

Résumé :

Ce travail porte essentiellement sur l'identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire. En effet la méthode des moindres carrés récurrents est proposée puis appliquée à l'identification des paramètres d'un modèle d'ordre fractionnaire en faisant varier l'ordre de dérivation non entier, dans cette approche on utilise la fonction génératrice de Tustin PSE (power series expansion) afin de discrétiser le modèle d'ordre non entier considéré, et pour pouvoir l'identifier grâce à l'algorithme des moindres carrés récurrents.

Mots clefs : systèmes non entier, identification des systèmes par des modèles d'ordre non entier, calcul fractionnaire.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

Master académique en automatique
Option commande des systèmes

Thème

***Identification des systèmes par des modèles
d'ordres fractionnaires***

Proposé et dirigé par :

☞ M^r. GUERMAH Saïd

Présenté par :

☞ TSABIT Lamine

☞ TOUCHERIFT Lakehal

Soutenu le : 04 / 11 /2012

Promotion 2012

Ce travail a été préparé à : Université Mouloud MAMMERY, Tizi-Ouzou

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur le calcul fractionnaire	
I.1 Introduction au calcul fractionnaire.....	3
I.2 Fonctions de bases utilisées dans le calcul fractionnaire	3
I.2.1 La fonction Gamma d'Euler	3
I.2.2 La fonction de Mittag-Leffler	4
I.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire.....	5
I.3.1 Intégration d'ordre non entier.....	5
I.3.2 Dérivation d'ordre non entier.....	6
I.3.2.1 Définition de Reimann-Liouville.....	7
I.3.2.2 Définition de Caputo.....	7
I.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	9
I.3.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....	10
I.3.4 Transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires.....	11
I.3.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	11
I.3.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	12
I.3.4.2.1 Au sens de Riemann-Liouville.....	12
I.3.4.2.2 Au sens de Caputo.....	12
I.3.4.2.3 Au sens de Grünwald-Letnikov.....	13
I.4 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire.....	13
I.4.1 Equation différentielle généralisée.....	14
I.4.2 Fonction de transfert fractionnaire.....	14

I.4.3 Représentation d'état des systèmes fractionnaires.....	15
I.5 Obtention d'une fonction de transfert à partir de la représentation d'état.....	16
I.5.1 Forme canonique commandable.....	17
I.5.2 Forme canonique observable.....	17
I.5.3 Forme canonique modale.....	18
I.6 Calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier.....	18
I.7 Stabilité des systèmes non entiers.....	22
I.8 Conclusion.....	23

Chapitre II : Principales méthodes d'identification

II.1 Introduction.....	24
II.2 Etapes de l'identification.....	24
II.3 Méthodes d'identification des systèmes entiers.....	28
II.3.1 Méthodes classiques d'identification.....	28
II.3.1.1 Réponse indicielle.....	28
II.3.1.2 Réponse fréquentielle.....	35
II.3.1.3 Réponse impulsionnelle.....	37
II.3.2 Méthodes modernes (statistiques) d'identification.....	49
II.3.2.1 Méthode des moindres carrés en temps différé.....	49
II.3.2.2 Méthode des moindres carrés en temps réel.....	54
II.3.2.3 méthode de la matrice instrumentale.....	57
II.4 Identification d'un modèle fractionnaire.....	58
II.4.1 Méthode à erreur de sortie.....	59
II.4.1.1 Modèle non entier borné en fréquence.....	59

II.5 Conclusion.....	65
----------------------	----

Chapitre III : Application à un procédé physique

III.1 Introduction.....	66
-------------------------	----

III.2 Equation de diffusion de chaleur.....	66
---	----

III.3 Etude du transfert de chaleur dans un milieu semi-infini plan.....	67
--	----

III.3.1 Description du système expérimental.....	67
--	----

III.3.2 Modélisation du système thermique.....	68
--	----

III.3.3 Identification du barreau thermique par un modèle d'ordre non entier.....	72
---	----

III. 4 Conclusion.....	79
------------------------	----

Conclusion générale.....	80
---------------------------------	-----------

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques, que l'on peut considérer aussi bien ancien que nouveau, et qui connaît actuellement une grande popularité dans la communauté des chercheurs en sciences fondamentales et en ingénierie. Il représente un intérêt qui ne cesse de croître, notamment en automatique pour la modélisation, l'identification et la commande des systèmes.

Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques, thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées d'ordre non entier. Ainsi, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées d'ordre non entier ont été développés. Ceci a donné lieu à un grand développement de l'identification par modèles d'ordre fractionnaire (non entier) au cours de ces deux dernières décennies.

Les systèmes fractionnaires sont caractérisés par la propriété de mémoire longue et de dimension infinie (système à paramètres distribués). Contrairement à la dérivée entière qui ne fait intervenir qu'un nombre limité de valeurs passées de la fonction à dériver, la dérivée non entière nécessite la connaissance de tout le passé de la fonction, ce qui donne la dimension infinie. Cette caractérisation impose l'utilisation du modèle de dimension infinie pour modéliser un système fractionnaire par des modèles entiers.

Notre travail consiste en l'identification des paramètres d'un modèle d'ordre fractionnaire avec la méthode des moindres carrés récursifs, en faisant varier l'ordre de dérivation non entier, afin d'approcher au mieux le comportement du système réel.

Ce mémoire se compose de trois chapitres, et est organisé de la façon suivante :

Le chapitre I est consacré aux notions de base sur les opérateurs d'ordre fractionnaire. On y rappelle les définitions mathématiques de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire et leur propriétés, ainsi que leur transformée de Laplace, les différentes représentations des systèmes fractionnaires et enfin la condition de stabilité des ces systèmes.

Le chapitre II est divisé en deux parties. Il traite d'une étude des principales méthodes d'identification. Dans la première partie, nous étudierons les méthodes d'identification des systèmes d'ordre entier, où nous traiterons la méthode des moindres carrés récursifs en détail,

Introduction générale

méthode qui fera objet de notre application dans le chapitre qui suit. Dans la deuxième partie, nous aborderons l'une des méthodes d'identification des systèmes d'ordre fractionnaire qui est la méthode à erreur de sortie où les ordres de dérivation seront estimés au même titre que les paramètres.

Le chapitre III est consacré à l'application sur un procédé physique : système thermique. Dans un premier temps, une description détaillée ainsi qu'une modélisation de ce système thermique seront conduites. Ensuite, une version discrète du modèle fractionnaire sera élaborée avec la fonction génératrice de Tustin. Dans un second temps, la méthode des moindres carrés récursifs sera appliquée pour l'identification des paramètres du modèle discret considéré, en faisant varier l'ordre de dérivation non entier, afin d'observer le degré d'influence de ce dernier. Les résultats de simulation obtenus sous MATLAB pour l'identification et la validation des modèles seront présentés et interprétés.

Enfin, une conclusion générale consacrera les principaux résultats obtenus dans ce travail et donnera quelques perspectives en vue de travaux futurs.

Chapitre I

Généralités sur le calcul fractionnaire

I.1 Introduction au calcul fractionnaire

La tenue de plusieurs colloques internationaux, la parution de plusieurs livres et même la création en 1992 d'une revue entièrement consacrée au sujet « journal of fractional calculus », témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier. Deux raisons principales peuvent largement illustrer cet intérêt grandissant :

- L'utilisation de la dérivation non entière dans le cadre d'applications variées (automatique, viscoélasticité, analyse d'image etc.....) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie.
- D'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant.

La première idée du calcul des dérivées fractionnaires remonte à Leibnitz, quant il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n , $\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$, où n est un entier positif, ce qui poussa l'Hôpital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans \mathbb{Q} . tout en se demandant quelle pourrait être l'interprétation de la dérivée d'ordre un demi. Suite a cette question Leibnitz répond dans une lettre adressée à l'Hôpital en 1695, en lui disant que : « *c'est un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences.* ».

C'est au début du *XIX^{ème}* siècle que des mathématiciens tels que Euler [1738], Laplace [1812], Lacroix [1820], Fourier [1822], Abel [1823], Letnikov [1868], et surtout Riemann [1876] et Liouville [1832] ont révélé le concept et développé le formalisme de la dérivée d'ordre non entier.

I.2 Fonctions de bases utilisées dans le calcul fractionnaire

Parmi les fonctions les plus utilisées qui contribuent et qui jouent un rôle très important et efficace dans la résolution de plusieurs problèmes et soucis qui subsistent dans le calcul fractionnaire, on cite la fonction Gamma d'Euler et la fonction de Mittag-Leffler.

I.2.1 La fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est l'une des fonctions de base la plus utilisée et la plus exploitée dans le calcul fractionnaire, son vraie rôle est de prolonger la factorielle ($n!$) aux valeurs réelles et complexes. Elle est définie par l'intégrale suivante [1] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad , z > 0 \quad (\text{I.1})$$

Avec : $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ possède une propriété importante qui est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z) \quad (\text{I.2})$$

Obtenue après avoir appliquée une intégration par parties à la relation (I.1) :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z) \quad (\text{I.3})$$

En exploitant la relation (I.2) et en sachant que $\Gamma(1) = 1$, nous obtenons pour $z = 1, 2, 3 \dots$

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3. \Gamma(3) = 3!$$

De ce développement on peut déduire une écriture générale de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(n + 1) = n. \Gamma(n) = n(n - 1)! = n! \quad (\text{I.4})$$

I.2.2 La fonction de Mittag-Leffler [1]

Exactement comme dans le domaine entier où la fonction exponentielle e^z joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles, la fonction de Mittag-Leffler par analogie joue un rôle similaire à celui de la précédente dans le monde du fractionnaire.

Sa généralisation à un seul paramètre a été introduite par Mittag-Leffler en 1903. Son écriture standard est sous la forme suivante :

$$E_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + 1)} \quad (a > 0) \quad (\text{I.5})$$

Pour $a = 1$ on obtient la fonction exponentielle usuelle qui est comme suit :

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (I.6)$$

Il existe aussi une autre manière de représentation de la fonction Mittag-Leffler avec deux paramètres a et β , qui a été introduite par Humbert et Agarwal en 1953, et qui est définie comme suit :

$$E_{a,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak + \beta)} \quad (a > 0, \beta > 0) \quad (I.7)$$

I.3 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_t D_t^\alpha$ où t_0 et t sont des limites de l'opération.

L'opérateur intégro-différentiel est défini comme suit :

$${}_t D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (I.8)$$

où $\alpha \in R$ est l'ordre de l'opération.

I.3.1 Intégration d'ordre non entier

Soit une fonction réelle $f(t)$, continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'intégration répétée $k^{\text{ème}}$ fois de la fonction $f(t)$, notée $I^k f(t)$ est exprimée par la formule itérative de Cauchy [2] :

$$\underbrace{\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1}_{k \text{ fois}} = I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (I.9)$$

k doit être un nombre entier positif, à cause de la fonction factorielle qui n'a de sens que pour des valeurs entières.

Inspiré par la formule de Cauchy (I.9), Riemann a proposé en 1847 l'extension à un nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma d'Euler (I.1) qui en est la généralisation aux nombre réels. On obtient la fonction d'intégration non entière suivante :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.10})$$

Avec $\Gamma(\alpha)$ la fonction Gamma d'Euler.

La formule (I.10) est souvent appelée l'intégrale de Riemann-Liouville, et dans le cas où la borne inférieure est égale à $-\infty$ on parlera de l'intégrale bilatérale de Liouville.

Il est très important de signaler que dans la relation (I.10) :

- ✓ La quantité $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ vaut 1 quand l'ordre d'intégration $\alpha = 1$, l'intégration classique d'ordre 1 de la fonction $f(t)$ correspond alors à l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[t_0, t]$.
- ✓ Dans le cas où α est non entier, la relation (I.10) peut s'écrire sous un produit de convolution comme suit :

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{I.11})$$

$$\text{Avec : } \Phi_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_+^{\alpha-1} = 0 \text{ pour } t < 0 \\ t_+^{\alpha-1} = t^{\alpha-1} \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

I.3.2 Dérivation d'ordre non entier

La généralisation de la fonction de dérivation entière à des ordres non entiers quelconques peut être obtenue à partir de l'intégration non entière (I.10), donnant ainsi naissance à plusieurs définitions mathématiques qui ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais elles sont équivalentes pour une large gamme de fonctions.

I.3.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L) [3]

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$, la dérivée d'ordre α de f de borne inférieure t_0 s'obtient en deux étapes suivantes :

- Intégrer d'abord la fonction $f(t)$ à l'ordre non entier $n - \alpha$.
- Dériver le résultat ainsi obtenu à l'ordre entier n .

Son expression générale est donnée par la formule suivante:

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} \quad (I.12)$$

avec : $(n-1) < \alpha < n$

${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$: désigne la dérivée d'ordre non entier α par rapport à t de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Riemann-Liouville.

C'est exactement comme dans le cas de l'intégrale d'ordre non entier, quant on remplace la borne inférieure par $-\infty$ dans la relation (I.12). On parlera de la dérivée non entière de Liouville.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de la relation (I.10) comme suit :

$${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{I^{(n-\alpha)} f(t)\} \quad (I.13)$$

I.3.2.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée non entière suite à ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire à la fin des années 60, elle s'obtient aussi en deux étapes [3] :

- Dériver d'abord la fonction $f(t)$ à l'ordre entier n .
- Intégrer ensuite le résultat ainsi obtenu à l'ordre non entier $\alpha - n + 1$.

L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_{t_0}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (I.14)$$

où $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$

$f^{(n)}(\tau)$ étant la dérivée d'ordre entier n par rapport à τ de la fonction $f(\tau)$.

${}_{t_0}^C D_t^\alpha$: désigne la dérivée d'ordre non entière α de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Caputo.

Si f est une fonction causale sur \mathbb{R}^+ , la dérivée d'ordre non entière α avec $0 < \alpha < 1$ au sens de Caputo est nulle, mais ce n'est pas le cas pour celle au sens de Riemann-Liouville si $f(0^+) \neq 0$.

Autrement dit la définition de Caputo requière donc que la fonction $f(t)$ ainsi que ses n dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville qui exige la seule causalité de $f(t)$, plus généralement on obtient la relation suivante entre les deux définitions pour α non entier :

$$D_{RL}^\alpha f(t) = D_C^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{(k-\alpha)}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (I.15)$$

Avec $0 \leq n-1 < \alpha < n$, et que f soit continument dérivable jusqu'à l'ordre $(n-1)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Ce qui peut être décrit autrement par :

$$D_C^\alpha f(t) = D_{RL}^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (I.16)$$

Il est très intéressant de signaler que l'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo dans les équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier, et lors de la résolution de ces dernières à l'ordre non entier, la solution obtenue en utilisant la définition de Riemann-Liouville, s'exprime en fonction des valeurs initiales d'ordre non entier ($y_0, \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(0) \dots$), alors que l'utilisation de la définition de Caputo permet d'exprimer la solution en fonction des valeurs initiales entières ($y_0, \frac{d}{dt} y(0) \dots$).

Il est encore à signaler que la définition de Caputo considère que la dérivée à l'ordre non entier d'une constante est nulle, tandis que celle de Riemann-Liouville donne une fonction non nulle dépendante de la variable t :

$${}^{RL}D_t^\alpha C = \frac{C(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad C D_t^\alpha C = 0 \quad (\text{I.17})$$

I.3.2.3 Définition de Grünwald-Letnikov (G-L) [2]

C'est l'une des définitions les plus utilisées et les plus rencontrées dans le domaine des dérivées fractionnaires, en fait elle est basée sur la généralisation de la définition usuelle de la dérivée entière d'une fonction $f(t)$, où toute la différence par rapport au cas entier se situe dans l'extension de la factorielle à travers la fonction Gamma d'Euler.

La définition de Grünwald-Letnikov est plus adéquate au calcul numérique de la dérivation non entière.

➤ Formule de la rétrodifférence d'ordre $n \in \mathbb{N}$

Partant de la dérivée première :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{I.18})$$

h étant la période (ou le pas) d'échantillonnage.

En dérivant l'équation (I.18) nous obtenons la dérivée seconde qui est comme suit :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (\text{I.19})$$

D'après les deux définitions (I.18) et (I.19) nous pouvons écrire une formule générale à l'ordre entier n qui est donnée comme suit :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left((-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \right) \quad (\text{I.20})$$

La notation $\binom{n}{j}$ représente les coefficients binomiaux qui expriment la combinaison de j élément parmi n dont l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{I.21})$$

➤ **L'extension de l'équation (I.20) à des valeurs non entières $\alpha \in \mathbb{R}_+$**

Après l'extension on obtient la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov qui est sous la forme suivante :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} ((-1)^j \binom{\alpha}{j}) f(t - jh) \quad (\text{I.22})$$

où la notation $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \quad (\text{I.23})$$

Remarque I.1 : étant donné que la formule (I.20) ne contient que $(n+1)$ termes, la valeur de la dérivée à un instant t se limite à une combinaison linéaire des $(n+1)$ valeurs de la fonction $f(t-jh)$, $j = 0, \dots, n$. Donnant ainsi une caractérisation locale de la dérivation entière de la fonction $f(t)$. Par contre, dans le cas des ordres de dérivation non entiers (formule (I.22)), les coefficients de pondération $[(-1)^j \binom{\alpha}{j}]$ ne s'annulent pas, et la valeur de la dérivée à un instant t donné prend en considération toutes les valeurs de la fonction $D^\alpha f(t)$ à tous les instants du passé $f(t-jh)$, $j = 0, \dots, \infty$, de cette fonction. Donc cela montre qu'à l'inverse de la dérivation entière, la dérivation non entière donne une caractérisation globale de la fonction.

I.3.3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire [4]

Les dérivées et intégrales fractionnaires possèdent certaines propriétés qui sont comme suite :

- ✓ Si $f(t)$ est une fonction analytique en t , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(t)$ est une fonction analytique de t et α .
- ✓ Pour $\alpha = n$, où n est un entier, l'opérateur $D^\alpha f(t)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier α .
- ✓ Pour $\alpha = 0$. L'opérateur $D^\alpha f(t)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(t) = f(t)$

- ✓ La différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérateurs linéaires :

$$D^\alpha (\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha D^\alpha f(t) + \beta D^\alpha g(t)$$

- ✓ La loi additive d'index (propriété du semi-groupe) :

$$D^\mu D^b f(t) = D^b D^\mu f(t) = D^{\mu+b} f(t)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(t)$.

