

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU

FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFOMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



Mémoire de Fin d'Etudes

En Vue de l'Obtention du Diplôme
d'Ingénieur d'Etat en Electronique
Option : Control

*Réduction des Systèmes Linéaires et
Polynomiaux*

Réalisé par :

Melle: Hammiche Rima
Melle: Ouazaz Siham

Proposé par:

Mme: Djouaher.

PROMOTION 2008

REMERCIEMENT

Il nous est agréable d'exprimer notre profonde gratitude à notre promotrice madame DJOUAHER.N qui nous a soutenu toute au long de notre travail et qui n'a jamais manqué de nous orienter et de nous conseiller.

Qu'elle trouve ici l'expression de notre respect et notre profonde reconnaissance.

Nous tenons également à remercier Messieurs les membres de jury pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous remercions aussi tous nos amis et collègues qui nous ont assistés.

DEDICACES

Je dédie ce travail

- *A mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de m'encourager et de me soutenir.*

Je le dédie aussi :

- *A mes très chers frères, et sœurs qui s'assoient toujours à mes côtés pour m'encourager.*
- *A ma grand-mère.*
- *A mon oncle.*
- *A toute mes amies.*

OUAAZ Siham

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- *A mon très cher grand père Mohammed Arezki ainsi qu'à ma grande mère.*
- *A mes chers parents qui n'ont pas cessé de m'encourager et de me soutenir.*
- *A ma sœur Aminâ et mes frères Abd El Malek et Boudjmââ.*
- *A mon fiancé Hammâdouche Mohammed et à ma belle famille.*
- *A tous mes proches et amis (es).*

HAMMICHE Rimâ

Sommaire

Liste des symboles.....	1
Introduction générale.....	2
Présentation du travail.....	6

Chapitre I : Structure des systèmes polynomiaux

I. Introduction.....	8
II. Définitions.....	9
III. Structure des systèmes dynamiques polynomiaux.....	10
III.1 Représentation des systèmes polynomiaux.....	10
III.1.1 Approximation polynomial.....	10
III.1.2 Représentation à base de l'opérateur de Kronecker.....	13
III.1.3 Représentation par factorisation.....	17
III.2 Intérêts de l'approximation polynomiale.....	17
III.2.1 Exemple d'application.....	18
IV. Propriétés des systèmes polynomiaux.....	21
IV.1 Stabilité des systèmes polynomiaux.....	21
IV.1.1 Rappel sur la théorie de Lyapunov.....	22
IV.2 Observabilité et commandabilité.....	23
IV.2.1 Observabilité.....	24

IV.2.2 Commandabilité.....	25
V. Conclusion.....	26

Chapitre II : Réduction des systèmes dynamique

linéaires

I. Introduction.....	27
II. Rappels et définitions.....	30
III. Réduction des systèmes linéaires.....	33
III.1 Réduction par agrégation.....	33
III.1.1 Méthode de Davison.....	33
III.1.2 Méthode d'Aoki.....	38
III.2 Réduction par troncation à base de réalisation équilibrée.....	41
III.2.1 Fonctions de commandabilité et d'observabilité.....	45
III.2.2 Procédure de réduction.....	47
IV. Application.....	49
V. Conclusion.....	53

Chapitre III : Réduction des systèmes dynamiques

polynomiaux

I. Introduction.....	54
II. Généralités sur la programmation SOS.....	57

Sommaire

II.1 Décomposition SOS.....	57
II.2 Généralités sur la programmation semi-définie.....	58
II.2.1 Forme primal standard.....	59
II.2.2 Forme dual non standard.....	60
II.3 Programmation SOS.....	60
II.4 Réduction des systèmes dynamiques polynomiaux.....	62
II.4.1 Gramians polynomiaux d'observabilité et de commandabilité.....	63
II.4.2 Critère de réduction.....	67
II.5 Exemple d'application.....	69
III. Conclusion.....	70
Conclusion général.....	71
Annexe.....	73
Références et bibliographies.....	81

Présentation du travail :

La notion de réduction joue un rôle fondamental dans la détermination et la construction d'observateur ou de filtre.

Etant données l'importance des enjeux, la réduction de modèle est une direction de recherche qui a été, et reste, très active dans de nombreux champs disciplinaires. Citons par exemple :

- ❖ En algèbre linéaire (Antoulas, 2005) : décomposition en valeurs singulières, modèle de krylove, décomposition de Hankel, Troncation par la réalisation équilibré,...
- ❖ En statique (Karhunen, 1949 ; Loève, 1955) : Décomposition de Karhunen-loeve.
- ❖ En mécanique des fluides.
- ❖ En turbulence...

La problématique générale à la réduction de modèles polynomiaux est décrite comme suite :

Partant d'un système physique quelconque, et de données évaluées expérimentalement ou numériquement ; la phase de modélisation/approximation consiste à déterminer un ensemble d'équations polynomiales représentatifs du système.

La phase de réduction de modèle, consiste à déterminer un système dynamique en réduisant de manière appropriée le nombre de degrés de liberté nécessaire à la description du système.

Finalement, le modèle réduit , est utilisé pour simuler ou contrôler le système S.

Avant de nous entamer à la réduction des systèmes, une description des systèmes polynomiaux ainsi que quelques définitions fondamentales sont nécessaires. Pour cela nous avons jugé utiles de diviser notre travail comme suit :

Au premier chapitre, est attribuée une introduction à la structure des systèmes polynomiaux, ainsi que quelques définitions fondamentales. Différentes représentations mathématiques décrivant les systèmes dynamiques polynomiaux, ont fait l'objet de ce chapitre. Une étude sur la stabilité, la commandabilité, et l'observabilité, de ces systèmes y est aussi.

La réduction des systèmes linéaires a fait l'objet d'étude du deuxième chapitre. Nous étudierons la réduction par agrégation, pour cela, deux méthodes y sont proposées, la méthode de Davison, et celle d'Aoki, basées toutes les deux sur la décomposition modale.

Un intérêt particulier y est adressé à la réduction par troncation à base de réalisation équilibrée (TBR), qui est une approche incarnant le principe de décomposition en valeurs singulières.

Cette dernière se trouve être la base de la réduction des systèmes dynamiques polynomiaux, adressé au troisième chapitre. Une étude sur le problème de la réduction des modèles non linéaires, en particulier ceux possédant des structures polynomiales affinent par rapport à l'entrée y est réservé dans ce chapitre.

Dans ce contexte, la méthode de réduction de Prajna qui est exclusivement réservé aux systèmes polynomiaux y est proposée. Cette méthode définit les énergies (gramians) de commandabilité et d'observabilité comme étant des fonctions polynomiales. Une étude d'un exemple d'application y est proposée.

Finalement, nous terminons notre travail par une conclusion générale basée sur les différentes conclusions et commentaires des exemples étudiés tout au long de ce mémoire.

Introduction générale

La relation fondamentale de la dynamique se décline avec une complexité très variable suivant les domaines d'application et les spécialités concernées; Certains n'ont besoins que de la relation scalaire élémentaire « $F = M\gamma$ », comme pour la détermination de la vitesse d'un pendule simple, tandis que d'autres, doivent créer plusieurs degrés de liberté pour reproduire fidèlement la réalité non linéaire de ces derniers, comme pour l'étude d'un circuit électrique.

Les modèles non linéaires sont sans doute les plus aptes à décrire avec fidélité, la réalité non linéaire des systèmes physiques, contrairement aux modèles linéaires lesquels sont généralement obtenus par des approximations, incluant des simplifications et/ou des phénomènes physiques négligés. Les modèles linéaires se distinguent plus tôt par leur structure qui a permis l'élaboration d'une diversité de critères, d'analyses et d'algorithmes de commande systématiques. La stabilité, la commandabilité et l'observabilité des systèmes physiques, lorsque ces derniers sont décrits par des modèles linéaires sont, à titre d'exemple, analysées en utilisant des critères ne faisant intervenir que les matrices d'état, la matrice de commande, et la matrice de sortie, ce qui n'est pas du tout évident dans le cas des modèles non linéaires.

Entre les modèles linéaires et non linéaires, les modèles polynomiaux peuvent se distinguer comme étant une classe médiane. Les modèles polynomiaux peuvent être obtenus par modélisation ou par approximation ; et dans ces deux cas, l'aspect non linéaire du système original n'est pas négligé contrairement au cas des modèles linéaires. L'étude,

l'analyse et les problèmes de synthèse propres aux systèmes décrits par des modèles polynomiaux deviennent plus systématiques, voire plus faciles, relativement au cas décrits par des modèles non linéaires.

Ces avantages peuvent justifier tout l'intérêt attribué, ces dernières années aux modèles polynomiaux, et qui se traduit par un volume intense de recherches ;En effet, tous les problèmes considérés de façon générale en théorie non linéaire, sont repris dans le contexte particulier des modèles polynomiaux.

Dans le champ des systèmes dynamiques non linéaires, en particulier des systèmes dynamiques polynomiaux, les ingénieurs concepteurs se trouvent souvent confrontés à la difficulté relevant de la diversité des représentations mathématiques, pouvant être considérées pour décrire un système non linéaire. Chaque représentation possède ses propres outils d'études, d'analyses, de conceptions et de commandes.

La modélisation constitue la première étape de toute démarche visant la synthèse d'une loi de commande pour un quelconque système. A l'issue de cette étape, une description mathématique désigner par modèle, doit être établie pour le système en question. C'est à base de cette description que se fait le choix des différentes approches d'études, d'analyses, et de commandes.

Les outils de plus en plus performants mis à la disposition de l'ingénieur désirant modéliser un processus physique complexe, conduisent bien souvent à un modèle de grande dimension. L'usage directe de celui-ci, peut nécessiter un volume de calcul important, ou engendrer des difficultés numériques. Pour ces raisons, il est au paravent souhaitable d'essayer de réduire l'ordre du modèle, tout en reproduisant très précisément son comportement original.

Depuis plus d'une vingtaine d'années, de nombreuses méthodes sont apparues pour accomplir cette tâche. Le choix de l'une d'entre elles, se fait en fonction de la description du modèle original (représentations dans l'espace d'état, fonction de transfert, pôles/résidus...), de sa nature (linéaire ou non linéaire, stable ou instable, temps continu ou temps discret,...), et de la précision souhaitée (solution optimale ou non).

Les raisons pour les quelles on désire réduire, peuvent en effet être très diverses :

➤ Le modèle n'est pas manipulable par ce qu'il est de grande dimension, c'est le cas type du modèle issus de maillages en élément finis et dont l'ordre élevé n'est pas absolument nécessaire pour reproduire correctement le système.

➤ Dans le cas où on ne s'intéresse qu'à certains sous ensemble du modèle, c'est-à-dire, il comporte des parties dont on n'aura pas l'usage ; on peut par exemple, dans un cas extrême, n'avoir besoin que du gain statique ou bien du comportement du système à une seule fréquence.

➤ On veut utiliser le modèle dans une simulation embarquée ; pour des raisons de temps de calcul, celui-ci ne doit pas être trop complexe.

➤ Calculer une loi de commande sur le modèle par des techniques « modernes » ; or celle-ci produisent des correcteurs reproduisant (au moins) l'ordre du système à commander. La figure Fig.1. montre les différents chemins pour l'obtention d'un correcteur d'ordre réduit à partir d'un modèle d'ordre élevé :

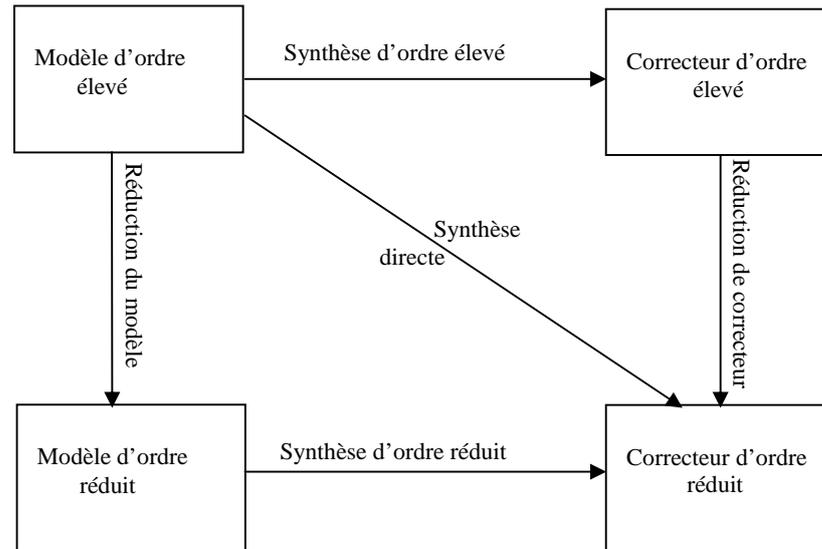


Fig.1. Schéma bloc pour l'obtention d'un correcteur d'ordre réduit

Ce dernier objectif est à l'origine de notre travail.

Le but de toute Réduction est, en générale, de fournir à l'utilisateur un modèle de système plus simple, qui lui permettra de résoudre, avec une quantité limitée de calculs des problèmes tels que le calcul de lois de commande, optimales ou non, la détermination et la construction d'observateurs ou de filtres.

I. Introduction :

Un système est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. La modélisation regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier. La modélisation théorique requiert une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Les systèmes physiques sont souvent complexes et difficilement exploitables, notamment pour la commande et le diagnostic des systèmes.

Le grand problème de l'ingénieur est de représenter ces systèmes physiques avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de ce modèle à une forme mathématiquement exploitable.

Une hypothèse communément faite pour décrire le comportement d'un système, est la linéarité de celui-ci, car les techniques d'analyse des modèles linéaires, dits LTI, ont été largement développées dans la littérature. Cependant, cette hypothèse n'est vérifiée que dans une plage de fonctionnement restreinte autour d'un point d'équilibre du système. Alors, les performances du modèle se dégradent dès qu'on s'en éloigne et la recherche d'un modèle plus adapté et notamment non linéaire devient nécessaire.

La structure mathématique qui puisse remédier à l'inconvénient cité ci-dessus, est l'approche globale, dite polynomiale. C'est une représentation qui peut être obtenue naturellement par modélisation ou par approximation.

La structure polynomiale, permet, grâce à des outils mathématiques qui lui sont associés et de manière similaire au cas linéaire, une procédure d'étude, d'analyse et de conception, systématique, ce qui n'est vraiment pas le cas général des modèles non linéaires.

Ces avantages sont illustrés dans ce chapitre qui, avant tout, se veut être une définition de la notion de système dynamique polynomial. Pour cela, deux volets principaux sont considérés, à savoir, celui lié aux représentations mathématiques des systèmes dynamiques polynomiaux et celui liés à leurs propriétés (stabilité, observabilité et commandabilité).

II. Définitions : [20-1]

1.1 Monôme [20-1] :

On définit pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, une application $m_\alpha : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, appelée monôme, telle que :

$$\forall x \in \mathfrak{R}^n : m_\alpha(x) = x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.1)$$

$$\text{Où } x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \text{ et } \alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n]^T$$

Le degré du monôme est défini comme suit :

$$\text{deg}(m_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (1.2)$$

1.2 Polynôme [20-1] :

Un polynôme p est défini comme étant une combinaison linéaire d'un ensemble fini de monômes $\{m_{\alpha_j}\}_{j=1,2,\dots,k}$.

Soit un ensemble de scalaires réels $\{c_j\}_{j=1,2,\dots,k}$. Un polynôme p est défini comme suit :

$$\forall x \in \mathfrak{R}^n, p(x) = \sum_{j=1}^k c_j m_{\alpha_j}(x) = \sum_{j=1}^k c_j x^{\alpha_j} \quad (1.3)$$

Le degré du polynôme p est alors défini par :

$$\deg(p) := \max_j(\deg(m_{\alpha_j})) \quad (1.4)$$

- ◆ Un polynôme p est homogène si tous les monômes le constituant, sont du même degré. Pour un tel polynôme la propriété ci dessous est vérifiée.

