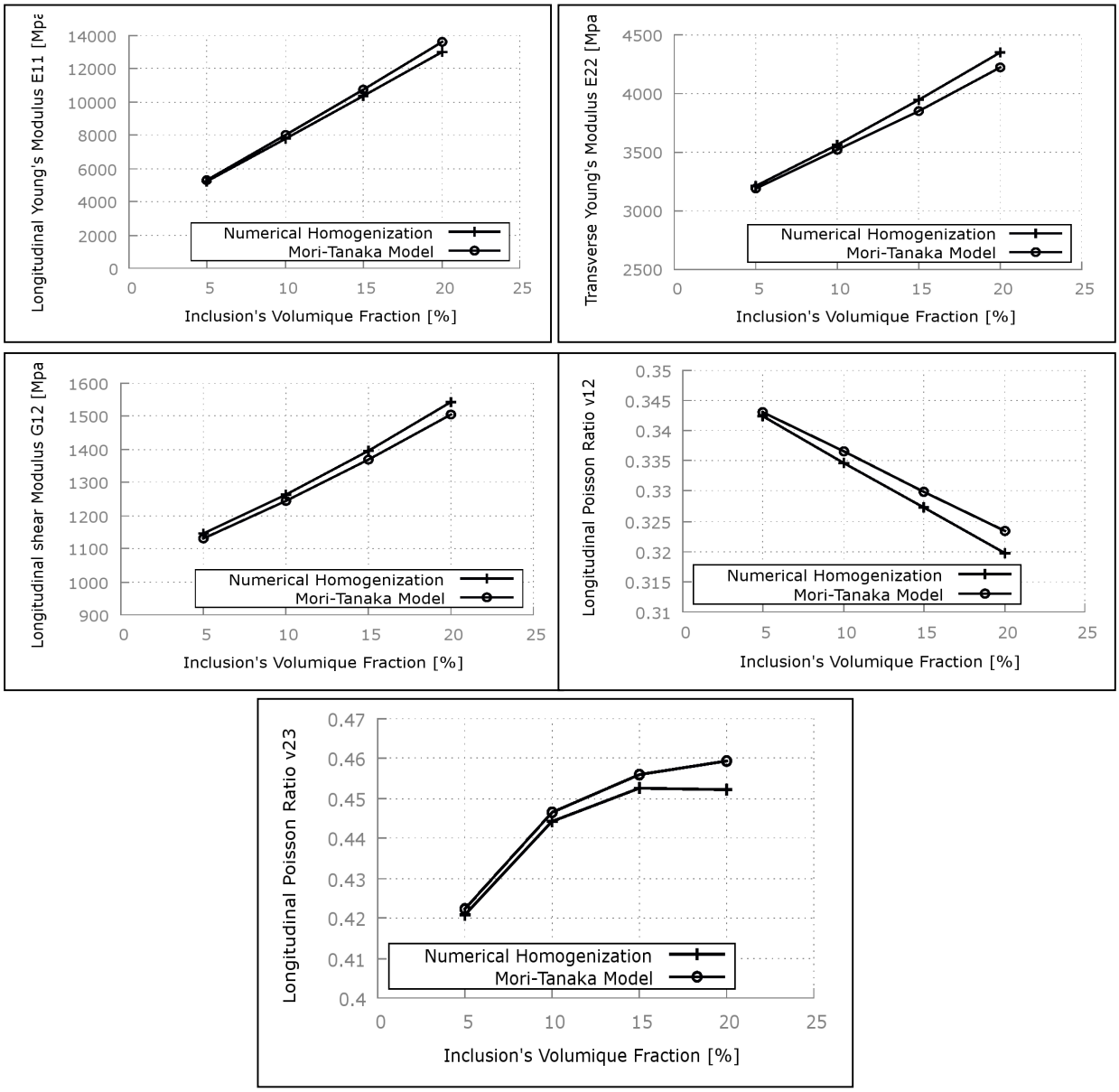

Fig. IV.26. Caractéristiques mécaniques homogénéisées pour différentes fractions volumiques d'inclusions cylindriques.

Les propriétés élastiques des matériaux isotropes (de la matrice et ceux de l'inclusion) sont des valeurs moyennes, et sont obtenues pour différentes fractions volumiques d'inclusions cylindriques.

On remarque qu'à des fractions volumiques faibles, on observe une très petite différence avec le modèle de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]), tandis que pour de grandes fractions volumiques, on observe une plus grande différence. On remarque aussi que les estimations du modèle de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]) et ceux de la méthode d'homogénéisation périodique développée dans cette étude sont assez proches, et cela pour des fractions volumiques très faibles (<20%).

On conclut, que la méthode d'homogénéisation périodique (Numerical Homogenization) donne des caractéristiques mécaniques plus rigides que ceux du modèle semi-analytique (Mori-Tanaka Model).

IV. 4.3.a. Introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation :

Nous avons implémenté un modèle d'endommagement de **Bouafia et al.** ([146], [147]) dans le code de calcul Abaqus via l'utilisation d'une Subroutine (Umat) programmé sous le langage Fortran. Des calculs sur un VER (de 10 particules) avec des conditions de localisation de type (PBC), nous ont permis d'étudier l'influence de la variation de la fraction volumique des inclusions cylindriques de cette loi de comportement de **Bouafia et al.** ([146], [147]) sur la réponse de la microstructure.

Les propriétés mécaniques effectives des VER (E_{eff} , ν_{eff}) sont ceux de la méthode d'homogénéisation périodique, correspondant à chaque fraction volumique.

Un élément de volume est sollicité en traction pure. Le chargement se fait à déplacement imposé en déformations tridimensionnel. Les caractéristiques mécaniques du matériau sont les suivantes :

Tab. IV.11. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (matrice-inclusions cylindriques).

F_{cj} (Mpa)	F_{tj} (Mpa)	E_{b0} (Gpa)	ν	ε_0 (%)	ϕ (mm)	l_f (mm)	τ_u (Mpa)	ω (%)	θ_0
47.76	3.4656	5247.081	0.3423	0.21	0.04	0.8	7	5	0.405
47.76	3.4656	7780.7363	0.3347	0.21	0.04	0.8	7	10	0.405
47.76	3.4656	10360.732	0.3273	0.21	0.04	0.8	7	15	0.405
47.76	3.4656	13033.63	0.3197	0.21	0.04	0.8	7	20	0.405

On représente aux figures ((Fig. IV.27), (Fig. IV.28)) la réponse locale contrainte-déformation et l'évolution du dommage en fonction de la déformation respectivement, d'un élément de volume sollicité en traction pure et sous différentes fractions volumiques.

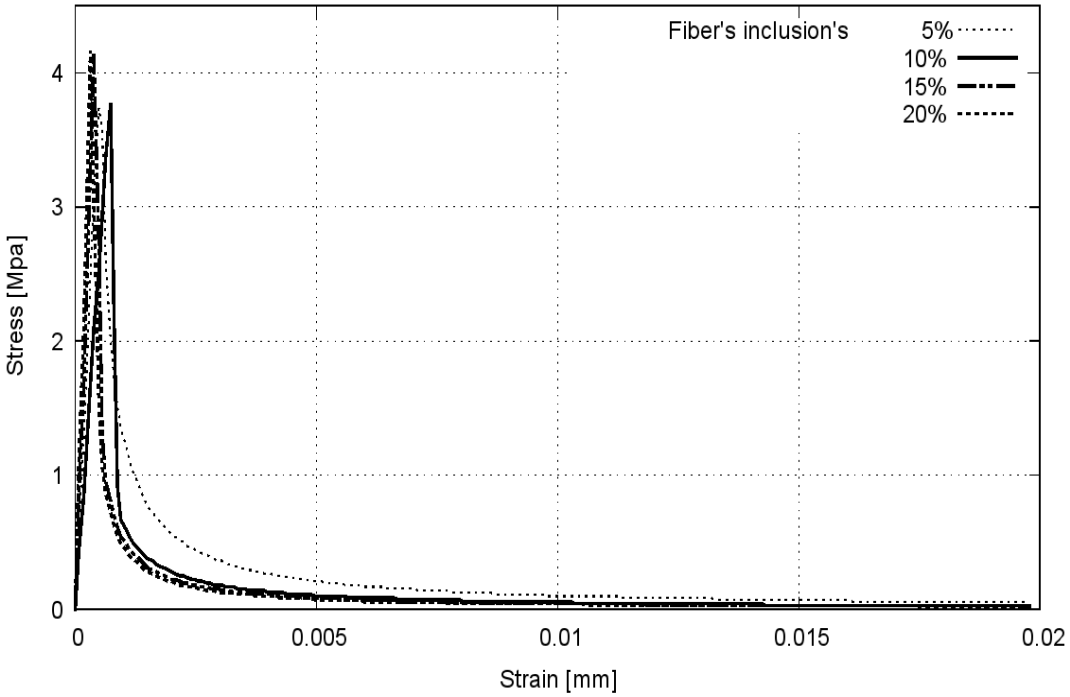

Fig. IV.27. Comportement local contrainte-déformation.

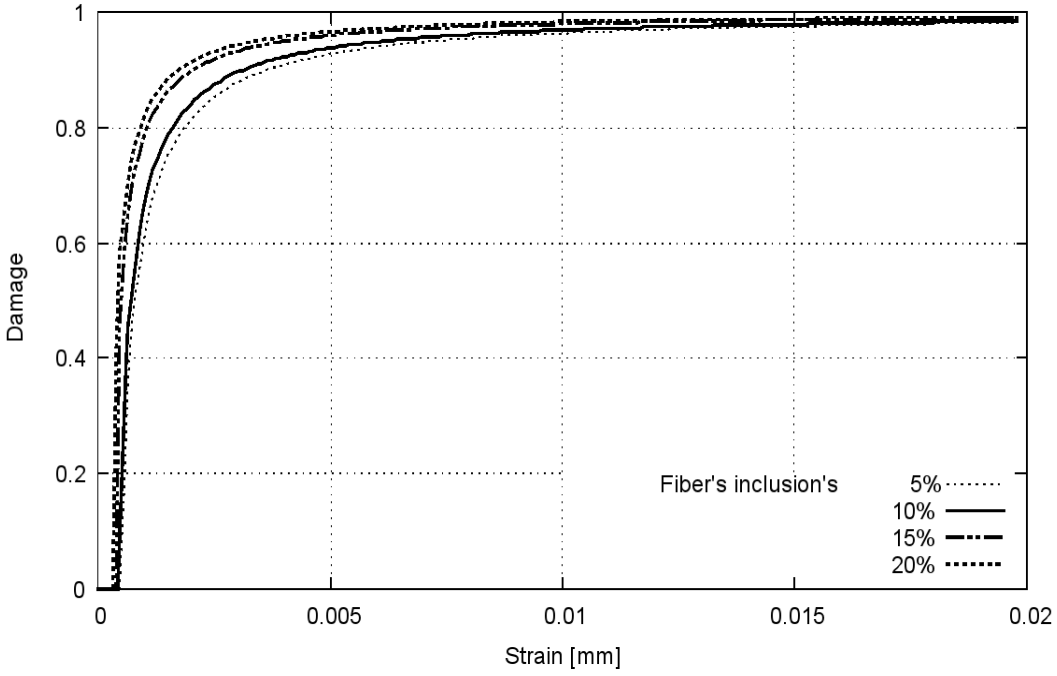

Fig. IV.28. Evolution du dommage en fonction de la déformation.

Les figures ((Fig. IV.27), (Fig. IV.28)) nous montrent que les pourcentages de fibres jouent sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation, et aussi sur la raideur et l'allure de la partie adoucissante du composite.

Le comportement du composite suit une phase élastique jusqu'à apparition de la première fissure, puis, il en résulte une chute brutale de contrainte jusqu'à une contrainte résiduelle qui met en action la contribution des inclusions cylindriques à reprendre les efforts développées. Enfin, il en résulte un palier de ductilité permettant d'avoir une déformation plus importante du composite. On remarque que la contrainte correspondant à ce palier est fonction du pourcentage des inclusions. Aussi, on remarque, plus on augmente le pourcentage des fibres l'allure de la courbe de comportement local contrainte-déformation décroît ce qui correspond à un comportement ductile.

IV. 5. Simulation du comportement non linéaire de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique :

IV. 5.1. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice élasto-plastique renforcée par des inclusions élastiques linéaires. Les propriétés élastiques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.12. Les propriétés élastiques des constituants du composite.

Matériaux	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Matrice (ferritic)	220	0.30
Inclusions (martensitic)	200	0.30

Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec un écrouissage isotrope de type puissance (qui est décrit par la théorie de J2 classique) :

$\sigma_y = \sigma_{y0} + k\, p^m$

Ou :

σ_{y0} et σ_y : sont les contraintes de l'écrouissage isotrope initial et courant respectivement,

k et m : sont les paramètres de l'écrouissage isotrope.

Tab. IV.13. Les propriétés élasto-plastiques de la matrice du matériau.

Matériaux	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson	Module d'écrouissage σ_{y0} (Mpa)	Exposant d'écrouissage m	Module d'écrouissage linéaire k (Mpa)
Matrice	75	0.30	300	0.31	1130

Les renforts sont modélisés par des inclusions de forme sphéroïdale et ellipsoïdale réparties suivant la direction de chargement dans le volume élémentaire représentatif (VER), avec une fraction volumique de 13.20 %.

Il s'agit dans cette étude de comparer les résultats numériques obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique aux résultats issus des travaux de **Brassart et al.** [172]. Cette étude est faite, on modélisant un volume élémentaire représentatif (VER) contenant des inclusions réparties suivant la direction de chargement, et en appliquant un chargement statique uni axial.

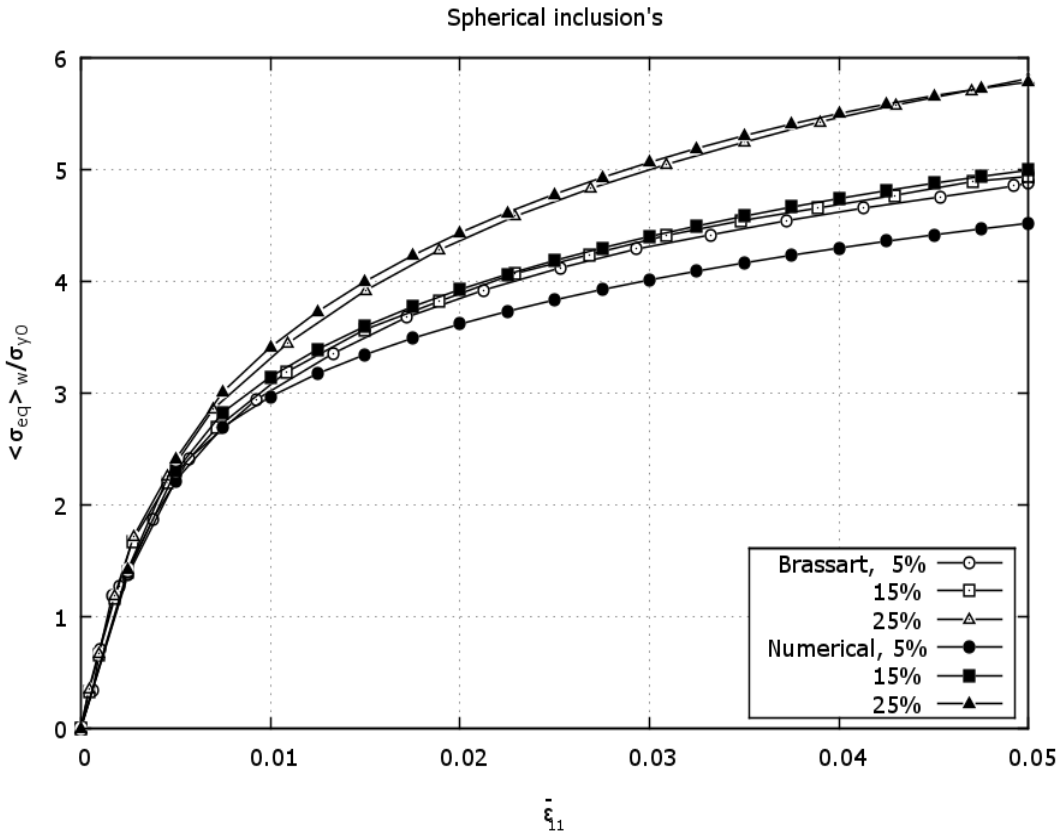

Fig. IV.29.a. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement statique.

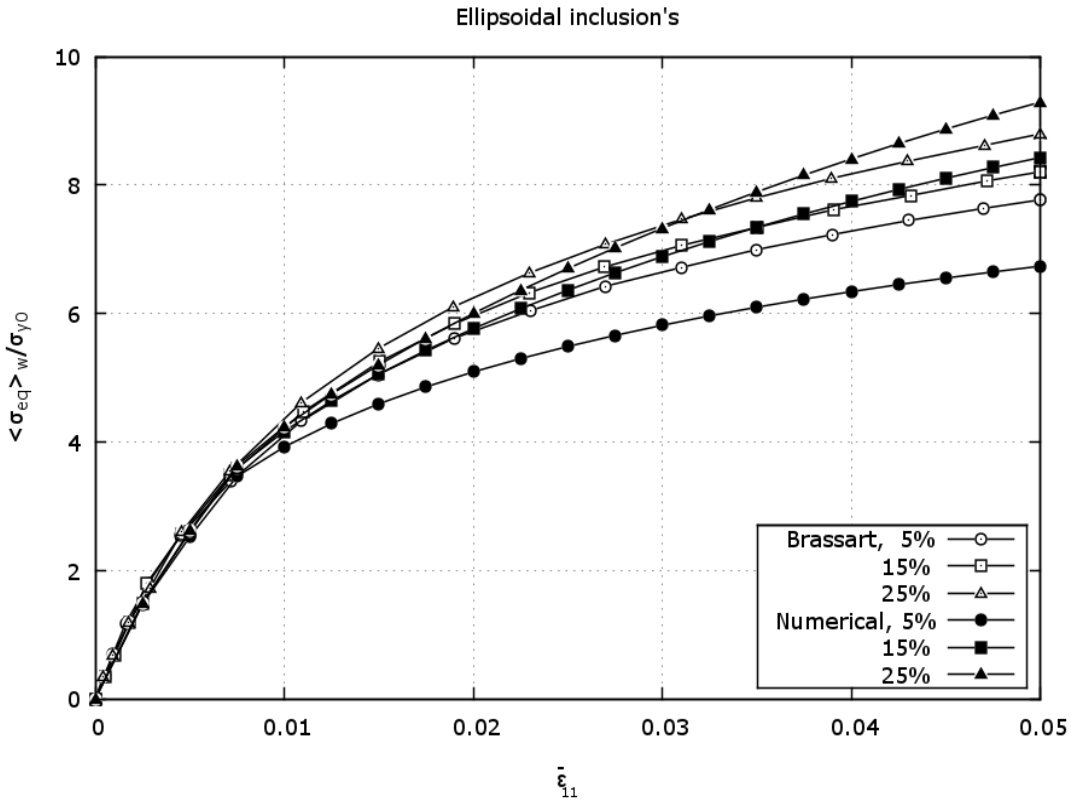

Fig. IV.29.b. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions ellipsoïdales sous chargement statique.

Les figures ((Fig. IV.29.a), (Fig. IV.29.b)) nous montrent que pour une fraction volumique de 5%, il y a un écart entre notre modèle d'homogénéisation périodique (Numerical) et les résultats issus des travaux de **Brassart et al.** [172] (Brassart) qui évolue dans le sens de la sécurité, et cela pour les deux types de formes d'inclusions (sphéroïdales et ellipsoïdales). Les figures ((Fig. IV.29.a), (Fig. IV.29.b)) nous montrent aussi que pour des fractions de 15 et 25%, notre modélisation avec la méthode d'homogénéisation périodique (Numerical) simule parfaitement le comportement issu des travaux de **Brassart et al.** [172] (Brassart) et cela sous un chargement statique.

On reprend la même modélisation, le même volume élémentaire représentatif (VER) et avec les deux types de formes d'inclusions (sphéroïdales et ellipsoïdales) mais cette fois-ci sous un chargement cyclique (traction / compression en déformation plane).

