N° d'ordre : /**Année-**/

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI
TIZI-OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

MEMOIRE

Présenté par

M^r. BOUDRIOUA MOHAMED SAMIR

Pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse mathématique et applications.

Sujet :

Sur les fonctions génératrices des polynômes

Soutenue publiquement le : 24 Juin 2018
Devant le jury composé de :

M^{me}. Fazia	BEDOUHENE	Professeur	UMMTO	Président
M^{r}. Mouloud	GOUBI	MCB	UMMTO	Encadreur
M^{r}. Hacène	BELBACHIR	Professeur	USTHB	Examinateur
M^{r}. Omar	MELLAH	MCB	UMMTO	Examinateur
M^{r}. Jean-Philippe	DUBERNARD	MC	Université de Rouen	Examinateur

Table des matières

Introduction

Abstract. In this work, we are interested in a particular family of functions that admit an expansion series form and generate numbers and polynomials. These functions are called generating functions, they take an important place in discrete mathematics.

Dans ce travail on s'intéresse à une famille particulière de fonctions développables en séries entières, qui génèrent des nombres et des polynômes.

Ces fonctions se dénomment fonctions génératrices, elles constituent une branche importante des mathématiques discrètes.
Par exemple la fonction $f(t) = \exp(t)$ génère la suite de nombres $a_n = 1$ car on a :

$$\exp(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Notre étude se focalise essentiellement sur la famille

$$f(a; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t) = \frac{t^a}{1 + \alpha_1 x^k t + \alpha_2 x^m t^2} = \sum_{j \geq 0} M_j(a; x; \alpha_1, \alpha_2; k, m) t^j$$

où $a, k, m \in \{0, 1\}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \{-1, 1\}$.
Cette famille génère les polynômes $M_j(a; x; \alpha_1, \alpha_2; k, m)$. Dans le but de trouver la forme explicite de ces polynômes, on s'inspire de l'article Generating Functions For Two-Variable Polynomials Related To a Family of Fibonacci Type Polynomials and Numbers [8] de G. Ozdemir et Y. Simsek paru en 2016.

Dans le premier chapitre on rappelle quelques notions de base sur les séries numériques, suites et séries de fonctions et les séries entières.

Ensuite dans le chapitre 2, on développe la notion d'une fonction génératrice à une seule variable qui génère des nombres, et une fonction génératrice à deux variables qui génère des polynômes. Enfin on termine le chapitre par l'étude de la fonction $f(a; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t)$ oú on pose la problématique de notre travail.

Dans le troisième chapitre on revisite l'exemple des nombres et des polynômes de Catalan, dans l'esprit d'écrire leur fonction génératrice et de donner quelques propriétés classiques.

Dans le quatrième chapitre on développe dans la mesure du possible les célèbres nombres et polynômes de Fibonacci, illustre mathématicien qui a fait ses études à Bougie.

Le chapitre 5 est consacré à l'étude des polynômes $M_j(a;x;\alpha_1,\alpha_2;k,m)$ afin de dégager leur formule explicite, qui nous permet de trouver les 8 suites de nombres et les 24 polynômes générés par la fonction $f(a;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$. En particulier, on déduit facilement les formules explicites des polynômes de Catalan, de Fibonacci et de Jacobsthal.

On termine ce travail par un chapitre sur une autre famille de nombres et de polynômes qui sont les nombres et polynômes de Bernoulli. Ce type de polynômes admet une fonction génératrice exponentielle différente de la fonction génératrice des Catalans qui est en fait une fonction rationnelle.

Chapitre 1

Rappel sur les séries et techniques de calculs

1.1 Séries numériques

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à chaque entier naturel n on associe un nombre u_n. u_n est par défintion le terme général de cette suite.

A chaque suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut associer la suite des sommes partielles S_n donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La nature de cette suite en matière de convergence nous conduit à l'étude des séries numériques.

Définition 1.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série numérique de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

On note cette série par $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

On dit que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ s'appelle la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

En général on ne sait pas calculer S_n sous sa forme explicite. Heureusement il y a d'autre moyens pour décider sur la convergence de la série numérique.

1.1.1 Quelques critères de convergence

Hormis le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ conduit à la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, on a d'autres critères de convergence. Au long de cette section (sauf indication contraire), $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série numérique à termes strictement positifs.

Critère de d'Alembert

On pose $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

— Si $l < 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

— Si $l > 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Et si $l = 1$ on ne peut rien dire.

Critère de Cauchy

On pose $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

— Si $l < 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

— Si $l > 1$ alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

— Si $l = 1$ on ne peut rien dire.

Critère de Riemann

On rappelle que le terme général de la série de Riemann est

$$v_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, ainsi on a le critère de Riemann qui stipule que

— S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $n^\alpha u_n$ soit majorée par une constante $M > 0$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

— S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $n^\alpha u_n$ soit minorée par une constante $m > 0$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Si maintenant la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes quelconques. Elle est dite absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente. Et toute série absolument convergente est convergente.

Critère d'Abel

Si $u_n = a_n b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée et b_n est une suite à termes positifs décroissante converge vers 0.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Critère de Leibniz

Si $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$, La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$ est dite série alternée. Si on a de plus

— $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

alors la série en question est convergente.

1.2 Suites et séries de fonctions

1.2.1 Suites de fonctions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $\mathcal{I}$ est une fonction de $(\mathcal{I}, \mathbb{N})$ dans $\mathbb{K}$ qui fait correspondre à tout couple (t, n) le nombre $f_n(t)$.

Convergence simple

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathcal{I}$ vers la fonction f, si on a

$$\forall t \in \mathcal{I}, \ \lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

Convergence uniforme

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathcal{I}$ vers la fonction f. Si on a

$$\forall t \in \mathcal{I}, \exists N_0 \in \mathbb{N}^* \ tq. \ \forall n \geq N_0, \ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathcal{I}} |f_n(t) - f(t)| = 0.$$

Le critère de Cauchy uniforme

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniforme de Cauchy sur $\mathcal{I}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0, \ \forall n \geq N_0, \ \forall m \geq N_0, \ \sup_{t\in\mathcal{I}} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.2. *Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite uniforme de Cauchy sur $\mathcal{I}$, alors elle est uniformément convergente sur $\mathcal{I}$.*

1.2.2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $\mathcal{I}$, alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est appelée série de fonctions.

Convergence normale

En plus de la convergence simple et uniforme, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est dite normalement convergente sur $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, si la série numérique (quand elle existe) $\sum_{n\geq 0} \sup_{t\in\mathcal{I}} |f_n(t)|$ est convergente.

Ainsi toute série normalement convergente est automatiquement uniformément et simplement convergente.

Lien avec les intégrales

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ converge uniformément sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right)$ est convergente et on a

$$\sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n(t)dt\right).$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tel que

— la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ converge simplement sur $\mathcal{I}$,

— la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n'(t)$ converge uniformément sur $\mathcal{I}$.

Alors on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'.$$

1.3 Fonctions analytiques

1.3.1 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique.

En revanche il existe souvent un unique nombre réel $R \geq 0$ tel que

— $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument dans $]-R,R[$,

— $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ diverge si $|x| > R$,

R est appelé le rayon de convergence. En fait R se calcule grâce à la formule de Hadamard suivante

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[-n]{|a_n|}.$$

1.3.2 Opérations sur les séries entières

Soient $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2. On pose R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) t^n$. Alors

— Si $R_1 \neq R_2$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) t^n$ est $R = \min(R_1, R_2)$.

— Si $R_1 = R_2$, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) t^n$ est $R \geq R_1$.

Dans le cas de convergence on obtient

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) t^n = \sum_{n\geq 0} a_n t^n + \sum_{n\geq 0} b_n t^n.$$

Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n t^n$ est donné par

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} b_n t^n \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) t^n.$$

Ainsi son rayon de convergence est $R = min(R_1, R_2)$ comme pour la somme.

1.3.3 Développement en séries entières

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage V de t_0. On dit que f est développable en série entière au point t_0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ de rayon de convergence non nul tel que

$$\forall t \in V, \quad f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n (t - t_0)^n.$$

Et sa série de Taylor est de la forme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (t - t_0)^n.$$

Dans le cas particulier $t_0 = 0$ on obtient la série de Mac Laurin.

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

La fonction f devient analytique sur l'ouvert $U \subset \mathbb{C}$ si elle est développable en série entière en tout point de U.

La série entière est un cas particulier des séries de Laurent qui ont pour forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t^k.$$

Ainsi la série de Laurent de f en t_0 prend la forme suivante

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (t - t_0)^k.$$

Pour plus de détails sur les séries on se réfère à [4]

Chapitre 2

Fonctions génératrices et Problématique

2.1 Introduction

Soit f une fonction développable en série entière sur l'intervalle $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Définition 2.1. *f est dite fonction génératrice de la suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle s'écrit en général sous l'une de ces deux formes*

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \ , \ f(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n, \ |t| < R. \tag{2.1.1}$$

Exemple 2.2. *On a*

$$\exp(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors $f(t)$ est une fonction génératrice de la suite constante $a_n = 1$.