Pour un scalaire λ :

$$p(\lambda x) = \lambda^d p(x) \quad (1.5)$$

d Étant le degré de $p(x)$

III. structure des systèmes dynamiques polynomiaux : [2-3-4-5-6-7-8-9-13]

Les systèmes dynamiques dits polynomiaux sont des cas particuliers des systèmes dynamiques non linéaire.

III.1 Représentations des systèmes polynomiaux :

Un modèle polynomiale, est un modèle non linéaire comportant des non linéarités polynomiales.

III.1.1. Approximation polynomial : [3-2-6]

Pour contourner les difficultés relatives aux problèmes d'analyse et de conception pour les systèmes non linéaires, on opte souvent pour la linéarisation. Cela n'est autre qu'un développement de Taylor du premier ordre autour d'un point de fonctionnement du système étudié.

Un inconvénient majeur est alors observé, tous les résultats obtenus ne sont valables que dans le voisinage du point de fonctionnement considéré. Etant donnée la facilité de manipulations qu'apportent les polynômes, on peut directement penser à l'utilisation du

développement de Taylor à un ordre supérieur à un. L'approximation résultante est polynomiale et est, certainement, meilleure que l'approximation linéaire.

L'approximation polynomiale d'un système non linéaire est une alternative très intéressante dans le sens où, différents problèmes, difficilement résolubles voire même sans solutions en théorie non linéaire, s'y trouvent contournés et résolus.

Soit le système non linéaire affine par rapport à l'entrée, donné par (1.6).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Où $x \in \mathfrak{R}^n$ est défini comme étant son vecteur d'état, $u \in \mathfrak{R}^m$ est son vecteur d'entrée et $y \in \mathfrak{R}^p$ son vecteur de sortie.

◆ **Définition [2] :**

Un système de la forme (1.6) est polynomial si f , g et h sont polynomiaux.

Si ce n'est pas le cas, on peut l'approximer par un système polynomial en utilisant le développement de Taylor. Celui-ci appliqué à $f(x)$ au voisinage d'un point d'équilibre $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ permet de l'exprimer de la manière suivante :

$$f(x) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \dots \frac{\partial^{m_n} f}{\partial x_n^{m_n}} \Big|_{x^*} \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i!} (x - x_i^*)^{m_i} \quad (1.7)$$

Le développement de Taylor appliqué à $g(x)$ et $h(x)$ permet d'obtenir la représentation polynomiale correspondante à la représentation (1.6).

Un système polynomial peut être représenté de plusieurs manières. La forme la plus ordinaire est celle n'incluant aucune structure particulière dans les polynômes. Elle est donnée par (1.8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_n \leq r}}^r a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_n \leq s}}^s b_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{k, j} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \right) u_j \\ k=1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n=0 \\ i_1+i_2+\dots+i_n \leq r}}^r c_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \\ k=1, 2, \dots, p \end{array} \right.$$

Où $x_k, a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^k, b_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{k, j} \in \mathfrak{R}$ et r et s sont des entiers positifs pouvant représenter les ordres des développements de Taylor de $f(x), g(x)$ et $h(x)$ s'il s'agit, bien sur, d'une approximation.

Cette représentation peut être réexprimé de la façon suivante [6] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= AZ(x) + \sum_{j=1}^m B_j Z(x) u_j \\ y &= CZ(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Où $Z(x)$ est un vecteur de dimension q constitué de monômes de degrés entiers α_i, β_i, \dots ($i=1, 2, \dots, n$):

$$Z(x) = \begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Et $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_j \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ et $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ sont des matrices constantes.

Exemple 1.1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1x_2 + 3tgx_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 3\sin x_1 - 2u\end{aligned}\quad (1.11)$$

Le développement de Taylor à l'ordre 3 de $\sin(x_1)$ et $tg(x_2)$ à l'ordre 3 permet d'obtenir l'approximation polynomiale correspondante au système non linéaire (1.11) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + 3x_2 + 2x_1x_2 + u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{3}x_1^3 + 3x_1 - x_2 - 2u \end{cases}\quad (1.12)$$

Cette dernière représentation peut être exprimé sous la forme (1.9). Les matrices A, B_j et C correspondantes sont obtenues comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Z(x) = [1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2 \quad x_1^3 \quad x_1^2x_2 \quad x_1x_2^2 \quad x_2^3]$$

III.1.2 Représentation à base de l'opérateur de Kronecker : [7-8]

L'utilisation du produit de Kronecker nous permet d'avoir une structure compressée à l'ordre r , de la représentation (1.8). Celle-ci est donnée ci après :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sum_{i=0}^r A_i x^{[i]} + \left(\sum_{j=0}^s B_j (I_m \otimes x^{[j]}) \right) u \\ y &= \sum_{i=0}^r C_i x^{[i]}\end{aligned}\quad (1.13)$$

Où $x^{[i]}$ désigne la i ème puissance, de Kronecker, redondante du vecteur x

$$\begin{cases} x^{[1]} = x \\ x^{[i+1]} = x^{[i]} \otimes x \end{cases}$$

$A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n^i}$, $B_j \in \mathfrak{R}^{n \times m (n)^j}$ et $C_i \in \mathfrak{R}^{p \times n^i}$ sont des coefficients matriciels dont les éléments peuvent être, respectivement, déterminés de la même manière que ceux des matrices A, B_j et C de l'expression (1.9).

La relation (1.14) est une représentation équivalente à (1.13) considérée dans [8] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=0}^r \tilde{A}_i \tilde{x}^{[i]} + \left(\sum_{j=0}^s \tilde{B}_j (I_m \otimes x^{[j]}) \right) u \\ y &= \sum_{i=0}^r \tilde{C}_i \tilde{x}^{[i]} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Où $\tilde{x}^{[i]} \in \mathfrak{R}^{n_i}$ désigne la i ème puissance de Kronecker non redondante de x donnée par :

$$\tilde{x}^{[i]} = [x_1^i, x_1^{i-1} x_2, \dots, x_1^{i-1} x_n, x_1^{i-2} x_2^2, x_1^{i-2} x_2 x_3, \dots, x_1^{i-2} x_2 x_n, \dots, x_n^i] \quad (1.15)$$

Avec :

$$n_i = \binom{n+i-1}{i} = \frac{(n+i-1)!}{i!(n-1)!}$$

Ainsi, on obtient une dimension nettement plus inférieure des coefficients \tilde{A}_i, \tilde{B}_j et

\tilde{C}_i dans $\tilde{x}^{[i]}$, que celle des coefficients A_i, B_j et C_i dans $x^{[i]}$, puisque $n_i < n^i$.

En effet, on a $\tilde{A}_i \in \mathfrak{R}^{n \times n_i}$, $\tilde{B}_j \in \mathfrak{R}^{n \times m n_j}$ et $\tilde{C}_i \in \mathfrak{R}^{p \times n_i}$.

De ce fait, il est évident qu'il est plus raisonnable d'utiliser la représentation polynomiale (1.14) que celle donnée par (1.13) d'autant plus que le passage de l'une à l'autre est bien possible en utilisant les transformations suivantes :

$x^{[i]} = T_i \tilde{x}^{[i]}$ Ou inversement $\tilde{x}^{[i]} = T_i^+ x^{[i]}$ avec $T_i \in \mathfrak{R}^{n^i \times n_i}$ et $T_i^+ \in \mathfrak{R}^{n_i \times n^i}$ est la matrice pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice T_i .

Reprenant l'approximation polynomiale (1.12) de l'exemple précédent, pour le quelle on veut obtenir la représentation (1.13).

On prenant l'ordre de Taylor 3, la relation (1.13) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_1 x^{[1]} + A_2 x^{[2]} + A_3 x^{[3]} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

Par identification, on obtient :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{[2]} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{[3]} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

On peut obtenir aussi en utilisant la transformation $x^{[i]} = T_i \tilde{x}^{[i]}$ pour $i=1, 2, 3$, où les matrices T_i sont obtenues comme suit :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la représentation polynomiale équivalente suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}^{[2]} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}^{[3]} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

De manière plus générale, un système non linéaire analytique est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (1.16)$$

Peut être polynomialisé et compressé en utilisant l'opérateur de Kronecker comme suit

$$\begin{cases} f(x, u) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=1}^{i+1} A_{ij} (x^{[i+1-j]} \otimes u^{[j-1]}) \\ h(x, u) = \sum_{i=0}^r \sum_{j=i}^{i+1} C_{ij} (x^{[i+1-j]} \otimes u^{[j-1]}) \end{cases} \quad (1.17)$$

La structure polynomiale utilisant l'opérateur de Kronecker telle qu'elle est donnée par (1.13) et (1.14), cerne un environnement mathématique très simple grâce, notamment, aux propriétés de l'opérateur de Kronecker [7]. Celles-ci offrent la possibilité

d'effectuer des manipulations algébriques en blocs ne faisant intervenir que les paramètres de la structure polynomiale elle-même.

III.1.3 Représentation par factorisation: [9]

Il arrive par fois, qu'on veuille exprimer le système (1.6) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + G(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Lorsque (1.6) est polynomial, la factorisation offre des avantages dans plusieurs applications notamment celles relatives aux études des problèmes de stabilisation.

En ce qui concerne le système (1.12), on peut déterminer :

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2x_2 & \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{2}x_2 + 1 \\ -\frac{1}{3}x_1^2 + 2 & -1 \end{bmatrix}$$

D'autres matrices peuvent bien être obtenues. Ceci dit qu'autant de factorisations sont possibles.

III.2 Intérêts de l'approximation polynomiale :

Pour illustrer l'intérêt de l'approximation polynomiale, on se propose d'étudier un exemple.

III.2.1 Exemple d'application : [4-13]

On se propose, dans ce qui suit, de vérifier à travers un exemple d'application le fait que la représentation polynomiale constitue effectivement une bonne approximation des systèmes non linéaires et peut par conséquent se substituer à ces derniers pour résoudre des problèmes relevant de la commande des processus. Nous avons opté pour celui de la synthèse d'observateur non linéaire

Considérons le système physique représenté dans Fig.1

•Description du système :

Le système, illustré dans Fig.1., représente un bras de robot constitué d'un rotor d'inertie J_2 qui entraîne par son mouvement de rotation et par l'intermédiaire d'une tige élastique de raideur k le mouvement d'un bras de masse m , de longueur l et d'inertie J_1 . L'excitation du rotor par le couple u lui provoque une rotation repérée par q_2 et une rotation du bras repérée par q_1 .

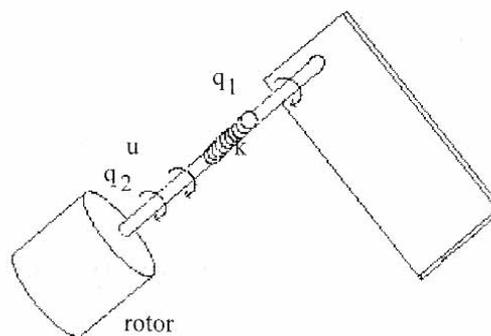


Fig.1.1 : Bras de robot

Les équations régissant le fonctionnement du système sont données comme suit :

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + k(q_1 - q_2) + mgl \sin q_1 &= 0 \\ J_2 \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) &= u \end{aligned} \quad (1.19)$$

En choisissant le vecteur d'état $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2]^T$, la représentation d'état du système s'obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{mgl}{J_1} \sin x_1 - \frac{k}{J_1}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k}{J_2}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J_2}u \end{cases} \quad (1.20)$$

La sortie du système est $y = x_1$

Les valeurs des différents paramètres intervenant dans la représentation d'état (1.20) sont données en MKSA comme suit : $J_1 = J_2 = 1$, $m = 1$, $l = 1$, $g = 9.8$, $k = 10$.

La représentation (1.20) devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -9.8 \sin x_1 - 10(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= 10(x_1 - x_3) + u \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le développement de Taylor du 1^{ier} et 3^{ième} ordre au voisinage de l'origine, permet d'obtenir, respectivement, les approximations : linéaire et cubique de (1.21) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -19.8x_1 + 10x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 10x_1 - 10x_3 + u \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -19.8x_1 + 10x_3 + \frac{9.8}{6}x_1^3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 10(x_1 - x_3) + u \end{cases} \quad (1.23)$$

pour les conditions initiales $x(0)=(\pi/3, 0, 0, 0)$ et $x(0)=(2\pi/3, 0, 0, 0)$, on a relevé les différentes représentations de (1.22), et (1.23)[13] dans la figure Fig.1.2 :

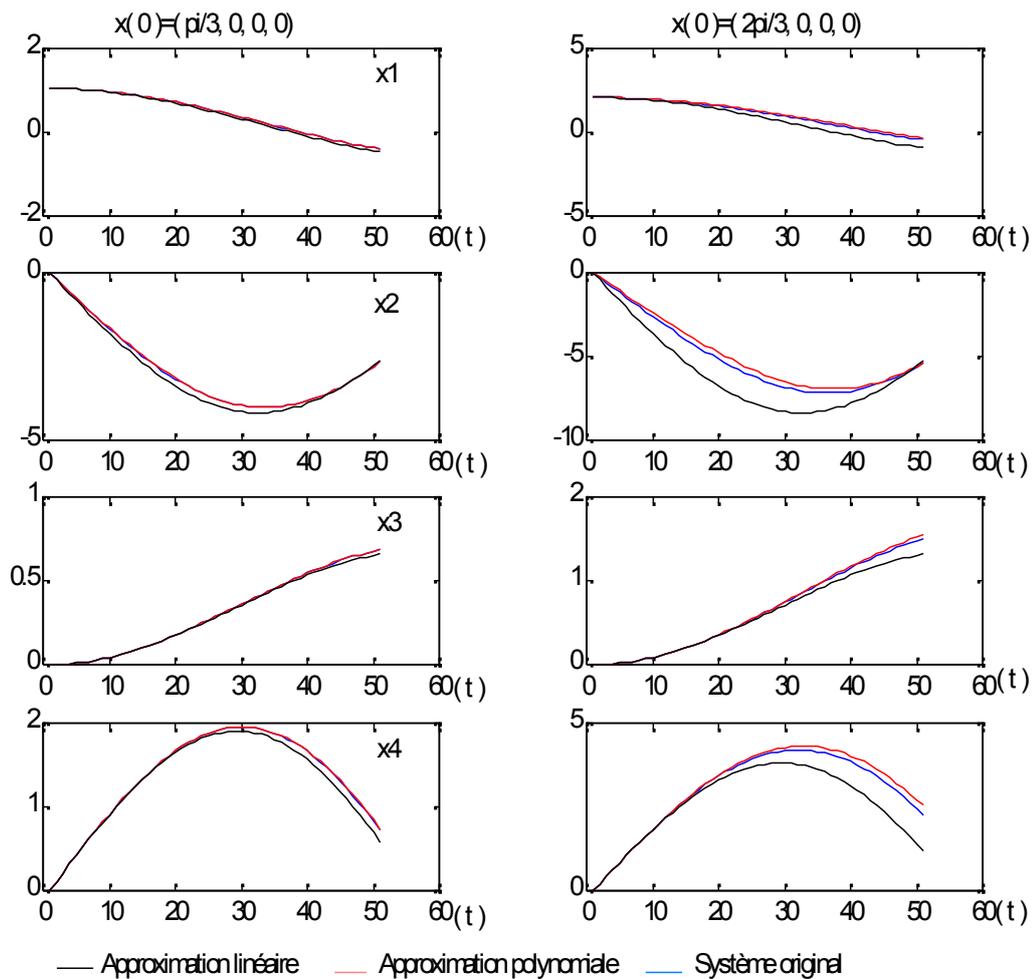


Fig 1.2 : Réponses du bras de robot aux conditions initiales [4]

Les résultats obtenus montrent bien que l'approximation polynomiale est bien meilleure que l'approximation linéaire dans un large voisinage de l'origine.