- ✓ La dérivée non entière de l'intégration de même ordre d'une fonction temporelle est telle que :

$$D^\alpha \circ I^\alpha f(t) = f(t) \quad \text{avec : } \Re_e(\alpha) > 0$$

- ✓ La définition de la dérivation d'ordre fractionnaire étant basée sur celle de l'intégration d'ordre fractionnaire, une dérivation d'ordre fractionnaire revêt un caractère global contrairement à une dérivation entière. Il s'avère en effet que la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction f nécessite la connaissance de $f(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t]$, alors que dans le cas entier, seule la connaissance locale de la fonction f autour de t est nécessaire. Cette propriété permet d'interpréter les systèmes d'ordre fractionnaire comme des systèmes à mémoire longue, et les systèmes à l'ordre entier comme des systèmes à mémoire courte.

I.3.4 Transformée de Laplace des opérateurs fractionnaires

La méthode de la transformée de Laplace est considéré comme étant un outil important et indispensable pour la résolution des problèmes rencontrés en ingénierie. Grâce à sa grande contribution, les expressions de ces opérateurs fractionnaires relève d'une simplicité remarquable, surtout dans le cas de l'étude des systèmes relaxés à $t = 0$.

Dans ce qui suit nous donnerons les transformées des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

I.3.4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire [4]

Commençons par l'interprétation de l'équation (I.10) comme un produit de convolution qui permet le calcul de l'intégrale d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ d'une fonction temporelle causale. Soit: $g(t) = t^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (I.24)$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée comme suite :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (I.25)$$

alors la transformation de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre non entier α d'une fonction causale $f(t)$ ($f(t) = 0$, pour $t \leq t_0 = 0$), possède la même expression que la transformée de Laplace de l'opérateur d'intégration entière, il suffit juste de remplacer l'ordre d'intégration entier par celui d'ordre non entier α . Elle est donnée par :

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[f(t)] = s^{-\alpha} F(s) \quad (I.26)$$

s désigne l'opérateur de Laplace.

I.3.4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire [5]

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α a été interprété de différentes manières par plusieurs mathématiciens du *XIX^{ème}*, parmi eux on peut citer :

I.3.4.2.1 Au sens de Riemann-Liouville (R-L)

L'expression de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire d'une fonction $f(t)$ temporelle causale au sens de Riemann-Liouville est donnée comme suit :

$$\mathcal{L}[{}^{RL}_0 D^\alpha f(t)] = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (I.27)$$

avec $(n-1) < \alpha < n$.

où : $D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=0}$ représente la dérivée $(\alpha - i - 1)^{ème}$ de $f(t)$ lorsque $t = 0$.

ainsi les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées non entières $D^{\alpha-i-1} f(t)$ de la fonction $f(t)$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

I.3.4.2.2 Au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α , par rapport à t de la fonction $f(t)$ causale selon la définition de Caputo est donnée par :

$$\mathcal{L}[\mathcal{C}_0^{\alpha} D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t) \Big|_{t=0} \quad (I.28)$$

avec : $(n - 1) < \alpha < n$.

où : $D^i f(t) \Big|_{t=0}$ représente la $i^{\text{ème}}$ dérivée entière de $f(t)$ lorsque $t = 0$.

Dans ce cas, les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées entières $D^i f(t)$ de la fonction $f(t)$, ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

I.3.4.2.3 Au sens de Grünwald-Letnikov (G-L)

L'expression qui caractérise la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire α , par rapport à t de la fonction $f(t)$ causale selon le sens de Grünwald-Letnikov est donnée par :

$$\mathcal{L}[\mathcal{G}_0^L D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} \mathcal{L}[f(t)] = s^{\alpha} F(s) \quad (I.29)$$

Remarque I.2 : la définition de Caputo semble être la plus appropriée et la plus adaptée par rapport à celle de Riemann-Liouville, grâce à l'interprétation facile et aisée au sens physique de ses conditions initiales, contrairement à celles de la définition de Riemann-Liouville où on rencontre la difficulté de leurs attribuer un sens physique, ce qui a entraîné la limite de son applicabilité en pratique.

Remarque I.3 : dans le cas où on a un système au repos pour $t < 0$, les transformées de Laplace des dérivées d'ordre non entier de Riemann-Liouville et de Caputo sont équivalentes.

Elles se réduisent à :

$$\mathcal{L}[\mathcal{R}_0^{RL} D_t^{\alpha} f(t)] = \mathcal{L}[\mathcal{C}_0^{\alpha} D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) \quad (I.30)$$

I.4 Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques qui peuvent être représentés par différents modes de représentation, qui s'avèrent des outils de modélisation très utiles, et parmi ses formes de base on cite :

- ✓ Equation différentielle généralisée.
- ✓ Fonction de transfert fractionnaire.
- ✓ Représentation d'état fractionnaire.

I.4.1 Equation différentielle généralisée [5]

Un système d'ordre non entier, linéaire, à temps continu, causal et invariant dans le temps, d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est régi par une équation différentielle généralisée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

où : $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. D^α et D^β désignent les opérateurs de dérivation d'ordres α, β respectivement et qui sont des nombres que l'on suppose réels positifs et ordonnés tel que :

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n \quad \text{et} \quad 0 < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_m$$

Lorsque tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle sont des multiples entiers du même nombre réel α , tel que $\alpha_i = i\alpha$, $\beta_j = j\alpha$, le modèle non entier est dit d'ordre commensurable et l'équation (I.31) devient :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (\text{I.32})$$

Dans le cas où $\alpha = 1/Q$, $Q \in \mathbb{N}$, le système sera d'ordre rationnel ce qui facilite la recherche et la détermination d'un ordre commensurable.

I.4.2 Fonction de transfert fractionnaire

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (I.31), et on supposant que les conditions initiales nulles, on obtient la forme de la fonction de transfert non entière suivante :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (\text{I.33})$$

Si on applique cette fois-ci la transformée de Laplace à l'équation (I.32), c'est-à-dire dans le cas d'un système d'ordre commensurable, la fonction de transfert s'écrira comme suit :

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j\alpha}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{i\alpha}} \quad (\text{I.34})$$

Lorsqu'on traite un système multivariable, il peut être décrit par une matrice de fonctions de transfert non entières, ou un système d'équations différentielles fractionnaires.

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons le terme *dimension* d'un système qui désigne la dimension du système d'ordre fractionnaire ou de son modèle d'état au lieu du terme *ordre* qui est attribué à l'ordre de dérivation non entier et qui est utilisé dans le cas entier pour désigner l'ordre du polynôme (puissance maximale du polynôme).

I.4.3 Représentation d'état des systèmes fractionnaires [5]

Par analogie avec le cas entier, le modèle d'état d'un système d'ordre fractionnaire, linéaire continu invariant dans le temps est défini par deux équations :

- Une équation d'état où chaque variable d'état $x_i(t)$ est dérivée à un ordre non entier α_i donnant ainsi une représentation d'état généralisée.
- Une équation de sortie (ou d'observation) identique à celle du cas entier.

Le modèle d'état généralisé s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + D_T u(t) \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

Dans lequel : $0 < \alpha < 1$

$u \in \mathbb{R}^p$: est le vecteur colonne des entrées.

$x \in \mathbb{R}^n$: est le vecteur colonne d'état d'ordre non entier.

$y \in \mathbb{R}^q$: est le vecteur colonne de sortie.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: est la matrice d'état.

$B \in \mathbb{R}^{n \times p}$: est la matrice d'entrée.

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$: est la matrice de sortie.

$D \in \mathbb{R}^{q \times p}$: est la matrice de transmission directe.

Avec : $D^{(\alpha)}x = [D^{\alpha_1}x_1 \quad D^{\alpha_2}x_2 \quad \dots \quad D^{\alpha_n}x_n]^T$.

Lorsque tous les états $x_i(t)$ sont dérivés à un même ordre non entier α , on aboutira à une représentation d'état d'un système d'ordre fractionnaire commensurable, tel que :

$$D^{(\alpha)} = [D^\alpha x_1 \quad D^\alpha x_2 \quad \dots \quad D^\alpha x_n]^T .$$

Dans la partie qui suit on s'intéressera seulement aux représentations d'état des systèmes d'ordre non entier commensurable en raison de la non disponibilité d'un développement similaire pour les systèmes non entiers généralisés (ou non commensurable).

I.5 Obtention d'une fonction de transfert à partir de la représentation d'état [1]

Le passage du modèle d'état fractionnaire au modèle fonction de transfert se fait exactement comme dans le cas entier tout en appliquant la transformée de Laplace à l'équation (I.35), cette dernière devient :

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} X(0) = A X(s) + B U(s) \quad \Longrightarrow$$

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} B U(s) + (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} X(0) \quad (\text{I.36})$$

$$Y(s) = C X(s) + d U(s) \quad (\text{I.37})$$

Dans le cas où les conditions initiales sont considérés nulles l'équation (I.36) devient :

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} B U(s) \quad (\text{I.38})$$

En substituant $X(s)$ dans l'équation (I.37) on obtient la matrice de fonction de transfert de dimension q lignes et p colonnes ci-dessous :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s^\alpha I - A)^{-1} B + d \quad (\text{I.39})$$

où I est la matrice identité de dimension $n \times n$.

Avec : $s^{(\alpha)} I_n = \text{diag}[s^{\alpha_1}, s^{\alpha_2}, \dots, s^{\alpha_n}]$

Considérons un système monovarié de fonction de transfert (I.34) vue précédemment :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{j\alpha}}{\sum_{j=0}^n a_j s^{j\alpha}} \quad , \quad a_n = 1 \quad , \quad m \leq n \quad (\text{I.40})$$

On peut construire trois représentations canoniques ou formes standard à partir de l'équation (I.40) qui sont identiques et similaires aux représentations classiques développées pour les systèmes d'ordre entier.

I.5.1 Forme canonique commandable

La représentation d'état appelée forme canonique commandable obtenue à partir de l'équation de la fonction de transfert (I.40), s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-2} \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{I.41})$$

$$y = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (\text{I.42})$$

où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$.

I.5.2 Forme canonique observable

La représentation d'état appelée forme canonique observable obtenue à partir de l'équation de la fonction de transfert (I.40), s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ D^\alpha x_3 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-1} \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-2} - b_n a_{n-2} \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} u \quad (\text{I.43})$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (\text{I.44})$$

où $b_i = 0$, pour $m < i \leq n$.

I.5.3 Forme canonique modale

La décomposition en fractions partielles de la fonction de transfert (I.40) ayant les fonctions s^α , et tout en supposant que le premier pôle p_1 est de multiplicité r et les autres pôles sont simples, on peut réécrire la fonction (I.40) sous la forme suivante :

$$G(s) = b_n + \frac{C_1}{(s^\alpha - p_1)^r} + \dots + \frac{C_{n-1}}{(s^\alpha - p_1)^2} + \frac{C_n}{(s^\alpha - p_1)} + \sum_{i=r+1}^n \frac{C_i}{(s^\alpha - p_i)} \quad (\text{I.41})$$

D'où la représentation d'état de la forme canonique modale suivante :

$$\begin{bmatrix} D^\alpha x_1 \\ D^\alpha x_2 \\ \vdots \\ D^\alpha x_r \\ D^\alpha x_{r+1} \\ \vdots \\ D^\alpha x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_{r+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{I.42})$$

$$y = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_r \ C_{r+1} \ \dots \ C_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u \quad (\text{I.43})$$

où $b_n = 0$ pour $m < n$.

I.6 Calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier [3]

Le calcul des racines d'un polynôme caractéristique d'ordre non entier se fait d'une manière différente que pour le cas entier, puisque les puissances non entières réelles du polynôme sont transposées en puissances rationnelles.

Soit un polynôme d'ordre non entier suivant :

$$\Delta(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 = 0 \quad (\text{I.44})$$

avec: $a_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, ($i=1, 2, \dots, n$).

Afin de résoudre le polynôme de degré non entier (I.44), on utilise une méthode développée par Oustaloup, dont le principe consiste à remplacer les puissances non entières α_i par des nombres rationnels de la forme :

$$\alpha_i = \frac{r_i}{q} + e_i \quad , \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{I.45})$$

où r_i/q et e_i représentent respectivement la puissance rationnelle et l'erreur de rationalisation de même rang.

L'entier q est déterminé de sorte qu'il minimise la somme des erreurs de rationalisation, la recherche de cet entier s'effectue en calculant itérativement la somme des e_i pour q croissant, jusqu'à ce que la somme devienne la plus faible possible conformément à des valeurs admissibles du paramètre r .

En appliquant l'approximation (I.45), le polynôme non entier $\Delta(s)$ de l'équation (I.44) devient un polynôme fractionnaire qui est comme suit :

$$\Delta_f(s) = a_n s^{r_n/q} + a_{n-1} s^{r_{n-1}/q} + \dots + a_1 s^{r_1/q} + a_0 = 0 \quad (\text{I.46})$$

Les racines du polynôme ci-dessus ne sont que les approximations du polynôme non entier (I.44).

En effectuant le changement de variable suivant :

$$p = s^{1/q} \quad (\text{I.47})$$

Le polynôme fractionnaire (I.46) devient un polynôme entier donné par :

$$\Delta(p) = a_n p^{r_n} + a_{n-1} p^{r_{n-1}} + \dots + a_1 p^{r_1} + a_0 = 0 \quad (\text{I.48})$$

Ce polynôme possède alors r_n racines simples ou multiples. Connaissant ces racines, et grâce au changement de variable (I.47) on peut déduire les racines du polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$ de l'équation (I.46) qui sont les approximations des racines du polynôme non entier (I.44).

En effet chaque racine p_i du polynôme entier $\Delta(p)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$p_i = |p_i| e^{j \arg(p_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, r_n) \quad (\text{I.49})$$

Avec $|p_i|$ et $\arg(p_i)$ sont respectivement le module et l'argument de la racine p_i .

Si la variable complexe s du polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$ s'écrit sous la forme $s = |s| e^{j\theta}$ avec $\theta = \theta_0 + 2\pi\mathcal{K}$, il est possible d'exprimer une quelconque puissance de s conformément à la relation suivante :

$$s^{\alpha_i} = (|s| e^{j(\theta_0 + 2\pi\mathcal{K})})^{\alpha_i} = |s|^{\alpha_i} e^{j\alpha_i\theta_0} e^{j2\alpha_i\mathcal{K}\pi} \quad (\text{I.50})$$

La forme ci-dessus peut engendrer deux cas bien distincts selon la considération de α_i :

- Quant α_i est un nombre entier, $e^{j2\alpha_i\pi\mathcal{K}} = 1 \forall \mathcal{K}$ ce qui exprime que s^{α_i} a un seul sens traduisant ainsi l'uniformité du polynôme non entier (I.44).
- Dans le cas où α_i est un nombre non entier, le terme $e^{j2\alpha_i\pi\mathcal{K}}$ dépend de \mathcal{K} , exprimant que s^{α_i} a plusieurs sens traduisant ainsi la multiformité du polynôme non entier (I.44).

Afin de rendre cette équation uniforme, on a la possibilité d'effectuer une coupure du plan complexe suivant l'axe \mathbb{R}^- pour éviter à l'argument de s décrire un tour complet, et de répondre au caractère indéfini de s^{α_i} pour $s \in \mathbb{R}^-$ et $\alpha_i \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ [3]. La coupure ainsi définie impose la détermination $]-\pi, +\pi[$ pour l'argument de s et est bien conforme à la condition sur s , soit $s \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ (figure I.1).

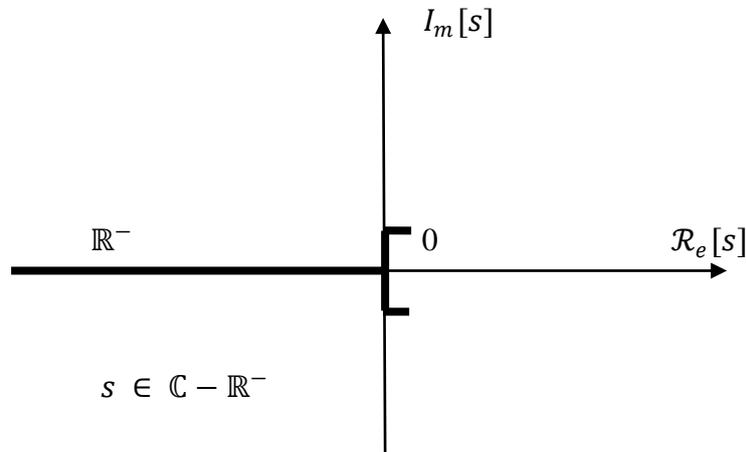


Figure I.1 : coupure du plan complexe suivant l'axe \mathbb{R}^-

Les racines du polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} |s| = |p_i|^q \\ \text{arg}(s) = q \text{arg}(p_i) + 2qk\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\frac{1}{2q} - \frac{\text{arg}(p_i)}{2\pi} < k < \frac{1}{2q} - \frac{\text{arg}(p_i)}{2\pi} \end{array} \right. \quad (\text{I.51})$$

La troisième relation de l'équation ci-dessus permet de vérifier l'existence des racines du polynôme fractionnaire, tandis que les deux autres relations permettent de les calculer.

Exemple

Soit à résoudre le polynôme non entier :

$$\Delta(s) = s^{0.66} - 3s^{0.33} + 2 = 0 \quad (I.52)$$

Le polynôme ci-dessus peut être approximé par un polynôme fractionnaire en approximant les ordres non entiers 0.66 et 0.33 par :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.66 \approx \frac{2}{3} \\ 0.33 \approx \frac{1}{3} \\ e = e_1 + e_2 = 0.0099 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow e_1 = 0.0066 \\ \Rightarrow e_2 = 0.0033 \end{array} \quad (I.53)$$

Le polynôme fractionnaire correspondant est donné par :

$$\Delta_f(s) = s^{2/3} - 3s^{1/3} + 2 = 0 \quad (I.54)$$

A l'aide du changement de variable $p = s^{1/3}$, celui-ci devient entier et s'écrit sous la forme :

$$\Delta(p) = p^2 - 3p + 2 = 0 \quad (I.55)$$

Dont les racines sont :

$$p_1 = 2 = 2 e^{j0} \quad , \quad p_2 = -1 = e^{j\pi}$$

La condition d'existence des racines du polynôme fractionnaire s'exprime dans ce cas par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } p_1 \quad \frac{-1}{6} < k < \frac{1}{6} \quad \Rightarrow k = 0 \\ \text{pour } p_2 \quad \frac{-4}{6} < k < \frac{-2}{6} \quad \Rightarrow k \text{ n'existe pas} \end{array} \right. \quad (I.56)$$

k doit être entier.