Définition 2.3. *f est dite fonction génératrice de la suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle s'écrit en général sous l'une des deux formes suivantes :*

$$f(x,t) = \sum_{n\geq 0} A_n(x) t^n \ , \ f(x,t) = \sum_{n\geq 0} \frac{A_n(x)}{n!} t^n, \ |t| < R. \tag{2.1.2}$$

Remarque 2.4. *Les séries définies ci-dessus sont des séries formelles, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de déterminer le rayon de convergence R de chaque série entière.*

2.2 Quelques propriétés de la fonction génératrice

Soit $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ la fonction génératrice de la suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant les propriétés de f en matière d'intégrabilité et de dérivabilité en tant que série entière, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.5.

2.2. Quelques propriétés de la fonction génératrice

1. $f^{'}$ est la fonction génératrice de la suite de nombres $b_n = (n+1)a_{n+1}$,

2. $\int f$ est la fonction génératrice de la suite de nombres $c_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$, $\forall n \geq 1$ et c_0 un nombre quelconque.

Démonstration de la proposition. .

1.
$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + ... + a_n t^n + ...$$

Alors

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + ... \\ &= \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} t^n . \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int f(t)\mathrm{dt} &= \int \left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n \right) \mathrm{dt} = \sum_{n\geq 0} \int a_n t^n \mathrm{dt} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + c_0, \\ &= c_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} t^n = \sum_{n\geq 0} c_n t^n . \end{aligned}$$

On sait que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n t^n = \sum_{n\geq 0} \beta_n t^n$,si et seulement si $\alpha_n = \beta_n$. Alors c_0 est un nombre quelconque et $c_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$, $\forall n \geq 1$.

Toute relation entre f et sa dérivée ou son intégrale induit automatiquement une relation de récurrence sur les termes de la suite des nombres générée par cette fonction.

Le célèbre exemple est le cas $f^{'}$ est une fonction linéaire de f c'est à dire il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que : $f^{'}(t) = \alpha f(t) + \beta, \ \forall t \in \mathcal{I}$.

Proposition 2.6. *Soit f une fonction génératrice de la suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la dérivée $f^{'}(t) = \alpha f(t) + \beta$ alors*

$$a_1 = \alpha a_0 + \beta, \ \text{avec } a_0 = f(0), \tag{2.2.3}$$

et

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{n!} a_1, \ \forall n \geq 2. \tag{2.2.4}$$

Démonstration de la proposition. . $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *et d'aprés la proposition 2.5 on aura*

$$f^{'}(t) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n.$$

Comme $f'(t) = \alpha f(t) + \beta$, *alors*

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n = \alpha\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right) + \beta = \alpha a_0 + \beta + \sum_{n\geq 1}\alpha a_n t^n.$$

D'ou : $a_1 = \alpha a_0 + \beta$.

Et $\forall n \geq 1$ *on a :* $(n+1)a_{n+1} = \alpha a_n$.

Ainsi : $a_{n+1} = \dfrac{\alpha}{n+1}a_n$.

Alors

$$a_2 = \frac{\alpha}{2}a_1, a_3 = \frac{\alpha}{3}a_2 = \frac{\alpha}{3}\frac{\alpha}{2}a_1 = \frac{\alpha^2}{3!}a_1.$$

On remarque que : $a_n = \dfrac{\alpha^{n-1}}{n!}a_1,\ \forall n \geq 2$ *, pour être assuré on le démontre par récurrence.*
On suppose que : $a_n = \dfrac{\alpha^{n-1}}{n!}a_1$.
Comme $a_{n+1} = \dfrac{\alpha}{n+1}a_n$, *alors*

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{n+1}\frac{\alpha^{n-1}}{n!}a_1 = \frac{\alpha^n}{(n+1)!}a_1.$$

2.3 Problème inverse

Soit la suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ générée par la fonction f. Toute récurrence satisfaite par a_n nous permet de trouver une formule explicite de la fonction f.

Proposition 2.7. *Si la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait la récurrence suivante*

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*,\ \text{et } n \in \mathbb{N}^*$$

Alors

$$f(t) = \frac{a_0 + (\beta - a_0)t}{(1-t)(\alpha t - 1)},\ |t| < 1. \tag{2.3.5}$$

Démonstration de la proposition. . La fonction f *s'écrit sous la forme* $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$. *Alors*

$$tf(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^{n+1} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1}t^n.$$

On a

$$tf(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n - \beta}{\alpha} t^n = \frac{1}{\alpha} \sum_{n\geq 1} a_n t^n - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{n\geq 1} t^n.$$

On suppose que $|t| < 1$ *et dans ce cas on obtient*

$$tf(t) = \frac{1}{\alpha}\left(f(t) - a_0\right) - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right).$$

Ainsi

$$\left(t - \frac{1}{\alpha}\right) f(t) = \frac{-a_0}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{t}{1-t},$$

et

$$f(t) = -\frac{\dfrac{a_0}{\alpha} + \dfrac{\beta t}{\alpha(1-t)}}{\dfrac{\alpha t - 1}{\alpha}} = \frac{a_0 + \dfrac{\beta t}{1-t}}{\alpha t - 1}.$$

Et le résultat 2.3.5 découle.

2.4 Problématique

Dans ce travail on s'intéresse à la fonction spéciale

$$f(a; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t) = \frac{t^a}{1 + \alpha_1 x^k t + \alpha_2 x^m t^2}, \quad |t| < 1. \tag{2.4.6}$$

où $a, k, m \in \{0, 1\}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \{-1, 1\}$.

Remarque 2.8.

— $f(0; -1, 1; 0, 1; x, t) = \dfrac{1}{1 - t + xt^2}$ *: génère les polynômes de Catalan qui sont étudiés dans le chapitre* 3.

— $f(1; -1, -1; 0, 0; x, t) = \dfrac{t}{1 - t - t^2}$ *: génère les nombres de Fibonacci qui sont étudiés dans le chapitre* 4.

— $f(1; -1, -1; 0, 1; x, t) = \dfrac{t}{1 - t - xt^2}$ *: génère les polynômes de Jacobsthal [8].*

Suivant les valeurs de a, α_1, α_2, k et m on comptabilise 32 fonctions génératrices de suites de nombres ou de polynômes.

Pour $k = m = 0$ on obtient seulement des fonctions génératrices de nombres. Alors au total il y a 8 fonctions génératrices de nombres et 24 de polynômes

Remarque 2.9.

$$f(a; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t) = t^a f(0; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t).$$

En effet

$$f(0; \alpha_1, \alpha_2; k, m; x, t) = \frac{1}{1 + \alpha_1 x^k t + \alpha_2 x^m t^2},$$

et

$$f(1;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)=\frac{t}{1+\alpha_1x^kt+\alpha_2x^mt^2}.$$

Ainsi on obtient le résultat désiré.

Pour simplifier les calculs on note $f(0;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)=f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$, en tant que fonction génératrice f s'écrit

$$f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)=\sum_{j\geq 0}M_j(x;\alpha_1,\alpha_2;k,m)t^j.$$

La question posée : Quelle est la forme explicite des polynômes $M_j(x;\alpha_1,\alpha_2;k,m)$?

Les éléments de la réponse sont dans le Théorème 2.2 de l'article **Generating Functions For Two-Variable Polynomials Related To a Family of Fibonacci Type Polynomials and Numbers** [8] de G. Ozdemir et Y. Simsek paru en 2016.

Une fois la réponse obtenue, on trouve la forme explicite de tous les 24 polynômes et les 8 suites de nombres, en particulier la forme binomiale des polynômes de Catalan, des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Jacobsthal est immédiate.

La fonction

$$f:=f(0;-1,0,0,m;x,t)=\frac{1}{1-t},$$

est liée indirectement aux nombres et polynômes de Bernoulli par les relations suivantes

$$tf(e^t)=-b(t)=-\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

Et

$$te^{tx}f(e^t)=-b(x,t)=-\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

Ces polynômes sont l'objet de dernier chapitre.

Chapitre 3

Nombres et polynômes de Catalan

3.1 Nombres de Catalan

Les nombres de Catalan sont les entiers de la forme

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \tag{3.1.1}$$

$\binom{n}{k}$ est la combinaison de k éléments parmi n éléments. Elle est obtenue grâce à la relation suivante

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Les premières valeurs des nombres de Catalan sont données par le tableau suivant

Table 3.1 – Les premières valeurs des nombres de Catalan

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

Les nombres de Catalan peuvent être représentés sous une forme intégrale. Plus précisément on a l'expression suivante

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{\frac{4-x}{x}}x^n dx.$$

La démonstration est donnée dans le Théorème 1 [11].

Dans cette partie, on construit leurs fonctions génératrices, ainsi qu'on donne quelques propriétés de base des nombres de Catalan.