IV. Propriétés des systèmes polynomiaux [4-10-11-13] :

L'étude des propriétés (commandabilité, observabilité, stabilité), et de synthèses, ont été longuement abordés par les méthodes classiques connues en théorie des systèmes non linéaires, cela est illustré par l'apparition de nombreux volumes, qui ont permis d'ouvrir la voix à d'autres approches d'étude, d'analyse et de synthèse dont l'usage devient de plus en plus fréquent.

Dans ce qui suit, on présentera, certains résultats sur la stabilité, l'observabilité ainsi que la commandabilité.

IV.1 Stabilité des systèmes polynomiaux [10-4] :

Le problème de la stabilité des systèmes dynamiques est un sujet de préoccupation majeur du travail des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs depuis le siècle dernier.

En effet, les conséquences catastrophiques que pourraient engendrer une forme d'instabilité dans un système de commande imposent aux concepteurs d'établir, de la façon la plus ferme et la plus prudente possible, une étude et analyse détaillées de la stabilité de ce système avant d'envisager l'implémentation réelle de ce dernier.

Deux types d'études complémentaires peuvent être considérés : la conception de test pour savoir si un système est stable ou non, l'étude des lois de contre-réactions (retour d'état) qui permettent de rendre stable un système instable.

Lyapunov a établie, en 19ième siècle, une approche suffisamment générale pour l'étude de la stabilité des systèmes de commande. Dans la quelle, l'existence d'une fonction V , dite fonction de Lyapunov, définie sur un certain voisinage autour d'un point d'équilibre d'un système, et pour la quelle la dérivée (de la fonction) soit négative semi définie, est une condition suffisante pour affirmer la stabilité du point d'équilibre concerné. Même si cette démarche constitue une véritable solution au problème de la stabilité, elle n'offre pas de méthodologie systématique qui permet de construire de telles fonctions. Le problème de stabilité a été traité récemment dans le contexte des systèmes polynomiaux, mais dans un contexte très particulier puisque, la condition de stabilité qui y est développée concerne une classe de systèmes polynomiaux très restreinte qui est celle des systèmes quadratiques du second ordre

IV.1.1 Rappel sur la théorie de Lyapunov [4-10] :

Soit le système non linéaire représenté par (1.24) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.24}$$

et pour lequel l'origine est supposé être son point d'équilibre ie $f(0) = 0$.

- **Fonction de Lyapunov [13] :**

Une fonction scalaire $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov pour (1.24) si et seulement si :

- $V(x)$ est continûment dérivable dans D
- $V(x)$ est positive $\forall x \neq 0$
- $V(0) = 0$

L'étude de la stabilité à l'aide de la fonction de Lyapunov a constitué la base de très nombreux travaux jusqu'à maintenant

Théorème 1.1 :

Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov pour le système (1.24). Si en plus des trois conditions données ci-dessus :

$$-\dot{V}(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \geq 0, \forall x \in D$$

Alors l'origine est un point d'équilibre localement stable.

Et si :

$$-\dot{V}(x) \succ 0 \quad \forall x \in D$$

Alors l'origine est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable.

Si de plus :

$$-\dot{V}(x) \succ 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n$$

Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

IV.2. Observabilité et commandabilité [10]:

L'étude de la commandabilité et de l'observabilité des systèmes non linéaire, dans différents problèmes relevant de la théorie de la commande (stabilisation, commande optimale, synthèse d'observateur, réduction,...) est très important, cela se traduit par le volume important des travaux de recherche effectuée dans ce domaine. Ce qui n'est pas le

cas dans le contexte des systèmes polynomiaux. En effet, on a toujours tendance à utiliser les résultats et critères obtenus dans le cadre général des systèmes non linéaires. Ceci étant, n'a pas empêché certains auteurs à se pencher sur ce sujet pour essayer d'exploiter la structure particulière que possèdent ces systèmes afin de générer des méthodes plus simples de test de commandabilité et d'observabilité.

IV.2.1 Observabilité [10-11]:

Le problème fondamental de l'analyse d'observabilité d'un système physique est de pouvoir dire si l'état du système peut être déterminé en fonction des entrées et des sorties. Dans l'affirmative, la théorie de l'estimation fournit alors des outils pour reconstruire cet état ; nous rappelons que la connaissance des composantes de l'état non mesurées est en général nécessaire pour régler un système ou pour détecter des fautes du système.

La valeur initiale de l'état d'un système est, en général, inconnue. On peut alors se poser la question : sous quelles conditions l'état du système peut-il être déterminé à partir des sorties et des entrées ? Ce problème est appelé problèmes d'observabilité

L'observabilité d'un processus est un concept très important en Automatique. En effet, pour reconstruire l'état et la sortie d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

En général, pour des raisons de réalisabilité technique, de cout, etc. La dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné, t , l'état $x(t)$ ne peut pas être déduite algébriquement de la sortie $y(t)$ à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduite de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé : $u([0, t])$, $y([0, t])$.

Définition 1.3 [11]

Un système est observable si la connaissance de sa sortie et son entrée sur un intervalle temporel fini est suffisante pour déterminer son état initial.

Définition 1.4 [11]

Deux états initiaux x_0^1, x_0^2 sont discernables si on peut trouver sur un intervalle de temps $[0, T]$ une entrée telle que les trajectoires de sortie correspondantes aux deux états, lorsque cette entrée est appliquée, sont différents.

Définition 1.5 [11]

Le système (1.6) est globalement observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux indiscernables.

L'un des résultats classiques utilisé pour tester l'observabilité d'un système non linéaire possédant la structure (1.6) est celui établi à base de l'algèbre de Lie et reproduit dans la majorité des applications faisant appelent à cette notion. La démarche consiste à construire ce qui est appelée codistribution d'observabilité et vérifier que le rang de celle-ci est égal à la dimension du système. Pour plus de détaille voire [11-4].

IV.2.2 Commandabilité [11-4] :

Le concept de la commandabilité est une notion très importante dans la théorie du contrôle moderne (représentation d'état). Elle a été introduite par « Kalman » pour les systèmes linéaires.

On dénote par $x(t_f) = \varphi(t_f, t_0, x_0, u)$ le vecteur d'état du système (1.6) au temps t_f avec comme condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Définition 1.6 [11-4] :

Un système sous la forme (1,6) est commandable si pour chaque états x_0, x_f , il existe un temps fini T et une entrée de commande amissible $u[0, T]$ telle que $\varphi(T, 0, x_0, u) = x_f$.

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Cependant, pour contourner ce problème, on a tendance à étudier la commandabilité du système linéarisé partant du fait que la commandabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale [11]. Le cas inverse n'est pas le cas i.e. la non commandabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non commandabilité du système non linéaire [11]. Ceci constitue l'inconvénient principal de cette méthode.

V. Conclusion :

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une étude structurelle des systèmes dynamiques polynomiaux, donnant ainsi un aperçu sur les différentes représentations polynomiales considérées en littérature. Ces derniers sont obtenus directement par modélisation ou par approximation. Chaque une d'elles se distingue de l'autre par les avantages qu'elle offre dans telle ou telle application. L'usage d'une quelconque forme est alors orienté par le type du problème à traiter.

En suite, on s'est intéresser aux propriétés de ces systèmes, à savoir la stabilité l'observabilité et la commandabilité des systèmes polynomiaux.

Nous avons constaté que l'étude de ces propriétés reste encore sujet ouvert à des recherches dans le contexte particulier des systèmes dynamiques polynomiaux.

I. Introduction :

La notion d'impédance joue un rôle fondamental dans la description, la modélisation et l'analyse des circuits électroniques, et débouche sur la notion de fonction de transfert. La complexité croissante, impose la mise en œuvre d'une simplification (réduction) des modèles.

Les systèmes linéaires, ont été abondamment analysés par des automaticiens ou des mathématiciens appliqués (Zhou et Al, 1996 par exemple). Dans ce cas là, de nombreux résultats existent donc sur la réduction de modèles de systèmes dynamiques de grandes dimensions, et la recherche est toujours active dans ce domaine.

Dans ce contexte, une panoplie de méthodes de réduction existe en littérature, posant ainsi l'embaras du choix de la méthode qui convient à l'application envisagée. La nature, les propriétés du système à réduire ainsi que les objectifs (simulation, commande) peuvent indiquer et orienter le choix de la méthode appropriée.

Des méthodes basées sur la décomposition modale, désigné par méthode d'agrégation, se caractérise par le faite que l'ensemble des modes du modèle réduit est inclus dans celui des modes du modèle original. On peu faire référence à la méthode de Davison et celle d'Aoki. La méthode de Kokotovic, appelé -agrégation, basée sur le concept de perturbation singulière, se distingue des deux premières méthodes par le faite que l'ensemble des modes du modèle réduit est inclus dans celui du modèle original à prés.

D'autres méthodes, utilisent le principe de décomposition en valeurs singulières, ont été introduites au cours de ces dernières années. Une manière directe d'utiliser cette méthode est définie sous ce qui est appelé méthode de décomposition propre orthogonale (POD).

Cette dernière, est une technique d'analyse de données très efficace, qui permet d'approximer un système de dimension élevé par un autre de dimension nettement plus faible.

Cette méthode consiste à déterminer une base de modes propre orthogonaux. Ces fonctions propres, étant optimale au sens énergétique, nous permettent de les utiliser pour la construction de modèles réduit d'un système physique quelconque.

La décomposition POD, couvre un vaste domaine d'utilisation regroupant, ainsi, toutes sortes de disciplines. On la retrouve, par exemple, dans les applications du traitement d'image, pour la caractérisation du visage humain (Kirby et Sirovich, 1990), ou pour l'étude de l'activité neuronale (Sornborger et Al, 2003), en analyse de signal (Algazi et Sakrison, 1969), en compression de données (Andrews et Al, 1967), et beaucoup plus récemment dans le contrôle optimal (Ravindran, 2000 ; Afanasie et Hinze, 2001 ; Bergmann et Al, 2005 ; Bergmann et Cordier, 2006).

Le point central de toutes ces applications est l'extraction des caractères dominants d'un ensemble de données, permettant d'accéder ainsi à une réduction du modèle dynamique.

La réduction par troncation à base de réalisation équilibrée (TBR), est une autre approche incarnant le principe de décomposition en valeurs singulières.

L'apparition de la réalisation équilibrée, pour les systèmes linéaires invariants stables et minimaux, a marqué une avancée considérable dans ce domaine. Dans la base d'équilibre, il est possible d'opérer la réduction d'un modèle par simple élimination des variables d'états correspondantes à de faibles degrés de commandabilité et d'observabilité.

Les algorithmes de Moore et Laub, largement répondu dans des logiciels de modélisation, reposent sur la diagonalisation simultanée des gramians de commandabilité et

d'observabilité d'une réalisation minimale et stable et nécessite la résolution des équations de Lyapunov.

Quelques méthodes permettent d'équilibrer une matrice de transfert sans faire appel à la résolution des équations de Lyapunov, ont depuis été proposées. Certaines d'entre elles, considèrent les pôles du système connus (forme factorisée, avec pôles simple ou multiple, réel ou complexe).

D'autres s'appliquent à la forme rationnelle de la matrice de transfert dans le domaine de Laplace ou Z.

Bien que la notion de réalisation équilibrée, trouve son origine dans la synthèse de filtres numériques, les méthodes d'équilibrages sont encore peu exploitées pour la modélisation et la simulation des circuits électriques. Dans ce domaine, la notion d'impédance, conduit invariablement à des représentations sous forme de fonction de transfert. Dans ce cas, l'application des techniques usuelles d'équilibrage, n'est pas satisfaisante, car l'imprécision introduite par la transformation sous forme compagne du système peu occasionner des difficultés numériques.

D'intéressantes propriétés des fonctions d'entrée/ sortie (E/S), permettant de trouver une transformation équilibré, évitant la résolution des équations de Lyapunov, ont été récemment exploitées [16].

Cette méthode repose sur l'orthogonalisation des fonctions d'entrées dans le domaine temporel, et bien qu'elle est adaptée aux problèmes de modélisation de circuits, nécessite la connaissance explicite des pôles.

Le concept de décomposition en valeurs singulières est considéré également dans la méthode désignée par approximation de Hankel établie pour les systèmes LTI stables et minimaux. La décomposition en valeurs singulières est opérée sur la matrice de Hankel du système.

A partir de cette matrice, l'ordre du système réduit peut être tiré en s'aidant bien sûr des valeurs singulières de Hankel.

Cependant, le nombre très élevé des paramètres de Markov par lesquels la matrice de Hankel doit être construite ainsi que le calcul des puissances matricielles, restent les inconvénients majeurs de cette méthode.

Parallèlement à toutes ces méthodes auxquelles on a fait référence, d'autres directions ont été exploitées en vue de déterminer d'autres alternatives pour la réduction des systèmes linéaires. Les méthodes approximatives de Krylov en sont le résultat de ces travaux. ce sont des méthodes itératives qui peuvent être appliquées à des systèmes de très grandes dimensions. On parle surtout des circuits passifs RL, LC, RLC, des systèmes micros électromécaniques (MEMS) pour lesquels ces méthodes ont eu beaucoup de succès. Elles procèdent par projection des équations linéaires, décrivant le système LTI dans un espace de dimension n , en un sous espace de dimension réduite.

Dans le contexte de ce chapitre, on présentera quelques méthodes de réduction propre aux systèmes linéaires continus, vérifiant les propriétés de stabilité et de minimalité (Commandabilité et observabilité), et décrit dans l'espace d'état. Cependant, quelques rappels et définitions ont été jugés nécessaires avant d'entamer l'étude de la réduction.

II. Rappels et définitions [12], [13]:

- **Valeur propre et vecteur propre :**

Soit la forme générale matricielle d'un système linéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Les vecteurs propres correspondants aux solutions de l'équation (2.1) en mouvement libre ($u(t) = 0$) :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ \dot{x}(t) - Ax(t) &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Soit $X(p)$ la Transformée de Laplace de $x(t)$, alors :

$$\text{Lap}\{\dot{x}(t) = pX(p) - x_0\}\tag{2.3}$$

Si $x_0 = 0$, la relation (2.2) devient

$$\begin{aligned}pX(p) - AX(p) &= 0 \\ (pI - A)X(p) &= 0\end{aligned}$$

Si $X(p) \neq 0$ alors (2.3) revient à

$$\det(pI - A) = 0$$

Les valeurs propres du système sont donc les valeurs λ_i de p qui annulent le déterminant.