La deuxième racine $p_2 = -1$, ne peut pas engendrer de racine du polynôme $\Delta_f(s)$ puisqu'elle appartient à l'axe \mathbb{R}^- . C'est ce qu'on appelle un multi mode aperiodique.

Par conséquent, seule la racine p_1 du polynôme entier (I.55) engendre la racine du polynôme fractionnaire (I.54), et donc du polynôme non entier (I.52) qui est donné par :

$$s_1 = 8 \quad (I.57)$$

On peut tirer quelques conclusions sur les polynômes d'ordre non entier à partir de ce qu'on a vu précédemment :

- Le nombre de racines d'un polynôme d'ordre non entier ne peut être déterminé au préalable ni à partir de la puissance la plus élevée de sa variable, ni à partir du nombre de ses coefficients.
- Le nombre de racines d'un polynôme d'ordre non entier, peut être beaucoup plus grand que celui du polynôme entier qui lui correspond par le changement de variable $p = s^\alpha$, comme il peut n'en avoir aucune, alors que le polynôme entier en possède r_n .
- On ne peut pas reconstituer le polynôme non entier à partir de ses racines comme dans le cas des polynômes entiers.

I.7 Stabilité des systèmes d'ordre non entier [3], [5]

Comme dans le cas entier, la condition de stabilité d'un système non entier d'ordre commensurable, est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive ou nulle.

Néanmoins, et comme on vient de le constater, la vérification de cette condition de stabilité par le calcul des racines de l'équation caractéristique s'avère très difficile vu à la complexité de leur calcul (voir l'exemple précédent). Au lieu de raisonner sur les racines du polynôme caractéristique en s , Matignon a établi une condition de stabilité en raisonnant sur le polynôme entier correspondant de variable complexe p , obtenu à partir de l'équation caractéristique de variable s , par le changement de variable $p = s^\alpha$. Cette condition ne peut de ce fait être appliquée qu'aux systèmes non entiers d'ordre commensurable.

Définition : *un système est dit BIBO stable si et seulement si, à une entrée bornée il correspond une sortie bornée.*

Théorème : *un système non entier d'ordre commensurable α est BIBO stable, si et seulement si, les racines du polynôme entier de variable p , obtenu à partir de l'équation caractéristique du système de variable s , par le changement de variable $p = s^\alpha$, vérifient la condition :*

$$|\arg(p_i)| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.58})$$

n est le nombre de racines du polynome entier.

p_i , ($i = 1, \dots, n$) sont les racines du polynôme entier.

$\arg(p_i)$ est l'argument de la racine p_i .

Les différents domaines de stabilité sont représentés par les figures suivantes :

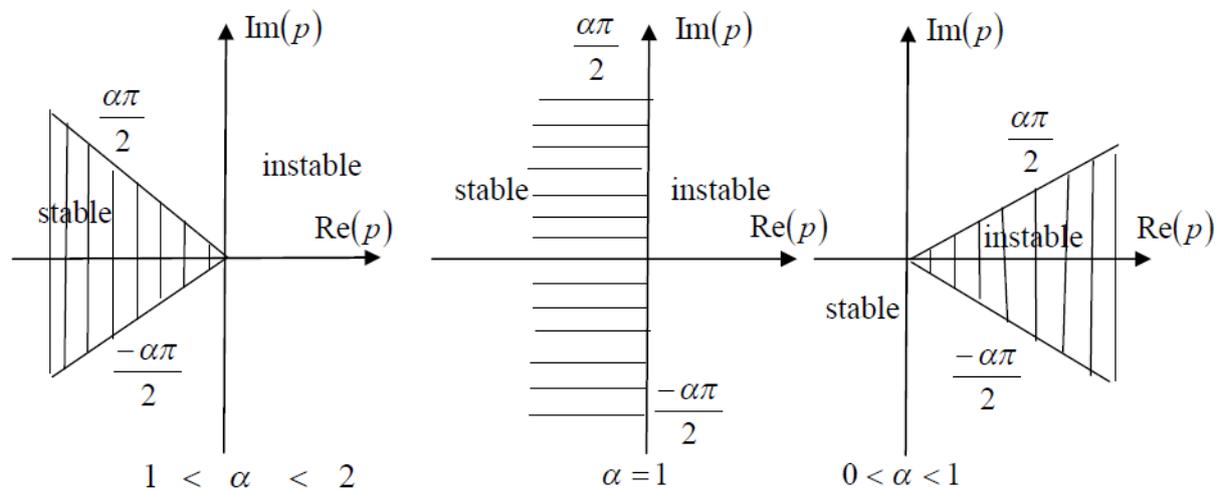


Figure I.2 : domaine de stabilité des systèmes d'ordre commensurables dans le plan complexe $p = s^\alpha$.

I.8 Conclusion

Nous avons présentés dans la première partie de ce chapitre, quelques fonctions utiles pour le calcul fractionnaire telles que les fonctions Gamma Euler, Mittag-Leffler et les différentes définitions et propriétés de la dérivation et intégration non entière. Ensuite nous avons abordés les différentes représentations des systèmes d'ordre fractionnaire : équation différentielle généralisée, fonction de transfert fractionnaire et représentation d'état fractionnaire. Enfin pour clôturer ce chapitre, nous avons énoncés les conditions de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire.

Chapitre II

Principales méthodes d'identification

II.1 Introduction

En général, le problème d'identification consiste à proposer une structure entre l'entrée et la sortie d'un système (ou procédé) et à déterminer à partir du couple entrée-sortie, les valeurs des paramètres du modèle mathématique ainsi obtenu, de façon à ce que ce dernier se comporte comme dans la réalité (physique) ou tout au moins s'en approcher le plus près possible.

Lorsqu'on désire obtenir un modèle paramétrique pour un processus/système c'est-à-dire une relation mathématique comprenant un nombre fini de terme (par exemple fonction de transfert, équation différentielle ou aux différences), on peut souhaiter en premier lieu exprimé les lois physiques connues régissant son fonctionnement et en déduire la (les) relation(s) mathématique(s) cherchée(s) ; on parle alors de modèle de connaissance.

Cependant lorsque l'analyse interne n'est pas possible (lois internes inconnues, mesures internes impossibles ou difficiles) ou simplement trop complexe, on est amené à considérer le système comme étant une boîte noire. A partir de l'observation de ses entrées-sorties (comportement externe) et de mesures expérimentales, on établit alors la relation mathématique qui lui correspond au mieux ; on parle alors de modèle de représentation. Ainsi, un système complexe sera représenté par un modèle mathématique aussi simple que possible, et dont les coefficients sont ajustés de manière à représenter le mieux possible le système réel dans des conditions de fonctionnement données (et en particulier dans de zone de travail plus ou moins grande).

La réponse d'un système à des excitations standard par exemple de type impulsionnel ou de type sinusoïdal en fournit un modèle non paramétrique qui est la réponse impulsionnelle (domaine temporel) ou fréquentielle (domaine des fréquences).

L'informatique peut aider à exécuter la tâche d'identification de signaux de test, l'acquisition des données et mesure, leur traitement en temps différé ou en temps réel, et enfin la validation du modèle.

II.2 Etapes de l'identification

Dans l'opération d'identification d'un système [6], on peut distinguer deux parties : La caractérisation (étape qualitative) et l'estimation des paramètres (étape quantitative). La caractérisation est l'étape qui consiste à choisir la structure du modèle.

L'estimation est l'étape qui consiste à trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans les équations. Ces dernières sont déterminées pour que le comportement du modèle soit le plus proche possible de celui du système, cette comparaison est effectuée à l'aide d'un critère. Une fois ce critère choisi et à l'aide d'un processus mathématique (algorithme) il faut réduire ou minimiser cet écart système-modèle.

Il faut rappeler qu'un modèle est souvent déterminé pour servir à une commande du système et puisque le processus n'admet pas un modèle unique, l'automaticien est toujours ramené à chercher un bon modèle plus au moins compliqué et précis, adapté à son problème.

On peut généralement décomposer en quatre étapes la conduite d'une bonne identification. Celle-ci est facilitée par les renseignements dont on dispose au préalable sur le processus réel. Ces considérations et opérations précédentes peuvent être schématisées de la façon suivante :

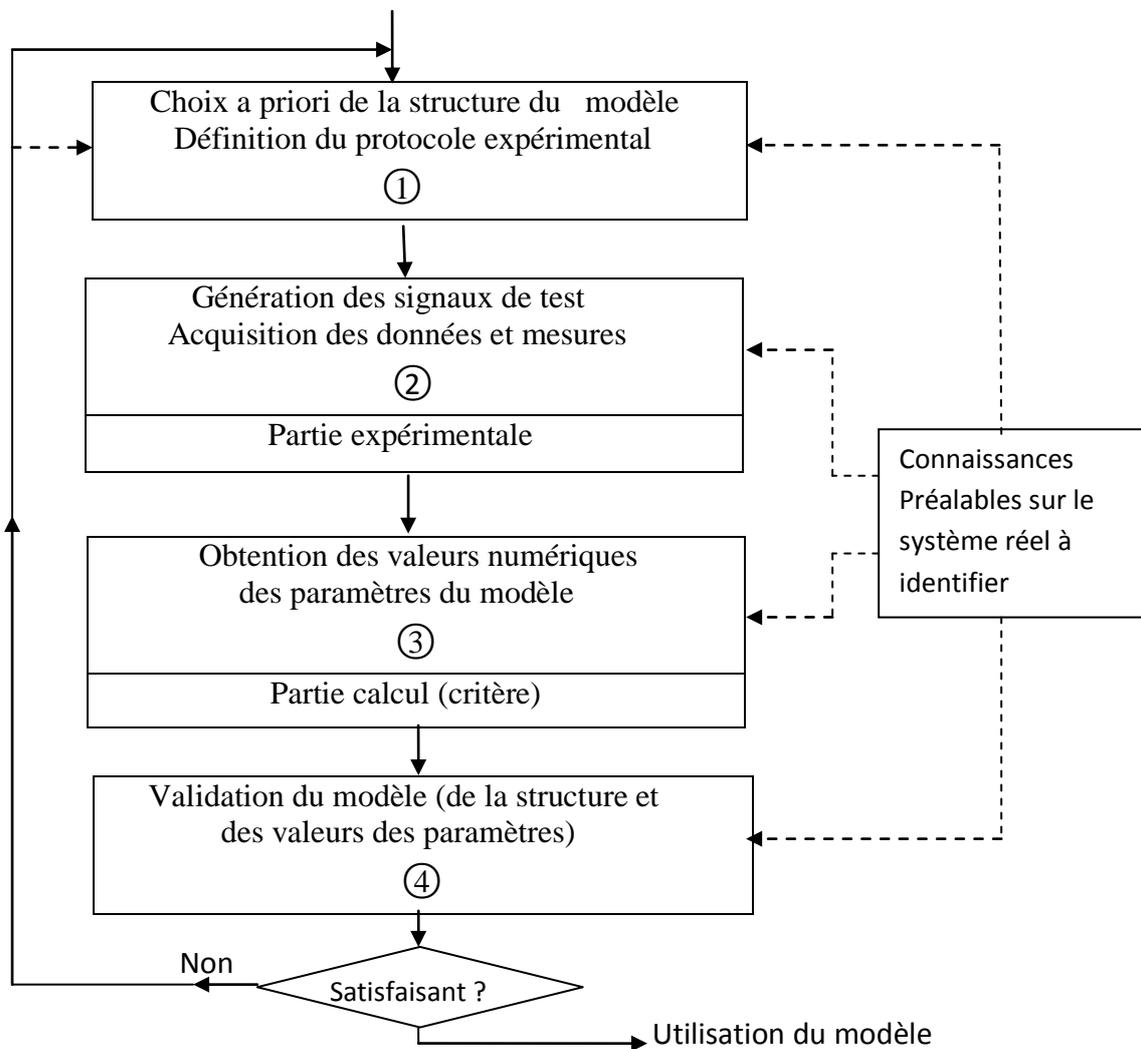


Figure II.1 : les étapes de l'identification

a) *Les connaissances préalables concernant le système réel à identifier peuvent porter sur :*

➤ **Sa caractéristique statique**

Elle permet de définir le(s) domaine(s) de linéarité. On réalise sur le système à une série d'échelons successifs, en attendant à chaque fois d'atteindre le régime permanent. Finalement, on rassemble ces mesures entrées/sorties dans un tableau afin de tracer la courbe $y = f(u)$ qui est la caractéristique statique du système à identifier. Souvent pour les systèmes industriels on obtient une caractéristique statique en « S », pour laquelle on distingue en général trois zones (Fig. II.2) :

- La zone d'inertie —————> 1
- Le domaine de linéarité —————> 2
- La zone de saturation —————> 3

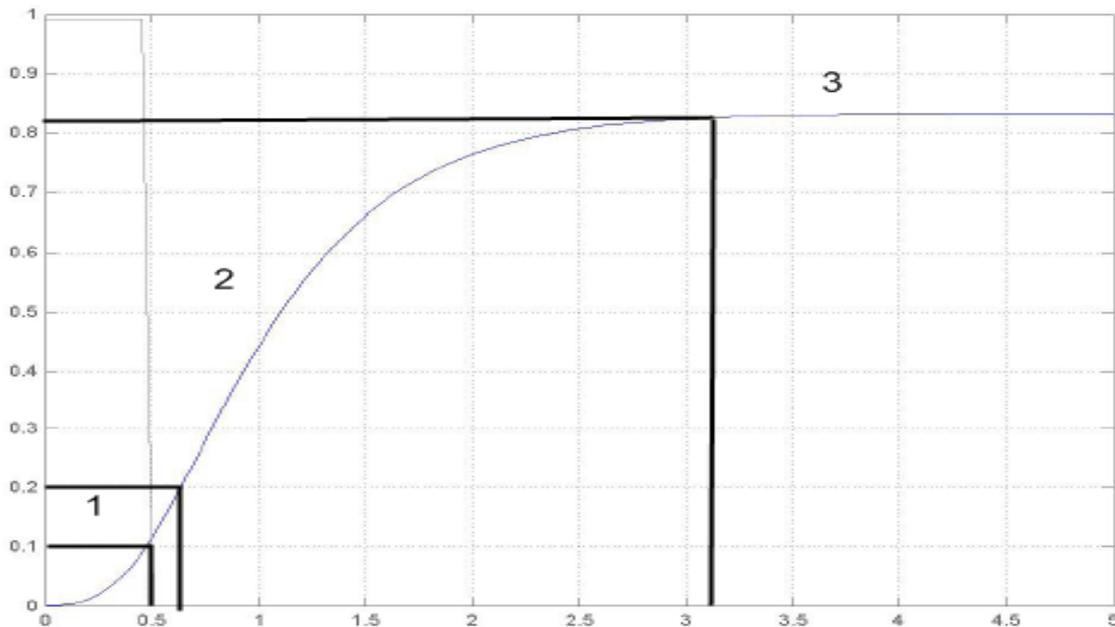


Figure II.2 : les trois zones de la caractéristique statique

➤ **Son temps de réponse**

Déduit d'un essai en réponse indicielle dans le domaine de linéarité, la forme de cette réponse dépend notamment de l'ordre du système. Ce temps de réponse une fois déterminé (mesurer) est utile, par fois indispensable, il sert également dans des cas de modélisation par un modèle discret à l'évaluation d'une période d'échantillonnage adéquate (T_e).

➤ **La présence ou non d'un intégrateur, d'un retard pur**

Généralement on élimine toujours les composantes continues sur les mesures des grandeurs (excitation et sortie) par un filtrage passe-haut lorsqu'on s'intéresse à leurs seules variations ; par ailleurs, un éventuel filtrage passe-bas permettra de diminuer l'influence des bruits à spectre large.

b) signaux test utilisés en identification

Dans la réalité du fonctionnement normal, un processus inclus dans une boucle fermée évolue autour d'un point de fonctionnement, et généralement les variations de la commande u et de la sortie y sont relativement faibles. Or une bonne identification, avec une méthode donnée est liée à la qualité des suites de mesures entrées/sorties effectuées donc à la quantité d'informations que ces suites apportent. On cherchera donc, quand cela n'est pas risqué pour le processus, de l'exciter en boucle ouverte par un signal suffisamment énergétique (mais non excessif pour ne pas le projeter hors de la zone de linéarité) autour du point de fonctionnement et suffisamment riche en composantes spectrales de façon à exciter les modes significatifs du processus.

En pratique, on utilise deux catégories de signaux -test (excitation) :

- *Les signaux déterministes* : tels que l'échelon, la sinusoïde .Ces signaux sont décrits par une fonction du temps ou par leur transformée de Fourier.
- *Les signaux aléatoires* : décrits par leurs propriétés statistiques. Parmi ceux-ci, le bruit blanc (théorique) dont le spectre d'énergie est constant et équiréparti sur toutes les fréquences, permettrait d'exciter le processus dans toute la bande passante. On lui préfère en pratique la Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (S.B.P.A) , en anglais : Pseudo-Randon Binary Sequence (P.R.B.S). C'est ce signal que nous détaillerons dans la suite de notre travail.

c) classification des modèles

Globalement, la classification des modèles se fait par rapport à l'évolution des paramètres dont on distingue deux types :

- *Déterministe* : où les variables varient de façon continue, à une valeur donnée de l'entrée x correspond une seule valeur de sortie y , dans ce cas on obtient des modèles dit non paramétriques (réponse fréquentielle, réponse à un échelon, etc.).
- *Stochastique (aléatoire)* : les variables varient de façon aléatoire, c'est-à-dire à une valeur donnée de l'entrée x correspond l'espérance mathématique de la sortie y . Ces

modèles obtenus, dit paramétriques (fonction de transfert, équation différentielle ou aux différences, etc.), permettent uniquement d'estimer la grandeur de la sortie.