On sait que le développement limité de la fonction $(1+t)^\alpha$ pour $|t|<1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ est

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix}\alpha\\ n\end{bmatrix} t^n,$$

où

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ n\end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} & \text{si } n\in\mathbb{N}^*,\\ 1 & \text{si } n=0.\end{cases}$$

Lemme 3.1.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} C_{n-1}. \tag{3.1.2}$$

Démonstration. . On a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix} &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1).....(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\
&= \frac{1(1-2)....(1-2(n-1))}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}.1.3....(2(n-1)-1)}{2^n n!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2(n-1))!}{2^n 2^{n-1} n!(n-1)!} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(2(n-1))!}{2^{2n-1} n((n-1)!)^2} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.
\end{aligned}$$

Et le résultat 3.1.2 découle.

3.1.1 Fonction génératrice

Théorème 3.2. *La fonction génératrice des nombres de Catalan est :*

$$f(t) = \frac{1-(1-4t)^{\frac{1}{2}}}{2t} \ , \ |t| < \frac{1}{4}. \tag{3.1.3}$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned}
(1-4t)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix} (-4t)^n, \ |t| < \frac{1}{4} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} C_{n-1} 2^{2n} t^n (-1)^n \\
&= 1 - 2\sum_{n\geq 1} C_{n-1} t^n.
\end{aligned}$$

Alors :

$$1-(1-4t)^{\frac{1}{2}} = 2\sum_{n\geq 1} C_{n-1} t^n.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1-(1-4t)^{\frac{1}{2}}}{2t} &= \sum_{n\geq 1} C_{n-1} t^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} C_n t^n.
\end{aligned}$$

3.1.2 Quelques propriétés des nombres de Catalan

Théorème 3.3.

$$C_0 = 1,\ C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}. \tag{3.1.4}$$

Démonstration. . On a

$$\sqrt{1-4t} = 1 - 2tf(t).$$

Alors

$$1 - 4t = (1 - 2tf(t))^2 = 1 - 4tf(t) + 4t^2 f^2(t).$$

Ainsi

$$4t^2 f^2(t) = 1 - 4t - (1 - 4tf(t)) = 4tf(t) - 4t.$$

D'oú

$$\begin{aligned} f^2(t) &= \frac{f(t)-1}{t} \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0} C_n t^n = \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1} C_n t^n \\ &= \sum_{n\geq 1} C_n t^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} C_{n+1} t^n. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f^2(t) &= f(t)f(t) \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} C_n t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} C_n t^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) t^n. \end{aligned}$$

Après identifiction on obtient :

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

Le lien entre deux termes consécutifs de la suite des nombres de Catalan est donné par la proposition suivante

Proposition 3.4.

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n. \tag{3.1.5}$$

Pour plus de détails sur les propriétés des nombres de Catalan on se réfère à [12, 9].

Démonstration de la proposition. . On a

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \\ &= \frac{4n+2}{n+2}\frac{(n+1)(2n)!}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{4n+2}{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{2n!}{n!n!}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2}C_n.$$

3.1.3 Exemple de séries numériques convergentes

Grâce à la fonction génératrice des nombres de Catalan, on obtient

$$\sum_{n\geq 1}\frac{C_n}{2^{3n-1}} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}. \tag{3.1.6}$$

La preuve consiste à utiliser

$$\frac{1-(1-4t)^{\frac{1}{2}}}{2t} = \sum_{n\geq 0} C_n t^n.$$

Comme

$$f(\frac{1}{8}) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{C_n}{2^{3n}} = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Aprés simplification on obtient le résultat 3.1.6 désiré.

3.1.4 Polynômes de Catalan

La classe des polynômes de Catalan $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la récurrence suivante [5, 13] :

$$P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) - xP_n(x) \quad \text{avec} \quad P_0(x) = P_1(x) = 1. \tag{3.1.7}$$

3.1.5 Fonction génératrice des polynômes de Catalan

Théorème 3.5. *La fonction génératrice des polynômes de Catalan est donnée par*

$$f(x,t) = \frac{1}{1-t+xt^2}. \tag{3.1.8}$$

Démonstration. . On cherche la fonction à deux variables $f(x,t)$ tel que $f(x,t) = \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n$

$$\begin{aligned} x\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n &= \sum_{n\geq 0}(P_{n+1}(x) - P_{n+2}(x))t^n = \sum_{n\geq 0} P_{n+1}(x)t^n - \sum_{n\geq 0} P_{n+2}(x)t^n \\ &= \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0} P_{n+1}(x)t^{n+1} - \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 0} P_{n+2}(x)t^{n+2} \\ &= \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1} P_n(x)t^n - \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 2} P_n(x)t^n. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} xf(x,t) &= \frac{1}{t}\left(f(x,t) - 1\right) - \frac{1}{t^2}\left(f(t) - 1 - t\right), \\ \left(x - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) f(x,t) &= \frac{-1}{t} + \frac{1+t}{t^2}, \\ \frac{xt^2 - t + 1}{t^2} f(x,t) &= \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$f(x,t) = \frac{1}{1 - t + xt^2}.$$

3.1.6 Formule de Binet

De la relation de récurrence $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) - xP_n(x)$ on obtient l'équation caractéristique des polynômes de Catalan $y^2 - y + x = 0$ qui admet pour solutions :

$$\alpha_1(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \quad , \quad \alpha_2(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Théorème 3.6.

$$P_n(x) = \frac{\alpha_1^n(x) - \alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \ , \ \forall n \geq 1. \quad (\textit{Formule de Binet}). \tag{3.1.9}$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) - P_{n+2}(x) &= \frac{\alpha_1^{n+1}(x) - \alpha_2^{n+1}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} - \frac{\alpha_1^{n+2}(x) - \alpha_2^{n+2}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \\ &= \frac{\alpha_1^{n+1}(x) + \alpha_2^{n+2}(x) - \alpha_1^{n+2}(x) - \alpha_2^{n+1}(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)} \\ &= \frac{\alpha_1^n(x)(\alpha_1(x) - \alpha_1^2(x)) - \alpha_2^n(x)(\alpha_2(x) - \alpha_2^2(x))}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) - \alpha_1^2(x) &= \alpha_1(x)(1 - \alpha_1(x)) \\ &= \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - (1-4x)\right) = x. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\alpha_2(x) - \alpha_2^2(x) &= \alpha_2(x)\left(1 - \alpha_2\left(x\right)\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \\ &= \alpha_1(x) - \alpha_1^2(x) = x.\end{aligned}$$

Enfin :

$$P_{n+1}(x) - P_{n+2}\left(x\right) = x\frac{\alpha_1^n\left(x\right) - \alpha_2^n\left(x\right)}{\alpha_1\left(x\right) - \alpha_2\left(x\right)} = xP_n\left(x\right).$$

Corollaire 3.7.

$$P_n\left(x\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4x}\right)^n\right). \tag{3.1.10}$$

Démonstration. . Comme

$$\alpha_1\left(x\right) - \alpha_2\left(x\right) = \sqrt{1-4x}.$$

Alors

$$P_n\left(x\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{1-4x}}\left(\left(1+\sqrt{1-4x}\right)^n - \left(1-\sqrt{1-4x}\right)^n\right).$$

3.1.7 Formule explicite des polynômes de Catalan

Proposition 3.8.

$$P_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-k}{k}\left(-x\right)^k. \tag{3.1.11}$$

Pour démontrer la proposition on rappelle le lien entre les dérivées successives de $f\left(x,t\right)$ par rapport à t et les coefficients de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P_n\left(x\right)t^n$:

$$\frac{\partial^n f\left(x,0\right)}{\partial t^n} = n!P_n(x),$$

qui est simple à démontrer. Pour obtenir le résultat 3.1.11 Proposition 3.8 on procède par récurrence.

$$f\left(x,0\right) = 1 \text{ alors } P_0(x) = 1,$$

$$\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t} = \frac{1-2xt}{1-t+xt^2},$$

D'oú

$$\frac{\partial f\left(x,0\right)}{\partial t} = 1 \text{ et } P_1(x) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial t^2} = \frac{2}{\left(1-t+xt^2\right)^2}\left(-x + \frac{\left(1-2xt\right)^2}{1-t+xt^2}\right),$$

Alors

$$\frac{\partial^2 f\left(x,0\right)}{\partial t^2} = 2\left(-x+1\right), \text{ et } P_2(x) = 1-x.$$

Ainsi on remarque que : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-x)^k$ pour $n = 0, 1$, et $n = 2$.

On suppose que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-x)^k, \\ P_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k} (-x)^k. \end{aligned}$$

Et on montre que : $P_{n+2}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \binom{n+2-k}{k} (-x)^k$.