En posant $p = \lambda_i$ dans (2.3) on obtient :

$$(\lambda_i I - A)V_i = 0$$

avec V_i les vecteurs propres correspondant à λ_i

- **Valeurs singulières :**

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice A de rang K appartenant à $C^{m \times n}$ s'écrit :

$$A = u \Sigma W^*$$

$u \in C^{m \times m}$, $W \in C^{n \times n}$ sont unitaires

$$u u^* = I_m \text{ et } W W^* = I_n$$

Σ s'écrit avec $q = \min\{m, n\}$

- Si $m < n$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \delta_q & \vdots \end{bmatrix}$$

- Si $m > n$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_q \\ \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

- Si $m = n$

$$\Sigma = \text{diag}\{\delta_1 \dots \delta_q\}$$

Les δ_i sont appelées valeurs singulières de A , ce sont les racines carrées des valeurs propres de $A.A^+$ et A^+A . Elles sont réelles positives ou nulles, et en générale on les ordonne de la manière suivantes

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_k \geq \delta_{r+1} = \dots = \delta_q = 0$$

Les colonnes de u et W sont respectivement des vecteurs propres de $A.A^+$ et A^+A , on les appelle vecteurs singuliers (respectivement à gauche et à droite) de A

A^+ désigne la transposée conjuguée de A , si A est réelles, alors $A^+ = A^T$

- **Valeurs singulières de Hankel :**

On appelle valeurs singulières de Hankel d'une matrice de transfert, les racines carrées des valeurs propres du produit XY des gramians de commandabilité et observabilité

$$\hat{\delta}_i = [\lambda_i XY]^{1/2}$$

II. Réduction des systèmes linéaire: [4-14-15-16-17]

Soit S , un système linéaire continu, stable et minimal. Et de plus, il est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.4)$$

Où $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$.

Le problème de réduction, tel que prédéfini, consiste à déterminer un modèle

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ y_r = Hz \end{cases} \quad (2.5)$$

de dimension $r \ll n$ i.e. $z \in \mathfrak{R}^r$, tel que l'on ait, pour les mêmes entrées, $y \approx y_r$ en plus de la préservation des propriétés du système original (2.4).

II.1 Réduction par agrégation :

II.1.1 Méthode de Davison [14-4] :

Cette méthode consiste à comparer la rapidité des différents modes du système (2.4), les uns par rapport aux autres, après avoir réalisé sa diagonalisation (i.e diagonalisation de la matrice A).

On sait que le système (2.4) peut être partitionné comme suite :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.6)$$

Où $X_1 \in \mathfrak{R}^{r \times 1}$, $X_2 \in \mathfrak{R}^{(n-r) \times 1}$, les A_{ij} , B_j , C_j sont de dimensions appropriées.

Soit A une matrice diagonalisable.

V est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i de la matrice A .

Faisant le changement de base au système (2.4) suivant

$$x = Vz \quad (2.7)$$

Par conséquent

$$\dot{x} = V\dot{z} \quad (2.8)$$

On remplaçant x et \dot{x} par leur nouvelle valeur dans (2.4) on aura :

$$\begin{cases} \dot{z} = V^{-1}AVz + V^{-1}Bu \\ Y = CVz \end{cases}$$

Pour $\Lambda = V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_i)$ et $M = CV$, $E = V^{-1}B$, on obtient la forme canonique diagonalisable suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + V^{-1}Bu \\ y = CVz \end{cases}$$

Celle-ci mise sous forme partitionnée est donnée par (2.9)

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.9)$$

où $Z_1 \in \mathfrak{R}^r$ et $Z_2 \in \mathfrak{R}^{n-r}$, et les λ_i sont donnés avec un ordre décroissant i.e

$$\text{Re}(\lambda_i) \geq \text{Re}(\lambda_{i+1}).$$

Si à partir d'un certain rang r , on a le $\text{Re}(\lambda_r) \gg \text{Re}(\lambda_{r+1})$, alors on pourra dire que les $n - r$ modes sont, excessivement, plus rapides que les r premiers modes. Par conséquent ils sont moins dominants que les r premiers modes.

La réduction consiste alors, à supprimer directement les $n - r$ modes en posant $Z_2 = 0$ ou bien à négliger la dynamique de ces mêmes modes en posant $\dot{Z}_2 = 0$.

Reconsidérant la transformation de base (2.7) partitionnée :

$$x = Vz = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

V_{11} étant une matrice de dimension $(r \times r)$.

On considère le cas où on néglige la dynamique des modes rapides i.e. $\dot{Z}_2 = 0$. On calcule Z_1 et Z_2 avec la relation :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \Lambda_1 Z_1 + E_1 u \\ \dot{Z}_2 = \Lambda_2 Z_2 + E_2 u \end{cases} \quad (2.10)$$

Ainsi on a :

$$Z_2 = -\Lambda_2^{-1} E_2 u$$

Ayant $x_1 = V_{11} Z_1 + V_{12} Z_2$, et en remplaçant Z_2 par son expression, on obtient :

$$Z_1 = V_{11}^{-1} (X_1 + V_{12} \Lambda_2^{-1} E_2 u)$$

Par conséquent, on a le modèle d'ordre réduit, dans la nouvelle base, suivant :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \Lambda_1 Z_1 + E_1 u \\ y_r = M_1 Z_1 - M_2 \Lambda_2^{-1} E_2 u \end{cases} \quad (2.11)$$

En remplaçant (Z_1, \dot{Z}_1) par leur expression dans les relations (2.7) et (2.10), on aura le modèle réduit dans la base originale, suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = V_{11}\Lambda_1 V_{11}^{-1} X_1 + (V_{11} E_1 + V_{11} E_1 + V_{11}\Lambda_1 V_{11}^{-1} V_{12}\Lambda_2^{-1} E_2) u \\ y_r = M_{11} V_{11}^{-1} X_1 + (M_{11} V_{11}^{-1} V_{12}\Lambda_2^{-1} E_2 - M_{12}\Lambda_2^{-1} E_2) u \end{cases} \quad (2.12)$$

Exemple 2.1 :

Soit le système (2.4) dans le quel les paramètres sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 15]$$

Les valeurs propres de la matrice A sont solutions de son équation caractéristique. Elles sont distinctes $(-1, -2, -6)$ par conséquent, A est diagonalisable. La matrice modale associée à ses valeurs propres peut être obtenue comme suit :

$$V = \begin{bmatrix} -0.8301 & -0.6470 & 0.5345 \\ -0.5534 & -0.7548 & 0.8018 \\ -0.0692 & -0.1078 & 0.2673 \end{bmatrix}$$

Par conséquent on a le résultat suivant

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

On peut envisager la réduction en négligeant la dynamique du troisième mode $\lambda_3 = -6$ laquelle on peut considérer qu'elle est plus rapide que celle des deux autres modes. Cela fait l'ordre de réduction $r = 2$

Ainsi la matrice $V_{11} = \begin{bmatrix} -0.8301 & -0.6470 \\ -0.5534 & -0.7548 \end{bmatrix}$

Après tout calculs faits, la représentation d'état du système d'ordre réduit dans la base originale est donnée comme suite :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.3333 & -2 \\ 1.5556 & -3.3333 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0.9444 \\ -0.0926 \end{bmatrix}, C_r = [-0.4167 \quad 3.5000].$$

La réponse indicielle et impulsionnelle du système originale ainsi que du système réduit sont obtenues comme suite :

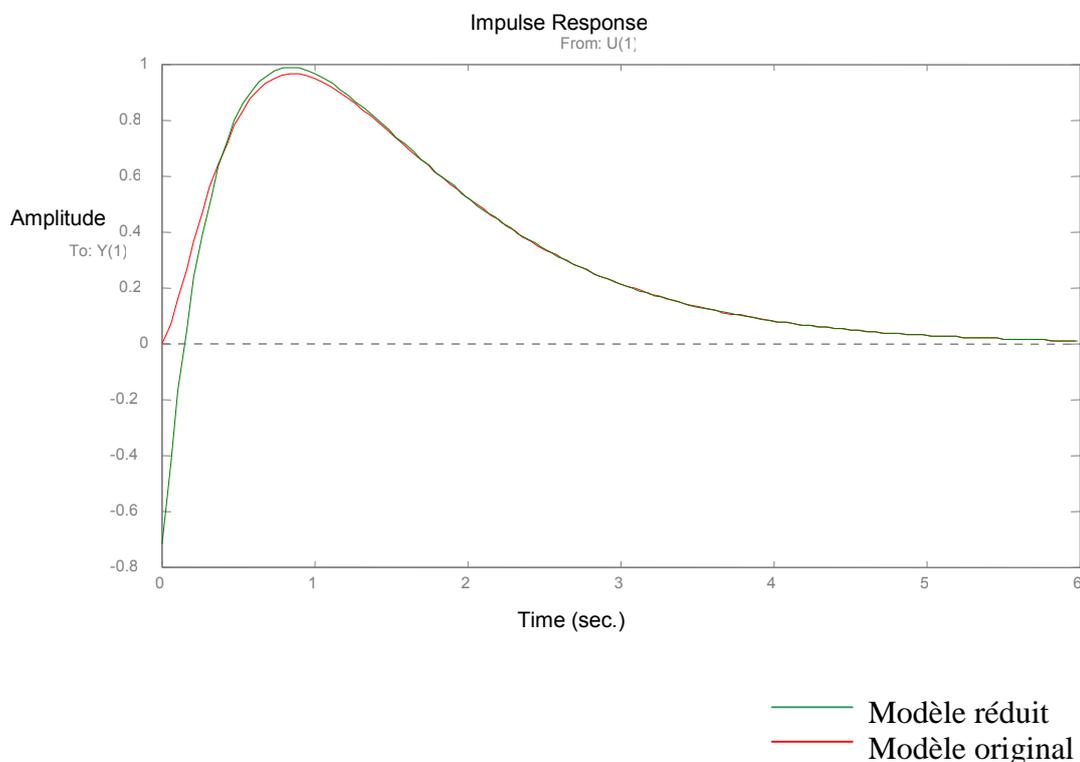


Fig.2.1 : réponse impulsionnelle du système original et réduit

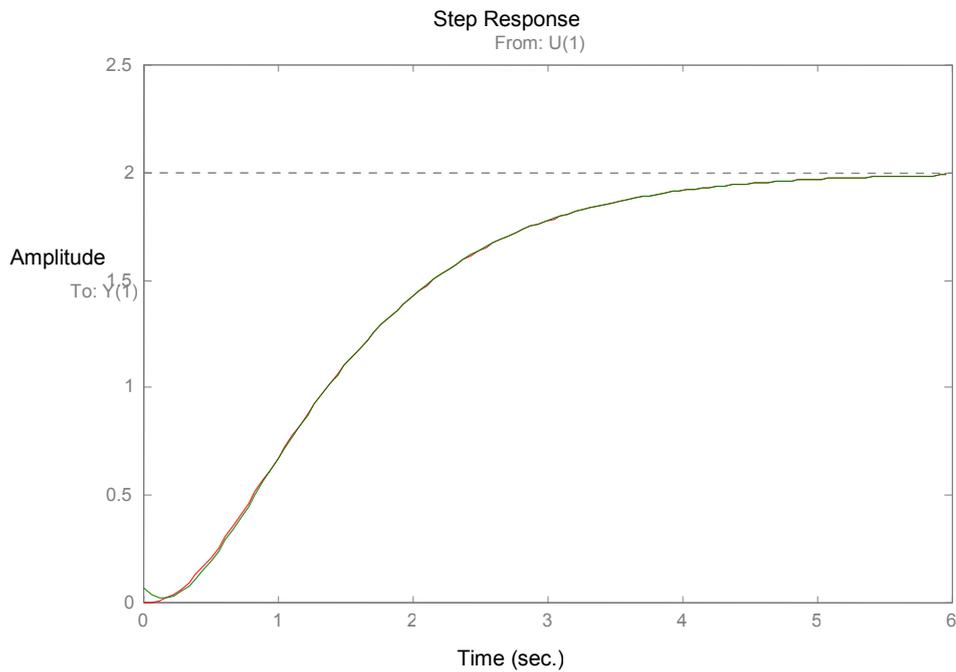


Fig.2.2 : Réponse indicielle du système original et du système réduit

Commentaire :

On peu remarquer que le système réduit obtenu est similaire au système original.

II.1.2 Méthode d'Aoki [15] :

Considérant les relations (2.4) et (2.5). Pour un changement de base $z = K x$, où : $z \in \mathbb{R}^r$ et K est une matrice constante de dimension $(r \times n)$ tel que $r < n$, on a la relation (2.13) suivante :

$$\begin{cases} \dot{Z} = KAK^+Z + BKu \\ y_r = CK^+Z \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour que $z = K x$ vérifies la relation (2.5), on doit avoir les conditions suivantes :

$$\begin{cases} F = KAK^+ \\ G = KB \\ H = CK^+ \end{cases}$$

K est appelé matrice d'agrégation.

Par conséquent, la clef du problème de réduction par agrégation par la méthode d'Aoki, se trouve, donc, dans la détermination de la matrice d'agrégation K . Plusieurs procédures sont adoptées pour calculer la matrice d'agrégation.

Une démarche de calcul très simple, définit la matrice d'agrégation comme suit :

$$K = T[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_r]^T$$

Où les w_i sont les vecteurs propres de la matrice A^T associés aux r premières valeurs propres, T étant une matrice carrée de dimension $(r \times r)$, quelconque mais inversible.

Remarque 2.1 :

On prenant la matrice $T = V_{11}$, on a de meilleurs résultats, toute en gardant les propriétés.

Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de A sont distinctes, la matrice d'agrégation est déterminée par :

$$K = T[I_r : 0_{r,n-r}]V^{-1} \quad (2.14)$$

V étant la matrice modale de A ,

I_r , $0_{r,n-r}$ sont respectivement les matrices identité et nulle.

Reprenons, à titre illustratif, l'exemple 2.1 :

Puisque les valeurs propre de A sont distincte, ($\lambda_i = (-1, -2, -6)$), K peut être déterminé par la relation (2.14)

En choisissant la matrice $T = V_{11}$, on obtient la matrice d'agrégation comme suite :

$$K = \begin{bmatrix} 0.9000 & 0.6000 & -3.6000 \\ -0.1500 & 1.9000 & -5.4000 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état du système réduit dans la base original est donnée par :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.3333 & -2.0000 \\ 1.5556 & -3.3333 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0.9000 \\ -1.1500 \end{bmatrix}, C_r = [1.0160 \quad 0.4464],$$

Les réponses impulsionnelles et indicelles du système réduit sont données par les figures suivantes :

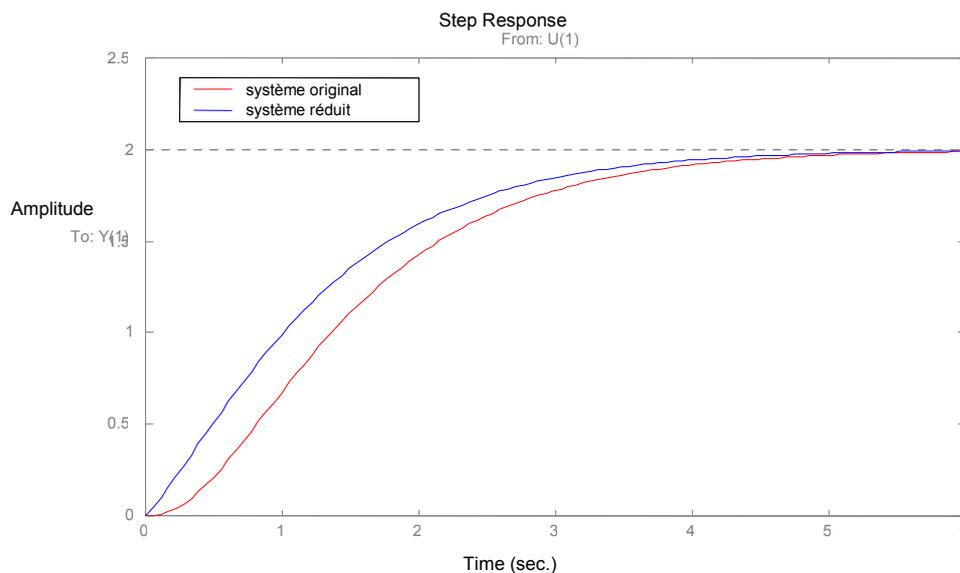


Fig.2.3. Réponse indicelle du système originale et réduit

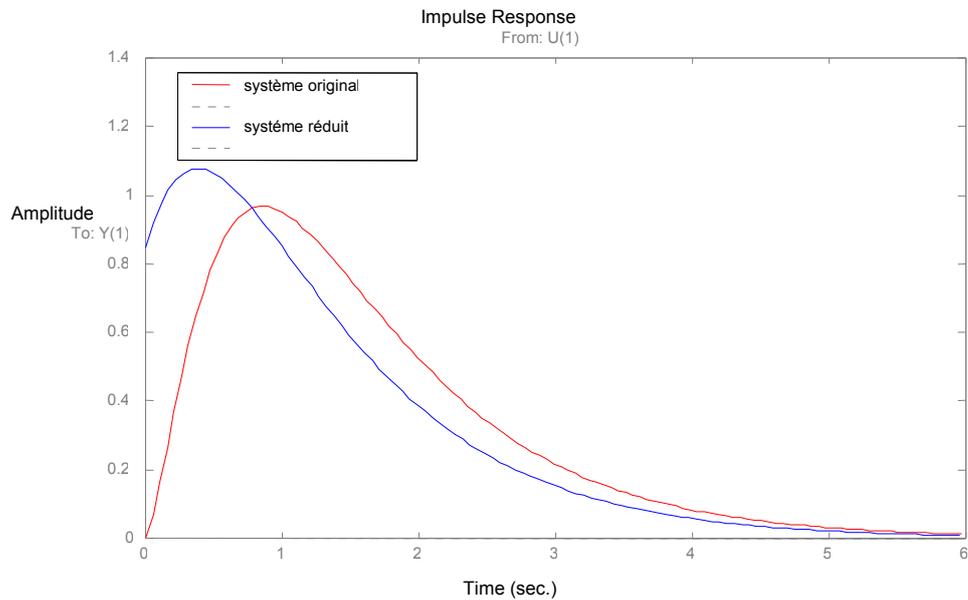


Fig.2.4 : réponse impulsionnelle du système original et réduit

Commentaire :

On remarque que la réponse du système réduit ne suit pas vraiment celle du système original.