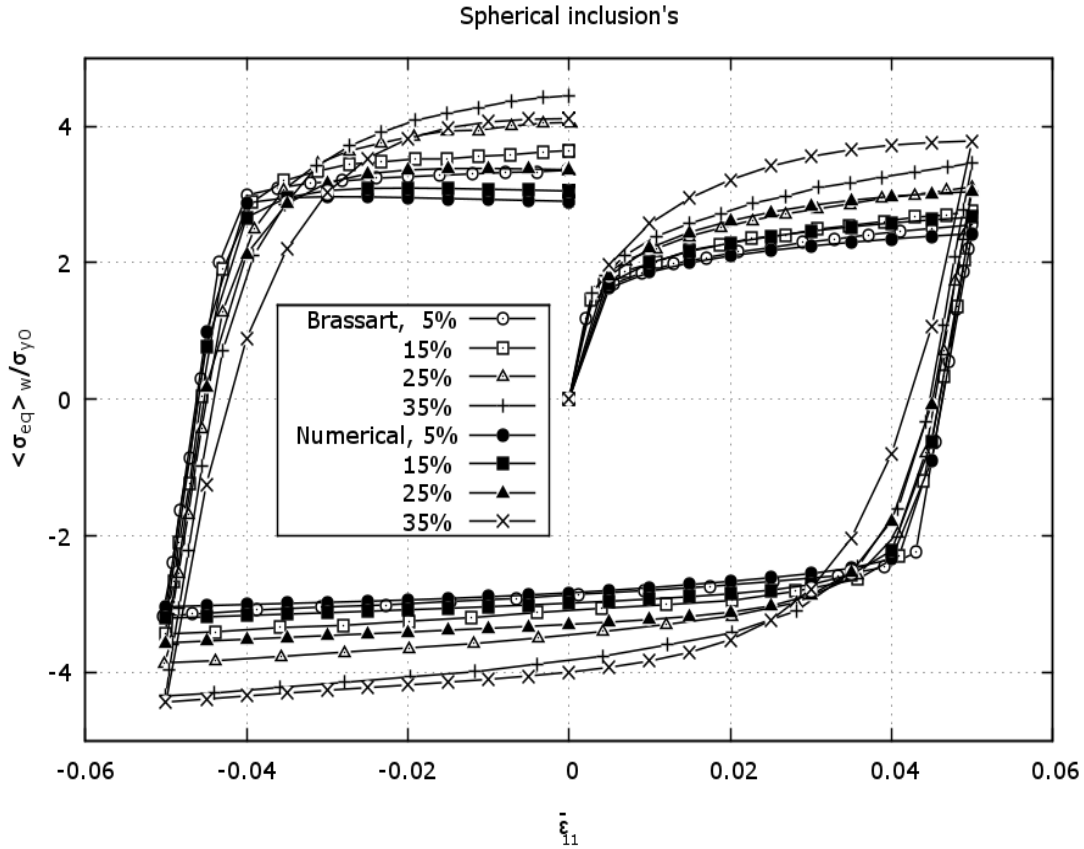

Fig. IV.30.a. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement cyclique.

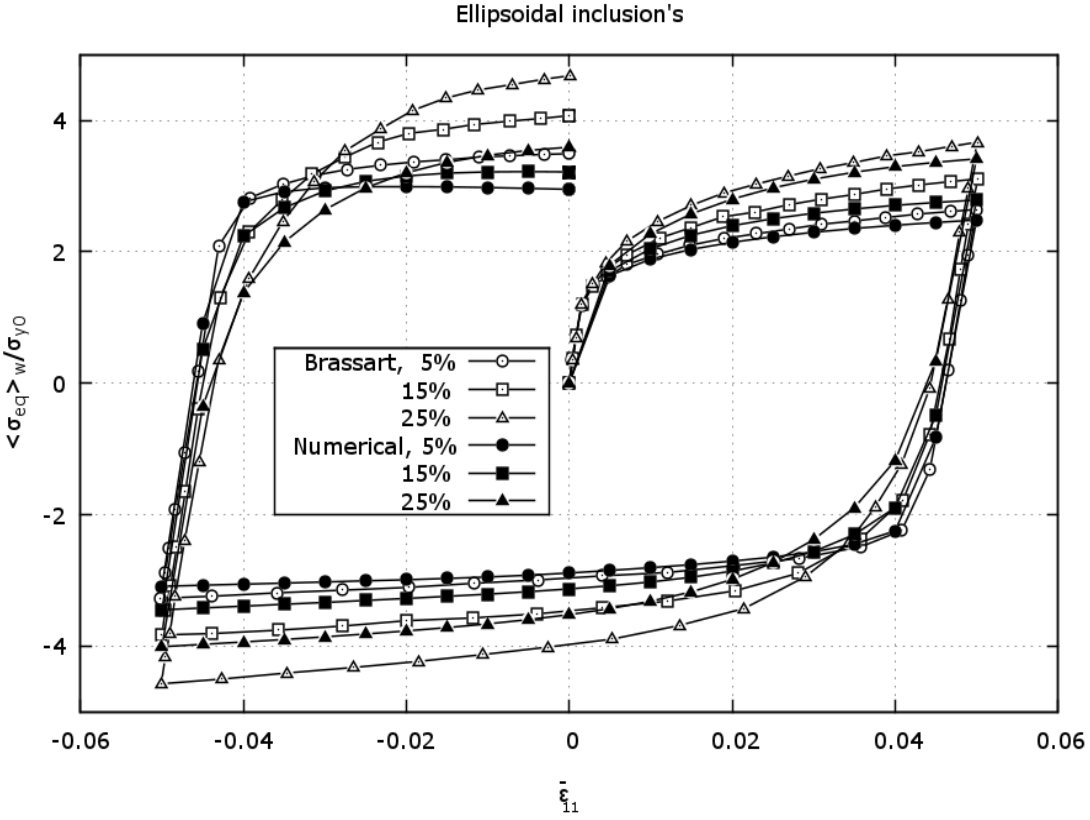

Fig. IV.30.b. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions ellipsoïdales sous chargement cyclique.

La figure (Fig. IV.30.a), nous montre que pour des inclusions sphéroïdales et sous les fractions de volume allant jusqu'à 25%, que les réponses macroscopiques de notre modélisation (Numerical) sous un chargement cyclique correspondent parfaitement au modèle de **Brassart et al.** [172] (Brassart). Par contre pour une fraction volumique de 35%, on observe un écart entre notre modèle (Numerical) et celui de **Brassart et al.** [172] (Brassart), qui peut s'expliquer par un phénomène d'interaction entre les inclusions sphéroïdales.

La figure (Fig. IV.30.b), nous montre que pour des inclusions ellipsoïdales réparties suivant la direction de chargement, que les réponses macroscopiques de notre modélisation (Numerical) sous un chargement cyclique sont légèrement différentes par rapport au modèle de **Brassart et al.** [172] (Brassart), qui peut s'expliquer par la modélisation de la forme ellipsoïdale des inclusions (manque de précision sur le document de référence).

IV. 5.2. Matériaux composites renforcés d'inclusions sphéroïdales :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice en ferrite renforcé par des inclusions sphéroïdales en austénite, avec une particularité pour cet exemple étant donnée que les deux phases sont élasto-plastiques avec des inclusions plus molles que la matrice. Le comportement de la matrice et des inclusions est élasto-plastique avec écrouissage isotrope de type puissance (qui est décrit par la théorie de J2 classique). Les propriétés élasto-plastiques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.14. Les propriétés élasto-plastiques des constituants du composite.

Matériaux	E (Gpa)	υ	σ_{yi} (Gpa)	k (Gpa)	q	A_r
Matrice (ferrite)	196.85	0.30	600	650	0.06	1
Inclusions (austenite)	179.35	0.30	202	688	0.55	1

Dans notre modélisation, les renforts sont modélisés par des inclusions sphéroïdales réparties aléatoirement avec une fraction volumique de 35 %. Les inclusions sont constituées d'un matériau qui est de l'austénite sous forme de sphères.

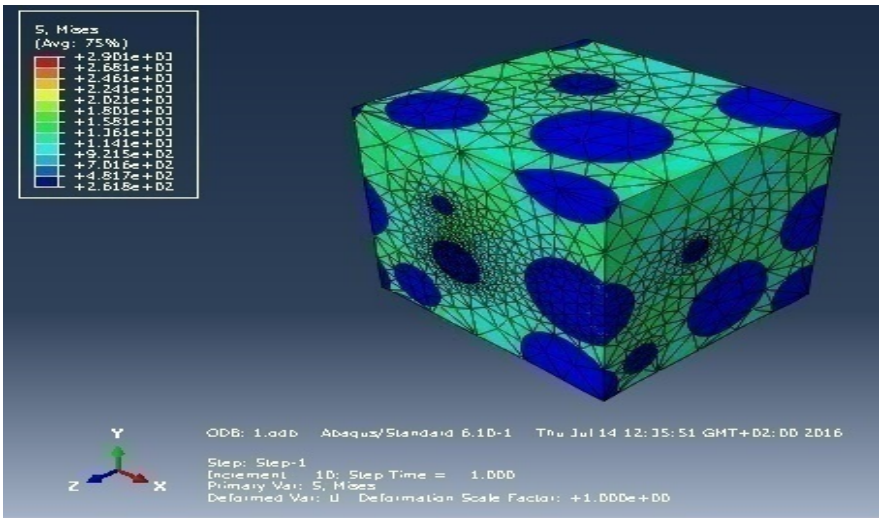

Fig. IV.31. Géométrie et répartition des inclusions du modèle élément fini.

Dans cette étude, il s'agit de comparer les résultats numériques (Numerical) obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique aux résultats issus des travaux de **Doghri et al.** [173] (Doghri).

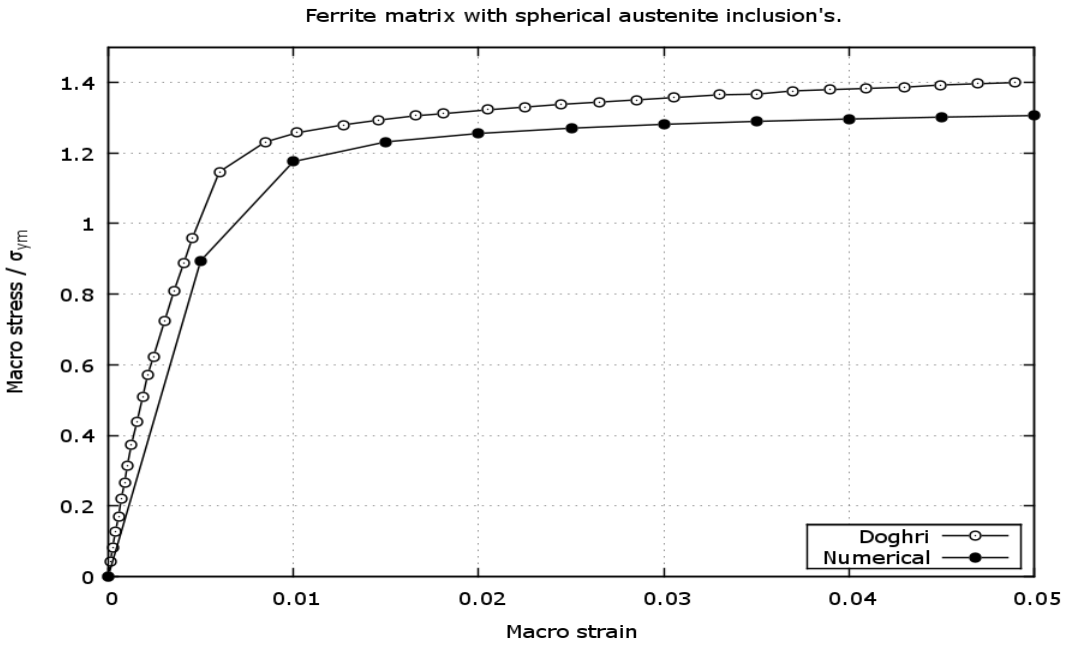

Fig. IV.32. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales.

En comparant les résultats numériques issus de notre modélisation (Numerical) aux résultats obtenus par **Doghri et al.** [173] (Doghri), on remarque une légère différence de raideur cela peut être due au choix de la répartition des inclusions (manque de précision sur le document de référence), mais par contre au niveau d'allure notre modélisation (Numerical) donne des prédictions similaires et très acceptables par rapport au modèle de **Doghri et al.** [173] (Doghri).

IV. 5.3. Matériaux composites à matrice métallique renforcés d'inclusions sphéroïdales :

Dans cet exemple, le composite à matrice métallique est constitué d'une matrice élasto-plastique renforcée par des inclusions élastiques linéaires. Les propriétés élastiques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.15. Les propriétés élastiques des constituants du composite.

Matériaux	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson
Matrice	75	0.30
Inclusions	400	0.20

Les renforts sont modélisés par des inclusions sphéroïdales réparties suivant la direction de chargement, avec une fraction volumique de 30 %. Et soumis à un chargement de traction monotone et à un chargement cyclique.

Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec un écrouissage isotrope de type puissance (qui est décrit par la théorie de J2 classique). Les propriétés élasto-plastiques de la matrice du matériau sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.16. Les propriétés élasto-plastiques de la matrice du matériau.

Matériaux	Module d'Young (Gpa)	Coefficient de Poisson	Module d'écrouissage σ_{y0} (Mpa)	Exposant d'écrouissage m	Module d'écrouissage linéaire k (Mpa)
Matrice	75	0.30	75	0.3895	416

Dans cet exemple, il s'agit de comparer les résultats numériques (Numerical) obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique aux résultats issus des travaux de **Segurado et al.** [174] (Segurado et al. 2002), et cela sous un chargement de traction monotone et sous un chargement cyclique.

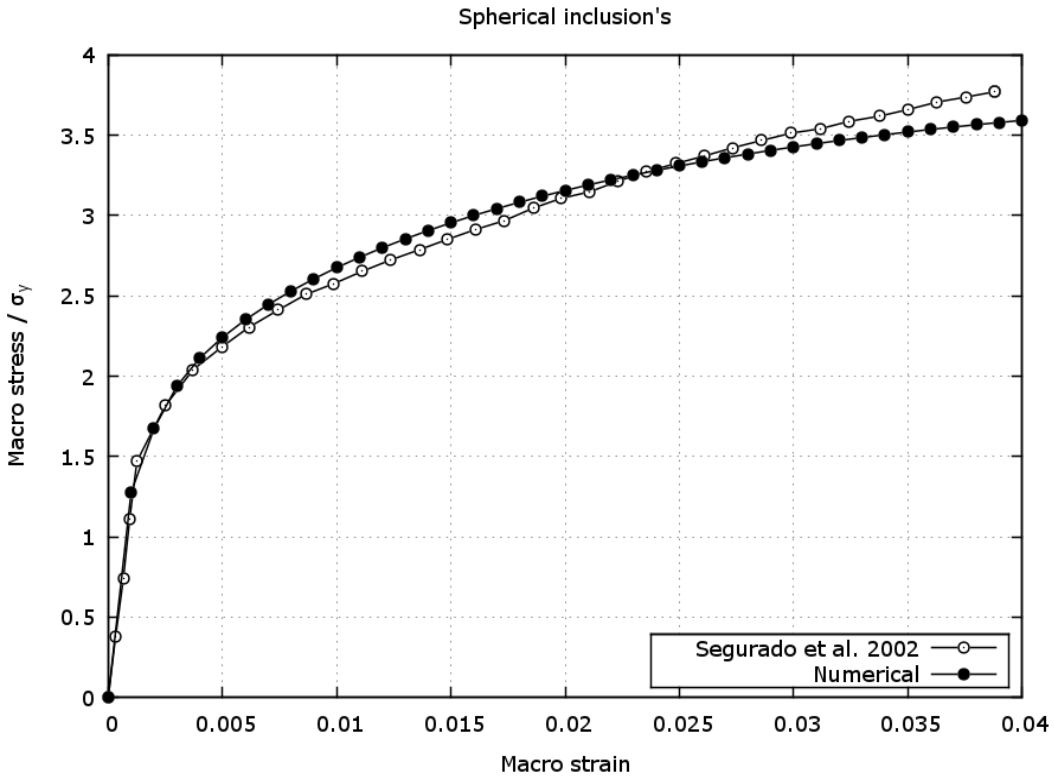

Fig. IV.33. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement statique.

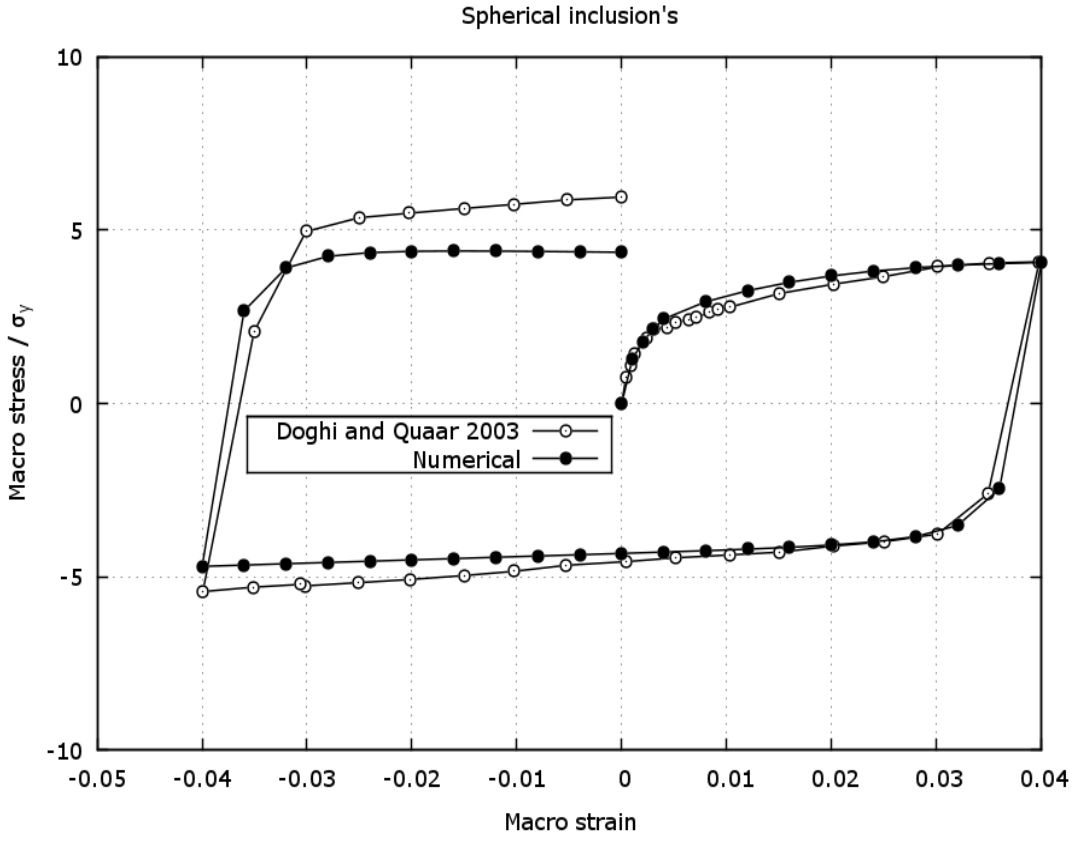

Fig. IV.34. Contrainte équivalente moyenne d'inclusions sphéroïdales sous chargement cyclique.

La figure (Fig. IV.33) nous montre qu'il y a un léger écart entre notre modèle d'homogénéisation périodique (Numerical), et les résultats issus des travaux de **Segurado et al.** [174] (Segurado et al. 2002) qui évolue dans le sens de la sécurité et cela sous chargement de traction monotone.

La figure (Fig. IV.34) nous montre, qu'il y a aussi une légère différence entre notre modèle d'homogénéisation périodique (Numerical) et les résultats issus des travaux de **Segurado et al.** [174] (Segurado et al. 2002), qui évolue dans le sens de la sécurité et cela sous chargement de traction cyclique.

IV. 5.4. Matériaux composites renforcés d'inclusions cylindriques :

- Application de la théorie d'homogénéisation aux composites (AL-SIC5, AL-SIC4.1) :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice métallique et des inclusions cylindriques. Les propriétés mécaniques des constituants du composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.17. Les propriétés mécaniques des constituants du composite.