Pour simplifier les calculs, on suppose en premier que n est pair c'est à dire $n = 2m$, et on aura :

$$\begin{aligned} P_{2m+2}(x) &= P_{2m+1}(x) - xP_{2m}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} (-x)^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{2m+1-k}{k-1} (-x)^k \\ &= 1 + (-x)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{2m+1-k}{k} + \binom{2m+1-k}{k-1} \right) (-x)^k. \end{aligned}$$

On sait que ([1] p.10)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

alors :

$$\begin{aligned} P_{2m+2}(x) &= 1 + (-x)^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{2(m+1)-k}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{2(m+1)-k}{k} (-x)^k. \end{aligned}$$

Et enfin :

$$P_{n+2}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+2}{2}\right]} \binom{n+2-k}{k} (-x)^k.$$

De la même manière on obtient le résultat similaire pour n impair.

Remarque 3.9. *Comme on peut tirer ce résultat de la formule 3.1.10 Corollaire 3.7.*

3.2 Equation aux dérivées partielles

Soit $h(x,t)$ une fonction à deux variables développable en série entière sur un intervalle $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$, dans le sens suivant $h(x,t) = \sum_{n\geq 0} Q_n(x)t^n$. Il est connu que les dérivées partielles sont aussi des séries c'est à dire

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \sum_{n\geq 0}(n+1)Q_{n+1}(x)t^n,$$

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} Q'_n(x)t^n.$$

Dans ce qui suit on démontre ce résultat pour la fonction $f(x,t)$ concernant sa dérivée partielle par rapport à x.

Lemme 3.10.

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^n. \tag{3.2.12}$$

Démonstration. D'aprés la récurrence 3.1.7 qui définit les polynômes de Catalan

$$P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) - xP_n(x).$$

On déduit que

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n+2}(x) - xP'_n(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n &= \sum_{n\geq 0}\left(P'_{n+1}(x) - P'_{n+2}(x) - xP'_n(x)\right)t^n \\
&= \sum_{n\geq 0} P'_{n+1}(x)t^n - \sum_{n\geq 0} P'_{n+2}(x)t^n - \sum_{n\geq 0} xP'_n(x)t^n \\
&= \sum_{n\geq 1} P'_n(x)t^{n-1} - \sum_{n\geq 2} P'_n(x)t^{n-2} - \sum_{n\geq 0} xP'_n(x)t^n.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x,t) = \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1} P'_n(x)t^n - \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 2} P'_n(x)t^n - \sum_{n\geq 0} xP'_n(x)t^n.$$

Posons $S(x,t) = \sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^n$,

on aura

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \frac{1}{t}\left(S(x,t) - P'_0(x)\right) - \frac{1}{t^2}\left(S(x,t) - P'_0(x) - P'_1(x)t\right) - xS(x,t) \\
&= \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - x\right) S(x,t) \\
&= \frac{t-1-xt^2}{t^2} S(x,t).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} S(x,t) &= \frac{t^2}{t-1-xt^2} f(x,t) \\ &= \frac{t^2}{t-1-xt^2} \frac{1}{1-t+xt^2} \\ &= \frac{-t^2}{\left(1-t+xt^2\right)^2} \\ &= \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Enfin

$$\sum_{n\geq 0} P_n'(x) t^n = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}.$$

$\square$

Une fois on est assuré que la fonction génératrice de $P_n'(x)$ est $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ainsi l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction $f(x,t)$ est obtenue grâce à la proposition suivante

Proposition 3.11.

$$(2xt-1)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = t^2 \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}. \tag{3.2.13}$$

Démonstration de la proposition. . On a

$$f(x,t) = \frac{1}{1-t+xt^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} &= -\left(1-t+xt^2\right)^{-2} t^2 \\ &= \frac{-t^2}{\left(1-t+xt^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} &= -\left(1-t+xt^2\right)^{-2} (-1+2xt) \\ &= \frac{1-2xt}{(1-t+xt^2)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{t^2}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2xt-1}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}.$$

Et après linéarisation on obtient le résultat 3.2.13 voulu.

Chapitre 4

Nombres et Polynômes de Fibonacci

4.1 Nombres de Fibonacci

La suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , \ \forall n \geq 0 \ \text{ avec } \ F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1. \tag{4.1.1}$$

Les premiers termes de la suite de Fibonacci jusqu'à F_{13} sont donnés par le tableau suivant :

TABLE 4.1 – Les premières valeurs des nombres de Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

En général les nombres de Fibonacci à valeurs négatives ne sont pas étudiés bien que la formule de récurrence les définisse. Ils sont exprimés par la formule suivante :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

La formule explicite est établie par le théorème suivant [6]

Théorème 4.1. *(Formule de Binet)*

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}, \ \forall n \geq 0. \tag{4.1.2}$$

Démonstration. D'après la relation de récurrence 4.1.1, l'équation caractéristique est $y^2 - y - 1 = 0$ qui admet pour solutions :

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

De la même manière que pour les polynômes de Catalan $P_n(x)$ on obtient :

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Et après simplification on obtient le résultat 4.1.2 désiré.

□

4.2 Lien avec le nombre d'or

4.2.1 Le nombre d'or

Définition 4.2. *Le nombre rationnel positif* $\frac{a}{b}$ *est un nombre d'or si on a* $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Si on pose $\alpha = \frac{a}{b}$ un nombre d'or alors

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Donc α satisfait l'équation $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Cette équation admet pour solutions

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc le seul nombre d'or existant est α_1, dans la littérature on le note toujours par le symbol φ.

4.2.2 Quelques propriétés du nombre d'or

Quelques propriétés élémentaires du nombre d'or (sans démonstration) sont illustrées dans le lemme suivant

Lemme 4.3.

1. $\alpha_1\alpha_2 = -1$,

2. $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \sqrt{5}$,

3. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 3$.

La proposition suivante établit l'expression des nombres de Fibonacci en fonction du nombre d'or α_1.

Proposition 4.4.

$$F_n = \frac{\alpha_1^{2n} + 1}{\alpha_1^n \sqrt{5}}. \tag{4.2.3}$$

Démonstration de la proposition. . On a

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha_1^n - \alpha_2^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha_1^n + \frac{1}{\alpha_1^n} \right) \\ &= \frac{\alpha_1^{2n} + 1}{\alpha_1^n \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Proposition 4.5.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha_1. \tag{4.2.4}$$

Démonstration de la proposition. .

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_1^{2n+2}+1}{\alpha_1^{n+1}\sqrt{5}} \frac{\alpha_1^{n}\sqrt{5}}{\alpha_1^{2n}+1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1^{2n+2}+1}{\alpha_1\left(\alpha_1^{2n}+1\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1^{2n+2}}{\alpha_1^{2n+1}} \\
&= \alpha_1.
\end{aligned}
$$

Remarque 4.6. *On sait que les $F_n \geq 0$ et $\alpha_1 > 1$, alors d'après le critère de d'Alembert et l'équation 4.2.4 Proposition 4.5, on déduit que la série numérique*

$$\sum_{n\geq 0} F_n,$$

est divergente.

4.3 Ecriture binomiale des nombres de Fibonacci

Théorème 4.7.

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} 5^k. \tag{4.3.5}$$

Démonstration. . Pour montrer le résultat on utilise le lemme suivant

Lemme 4.8.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{4.3.6}$$

Démonstration. Le résultat est facile à obtenir il suffit d'utiliser le raisonnement par récurrence. □

Ainsi

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

D'où :

$$2^n\sqrt{5}F_n = \left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n.$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
2^n\sqrt{5}F_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{5}\right)^k \left(1-(-1)^k\right) \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\sqrt{5}\right)^{2k+1} \binom{n}{2k+1} \\
&= 2\sqrt{5} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 5^k \binom{n}{2k+1}.
\end{aligned}
$$

Enfin :

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 5^k \binom{n}{2k+1}.$$

Remarque 4.9. *Les nombres de Fibonacci peuvent être écrits sous forme matricielle comme dans [7]. En prenant* $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $\forall n \geq 1$, *la puissance n-ième de cette matrice est une matrice dont les coeficients sont des nombres de Fibonacci. Plus exactement, on a*

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Cette écriture nous permet de trouver la célèbre identité de Cassini

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Pour la preuve il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} &= \det(Q^n) = (\det Q)^n \\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right)^n = (-1)^n. \end{aligned}$$

4.4 Fonction génératrice

Proposition 4.10. *La suite des nombres de Fibonacci est générée par la fonction :*

$$f(t) = \frac{t}{1-t-t^2}. \tag{4.4.7}$$

Démonstration de la proposition. .

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n\geq 0} F_n t^n = \sum_{n\geq 0} (F_{n+2} - F_{n+1}) t^n \\ &= \sum_{n\geq 0} F_{n+2} t^n - \sum_{n\geq 0} F_{n+1} t^n \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{n\geq 0} F_{n+2} t^{n+2} - \frac{1}{t} \sum_{n\geq 0} F_{n+1} t^{n+1} \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{n\geq 2} F_n t^n - \frac{1}{t} \sum_{n\geq 1} F_n t^n \\ &= \frac{1}{t^2} (f(t) - t) - \frac{1}{t} f(t) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) f(t) &= \frac{-1}{t}, \\ \frac{t^2+t-1}{t^2} f(t) &= \frac{-1}{t}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$f(t) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

4.5 Application de la fonction génératrice à la convergence des séries numériques

Cette section est consacrée au calcul de la somme d'une série numérique, ainsi que sa nature sans passer par les critères de convergence connus dans le module d'analyse en deuxième année.