II.2 Réduction par troncation à base de réalisation équilibrée (TBR) [16-4] :

Dans la base équilibrée, la réduction d'un modèle est opérée par simple élimination des variables d'états, ordonnées suivant leur importance dans le comportement entrée/sortie du système, correspondantes à de faibles degrés de commandabilité et d'observabilité. Ces derniers sont mesurés et quantifiés par l'intermédiaire des valeurs singulières de Hankel.

Définition 2.1 :

Considérons le système (2.4)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

On définit le gramian de commandabilité W par :

$$W = \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt$$

On définit le gramian d'observabilité M par :

$$M = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Ces gramians sont solutions respectives des équations linéaires de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} AW + WA^T = -BB^T \\ A^T M + MA = -C^T C \end{cases} \quad (2.15)$$

Pour A stable :

W est définie positif si la paire (A, B) est commandable

M est définie positif si la paire (A, C) est observable.

Remarque 2.2 :

Une valeur propre nulle pour W , implique une non commandabilité de la paire (A, B) , ainsi qu'une valeur propre nulle pour M , implique une non observabilité de la paire (A, C) .

Considérons la transformation de base $z = T_b x$, tel que T_b est une matrice de transformation.

Ainsi on a

$$\dot{x} = T_b^{-1} \dot{z}$$

On introduisant la relation (2.15) dans le système (2.4) on aura

$$\begin{cases} T_b^{-1} \dot{Z} = AT_b^{-1} Z + Bu \\ y = CT_b^{-1} Z \end{cases}$$

Sous cette transformation, le système (2.4) devient

$$\begin{cases} \dot{z} = A_b z + B_b u \\ y = C_b z \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\text{Où } \begin{cases} A_b = T_b A T_b^{-1} \\ B_b = T_b B \\ C_b = C T_b^{-1} \end{cases}$$

On peut facilement déterminer, après quelques manipulations matricielles, les gramians de commandabilité et d'observabilité, associés au système (2.16), comme suit :

$$\begin{cases} W_b = T_b W T_b^T \\ M_b = (T_b^{-1})^T M T_b^{-1} \end{cases}$$

Par conséquent:

$$W_b M_b = T_b W M T_b^{-1}$$

Résultat: les valeurs propre de La matrice WM sont invariantes sous une transformation de base (les matrices $W_b M_b$ et WM sont semblables).

La transformation $z = T_b x$, est appelé transformation équilibrée.

Théorème 2.1

Il existe une transformation de base pour laquelle

$$\Sigma = W_b = M_b = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_n$ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice WM , appelées valeurs singulières de Hankel.

Du théorème précédent découle la définition suivante :

Définition 2.2 (réalisation équilibrée) :

Une réalisation minimale et stable (A, B, C) est sous forme équilibrée si et seulement si, il existe une matrice diagonale définie positive

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \dots \quad \sigma_n) \text{ avec } \sigma_i \geq \sigma_{i+1},$$

Qui satisfait la paire d'équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} A\Sigma + \Sigma A^T &= -BB^T \\ A^T \Sigma + \Sigma A &= -CC^T \end{aligned} \tag{2.17}$$

La définition 2.2 ne saurait suffire pour justifier qu'une réalisation équilibrée présente un quelconque intérêt. L'interprétation des solutions des équations de Lyapunov en terme de minimisation des énergies de commandabilité et d'observabilité, présentée ci-dessous, permet d'y voir plus clair.

II.2.1 Fonctions de commandabilité et d'observabilité [17] :

Les fonctions de commandabilité et d'observabilité, appelées également fonctions d'énergie de commandabilité et d'observabilité, définies pour un système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases}$$

Où $u \in \mathfrak{R}^m$, $y \in \mathfrak{R}^p$ et $x \in \mathfrak{R}^n$ sont, à titre de rappel, les vecteur d'entrées, de sorties et des états du système, sont données par les expression suivante :

$$L_c(x_0) = \underset{\substack{u \in L_2(-\infty, 0) \\ x(-\infty) = 0, x(0) = x_0}}{\text{Min}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt \quad (2.18)$$

$$L_o(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 dt, x(0) = x_0, u \equiv 0, 0 \leq t < \infty$$

Où $u \in L_2(-\infty, 0)$ désigne un vecteur d'entrée pour lequel :

$$\int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt < \infty$$

Interprétations :

La fonction de commandabilité peut être vue comme étant le montant minimal de l'énergie de commande nécessaire pour atteindre l'état x_0 à partir de l'origine.

Parallèlement, la fonction d'observabilité peut être définie comme étant le montant de l'énergie générée en sortie par l'état initial x_0 , l'entrée de commande étant considérée nulle.

Dans le cas des systèmes de la forme (2.4), les fonctions d'énergie de commandabilité et d'observabilité sont quadratiques. Elles sont données comme suit

$$\begin{cases} L_c(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T W^{-1} x_0 \\ L_o(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T M x_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour un système (2.4) mis sous forme équilibrée par l'intermédiaire de la transformation équilibrée, les fonctions d'énergie (2.18) deviennent :

$$\begin{cases} L_c(z) = \frac{1}{2} z^T \Sigma^{-1} z \\ L_o(z) = \frac{1}{2} z^T \Sigma z \end{cases} \quad (2.20)$$

À partir des expressions de ces fonctions d'énergie, il peut être constaté que pour une petite valeur singulière σ_i , le montant de l'énergie de commande nécessaire pour atteindre l'état z_i est important. Parallèlement, le montant de l'énergie générée en sortie par ce même état est très faible. On lui attribue le qualificatif d'être faiblement commandable et faiblement observable. La contribution d'un tel état dans le comportement entrée/sortie est si faible que sa suppression ne l'affectera pas. De manière générale, si $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ alors, les composantes d'état z_{r+1} jusqu'à z_n sont, faiblement commandables et faiblement observables comparées aux r premières variables d'état. Leurs faibles contributions dans le comportement entrée/sortie justifient leur suppression.

II.2.2 Procédure de réduction :

Une méthode directe de réduction consiste à tronquer, dans la réalisation équilibrée, les états possédant de faibles valeurs singulières i.e. poser directement $z_{r+1} = \dots = z_n = 0$. En procédant ainsi, l'apport des états tronqués en régime permanent est négligé. Ceci est tout le contraire de la seconde méthode qui consiste à poser $\dot{z}_{r+1} = \dots = \dot{z}_n = 0$. L'apport des états z_{r+1}, \dots, z_n en régime permanent n'est pas négligé. La première étape consiste, donc, à mettre le système (2.4) sous forme équilibrée. La transformation de base qui permet cette opération est donnée par l'algorithme de Laub suivant.

Algorithme de Laub/Moore[4]:

- Calcul des matrices gramians de commandabilité et d'observabilité solutions des équations de Lyapunov (2.17).
- Calcul de la matrice R telle que $M = R^*R$ (factorisation de Cholesky)
- Calcul de la matrice $N = RWR^*$
- Décomposition en valeurs singulières de la matrice N : $N = U \Sigma^2 U^T$.
Avec $U^T U = I$.
- Calcul de la matrice de transformation T_b donnée par : $T_b = \Sigma^{-\frac{1}{2}} U^T R$.

Une fois le système est sous forme équilibrée, la réduction est opérée directement en éliminant les états qui correspondent à de faibles valeurs singulières.

Reconsidérons l'exemple (2.1) :

En utilisant l'algorithme de Laub/Moore on obtient les résultats suivants :

Les matrices de commandabilité et d'observabilité sont données respectivement par :

$$W_c = \begin{bmatrix} 1.0744 & 0.4018 & 0.0417 \\ 0.4018 & 0.1838 & 0.0201 \\ 0.0417 & 0.0201 & 0.0022 \end{bmatrix} \text{ et } W_o = \begin{bmatrix} 1.2887 & 0.0000 & -1.7738 \\ 0.0000 & 1.7738 & -0.5000 \\ -1.7738 & -0.5000 & 15.9762 \end{bmatrix}$$

On a alors les valeurs singulières de Hankel suivantes :

$$r_{hankel} = (1.2324, 0.2436, 0.0112)$$

Ainsi on obtient la matrice de transformation suivante :

$$T_b = \begin{bmatrix} 2.811 & -2.007 & 0.117 \\ -1.861 & 3.258 & -0.399 \\ 0.405 & -1.043 & 1.023 \end{bmatrix}$$

On choisissant l'ordre de troncation $r_h = 2$, on obtient le système réduit représenté par les matrices d'états suivantes :

$$F_{\acute{e}qui} = \begin{bmatrix} -0.3438 & -0.9290 \\ -0.9290 & -2.0434 \end{bmatrix}, G_{\acute{e}qui} = \begin{bmatrix} 0.9206 \\ -0.9978 \end{bmatrix}, H_{\acute{e}qui} = [0.9206 \quad 0.9978]$$

Les figures fig.2.5 et fig.2.6 représentent respectivement la réponse impulsionnelle et indicielle du système étudié :

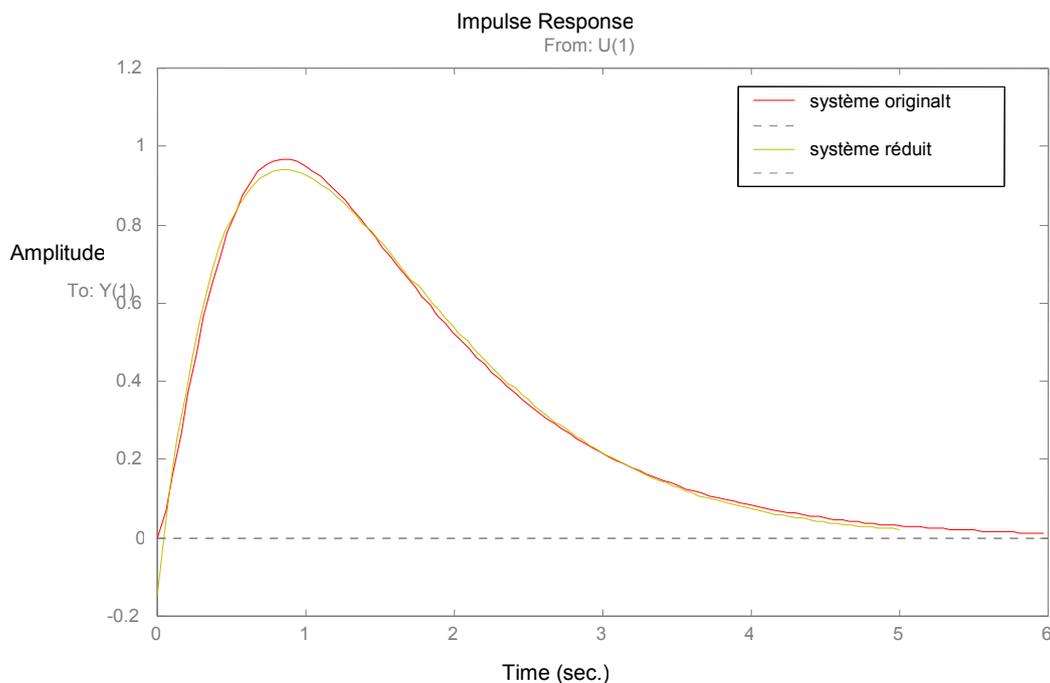


Fig.2.5 : réponse impulsionnelle du système original et réduit

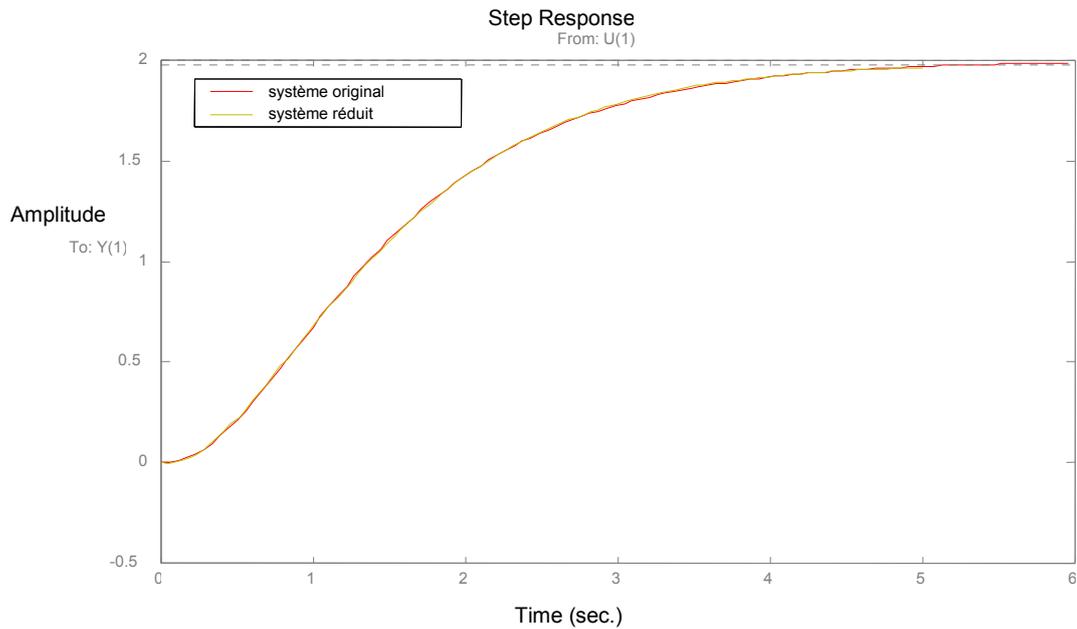


Fig.2.6. Réponse indicielle du système originale et réduit

Commentaire :

On remarque que le modèle réduit obtenu par troncation à base de la réalisation équilibrée affiche un comportement plus proche du système original.