Composites	Matériaux	E (Gpa)	υ	σ_{st} (Gpa)	k (Gpa)	q	$\frac{l}{d}$
AL-SIC5	Matrice (2124 aluminium) Fibres (SIC whiskers)	60 450	0.30 0.20	290	700	0.55	5
AL-SIC4.1	Matrice (5456 aluminium) Fibres (SIC whiskers)	71.3085 485	0.30 0.20	246.9	133.015	0.36	4.1

Les renforts sont modélisés par des inclusions cylindriques alignées (réparties suivant la direction de chargement), avec une fraction volumique de 13.20 %. Les inclusions cylindriques sont des renforts SIC whiskers d'allongement $\frac{l}{d}$.

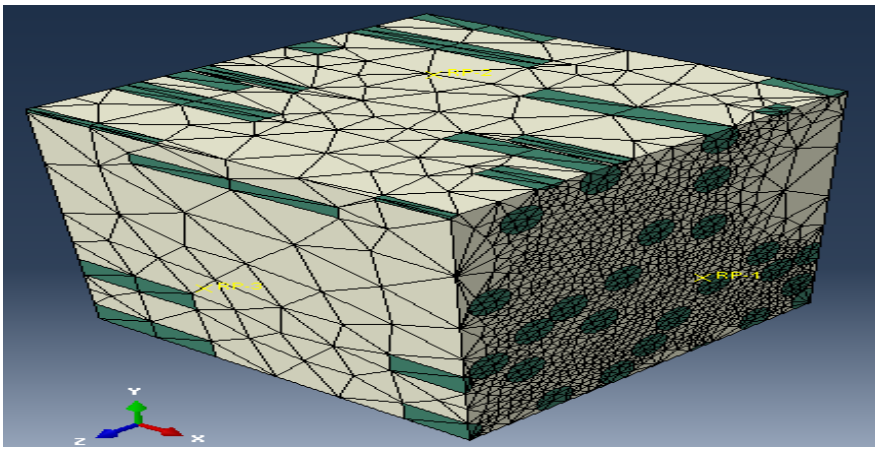

Fig. IV.35. Géométrie et répartition des renforts du modèle élément fini.

Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec un écrouissage isotrope de type puissance :

$$R(p) = k\, p^{q}$$

Ou : k et q sont les paramètres de l'écrouissage isotrope.

Dans cet exemple, il s'agit de comparer les résultats numériques (Numerical Model) obtenus par la méthode d'homogénéisation périodique aux résultats expérimentaux issus des travaux de **Christman et al.** ([175], [176]) (Experimental).

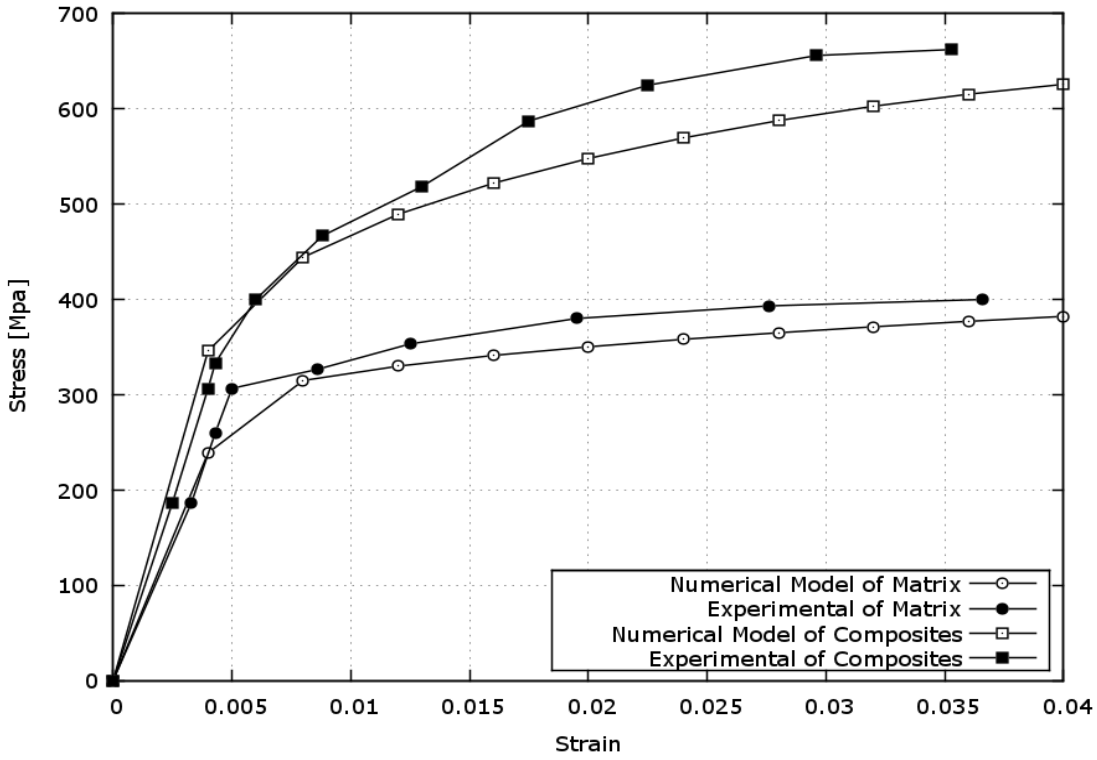

Fig. IV.36.a. Comparaison des simulations numériques du composite (AL-SIC5) à des données expérimentales.

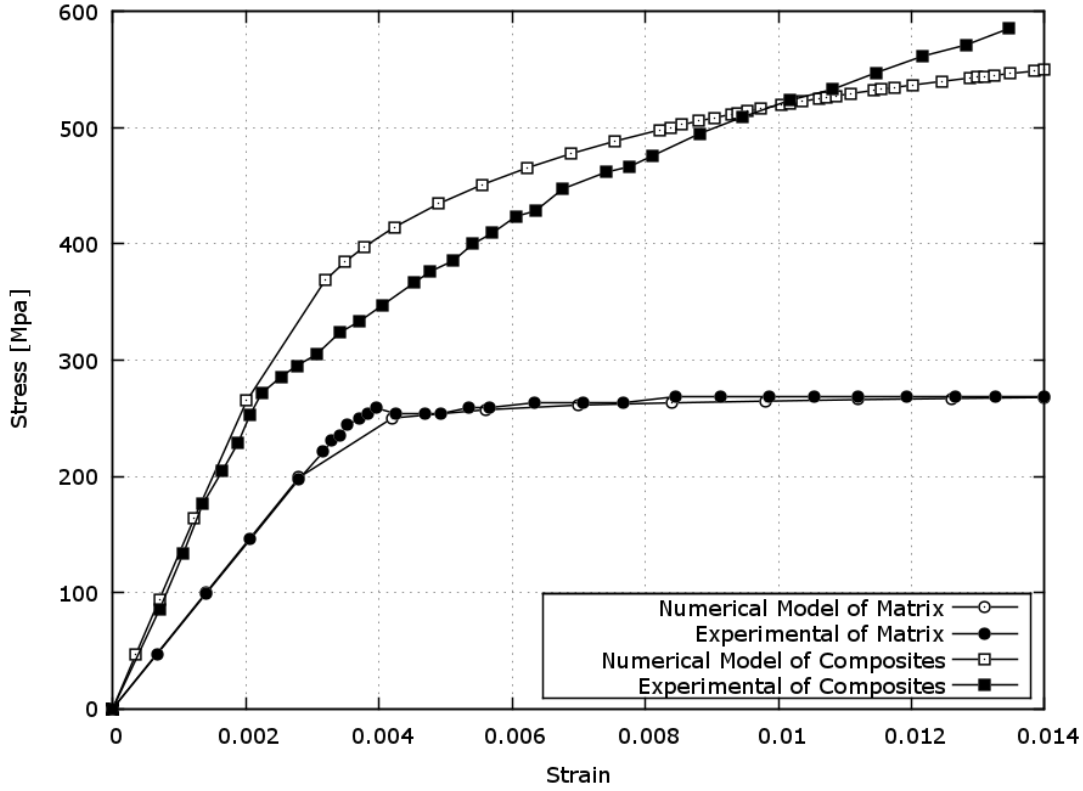

Fig. IV.36.b. Comparaison des simulations numériques du composite (AL-SIC4.1) à des données expérimentales.

La figure (Fig. IV.36.a) nous montre qu'il y a un léger écart entre notre modèle d'homogénéisation périodique (Numerical Model) et les résultats issus des travaux de **Christman et al.** ([175], [176]) (Experimental) qui évolue dans le sens de la sécurité et cela sous chargement de traction monotone.

La figure (Fig. IV.36.b) nous montre une bonne corrélation entre le comportement simulé (Numerical Model of Matrix) et l'expérience issue des travaux de **Christman et al.** ([175], [176]) (Experimental of Matrix) de la matrice. Par contre, on observe pour le composite une très petite différence entre notre modèle d'homogénéisation périodique (Numerical Model of composites) et les résultats issus des travaux de **Christman et al.** ([175], [176]) (Experimental of composites) qui évolue dans le sens de la sécurité et cela sous chargement de traction monotone.

On conclut, que notre simulation par la méthode d'homogénéisation périodique donne un comportement non linéaire équivalent du composite dans le domaine élastique. Dès qu'on dépasse la limite élastique, on remarque que notre simulation évolue dans le sens de la sécurité.

IV. 6. Validation et évaluation de la fiabilité des composites étudiés :

IV. 6.1. Application du couplage mécano-fiabiliste au calcul de l'endommagement d'un composite (matrice-inclusions cylindriques) :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice et des renforts sous forme d'inclusions cylindriques. Les propriétés mécaniques des constituants de ce composite sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.18. Les propriétés mécaniques effectives et paramètre d'endommagement du composite (pour une fraction volumique de 15%).

F_{cj} (Mpa)	F_{tj} (Mpa)	E_{b0} (Gpa)	ν	ε_0 (%)	ϕ (mm)	l_f (mm)	τ_u (Mpa)	ω (%)	θ_0
47.76	3.4656	10360.732	0.3273	0.21	0.04	0.8	7	15	0.405

Tout d'abord, on procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (loi réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution log-normale ou exponentielle va mieux la représenter.

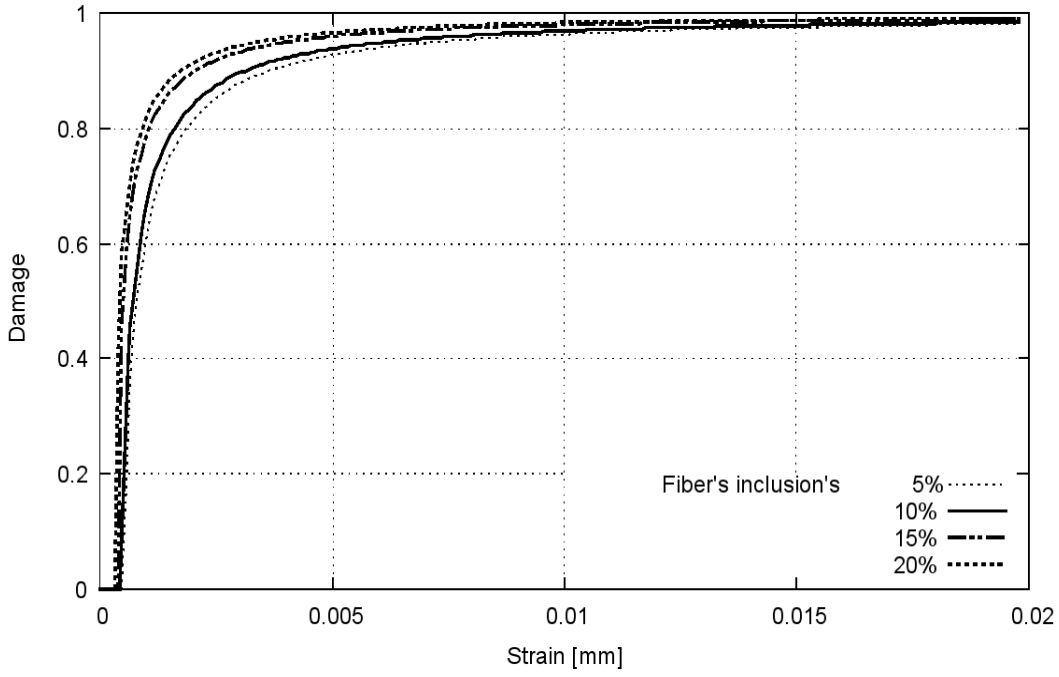

Fig. IV.37. Evolution du dommage en fonction de la déformation.

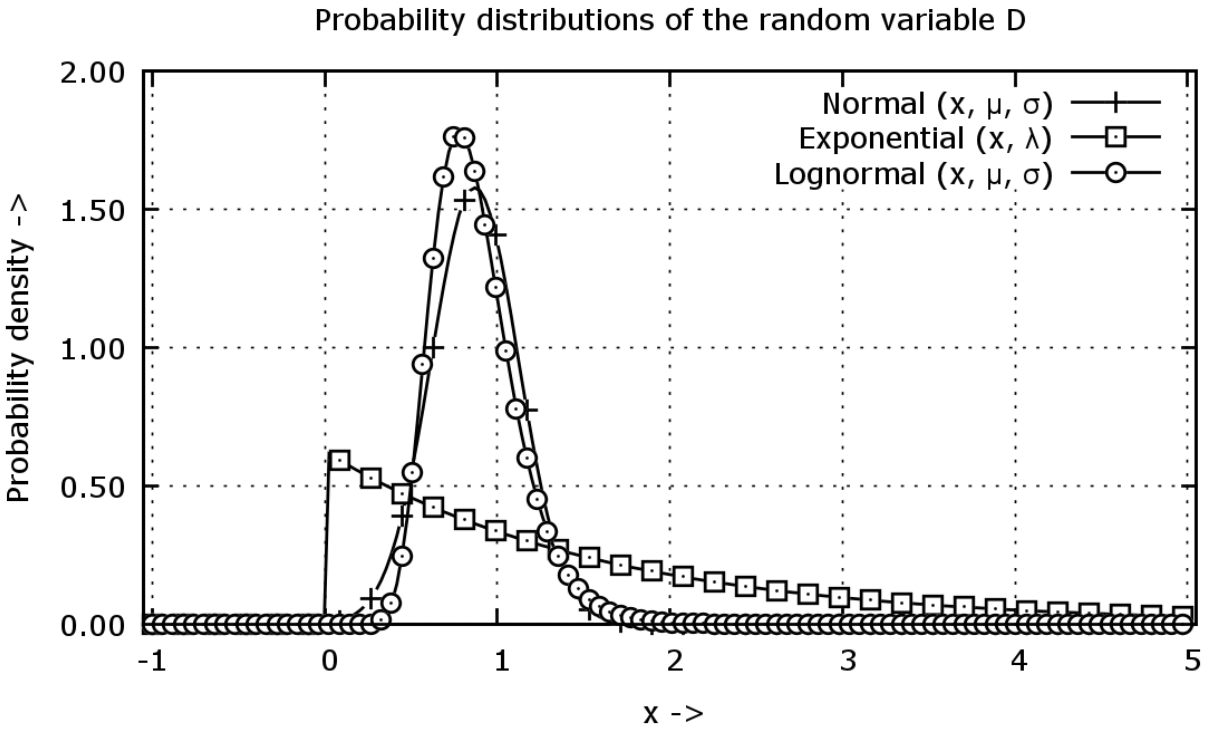

Fig. V.38.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire D.

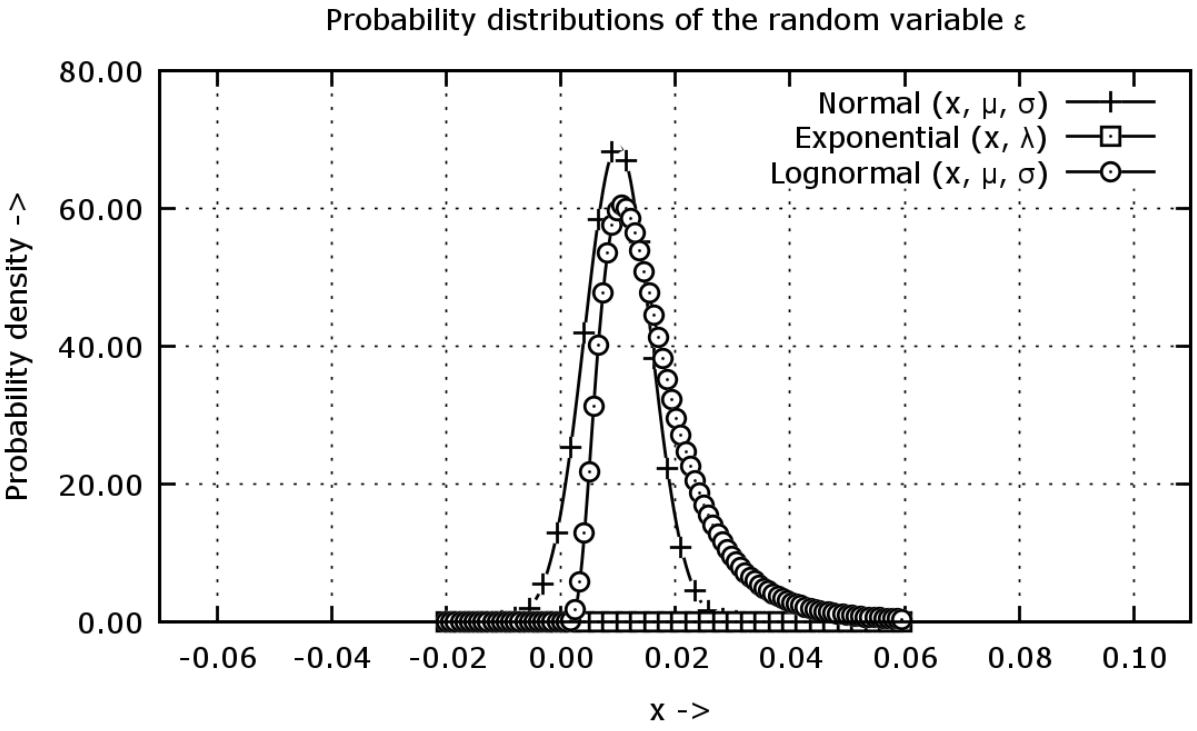

Fig. V.38.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire ε.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et sont représentées par le vecteur X, qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sorties à l'état-limite (D , ε), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi log-normale et normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV.19.

Tab. IV.19. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (D, ε).

Vecteur X	**Variables aléatoires**	**Loi de distribution**	**Moyenne μ_X^N**	**Écart-type σ_X^N**
X1	D	Log-normale	0,87278784	0,24724896
X2	ε	Normale	0,00989444	0,00577331

- Les autres paramètres (variables aléatoires d'entrées : F_{cj}, F_{tj}, E_{b0}, ν, ε_0, ϕ, l_f, τ_u, ω, θ_0) sont considérés comme déterministes.

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode fiabiliste d'HL-RF utilisé dans cette étude nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Tab. IV.20. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste.