Lemme 4.11. *La série entière* $\sum_{n\geq 0} F_n t^n$ *admet pour rayon de convergence* $R = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ *et son domaine de convergence est* $\left]-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}, \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right[$.

Démonstration. On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha_1.$$

Donc d'après la règle de d'Alembert le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} F_n t^n$ est donné par

$$R = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

Il est facile de remarquer que la série en question est divergente pour $t = \pm\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$. Ainsi son domaine de convergence est $\left]-\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}, \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right[$. □

Avec ce lemme on peut décider sur la convergence de certaines séries numériques. En particulier on obtient la proposition suivante ([8] Remarque 4.2 p. 975).

Proposition 4.12.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{F_n}{2^n} = 2. \tag{4.5.8}$$

Démonstration de la proposition. . On a d'un côté

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

Et d'un autre côté

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{F_n}{2^n}.$$

Et le résultat 4.5.8 découle.

4.6 Polynômes de Fibonacci

Définition 4.13. *La suite des polynômes de Fibonacci* $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par la relation de récurrence suivante [14] :*

$$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x)\ ,\ \forall n \geq 0 \quad avec \quad F_0(x) = 0\ ,\ F_1(x) = 1. \tag{4.6.9}$$

Les premiers termes des polynômes de Fibonacci sont donnés par le tableau suivant

Table 4.2 – Les premiers termes des polynômes de Fibonacci.

n	$F_n(x)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+1
4	x^3+2x
5	x^4+3x^2+1
6	x^5+4x^2+3x
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$

Proposition 4.14. *La fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est :*

$$f(x,t) = \frac{t}{1-xt-t^2}. \tag{4.6.10}$$

Démonstration de la proposition. .

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n = \sum_{n\geq 0} \left(F_{n+2}(x) - xF_{n+1}(x)\right) t^n \\ &= \sum_{n\geq 0} F_{n+2}(x)t^n - x\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^n \\ &= \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 0} F_{n+2}(x)t^{n+2} - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^{n+1} \\ &= \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 2} F_n(x)t^n - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 1} F_n(x)t^n \\ &= \frac{1}{t^2}\left(f(x,t)-t\right) - \frac{x}{t}f(x,t). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{1}{t^2}-\frac{x}{t}\right) f(x,t) &= \frac{-1}{t}, \\ \frac{t^2+xt-1}{t^2} f(x,t) &= \frac{-1}{t}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$f(x,t) = \frac{t}{1-xt-t^2}.$$

4.7 Formule de Binet

L'équation caractéristique des polynômes de Fibonacci est $y^2 - xy - 1 = 0$ qui admet pour solutions :

$$\alpha_1(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2} \quad , \quad \alpha_2(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}.$$

D'où la formule de Binet pour les polynômes de Fibonacci

$$F_n(x) = \frac{\alpha_1^n(x) - \alpha_2^n(x)}{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}. \tag{4.7.11}$$

Et ainsi :

$$F_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)^n - \left(x - \sqrt{4+x^2}\right)^n}{2^n\sqrt{4+x^2}}. \tag{4.7.12}$$

Remarque 4.15. *Les nombres de Fibonacci sont les polynômes constants $F_n(1)$.*

4.8 Formule explicite des polynômes de Fibonacci

Théorème 4.16.

$$F_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}. \tag{4.8.13}$$

Démonstration. . Par récurrence on a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k}, \\ F_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}. \end{aligned}$$

On veut démontrer que :

$$F_{n+2}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k} x^{n+1-2k}.$$

On procède selon la parité de n :

4.8. Formule explicite des polynômes de Fibonacci

1. $n = 2m$ pair, de la relation de récurrence 4.6.9 qui définit les polynômes de Fibonacci

$$\begin{aligned}
F_{2m+2}(x) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k}{k} x^{2(m-k)+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1-k}{k} x^{2(m-k)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+k}{m-k} x^{2k+1} + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m+k-1}{m-k} x^{2k-1} + x^{2m-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+k-1}{m-k+1} x^{2k-1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+k-1}{m-k} x^{2k-1} \\
&= x^{2m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m+k-1}{m-k+1} + \binom{m+k-1}{m-k} \right] x^{2k-1} \\
&= x^{2m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+k}{m-k+1} x^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+k}{m-k+1} x^{2k-1}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$F_{2m+2}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m+k}{m-k+1} x^{2k-1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k+1}{k} x^{2m-2k+1}.$$

Alors :

$$F_{n+2}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1-k}{k} x^{n+1-2k}.$$

2. De la même manière on obtient le résultat similaire pour n impair.

Conséquence : En comparant les deux formules de F_n on déduit cette relation intéressante en analyse combinatoire.

Proposition 4.17.

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} 5^k = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k}. \tag{4.8.14}$$

Démonstration de la proposition. . Cette relation est déduite de la formule

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

Et le fait que

$$F_n = F_n(1) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k}.$$

4.9 Passage des polynômes de Fibonacci aux polynômes de Catalan

On rappelle que la fonction génératrice des polynômes de Catalan est $f(x,t) = \dfrac{1}{1-t+xt^2}$, et la fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est $g(x,t) = \dfrac{t}{1-xt-t^2}$.

Proposition 4.18.

$$f\left(-x^2, \frac{t}{x}\right) = \frac{1}{t} g\left(\frac{1}{x}, t\right). \tag{4.9.15}$$

Démonstration de la proposition. .

$$\begin{aligned} f\left(-x^2, \frac{t}{x}\right) &= \frac{1}{1-\frac{t}{x}-t^2} \\ &= \frac{1}{t} g\left(\frac{1}{x}, t\right). \end{aligned}$$

Théorème 4.19.

$$P_n\left(-x^2\right) = x^n F_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.9.16}$$

Démonstration. . D'après la proposition 4.18 on a

$$f\left(-x^2, \frac{t}{x}\right) = \frac{1}{t} g\left(\frac{1}{x}, t\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} P_n\left(-x^2\right)\left(\frac{t}{x}\right)^n &= \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0} F_n\left(\frac{1}{x}\right) t^n \\ &= \sum_{n\geq 0} F_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) t^n. \end{aligned}$$

Aprés identification on obtient :

$$P_n\left(-x^2\right) = x^n F_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4.10 Equation aux dérivées partielles

Proposition 4.20.

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = g^2(x,t), \tag{4.10.17}$$

$$t^2 \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = (1+t^2)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}. \tag{4.10.18}$$

Démonstration de la proposition. .

4.10. Equation aux dérivées partielles

1. Comme $g(x,t) = \dfrac{t}{1-xt-t^2}$ *alors*

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{t^2}{(1-xt-t^2)^2} = g^2(x,t).$$

2.

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{1-xt-t^2-t(-x-2t)}{(1-xt-t^2)^2} = \frac{1+t^2}{(1-xt-t^2)^2}.$$

D'où

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{1+t^2}{(1-xt-t^2)^2} = \frac{1}{(1-xt-t^2)^2} + \frac{t^2}{(1-xt-t^2)^2}.$$

Ainsi que

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{t^2}+1\right)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}.$$

Enfin

$$t^2\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \left(1+t^2\right)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}.$$

Lemme 4.21.

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} F_n'(x)t^n. \tag{4.10.19}$$

Démonstration. D'après la relation de récurrence 4.6.9 qui définit les polynômes de Fibonacci on obtient

$$F_n(x) = F_{n+2}(x) - xF_{n+1}(x).$$

Ainsi

$$F_{n+1}(x) = F_{n+2}'(x) - xF_{n+1}'(x) - F_n'(x).$$

D'un côté on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^n &= \sum_{n\geq 1} F_n(x)t^{n-1} \\ &= \frac{1}{t}\sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n = \frac{1}{t}g(x,t).\end{aligned}$$

Et d'un autre côté

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^n &= \sum_{n\geq 0}\left(F_{n+2}'(x) - xF_{n+1}'(x) - F_n'(x)\right)t^n \\ &= \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 0} F_{n+2}'(x)t^{n+2} - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 0} F_{n+1}'(x)t^{n+1} - \sum_{n\geq 0} F_n'(x)t^n.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0} F_{n+1}(x)t^n = \frac{1}{t^2}\sum_{n\geq 2} F_n'(x)t^n - \frac{x}{t}\sum_{n\geq 1} F_n'(x)t^n - \sum_{n\geq 0} F_n'(x)t^n.$$

On pose

$$L(x,t) = \sum_{n\geq 0} F'_n(x)t^n,$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}g(x,t) &= \frac{1}{t^2}L(x,t) - \frac{x}{t}L(x,t) - L(x,t) \\
&= \left(\frac{1}{t^2} - \frac{x}{t} - 1\right) L(x,t) \\
&= \frac{1 - xt - t^2}{t^2} L(x,t).
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$L(x,t) = g^2(x,t) = \frac{\partial g(x,t)}{\partial x}.$$

□

Comme résultat de Lemme 4.21 et la proposition 4.20 le théorème suivant découle.