II.3 Méthodes d'identification des systèmes entiers

Le développement des calculateurs puissants, la disponibilité de la boîte à outil *system identification* de Matlab, développé par L.Ljung, et la facilité d'implantation de ces méthodes a largement contribué à la domination de l'identification par des modèles discrets qu'on appelle aussi identification discrète. Les modèles sont linéaires par rapport aux paramètres (LP) et les techniques par moindres carrés peuvent être utilisées. Toutefois, l'identification par des modèles continus s'avèrent nécessaire dans certains cas, et elle est appelée abusivement *identification continue*. Lorsque l'on veut simuler le comportement dynamique d'un système, en vue d'accéder à la connaissance de certains de ses paramètres, les modèles à temps continu sont plus proches de la nature physique du système et les paramètres estimés sont fortement liés aux paramètres réels du processus. Alors que pour les modèles discrets, les paramètres et la structure dépendent de la période d'échantillonnage choisie et peuvent avoir perdu tout lien avec la réalité physique. [5].

Généralement, les méthodes d'identification des systèmes sont classées en deux catégories ; les méthodes classiques (graphiques) d'identification et les méthodes modernes (statistiques) d'identification. Et dans la suite de notre travail, nous étudierons les méthodes des deux types les plus connues et les plus utilisées.

II.3.1 Méthodes classiques d'identification

Nous présentons successivement ici quelques méthodes fondamentales susceptibles d'obtenir un modèle à travers :

- La réponse à l'échelon.
- La réponse en fréquence.
- La réponse impulsionnelle (utilisation des techniques de corrélation).

II.3.1.1 Réponse indicielle – Méthode de STREJC [7]

➤ **Principe** : cette méthode dite graphique permet d'identifier un processus initialement au repos et soumis à une entrée échelon, et présentant une réponse indicielle apériodique (sans dépassement) (fig. II.4). Le modèle mathématique proposé par Strejc pour représenter ce processus est :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k_0 e^{-Tp}}{(1 + \tau p)^n} \quad (\text{II.1})$$

où k_0 est le gain statique, τ représente la constante de temps, T est le retard et enfin n est l'ordre du système ; sont les quatre paramètres à identifier.

➤ **La méthode :**

- Le gain statique k_0 est mesuré directement par la valeur finale de la sortie.
- On trace une tangente à la réponse indicielle en boucle ouverte à son point d'inflexion et une droite parallèle à l'axe des ordonnées pour déterminer deux valeurs T_u et T_a comme le montre la figure (II.4).
- On relève les valeurs de T_u et T_a à partir de la courbe (figure II.4), et on calcule le rapport T_u/T_a . dans la colonne de T_u/T_a du tableau (TAB II.1) on cherche la valeur inférieur à ce ratio et sur la ligne de ce dernier on détermine la valeur de l'ordre n .
- Toujours à l'aide des valeurs numériques de cette ligne, on calcule la constant de temps τ avec T_a/τ .
- On calcule la nouvelle valeur de T_u' avec T_u/τ , et on déduit le retard T avec $T = T_u - T_u'$.

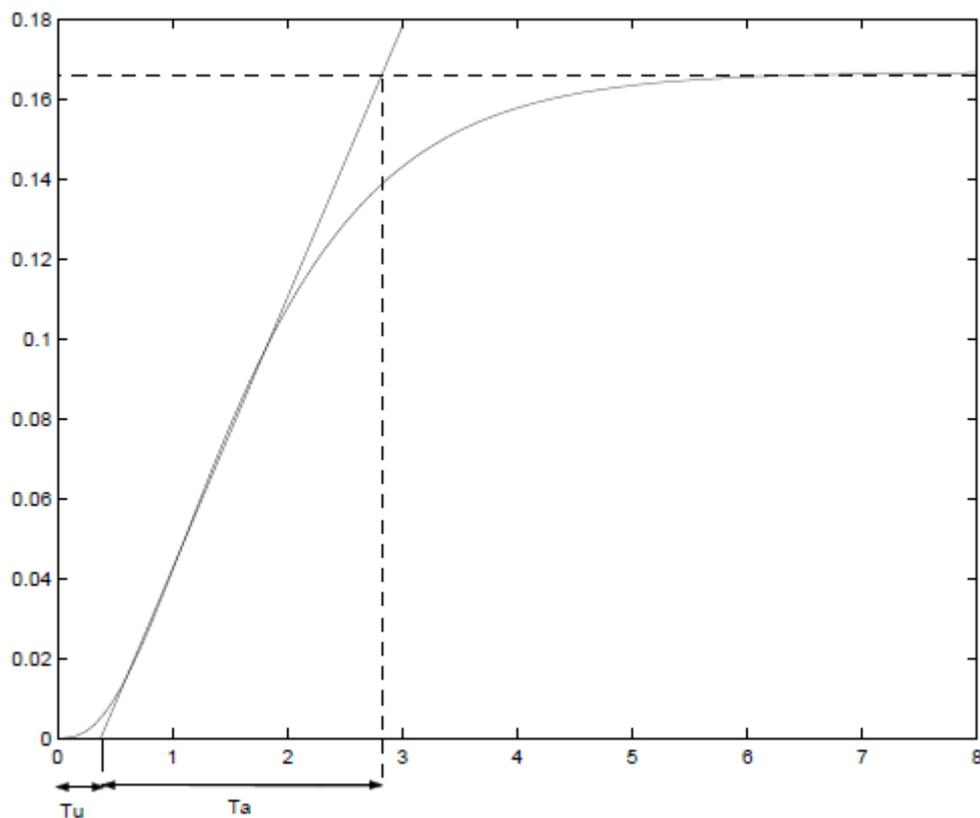


Figure II.4 : la réponse indicielle d'un système aperiodique pour relever T_u et T_a .

le tableau pour estimer l'ordre n , la constante de temps τ et le retard T du modèle de Strejc est comme suit :

n	T_u/T_a	T_u/τ	T_a/τ
1	0	0	1
2	0.104	0.282	2.718
3	0.218	0.805	3.695
4	0.319	1.425	4.465
5	0.410	2.100	5.119
6	0.493	2.811	5.699
7	0.570	3.549	6.226
8	0.642	4.307	6.711
9	0.709	5.081	7.164
10	0.773	5.869	7.590

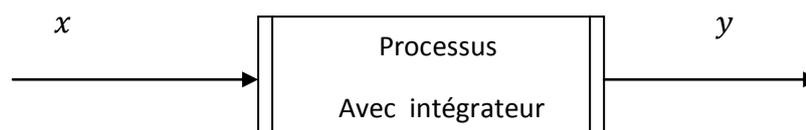
TAB II.1 : les valeurs estimées pour le modèle de Strejc

Plusieurs extensions à la méthode de Strejc ont été réalisées par différents auteurs (Davoust, Quentin, Naslin...), chacune utilisant des régions différentes de la réponse indicielle.

➤ **Extension aux processus intégrateurs** [6]

a) *En boucle ouverte* :

Un processus de type intégrateur est caractérisé par le fait qu'à une variation en échelon appliquée à son entrée, correspond une variation en rampe de sa sortie lors du régime permanent (figure II.5).



Le processus est caractérisé par une réponse indicielle en forme de rampe en régime permanent. On trace l'asymptote (d) à la rampe, de même on trace la parallèle (d') passant par l'origine des temps (figure II.5).

Soit t_0 l'intersection de l'asymptote (d) avec l'axe des temps, on obtient par projection les points A(t_0), B(t_0) et C(t_0) comme le montre bien la figure II.5 suivante :

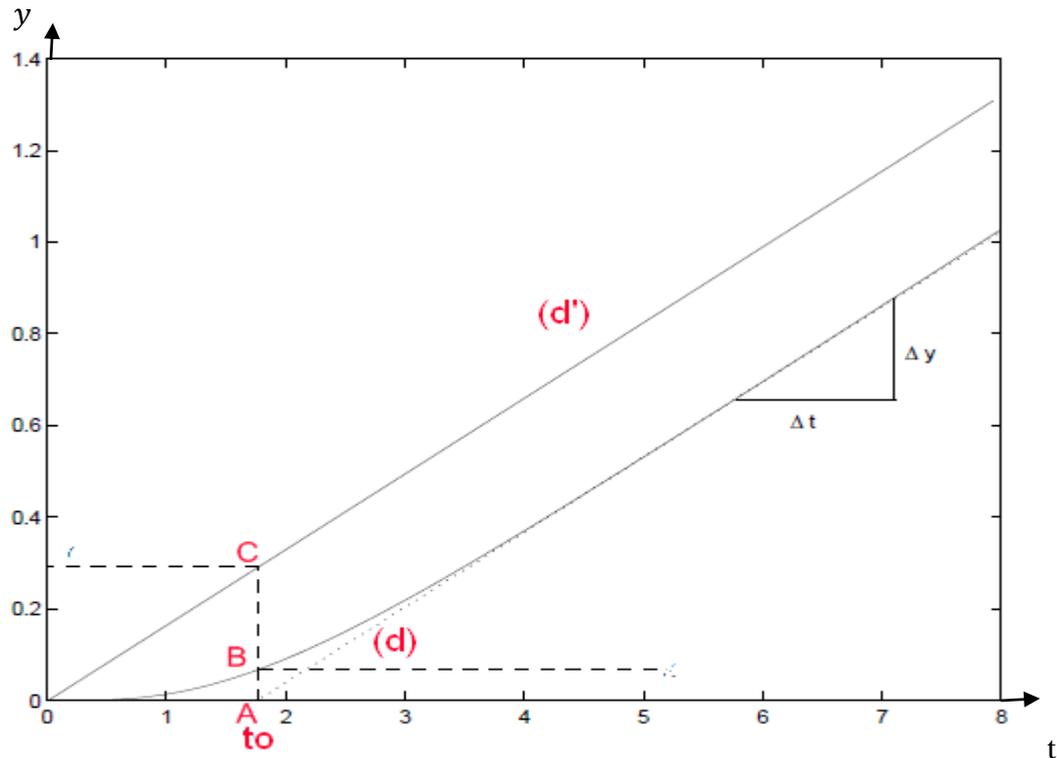


Figure II.5 : la réponse en rampe à la variation de l'entrée.

Pour une structure de modèle de la forme :

$$G_i(p) = \frac{k_0}{p} \frac{1}{(1+\tau p)^n} \quad (\text{II.2})$$

On a construit le tableau suivant :

n	AB/AC
1	0.368
2	0.271
3	0.224
4	0.195
5	0.175

TAB II.2 : estimation de la valeur de l'ordre n .

On tire la valeur de l'ordre n de ce tableau à l'aide de la mesure du rapport AB/AC , et on calcule la constante de temps τ de la relation : $\tau = t_0/n$.

k_0 représente le gain du système en vitesse, calculé avec la relation suivante :

$$k_0 = \frac{\Delta y}{\Delta E} \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{II.3})$$

En pratique, il est assez rare d'identifier un système intégrateur en boucle ouverte car le processus intégrateur représente une sensibilité importante aux conditions initiales non nulles, il a tendance à dériver. Donc on procède à une identification en boucle fermée.

b) En boucle fermée :

On procède à un essai en boucle fermée en utilisant le schéma fonctionnel suivant :

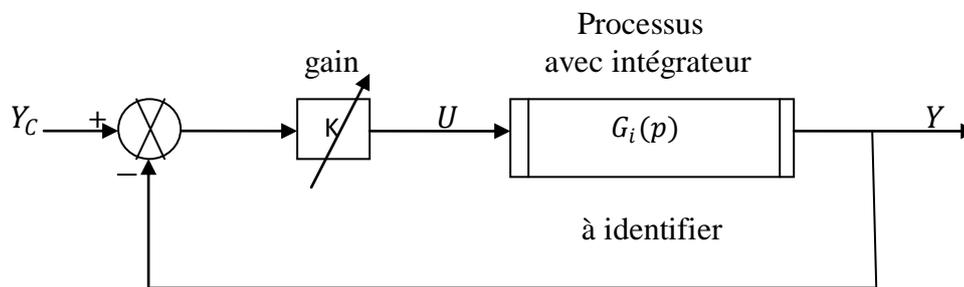


Figure II.6 : schéma fonctionnel du processus avec intégrateur en boucle fermée.

La consigne est un échelon. On ajuste le gain K (action proportionnelle) pour obtenir une réponse indicielle apériodique à la limite du dépassement. Il est alors possible de déterminer par la méthode de Strejc les paramètres n' , la constante de temps τ' et le retard T' du modèle du système en boucle fermée $H(p)$ tel que :

$$H(p) = \frac{e^{-T' p}}{(1 + \tau' p)^{n'}} \quad (\text{II.4})$$

Le gain statique vaut nécessairement 1 du fait de la présence de l'intégration au niveau du processus.

Or on a :

$$\frac{Y(p)}{Y_c(p)} = H(p) = \frac{K G_i(p)}{1 + K G_i(p)} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Donc :} \quad G_i(p) = \frac{1}{K} \frac{H(p)}{1-H(p)} \quad (\text{II.6})$$

Reportons (II.4) dans (II.6) et négligeons le terme T' pour plus de clarté, on déduit alors le modèle du processus :

$$G_i(p) = \frac{1}{K} \frac{1}{(1+\tau'p)^{n'}-1} \quad (\text{II.7})$$

Que l'on peut en la développant, la mettre sous la forme suivante :

$$G_i(p) = \frac{K_i}{p} \frac{1}{1+a_1p+a_2p^2+\dots} \quad (\text{II.8})$$

Notons que l'échelon est très riche en information, et à priori un seul enregistrement suffit. En fait il faut faire extrêmement attention aux conditions d'expérience car celle-ci ne peuvent être validées que si le système est initialement au repos et si les perturbations intervenant en cours d'essai sont négligeables.

– Modèle de BROÏDA

Il a juste simplifié la méthode de Strejc en passant d'un ordre n à un 1^{er} ordre. Il a estimé que :

- La tangente au point d'inflexion était une source d'erreur importante.
- La durée des essais pouvait être longue sur les systèmes lents avec le risque d'avoir une entrée qui varie pendant l'essai.

Le modèle proposé pour approcher le comportement du système est un premier ordre avec un retard pur. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$G(p) = \frac{K e^{-Tp}}{(1+\tau p)} \quad (\text{II.9})$$

où : T , τ et K représentent respectivement le retard, la constante de temps et le gain statique.

Broïda a alors montré par l'expérience qu'une réponse d'un système en premier ordre coupe toujours celle d'un ordre supérieur en deux points situés de part et d'autre du point d'inflexion, puis il a choisit deux points assez éloignés pour que la coïncidence entre les deux courbes soit significative, mais le dernier point a été pris assez bas de façon à réduire la durée des essais.

Donc son principe consiste à trouver deux instants qui correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. A partir de leur projection sur l'axe des abscisses, on détermine respectivement deux temps t_1 et t_2 (voir figure II.7). Puis on calcule les valeurs du retard et de la constante de temps à l'aide de deux équations suivantes :

$$\tau = 5.5 (t_2 - t_1) \quad (\text{II.10})$$

$$T = 2.8 t_1 - 1.8 t_2 \quad (\text{II.11})$$

Le gain statique K est déterminé exactement comme dans la méthode de Strejc, c'est-à-dire avec la valeur finale de la sortie.