Indice de fiabilité	**Probabilité de défaillance**	**Cosinus directeur ($\alpha 1, \alpha 2$)**	**Point de conception (U1, U2)**	**Point de conception (X1, X2)**
1.0448	0.1482	(-1.00, 0.00)	(1.04476, 0.00)	(1.01677, 0.009894)

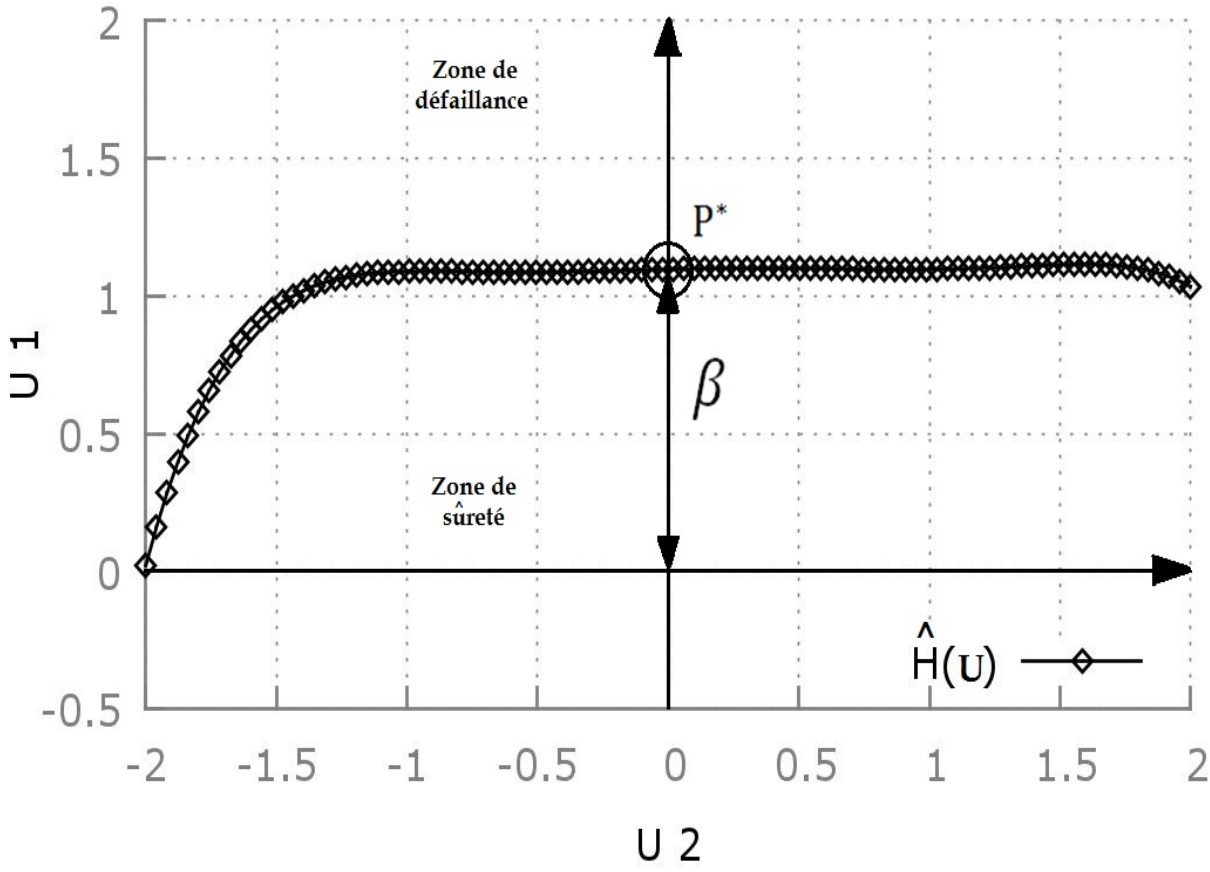

Fig. IV.39. État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}$ (D, ε).

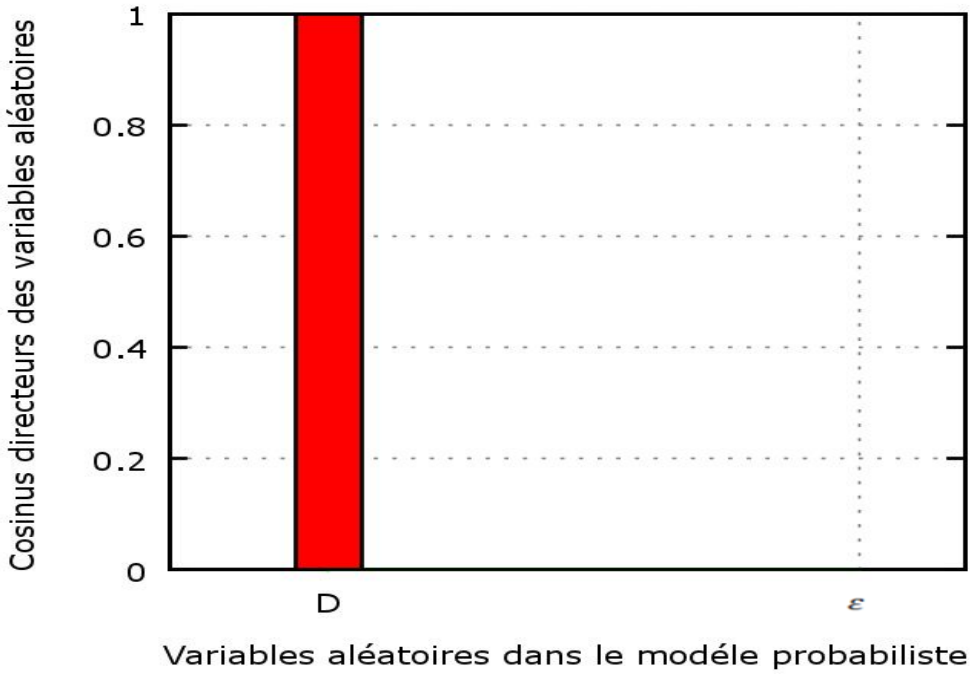

Fig. IV.40. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (D, ε).

La figure (Fig. IV.39) présente l'état limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (σ, ε) et aussi les résultats de la recherche du point de conception P^*.

L'indice de fiabilité retrouvée est de β = 1.0448 , ce qui correspond à une probabilité de défaillance du volume élémentaire représentatif (VER) du composite estimé à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 0.1482, d'où une fiabilité de 85.18 %.

IV. 6.2. Application du couplage mécano-fiabiliste a la simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique (AL-SIC4.1) :

Dans cet exemple, le matériau hétérogène est constitué d'une matrice métallique et des renforts sous forme d'inclusions cylindriques. Les propriétés mécaniques des constituants du composite (AL-SIC4.1) sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Tab. IV.21. Les propriétés mécaniques des constituants du composite (AL-SIC4.1).

Composites	**Matériaux**	**E (Gpa)**	**υ**	**σ_{st} (Gpa)**	**k (Gpa)**	**q**	**$\frac{l}{d}$**
AL-SIC4.1	Matrice (5456 aluminium) Fibres (SIC whiskers)	71.3085 485	0.30 0.20	246.9	133.015	0.36	4.1

Tout d'abord, on procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (loi réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution log-normale ou exponentielle va mieux la représenter.

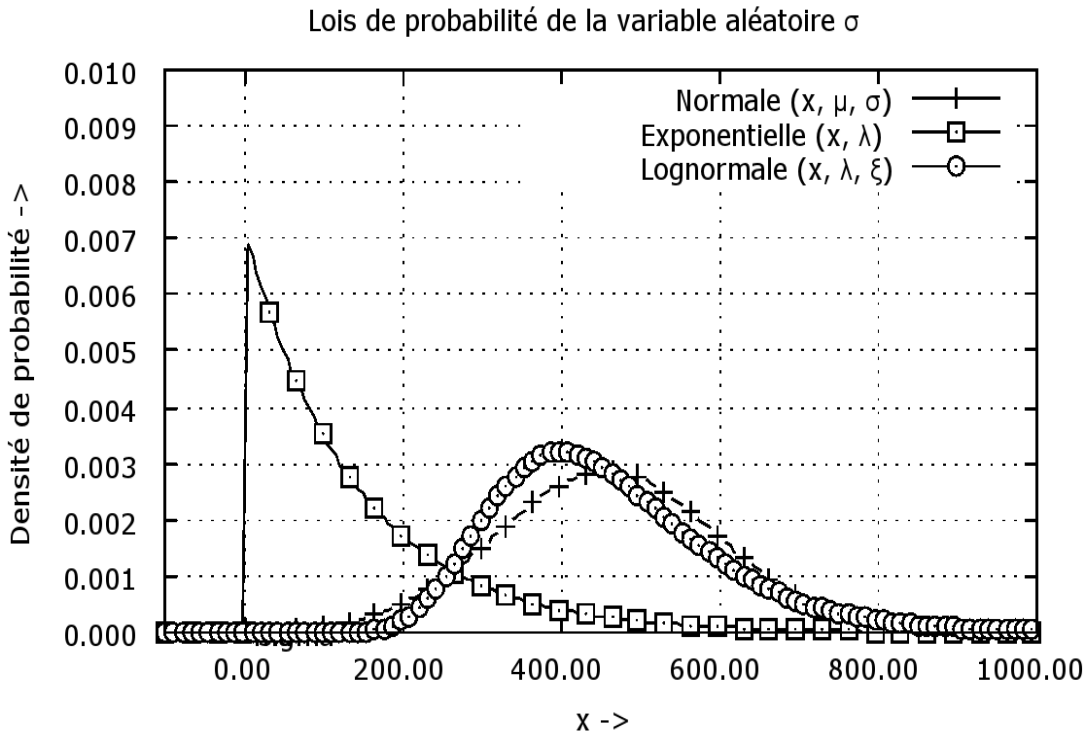

Fig. V.41.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire σ.

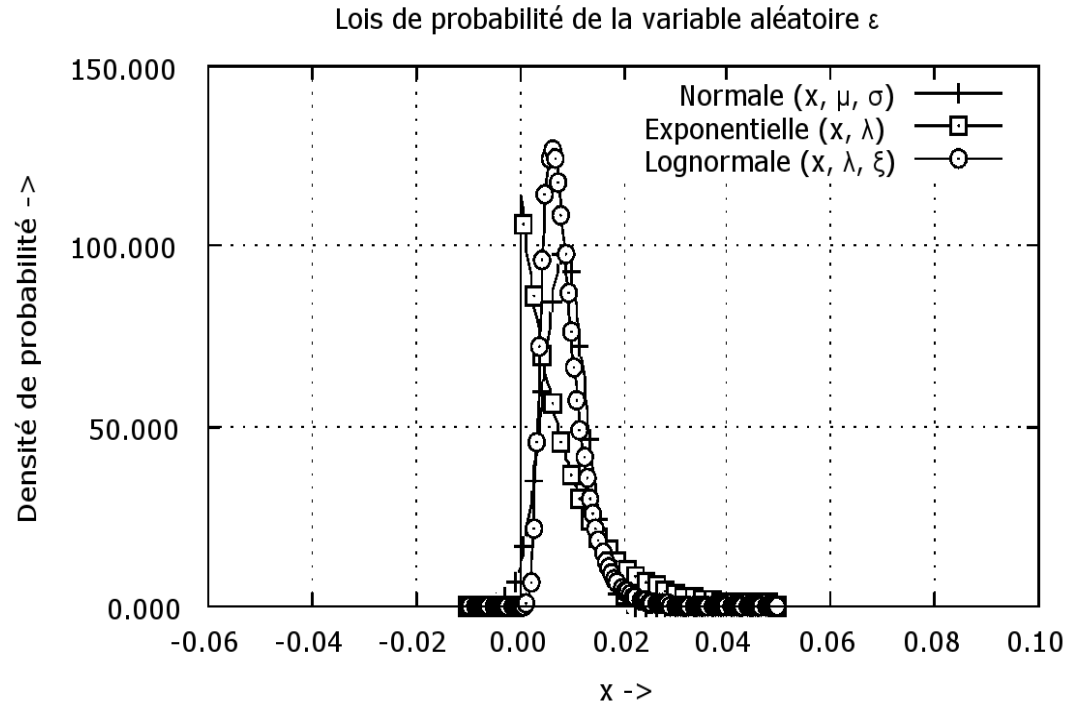

Fig. V.41.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire ε.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et sont représentées par le vecteur X, qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sorties à l'état-limite (σ , ε), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi exponentielle et log-normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV.22.

Tab. IV.22. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (σ, ε).

Vecteur X	**Variables aléatoires**	**Loi de distribution**	**Moyenne μ_X^N**	**Écart-type σ_X^N**
X1	σ	Exponentielle	457.081964	139.171439
X2	ε	Log-normale	0,00851443	0,00406218

- Les autres paramètres (variables aléatoires d'entrées) comme le module d'élasticité E et la limite élastique (σ_{st}) sont considérées comme déterministes.

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode fiabiliste d'HL-RF utilisé dans cette étude nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Tab. IV.23. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste du composite (AL-SIC4.1).

Indice de fiabilité	**Probabilité de défaillance**	**Cosinus directeur ($\alpha 1, \alpha 2$)**	**Point de conception (U1, U2)**	**Point de conception (X1, X2)**
6.6091	0.2018×10^{-10}	(-0.141883, 0.989883)	(0.9377, -6.5422)	(704.27, 0.00109)

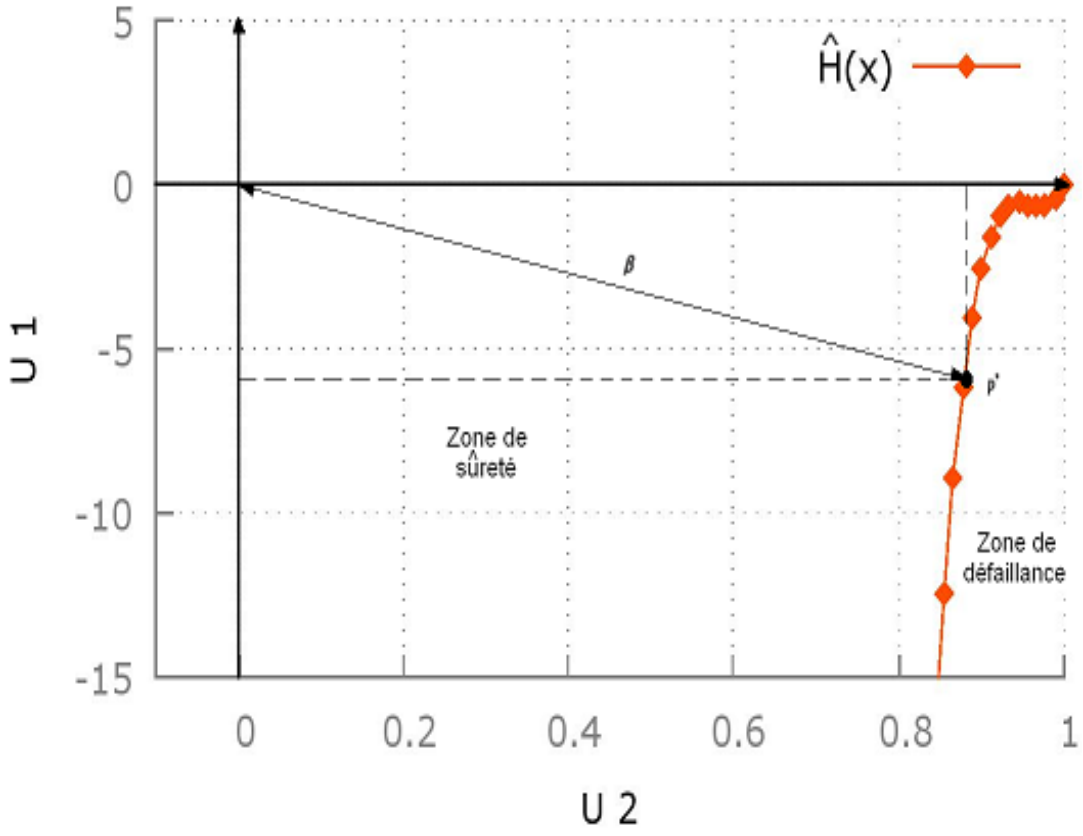

Fig. IV.42. État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}$ (σ, ε).

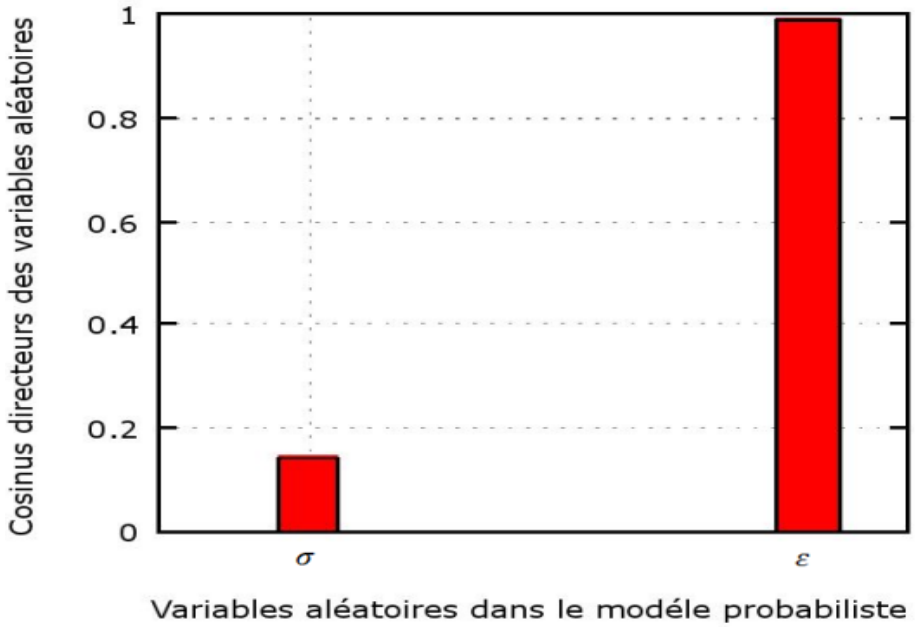

Fig. IV.43. Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (σ, ε).

La figure (Fig. IV.42) présente l'état limite approché dans l'espace centré réduit $\widehat{H}$ (σ, ε) et aussi les résultats de la recherche du point de conception P^*.

L'indice de fiabilité retrouvée est de β = 6.6091 , ce qui correspond à une probabilité de défaillance du volume élémentaire représentatif (VER) du composite (AL-SIC4.1) estimé à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 0.2018 x 10^{-10}, d'où une fiabilité de 99.99999999997982 %.

IV. 7. Conclusions :

En utilisant le modèle d'homogénéisation périodique implémenté via des scriptes Python par prise en compte des conditions de contour montrent une assez bonne approximation des caractéristiques mécanique. Concernant les modèles d'endommagement implémentés à l'aide de Subroutines (Umat) en langage Fortran dans le code de calcul Abaqus, nous a permis d'analyser les champs locaux notamment avoir l'évolution de l'endommagement au niveau de la microstructure. Pour ce qui est du modèle de fiabilité implémenté en langage de programmation Fortran, nous a permis de résoudre le problème d'optimisation sous contrainte à travers un calcul de niveau de fiabilité.

- Pour l'application de la théorie d'homogénéisation périodique au béton avec différentes compositions en granulats :

Les différents résultats obtenus à partir de cette étude nous permettent de constater que, le pourcentage des granulats a une influence sur les propriétés élastiques du matériau béton.

- Pour la comparaison numérique entre les modèles d'homogénéisation semi-analytique et la méthode d'homogénéisation périodique avec l'expérience :

Cette comparaison présente l'estimation des modules d'élasticité (module d'Young, module de cisaillement) macroscopiques effectuées sur une microstructure constituée d'un composite « béton » avec différentes concentrations volumiques.

La comparaison des différents résultats obtenus par les différents modèles d'homogénéisation semi-analytique (Auto-cohérent, Mori-Tanaka) avec les résultats expérimentaux est satisfaisante, et cela pour des fractions volumiques très faible (<0,2). Pour ce qui est de l'implémentation du modèle d'homogénéisation périodique, il donne des résultats très satisfaisants comparés à l'expérience et cela pour différentes fractions volumiques.

Le pourcentage des granulats ainsi que leur forme ont une influence sur les caractéristiques mécaniques de la microstructure constituée d'un composite « béton ». La méthode d'homogénéisation semi-analytique (Auto-cohérente), surestime les valeurs du module élastique du composite « béton ». Par contre, l'approche d'homogénéisation semi-analytique (Mori-Tanaka) est la moins éloignée des mesures expérimentales.

La méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka donne de bons résultats pour un matériau à deux phases, néanmoins l'interaction entre les hétérogénéités est prise en compte de manière insuffisante pour être capable de représenter les fortes concentrations. Lorsque la concentration en hétérogénéité est inférieure à 30 %, cette méthode donne de bons résultats.

Il a notamment été observé, qu'il est possible d'avoir de bons résultats avec la méthode d'homogénéisation semi-analytique de Mori-Tanaka. Cependant, elle a ses limites et cela pour d'autres types de formes d'inclusions et pour de grandes fractions volumiques.

Les différents résultats obtenus à partir de cette comparaison permettent de constater que, le pourcentage des granulats, ainsi que leur géométrie et la prise en compte des pores ont une influence sur les modules élastiques d'une microstructure constituée d'un composite « béton ».