Théorème 4.22.

$$F'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k(x)F_{n-k}(x). \tag{4.10.20}$$

Démonstration. On vient de voir que

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = g^2(x,t),$$

et

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} F'_n(x)t^n.$$

Comme

$$g^2(x,t) = \left(\sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} F_n(x)t^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} F_k(x)F_{n-k}(x)\right)t^n.$$

Après identificatin on obtient le résultat 4.10.20. □

4.11 Famille générale des polynômes liés aux polynômes de Fibonacci

4.11.1 Introduction

On considère la fonction

$$f(a;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t) = \frac{t^a}{1+\alpha_1 x^k t + \alpha_2 x^m t^2}, \tag{4.11.21}$$

déja introduite dans le chapitre 2; et comme

$$f(1;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t) = tf(0;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t).$$

On limite notre étude à la fonction $f(0;\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$ qu'on notera par la suite $f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$.

Lemme 4.23. *La fonction $f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$ est développable en séries entières pour* $|(\alpha_1 x^k + \alpha_2 x^m t)t| < 1$.

Démonstration. On a :

$$f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t) = \frac{1}{1-(-\alpha_1 x^k t - \alpha_2 x^m t^2)},$$

mais $|(\alpha_1 x^k + \alpha_2 x^m t)t| < 1$, alors

$$\frac{1}{1-(-\alpha_1 x^k t - \alpha_2 x^m t^2)} = \sum_{j\geq 0}(-\alpha_1 x^k - \alpha_2 x^m t)^j t^j.$$

Ainsi

$$f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t) = \sum_{j\geq 0}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(-\alpha_1)^l(-\alpha_2)^{j-l}x^{kl+m(j-l)}t^{2j-l}.$$

□

4.11.2 Résultat de G. Ozdemir et Y. Simsek

Dans l'article [8], G. Ozdemir et Y. Simsek ont introduit la fonction génératrice

$$H(t;x,y;k,m,n) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)t^j = \frac{1}{1-x^k t - y^m t^{n+m}}.$$

Et ils ont montré (Théorème 2.2 page 971) le résultat suivant concernant la forme explicite des polynômes $\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)$.

$$\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n) = \sum_{l=0}^{[\frac{j}{m+n}]}\binom{j-l(m+n-1)}{l}y^{ml}x^{jk-mlk-nlk}. \tag{4.11.22}$$

4.11.3 Théorème fondamental

En s'inspirant de ce résultat, on montre le théorème suivant qui donne la forme explicite des polynômes $M_j(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x)$:

Théorème 4.24.

$$M_j(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x) = \sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]}\binom{j-l}{l}(-\alpha_1)^{j-2l}(-\alpha_2)^l x^{ml+(j-2l)k}. \tag{4.11.23}$$

On note

$$f(\alpha_1,\alpha_2;x,t)=f(\alpha_1,\alpha_2;0,0;x,t)=\frac{1}{1+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2}, \tag{4.11.24}$$

et

$$f(\alpha_1,\alpha_2;x,t)=\sum_{j\geq 0} M_j(\alpha_1,\alpha_2;x)t^j. \tag{4.11.25}$$

Et dans ce cas on a le corollaire suivant

Corollaire 4.25.

$$M_j(\alpha_1,\alpha_2;x)=\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]}\binom{j-l}{l}(-\alpha_1)^{j-2l}(-\alpha_2)^l. \tag{4.11.26}$$

4.11.4 Preuve du Théorème 4.24 et du Corollaire 4.25

On a d'une part

$$\begin{aligned} H(t;x,y;k,m,n) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(x,y;k,m,n)t^j \\ &= \frac{1}{1-x^k t-y^m t^{n+m}}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t) &= \sum_{j\geq 0} M_j(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x)t^j \\ &= \frac{1}{1+\alpha_1 x^m t+\alpha_2 x^k t^2} \\ &= \frac{1}{1-(-\alpha_1 x^m)^1 t-(-\alpha_2 x^k)^1 t^2} \\ &= H(t;-\alpha_1 x^k,-\alpha_2 x^m;1,1,1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{G}_j(-\alpha_1 x^k,-\alpha_2 x^m;1,1,1)t^j. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} M_j(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x) &= \mathcal{G}_j(-\alpha_1 x^k,-\alpha_2 x^m;1,1,1) \\ &= \sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]}\binom{j-l}{l}(-\alpha_1)^{j-2l}(-\alpha_2)^l x^{ml+(j-2l)k}. \end{aligned}$$

Pour $k=m=0$ on obtient

$$M_j(\alpha_1,\alpha_2;x)=\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]}\binom{j-l}{l}(-\alpha_1)^{j-2l}(-\alpha_2)^l.$$

4.11.5 Nombres et polynômes générés par la fonction $f(\alpha_1,\alpha_2;k,m;x,t)$

Dans cette section on dresse le tableau 4.3 des 4 suites de nombres et le tableau 4.4 des 12 polynômes générés par la dite fonction.

Table 4.3 – Tableau suivant les constantes α_1, α_2.

α_1	α_2	$M_j(\alpha_1, \alpha_2; x)$
1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-l}$
1	-1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-2l}$
-1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{l}$
-1	-1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l}$

Table 4.4 – Tableau suivant les constantes α_1, α_2, k et m.

α_1	α_2	k	m	$M_j(\alpha_1, \alpha_2; k, m; x)$
1	1	0	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-l} x^l$
1	1	1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-x)^{j-l}$
1	1	1	0	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-l} x^{j-2l}$
1	-1	0	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-2l} x^l$
1	-1	1	0	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-x)^{j-2l}$
1	-1	1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^{j-2l} x^{j-l}$
-1	1	0	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-x)^l$
-1	1	1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^l x^{j-l}$
-1	1	1	0	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} (-1)^l x^{j-2l}$
-1	-1	0	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} x^l$
-1	-1	1	0	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} x^{j-2l}$
-1	-1	1	1	$\sum_{l=0}^{[\frac{j}{2}]} \binom{j-l}{l} x^{j-l}$

Chapitre 5

Nombres et polynômes de Bernoulli

5.1 Introduction

On termine ce travail par l'exposé de quelques propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli. Différemment des nombres de Catalan, les nombres de Bernoulli n'ont pas une formule explicite qui donne leurs valeurs. On se satisfait de les définir avec leur fonction génératrice [10].

Définition 5.1. *La fonction génératrice des nombres de Bernoulli est :*

$$b(t) = \frac{t}{e^t - 1} \quad , \quad |t| < 2\pi. \tag{5.1.1}$$

Plus précisément on a : $b(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n$, et B_n est le n-ième nombre de Bernoulli.

Les premières valeurs des nombres de Bernoullli sont illustrées par le tableau 5.1 suivant :

TABLE 5.1 – Les premières valeurs des nombres de Bernoulli

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0

Proposition 5.2.

$$\forall n \geq 1 \ , \ B_{2n+1} = 0. \tag{5.1.2}$$

Démonstration de la proposition. . Avant de démontrer ce résultat, nous devons visiter l'influence de la parité d'une fonction sur sa série entière dans le cas d'existence.

Lemme 5.3. *Soit* $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ *alors :*

1. f *paire* $\Rightarrow a_{2n+1} = 0 \ , \ \forall n \geq 0.$
2. f *impaire* $\Rightarrow a_{2n} = 0 \ , \ \forall n \geq 0.$

Démonstration. . f *est paire alors*

$$f(t) = f(-t).$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n = \sum_{n\geq 0} a_n \left(-t^n\right).$$

Alors on a :

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n - \sum_{n\geq 0} a_n \left(-t^n\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \left(t^n - (-t)^n\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \left(1 - (-1)^n\right) t^n = 0.$$

Hors :

$$\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ 2 & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 0} a_{2n+1} \left(1 - (-1)^{2n+1}\right) t^{2n+1} = 2\sum_{n\geq 0} a_{2n+1} t^{2n+1} = 0.$$

D'où :

$$a_{2n+1} = 0.$$

A l'aide de ce lemme et sachant que $b(t) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{t}{e^t - 1} + \dfrac{1}{2}t$ *est une fonction paire et,*

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{1}{2}t = B_0 + \left(B_1 + \frac{1}{2}\right)t + \sum_{n\geq 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Alors :

$$B_1 + \frac{1}{2} = 0 \textit{ et } B_{2n+1} = 0,\ \forall n \geq 1.$$

5.2 Quelques propriétés des nombres de Bernoulli

Théorème 5.4. *La récurrence qui définit les nombres de Bernoulli est :*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k,\ \forall n \geq 2. \tag{5.2.3}$$

Démonstration. . On a

$$b(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Alors

$$e^t b(t) - b(t) = t.$$

Ainsi

$$e^t b(t) = t + b(t).$$

Comme :

$$e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n,$$

et

$$t + b(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{n\geq 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$

Donc :

$$\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}t^n\right)=1+\frac{1}{2}t+\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!\,(n-k)!}\right)t^n &= 1+\frac{1}{2}t+\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n!}t^n,\\ 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)t+\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!\,(n-k)!}\right)t^n &= 1+\frac{1}{2}t+\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n!}t^n.\end{aligned}$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!\,(n-k)!}\right)t^n=\sum_{n\geq 2}\frac{B_n}{n!}t^n.$$

D'où pour $n\geq 2$:

$$\frac{B_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!\,(n-k)!}.$$

Enfin :

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!B_k}{k!\,(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

Corollaire 5.5.

$$\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}B_k=0,\ \forall n\geq 1. \tag{5.2.4}$$

Démonstration. . Ce résultat découle du fait que $B_{2n+1}=0$ et $B_{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}B_k$.