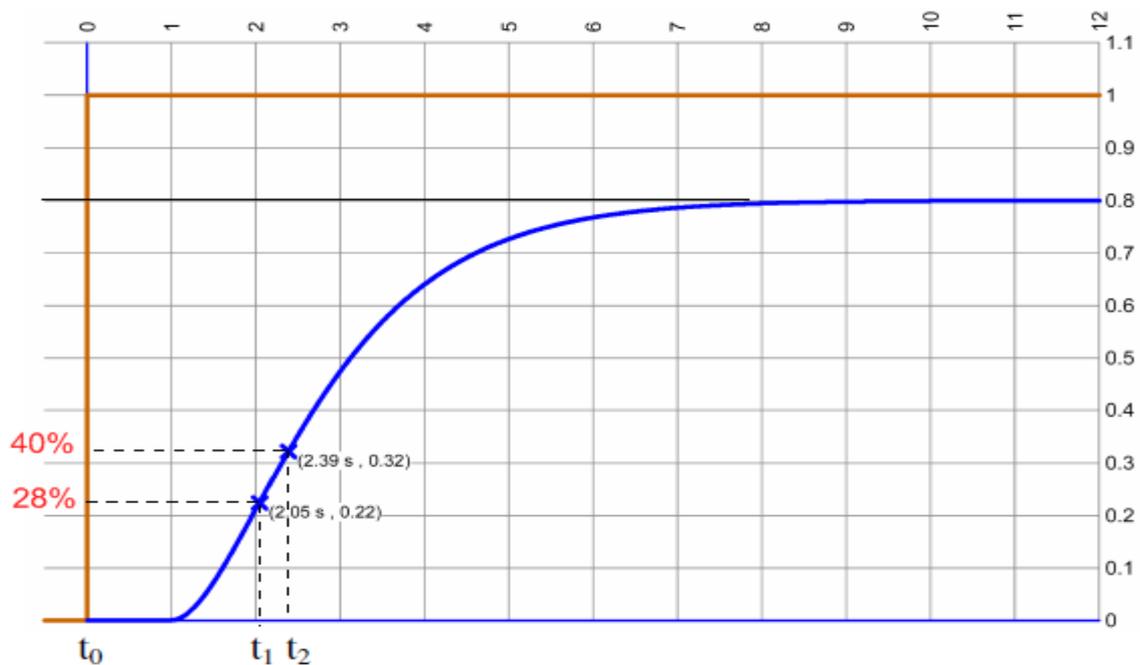


Figure II.7 : détermination de t_1 et t_2 pour la méthode de Broïda

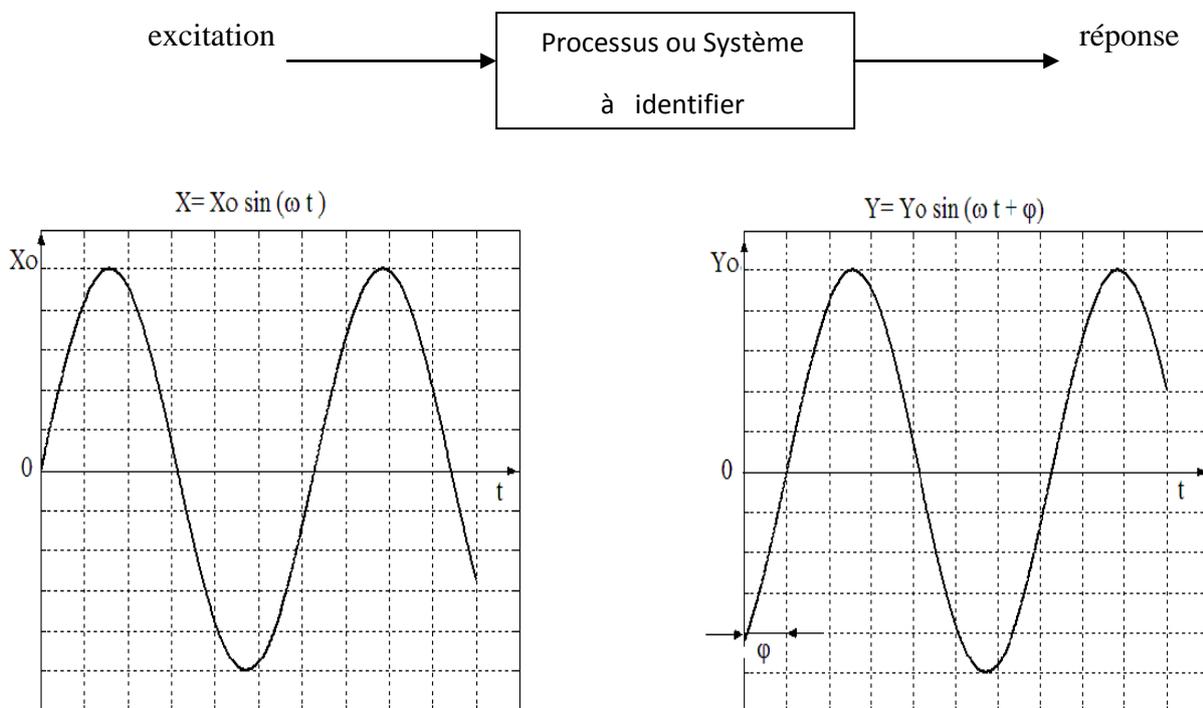
L'avantage des méthodes d'identification classiques dite graphique est qu'elles sont simples lorsqu'on dispose de la réponse indicielle obtenue dans un contexte non ou peu bruité. Néanmoins, ces méthodes sont imprécises (détermination du point d'inflexion pour la méthode de Strejc et détermination des deux instants t_1 et t_2 pour le modèle de Broïda), se limitent à une classe de modèle, nécessitent des signaux de grandes amplitudes, sensibles aux perturbations et possèdent des procédures longues. De plus leur principal inconvénient est la nécessité de déconnecter le système de son environnement (méthode en boucle ouverte) et d'attendre que ce dernier soit au repos. Et aussi elles nécessitent d'être bouclé (méthode en

boucle fermée) avec un processus intégrateur afin que le système ne se dérive pas qui cause la sortie de son domaine de linéarité.

II.3.1.2 Réponse fréquentielle [6]

➤ Excitation sinusoïdale

Excitons un processus continu linéaire par un signal sinusoïdal. La figure II.8 illustre la réponse en régime permanent.



avec ω pulsation (variable).

$\rho(\omega) = Y_0/X_0$ rapport d'amplitude.

$\varphi(\omega)$ déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Figure II.8 : la réponse en régime permanent pour une entrée sinusoïdale.

En faisant varier la pulsation du signal d'entrée ω sur une large bande ; on obtient le lieu de transfert expérimental du processus, c'est un exemple de modèle non paramétrique. En le traçant dans le plan de Bode (figure II.9), Black ou celui de Nyquist, on en obtient les représentations que l'on connaît.

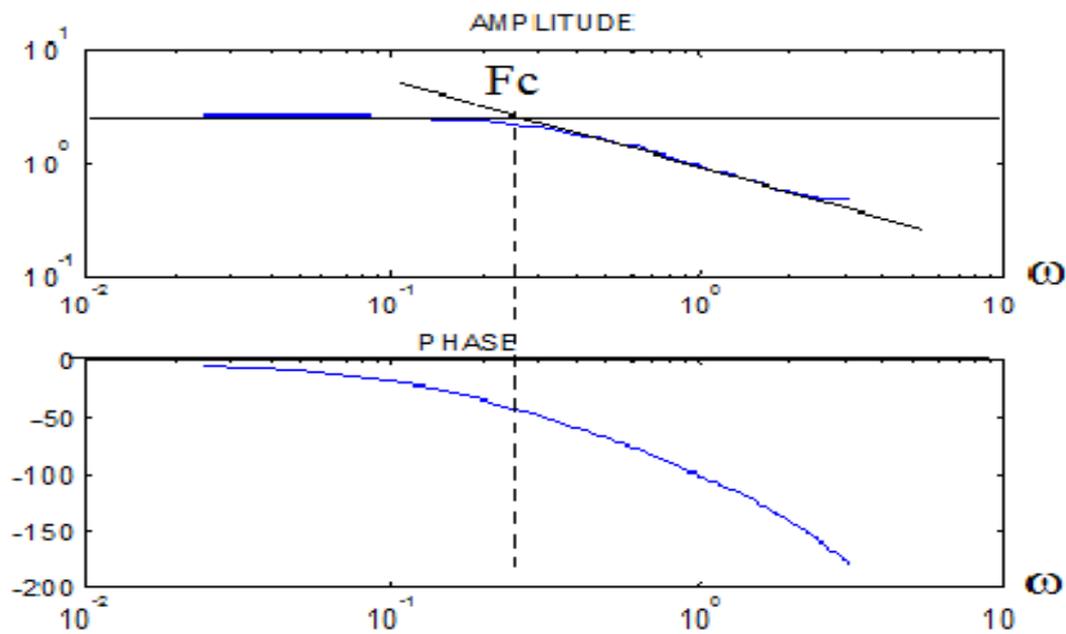


Figure II.9 : représentation fréquentielle dans le lieu de Bode

La mise en œuvre d'une telle méthode peut être rendue délicate par les bruits de mesure; la moyenne calculée sur plusieurs mesures, permet d'améliorer le rapport signal/ bruit. Par ailleurs, si le processus a des constantes de temps très grandes, la mesure en sinusoïdal peut devenir très longue est donc quasiment impossible, car pour chaque mesure il est nécessaire d'attendre l'établissement du régime permanent.

Cette méthode, lorsqu'elle ne conduit pas à un temps d'expérimentation trop lent, est cependant très intéressante car :

- Elle nécessite peu de connaissance à priori du système (il est suffisant de connaître la gamme d'analyse en fréquence et en amplitude).
- Elle est simple à mettre en œuvre.
- Elle permet une linéarisation autour d'un point de fonctionnement en ne considérant que le premier harmonique de la sortie.
- Elle peut être appliquée en boucle fermée, lorsque les perturbations ne sont pas elles aussi harmoniques à la même pulsation que l'entrée, et cela sans réduction de sensibilité.
- Elle est particulièrement bien adaptée à l'étude de la stabilité.

- Elle permet de déduire rapidement le fonctionnement en boucle fermée à partir d'une analyse restreinte au voisinage de la fréquence de coupure.

➤ **Excitation non sinusoïdale (par transformée de Fourier)**

On peut approcher autrement l'analyse fréquentielle. Un signal $x(t)$ riche en fréquences (spectre large), appliqué au système donne lieu à une réponse $y(t)$. On a :

$$G(j2\pi f) = G(j\omega) = \frac{\mathcal{F}[y]}{\mathcal{F}[x]} \quad (\text{II.12})$$

où $\mathcal{F}[y]$ et $\mathcal{F}[x]$ sont les transformées de Fourier respectivement de la sortie et de l'entrée, fonctions de ω .

$G(j\omega)$ est un nombre complexe lequel, pour chaque valeur ω_i de ω , donne son module $\rho(\omega_i)$ et son argument $\varphi(\omega_i)$. On sait que la transformée d'un signal périodique (non sinusoïdal) de période T_0 est un spectre de raies représentant l'énergie distribué selon $nF_0 = n \frac{1}{T_0}$.

Si le signal $x(t)$ est non périodique, son spectre est continu, ce qui ne limite pas en théorie le calcul de la réponse en fréquences à quelques valeurs de ω . En pratique, la détermination de $G(j\omega)$ est confiée le plus souvent à un ordinateur dont une des tâches est de calculer, en utilisant des algorithmes du type Transformation de Fourier Rapide (TFR ou FFT (Fast Fourier Transform), amène à une discrétisation de l'ensemble f (ou ω)), la transformée de Fourier des signaux temporels d'excitation et de réponse.

Cette analyse fréquentielle peut être assimilée à un balayage automatique de fréquences par l'intermédiaire du signal d'excitation.

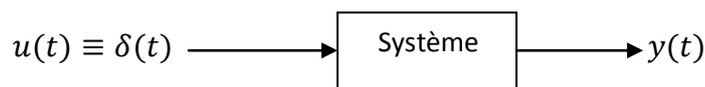
Outre le choix de l'excitation qui doit être suffisamment riche en fréquences, plusieurs essais avec une reprise de moyenne, peuvent améliorer le rapport signal sur bruit et donc la qualité de l'identification. De plus les erreurs dues au calcul de la TFR dites troncature seront diminuées si l'enregistrement du couple de mesures entrée-sortie est de durée assez longue.

II.3.1.3 Réponse impulsionnelle

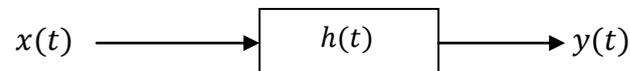
Un système linéaire invariant est entièrement caractérisé par sa réponse à un Dirac. En effet, l'impulsion de Dirac dont la transformée de Fourier est constante sur tout le spectre. La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système est sa fonction de transfert.

Un Dirac « réel » peut être approché, du point de vue de ses effets par une impulsion brève de durée finie et d'énergie limitée. La réponse du système sera de ce fait faible et bruité, d'où difficilement exploitable. Il faut donc atteindre la réponse impulsionnelle $h(t)$ par une voie indirecte, ce qui nous donne la possibilité d'utiliser les techniques de corrélation. Le processus est alors excité par une S.B.P.A. Ajoutons que les signaux aléatoires sont caractérisés par leurs propriétés statistiques, alors que les signaux d'excitation utilisés précédemment étaient de nature déterministe.

Le modèle à identifier est la séquence de pondération (équivalent discret de la réponse impulsionnelle finie RIF du système)



On remplace la notation $u(t)$ par $x(t)$, on a alors le modèle suivant :



On peut établir un produit de convolution pour un système linéaire :

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (\text{II.13})$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t + \tau) d\tau \quad (\text{II.14})$$

Dans le domaine de Laplace on aura : $Y(p) = H(p) X(p)$ (II.15)

Puisque on a : $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ donc : $Y(p) = H(p)$

Ainsi : $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(p)] = h(t)$ (II.16)

Considérons à présent la fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$ de l'entrée $x(t)$, d'une part et la fonction d'intercorrélation $\varphi_{xy}(\tau)$ entre $x(t)$ et $y(t)$ d'autre part.

- **Autocorrélation :**

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt \quad (\text{II.17})$$

Interprétation :

Si on compare un signal $x(t)$, dans l'intervalle $[t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}]$ avec lui-même, décalé de τ , on conçoit que cela permette de voir en quoi le signal à un instant donné est lié à ce qui s'est passé un instant τ avant.

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, appelée densité spectrale, s'écrit :

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{II. 18})$$

• **Intercorrélation :**

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} x(t) y(t + \tau) dt \quad (\text{II. 19})$$

Interprétation :

Si on compare deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, par exemple l'excitation et la réponse d'un système linéaire, on peut se demander si de la connaissance de l'histoire de $x(t)$ et de $y(t)$ pendant le même intervalle de temps T , on peut déduire l'existence d'une relation entre les deux signaux.

La transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation appelée densité interspectrale s'écrit :

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (\text{II. 20})$$

Il existe une même relation de convolution entre $\varphi_{xx}(\tau)$ et $\varphi_{xy}(\tau)$ que celle qui relie $y(t)$ à $x(t)$. En appliquant les deux définitions (II.17) et (II.19) à la relation (II.13), on obtient :

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) * \varphi_{xx}(\tau) \quad (\text{II. 21})$$

Par la transformée de Fourier, cette dernière relation devient :

$$\Phi_{xy}(f) = H(f) \Phi_{xx}(f) \quad (\text{II. 22})$$

Si le signal $x(t)$ est tel que sa fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$ est assimilable à une impulsion de Dirac, alors :

$$\varphi_{xy}(\tau) = h(\tau) \quad (\text{II.23})$$

$$\Phi_{xy}(f) = H(f) \quad (\text{II.24})$$

Le processus d'obtention de la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ est schématisé par la figure suivante :

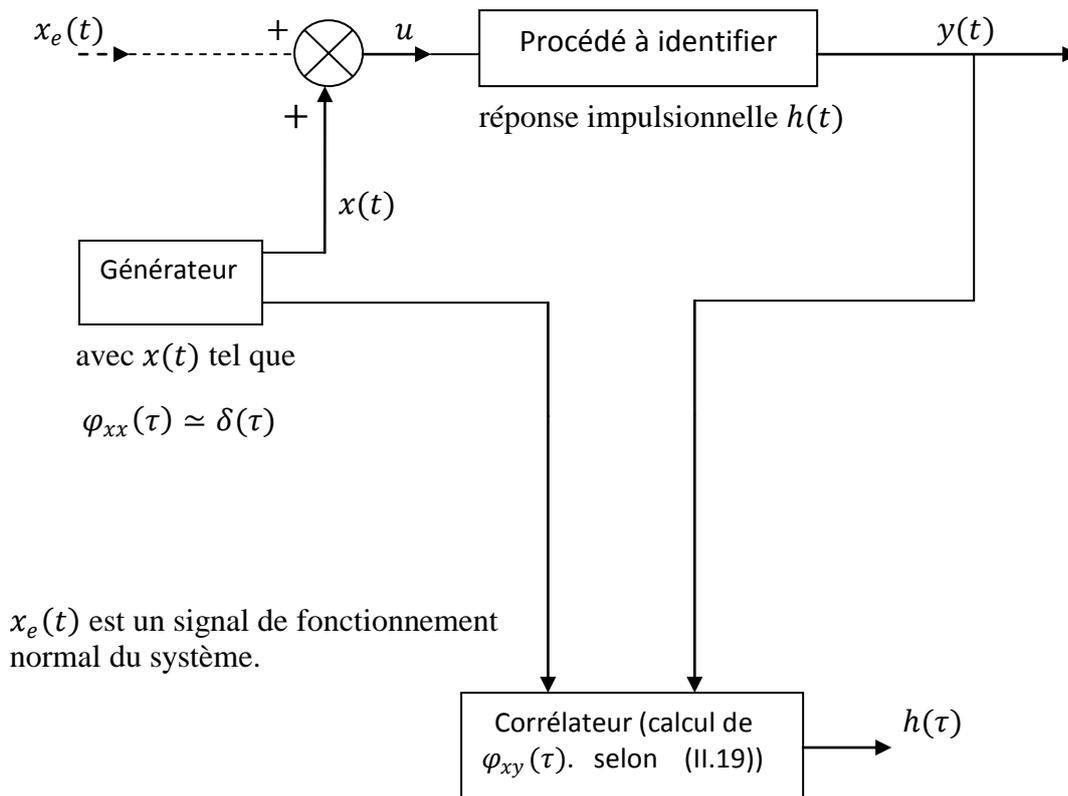


Figure II.10 : l'obtention de la réponse impulsionnelle $h(\tau)$.

Cette méthode de mesure de la réponse impulsionnelle par corrélation présente le très grand avantage d'être applicable même si le signal de test $x(t)$ est superposé à l'entrée $x_e(t)$ du système en fonctionnement normal. La sortie y , d'après la linéarité, est la somme du signal y_x avec le signal y_{x_e} , dus respectivement à l'action de x et de x_e sur le processus.

Alors, $\varphi_{x(y_x+y_{x_e})}(\tau) = \varphi_{xx}(\tau) * h(\tau)$, car $\varphi_{xy_{x_e}}(\tau) = 0$ (x et x_e étant des signaux indépendants). Si de plus $\varphi_{xx}(\tau) \simeq \delta(\tau)$ alors $\varphi_{x(y_x+y_{x_e})}(\tau) = \varphi_{xy}(\tau) \simeq h(\tau)$.

On limitera l'amplitude maximale du signal x à une valeur assez faible pour ne pas perturber le fonctionnement du système.

- **Forme discrète de l'estimée de la réponse impulsionnelle :**

Dans le cas général, une estimation de la réponse impulsionnelle par intercorrélacion peut donc être obtenue selon (II.21) après le calcul des fonctions de corrélation $R_{xx}(\tau)$ et $R_{xy}(\tau)$ qui sont des approximations, sur la durée prise en compte des signaux x et y , de $\varphi_{xx}(\tau)$ et $\varphi_{xy}(\tau)$.

L'expression (II.21) s'écrit alors sous forme discrète :

$$R_{xy}(\tau) = \sum_{k=1}^M \hat{h}(k) \cdot R_{xx}(\tau - k) \quad \text{avec } k = 1, 2 \dots M \quad (\text{II. 25})$$

La résolution de ce système fournit une estimation de la réponse impulsionnelle finie, la suite $h(k)$ étant tronquée à partir de M , soit $h(k) = 0$ pour $k > M$.