- Pour l'estimation des caractéristiques mécaniques par un modèle d'homogénéisation périodique, et la prise en compte de l'endommagement d'une microstructure constitué d'un composite à inclusion par une démarche de relocalisation :

La méthode a été appliquée dans le cas de deux microstructures biphasées (composite à fibres et matériaux à grains). Les propriétés mécaniques effectives des matériaux hétérogènes (le module élastique d'Young (E), le coefficient de poisons (ν), le module de cisaillement (G) et le module de compressibilité (K)) ont été évalués pour différentes fractions volumiques (5 à 30 %), en tenant compte des conditions aux limites de déplacement périodiques. La comparaison des différents résultats obtenus par le modèle numérique d'homogénéisation périodique (PBC) avec les résultats d'estimations du modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (**Ghayath** [171]) est satisfaisante, et cela pour des fractions volumiques très faibles (< 20 %). Par contre, pour des fractions volumiques supérieures à 20 %, les propriétés mécaniques effectives sont surestimées. On conclut, que le pourcentage des inclusions ainsi que leur forme et orientation ont une influence sur les caractéristiques mécaniques effectives du composite.

Le modèle d'endommagement de **Mazars** ([144], [145]), nous a permis d'introduire une formulation non locale pour l'évolution de l'endommagement au niveau de la microstructure. Et permet aussi de reproduire le comportement adoucissant du matériau, qui est réduit progressivement à mesure que les microfissures se développent jusqu'à atteindre zéro ce qui correspond à une macro-fissure visible.

L'étude paramétrique, où on a fixé le paramètre A_t et on a fait varier le paramètre B_t sous différentes fractions volumiques, nous montre que la variation de la fraction volumique des inclusions (sphéroïdales, ellipsoïdales) jouent sur l'allure du dommage en fonction de la déformation, et aussi sur la raideur du composite.
L'influence du paramètre A_t avec une fraction volumique moyenne (prise égale à 20%), et une valeur fixe du paramètre B_t correspondant à ce pourcentage, la variation du paramètre A_t joue sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation, et aussi sur la raideur du composite.
Par contre, pour une fraction volumique moyenne (prise égale à 20%) et une valeur fixe du paramètre B_t, nous montre que la variation du paramètre A_t joue à la fois sur l'allure adoucissante du composite et sur l'évolution du dommage en fonction de la déformation.

Tandis que le modèle d'endommagement de **Bouafia et al.** ([146], [147]) nous a permis d'introduire l'évolution du dommage à travers un palier de ductilité, qui est fonction des caractéristiques des inclusions cylindriques (pourcentage, diamètres, orientation et contrainte d'adhérence). Le mécanisme de rupture considéré dans ce modèle est par arrachement des renforts (inclusions cylindriques).

- Pour la simulation du comportement non linéaire de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique :

La comparaison des différents résultats obtenus par le modèle numérique d'homogénéisation non linéaire, avec les résultats expérimentaux et numériques issus d'autres travaux ont été testés sur plusieurs exemples, et qui nous ont permis de faire les constatations suivantes :

- Dans ce travail, d'abord on a comparé les résultats de notre modèle à ceux de **Brassart et al.** [172], et cela sur un volume élémentaire représentatif (VER) contenant des inclusions réparties suivant la direction de chargement, et soumis à un chargement statique uni axial, et avec des fractions volumiques de (5, 15, 25%). Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec un écrouissage isotrope et celui de l'inclusion est élastique. On remarque, que notre modèle évolue dans le sens de la

sécurité comparée au modèle de **Brassart et al.** [172], et cela pour les deux types d'inclusions (sphéroïdales et ellipsoïdales).

- Puis, on a traité un exemple où les inclusions sont modélisées par des formes sphéroïdales réparties aléatoirement, et avec une fraction volumique de 35 %. Le comportement de la matrice et des inclusions est élasto-plastique avec écrouissage. On remarque au niveau d'allure un comportement similaire et très acceptable.

- On a aussi, traité un autre exemple, ou on a modélisé des inclusions sphéroïdales réparties suivant la direction de chargement, avec une fraction volumique de 30 %. Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec écrouissage isotrope et celui de l'inclusion est élastique. On a effectué une analyse sous un chargement monotone et une autre analyse sous un chargement cyclique. Les résultats numériques obtenus sous les deux types de chargement (monotone, cyclique) montrent de petites différences comparée à la modélisation de **Segurado et al.** [174].

- Enfin, on a traité un dernier exemple, où les renforts (fibres) sont modélisés par des inclusions cylindriques alignées (réparties suivant la direction de chargement), avec une fraction volumique de 13,20 %. Le comportement de la matrice est élasto-plastique avec écrouissage isotrope et celui de l'inclusion est élastique. On remarque une bonne corrélation entre le comportement simulé et expérimental de la matrice. Par contre, il y a une très petite différence entre notre modèle d'homogénéisation périodique et les résultats issus des travaux de **Christman et al.** ([175], [176]), qui évolue dans le sens de la sécurité sous un chargement de traction monotone.

- Pour le modèle fiabiliste couplée au modèle mécanique, appliqué à la simulation du comportement non linéaire de microstructure constitué de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique :

La méthodologie développée dans ce travail a été abordé cette fois-ci pour des microstructures tridimensionnelles périodiques. Elle nous a permis dans cette étude, de calculer le niveau de fiabilité c'est-à-dire d'évaluer l'indice de fiabilité relative à la ruine des systèmes mécaniques à comportement non linéaire et à variables non-normales. Et aussi, de trouver la probabilité de défaillance du système étudié et de déterminer son point de conception. Ce point de conception est défini comme la distance minimum à l'origine, et représente le point le plus probable de l'état-limite dans l'espace normalisé, et qui est déterminer par une technique d'optimisation qui a été implémenter dans le langage de programmation Fortran.

Pour déterminer la probabilité de défaillance d'une microstructure après analyse d'endommagement, on a pris en compte deux sources d'incertitude sur les variables du dommage (le dommage et la déformation). Pour déterminer cette probabilité de défaillance, on a utilisé un couplage indirect entre l'analyse fiabiliste et l'analyse de l'endommagement. Pour la simulation du couplage mécano-fiabiliste appliqué au volume élémentaire représentatif (VER) avec endommagement, on trouve une valeur de l'indice de fiabilité qui est de β = 1.0448, ce qui correspond à une probabilité de défaillance du volume élémentaire représentatif (VER) du composite estimé à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 0.1482, d'où une fiabilité de 85.18 %.

Pour la simulation du couplage mécano-fiabiliste appliqué au matériau composite elasto-plastique (AL-SIC4.1), on trouve une valeur de l'indice de fiabilité qui est de β = 6.6091, ce qui correspond à une probabilité de défaillance du volume élémentaire représentatif (VER) du composite (AL-SIC4.1) estimé à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 0.2018 x 10^{-10}, d'où une fiabilité de 99.99999999997982 %. Cette différence de résultats, nous montre que le choix des lois de distribution des variables aléatoires fait pour le matériau composite elasto-plastique (AL-SIC4.1) correspond parfaitement aux lois de distribution réelle des variables aléatoires simulées.

Pour l'étude de l'endommagement d'un composite avec renfort cylindrique, étant donner qu'on s'est limité à seulement trois types de lois de distribution (normal, log-normal, exponentielle). L'indice de fiabilité retrouvée est de β = 1.0448, ce qui correspond à une probabilité de défaillance du volume élémentaire représentatif (VER) du composite estimé à $P_f = \Phi(-\beta)$ = 0.1482, d'où une fiabilité de 85.18 %. Ces résultats, nous montrent que le choix du type de lois de distribution ne représente pas parfaitement la loi de distribution réelle des caractéristiques aléatoires du matériau composite, car en réalité il existe plus de lois de distribution et aussi par manque de temps, on s'est limité qu'aux lois de distribution (normal, log-normal, exponentielle).

A l'issue de ces simulations, on conclut que les méthodes adoptées tout au long de ce travail s'appliquent parfaitement à la problématique de l'homogénéisation périodique et à l'introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation, et aussi à l'approche fiabiliste couplée au modèle mécanique, qui sont appliqués à des microstructures composées d'une matrice et de différentes formes d'inclusions (sphéroïdales, ellipsoïdales, cylindriques).

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

Cette étude, qui se veut une recherche dans le domaine des nouveaux matériaux de construction, contribue sans aucun doute à l'élaboration et à la connaissance du comportement mécanique des matériaux composites qui connaissent actuellement un essor important, dans tous les domaines, en particulier les constructions de génie civil.

L'homogénéisation passe généralement par la détermination des constantes élastiques effectives. Les différentes formulations actuellement utilisées ne donnent qu'une valeur approximative qui n'est pas validée dans la pratique. L'approche proposée permet de bien modéliser les matériaux composites en prenant en considération le pourcentage de renfort, ainsi que leur forme et orientation.

La comparaison des différents résultats obtenus par le modèle numérique proposé (homogénéisation périodique par imposition des conditions aux limites périodiques) avec les résultats expérimentaux et théoriques, nous a permis de constater une concordance très satisfaisante. L'homogénéisation périodique nous donne des résultats satisfaisants concernant la caractérisation mécanique des matériaux. Les différents résultats de cette étude permettent de constater que, le pourcentage des inclusions a une influence sur les modules élastiques effectifs des matériaux composites, ainsi que leur forme et orientation. L'approche proposée par un schéma d'homogénéisation incrémentale sur un volume élémentaire représentatif (VER) est performante et permet une extension aux comportements non linéaires.

L'introduction de l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation est faite, c'est-à-dire ; une fois que les caractéristiques mécaniques homogénéisées sont appréciées en l'absence de l'endommagement amorcé par les microfissures et micro cavitations. Cette procédure nous a permis d'analyser les champs locaux et notamment d'avoir l'évolution de l'endommagement au niveau de la microstructure, et de déduire les mécanismes de rupture. Nous avons mené une étude paramétrique impliquant plusieurs paramètres (forme, pourcentage d'inclusions) sur des volumes élémentaires représentatifs (VER). L'absence de confrontation expérimentale n'a pas permis de tirer tout le profit escompté des modèles que nous avons implémentés dans ce travail.

Pour le calcul fiabiliste, nous nous sommes particulièrement intéressés aux méthodes de niveaux 2 plus précisément la méthode d'optimisation d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), puis nous avons opté pour le couplage entre cette dernière méthode et le calcul non linéaire grâce à une méthode de couplage indirecte par surface de réponse analytique. L'utilisation de la transformation isoprobabiliste, nous a permis de remplacer la fonction d'état limite implicite dans l'espace physique (qui représente la défaillance de la structure) par une fonction explicite équivalente dans l'espace normé et ce, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité adopté.

Après avoir fait les implémentations nécessaires, nous avons d'abord traité le problème par l'application des méthodes d'homogénéisation semi-analytique (Auto-cohérente, Mori-Tanaka), puis nous avons validé le modèle d'homogénéisation périodique pour des volumes élémentaires représentatifs (VER) en matériaux composites sur des exemples testés. Les résultats montrent une assez bonne approximation des caractéristiques mécaniques effectives de ses matériaux composites, ainsi qu'une bonne concordance a été constatée au niveau de la simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastique par la méthode d'homogénéisation périodique, et cela en comparant la charge de ruine trouvée au niveau de nos résultats à des solutions analytiques ou expérimentales.

Enfin, nous avons traité le problème de fiabilité on appliquant une méthode stochastique sur quelques exemples ; où il y a lieu de résoudre un problème d'optimisation, afin d'estimer l'indice de fiabilité, et de déterminer la probabilité de défaillance du système étudié. Les résultats obtenus par combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, montrent que la méthode d'estimation des lois de probabilités que nous avons utilisée en première approche, nous a permis d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

A travers les différentes confrontations à des travaux récents issus de la littérature, nous avons cherché à valider notre modélisation et son implémentation. Par limitation en temps pour réaliser davantage de confrontation, et d'étude paramétrique ainsi que l'extension de la méthodologie développée vers des éléments de structure, et aussi par limitation en temps d'exécution des machines (stations de travail) et cela lors de la réalisation de maille relativement serrée.

Malgré ses limitations en temps, on a obtenu de très bons résultats pour des volumes élémentaires représentatifs (VER), il est possible en perspective d'améliorer et de faire une extension a la programmation qui a été utilisée dans cette étude. Les améliorations qui peuvent être proposées sont :

Pour la modélisation de l'homogénéisation périodique :

- Introduction des non-linéarités en grands déplacements et grandes déformations.

- Modélisation des éléments de structure (en béton armé, béton de fibre,…).

Pour l'introduction de l'endommagement :

- Introduction d'autres lois de comportement et d'endommagent des matériaux.

- Tenir compte de l'interaction (matrice-inclusion).

Pour l'introduction de la fiabilité :

- Implémentation des autres méthodes de fiabilité, dont la méthode de niveau 3 de simulation de Monte-Carlo.

- Utilisation de nouvelles méthodes de couplage.

BIBLIOGRAPHIE

Références bibliographiques

[01] P. Suquet. Homogenization Techniques for Composite Media. Lecture Notes in Physics, vol. 272. Springer, Berlin/ Heidelberg, pp. 193e198 , (1987). Editors: Sanchez-Palencia, Enrique, Zaoui, Andre (Eds.)

[02] Bailon, Dorlot. Des Matériaux, Polytechnique, troisième édition.

[03] F.C. Campbell. Manufacturing Technology for aerospace structural materials, ELSevier.

[04] Ceramic Matrix Composites (introduction), consulté le 1 décembre 2014. [http://www.substech.com/dokuwiki/doku.php?id=ceramic_matrix_composites_introduction].

[05] Sova, A. Okunkova, S. Grigoriev, and I. Smurov. Velocity of the Particles Accelerated by a Cold spray Micronozzle: Experimental Measurements and Numerical Simulation, J Therm Spray Techn, 2012, 22(1), p. 75-80.

[06] D. Salim. Matériaux composites à matrice métallique, Techniques de l'ingénieur Méthodes de caractérisation et d'analyse des métaux et alliages, 1990.

[07] H. Cetinel, B. Uyulgan, C. Tekmen, I. Ozdemir, and E. Celik. Wear properties of functionally gradient layers on stainless steel substrates for high temperature applications, Surf Coat Tech, 2003, 174-175(0), p. 1089-1094.

[08] A.L. Geiger, M. Jackson. Low-expansion MMCs boost avionics. Advanced Materials and Processes inc. Metal Progress, p. 23-30, 1989.

[09] D. Baptiste. Lois de Comportement et d'Endommagement des Matériaux Composites Etablies à Partir d'une Approche Micromécanique. Mémoire d'Habilitation. Ecole Centrale de Paris.

[10] D. Chambolle, D. Baptiste et P. Bompard. Damage Micromechanisms and Micromechanic Modelization of AL-SiCw Composites. Proc. of Mecamat, International Seminar on Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and multimaterials, Saint-Etienne, 1989.

[11] M.J. Birt, W.S. Johnson. Characterization of the tensile and microstructural properties of an Aluminium Metal Matrix Composite. TMS Fall Meeting, Indianapolis, 1989.

[12] R.J. Arsenault, L. Wang, C.R. Feng. Strengthening of composites due to microstructural changes in the matrix. Acta Metall. Mater., Vol. 39-1, p. 47-57, 1991.

[13] K. Hirano. Fatigue crack growth characteristics of whisker reinforced Aluminium alloy. Proceedings of the fourth international conference on fatigue and fatigue threshold, 15-20 July, Honolulu, Hawaï, p. 863-868, 1990.

[14] N. Bourgeois, D. Baptiste, D. Francois. Micromechanical approach to the behavior of the damage of a particulate-reinforced aluminium composite. EuroJapan exchanges on materials, Tech Mat 92; Workshop on mechanical properties of MMC; Editors S. NISHIJIMA and C. BATHIAS; Paris-La Defense, Feb. 19- 21, 1992.

[15] H. Ribes, R. DA Silva, M. Suéry, T. Bretheau. Effect of interfacial oxide layer in Al-SiC particle composites on bond strength and chemical behavior. Materials Science and Tech., Vol. 6, p. 621-628, 1990.

[16] W .A. Logsdon, and P.K. Liaw. Tensile, fracture toughness and fatigue crack growth rate properties of silicon carbide whisker and particulate reinforced aluminum metal matrix composites. Engineering fracture mechanics, Vol. 24, No. 5, 1986, pp 737-751.

[17] T. Morimoto, T. Yamaoka, H. Lilholt, H. Taya. Second stage creep of SiC Whisker/6061 Aluminium composite at 573K. Transactions of ASME, Vol. 110, 1988.

[18] C. Masuda, Y. Tanaka, M. Fukazawa. Fatigue Fracture Mechanisms of SiC Whisker or SiC Particulates reinforced Aluminium matrix composites. Advanced Composite Materials, Proceeding of the 1st France-Japan Seminar on Composite Materials ; Editors C. BA 1HIAS and M. UEMURA ; Paris, March 13-14, p. 62-67, 1990.

[19] J. Llorca, S. Suresh, A. Needleman. An experimental and numerical study of cyclic deformation in metal matrix composite. Metallurgical Transactions A, Vol. 23A, p. 919-933, 1992.

[20] K. Hirano. Fatigue crack growth characteristics of metal matrix composites. Congrès ICM6, Mechanical behaviour of Material, Kyoto, 29-07 au 2-08-91, p. 93-99, 1991.

[21] D. Toitot. Vieillissement sous Chargement Thermomécanique d'un Matériau Composite à Matrice Métallique. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Paris, 1991.

[22] J. D. Eshelby. The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. In Proceedings of the Royal Society of London, series A, volume 241, pages 376-396, (1957).

[23] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. ASME Journal for Applied Mechanics, 29:143-150, (1962).

[24] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 13:213-222, (1965).

[25] T. Mori et K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metallugica, 21 : 571-574, 1973.

[26] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, Proc. R. Soc.L on d., Series A 24l, pp. 376-396, (1957).

[27] R. Hill. Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strenthened Material : III Self-Consistent Model. J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965.

[28] Y. Benveniste. A new approach to the application of mori-tanaka's theory in composite materials. Mechanics of Materials, 6 : 147-157, 1987.

[29] T. Christman, A. Needleman, et S. Suresh. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. Acta Metallurgica, 37(11):3029-3050, (1989).

[30] V. Tvergaard. Analysis of tensile properties for a whisker reinforced metal-matix composite. Acta Metallurgica, 38(2):185-194, (1990).

[31] O. Van Der Sluis, P. J. G. Schreurs, et H. E. H. Meijer. Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. Mech. Mat., 31 : 743-759, (1999a).

[32] J. Aboudi. Mechanics of Composite Materials - A Unified Micromechanical Approach, Elsevier, Amsterdam, 328 p, (1991).

[33] S. Nemat-Nasser and M. Hori. Micromechanics: overall properties of heterogeneous solids. 2nd edition. Elsevier, Amsterdam, 810 p, (1999).

[34] E. Sanchez-Palencia. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. International Journal for Engineering Science, 12 : 231-251, (1974).

[35] E. Sanchez-Palencia. Non homogeneous media and vibration theory. Lecture Note in Physics, 127, (1980).

[36] P. Ponte-Castaneda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39(1) : 45–71, 1991.

[37] E. Kröner. Zur plastischen verformung des vielkristalls. Acta Metall. 9, 2 (1961), 155–161.

[38] B. Budianski and Wu. Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. In Proc. of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, ASME (1962), pp. 1175–1185.

[39] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. J. Mech. Phys. Solids 13, 2 (1965), 89–101.

[40] M. Berveiller and A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. J. Mech. Phys. Solids 26 (1979), 325–344.

[41] W. Voigt. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. Wied. Ann. vol. 38, pp. 573-587, (1889).

[42] A. Reuss. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle Z. Angew. Math. Mech., vol. 9, pp. 49-58, (1929).

[43] Z. Hashin, and S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic nonhomogeneous elasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10 (1962), 335-342.

[44] Z. Hashin, and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids10 (1962), 343-352.

[45] Z. Hashin, and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 11 (1963), 127-140.

[46] I. Doghri and A. Ouaar. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms, Int. J. Sol. Struct., vol. 40, Elsavier, pp. 1681–1712, (2002).

[47] J. C. Halpin and J. L. Kardos. Halpin-Tsai equations: A review, Polymer Engineering and Science, vol. 16, pp. 344-352, (1976).

[48] J. J. Hermans. The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. B., vol. 65, pp. 1-9, (1967).