5.3 Les polynômes de Bernoulli

Définition 5.6. *La suite des polynômes de Bernoulli notée $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, est générée par la fonction $b(x,t)=\dfrac{te^{tx}}{e^t-1}$ et on a :*

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n,\quad |t|<2\pi. \tag{5.3.5}$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli qu'Euler a obtenu en 1738 [Table 5.2] :

Table 5.2 – Les premières valeurs des polynômes de Bernoulli.

n	$B_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$

On remarque que les coeficients pour $x = 0$ Coincident avec les nombres de Bernoulli, d'où on obtient une autre définition d'un nombre de Bernoulli : $B_n = B_n(0)$.

Proposition 5.7.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \tag{5.3.6}$$

Démonstration de la proposition. .

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n &= \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} t^n \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) t^n.
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}.$$

D'où :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

On remarque effectivement que $B_n(0) = B_n(1) = B_n, \ \forall n \geq 2.$

5.3. Les polynômes de Bernoulli

On va considérer maintenant le polynôme $B_n(x)$ comme une fonction de x. la proposition suivante calcule la dérivée et l'intégrale de la fonction B_n.

Proposition 5.8.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$.

2. $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)dx = 0,\ \forall n \geq 1.$

Démonstration de la proposition. .

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{te^{tx}}{e^t-1}\right) &= \frac{t}{e^t-1}\frac{\partial e^{tx}}{\partial x} = t\frac{te^{tx}}{e^t-1} \\
&= t\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{te^{tx}}{e^t-1}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{dB_n(x)}{dx}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{B_n'(x)}{n!}t^n.
\end{aligned}$$

D'où :

$$B_0'(x) + \sum_{n\geq 1}\frac{B_n'(x)}{n!}t^n = \sum_{n\geq 1}\frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n.$$

On a : $B_0(x) = 1 \Rightarrow B_0'(x) = 0$.

Ainsi :

$$\forall n \geq 1,\ \frac{B_n'(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} \Rightarrow B_n'(x) = \frac{n!B_{n-1}(x)}{(n-1)!}.$$

Et enfin :

$$\forall n \geq 1,\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x).$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{te^{tx}}{e^t-1}dx &= \frac{t}{e^t-1}\int_0^1 e^{tx}dx = \frac{t}{e^t-1}\left[\frac{e^{xt}}{t}\right]_0^1 \\
&= \frac{t}{e^t-1}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sum_{n\geq 0}\int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!}t^n dx = \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}.$$

D'où :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}=1.$$

Alors

$$\int_0^1 B_0(x)dx+\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}=1.$$

Ainsi :

$$1+\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}=1.$$

Alors :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!}=0.$$

Et enfin :

$$\int_0^1 B_n(x)dx=0\ ,\ \forall n\geq 1.$$

Corollaire 5.9.

$$B_n=B_n(0)=B_n(1),\ \forall n\geq 2. \tag{5.3.7}$$

Démonstration. .

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n^{'}(x)dx &= B_n(1)-B_n(0)\\ &= n\int_0^1 B_{n-1}(x)dx=0,\ \forall n\geq 2.\end{aligned}$$

D'où :

$$B_n=B_n(0)=B_n(1),\ \forall n\geq 2.$$

Grâce à cette proposition on donne une autre démonstration de résultat 5.2.3 Théorème 5.4.

De la relation $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}$.

On déduit que

$$B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

Ainsi

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

5.4 Quelques identités remarquables

Proposition 5.10.

1. $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

2. $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration de la proposition. .

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \frac{B_n(1-x)}{n!} t^n &= \frac{te^{t-xt}}{e^t-1} = \frac{e^t te^{-xt}}{e^t-1} \\
&= \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}} = \frac{-te^{-tx}}{e^{-t}-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} (-t)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n B_n(x)}{n!} t^n.
\end{aligned}$$

Après identification on obtient :

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

2. Avec la récurrence

$$B_1(x+1) - B_1(x) = x + \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 = 1x^{1-1}.$$

On suppose que $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ *et on montre que :*

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

$$\int_0^x (B_n(t+1) - B_n(t))\,\mathrm{dt} = \int_0^x B_n(t+1)\mathrm{dt} - \int_0^x B_n(t)\mathrm{dt} = \int_0^x nt^{n-1}\mathrm{dt}.$$

On a : $\displaystyle\int_0^x B_n(t+1)\mathrm{dt} = \int_1^{x+1} B_n(t)\mathrm{dt}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (B_n(t+1) - B_n(t))\,\mathrm{dt} &= \int_1^{x+1} B_n(t)\mathrm{dt} - \int_0^x B_n(t)\mathrm{dt} \\
&= \int_1^{x+1} B_n(t)\mathrm{dt} - \int_0^1 B_n(t)\mathrm{dt} - \int_1^x B_n(t)\mathrm{dt} \\
&= \int_x^{x+1} B_n(t)\mathrm{dt} = x^n.
\end{aligned}$$

On a de la proposition 5.8 : $B'_{n+1} = (n+1)B_n(t)$.

Alors :

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\mathrm{dt} = \int_x^{1+x} \frac{B'_{n+1}}{n+1}\mathrm{dt} = x^n.$$

Ainsi

$$\int_x^{x+1} B'_{n+1}(t)\mathrm{dt} = (n+1)x^n.$$

D'où :

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^{n+1-1}.$$

Proposition 5.11.

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x). \tag{5.4.8}$$

Démonstration de la proposition. .

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x+1)}{n!}t^n &= \frac{te^{t(x+1)}}{e^t-1} = \frac{te^{tx}e^t}{e^t-1} \\ &= \frac{te^{tx}}{e^t-1}e^t = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!}t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}t^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(x)}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)t^n. \end{aligned}$$

Après identification on obtient :

$$\frac{B_n(x+1)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(x)}{k!}\frac{1}{(n-k)!}.$$

D'où

$$\begin{aligned} B_n(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!B_k(x)}{k!\,(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x). \end{aligned}$$

On termine cette section par le lien entre les nombres de Bernoulli d'indices pairs et la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\ , \quad \Re(s) > 1.$$

Il est exprimé par la formule suivante [3]

$$B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n).$$

Cette formule nous permet justement de trouver le rayon de convergence qui est 2π de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}t^n$.

En s'inspirant de la limite suivante

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1.$$

Car :

$$\lim_{s\to\infty}\zeta(s) = 1 + \lim_{s\to\infty}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^s} = 1.$$

Ainsi

$$|B_{2n}| \sim \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

Et grâce à la formule de Stirling on aura

$$|B_{2n}| \sim 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}.$$

En appliquant le critère de d'Alembert sur la série numérique $\sum_{n\geq 0}\frac{B_{2n}}{(2n)!}t^{2n}$ on obtient effectivement $R = 2\pi$.

5.5 Equation aux dérivées partielles

Théorème 5.12.

$$t^2\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = \big(1 - t + t^2 - tb(t)\big)\,\frac{\partial b(x,t)}{\partial x}. \tag{5.5.9}$$

Le théorème 5.12 est conséquence direct de la proposition suivante

Proposition 5.13.