- **Choix de la nature du signal-test $x(t)$:**

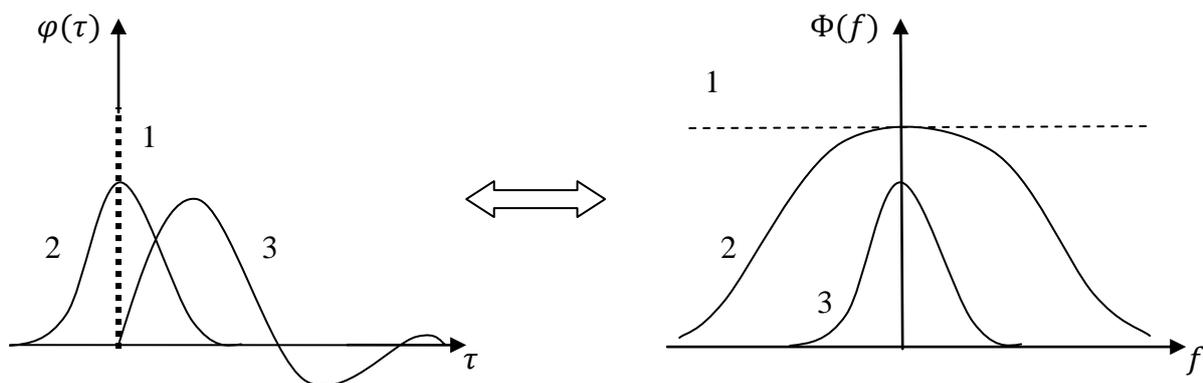
Le signal $x(t)$ doit être tel que :

$$\varphi_{xx}(\tau) \simeq \delta(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xx}(f) \simeq 1 \quad (\text{II. 26})$$

à une constante multiplicative près.

Les conditions ci-dessus doivent être nécessairement vérifiées dans l'intervalle d'existence de $H(f)$, qui pour tout système physique est à support borné, c'est-à-dire $H(f) \equiv 0$ pour $|f| \geq f_{max}$.

Dans le domaine temporel, cela revient à dire que $\varphi_{xx}(\tau)$ doit être étroite devant $h(\tau)$, comme on peut le schématiser par la figure II.11 :



1 → fonction d'autocorrélation du bruit blanc.

1 → spectre du bruit blanc.
(constant pour $-\infty < f < +\infty$)

2 → fonction d'autocorrélation du bruit coloré.

2 → spectre du bruit coloré.

3 → réponse impulsionnelle du système.

3 → spectre du système.

Figure II.11 : choix du signal-test $x(t)$

La figure II.11 montre que le signal idéal qui remplit les conditions de la relation (II.26) est le bruit blanc. En pratique, on choisit la S.B.P.A facile à synthétiser car ses propriétés statistiques (bruit coloré) sont voisines de celles du bruit blanc.

• Etude de la génération et des propriétés de la S.B.P.A

a) Définition :

Le signal le plus utilisé comme signal d'excitation dans bien des domaines est la SBPA. Cette dernière est un signal formé d'impulsions rectangulaires modulées aléatoirement en longueur, qui approxime un bruit blanc discret, donc riche en fréquence et de valeur moyenne nulle, ne modifiant pas le point de fonctionnement du procédé.

La SBPA est un signal pseudo aléatoire car elle est caractérisée par une « longueur de séquence » à l'intérieur de laquelle la largeur des impulsions varient aléatoirement, mais, sur un grand horizon de temps, elles sont périodiques, la période étant définie par la « longueur maximale L » de la séquence. La figure II.2 présente une SBPA continue :

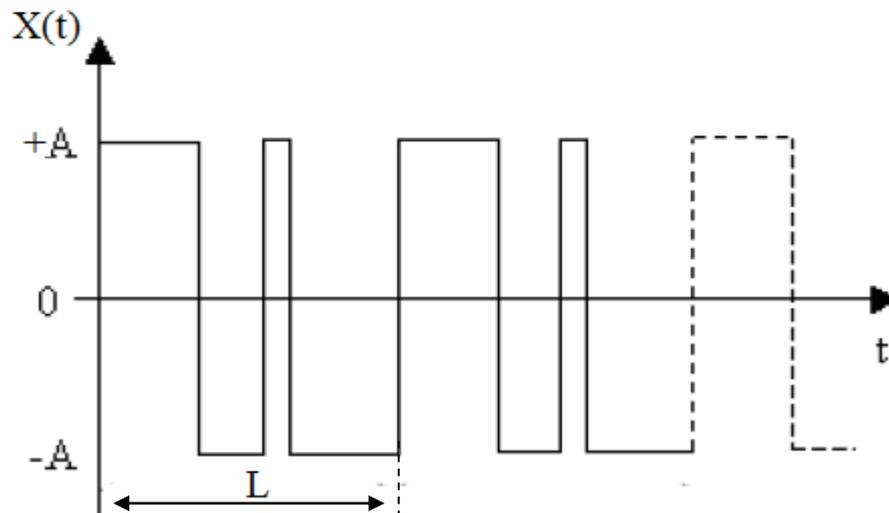


Figure II.12 : signal binaire pseudo aléatoire continu $x(t)$.

b) Registre à décalage :

Les SBPA sont générées à l'aide de registres à décalage (réalisés en matériel ou logiciel) bouclés. La longueur maximale d'une séquence est $2^N - 1$ où N est le nombre des cellules du registre à décalage.

Expliquons le principe de la génération d'une SBPA à l'aide d'un registre à décalage à droite, formé par exemple de $N = 3$ bascules ou élément mémoire B_i , piloté par un signal d'horloge de période Δ , on munit le registre d'une contre réaction opérée sur deux bascules (à sélectionner) combinées dans un « OU exclusif ».

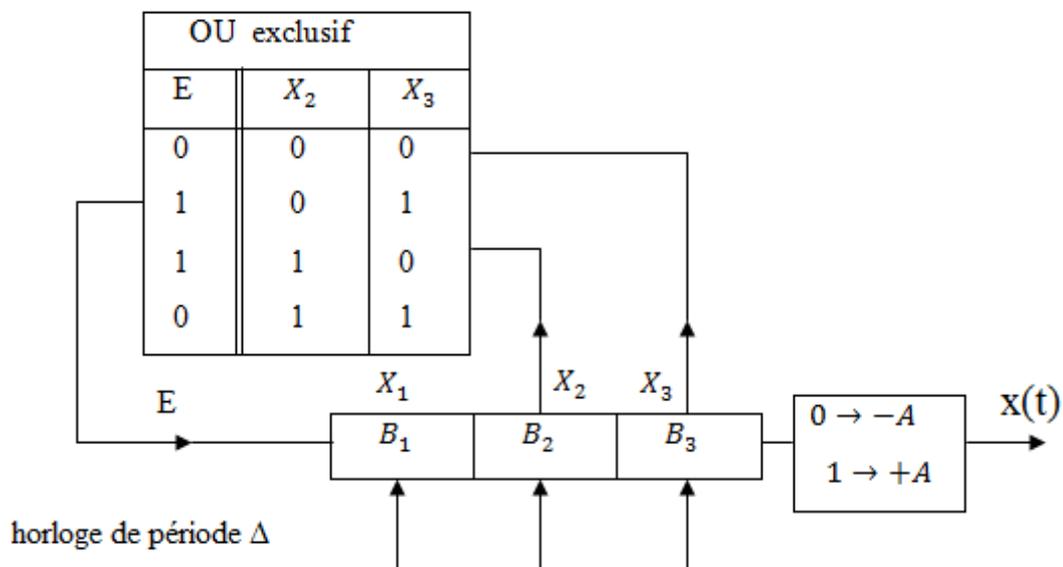


Figure II.13 : la génération d'une SBPA de longueur $L = 7 = 2^3 - 1$.

Si la fonction de bouclage est bien choisie, le registre peut prendre au mieux toutes les combinaisons possibles des N bits (dans notre cas $N = 3$), soit 2^N états différents, sauf la combinaison « 0 0 0...0 » (le registre resterait à une valeur nulle indéfiniment). Cette structure sert de générateur de mots binaires aléatoires, la séquence étant formée de $2^N - 1$ valeurs différentes du mot. A partir de la 2^N ième valeur, il y a répétition de la première valeur (périodicité de la SBPA) ; le générateur reboucle sur sa première valeur. La séquence est donc cyclique et se répète tous les $2^N - 1$ périodes d'horloge.

- **Chronogramme** : tableau des états

Temps Δ	Etat X_1 de B_1	Etat X_2 de B_2	Etat X_3 de B_3	$X(t)$	Valeur de E
0	1	1	1	+A	0
Δ	0	1	1	+A	0
2Δ	0	0	1	+A	1
3Δ	1	0	0	-A	0
4Δ	0	1	0	-A	1
5Δ	1	0	1	+A	1
6Δ	1	1	0	-A	1
7Δ	1	1	1	+A	0
8Δ	0	1	1	+A	0
9Δ	0	0	1	+A	1
10Δ	1	0	0	-A	0
11Δ	0	1	0	-A	1

TAB II.3 : tableau représentant les états possibles

Le tableau représente l'évolution à chaque période d'horloge Δ . En le complétant, on obtient pour $X(t)$ une séquence de $2^3 - 1$ termes, ce qui est le maximum possible ; cette séquence est dite à *longueur maximale*. Sa périodicité vaut $T = (2^3 - 1)\Delta = 7\Delta$. La séquence obtenue présente l'allure suivante :

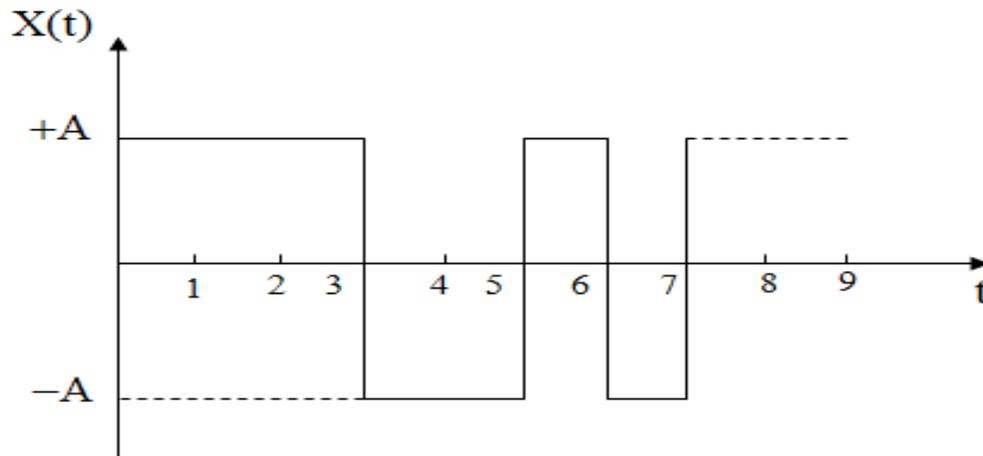


Figure II.14 : allure de la SBPA obtenu avec 3 bascules

- *Le programme sur Matlab :*

```

clc
clear all
delta=0.06;
A=0.5;
x1=1;x2=1;x3=1;
x(1)=+A;
t(1)=0;
for i=2:7
    e=xor(x2,x3)
    x3=x2;x2=x1;x1=e
    if x3==0
        x(i)=-A
    else x(i)=0.5
    end
    t(i)=t(i-1)+delta;
end
stairs(t,x)
moyenne=mean(x)

```

L'exécution de ce programme nous donne la figure II.15 :

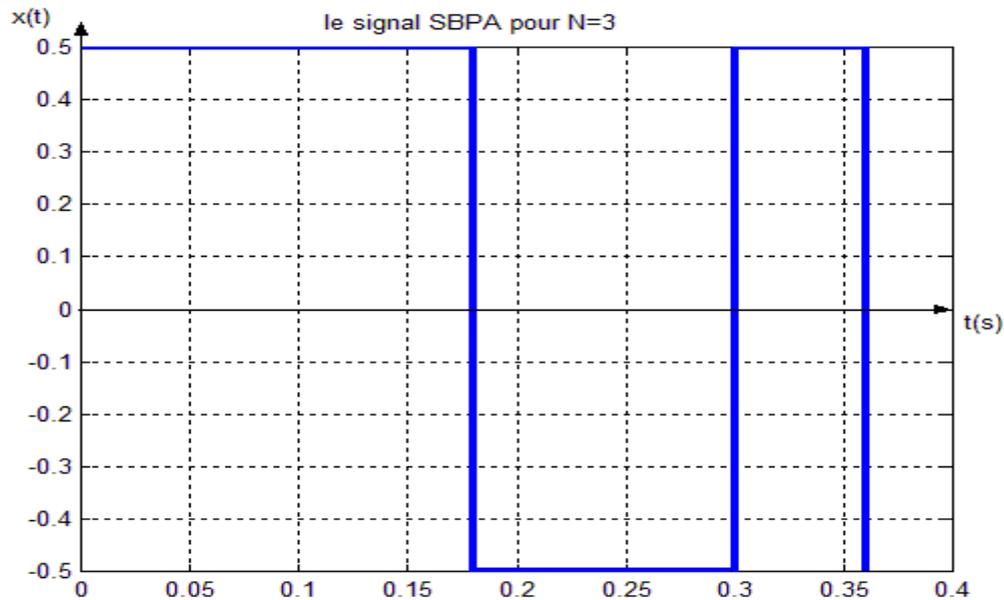


Figure II.15 : le signal SPBA obtenu pour $N=3$

c) Caractéristiques de la SBPA :

- La séquence générée, de période temporelle $= L \cdot \Delta = (2^N - 1) \cdot \Delta$, possède :
 - ✓ $[(2^N - 1) + 1] / 2$ états logiques à 1.
 - ✓ $[(2^N - 1) - 1] / 2$ états logiques à 0.
- La durée maximale de la SBPA (nombre maximal de paliers hauts ou état à 1 successifs) est : $D = N \cdot \Delta$.
- La valeur moyenne de $x(t)$ sur une période T vaut $x_{moy} = \frac{A}{L}$. Elle tend vers zéro lorsque L devient grand ; $x(t)$ est un signal centré modifiant peu le point de fonctionnement du processus auquel il est appliqué. La valeur moyenne possède une très grande importance car c'est grâce à elle qu'on détermine le vrai signal de la SBPA (la valeur moyenne calculer théoriquement, correspond à celle obtenue directement de l'allure de la SBPA).
- La longueur maximale $L = 2^N - 1$ de la séquence obtenue en fonction du nombre N (le nombre de bascules de registre). Il faut pour cela ramener les états X_i, X_j de deux

bascules B_i, B_j (excepter pour le cas $N=8$) sur l'entrée d'un opérateur « OU exclusif », symbolisé par \oplus . Il s'effectue selon le tableau suivant :

$L = 2^N - 1$	N	$X_i \oplus X_j$
7	3	$X_2 \oplus X_3$
15	4	$X_3 \oplus X_4$
31	5	$X_3 \oplus X_5$
63	6	$X_5 \oplus X_6$
127	7	$X_4 \oplus X_7$
255	8	$((X_2 \oplus X_3) \oplus X_4) \oplus X_8$
511	9	$X_5 \oplus X_9$

TAB II.4 : tableau des fonctions de rebouclage SBPA

- La fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$ est définie par :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t - \tau) dt \quad (\text{II. 27})$$

Si $\tau = 0$ alors $\varphi_{xx}(0) = A^2$

Si $|\tau| \geq \Delta$ alors $\varphi_{xx}(\tau) = -\frac{A^2}{L}$

Si $|\tau| < \Delta$ alors $\varphi_{xx}(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{L+1}{L} \frac{|\tau|}{\Delta}\right)$

L'allure de la fonction d'autocorrélation pour une SBPA périodique

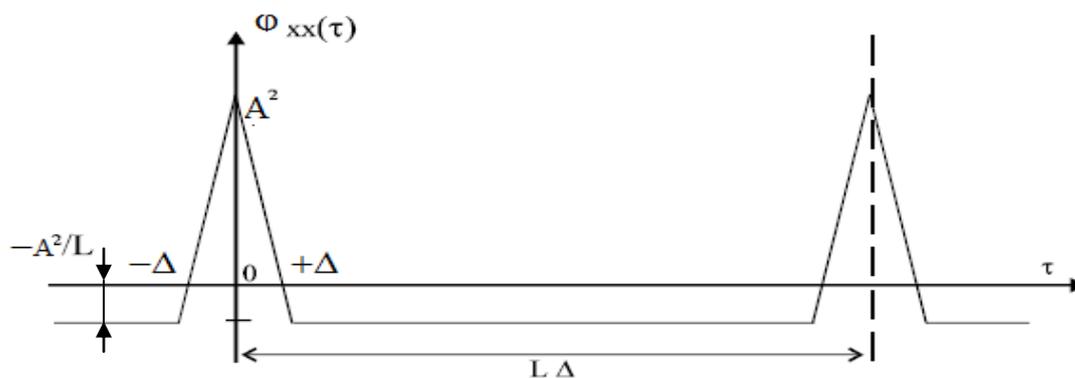


Figure II.16 : fonction d'autocorrélation d'une séquence binaire pseudo aléatoire.

Le terme $-A^2/L$ décroît lorsque la longueur maximale de la séquence augmente.

On constate que la fonction d'autocorrélation est proche d'une impulsion de Dirac pour une séquence unique et d'une suite périodique d'impulsions de Dirac lorsque les séquences se répètent périodiquement. On écrit :

$$\varphi_{xx}(\tau) \approx A^2 \frac{L+1}{L} \Delta \sum_n \delta(\tau - nL\Delta) \quad (\text{II. 28})$$

où : $A^2 \frac{L+1}{L} \Delta$, poids du (des) Dirac, est l'aire du triangle de la figure II.16.

- La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$ est la densité spectrale de puissance $\Phi_{xx}(f)$. la transformée de Fourier du signal périodique non sinusoïdale de la figure II.16 -fonction triangle- s'exprime par :

$$\mathcal{F}[\text{triangle}] = A^2 \Delta \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \quad \text{avec } x = f\Delta \quad (\text{II.29})$$

Et est représentée à la figure suivante :

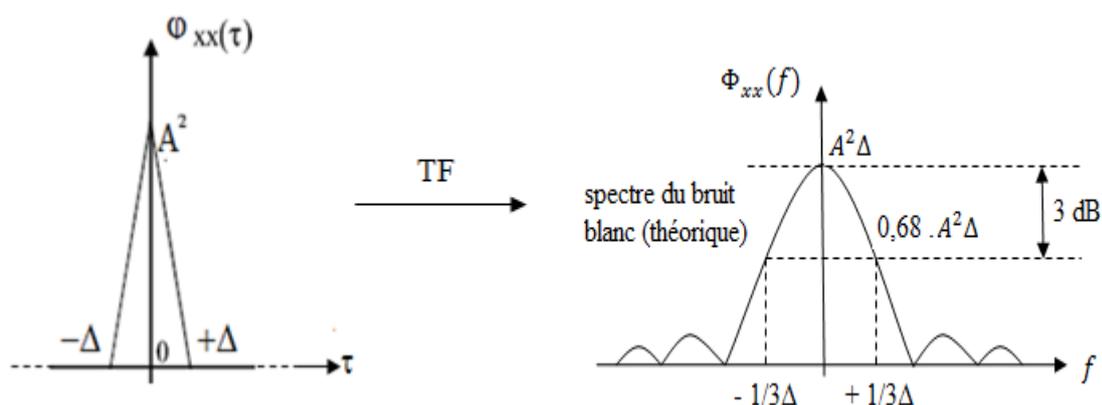


Figure II.17 : la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\tau)$.