IV. Application

Considérons maintenant un autre exemple de la forme (2.4) avec les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], D = 0$$

•**Réduction par agrégation de Davison:**

La matrice modale de l'application est donnée par :

$$V = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.2182 & -0.1042 \\ 0.5774 & -0.4364 & 0.3145 \\ -0.5774 & 0.8729 & -0.9435 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par

$$\lambda_i = (-1, -2, -3)$$

On obtient ainsi le modèle réduit par la méthode de Davison suivant :

$$A_{rD} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B_{rD} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 2.66667 \end{bmatrix}, C_{rD} = [1.000 \quad 0.000]$$

•**Réduction par agrégation d'Aoki:**

$$\text{Pour } T = V_{11} = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.2182 \\ 0.5774 & -0.4364 \end{bmatrix}$$

La matrice d'agrégation K est égale à :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1.5 & -0.5 \\ 3 & 5.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Ainsi on a la représentation d'état du système réduit par la méthode d'Aoki suivante :

$$A_{rA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B_{rA} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \end{bmatrix}, C_{rA} = [0 \quad 0.3333]$$

•**Réduction par troncation à base de la réalisation équilibré:**

Les gramians de commandabilité et d'observabilité sont représentés respectivement par les expressions suivantes :

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.5333 & 0.000 & -0.5333 \\ 0.000 & 0.5333 & 0.000 \\ -0.5333 & 0 & 5.8667 \end{bmatrix} \text{ et } W_o = \begin{bmatrix} 1.2167 & 0.5500 & 0.0833 \\ 0.5500 & 0.3083 & 0.0500 \\ 0.0833 & 0.0500 & 0.0083 \end{bmatrix}$$

Les valeurs singulières de Hankel :

$$R_{Hankel} = (0.8550, 0.2052, 0.0169)$$

Ainsi on a la matrice de transformation :

$$T_b = \begin{bmatrix} -0.2767 & 0.8308 & -0.2980 \\ -0.8308 & -1.5007 & 1.5741 \\ -0.2980 & -1.5741 & -4.2225 \end{bmatrix}$$

On obtient le modèle réduit suivant

$$F_{\acute{e}qui} = \begin{bmatrix} -0.2767 & 0.8308 \\ -0.8308 & -1.5007 \end{bmatrix}, G_{\acute{e}qui} = \begin{bmatrix} 0.6879 \\ 0.7848 \end{bmatrix}, H_{\acute{e}qui} = [0.6879 \quad -0.7848]$$

Les différentes réponses impulsionnelles et indicielles des modèles réduits, sont données par les deux figures suivantes :

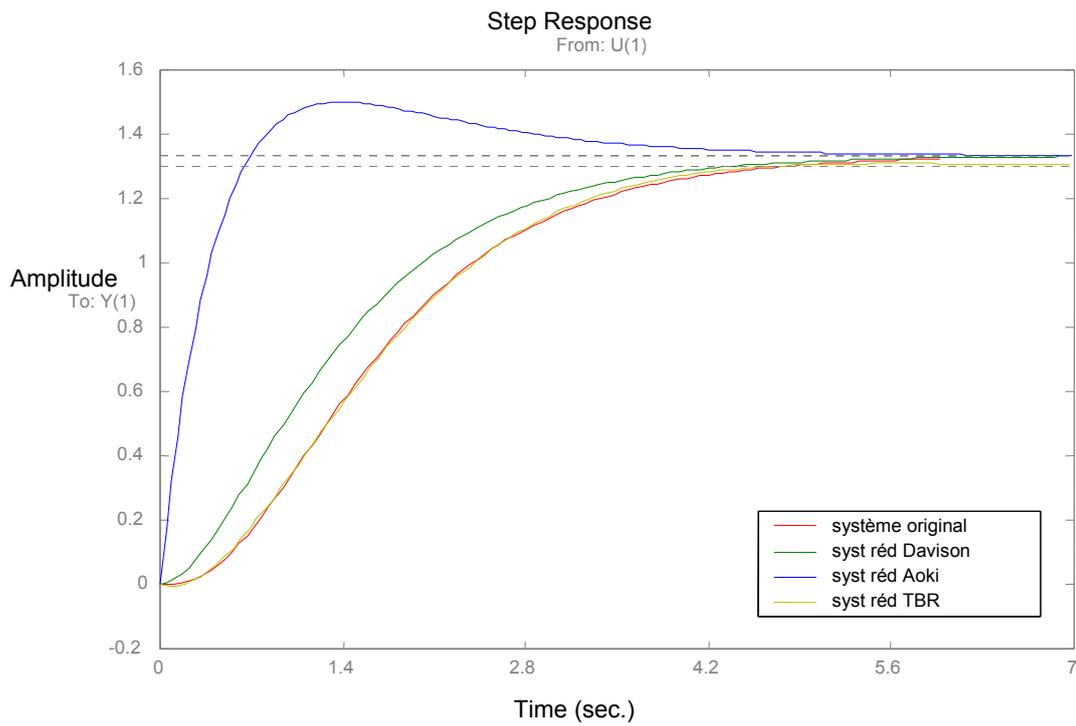


Fig.2.7. Réponse indicielle du système originale et réduit

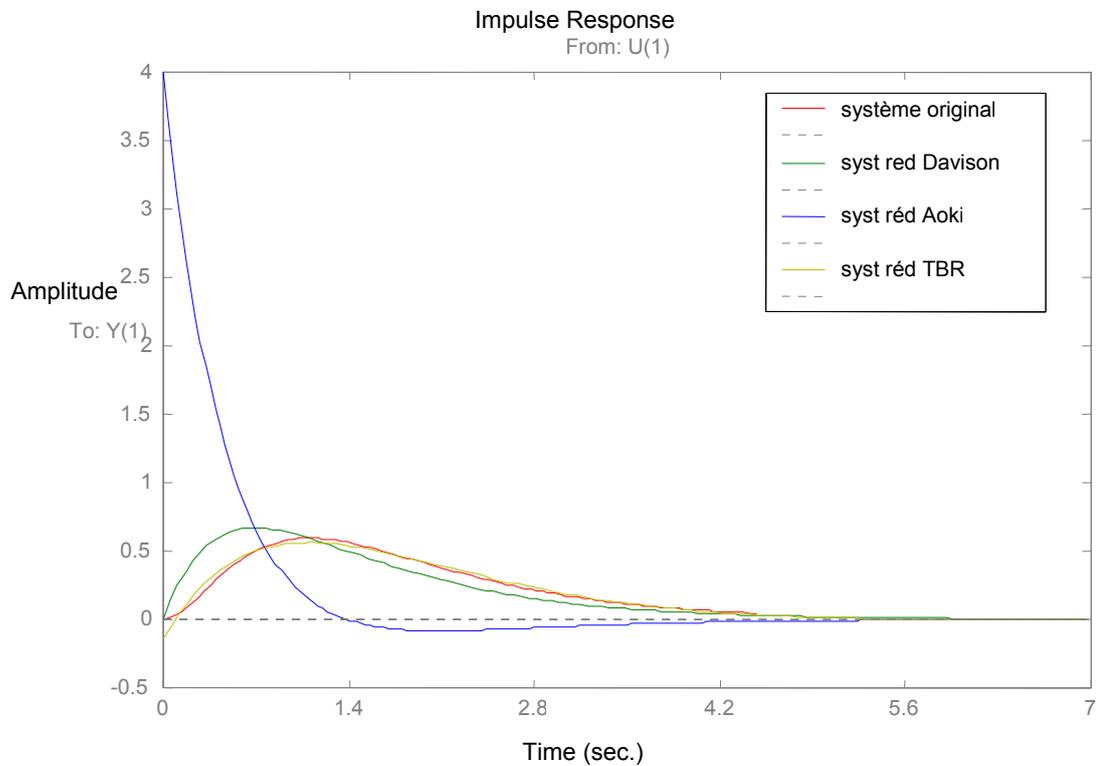


Fig.2.8 : réponse impulsionnelle du système original et réduit

Commentaire :

On peu remarquer que le modèle obtenu par agrégation n'affiche pas un comportement similaire au modèle original, en particulier le modèle obtenu par Aoki. Ce n'est pas toujours évident d'éliminer les modes les plus à gauche dans le plan complexe.

Par contre, le model obtenu par la TBR, affiche un comportement similaire (presque identique) au model original.

V. Conclusion :

Nous avons essayé, dans ce chapitre, de présenter quelques méthodes de réductions linéaires, en particulier, la méthode d'agrégation et la troncation à base de la réalisation équilibrée.

On a pu remarquer à travers des exemples qu'on a étudiés, que le modèle réduit obtenu par agrégation n'est pas toujours validé, cela est illustré à partir des courbes obtenus. Le problème revient au choix du mode à agréger. La meilleure solution peut être obtenue par simulation, ce qui n'est pas évident pour un système de grande dimension (nombre de modes important). La TBR s'avère plus appropriée, sachant qu'elle affiche un comportement idem au modèle original.

I. Introduction :

La détermination numérique d'une solution d'un processus physique non linéaire et complexe nécessite encore de nos jours des ressources informatiques conséquentes, que ce soit en temps de calculs ou en occupations mémoires.

Parvenir à construire des modèles simples et fidèles pour des systèmes physiques et complexes, constitue un objectif d'une grande importance dans le problème de synthèse de commande. Cet objectif est très difficile à réaliser, à cause de la relation proportionnelle inverse qui existe entre la fidélité d'un modèle et sa complexité.

Idéalement, nous aimerions ramener le nombre important de degrés de liberté, généralement nécessaire à la description dynamique du système physique S , à quelques degrés de liberté, tout en reproduisant très précisément son comportement original.

Le problème de réduction consiste donc à déterminer un système , de façon à ce que :

- ✓ L'erreur d'approximation $e = y - y_r$, soit faible pour les mêmes entrées.
- ✓ Les propriétés de stabilité, passivité, autre propriété (commandabilité, observabilité,...) soit préservées.
- ✓ La procédure de calcul soit efficace.

Etant donné l'importance des enjeux, la réduction de modèles non linéaires a fait l'objet d'étude de beaucoup de recherches qui ont été et qui restent très actives. Nous pouvons citer à titre d'exemple, la méthode de réduction de Scherpen [17] adresser de façon générale aux systèmes non linéaires affines par rapport à l'entrée.

Cette méthode constitue en réalité, une extension des résultats obtenus dans le cas linéaire. Elle offre la possibilité de mesurer les contributions des variables d'états dans le comportement entrée/sortie du système, grâce à ce qu'a définie Scherpen comme étant les fonctions d'énergies de commandabilité et d'observabilité [17], données respectivement par les relations (3-1) et (3-2) suivantes :

$$L_c(x_0) = \underset{\substack{u \in L_2(-\infty, 0) \\ x(-\infty) = 0, x(0) = x_0}}{\text{Min}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt \quad (3-1)$$

$$L_o(x_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \|y(t)\|^2 dt, x(0) = x_0, u \equiv 0, 0 \leq t < \infty \quad (3-2)$$

Où $u \in L_2(-\infty, 0)$ désigne un vecteur d'entrée pour lequel :

$$\int_{-\infty}^0 \|u(t)\|^2 dt < \infty.$$

Ces relations peuvent être interprétées comme suite:

La fonction de commandabilité $L_c(x)$, peut être vue comme étant le montant minimale de l'énergie de commande nécessaire pour atteindre l'état x_0 à partir de l'origine. Parallèlement, la fonction d'observabilité $L_o(x)$, peut être définie comme étant le montant de l'énergie générée en sortie par l'état initiale x_0 , l'entrée de commande étant considéré nulle.

Cependant, cette méthode est entravée par deux contraintes majeurs :

La première contrainte est liée à la résolution des équations non linéaire d'Hamilton Jacobi et de Lyapunov pour, respectivement, la détermination de $L_c(x)$ et $L_o(x)$.

La deuxième contrainte, est liée à la détermination de la transformation équilibrée.

Dans le contexte de ce chapitre, nous nous sommes focalisés dans le cas particulier de la réduction des systèmes dynamiques non linéaires : c'est la méthode de réduction de Prajna, adressée exclusivement aux systèmes polynomiaux.

Celle-ci est accomplie en utilisant la programmation SOS [18] (Sum Of Squares programation) sur certaines inégalités de Lyapunov, lesquelles sont équivalentes aux inégalités linéaires matricielles de Lyapunov de la commandabilité et l'observabilité pour les systèmes linéaires.

Dans notre procédure de réduction, des notions de la réalisation équilibrée, utilisées ordinairement dans l'analyse de l'observabilité et la commandabilité des systèmes linéaires, sont utilisés pour les modèles polynomiaux.

La troncation à base de la réalisation équilibrée est une méthode populaire pour la réduction des systèmes. Le mérite revient à la simplicité de cette dernière ainsi qu'à la qualité du système réduit obtenu.

Malheureusement, trouver une réalisation équilibrée d'un modèle via les solutions des équations de Lyapunov (gramians d'observabilité et de commandabilité) n'est pas une tâche facile à réaliser pour les systèmes non linéaires par rapport aux systèmes linéaires [6]. Cela revient à la difficulté de la résolution des équations de Lyapunov pour trouver les énergies de commandabilité et d'observabilité

Le problème est de pouvoir trouver une transformation de base pour avoir une réalisation équilibrée du système polynomiale. Pour cela, nous devons trouver des gramians satisfaisant les inéquations de Lyapunov autour du point d'équilibre.

Lorsque les gramians sont affinement paramétrisés, avec des coefficients inconnus, leurs estimations peut être retourné à un problème de programmation polynomiale qui peut être résolu en utilisant SOSP pour avoir ces coefficients.

Prajna à définit les bornes supérieures et inférieures des gramians d'observabilité et de commandabilité, comme étant des fonctions polynomiales, solution globales ou locales des inéquations de Lyapunov [6]. La détermination de ces fonctions est alors formulée sous forme de programmation SOS. Dans ce contexte, un bref aperçu sur la programmation SOS est nécessaire.

II. Généralités sur la programmation SOS (Sum Of Squares Programming)[18-19-1-20-6-4]:

Dans cette section, un bref aperçu sur la programmation SOS (Sum Of Squares programation) est présenté. Cette dernière constitue un outil mathématique très puissant qui, associé aux systèmes polynomiaux, permet de contourner et de résoudre plusieurs problèmes relevant de la théorie de la commande.

II.1 Décomposition SOS [4]

Définition 3.1 :

Un polynôme $P(x)$ de degré $(2d)$ est définie comme étant SOS, si et seulement s'il existe des polynômes $f_1(x) \dots f_m(x)$ tel que

$$P(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (3-3)$$

La relation (3-3) est appelée décomposition du polynôme $P(x)$ en somme des carrées d'autres polynômes (SOS Decomposition).

L'existence d'une telle décomposition peut être montrée équivalente à l'existence d'une matrice réelle positive semi définie Q tel que :

$$P(x) = Z^T(x) Q Z(x) \quad (3-4)$$

Où $Z(x)$ est un vecteur de monômes de degré inférieur ou égal à (d) ($d = \text{degré}(P(x))/2$) tel que

$$Z(x) = [1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 x_2, \dots, x_n^d]^T.$$

Q est appelé matrice de Gram.

L'équivalence (3-4) fait que le calcul de la décomposition SOS, utilise la programmation semi définie (SDP).

Compte tenu de la relation très étroite (3-4) existant entre la programmation SOS et la programmation SDP, un bref aperçu sur cette dernière est jugé nécessaire.

II.2 Généralités sur la programmation semi définie (SDP) [19] :

La programmation SDP (Semi Definit Programtion) peut être considérée comme étant l'extension de la programmation linéaire au cas matriciel, les contraintes sur les variables de décisions dans un programme linéaire sont remplacées par un cône de matrice positives semi définie dans un programme semi défini.