[49] R. J. Hill. Theory of mechanical properties of fiber strengthened materials: Elastic behaviour, Mech. Phys. Solids, vol. 12, pp. 199, (1964).

[50] C. Huet. Universal conditions for assimilation of a heterogeneous material to an effective medium, Mech. Res. Comm., vol. 9(3), pp. 165–170, (1982).

[51] C. Huet. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies, J. Mech. and Phys. of Solids, vol. 38, pp. 813–841, (1990).

[52] S. Torquato. Random heterogeneous media: microstructure and improved bounds on effective properties, Appl. Mech. Rev., vol. 44, pp. 37–76, (1991).

[53] T. Zohdi and P. Wriggers. Aspects of the computational testing of properties of microheterogeneous material samples, Inter. J. Meth. Eng., vol. 50, pp. 2573–2599, (2001a).

[54] T. Zohdi and P. Wriggers. Computational micro-macro material testing, Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 8(2), pp. 131-228, (2001).

[55] C. Döbert. Meso-Makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung, Ph.D. thesis, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, (2001).

[56] F. Larsson et K. Runesson. A mixed least-squares formulation for rve computations, To be published in Int. J. Num. Meth. Eng, (2004).

[57] J. Schröder. Homogenisierungsmethoden der nichtlinearen Kontinuumsmechanik unter Beachtung von Stabilitätsproblemen. Technical report, Habilitationsschrift, Bericht Nr. I-7(2000) des Instituts für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I, Universität Stuttgart, (2000).

[58] C. Miehe. Computational micro-to-macro transitions for discretized micro-structures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy, Comp. Meth. App. Mech. Eng., vol. 192, pp. 559–591, (2003).

[59] C. Miehe, J. Schröder and M. Becker. Computational homogenization analysis in finite elasticity: material and structural instabilities on the micro and macro-scales of periodic composites and their interaction, Comp. Meth. App. Mech. Eng., vol. 191, pp. 4971–5005, (2002).

[60] M. Ortiz. Mixed continuum / atomistic models: The quasi-continuum method, In Computational Plasticity vol. 7, pp. 12, (2003).

[61] L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. (Izv. Akad. Nauk S.S.R.) Otd Tekh. Nauk, n' 8, pp.26-31.

[62] Y. N. Rabotnov. Creep rupture. (Proc. XIIè mt. Cong. Appl. Mech.). Stanford-Springer, (1969).

[63] J. L. Chaboche. Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope, Coll. Euromech 115, Grenoble, (CNRS, 1982), (1979).

[64] J. P. Cordebois , F. Sidoroff. Elasticité anisotrope Induite par l'endommagement. EUROMECH 115 (Anisotropie) Grenoble, (1979).

[65] J. Lemaitre, F. Sidoroff, J. L. Chaboche, C. Galharaghe. Méthode de modélisation par variables Internes et d'identification numérique de l'anisotropie, d'écrouissage. et de l'endommagement des métaux. Rapport final ATP-CNRS, n 3135, (1979).

[66] J. Mazars. Application de la Mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat d'Etat. Université Paris VI, (1984).

[67] F. Collombert. Modélisation de l'endommagement anisotrope. Application au concept du béton sous compression triaxiale. Thèse de 3ème cycle- Paris VI, (1983).

[68] L.M. Kachanov. On the Creep Fracture Time. Izv. ANSSR, Otd. Tekhn. Nauk, no. 8, (1958), pp. 26-31.

[69] D. Krajcinovic, G. U. Fonseka. The Continuous Damage Theory of Brittle Materials. Journal of Applied Mechanics, (Dec.1981). Vol 48, pp. 809-824.

[70] L. Davidson, A.L. Stevens. Thermomechanical Constitution of Spalling Elastic Bodies". Journal of Applied Phisics; Vol. 44, (1973), pp. 667-674.

[71] A. A. Vakulenko, M. L. Kachanov. Continuum Theory of Cracked Media. Mekh. Tverdogo Tela, Vol. 6, (1971), pp. 159-1 66.

[72] J. L. Chaboche. Le Concept de la Contrainte Effective Appliquée à l'élasticité et à la Viscoplasticité en Présence d'un Endommagement Anisotrope. Colloquium EUROMECH 115, Grenoble, (1979).

[73] J. L. Chaboche. Description Thermodynamique et Phénoménologique de la Vtscoplasticlté Cyclique avec Endommagement. ONERA, Pubi. n. 1978-3, (1978).

[74] J. L. Chaboche. The Continuous Damage Mechanics : A Tool to Describe Phenomea Before Crack InitiatIon. 2nd Int Seminar on Inci. Analysis and Life Prediction in High Temp. Env.,(1 979), pp. C9-C14.

[75] M. Ortiz. A constitutive theory For The Inelastic Behaviour of Concrete. Mechanics of Materials, n4 (1985), pp. 67-93.

[76] P. Ladeveze. Sur une Théorie de l'Endommagement Anisotrope. Rapport interne n 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie. E.N.S.E.T. (1983).

[77] I. Benslimane, J. L. Bosc. Validation statistique de modèle de comportement du béton soumis à la torsion. Annales de L' I.T.B.T.P. n 471 (Janvier 1989).

[78] M. Ketata. Construction d'un modèle élastique fragile anisotrope endommage en traction-torsion. Thèse de doctorat de l'école centrale de Lyon - (1991).

[79] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 51, pp. 31-49, (1985).

[80] J. L. Chaboche. Continum damage mechanics : Part I –General Concepts. ASME Journal of Applied Mechanics, 55, pp. 59-64, (1988).

[81] L. Rosende, and J. B. Martins. A Progressive damage continum model for granular materials. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 42, pp. 1-18, (1984).

[82] S. Govingee, B.M.A Kusters, and T. Monnier. Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(21), pp. 3611-3633, (1995).

[83] J. Chaboche et J. Lemaitre. Mécanique des matériaux solides. Paris, (1985) cambridge univ. press édition. 57, 61.

[84] C. La Borderie. Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton, Thèse, Paris 6, (1991).

[85] L. Jason. Relation Endommagement Perméabilité pour les bétons, Applications aux calculs de structures, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes (France), (2004).

[86] J. Mazars. Mécanismes physiques de rupture, et modèles de comportement mécanique du béton hydraulique. Le Béton Hydraulique- chapitre 17- Presse ENPC - (1982).

[87] G. Etse et K. J. Willam. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. JEM, ASCE, 106(9):1013–1203, (1994).

[88] R. S. Crouch et B. Tahar. Application of a stress return algorithm for elasto-plastic hardeningsoftening models with high yield surface curvature. In Proceedings of European Congress on computational methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona, (2000).

[89] N. S. Streletskyi. Statistical basis of the safety factor of structures, "Stroyizdat" Publishing house, Moscow, 1947 (in Russian).

[90] M. Mayer. Die Sicherheit der Bauwerke, Springer-Verlag, (1926).

[91] R. A. Rjanitzyne. Design of structures with considerations of plastic properties of materials. Stroivoenmorizdat, (1949).

[92] R. A. Rjanitzyne. Calcul à la rupture et plasticité des constructions. Eyrolles, Paris, (1959).

[93] J. A. Calgaro. Introduction à la Réglementation technique. Annales des ponts et chaussées, N°60, pp.20-40, (1991).

[94] C. A. Cornell. Some thoughts on Maximum Probable loads" and "Structural safety insurance. Memorandum to ASCE Structural Safety Committee, NUT, Cambridge, USA, (1967).

[95] A. M. Hasofer, N. C. Lind. Exact and invariant second moment code format. Journal of the Mechanics Division, ASCE, Vol 100, pp.111-121.

[96] M. Lemaire. Conception fiable des structures. Journées Fiabilité des Matériaux et des Structures, Nantes, (2008).

[97] L. Peyras, C. Carvajal, H. Felix, C. Bacconnet, P. Royet, J. P. Becue, D. Boissier. Probability-based assessment of dam safety using combined risk analysis and reliability methods- application to hazards studies. European Journal Of Environmental And Civil Engineering 16(7): 795-817, (2012).

[98] C. Cremona. Application des notions de fiabilité à la gestion des ouvrages existants. Association Française de Génie Civil. Presse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.

[99] H. Dehmous. Fiabilité et micromécanique des matériaux composites Application à la passerelle de Laroin. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007.

[100] C. Carvajal, G. Philip, J. P. Bécue. Apport des méthodes de la sureté de fonctionnement et de la fiabilité dans le cadre des études de dangers : exemple d'application sur le barrage du Xoldocogaina. Papier présenté à la conférence pratique des études de dangers des barrages, INSA LYON. Colloque (CFBR / AFEID), (2011).

[101] X. Zwingmann. Modèle d'évaluation de la fiabilité et de la maintenabilité au stade de la conception. Thèse de doctorat université Laval, Québec, (2005).

[102] M. K. Ravindra, N C Lind, W. Siu. Illustration of reliability-based design. J. Struct. Div., ASCE, 100(9) (1974) 1789-1811.

[103] A. Karamchandani, C. Cornell. Sensitivity estimation within first and second order reliability methods. Struct. Saf. (1992); 11(2):95–107.

[104] N. Vu-Bac, T. Lahmer, H. Keitel, J. Zhao, X. Zhuang and T. Rabczuk. Stochastic predictions of bulk properties of amorphous polyethylene based on molecular dynamics simulations. Mechanics of Materials, 68, 70-84, (2014).

[105] N. Vu-Bac, T. Lahmer, Y. Zhang, X. Zhuang and T. Rabczuk. Stochastic predictions of interfacial characteristic of polymeric nanocomposites (PNCs). Composites Part B: Engineering, 59, 80-95, (2014).

[106] N. Vu-Bac, M. Silani, T. Lahmer, X. Zhuang and T. Rabczuk. A unified framework for stochastic predictions of mechanical properties of polymeric nanocomposites. Computational Materials Science, 96, 520-535, (2015).

[107] N. Vu-Bac, T. Lahmer, X. Zhuang, T. Nguyen-Thoi and T. Rabczuk. A software framework for probabilistic sensitivity analysis for computationally expensive models. Advances in Engineering Software, 100, 19-31, (2016).

[108] N. Vu-Bac, R. Rafiee, X. Zhuang, T. Lahmer, and T. Rabczuk. Uncertainty quantification for multiscale modeling of polymer nanocomposites with correlated parameters. Composites Part B: Engineering, 68, 446-464, (2015).

[109] O. Ditlevsen, H. Madsen. Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons Ltd, (1996).

[110] B. Sudret et A. D. Kiureghian. Stochastic finite element methods and reliability, a state-of-the-art report. Rapport technique, Department of Civil and Environmental Engineering, Univerisity of California, Berkeley, (2000).

[111] M. Lemaire. Cours IFMA. introduction à la fiabilité en mécanique, (2001).

[112] C. Cornell. A probability-based structural code. J. Am. Conc Inst, 66:974–985, (1969).

[113] O. Ditlevsen, H. Madsen. Structural reliability methods, J. Wiley and Sons, Chichester, (1996).

[114] E. Ardillon and B. Barthelet and J. D. Sorensen. Probabilistic Calibration of Safety Factors for Nuclear Operating Installations. In Proceedings of the 1998 ASME/JSME Joint Pressure Vessels and Piping Conference, Vol. 375, (1998).

[115] S. Rahman. A stochastic model for elastic-plastic fracture analysis of circumferential through-wall-cracked pipes subject to bending. Engineering Fracture Mechanics, 52(2), 265-288, (1995).

[116] S. Rahman and J.-S. Kim. Probabilistic fracture mechanics using nonlinear finite element analysis. In proceedings of the 1997 ASME/JSME Joint Pressure Vessels and Piping Conference, 346(2), 183-196, (1997).

[117] S. Rahman. Probabilistic Fracture Mechanics : J-Estimation and Finite Element Methods. In proceedings of the 1997 ASME/JSME Joint Pressure Vessels and Piping Conference, 373, 9-25, (1998).

[118] M. Lemaire. Finite element and reliability : combined methods by surface response, in , G.-N. Frantziskonis (ed.), Probamat-21st Century, Probabilities and Materials : Tests, Models and Applications for the 21st century, Kluwer Academic Publishers, p. 317-331, (1998).

[119] A. Mohamed and J. F. Suau and M. Lemaire. A new tool for reliability based design with ANSYS FEA. In proceedings of the ANSYS Conference and Exhibition, Houston, USA, 3.13-3.23, (1996).

[120] P. Hornet, M. Pendola and M. Lemaire. Failure probability calculation of an axisymetrically cracked pipe under pressure and tension using a finite element code. In proceedings of the 1998 ASME/JSME Joint Pressure Vessels and Piping Conference, San Diego, California, Vol. 373, 3-7, (1998).

[121] A. Der Kiureghian, J.-B. Ke. The stochastic finite element method in structural reliability. Prob. Eng. Mech., vol. 3, n° 2, p. 83-91, (1988).

[122] A. Der Kiureghian, P.-L. Liu. Structural reliability under incomplete probability information. J. Eng. Mech., ASCE, vol. 112, n° 1, p. 85-104, (1986).

[123] A. Der Kiureghian, R.-L. Taylor. Numerical methods in structural reliability. Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, p. 769-784, (1983).

[124] M. Lemaire, A. Mohamed. Finite Element and Reliability: A Happy Marriage?. Reliability and Optimization of Structural Systems, Keynote Lecture at the 9th IFIP WG 7.5 Working Conference, Nowak, A. and Szerszen, M. (Eds.), p. 3-14, (2000).

[125] B. Sudret. Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée. Proc. 17ème Congrès Français de Mécanique - Troyes, in French, (2005).

[126] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire. Application of a Stochastic Finite Element Procedure to Reliability Analysis. Proc 11th IFIP WG7.5 Conference, Banff, Canada, (2003a).

[127] B. Sudret, M. Berveiller, M. Lemaire. A stochastic finite element method in linear mechanics. Comptes Rendus Mécanique, vol. 332, p. 531-537, (2004).

[128] B. Sudret, I. Cherradi. Quadrature method for finite element reliability analysis. Proc. 9th Int. Conf. On Applications of Stat. and Prob. in Civil Engineering (ICASP9), San Francisco, (2003b).

[129] B. Sudret, G. Defaux, M. Pendola. Time-variant finite element reliability analysis - application to the durability of cooling towers. Struct. Safety, vol. 27, p. 93-112, (2005).

[130] B. Sudret, A. Der Kiureghian. Stochastic finite elements and reliability : A state-of-the-art report. Technical Report n° no UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley, (2000), 173 pages.

[131] B. Sudret, A. Der Kiureghian. Comparison of finite element reliability methods. Prob. Eng. Mech., vol. 17, p. 337-348, (2002).

[132] K. Imaia, D. Frangopol. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I : theory. Comput. Struc., vol. 77, n° 6, p. 677-691, (2000).

[133] D. Frangopol, K. Imaia. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II : applications. Comput. Struc., vol. 77, n° 6, p. 693-709, (2000).

[134] D. M. Frangopol, K. Maute. Advances in Probabilistic Mechanics and Structural Reliability. Comput. Struct. Volume 82, Issues 13–14, Pages 969-1122 (2004).

[135] M. Pendola, A. Mohamed, M. Lemaire, P. Hornet. Combination of finite element and reliability methods in nonlinear fracture mechanics. Reliability Engineering & System Safety, vol. 70, n° 1, p. 15-27, (2000).

[136] A. Mohamed, M. Pendola, G. Heinfling, G. Defaux. Etude de l'intégrité des aéro-réfrigérants par couplage éléments finis et fiabilité. Revue Européenne des Eléments Finis, vol. 1, p. 101-126, (2002).

[137] Y. Bouafia. Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton de fibres. Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, (1987).

[138] M. Sargin. Stress-Strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. Solid Mechanics division, University of waterloo, Canada, (1971).

[139] A. Grelat. Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI, (1978).

[140] Règles BAEL 91 modifiées 99, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES, (2000).

[141] Règles BPEL 91, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES, (1993).

[142] P. Suquet. Elements of homogenization theory for inelastic solid mechanics,. In: Sanchez-Palencia, E., Zaoui, A. (Eds.), Homogenization Techniques for Composite Media. Vol. 272 of Lecture Notes in Physics. Springer Verlag, New York, (1987), pp. 193–278.

[143] H. Magoariec. Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique. Thèse de doctorat université Aix-Marseille II, (2003).

[144] J. Mazars. A description of micro and macroscale damage of concrete structure. Engineering Fracture Mechanics, Vol25, 1986, p729-737.

[145] J. Mazars, F. Hamon, S. Grange. A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. Materials and Structures (2014), DOI 10.1617/s11527- 014- 0439- 8.

[146] Y. Bouafia, M. S. Kachi, B. Foure. Relationship stress-strain for tensile reinforced steel fiber concrete. Annals of the building and public works, n°3 (2002).

[147] N. Belhadj, Y. Bouafia, R. Smahi. Modeling the Behavior of the Fiber Reinforced Concrete by Damage Mechanics. Applied Mechanics and Materials Vol. 749, (2015), pp 386-390.

[148] H. Magoariec. Adaptation élastoplastique et homogénéisation périodique. Thèse de doctorat de l'université Aix-Marseille II, (2003).

[149] Z. Xia, Y. Zhang, F. Ellyin. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. International Journal of Solids and Structures, 40(8), 1907-1921, (2003).

[150] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 13:213-222, (1965).

[151] S. Kurukuri. Homogenization of damaged concrete meso-structures using representative volume elements-implementation and application to slang. Master thesis, bahaus-University Weimar Germany, (2005).

[152] F. Fritzen, S. Forest, T. Bohlke, D. Kondo, Kanit. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. International Journal of Plasticity 29, 102-119, 2012.

[153] L. Delannay, I. Doghri, O. Pierard. Prediction of tension-compression cycles in multiphase steel using a modified incremental mean-field model. International Journal of Solids and Structures 44, 7291-7306, (2007).

[154] L. Brassart, I. Doghri, L. Delannay. Homogenization of elasto-pastic composites coupled with a non-linear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. International Journal of Solids and Structures 47, 716-729, (2010).

[155] B. Mortazavi, M. Baniasadi, S. Ahzi. Modeling of two-phase random composite materials by finite element, Mori-Tanaka and strong contrast methods. Composites : Part B 45, 1117-1125, (2013b).

[156] B. Mortazavi, M. Baniasadi, S. Ahzi. Interphase effect on the elastic and thermal conductivity response of polymer nanocomposite materials : 3D finite element study. Computational Materials Science 69, 100-106, (2013c).

[157] Fan Ye, Hu Wang. A simple python code for computing effective properties of 2D and 3D representative volume element under periodic boundary conditions. Computational Engineering, Finance, and Science (cs.CE), (2017).

[158] YU. N. Rabotnov, S. T. Mileiko. Short-Time Creep, Moscow, Nauka Publisher, (1970).

[159] L. Kachanov. Rupture time under creep condition, Izv. Acd. Nauk SSSR, OTN, 8, 26-31, 1958, (1958).

[160] R. E. Von Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachrichten vonder Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 4 :582–592, (1913).

[161] Trung Hieu Hoang. Approches d'homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogènes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques. Thèse de doctorat université de paris-est.

[162] H. Oudin. Introduction à la plasticité. (2009).

[163] P. Suquet. Rupture et plasticité. Rapport technique.

[164] Y. Bereriche. Contribution de l'approche contrainte / résistance à l'évaluation de la fiabilité des structures. Thèse de maîtrise en génie Mécanique, Université LAVAL, QUEBEC, (2010).

[165] M. Lemaire. Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique. Éditions Hermès Lavoisier, Paris, (2005).

[166] M. Soheil Mohammadkhani-Shali. Contribution a l'étude de la redondance dans les ponts : analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse. Thèse de doctorat d'état, École Nationale des Ponts et Chaussées, (2007).

[167] F. Deheeger. Couplage mécano-fiabiliste : SMART – méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité. Thèse de doctorat d'état, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, (2008).

[168] M. Lemaire. Approche probabiliste du dimensionnement : Modélisation de l'incertain et méthodes d'approximation. Éditions techniques de l'ingénieur, (2012).

[169] Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park, Se-Hyu Choi. Practical advanced analysis and design of three-dimensional truss bridges. Journal of Constructional Steel Research 57 (2001), 907–923.