L'amplitude de $\Phi_{xx}(f)$ a décru de 3 décibels pour $f \approx \pm \frac{1}{3\Delta}$. Jusqu'à cette pulsation, le spectre peut être considéré comme celui d'un bruit blanc.

II.3.2 Méthodes modernes (statistiques) d'identification [11]

Le but de ce genre d'identifications dites paramétriques, est d'estimer les paramètres d'un modèle mathématique, de façon à obtenir une représentation satisfaisante du système réel étudié. Pour cela il existe plusieurs méthodes statistiques qui se basent sur l'erreur de prédiction ; qui est l'erreur entre la sortie du procédé $y(t)$, et la sortie $\hat{y}(t)$ prédite par le modèle. Parmi ces méthodes on peut citer celle des moindres carrés, la matrice instrumentale et maximum de vraisemblance...etc.

Avant de passer à l'étude de quelques méthodes, il est important de faire la distinction entre l'identification en temps différé et celle en temps réel. La première ne nécessite pas la présence d'un ordinateur en ligne (on line) avec le processus. En effet les données sont fournies par des mesures prises sur le procédé et l'identification est faite par la suite d'une manière indépendante. Tandis que la deuxième celle la plus utilisée de nos jours, le modèle est mis à jour au fur et à mesure que les données sont acquises. Cette technique est indispensable surtout lorsqu'on a affaire à des systèmes dont les paramètres varient effectivement dans le temps.

II.3.2.1 Méthode des moindres carrés en temps différé (non récursifs)

La méthode des moindres carrés a été introduite par Karl Gauss en 1809. Elle a été la base de toutes les méthodes d'identification et d'estimation des paramètres. Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonction quadratique J . L'erreur des moindres carrés J est la distance de prédiction basée sur la différence entre la sortie du système et celle que prédit le modèle au même instant :

$$J = \sum_{k=1}^N [e(k)]^2 = \sum_{k=1}^N [\hat{y}(k) - y(k)]^2 \quad (\text{II. 30})$$

où N est le nombre de points de mesure, et $e(k)$ est l'erreur de prédiction commise sur l'estimation.

La prédiction faite avec le modèle dépend de la forme de celui-ci (ARX, ARMAX, NARMAX ...), ce dernier est une fonction de n paramètres θ_k , k variant de 1 à n . Il s'agit alors de déterminer les paramètres θ_k tels que le critère J en (II.30) soit minimal.

Le modèle retenu est le modèle stochastique ARX (Auto Régressive à variable exogène) qui a pour équation :

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})U(z) + e(z)$$

Ou bien on peut l'écrire comme suite :

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_ny(t-n) \\ = b_0u(t) + \dots + b_pu(t-p) + e(t) \end{aligned} \quad (\text{II. 31})$$

où $e(t)$ est l'erreur de prédiction du modèle (interprété aussi comme bruit aléatoire).

Formellement l'opération d'identification des paramètres de ce modèle peut ce résumé par la figure ci-dessous :

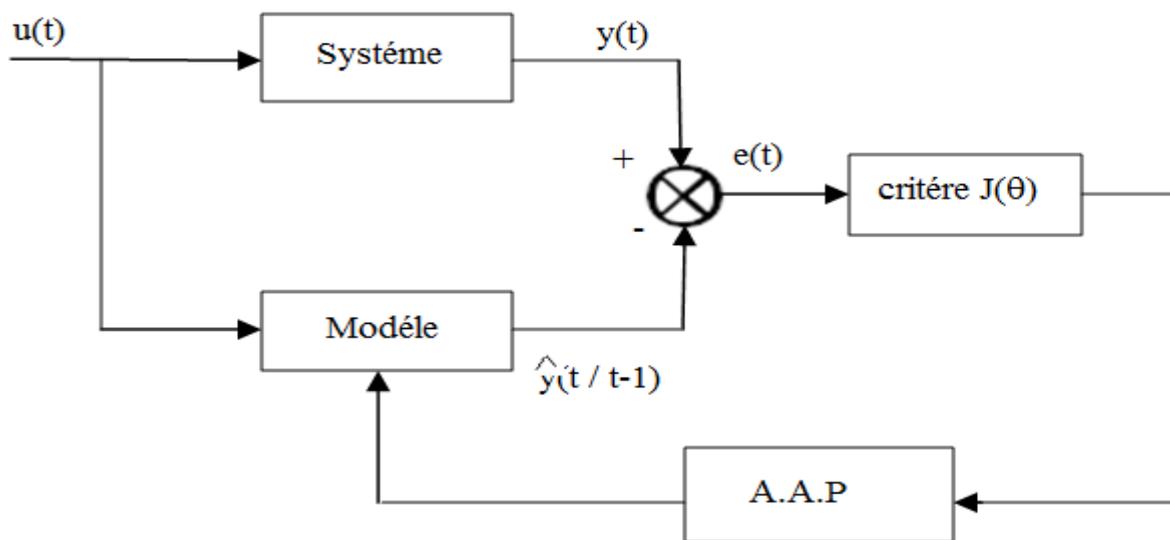


Figure II.18 : schéma du principe d'identification basée sur l'erreur de prédiction

a) Le critère à minimiser

Avec N mesures de l'entrée et de la sortie entre les instants 1 et N , on peut écrire :

$$y(N) = -a_1y(N-1) - \dots - a_ny(N-n) + b_0u(N) + \dots + b_pu(N-p) + e(N)$$

$$\begin{aligned} y(N-1) = & -a_1y(N-2) - \dots - a_ny(N-n-1) + b_0u(N-1) + \dots + b_pu(N-1-p) \\ & + e(N-1) \end{aligned}$$

⋮

$$y(n+1) = -a_1y(n) - \dots - a_ny(1) + b_0u(n+1) + \dots + b_pu(n-p+1) + e(n+1)$$

Pour que le système soit physiquement réalisable on doit avoir $p \leq n$. Ces $N - n$ équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} y(N) \\ y(N-1) \\ \vdots \\ y(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(N-1) & \cdots & -y(N-n) & u(N) & \cdots & u(N-p) \\ -y(N-2) & \cdots & -y(N-n-1) & u(N-1) & \cdots & u(N-p-1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -y(n) & \cdots & y(1) & u(n+1) & \cdots & u(n+1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(N) \\ e(N-1) \\ \vdots \\ e(n+1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

On voit que pour un tel modèle, n mesures de la sortie et $p + 1$ mesures de l'entrée interviennent sous forme de conditions initiales et qu'avec N mesures entrée-sorties on obtient $N - n$ équations. Il n'est donc pas nécessaire de poser les conditions initiales nulles pour cette méthode.

L'équation matricielle (II.32) peut s'écrire comme suite :

$$Y = X \cdot \theta + e \quad (\text{II.33})$$

où: $\theta(t) = [a_1 \ \cdots \ a_n \ b_0 \ \cdots \ b_p]^T$ est le vecteur des paramètres à estimer.

On définit l'erreur de prédiction comme étant la différence entre la sortie du système et la sortie du modèle :

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Sachant que :} \quad \hat{y}(t) = \hat{\theta}(t) \cdot X(t) \quad (\text{II.35})$$

avec : $\hat{\theta}$ représente le vecteur des paramètres estimés.

Le critère à minimiser est le carré de l'erreur de prédiction $e(t)$ qui est comme suit :

$$J(\theta) = e^T \cdot e = \sum_{t=n+1}^N e^2(t) \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{aligned}
\text{Soit : } J &= e^T \cdot e = (Y - X \cdot \theta)^T (Y - X \cdot \theta) \\
&= Y^T Y - \theta^T X^T Y - Y^T X \theta + \theta^T X^T X \theta \\
J &= Y^T Y - 2 Y^T X \theta + \theta^T X^T X \theta
\end{aligned}$$

L'estimateur $\hat{\theta}$ qui minimise ce critère J découle d'une condition nécessaire, qui consiste à trouver un optimum, c'est-à-dire de calculer la dérivée :

$$\left[\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}} = -2 Y^T X + 2 \theta^T X^T X = 0 \quad (\text{II. 37})$$

$$\text{Ce qui donne : } \quad \hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (\text{II. 38})$$

La matrice des dérivées secondes est :

$$J_{\theta\theta} = \left[\frac{\partial^2 J}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = 2 X^T X \quad (\text{II. 39})$$

C'est une matrice définie positive, symétrique. La solution $\hat{\theta}$ est donc bien un minimum.

b) Caractéristiques de l'estimateur [6]

➤ Biais de l'estimateur du vecteur $\hat{\theta}$

Un estimateur est dit *biaisé* si la moyenne statistique du résultat de l'estimation est différente de la valeur vraie des paramètres (inconnues) : ceci traduit que les valeurs des paramètres du vecteur θ sont calculées avec une erreur systématique.

L'estimateur du vecteur paramètre θ qui est $\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ ne sera pas biaisé :

- Si le vecteur e est à valeur moyenne statistique nulle.
- Et si la matrice d'observation X n'est pas corrélée avec e .

D'une façon générale, le biais B est défini par $B = EM[\hat{\theta}] - \theta_0$ écart entre l'espérance mathématique de $\hat{\theta}$ et la valeur vraie θ_0 (inconnue) de θ .

Dans notre cas si on reporte (II.33) dans (II.38), on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= (X^T X)^{-1} X^T (X \theta_0 + e) \\
\hat{\theta} &= (X^T X)^{-1} (X^T X) \theta_0 + (X^T X)^{-1} (X^T e)
\end{aligned}$$

$$\hat{\theta} = \theta_0 + (X^T X)^{-1} X^T e \quad (\text{II.40})$$

$$\text{Donc : } EM[\hat{\theta}] = \theta_0 + EM[(X^T X)^{-1} X^T e] \quad (\text{II.41})$$

On en conclut que le biais B sera nul si : $EM[(X^T X)^{-1} X^T e] = 0$. Donc :

- Dans le cas où X constituée des valeurs $y(i)$ de la sortie y et des excitations $u(i)$ est déterministe et que seul e qui est le vecteur des erreurs $e(i)$ est aléatoire. Alors (II.41) devient : $EM[\hat{\theta}] = \theta_0 + (X^T X)^{-1} X^T EM[e]$ qui vaut θ_0 (pas d'erreur systématique) seulement si $EM[e] = 0$, c'est-à-dire si $e(t)$ est une séquence aléatoire centrée (moyenne nulle).
- Si $e(t)$ est une séquence corrélée avec X , alors (II.41) s'écrit :

$$EM[\hat{\theta}] = \theta_0 + EM[(X^T X)^{-1} X^T e]$$

qui est différent de θ_0 car e et X ne sont pas indépendants ; l'estimateur sera biaisé.

➤ Variance de l'estimateur $\hat{\theta}$

L'erreur d'estimation est donnée par $\varepsilon = \hat{\theta} - \theta_0$, qui est inconnue car θ_0 inconnue. C'est pourquoi on calcule la variance, ou dispersion autour de θ_0 , qui permet d'avoir une idée de la précision de l'estimation.

La variance s'exprime, en tenant compte de (II.40), par :

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\theta}] &= EM[(\hat{\theta} - \theta_0)(\hat{\theta} - \theta_0)^T] \\ &= EM[(X^T X)^{-1} X^T e e^T X (X^T X)^{-1}] \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Prenons les hypothèses de l'estimation sans biais, à savoir :

- E est un bruit blanc centré, de variance $\text{Var}(e) = EM[e e^T] = \sigma^2 I_n$ car une propriété associée à un bruit blanc $e(t)$ est que $EM[e(i) e(j)] = 0$ si $j \neq i$.
- La matrice d'observation X n'est pas corrélée avec e .

On déduit : $\text{Var}[\hat{\theta}] = EM[e e^T] = (X^T X)^{-1} X^T EM[e e^T] X (X^T X)^{-1}$

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I_n X (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (\text{II.43})$$

Les éléments diagonaux de cette matrice représentent la variance affectée à chaque paramètre du vecteur $\hat{\theta}$.

II.3.2.2 Méthode des moindres carrés en temps réel (récursifs) [11]

Si les données sont en nombre trop important ou si on souhaite utiliser le modèle à l'instant t (ou k) sans attendre la fin des mesures, il est nécessaire d'utiliser la méthode des M.C récursifs, qui consiste que l'on effectue un calcul (itératif) à chaque nouvelle mesure entrée-sortie où on a besoin d'une forme récursive de l'algorithme des moindres carrés, cette forme est déduite de celle en temps différé.

Soit N le nombre de mesures effectuées jusqu'à l'instant $t = N T_e$ (ou $t = N ; T_e$ unitaire) Nous avons vu précédemment que l'estimateur des M.C en temps différé est :

$$\hat{\theta}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N$$

Si on acquiert une mesure supplémentaire, cet estimateur devient :

$$\hat{\theta}_{N+1} = (X_{N+1}^T X_{N+1})^{-1} X_{N+1}^T Y_{N+1} \quad (\text{II.44})$$

avec :

$$X_{N+1} = \begin{bmatrix} X_N \\ \dots \\ x(N+1) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y_{N+1} = \begin{bmatrix} Y_N \\ \dots \\ y(N+1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

On a :

$$\begin{aligned} X_{N+1}^T X_{N+1} &= [X_N^T \quad x^T(N+1)] \begin{bmatrix} X_N \\ x(N+1) \end{bmatrix} \\ &= X_N^T X_N + x^T(N+1) x(N+1) \end{aligned}$$

et on a :

$$X_{N+1}^T Y_{N+1} = X_N^T Y_N + x^T(N+1) y(N+1)$$

En remplaçant ces deux derniers résultants dans (II.44) on obtient :

$$\hat{\theta}_{N+1} = [X_N^T X_N + x^T(N+1) x(N+1)]^{-1} [X_N^T Y_N + x^T(N+1) y(N+1)] \quad (\text{II.46})$$

L'idée de la récurrence est de faire apparaître dans (II.46) une relation entre $\hat{\theta}_{N+1}$ et $\hat{\theta}_N$.

L'inversion du premier facteur de l'expression (II.46) fait appel à la formule de calcul matriciel suivante (dite lemme d'inversion matricielle) :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (C^{-1} + D A^{-1} B) D A^{-1} \quad (\text{II.47})$$

En posant : $A = X_N^T X_N$; $B = x^T(N+1)$; $C = I$; $D = x(N+1)$,

Après quelques manipulations de matrices on obtient le résultat suivant :

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + \frac{(X_N^T X_N)^{-1} x^T(N+1)}{1 + x(N+1)(X_N^T X_N)^{-1} x^T(N+1)} [y(N+1) - x(N+1)\hat{\theta}_N] \quad (\text{II. 48})$$

En posant $P_N = (X_N^T X_N)^{-1}$ nous obtenons la matrice dite matrice de gain. Elle aussi calculée récursivement :

$$P_{N+1} = P_N - K_{N+1} x(N+1) P_N \quad (\text{II. 49})$$

$$\text{où } K_{N+1} = P_N x^T(N+1) [1 + x(N+1) P_N x^T(N+1)]^{-1} \quad (\text{II. 50})$$

K_{N+1} est un gain.

Puisque la quantité $x(N+1)P_N x^T(N+1)$ est un scalaire, ce calcul ne nécessite aucune inversion de matrice.

➤ *L'algorithme final des moindres carrés récursif est le suivant :*

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} [y(N+1) - x(N+1)\hat{\theta}_N] \quad (\text{II.51})$$

$$K_{N+1} = P_N x^T(N+1) [1 + x(N+1)P_N x^T(N+1)]^{-1} \quad (\text{II.52})$$

$$P_{N+1} = P_N - K_{N+1} x(N+1)P_N \quad (\text{II.53})$$

Cet algorithme est à programmer sur un calculateur couplé au procédé à identifier, comme le montre bien la figure II.19 :

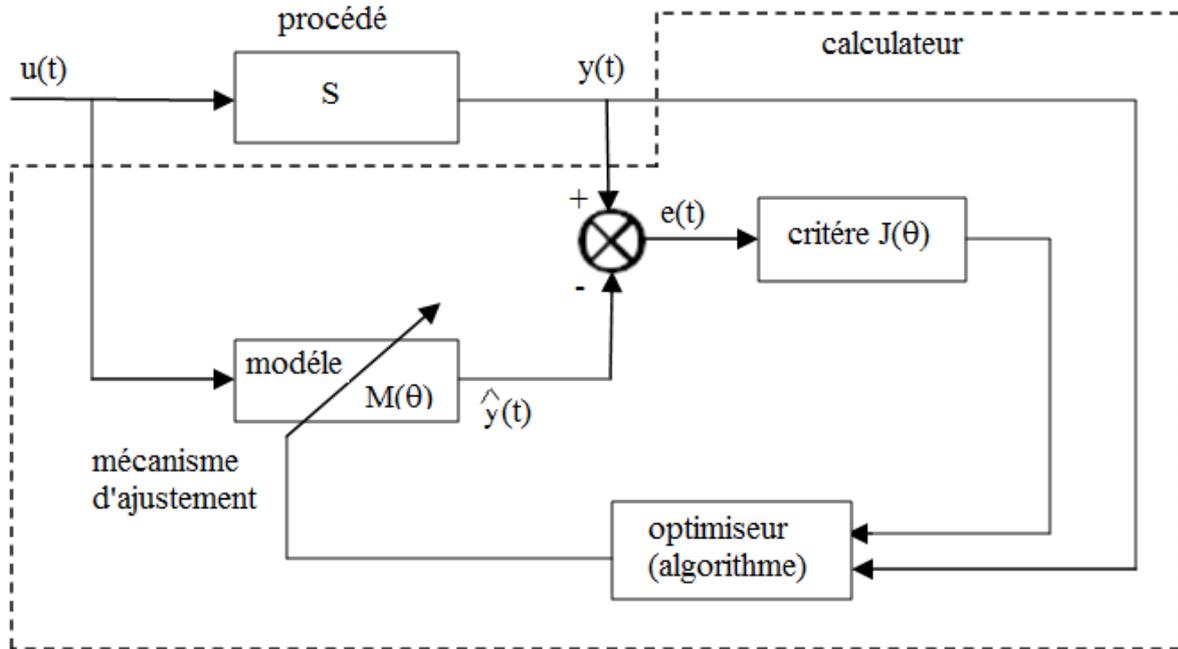


Figure II.19 : schéma d'identification des moindres carrés récursifs (en temps réel).