Définition 3.2 [1] :

Une matrice M carrée, symétrique est positive semi définie (PSD) ssi :

$$x^T M x \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$$

c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice M sont positives.

La notation $M \geq 0$ est souvent utilisée pour désigner que M est positive semi définie.

Remarque 3.1 :

L'ensemble $S_n^+(\mathfrak{R})$ formé des matrices semi définie à coefficient dans \mathfrak{R} , est un cône.

Un programme semi définie est un problème d'optimisation d'une fonction objective à travers un ensemble admissible, définie par l'intersection d'un sous espace affine avec un cône formé par des matrices positives semi définie.

II.2.1. Forme primal standard :

On considère le problème d'optimisation suivant : Etant donné deux entier $n, m \geq 1$, un vecteur $b \in \mathfrak{R}^m$ et des matrices $A_i \in M_n(\mathfrak{R})$, $i \in [1, m]$ et $C \in M_n(\mathfrak{R})$, on cherche à :

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \text{minimiser} && C \bullet X \\
 & \text{sous les contraintes} && \forall i \in [1, m], A_i \bullet X = b \\
 & && X \in S_n^+(\mathfrak{R})
 \end{aligned}$$

où il y a la variable $X \in S_n^+(\mathfrak{R})$

On supposant, sans perdre de généralité, que les matrices C et A_i sont symétrique, le problème **(P)** est dit sous forme standard primal. On l'écrira sous la forme consiste suivante :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(P)} & \min & C \bullet X \\
 & \text{contrainte} & \forall i \in [1, m], A_i \bullet X = b \\
 & & X \in \mathcal{S}_n^+(\mathfrak{R})
 \end{array}$$

II.2.2 Forme dual non standard :

Il existe plusieurs formulations différentes (mais équivalentes) du problème de programmation semi défini positif.

Ainsi, on rencontre souvent dans la littérature le problème :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(P}_2\text{)} & \max & b^T y \\
 & \text{contrainte} & \sum_{i=1}^m A_i y_i \leq C
 \end{array}$$

où $y \in \mathfrak{R}^m$, et les matrices C et A_i jouissent des mêmes propriétés que dans le paragraphe (II.2.1).

II.3 Programmation SOS [4-6-18] :

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, il y a des conditions qui exigent qu'un polynôme soit non négatif.

Cependant, vérifier la non négativité d'un polynôme est si difficile quand ce dernier a un degré minimum 4.

On vérifiant que le polynôme est un SOS, donc SDP, on peut remplacer les conditions de la non négativité du polynôme, par une condition suffisante sur l'existence de la décomposition en somme des carrés d'autres polynômes (SOSD).

Remarque 3.2 :

Tous les polynômes SOS sont non négatifs, mais l'inverse n'est pas forcément le cas.

Un programme SOS est un problème d'optimisation. Il existe un logiciel Sostools, conçu sous Matlab destiné pour la résolution des programmes SOS. Ce paquet laisse l'utilisateur choisir entre deux solvers SDP, SeDuMi ou SDPT3. (dans notre cas, nous avons SeDuMi).

Un programme SOS, défini par Sostools est de la forme suivante :

Trouver l'ensemble des polynômes à coefficients inconnus, $\{a_{i,j}(x)\} \in \mathfrak{R}_n$, cherchés pour avoir l'ensemble $\{P_i(x)\}_{i=1}^{\hat{N}} \in \mathfrak{R}_n$, et l'ensemble $\{P_i(x)\}_{i=\hat{N}+1}^N$ soit SOS, revient à :

minimiser $W^T C$

sous contrainte $a_{0,j}(x) + \sum_{i=1}^N P_i(x) a_{i,j}(x) = 0$ pour $j = 1, 2, \dots,$

$a_{0,j}(x) + \sum_{i=1}^N P_i(x) a_{i,j}(x)$ sont SOS (≥ 0) pour $j = +1, \dots, J$

où :

C est un vecteur formé par les coefficients inconnus des polynômes $P_i(x)$ pour $i = 1, 2, \dots, \hat{N}$ et des coefficients des polynômes SOS $P_i(x)$ pour $i = \hat{N} + 1, \dots, N$

W est un vecteur contenant les coefficients de pondération de la fonction objective.

Les polynômes $P_i(x)$ sont appelés les variables SOS du programme.

On peut également considérer plusieurs autres formes canonical équivalentes d'un programme SOS.

Une forme plus simple est donnée comme suite :

$$\min \sum_{j=1}^m W_j C_j$$

$$\text{sujet à } a_{i,0}(x) + \sum_{j=1}^m a_{i,j}(x)C_j \text{ est SOS pour } i = 1, \dots, p$$

Où :

C_j sont des variables scalaires réelles.

W_j sont des nombre réel données.

$a_{i,j}(x)$ sont des polynôme donnés.

Remarque 3.3 :

Les méthodes de résolution des programmes SDP et des programmes SOS, n'ont pas fait l'objet de notre étude.

Après avoir présenter un bref aperçus sur la programmation SDP et la programmation SOS, nous pouvons passer, à présent, à ce qu'a été l'objet de notre travail : La réduction des systèmes dynamiques polynomiaux.

II.4 Réduction des systèmes dynamiques polynomiaux [6] :

Tout comme mentionné toute au début, la méthode de Prajna, semble la plus appropriée pour l'études de ce modèle de réduction.

Prajna définit les bornes des énergies d'observabilité et de commandabilité, comme étant solutions respectives des inéquations de Lyapunov.

II.4.1 Gramians polynomiaux d'observabilité et de commandabilité [4-6] :

Soit le système polynomiale suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t), / x(0) = x_0 \\ y(t) = h(x(t)), \end{cases} \quad (3-5)$$

tel que $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ représente l'état du système.

$u(t) \in \mathfrak{R}^m$ représente l'entrée du système.

$y(t) \in \mathfrak{R}^p$ représente la sortie du système.

Sans perdre de généralité, supposons, que l'origine est le point d'équilibre du système.

C-à-d $f(0) = 0$

Les bornes des énergies de commandabilité et d'observabilité, tel que définie par Prajna, sont représenté par les inégalités polynomiales définie dans les propositions (3-1) et (3-2) suivantes :

Proposition 3.1

Ayant le système polynomiale (3-5), pour le quel l'entrée est considérée nulle et $x(0) = x_0$.

S'il existe une fonction polynomiale $W_o(x)$ positif définie, tel que :

$$W_o(0) = 0$$

et $-\frac{\partial W_o(x)}{\partial x} f(x) - h^T(x)h(x) \geq 0 \quad \forall x \in K \subseteq \mathfrak{R}^n, \quad (3-6)$

Où K est un voisinage de l'origine.

Alors il existe un voisinage $B_o \in K$ tel que, si le système (3-5) est à l'état initial $x(0) = x_0 \in B_o$, alors pour une entrée nulle, la borne supérieure de la norme de la sortie du système (3-5) est donnée par la relation

$$\|y\|^2 \leq W_o(x_0) \quad (3-7)$$

Tel que la norme de la sortie est considérée le long d'un intervalle quelconque $[0, T]$.

Proposition 3.2 :

S'il existe une fonction polynomiale $W_c(x)$ positive définie, pour le système (3.5), tel que :

$$W_c(0) = 0$$

et

$$-\frac{\partial W_c(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) + u^T u \geq 0 \quad \forall x \in K \text{ et } u \in L \quad (3-8)$$

Où K et L représentent des ensembles ouverts contenant l'origine du système.

Alors, il existe un voisinage de l'origine $B_c \subseteq K$, tel que si le système (3-5) est à l'état initial $x(0) = 0$, la borne inférieure de la norme de l'entrée nécessaire pour atteindre l'état $x(T) \in B_c$ est représentée par la relation :

$$\|u\|^2 \geq W_c(x(T)).$$

Interprétation :

La même interprétation que celle donnée dans le cas linéaire peut être adopter pour ce cas.

Les états pour les quelles $W_o(x_0)$ prend de faibles valeurs, génèrent de faibles énergies en sortie. Ils sont par conséquent faiblement observables.

Les état pour les quelles $W_c(x(T))$ prend de grandes valeurs, nécessite de grandes énergies pour les commander. Ils sont par conséquent faiblement commandables.

Il s'agit donc de minimiser $W_o(x_0)$ et de maximiser $W_c(x(T))$ sur l'ensemble des états appartenant au voisinage de l'origine considérée.

$W_o(x)$ et $W_c(x)$ sont alors dit gramians polynomiaux d'observabilité et de commandabilité.

La détermination de ces derniers est réalisée à l'aide de la programmation SOS.

En effet, dans le cas où K et L sont semi algébrique, un algorithme de recherche des gramians satisfaisant les inéquations de Lyapunov, peut alors être généré en remplaçant les conditions (3-6) et (3-8) par des condition SOS.

Algorithme

- Fixer le degré $2d$ pour le polynôme $W_o(x)$
- Choisir une fonction positive définie $\varphi(x)$ telle que $W_o(x) - \varphi(x)$ soit SOS.
- Définir le voisinage semi algébrique de l'origine K approprié de la manière telle que :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n / g_k(x) \geq 0\}, \text{ avec } g_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell \text{ sont des polynômes.}$$

- Remplacer la condition (3.6) par la condition SOS correspondante :

$$-\frac{\partial W_o(x)}{\partial x} f(x) - h^T(x)h(x) - \lambda^T(x)g_k(x) \text{ est SOS,}$$

Où $\lambda_i(x)_{(i=1, \dots, \ell)}$ sont des polynômes SOS.

- Résoudre le programme SOS correspondant.

La 2^{ème} étape dans l'algorithme est indispensable pour imposer la positivité à la fonction polynomiale $W_o(x)$ et pour s'assurer qu'elle ne s'annule qu'au point zéro. Quand à la 4^{ème} étape, l'ajout du terme $\lambda^T(x)g_k(x)$ est une forme de restriction sur le domaine dans lequel l'inéquation (3.53) est vérifiée.

La détermination du gramian de commandabilité est déterminée d'une manière similaire

Remarque 3.4

Tel que mentionné précédemment, $W_o(x)$ et $W_c(x)$ doivent être optimisés. Etant des polynômes SOS, ces derniers peuvent être exprimés sous la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} W_o(x) &= Z_o^T(x)QZ_o(x) \\ W_c(x) &= Z_c^T(x)PZ_c(x) \end{aligned}$$

Où $Z_o(x)$ et $Z_c(x)$ sont des vecteur formé de monômes.

Q et P sont des matrices positives semi définie

Une manière de minimiser et maximiser, respectivement, les gramians d'observabilité et de commandabilité consiste à minimiser la trace de Q et maximiser celle de la matrice P , [2]

Remarque 3.5

Une fois les gramians $W_o(x)$ et $W_c(x)$ sont déterminé, nous pouvons conclure que l'origine du système est stable sous une entée nulle. Et pour des entrées suffisamment petite, la trajectoire de système ne sort pas du voisinage de l'origine.

II.4.2 Critères de réduction [6] :

En exploitant certaines propriétés des gramians, Prajna a généré des critères, qui une fois vérifiés, permettent d'opérer la réduction.

Selon les propositions (3-1) et (3-2), la réduction peut être effectuée en éliminant les états pour lesquels les gramians de commandabilité et d'observabilité, prennent respectivement de grandes et de faibles valeurs.

Une fois ces gramians sont déterminés, Prajna propose l'évaluation de ces derniers suivant trois critères.

1- Lorsque les gramians sont homogènes, Prajna propose l'évaluation de ces derniers le long des axes de coordonnées, où e_i est le vecteur unitaire correspondant à la coordonnée x_i , pour séparer les états faiblement observables et faiblement commandables.

Si

$$\begin{cases} W_o(e_i) \leq W_o(e_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \\ W_c(e_i) \geq W_c(e_j) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \end{cases} \quad (3-9)$$

Alors l'état x_i est faiblement observable et faiblement commandable, par rapport aux autres états. Par conséquent, l'état x_i peut être supprimé.

2- Si par contre les gramians ne sont pas homogènes, Prajna propose comme alternative aux conditions (3-9), l'évaluation des valeurs moyennes des gramians le long des segments appartenant aux axes de coordonnées autour de l'origine et vérifier si :

$$\begin{cases} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W_o(\lambda e_i) d\lambda \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W_o(\lambda e_j) d\lambda \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W_c(\lambda e_i) d\lambda \geq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} W_c(\lambda e_j) d\lambda \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} / \{i\} \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$

Il s'agira dans ce cas de tronquer l'état x_i , qu'est moyennement faiblement observable et faiblement commandable par rapport aux autres états.

3- Dans le cas où les deux critères (3.9) et (3.10) ne sont pas vérifiés, Prajna propose de supprimer l'état x_i pour lequel le rapport $W_o(e_i)/W_c(e_i)$ est le plus faible.

Remarque 3-6

Il est souhaitable d'essayer de trouver une transformation de coordonnées sous la quelle l'un des critères (3-9) ou (3-10) est vérifié, avant d'opter pour le troisième critère.

Dans le cas où les gramians sont quadratiques, Prajna propose l'utilisation de la transformation équilibrée linéaire, chose qui permet de définir les valeurs singulières, non invariantes, permettant de mesurer les degrés de commandabilité et d'observabilité lesquelles sont données par $(\lambda_i(P^{-1}Q))^{\frac{1}{2}}, i=1, \dots, n$ dans un certain voisinage de l'origine. De plus, sous cette transformation, les gramians vérifient la propriété $W_o(e_i)W_c(e_i)=1$. Cette façon de faire n'est pas générale car les gramians ne sont que rarement quadratiques. Dans ce cas, la détermination d'une transformation de coordonné permettant de trouver des

gramians satisfaisant les inéquations (3-9) ou (3-10), reste sujet ouvert aux recherches actuelles.

II.5 Exemple d'application [6]:

Soit le système dynamique polynomiale donnée par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_4^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - 0.25x_2^3 + x_3^3 \\ \dot{x}_3 = 0.75x_1^3 + 0.5x_2^3 - x_3^3 + x_4^3 - u \\ \dot{x}_4 = 0.75x_3^3 - x_4^3 + u \\ y = x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Les gramians de commandabilité et d'observabilité déterminées par l'algorithme de Prajna sont donner par :

$$\begin{array}{ll} W_0(e_1) = 0.5071 & W_c(e_1) = 0.9730 \\ W_0(e_2) = 0.456 & W_c(e_2) = 1.2983 \\ W_0(e_3) = 0.2812 & W_c(e_3) = 5.9602 \\ W_0(e_4) = 0.2962 & W_c(e_4) = 3.6202 \end{array}$$

On constate que ces gramians satisfont le premier critère de réduction, selon lequel, on peut supprimer directement l'état (i) qui est faiblement commandable et faiblement observable.