[170] Nguyen Huy Gia. Approche micromécanique pour la modélisation du comportement élastoplastique des composites : application aux mortiers de résine, thèse de doctorat de l'université de Cergy-pontoise, France, (2008).

[171] Ghayath al Kassem. Micromechanical material models for polymer composites through advanced numerical simulation techniques, university in Germany.

[172] L. Brassart, I. Doghri, L. Delannay. Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. Int. J. Sol. Struct., vol. 47 (2010), Elsevier, pp. 716–729.

[173] I. Doghri and A. Ouaar. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. Int. J. Sol. Struct., vol. 40 (2003), Elsevier, pp. 1681–1712.

[174] J. Segurado, J. Liorca and C. Gonzalez. On the accuracy of mean-field approaches to simulate the plastic deformation of composites. Scipta Mater., 46(7):525-529, (2002).

[175] T. Christman, A. Needleman, S. Nutt, S. Surech. On microstructural evolution and micromechanical modeling of deformation of a whisker-reinforced metal-matrix composite. Materials Science and Engineering A, 107 : 49-61, (1989).

[176] T. Christman, A. Needleman, S. Surech. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. Acta Metallugica, 37(11) : 3029-3050, (1989).

[177] A. V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. J. Appl. Mech., (1954), 21 :226–240, (1954).

[178] O. Pierard, C. Friebel, I. Doghri. Mean-field homogenization of multi-phase thermoelastic composites : a general framework and its validation. Composites Science and Technology, 64 (10-11) : 1587–1603, (2004).

[179] S. G. Jallouf. Approche Probabiliste du Dimensionnement Contre le Risque de Rupture. Thèse de doctorat en Sciences de l'ingénieur, option Mécanique, université de Paul Verlaine de Metz et de l'université d'ALEP, (2006).

Travaux et publications impliquant le travail de thèse

[I] K. Benyahi, Y. Bouafia, S. Barboura, M. S. Kachi. « Nonlinear analysis and reliability of metallic truss structures ». Frontiers of Structural and Civil Engineering, ISSN 2095-2449, (2018), pp 1-17.

[II] K. Benyahi, Y. Bouafia, M. S. Kachi, M. Tebani. « Prediction of the mechanical properties of a composite "concrete" by different methods of homogenization (semi-analytical and asymptotic method) ». The second students symposium on engineering application of mechanics (SSENAM'2), chlef, from 13-14 December 2017.

[III] K. Benyahi, Y. Bouafia, D. Bouchafa. « Reliability analysis of three-dimentional reinforced concrete structures by the Monte Carlo method ». Revue « Nature & Technologie ». A- Sciences fondamentales et Engineering, n° 16 / Janvier 2017. Page 37 à 42.

[IV] K. Benyahi, D. Bouchafa, Y. Bouafia. « Approche fiabiliste appliquée aux structures poteaux-poutres ». 13th Arab Structural Engineering Conference, ASEC, Blida, from 13-15 December 2015.

[V] D. Bouchafa, K. Benyahi, Y. Bouafia. « Fiabilité des structures poteaux-poutres en béton armé ». Le 2éme Séminaire International de Génie Civil SIGCB'2015, Bechar, tenu les 28 & 29 Octobre 2015.

[VI] K. Benyahi, D. Bouchafa, Y. Bouafia. « Reliability analysis of three-dimentional reinforced concrete structures by the method of Monte Carlo ». Fifteenh international conference "New trends on fatigue and fracture – fracture and environment", NT2F15, Oran, from 20-23 October 2015.

[VII] D. Bouchafa, Y. Bouafia, K. Benyahi, H. Dehmous, D. Hamadouche. « Approche fiabiliste appliquée aux structures poteaux-poutres en béton armé ». Colloque International Caractérisation et Modélisation des Matériaux et Structures «CMMS14», Tizi-Ouzou, tenu les 12 & 13 Novembre 2014.

ANNEXES

ANNEXE I

MÉTHODES D'HOMOGÉNÉISATION SEMI-ANALYTIQUE A BASE D'INCLUSION POUR LA DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

I. 1. Introduction :

Afin d'estimer les propriétés mécaniques effectives d'un matériau hétérogène, il existe plusieurs méthodes d'homogénéisation semi-analytique. Dans ce travail, on a utilisé et testé les méthodes suivantes : le schéma Auto-cohérente et le modèle de Mori-Tanaka.

Les modèles et méthodes d'homogénéisation qui suivent font suite aux travaux réalisés par Eshelby sur le problème d'inclusions, mais en prenant en compte l'influence de la fraction volumique des hétérogénéités.

Ces méthodes d'homogénéisation vont permettre de pouvoir déterminer le comportement effectif du matériau hétérogène, et cela en effectuant le passage des grandeurs locales aux grandeurs du volume élémentaire représentatif (VER), tout en s'appuyant sur les opérations de moyennes. On obtient donc, les champs de contrainte et déformation moyenne du VER en fonction des champs de contrainte et déformation moyenne de toutes les phases :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \frac{1}{V}\int_V \gamma(x)dV \quad , \ \forall x \in V \\ \bar{\sigma} = \frac{1}{V}\int_V \tau(x)dV \quad , \ \forall x \in V \end{cases} \tag{01}$$

Ce qui devient, grâce à l'expression des champs moyens de contrainte et de déformation locaux, les relations de passage « micro / macro » qui relie les grandeurs moyennes à l'échelle de la microstructure et les grandeurs à l'échelle du VER :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \upsilon_m . \gamma^m + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \gamma^i \\ \bar{\sigma} = \upsilon_m . \tau^m + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \tau^i \end{cases} \tag{02}$$

Finalement, grâce à l'hypothèse d'élasticité linéaire ($\bar{\tau}^i = \bar{\bar{C}}_i : \bar{\gamma}^i$ et $\bar{\gamma}^i = \bar{\bar{S}}_i : \bar{\tau}^i$), les tenseurs des rigidités effectives C du VER et des souplesses effectives S peuvent être déduites :

$$\begin{cases} \bar{\bar{C}} = \bar{\bar{C}}^{m} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \left(\bar{\bar{C}}^{i} - \bar{\bar{C}}^{m}\right) : \bar{\bar{A}}^{i} \\ \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}^{m} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \left(\bar{\bar{S}}^{i} - \bar{\bar{S}}^{m}\right) : \bar{\bar{B}}^{i} \end{cases} \quad (03)$$

Les problèmes d'inclusions sont représentés par une matrice infinie élastique, dont le tenseur de rigidité est $\bar{\bar{C}}^{m}$, comportant une inclusion ellipsoïdale élastique, dont le tenseur de rigidité est $\bar{\bar{C}}^{i}$.

I. 2. Solution d'Eshelby :

Eshelby a défini un problème avec une inclusion équivalente, il a résolu le champ élastique de contrainte à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipsoïde entouré d'une matrice infinie. En laissant l'inclusion être une ellipse de révolution allongée, on peut utiliser ses résultats pour modéliser les champs de contrainte et de déformation autour d'une fibre cylindrique.

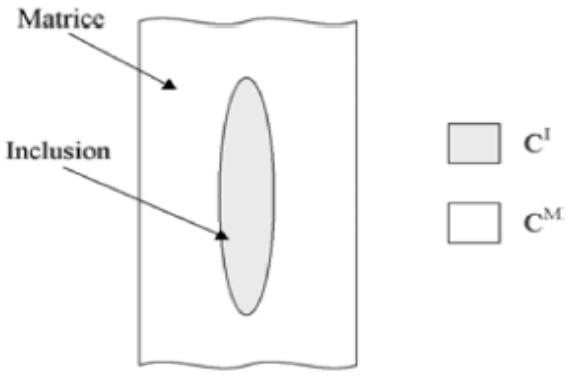

Fig. 1. Illustration du problème d'inclusions [24].

Le tenseur de localisation des déformations pour une inclusion est :

$$\bar{\bar{A}}^{i}_{\text{Eshelby}} = \left[\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{E}}^{m}_{i} : \bar{\bar{S}}_{m} : \left(\bar{\bar{C}}^{i} - \bar{\bar{C}}^{m}\right)\right]^{-1} \quad (04)$$

Ce qui donne le tenseur des rigidités effectives suivantes :

$$\bar{\bar{C}}_{\text{Eshelby}} = \bar{\bar{C}}^{m} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \left(\bar{\bar{C}}^{i} - \bar{\bar{C}}^{m}\right) : \left[\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{E}}^{m}_{i} : \bar{\bar{S}}_{m} : \left(\bar{\bar{C}}^{i} - \bar{\bar{C}}^{m}\right)\right]^{-1} \quad (05)$$

Comme il est visible, la solution s'applique seulement pour une inclusion dans une matrice infinie. Le tenseur de localisation des déformations de la solution d'Eshelby (appelé modèle dilué d'Eshelby) est indépendant de la fraction volumique d'inclusions. Le modèle n'est valable que pour de très faibles concentrations (jusqu'à 1%). Les prochains modèles et méthodes d'homogénéisation prennent ce critère en compte.

I. 3. Schéma Auto-cohérent :

Ce schéma a été introduit par **Hershey** [177] pour le matériau poly-cristallin et reformulé par **Hill** [24] pour le matériau comportant des inclusions ellipsoïdales. Dans ce schéma, on suppose que chaque particule (matrice ou inclusion) est entourée par les autres phases du milieu et donc par le milieu homogène équivalent.

Ce schéma itératif tient compte de l'interaction entre les constituants du milieu hétérogène, il suppose que les hétérogénéités sont plongées dans le milieu homogène équivalent recherché $\bar{\bar{C}}^0$. Ceci se traduit par :

$$\bar{\bar{A}}^i_{AC} = \left[\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{E}}^m_i : \bar{\bar{S}}^m : \left(\bar{\bar{C}}^i - \bar{\bar{C}}^0\right)\right]^{-1} \qquad (06)$$

Ce qui donne un tenseur des modules effectifs de la forme :

$$\bar{\bar{C}}^0 = \bar{\bar{C}}^0 + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \left(\bar{\bar{C}}^i - \bar{\bar{C}}^0\right) : \left[\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{E}}^m_i : \bar{\bar{S}}^m : \left(\bar{\bar{C}}^i - \bar{\bar{C}}^0\right)\right]^{-1} \qquad (07)$$

L'avantage de ce modèle réside dans le fait que les tenseurs de rigidité peuvent s'appliquer pour des matériaux non-isotropes. L'inconvénient est la méthode de résolution qui est implicite, de plus cette approximation s'avère trop rigide pour les matériaux à deux phases [178].

Dans cette méthode, on suppose que l'interaction entre une hétérogénéité et l'ensemble des autres hétérogénéités (lointaines) peut être évaluée en calculant l'interaction entre cette hétérogénéité de forme ellipsoïdale et un milieu de comparaisons de même caractéristiques que le milieu effectif (milieu homogène équivalent).

Hill (1965) obtient par cette méthode certains résultats remarquables. On peut obtenir, dans le cas de pores sphériques inclus dans une matrice dont le coefficient de Poisson est égal à 0,2 ; la relation suivante :

$$2\left(\frac{G}{G_M}\right)^2 + (1 + 4g)\left(\frac{G}{G_M}\right) - 3(1 - 2g) = 0 \qquad (08)$$

Ce qui donne pour expression du module de cisaillement en résolvant l'équation précédente :

$$G = G_M(1 - 2g) \qquad (09)$$

On retrouve, le cas particulier de pores sphériques dans une matrice avec un coefficient de Poisson égal à 0,2. Ce modèle néglige l'interaction entre les hétérogénéités, ce qui n'est pas réaliste. De plus, d'autres problèmes surgissent lorsqu'une des phases possède des caractéristiques élastiques extrêmes (inclusions rigides ou pores).

I. 4. Modèle de Mori-tanaka :

Ce modèle, introduit par **Mori et Tanaka** [25] en 1973, a été reformulé par **Y. Benveniste** [28] en 1985. Ce modèle permet de prendre en compte dans le comportement effectif (équivalant) du matériau homogénéisé, la présence d'un grand nombre d'hétérogénéités et des interactions existant localement entre les phases.

Mori et al. [25] ont proposé une méthode de calcul de la contrainte moyenne, et de l'énergie élastique stockée dans la matrice d'un matériau contenant une fraction volumique d'inclusions. **Benveniste** [28] a proposé une nouvelle approche, que cette méthode a été développée pour des matériaux composites non-dilués, c'est-à-dire pour des fractions volumiques allant jusqu'à 30% [25].

L'hypothèse de Mori-Tanaka est que lorsqu'un nombre important d'inclusions identiques sont introduites dans un matériau composite, la déformation moyenne de l'inclusion s'exprime ainsi :

$$\bar{\gamma}^{i} = \bar{\bar{A}}^{Eshelby} : \bar{\gamma}^{m} \qquad (10)$$

Le tenseur reliant les déformations d'une hétérogénéité *i* à celle de la matrice, pour Mori-Tanaka, est donc égal au tenseur de localisation des déformations de la solution d'Eshelby.

On peut donc en déduire le tenseur de localisation de l'approximation de Mori-Tanaka :

$$\bar{\bar{A}}^{i}_{MT} = \bar{\bar{A}}^{i}_{Eshelby} : \left[\upsilon_m . \bar{\bar{I}} + \sum_{i=1}^{N} v_i . \bar{\bar{A}}^{i}_{Eshelby}\right]^{-1} \qquad (11)$$

On a donc accès au tenseur des modules effectifs :

$$\bar{\bar{C}}_{MT} = \bar{\bar{C}}^{m} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \left(\bar{\bar{C}}^{i} - \bar{\bar{C}}^{0}\right) : \bar{\bar{A}}^{i}_{Eshelby} : \left[\upsilon_m . \bar{\bar{I}} + \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i . \bar{\bar{A}}^{i}_{Eshelby}\right]^{-1} \qquad (12)$$

Mori et Tanaka ont amélioré le modèle d'Eshelby, on considérant que les champs de contraintes et de déformations dans la matrice sont perturbés par la présence des hétérogénéités. En pratique, cela revient à considérer que les caractéristiques du milieu de comparaison (milieu homogène équivalent), sont identiques à celles de la matrice, mais que les interactions entre les hétérogénéités et la matrice sont évaluées en supposant l'hétérogénéité soumise aux champs moyens dans la matrice et non aux champs macroscopiques.

On obtient alors le module de compressibilité et de cisaillement suivant (toujours pour des pores sphériques dans une matrice élastique) :

$$K = \frac{4\,K_M\,G_M\,(1-2g)}{4\,G_M+3\,K_M\,g} \tag{13}$$

$$G = \frac{G_M\,(1-g)}{1+\frac{6\,K_M+12\,G_M}{9\,K_M+8\,G_M}\,g} \tag{14}$$

Cette méthode est la seule qui permet d'avoir accès au module de compressibilité, et de cisaillement du matériau homogénéisé de manière totalement explicite.

Un cas particulier est celui pour lequel nous avons le coefficient de Poisson égal à 0,2 (ce qui est le cas du béton), et pour lequel nous obtenons l'expression suivante pour le module de cisaillement :

$$G = G_M\,\frac{1-g}{1+g} \tag{15}$$

ANNEXE II

ÉLABORATION D'UN PROGRAMME DE CALCUL DE LA FIABILITÉ DES STRUCTURES

II. 1. Introduction :

Afin de faire un calcul fiabiliste, nous avons élaboré un programme écrit en Fortran 90, dont on a introduit l'algorithme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) décrit par **Lemaire** [165].

II. 2. Structure générale du programme :

II. 2.1. Description des différentes Subroutines :

Dans ce qui suit, on décrie brièvement les différentes Subroutines constituant le programme de fiabilité :

- **Subroutine DONNEES :** L'entrée est lue à partir <nomfichier>. DAT, qui est préparé à l'avance.

- **Subroutine CALCUL :** Une boucle de recherche qui minimise l'indice de fiabilité par l'algorithme d'optimisation d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).

- **Subroutine RESULTATS :** Imprime les valeurs finales de chaque variable aléatoire (indice de fiabilité, les coordonnées du point de conception, les cosinus directeurs).

- **Subroutine FONCTDEFAILANCE :** Permet d'introduire la fonction de défaillance $g\ (X)$ (obtenue par surface de réponse analytique) et sa dérivée partielle.

- **Subroutine LOISDISTRIBUTION :** Permet d'évaluer la densité de probabilité et la densité de probabilité cumulée d'une loi de distribution.

II. 2.2. Présentation du fichier de données :

Les données sont entrées par lignes entre les guillemets simples et sont séparées soit par de virgules ou par des espaces, les données sont ainsi lues :

1) Lecture d'un titre de fichier de donnés

2) Lecture des données (variable résistance / charge)

   < rescha >

3) Lecture des données relatives aux variables aléatoires

   <lois> <moy> <ecarttype>

Remarque :
Les données introduites sur le fichier de donnés qui a été décrit ci-dessus sont répétées n fois (i=1, n), où n représente le nombre de variables aléatoire.

II. 2.3. Description des variables du fichier de données :

1) <rescha> définie par une variable caractère de dimension trois, est représenter par le caractère 'RES' ou 'CHA', où :
'RES' représente une variable de résistance et 'CHA' désigne une variable de charge.

2) <lois> défini par une variable caractère de dimension trois, est représenter par le caractère 'NOR' ou 'LOG' ou 'EXP'.

Ceci spécifie le type de distribution, où :
'NOR' ,'LOG', 'EXP' désignent : lois Normale, Lognormale, et Exponentielle respectivement.

3) <moy> défini par une variable réelle, qui représente la valeur moyenne.

4) <ecarttype> défini par une variable réelle, qui représente l'écart-type.

- **Exemple de la mise en donnée :**

Exemple 2 : Pont à poutre triangulée, Cas 1 (Normale, Normale)

```
'CHA' 'NOR' 0.589735   0.0016639
'RES' 'NOR' 0.34098745   0.00179006
```

II. 2.4. Présentation du fichier résultats :

À la fin du calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Indice de fiabilité d'Hasofer-Lind.
- Les cosinus directeurs de chaque variable aléatoire.
- Les coordonnées du point de conception dans l'espace centré réduit et dans l'espace physique.