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} = tb(x,t), \tag{5.5.10}$$

$$t\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = \big(1 - t + t^2 - tb(t)\big)\,b(x,t). \tag{5.5.11}$$

Démonstration de la proposition. . On a

$$b(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial b(x,t)}{\partial x} &= \frac{t}{e^t-1}te^{tx}\\ &= \frac{t^2e^{tx}}{e^t-1}\\ &= tb(x,t).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} &= \frac{\left(e^{tx}+t^2e^{tx}\right)\left(e^t-1\right)-te^{tx+t}}{\left(e^t-1\right)^2}\\
&= \frac{\left(1+t^2\right)\left(e^{tx+t}-e^{tx}\right)-te^{tx+t}}{\left(e^t-1\right)^2}\\
&= \frac{\left(1-t+t^2\right)e^{tx+t}-\left(1+t^2\right)e^{tx}}{\left(e^t-1\right)^2}\\
&= \frac{\left(1-t+t^2\right)e^t-1-t^2}{e^t-1}\frac{e^{tx}}{e^t-1}\\
&= \frac{\left(1-t+t^2\right)e^t-1-t^2}{t\left(e^t-1\right)}b(x,t)\\
&= \left(\frac{\left(1-t+t^2\right)\left(e^t-1+1\right)}{t\left(e^t-1\right)}-\frac{1+t^2}{t\left(e^t-1\right)}\right)b(x,t).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} &= \left(\frac{1-t+t^2}{t}+\frac{1}{t\left(e^t-1\right)-\frac{1+t^2}{t(e^t-1)}}\right)b(x,t)\\
&= \left(\frac{1-t+t^2}{t}-\frac{t}{e^t-1}\right)b(x,t)\\
&= \left(\frac{1-t+t^2}{t}-b(t)\right)b(x,t).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
t\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = \left(1-t+t^2-tb(t)\right)b(x,t).
$$

5.6 Nombres et polynômes d'Euler

On termine ce chapitre par l'introduction des nombres et polynômes d'Euler. Ils sont un peu liés aux nombres et polynômes de Bernoulli par le biais de leurs fonctions génératrices qui dépendent de la fonction e^t.

5.6.1 Nombres d'Euler

Définition 5.14. *Les nombres d'Euler E_n sont donnés par la fonction génératrice suivante*

$$
\frac{2}{e^t+e^{-t}} = \sum_{n\geq 0}\frac{E_n}{n!}t^n \ , \quad |t|<\pi. \tag{5.6.12}
$$

Les premiers termes de cette suite sont donnés par le tableau suivant

Table 5.3 – Les premières valeurs des nombres d'Euler.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521	0

Le fait que

$$\frac{2}{e^t+e^{-t}} = \frac{2}{e^{-t}+e^t},$$

veut dire que la fonction $\frac{2}{e^t+e^{-t}}$ est paire donc $E_{2k+1}=0$ pour tout $k \geq 0$.

5.6.2 Polynômes d'Euler

Définition 5.15. *Les polynômes d'Euler $E_n(x)$ sont donnés par la fonction génératrice suivante*

$$\frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!}t^n, \ |t| < \pi. \tag{5.6.13}$$

Les premières valeurs des polynômes d'Euler sont donnés par le tableau 5.4

Table 5.4 – Les premières valeurs des polynômes d'Euler.

n	$E_n(x)$
0	1
1	$x-\frac{1}{2}$
2	x^2-x
3	$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$
4	x^4-2x^3+x
5	$x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}$
6	$x^6-3x^5+5x^3-3x$
7	$x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{35}{4}x^4-\frac{21}{2}x^2+\frac{17}{8}$

On considère la fonction $E(x,t) = \frac{2e^{tx}}{e^t+1}$. Ainsi la dérivée de polynôme $E_n(x)$ est exprimée en fonction de $E_{n-1}(x)$ comme le montre le lemme suivant

Lemme 5.16.

$$E'_n(x) = nE_{n-1}(x)\ ,\ \forall n \geq 1. \tag{5.6.14}$$

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} &= \frac{2te^{tx}}{e^t+1} = t\frac{2e^{tx}}{e^t+1} \\
&= tE(x,t) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!}t^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{E_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n.
\end{aligned}$$

D'autre part
$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \sum_{n\geq 0} \frac{E'_n(x)}{n!} t^n.$$
Comme $E'_0(x) = 0$ et par identification on obtient
$$\begin{aligned} E'_n(x) &= \frac{n! E_{n-1}(x)}{(n-1)!} \\ &= n E_{n-1}(x). \end{aligned}$$
□

5.6.3 Expression des polynômes d'Euler en termes des nombres d'Euler

Les polynômes d'Euler en fonction des nombres d'Euler sont donnés par la proposition suivante [2].

Proposition 5.17.
$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}. \tag{5.6.15}$$
Démonstration de la proposition. .
$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!} t^n &= \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} \frac{e^{\frac{-t}{2}}}{e^{\frac{-t}{2}}} \\ &= \frac{2}{e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{-t}{2}}} e^{t(x-\frac{1}{2})} \\ &= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{E_n}{n! 2^n} t^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(x-\frac{1}{2})^n}{n!} t^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{k! 2^k} \frac{(x-\frac{1}{2})^{n-k}}{(n-k)!}\right) t^n. \end{aligned}$$
Par identification on obtient
$$\begin{aligned} E_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Corollaire 5.18.
$$E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right). \tag{5.6.16}$$

Démonstration.
$$\begin{aligned} E_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k} + \frac{E_n}{2^n}. \end{aligned}$$

Il suffit de remplacer $x = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente pour obtenir le résultat 5.6.16. $\square$

5.7 Combinaison entre polynômes de Bernoulli et polynômes d'Euler

Théorème 5.19.

$$E_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(2B_k(x) - E_k(x)). \tag{5.7.17}$$

Ce théorème est conséquence de lemme suivant

Lemme 5.20.

$$x^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(x). \tag{5.7.18}$$

$$x^n = E_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E_k(x). \tag{5.7.19}$$

Démonstration. On a d'une part

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

Alors

$$te^{tx} = (e^t - 1)\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n.$$

Comme

$$e^t - 1 = \sum_{n\geq 1}\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1}a_n\frac{t^n}{n!},\ \text{avec } a_0 = 0\ ,\ a_n = 1,\ \forall n\geq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{tx} &= \left(\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n!}t^{n-1}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n\right)\\ &= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{B_n(x)}{n!}t^n\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}t^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n-k+1}B_k(x)}{(n-k+1)!k!}\right)t^n.$$

Et par identification on obtient

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x)}{(n+1-k)!k!}.$$

Et le résultat 5.7.18 découle.

D'autre part

$$\frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Alors

$$2e^{tx} = (e^t+1) \sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!} t^n.$$

Comme

$$e^t + 1 = 2 + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}, \text{ avec } b_0 = 2 \ , \ b_n = 1, \ \forall n \geq 1.$$

On obtient

$$2e^{tx} = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n \right) \left(\sum_{n\geq 0} \frac{E_n(x)}{n!} t^n \right).$$

Ainsi

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2x^n}{n!} t^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k} E_k(x)}{(n-k)!k!} \right) t^n.$$

Et par identification des coeficients des deux séries on aura

$$\frac{2x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k} E_k(x)}{(n-k)!k!}.$$

Et suivant la définition de la suite b_k le résultat 5.7.19 découle. □

Corollaire 5.21.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \ \forall n \geq 1. \tag{5.7.20}$$

$$E_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k-1} E_k. \tag{5.7.21}$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz, I.A. Stegun,*Handbook of Mathematical Function with Formula, Graphs and Mathematical Tables*, tenth printing with corrections, United States Department of Commerce, New York, 1972.

[2] A. Bagdasaryan, J. Choi, *Some new identities on the Apostol-Bernoulli polynomials of higher order derived from Bernoulli basis.* Nonlinear Sci. Appl. 9, 2697-2704 (2016).

[3] G.B. Djordjević, G.V. Milovanović *Special classes of polynomials.* University of Niš, Faculty of Technology Lescovac, (2014).

[4] M. El Amrani, *Suites et séries numériques Suites et séries de fonctions.* Ellipses Édition Marketing S.A., ISBN 978-2-7298-70393 (2011).

[5] A. Frazer Jarvis, J. Larcombe, E.J. Fennessey, *Some Factorization and Divisibility Properties of Catalan Polynomials.* Bultain of the ICA, 71, 36-56 (2014).

[6] D. Garth, D. Mills, P.Mitchell *Polynomials Generated by the Fibonacci Sequence.* Journal of Integer sequences, 10, (2007).

[7] R.P. Grimaldi *Fibonacci and Catalan Numbers.* John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2012).

[8] G. Ozdemir, Y. Simsek, *Generating functions for two-variable polynomials related to a family of Fibonacci type polynomials and numbers*, Fiolmat 30, 4, 969-975 (2016).

[9] T. Mansour, Y. Sun *Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers.* Discrete mathematics, 309, pp.4079-4088 (2009).

[10] G.V. Milovanović, M.Th. Rassias *Analytic Numbers Theory, Aproximation Theory, and Special Functions.* Springer, New york, (2014).

[11] F. Qi, B. Guo, *Integral Representations of the Catalan Numbers and Their Applications.* Mathematics, 5, 40, 31p (2017)

[12] I.S. Rakhimov, K.A. Mohd Atan, *On some new properties of Catalan numbers.* International Journal of Modern Physics,9, 537, 542 (2012).

[13] T. Stojadinović, *On Catalan Numbers.* The Teaching of Mathematics, Vol. XVIII, 1, pp. 16-24 (2015).

[14] Z. Wu, W. Zhang *Several identities involving the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials.* Journal of Inequalities and Applications, 205, (2013).