Par conséquent, la suppression de l'état x_3 conduit au modèle réduit suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_4^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - 0.25x_2^3 \\ \dot{x}_4 = -x_4^3 + u \end{cases} \quad (3.12)$$

La réponse indicielle du modèle réduit et originale est donnée par la figure fig.3-1

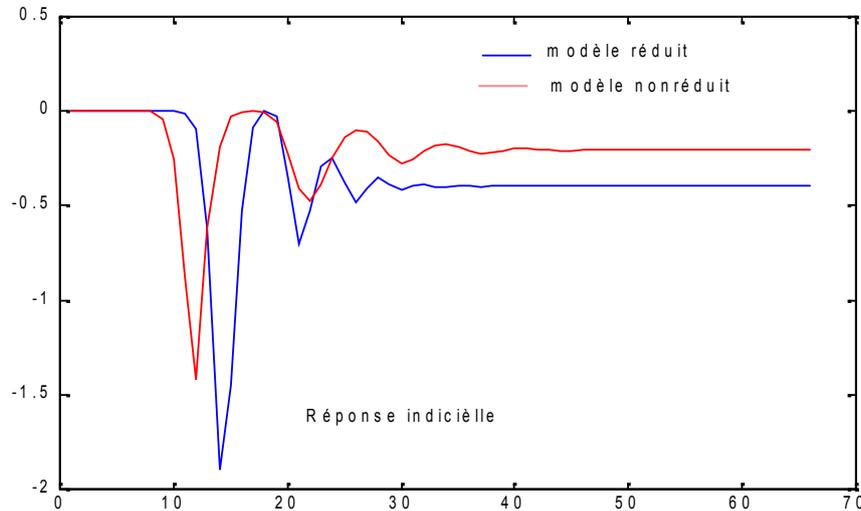


Fig. 3.1 : Réponses indicielles du système original (3.11) et du système réduit (3.12)[6]

Commentaire :

Au voisinage de l'origine la réponse du système réduit est similaire au système original.

III. Conclusion :

Nous avons essayé, dans ce chapitre de cerner le problème de réduction des systèmes dynamiques polynomiaux.

On s'est intéressé à la méthode de réduction par Prajna. Cette dernière s'avère peu générale, car elle reste prisonnière des cas particuliers, tout comme le cas où les grammiens sont quadratiques qui ne sont que rarement vérifiés en pratique.

Conclusion générale

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés aux modèles polynomiaux, qui sont une classe particulière des systèmes non linéaires. Nous avons vu que la possibilité d'approximer ou de modéliser des systèmes non linéaires par des modèles polynomiaux offre des alternatives très intéressantes dans le sens où, différents problèmes, difficilement résolubles voire même sans solutions en théorie non linéaire, s'y trouvent contournés et résolus.

En effet, la réponse de système, représentant le bras de robot étudié dans le premier chapitre, approximé à l'ordre 3 par le développement de Taylor, est meilleure que l'approximation linéaire obtenue par le développement de Taylor à l'ordre 1. En suite nous avons étudié les propriétés des modèles polynomiaux aussi bien, la stabilité, l'observabilité et la commandabilité.

Le plus grand intérêt est celui qui est accordé au problème de la réduction des systèmes. Les difficultés numériques d'une part et les considérations économiques d'autre part restent les motivations essentielles de la pratique de la réduction qui, malgré l'avancée remarquable enregistrée ces dernières années, demeure confrontée à plusieurs difficultés qui font d'elle un thème ouvert aux recherches. On parle surtout de la réduction non linéaire.

Dans le cas linéaire, nous avons constaté à travers des exemples étudiés et réduits par les trois méthodes de réduction présentées au deuxième chapitre (méthode de Davison, d'Aoki, et de la TBR) la simplicité et l'efficacité de la réduction par troncation à base de la réalisation équilibrée, à l'inverse de la méthode d'Aoki

Dans le contexte des systèmes polynomiaux, nous nous sommes intéressées à la méthode de réduction de Prajna, adressée exclusivement aux modèles polynomiaux.

La détermination des bornes supérieures et inférieures des énergies de commandabilité et d'observabilité définies par Prajna comme étant des fonctions polynomiales, solution globale ou locale des inéquations de Lyapunov, est formulée sous forme de programme SOS.

Nous avons constaté que l'inconvénient majeur de cette méthode est son usage peu général.

Références et bibliographies

- [1] P.A. Parrilo. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization. PhD thesis, California institute of technology, 2000
- [2] C.Ebenbauer and F. Allgower. Polynomial control systems: Analysis and design via dissipation inequalities. Institute for systems theory and automatic control (IST). University of Stuttgart. Joint CTS-HYCON Workshop. Paris July 2006.
- [3] Manuel Julio Garcia. Lecture notes on numerical analysis. Department of mechanical engineering, EAFIT University modelling, Colombia, Febrero 2006.
- [4] Réduction et commande des systèmes dynamique polynomiaux. Mémoire de magistère, assisté par M. Djennoune, Département Automatique, Université Mouloud Mammeri. Année 2007.
- [5] E.B.Braiek Polynomial dynamical systems: Recent results and new Trends. Third international Conference on systems, Signals et Devices. March 12-24-2005-Sousse, Tunisia
- [6] Stephen Prajna and Henrik Sandberg. On model reduction of polynomial dynamical systems. Proceeding of the 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference 2005. Seville, Spain, December 12-15-2005
- [7] J.W.Brewer. Kronecker Products and matrix Calculus in System Theory. IEEE 1978
- [8] E.B.Braiek AND f.Rottela. State observer Design for analytical non-linear systems 1994 IEEE.
- [9] Christian Ebenbauer, , Jonathan Renz Frank Allgower. Polynomial Feedback and observer Design using Nonquadratic Lyapunov function. Proceeding of the 44th IEEE conference on

decision and control, and the European control conference 2005. Seville, Spain , December 12-15-2005.

[10] Abdelkader Akhenak. Conception d'observateur non linéaire par approche multimodèle, application au diagnostic. Département de formation doctorale en Automatique, institue national polytechnique de Lorraine 16 Decembre 2004.

[11] Nenik Nijmeijer, Arjan Van Der Shaft. Non linear dynamical control system. 1990 Sprenger-Verlag New York Inc

[12] L. Cordier et M. Bergmann. Réduction de dynamique par Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres (POD). Ecole de printemps OCET : Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts. 12 – 17 Mars 2006, Aussois

[13] Réduction des systèmes Linéaire et non linéaire. Mémoire ingénieur, assisté par M.Djennoune, Département d'Automatique. Université Mouloud Mammeri. Année 2002.

[14] Davison M. A new methode for simplifying linear dynamic systems. IEEE Trans. On Auto. Control, pp.214-215.1968

[15] Aoki M. Control of large-scale dynamic systems by aggregation. IEEE Trans. On Auto. Control. , Vol. AC-13; No.3, pp.246-253.1968

[16] Stéphane AZOU. Réalisation équilibrée de systèmes par orthogonalisation de fonctions d'entrée - Grammiens et approximation doctorat en électronique. Decembre 1997

[17] Jaquelin M.A. Sherpen. Balancing for non linear systems. PhD dissipation. Sytems and control group faculty of applied mathematics university of Twente, 1994.

[18] User's guide. SOSTOOLS. Sum of Squares Optimization Toolbox for MATLAB. Version 2.00. June 1, 2004

[19] Richard Leroy. M'emoire de DEA. Polynômes positifs, sommes de carrées Programmation semi-d'efinie positive. Application à la minimisation. Année 2003-2004

- [20] Weehong Tan. Nonlinear Control Analysis and Synthesis using Sum-of-Squares Programming. University of California, Berkeley. Année 2006
- [21] Michael V. Basin, Ma. Aracelia Alcorta Garcia. Optimal Polynomial filter of degree 3 and 4 its application to an automotive system. Proceedings of the 2001 IEEE International conference on control Application. September 5-7, 2001.MEXICO City, Mexico.
- [22] A. Gasull, H. Giacomini and J. Torregrosa. Explicit Non-Algebraic Limit Cycles For Polynomialsystems. Journal of computational and applied mathematics. Volume 200, Issue I, pages 448-457.2007
- [23] Hanying Feng, Rui Xu, Qiming Liu and Pinghua Yang. Limit Cycles For A Class Of Polynomial Systems and applications. Electronic journal of Differential Equations. Vol. 2003(2003), No. 105, pp. ISSN: 1072-6691.
- [24] R . Geesion and A. Vicino. Some Results on the Asymptotic Stability of Second-order Nonminear Systems. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-29, No.9, September 1984.

A.1. Anneau commutatif

Un anneau commutatif est défini comme étant un ensemble K à qui sont associée deux opérations binaires \cdot et $+$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. Associativité :

$$\forall a, b, c \in K : \begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{cases}$$

2. Commutativité :

$$\forall a, b \in K : \begin{cases} a+b = b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{cases}$$

3. Distributivité :

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. Élément neutre :

$$\forall a \in K, \exists 0, 1 \in K : a+0 = a \cdot 1 = a$$

5. Élément symétrique :

$$\forall a \in K, \exists b \in K : a+b = 0$$

A.1.1. Définition :

On appelle idéal de $K[x]$ toute partie I de $K[x]$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. Le polynôme nul appartient à l'idéal : $0 \in I$
2. Si $a, b \in I$ alors $a+b \in I$.
3. Si $a \in I$ et $b \in K[x]$ alors $a \cdot b \in I$

Annexe A

Soit l'ensemble des polynômes multivariés $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Le plus petit idéal généré par cet ensemble est défini par :

$$\text{Ideal}(p_1, p_2, \dots, p_s) = \left\{ p \mid p = \sum_{i=1}^s t_i p_i, t_i \in K[x] \right\}$$

A.2. Variété algébrique :

Soient p_1, p_2, \dots, p_s des polynômes dans $K[x]$.

On définit, pour les polynômes p_1, p_2, \dots, p_s , la variété algébrique affine notée V_a , par :

$$V_a(p_1, \dots, p_s) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq s\}$$

En d'autres termes, V_a désigne l'ensemble des zéros communs des polynômes p_1, p_2, \dots, p_s .

A.3. Produit de Kronecker

Soit les matrices M , N de dimensions respectives $(r \times p)$ et $(q \times s)$ telle que :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & \cdots & m_{rp} \end{bmatrix}$$

Le produit de Kronecker noté \otimes des deux matrices M et N est défini par la matrice de dimension $(rq \times ps)$ donnée par:

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} m_{11}N & m_{12}N & \cdots & m_{1p}N \\ m_{21}N & m_{22}N & \cdots & m_{2p}N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r1}N & m_{r2}N & \cdots & m_{rp}N \end{bmatrix}$$

A.4. Matrice adjointe

Considérant une matrice carrée A d'ordre n . la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments a_{ij} de A , notée $adjA$, est appelée matrice adjointe, ou cofacteur, de A :

$$adjA = comA = [X_{ij}] = [(-1)^{i+j} \Delta_{ij}]$$

A.5. Cône de matrice :

un ensemble $C \in \mathfrak{R}^m$ est un cône si

$$x, y \in C \Rightarrow \forall \lambda \geq 0, \lambda(x + y) \in C$$

Un cône est dit pointe si $C \cap (-C) = \{0\}$

A.6. Trace d'une matrice :

La trace d'une matrice A , notée $Tr(A)$, est la somme des éléments diagonaux de A .

On a la propriété suivante :

$$\forall A, B \in M_n[(\mathfrak{R})], Tr(A.B) = Tr(B.A)$$

A.7. matrice pseudo inverse de Moore/Penrose

Soit $A(m \times n)$ une matrice quelconque.

A^+ est la pseudo inverse de A si :

$$\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^T = AA^+ \\ (A^+A)^T = A^+A \end{cases}$$

Elle est déterminée comme suit :

$$\text{Si } m < n : A^+ = A^T(AA^T)^{-1}, AA^+ = I_m$$

$$\text{Si } m > n : A^+ = (A^T A)^{-1} A^T, AA^+ = I_n$$

A.8. Matrice d'Hurwitz

A est une matrice d'Hurwitz si ses valeurs propres sont à parties réelles négatives

Soit le système LTI, minimal et stable représenté dans l'espace d'état par (3.6) dont la fonction de transfert est donnée par : $G = C(pI - A)^{-1}B$.

A.9. Matrice de permutation

Soit e_k le vecteur de dimension q dont le k ème éléments est égal à 1 et les autres éléments

sont nuls.

Soit la matrice élémentaire définie par :

$$E_{ik}^{(p \times q)} = \begin{matrix} e_i & e'_k \\ (p) & (q) \end{matrix}$$

$E_{ik}^{(p \times q)}$ représente une matrice de dimension $(p \times q)$ dont le $(i - k)$ ème élément est égal à 1 et

les autres éléments sont nuls.

Annexe A

La matrice de permutation de Kronecker est définie par la matrice carrée U_{pq} de dimension $(pq \times pq)$ donnée comme suit :

$$U_{p \times q} = \sum_i^p \sum_k^q E_{ik}^{(p \times q)} \otimes E_{ki}^{(q \times p)}$$

A.10. Factorisation de cholesky :

Soit $A \in S_{n \times n}^+(\mathfrak{R})$ est une matrice symétriques définie positif.

Il existe une matrice triangulaire inférieur unique $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, possédant des coefficients diagonaux positif tel que

$A = G.G^T$, celle-ci est la décomposition de Cholesky.

A.11. Norme de Hankel :

La norme de Hankel pour ce système est définie par :

$$\|G\|_H^2 = \max_{\substack{x \in \mathfrak{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{L_o(x)}{L_c(x)} = \max_{\substack{x \in \mathfrak{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{x^T M x}{x^T W^{-1} x} = \sigma_1^2$$

Où $L_o(x), L_c(x)$ désignent, respectivement, les fonction d'énergie d'observabilité et de commandabilité définies dans le 3^{ième} chapitre idem pour M, W qui désignent les gramians d'observabilité et de commandabilité.

A.12. Norme à l'infini :

On définit la norme à l'infini du système (3.6) par :

$$\|G\|_\infty = \sup_{w \in \mathfrak{R}} \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(G(-jw)^T G(jw))$$

A.13. Norme de Lebesgue :

Soit $x \in \mathfrak{R}^n$. On définit la norme au sens de Lebesgue du vecteur x par :

$$\|x\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \|x(t)\|^2 dt}$$

Où $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, $a, b \in \mathfrak{R}$.

A.14. Définition :

Une fonction $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ est une application qui associe aux valeurs de $x \in \mathfrak{R}^n$ un vecteur

$$y \in \mathfrak{R}^n : y = f(x)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

- f est continûment différentiable (C^1) si chaque f_i l'est aussi.
- f est $C^1 \Rightarrow$ on peut définir la matrice jacobienne $J_x(f)$ comme suit :

$$J_x(f) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- f_i est indéfiniment continûment différentiable (C^∞) si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial^N f_i}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n}}$$

existent et sont continues, avec $\sum_{i=1}^n r_i = N$ (N entier).

Annexe A

- f est C^∞ si chaque f_i l'est aussi.

A.15. Champs de vecteur:

Un champ de vecteur f est une application qui à tout $x \in V_x$ fait correspondre le vecteur $f(x)$

A.16. Distribution :

Une distribution, notée Δ , de champs de vecteurs f_1, f_2, \dots, f_d est une application qui à tout point $x \in V_x$ fait correspondre un espace vectoriel engendré par les mêmes champs de vecteurs. Elle est désignée par :

$$\Delta(x) = \text{Span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}.$$

A.17 Linéarisation exacte :

Soit le système non linéaire donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

Où $f, g, h \in C^\infty$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$ et $y \in \mathfrak{R}^p$

Si $r = n$ (dimension du système), il existe un retour d'état non linéaire qui permet de transformer ce système en un système linéaire de la forme : $\dot{x} = Ax + Bu$ avec (A, B) commandable. Plus précisément la forme obtenue est celle de Brunovsky i.e.

Annexe A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le bouclage qui permet d'obtenir cette forme est donné comme suit :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + v)$$

v étant une entrée auxiliaire.

La forme de Brunovsky telle qu'obtenue est instable d'où la nécessité de superposer une commande stabilisante. Le bouclage simultanément linéarisant et stabilisant :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\phi^{-1}(z))} (-L_f^n h(\phi^{-1}(z)) - c_0 z_1 - c_1 z_2 - \dots - c_{n-1} z_n)$$

Où les c_i sont des coefficients réels choisis tels que les zéros du polynôme caractéristique

$$p(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1} + s^n \text{ Soient à parties réelles négatives.}$$