ANNEXE III

TABLEAU PERMETTANT DE TROUVER $\Phi(-\beta)$ A PARTIR DE LA VALEUR DE β

$$\Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$$

β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$
0.00	0.5000	0.40	0.3446	0.80	0.2119
0.01	0.4960	0.41	0.3409	0.81	0.2090
0.02	0.4920	0.42	0.3372	0.82	0.2061
0.03	0.4880	0.43	0.3336	0.83	0.2033
0.04	0.4841	0.44	0.3300	0.84	0.2005
0.05	0.4801	0.45	0.3264	0.85	0.1977
0.06	0.4761	0.46	0.3228	0.86	0.1949
0.07	0.4721	0.47	0.3192	0.87	0.1922
0.08	0.4681	0.48	0.3156	0.88	0.1894
0.09	0.4642	0.49	0.3121	0.89	0.1867
0.10	0.4602	0.50	0.3085	0.90	0.1841
0.11	0.4562	0.51	0.3050	0.91	0.1814
0.12	0.4522	0.52	0.3015	0.92	0.1788
0.13	0.4483	0.53	0.2981	0.93	0.1762
0.14	0.4443	0.54	0.2946	0.94	0.1736
0.15	0.4404	0.55	0.2912	0.95	0.1711
0.16	0.4364	0.56	0.2877	0.96	0.1685
0.17	0.4325	0.57	0.2843	0.97	0.1660
0.18	0.4286	0.58	0.2810	0.98	0.1635
0.19	0.4247	0.59	0.2776	0.99	0.1611
0.20	0.4207	0.60	0.2743	1.00	0.1587
0.21	0.4168	0.61	0.2709	1.01	0.1563
0.22	0.4129	0.62	0.2676	1.02	0.1539
0.23	0.4091	0.63	0.2644	1.03	0.1515
0.24	0.4052	0.64	0.2611	1.04	0.1492
0.25	0.4013	0.65	0.2579	1.05	0.1469
0.26	0.3974	0.66	0.2546	1.06	0.1446
0.27	0.3936	0.67	0.2514	1.07	0.1423
0.28	0.3897	0.68	0.2483	1.08	0.1401
0.29	0.3859	0.69	0.2451	1.09	0.1379
0.30	0.3821	0.70	0.2420	1.10	0.1357
0.31	0.3783	0.71	0.2389	1.11	0.1335
0.32	0.3745	0.72	0.2358	1.12	0.1314
0.33	0.3707	0.73	0.2327	1.13	0.1292
0.34	0.3669	0.74	0.2297	1.14	0.1271
0.35	0.3632	0.75	0.2266	1.15	0.1251
0.36	0.3594	0.76	0.2236	1.16	0.1230
0.37	0.3557	0.77	0.2207	1.17	0.1210
0.38	0.3520	0.78	0.2177	1.18	0.1190
0.39	0.3483	0.79	0.2148	1.19	0.1170

1.20	0.1151	1.80	0.3593E-01	2.40	0.8198E-02
1.21	0.1131	1.81	0.3515E-01	2.41	0.7976E-02
1.22	0.1112	1.82	0.3438E-01	2.42	0.7760E-02
1.23	0.1094	1.83	0.3363E-01	2.43	0.7550E-02
1.24	0.1075	1.84	0.3289E-01	2.44	0.7344E-02
1.25	0.1057	1.85	0.3216E-01	2.45	0.7143E-02
1.26	0.1038	1.86	0.3144E-01	2.46	0.6947E-02
1.27	0.1020	1.87	0.3074E-01	2.47	0.6756E-02
1.28	0.1003	1.88	0.3005E-01	2.48	0.6569E-02
1.29	0.9853E-01	1.89	0.2938E-01	2.49	0.6387E-02
1.30	0.9680E-01	1.90	0.2872E-01	2.50	0.6210E-02
1.31	0.9510E-01	1.91	0.2807E-01	2.51	0.6037E-02
1.32	0.9342E-01	1.92	0.2743E-01	2.52	0.5868E-02
1.33	0.9176E-01	1.93	0.2680E-01	2.53	0.5703E-02
1.34	0.9013E-01	1.94	0.2619E-01	2.54	0.5543E-02
1.35	0.8851E-01	1.95	0.2559E-01	2.55	0.5386E-02
1.36	0.8692E-01	1.96	0.2500E-01	2.56	0.5234E-02
1.37	0.8535E-01	1.97	0.2442E-01	2.57	0.5085E-02
1.38	0.8380E-01	1.98	0.2385E-01	2.58	0.4940E-02
1.39	0.8227E-01	1.99	0.2330E-01	2.59	0.4799E-02
1.40	0.8076E-01	2.00	0.2275E-01	2.60	0.4661E-02
1.41	0.7927E-01	2.01	0.2222E-01	2.61	0.4527E-02
1.42	0.7781E-01	2.02	0.2169E-01	2.62	0.4397E-02
1.43	0.7636E-01	2.03	0.2118E-01	2.63	0.4269E-02
1.44	0.7494E-01	2.04	0.2068E-01	2.64	0.4145E-02
1.45	0.7353E-01	2.05	0.2018E-01	2.65	0.4025E-02
1.46	0.7215E-01	2.06	0.1970E-01	2.66	0.3907E-02
1.47	0.7078E-01	2.07	0.1923E-01	2.67	0.3793E-02
1.48	0.6944E-01	2.08	0.1876E-01	2.68	0.3681E-02
1.49	0.6811E-01	2.09	0.1831E-01	2.69	0.3573E-02
1.50	0.6681E-01	2.10	0.1786E-01	2.70	0.3467E-02
1.51	0.6552E-01	2.11	0.1743E-01	2.71	0.3364E-02
1.52	0.6426E-01	2.12	0.1700E-01	2.72	0.3264E-02
1.53	0.6301E-01	2.13	0.1659E-01	2.73	0.3167E-02
1.54	0.6178E-01	2.14	0.1618E-01	2.74	0.3072E-02
1.55	0.6057E-01	2.15	0.1578E-01	2.75	0.2980E-02
1.56	0.5938E-01	2.16	0.1539E-01	2.76	0.2890E-02
1.57	0.5821E-01	2.17	0.1500E-01	2.77	0.2803E-02
1.58	0.5706E-01	2.18	0.1463E-01	2.78	0.2718E-02
1.59	0.5592E-01	2.19	0.1426E-01	2.79	0.2635E-02
1.60	0.5480E-01	2.20	0.1390E-01	2.80	0.2555E-02
1.61	0.5370E-01	2.21	0.1355E-01	2.81	0.2477E-02
1.62	0.5262E-01	2.22	0.1321E-01	2.82	0.2401E-02
1.63	0.5155E-01	2.23	0.1287E-01	2.83	0.2327E-02
1.64	0.5050E-01	2.24	0.1255E-01	2.84	0.2256E-02
1.65	0.4947E-01	2.25	0.1222E-01	2.85	0.2186E-02
1.66	0.4846E-01	2.26	0.1191E-01	2.86	0.2118E-02
1.67	0.4746E-01	2.27	0.1160E-01	2.87	0.2052E-02
1.68	0.4648E-01	2.28	0.1130E-01	2.88	0.1988E-02
1.69	0.4552E-01	2.29	0.1101E-01	2.89	0.1926E-02
1.70	0.4457E-01	2.30	0.1072E-01	2.90	0.1866E-02
1.71	0.4363E-01	2.31	0.1044E-01	2.91	0.1807E-02
1.72	0.4272E-01	2.32	0.1017E-01	2.92	0.1750E-02
1.73	0.4182E-01	2.33	0.9903E-02	2.93	0.1695E-02
1.74	0.4093E-01	2.34	0.9642E-02	2.94	0.1641E-02
1.75	0.4006E-01	2.35	0.9387E-02	2.95	0.1589E-02
1.76	0.3921E-01	2.36	0.9138E-02	2.96	0.1538E-02
1.77	0.3836E-01	2.37	0.8894E-02	2.97	0.1489E-02
1.78	0.3754E-01	2.38	0.8657E-02	2.98	0.1441E-02
1.79	0.3673E-01	2.39	0.8424E-02	2.99	0.1395E-02

3.00	0.1350E-02	3.60	0.1591E-03	5.00	0.2859E-06
3.01	0.1306E-02	3.61	0.1531E-03	5.05	0.2203E-06
3.02	0.1264E-02	3.62	0.1473E-03	5.10	0.1694E-06
3.03	0.1223E-02	3.63	0.1417E-03	5.15	0.1299E-06
3.04	0.1183E-02	3.64	0.1363E-03	5.20	0.9935E-07
3.05	0.1144E-02	3.65	0.1311E-03	5.25	0.7582E-07
3.06	0.1107E-02	3.66	0.1261E-03	5.30	0.5772E-07
3.07	0.1070E-02	3.67	0.1212E-03	5.35	0.4384E-07
3.08	0.1035E-02	3.68	0.1166E-03	5.40	0.3321E-07
3.09	0.1001E-02	3.69	0.1121E-03	5.45	0.2510E-07
3.10	0.9676E-03	3.70	0.1077E-03	5.50	0.1892E-07
3.11	0.9354E-03	3.71	0.1036E-03	5.55	0.1423E-07
3.12	0.9042E-03	3.72	0.9956E-04	5.60	0.1067E-07
3.13	0.8740E-03	3.73	0.9569E-04	5.65	0.7986E-08
3.14	0.8447E-03	3.74	0.9196E-04	5.70	0.5959E-08
3.15	0.8163E-03	3.75	0.8837E-04	5.75	0.4436E-08
3.16	0.7888E-03	3.76	0.8491E-04	5.80	0.3293E-08
3.17	0.7622E-03	3.77	0.8157E-04	5.85	0.2438E-08
3.18	0.7363E-03	3.78	0.7836E-04	5.90	0.1800E-08
3.19	0.7113E-03	3.79	0.7527E-04	5.95	0.1325E-08
3.20	0.6871E-03	3.80	0.7230E-04	6.00	0.9716E-09
3.21	0.6636E-03	3.81	0.6943E-04	6.10	0.6220E-09
3.22	0.6409E-03	3.82	0.6667E-04	6.20	0.2778E-09
3.23	0.6189E-03	3.83	0.6402E-04	6.30	0.1463E-09
3.24	0.5976E-03	3.84	0.6147E-04	6.40	0.7636E-10
3.25	0.5770E-03	3.85	0.5901E-04	6.50	0.3945E-10
3.26	0.5570E-03	3.86	0.5664E-04	6.60	0.2018E-10
3.27	0.5377E-03	3.87	0.5437E-04	6.70	0.1023E-10
3.28	0.5190E-03	3.88	0.5218E-04	6.80	0.5130E-11
3.29	0.5009E-03	3.89	0.5007E-04	6.90	0.2549E-11
3.30	0.4834E-03	3.90	0.4804E-04	7.00	0.1254E-11
3.31	0.4664E-03	3.91	0.4610E-04	7.10	0.6107E-12
3.32	0.4500E-03	3.92	0.4422E-04	7.20	0.2946E-12
3.33	0.4342E-03	3.93	0.4242E-04	7.30	0.1407E-12
3.34	0.4189E-03	3.94	0.4069E-04	7.40	0.6654E-13
3.35	0.4040E-03	3.95	0.3902E-04	7.50	0.3116E-13
3.36	0.3897E-03	3.96	0.3742E-04	7.60	0.1445E-13
3.37	0.3758E-03	3.97	0.3588E-04	7.70	0.6636E-14
3.38	0.3624E-03	3.98	0.3441E-04	7.80	0.3017E-14
3.39	0.3494E-03	3.99	0.3298E-04	7.90	0.1359E-14
3.40	0.3369E-03	4.00	0.3162E-04	8.00	0.6056E-15
3.41	0.3248E-03	4.05	0.2557E-04	8.10	0.2673E-15
3.42	0.3131E-03	4.10	0.2062E-04	8.20	0.1169E-15
3.43	0.3017E-03	4.15	0.1659E-04	8.30	0.5058E-16
3.44	0.2908E-03	4.20	0.1332E-04	8.40	0.2167E-16
3.45	0.2802E-03	4.25	0.1067E-04	8.50	0.9197E-17
3.46	0.2700E-03	4.30	0.8524E-05	8.60	0.3864E-17
3.47	0.2602E-03	4.35	0.6794E-05	8.70	0.1608E-17
3.48	0.2507E-03	4.40	0.5402E-05	8.80	0.6623E-18
3.49	0.2415E-03	4.45	0.4285E-05	8.90	0.2701E-18
3.50	0.2326E-03	4.50	0.3391E-05	9.00	0.1091E-18
3.51	0.2240E-03	4.55	0.2677E-05	9.10	0.4363E-19
3.52	0.2157E-03	4.60	0.2108E-05	9.20	0.1728E-19
3.53	0.2077E-03	4.65	0.1656E-05	9.30	0.6773E-20
3.54	0.2000E-03	4.70	0.1298E-05	9.40	0.2629E-20
3.55	0.1926E-03	4.75	0.1015E-05	9.50	0.1011E-20
3.56	0.1854E-03	4.80	0.7914E-06	9.60	0.3847E-21
3.57	0.1784E-03	4.85	0.6156E-06	9.70	0.1450E-21
3.58	0.1717E-03	4.90	0.4780E-06	9.80	0.5408E-22
3.59	0.1653E-03	4.95	0.3701E-06	9.90	0.1998E-22

Tableau normal standard complémentaire [179]

ANNEXE IV

LOIS DE DISTRIBUTION DE DENSITÉ DES PROBABILITÉS

Dans ce qui suit nous présenterons les lois de distribution de densité des probabilités.

IV. 1. Loi normale :

La densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale à une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.dx$$

Ou : μ la moyenne et σ l'écart-type du modèle.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x).dx$$

$$\sigma = \sqrt{E\,[X - E(X)]^2}$$

IV. 2. Distribution log-normale :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$$f_X(x;\lambda_X,\xi_X) = \frac{1}{x\,\xi_X\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\lambda_X}{\xi_X}\right)^2}, \qquad pour \quad x \geq 0$$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x;\lambda_X,\xi_X) = \frac{1}{\xi_X\sqrt{2\pi}}.\int_0^x\frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\lambda_X}{\xi_X}\right)^2}.dx$$

Ou : $\lambda_X = m_{\ln X}$ la moyenne et $\xi_X = \sigma_{\ln X}$ l'écart-type du modèle de distribution normale $\mathcal{N}\left(\lambda_X, {\xi_X}^2\right)$ quand $Y = \ln X$.

$$\begin{cases} \lambda_X = ln\left(\frac{m_X}{\sqrt{1+C_X^2}}\right) \\ \xi_X = \sqrt{ln(1 + C_X^2)} \end{cases} \quad ; \text{Avec : } \; C_X^2 = \frac{\sigma_X}{m_X}$$

IV. 3. Distribution exponentielle :

Cette distribution s'écrit sous la forme :

$F(X) = \lambda \,.\, e^{-\lambda.x}$

Ou : λ : est le paramètre exponentiel de distribution.

La moyenne μ et l'écart-type σ sont reliés de la manière suivante :

$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

IV. 4. Distribution gamma :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$f_X(x;\sigma,\lambda) = \frac{1}{\sigma\,\Gamma(\lambda)} . \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} . e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)}, \qquad avec \quad x \geq 0 \; et \; \sigma, \lambda > 0$

Avec :

$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} . e^{-x} . dx$

Pour $1 \leq \lambda < 2$, $\Gamma(\lambda)$ est donné par la table de la fonction Gamma. Pour les autres valeurs de λ, $\Gamma(\lambda)$ est donnée par la relation de récurrence :

$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1).\Gamma(\lambda - 1)$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x;\sigma,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} . \int_0^x \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} . e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)} . \frac{dx}{\sigma}$$

Ou : σ : est le paramètre d'échelle,
λ : le paramètre de forme.

IV. 5. Loi de Weibull :

La distribution de weibull dépend des paramètres : $\beta, \eta \; et \; \gamma$. Sa densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x;\beta,\eta,\gamma) = \frac{\beta}{\eta}.\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}.e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}} \quad ; \gamma < x \text{ et } 0 < \eta, \gamma$$

Et sa densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale à une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x;\beta,\eta,\gamma) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Ou : β : est le paramètre de forme ;

η : est le paramètre d'échelle ;

γ : est le facteur de position, prit ici égal à 0.

La fonction fiabilité s'écrit :

$$R(x;\beta,\eta,\gamma) = e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(x;\beta,\eta,\gamma) = \frac{\beta}{\eta}.\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

IV. 6. Loi de Gumbel :

X_i est une variable aléatoire de moyenne m_{X_i}, et d'ecart-type σ_{X_i}, X_i suit une loi de Gumbel de paramètres a et b, alors :

$$u_i = \Phi^{-1}\left(\exp\left(-\exp\left(-\frac{x_i - b}{a}\right)\right)\right)$$

Avec :

$m_{X_i} = f\,a + b$ ou f = 0.5772156649 … constante d'Euler-Mascheroni,

$\sigma_{X_i} = \pi \frac{a}{\sqrt{6}}$

Et :

$a = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i}$ et $b = m_{X_i} - f \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i}$

La transformation inverse est donnée par :

$$x_i = b - a\, ln\left(-ln\left(\Phi(\mathrm{u_i})\right)\right)$$

L'expression de la fonction Φ est évaluée numériquement.

ANNEXE V

FONCTIONS DE RÉPARTITIONS

Dans ce qui suit nous présenterons les fonctions de répartitions.

V. 1. Loi normale :

La loi normale équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

Egalité des fonctions de répartition : $\Phi\left(\frac{x_i - m_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i)$

V. 2. Loi log-normale :

La loi log-normale équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

Egalité des fonctions de répartition : $F_{X_i}(x_i) = \Phi\left(\frac{ln\, x_i - \lambda_{X_i}}{\xi_{X_i}}\right)$, avec : $x \geq 0$

X_i est une variable aléatoire log-normale, de moyenne m_{X_i} et d'écart-type σ_{X_i}, alors $ln(X_i)$ suit une loi gaussienne de moyenne λ_{X_i} et d'écart-type ξ_{X_i}, avec :

$$\begin{cases} \lambda_{X_i} = ln\left(\frac{m_{X_i}}{\sqrt{1+c_{X_i}^2}}\right) \\ \xi_{X_i} = \sqrt{ln\left(1 + c_{X_i}^2\right)} \end{cases} \quad ; \text{Avec : } \; c_{X_i}^2 = \frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}}$$

Et la transformation T est alors : $x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{ln(x_i) - \lambda_{X_i}}{\xi_{X_i}}$

V. 3. Loi exponentielle :

La loi exponentielle équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

Egalité des fonctions de répartition : $F_{X_i}(x_i) = \Phi\left(1 - exp\left(-\lambda\,.\,(x - \mu)\right)\right)$,

Avec : $x \in [\mu, +\infty]$

Ou : $\mu = \frac{1}{\lambda}$

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans la recherche du domaine de sécurité des éléments de structure en matériaux composites. Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche fiabiliste. Les événements de l'environnement (champ de forces, action, …) et comportement des matériaux (matrice, inclusions, …) sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste apportée par un dimensionnement mécanique peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure.

Il s'agit d'une part, d'appliquer la méthode d'homogénéisation périodique pour déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées des matériaux composites. L'homogénéisation des matériaux composites est effectuée en deux étapes :

- Homogénéisation du composite (matrice avec inclusions),
- Les caractéristiques du matériau composite homogénéisé étant définies, on effectue une simulation du comportement de matériaux composites élasto-plastiques.

Il s'agit ensuite d'introduire l'endommagement dans le problème de l'homogénéisation, c'est-à-dire ; une fois que les caractéristiques homogénéisées sont appréciées en l'absence de l'endommagement amorcé par les microfissures et micro cavitations, il est alors possible de revenir au problème de localisation par une démarche de « relocalisation » pour analyser les champs locaux et mettre notamment en jeu des critères de rupture ou d'instabilité.

D'autre part, estimer le risque de défaillance des éléments de structures, cela en appliquant une approche probabiliste basée sur le principe du couplage mécano-fiabiliste. Dans cette étude, afin de réaliser le couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, il y a lieu d'utiliser une approche appelée méthode de surface de réponse (MSR) permettant la construction de la fonction d'état limite, ce qui permet grâce à l'utilisation de techniques de fiabilité l'estimation de l'indice de fiabilité, des scénarios et de la probabilité de défaillance.

Nous validons notre formulation et modélisation du modèle mécanique, en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux ou à des solutions analytiques. Nous validons aussi la démarche probabiliste de l'analyse de fiabilité sur les modèles mécaniques étudiés.

Mots clés : Homogénéisation – endommagement – relocalisation – modélisation – non linéarité – composite – probabilité – fiabilité – surface de réponse – probabilité de défaillance.

ABSTRACT

The present study is in the search for the field of safety of structural elements in composite materials. The problem is addressed by the definition of security by a probabilistic threshold: the reliabilistic approach is used. The events of the environment (field of forces, action, …) and behavior of materials (matrix, inclusions, …) are simulated by random and deterministic variables. The objective is to show how a reliable evaluation by a mechanical dimensioning can be obtained. To do this, it is necessary to have a mechanical model and a reliable model correctly representing the behavior of this type of structure.

On the one hand, the method of periodic homogenization is applied in order to determine the homogenized mechanical characteristics of the composite materials. The homogenization of the composite materials is carried out in two stages:

- Homogenization of the composite (matrix with inclusions),
- The characteristics of the homogenized composite material being defined, a simulation of the behavior of elastoplastic composite materials is carried out.

It is then necessary to introduce the damage into the problem of homogenization, that is to say; once the homogenized characteristics are appreciated in the absence of the damage initiated by the microcracks and micro cavitations, it is then possible to return to the localization problem by a "relocation" approach to analyze the local fields and in particular to of the criteria of rupture or instability.

On the other hand, estimate the risk of failure of structural elements, by applying a probabilistic approach based on the principle of coupling mechano-reliability. In this study, in order to realize the coupling between the mechanical model and the reliabilistic model, an approach called the response surface method (MSR) is used, allowing the construction of the limit state function, which allows through the use of reliability techniques, reliability index estimation, scenarios and probability of failure.

We validate our formulation and modeling of the mechanical model by comparing the results of our calculations with experimental results or with analytical solutions. We also validate the probabilistic approach of the reliability analysis on the mechanical models studied.

Key words : Homogenization - damage - relocation - modeling - nonlinearity - composite - probability - reliability - response surface - probability of failure.