➤ *Interprétation physique de l'algorithme des moindres carrés récursifs :*

Le vecteur $\hat{\theta}_{N+1}$ est égal à l'ancien, à un terme correctif près. Ce terme est le produit par un gain K_{N+1} de l'expression :

$$y(N + 1) - x(N + 1)\hat{\theta}_N = y(N + 1) - \hat{y}(N + 1/N) \tag{II. 54}$$

Cette expression représente l'erreur de prédiction avec l'estimateur $\hat{\theta}_N$ (ce à quoi on s'attendait, puisque l'estimateur des moindres carrés minimise l'erreur de prédiction).

Ainsi, l'algorithme peut être représenté par le schéma fonctionnel à rétroaction suivant :

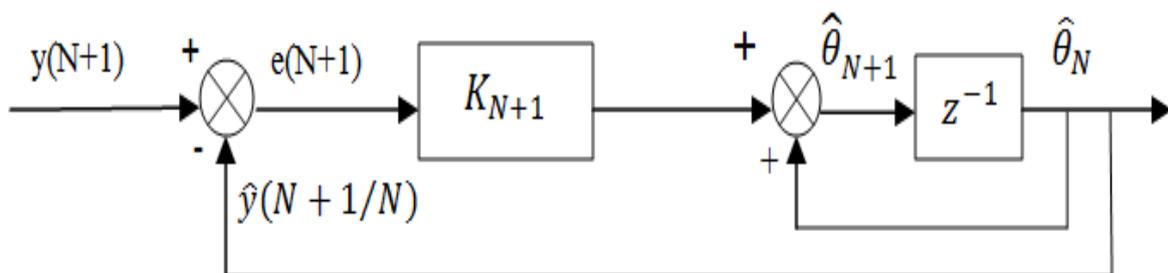


Figure II.20 : schéma fonctionnel de l'algorithme des moindres carrés récursifs.

II.3.2.3 méthode de la matrice instrumentale [7]

Puisque le biais des moindres carrés est biaisé à cause de la corrélation entre X et e , on se propose de déterminer une autre matrice qui permette le calcul de θ_0 (θ_0 étant la valeur vraie de θ) tout en évitant cette corrélation et donc le biais B de l'estimateur .

Soit une matrice Z de dimension $M \times m$. On a alors :

$$Z^T Y = Z^T X \theta + Z^T e \quad (\text{II. 55})$$

Considérons l'estimateur $\hat{\theta}$ des paramètres donnés par :

$$\hat{\theta} = (Z^{-1}X)^{-1} Z^T Y \quad (\text{II. 56})$$

Parmi toutes les matrices Z , celles qui assurent la convergence de l'estimateur $\hat{\theta}$ vers le vrai vecteur des paramètres θ_0 , au sens de la convergence en probabilité sont appelées matrices instrumentales.

Selon la définition de la convergence en probabilité : la suite de variables aléatoires $x(N')$ converge en probabilité vers la variable aléatoire x lorsque N' tend vers l'infini si :

$$\forall \eta_1, \eta_2 > 0 \quad \exists N(\eta_1, \eta_2), N' > N \implies P[|x(N') - x| \geq \eta_1] < \eta_2 \quad (\text{II. 57})$$

On écrit : $x(N') \xrightarrow{P} x$.

Ainsi pour être une matrice instrumentale, Z doit vérifier les deux propriétés suivantes :

$$\frac{1}{M} Z^T e \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

$$\frac{1}{M} Z^T X \xrightarrow{M \rightarrow \infty} A$$

A étant la matrice régulière

Dans ces conditions l'estimateur $\hat{\theta}$ converge en probabilité vers les vrais paramètres θ_0 .

$$\text{En effet :} \quad \theta_0 = (Z^T X)^{-1} Z^T Y - (Z^T X)^{-1} Z^T e \quad (\text{II. 58})$$

$$\text{Donc :} \quad \hat{\theta} = \theta_0 + (Z^T X)^{-1} Z^T e$$

$$\text{Et} \quad \hat{\theta} - \theta_0 = (Z^T X)^{-1} Z^T e \quad (\text{II. 59})$$

On utilisant les deux propriétés précédentes on aura :

$$\hat{\theta} - \theta_0 \xrightarrow{P} A^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0 .$$

Ce qui nous permette de dire que l'estimateur $\hat{\theta}$ converge bien vers les vrais paramètres θ_0 (θ_0 étant les vrais paramètres de θ).

II.4 Identification d'un modèle fractionnaire

L'identification des systèmes par des modèles non entiers relève d'un thème de recherche récent motivé par la modélisation d'un nombre important de phénomènes physiques et plus particulièrement les phénomènes de diffusion. Dans ce contexte, l'identification de tels systèmes par des modèles entiers pose deux problèmes fondamentaux :

- ✓ L'identification des paramètres physiques n'est pas adéquate car la structure du modèle n'est pas adaptée à celle du système.
- ✓ L'identification du type « boîte noire », requiert un nombre important de paramètres pénalisant ainsi le modèle obtenu.

Afin de résoudre ces problèmes, le développement de méthodes d'identification basées sur des modèles non entiers apparaît donc comme une nécessité, mais elles se révèlent nettement plus complexe que dans le cas classique. En effet, dans le cas entier, une fois l'ordre maximum du modèle entrée /sortie fixé, les ordres étant distribués implicitement avec un écart unitaire, l'estimation des paramètres du modèle entier suffit pour sa description. Dans le cas fractionnaire, l'estimation des ordres fractionnaires s'avère nécessaire au même titre que les paramètres du modèle, de plus ils interviennent non linéairement par rapport à la sortie du modèle. Deux approches d'identification peuvent être distinguées :

- La première, basée sur une méthode à erreur d'équation (ou) les ordres de dérivation sont supposés connus a priori, et seule l'estimation paramétrique est effectuée.
- Dans le deuxième cas, les ordres de dérivation doivent être estimés au même titre que les coefficients et une méthode à erreur de sortie basée sur une technique d'optimisation non linéaire s'impose [5]. C'est cette dernière que nous étudions dans la suite de notre travail.

Sous sa forme la plus générale, un modèle d'ordre fractionnaire dit explicite est défini par une équation différentielle de la forme (I.32), dont les ordres de dérivation sont réels, entiers ou non entiers, soit dans le cas monovariante :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (\text{II. 60})$$

où $y(t)$ et $u(t)$ désignent respectivement la sortie et l'entrée du système, $a_0 = 1$ et $a_n, b_m \in \mathbb{R}$.

II.4.1 Méthode à erreur de sortie

L'estimation des ordres de dérivation au même titre que les coefficients requiert l'utilisation d'un algorithme de programmation non linéaire. Dans le contexte d'une telle exigence, une méthode à erreur de sortie dont l'avantage est de ne pas présenter de biais d'estimation, apparaît des plus appropriées [8], [9] :

II.4.1.1 Modèle non entier borné en fréquence

a) approximation par représentation d'état entière

La méthode présentée dans ce paragraphe est fondée sur l'utilisation d'un opérateur d'intégrateur non entier borné en fréquence proposé par Trigeassou et al, en 1999. Celui-ci présente un comportement fractionnaire dans une bande de fréquence limitée $[\omega_b, \omega_h]$ et agit comme un intégrateur conventionnel $1/s$ à l'extérieur de cet intervalle.

L'opérateur d'intégration fractionnaire idéal $\frac{1}{s^\alpha}$ est approximé sur l'intervalle $[\omega_b, \omega_h]$ par :

$$\frac{1}{s^\alpha} \rightarrow I^\alpha(s) = \frac{G_\alpha}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{1-\alpha} \quad (\text{II. 61})$$

avec : $0 < \alpha < 1$.

La figure (II.21) illustre la réponse fréquentielle de l'opérateur d'intégration fractionnaire $I^\alpha(s)$ par ses diagrammes de Bode :

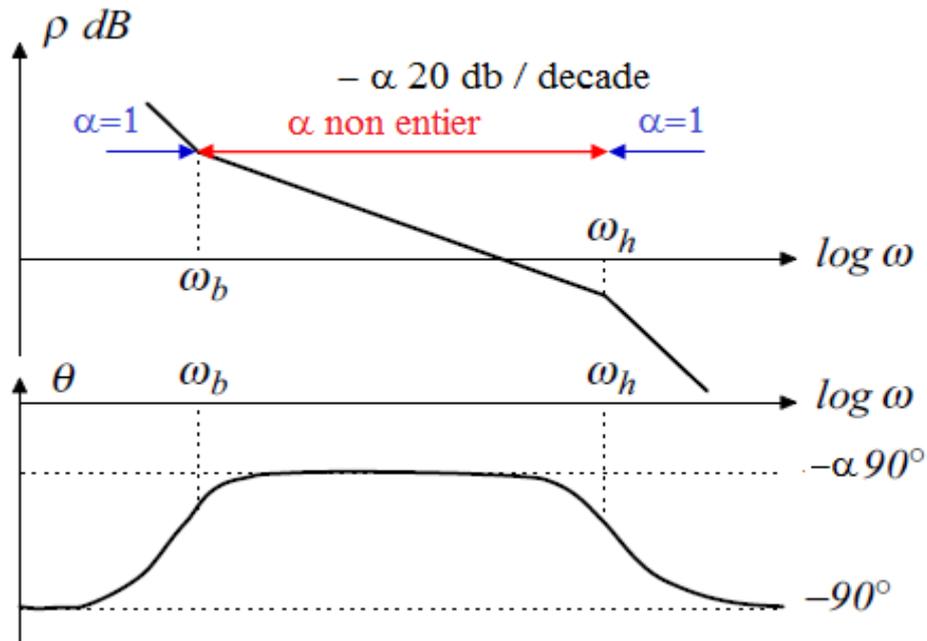


Figure II.21 : diagramme de Bode de l'intégrateur fractionnaire $I^\alpha(s)$ borné en fréquence.

La synthèse d'un tel intégrateur repose sur l'approximation du dérivateur non entier d'ordre

$(1 - \alpha)$ borné en fréquence $\left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}}\right)^{1-\alpha}$ par la distribution récursive de pôles et de zéros,

telle que :

$$I^\alpha(s) = \frac{G_\alpha}{s} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \quad (\text{II. 62})$$

- G_α est un coefficient tel que l'intégrateur fractionnaire idéal et son approximation $I^\alpha(s)$ aient le même gain pour la pulsation $\omega_u = \sqrt{\omega_b \omega_h}$ ($\omega_u = 1rd / s$).
- N_c est le nombre de cellules nécessaires pour obtenir une bonne précision.
- Les fréquences transitionnelles ω'_i et ω_i sont définies par les relations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} \omega_i = \lambda \omega'_i & \text{avec } \lambda > 1. \\ \omega'_{i+1} = \eta \omega_i & \text{avec } \eta > 1. \\ \alpha = 1 - \frac{\log \lambda}{\log \lambda \eta}. \end{cases}$$

où : $\omega'_1 = \omega_b$ et $\omega_{N_c} = \omega_h$.

Les coefficients λ et η sont les facteurs récursifs dépendants du nombre de cellules N_c , pour un ordre de dérivation fractionnaire α donné et un rapport $\mu = \omega_b/\omega_h$ donné, on a :

$$\lambda = \mu^{-\alpha/N_c} \quad , \quad \eta = \mu^{(\alpha-1)/N_c} \quad (\text{II.63})$$

La figure (II.22) montre le schéma synoptique de l'opérateur d'intégration synthétisé :

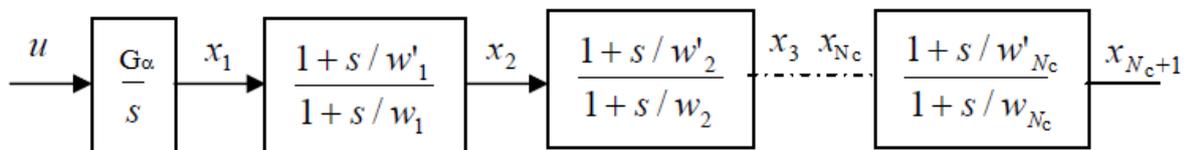


Figure II.22 : schéma de synthèse d'un intégrateur d'ordre fractionnaire.

Selon l'expression (II.62), la représentation d'état entière d'ordre (N_c+1) peut être déduite en considérant les variables d'état à la sortie des N_c cellules ; qui est sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{N_c+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \omega_{N_c} & & -\omega_{N_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N_c+1} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} G_\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (\text{II.64})$$

D'une manière équivalente : $\dot{x}_I = A_I x + b_I u$ (II.65)

avec :

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & & \vdots \\ 0 & \omega_2 & -\omega_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_{N_c} & -\omega_{N_c} \end{bmatrix} \quad (\text{II.66})$$

$$b_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G_\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

x représente le vecteur d'état micro de l'intégrateur.

Donc l'opérateur d'intégration fractionnaire $I^\alpha(s)$ bornée en fréquence peut être approximé par sa représentation d'état entière (II.65) de dimension $(N_c + 1)$

Dans un objectif d'identification d'un système d'ordre fractionnaire, la représentation d'état (II.65) de l'opérateur est insérée dans une représentation d'état non entière décrivant le système à identifier, soit, dans le cas d'un système monovarié dont la représentation d'état fractionnaire est de dimension 1 :

$$\begin{cases} D^\alpha(x(t)) = a_0 x(t) + b_0 u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Ce système conduit à une représentation d'état classique de grande dimension, soit, pour un ordre de dérivation α compris entre 0 et 1 :

$$\begin{cases} \dot{X} = A X + b u \\ y = c X \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ A_I + \begin{bmatrix} 0 & \dots & -G_\alpha a_0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{II.70})$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix}^{-1} b_I, \quad c = [0 \quad \dots \quad 0 \quad b_0] \quad (\text{II.71})$$

b) estimation paramétrique

L'objectif de l'identification consiste à estimer, non seulement les paramètres $[a_0, b_0]$ de la représentation (II.68), mais aussi les paramètres de l'opérateur différentiel non entier $[\alpha, \omega_b, \omega_h]$. En pratique l'estimation est basée sur l'approximation (II.69), soit :

$$\begin{cases} \dot{X} = A(\theta)X + b(\theta)u \\ y = c(\theta)X \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

où θ est le vecteur des paramètres à estimer, donné par :

$$\theta = [a_0, b_0, \omega_1, \lambda, \eta]^T \quad (\text{II.73})$$

La sortie du modèle étant non linéaire par rapport au vecteur θ , l'estimation paramétrique s'effectue par une technique d'optimisation à erreur de sortie basée sur un algorithme de programmation non linéaire.

➤ *Algorithme à erreur de sortie*

L'ensemble des données est composé de N couples entrée-sortie $\{u(kh), y^*(kh)\}$, où h désigne la période d'échantillonnage, et de k observations (u_k, y_k^*) , et aussi :

$$y^*(kh) = y(kh) + p(kh) \quad (\text{II.74})$$

$p(kh)$ étant un signal de perturbation additif, qui est un bruit de sortie.

Alors l'estimation paramétrique est obtenue en minimisant un critère quadratique basé sur l'erreur de sortie du modèle par rapport au vecteur des paramètres $\hat{\theta}$, soit :

$$\varepsilon(Kh) = y^*(Kh) - \hat{y}(Kh, \hat{\theta}) \quad (\text{II.75})$$

Le critère quadratique qu'on doit minimiser pour N points de mesure est le suivant :

$$J_N(\hat{\theta}) = e^T e \quad (\text{II.76})$$

où : $e = [\varepsilon(k_0h) \ \varepsilon((k_0 + 1)h) \ \dots \ \varepsilon((k_0 + N - 1)h)]^T$.

Le problème d'estimation se formalise alors par la recherche du vecteur des paramètres optimal $\hat{\theta}_{opt}$, minimisant le critère quadratique $J_N(\hat{\theta})$, soit :

$$\hat{\theta}_{opt} = \arg \min (J_N(\hat{\theta})) \quad (\text{II.77})$$

La sortie estimée $\hat{y}(t, \hat{\theta})$ étant non linéaire par rapport à $\hat{\theta}$, un algorithme d'optimisation non linéaire, en l'occurrence l'algorithme de Marquardt est utilisé pour déterminer itérativement $\hat{\theta}_{opt}$:

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \{J''_{\theta\theta} + \xi I\}^{-1} J'_{\theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}_i} \quad (\text{II.79})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{ll} J'_{\theta} = -2 \sum_{k=k_0}^K \varepsilon(Kh) \sigma(Kh, \hat{\theta}) & \textit{gradient} \\ J''_{\theta\theta} \approx 2 \sum_{k=k_0}^K \sigma(Kh, \hat{\theta}) \sigma^T(Kh, \hat{\theta}) & \textit{hessien} \\ \sigma(Kh, \hat{\theta}) = \frac{\partial y}{\partial \theta} (Kh, \hat{\theta}) & \textit{fonction de sensibilité de la sortie} \\ \xi & \textit{paramètre de controle} \end{array} \right.$$

où $K = k_0 + N - 1$

Le point névralgique de cet algorithme étant le calcul des fonctions de sensibilité $\sigma(Kh, \hat{\theta})$ nécessaire pour le calcul du Gradient et du Hessien à chaque itération qui nécessitent un volume de calcul important. Le paragraphe suivant s'attache à présenter les méthodes de calcul des fonctions de sensibilité.

➤ Fonctions de sensibilité $\sigma(Kh, \hat{\theta})$

D'une manière générale, il convient de définir deux sortes de fonctions de sensibilité par différenciation par rapport à θ :

- $\sigma_{y,\theta} = \frac{\partial y}{\partial \theta} (t, \hat{\theta})$: fonction de sensibilité de la sortie par rapport au vecteur θ (fonction utilisée dans l'algorithme de Marquardt (II.78)). Elle traduit l'effet de la variation d'un paramètre sur la sortie du système.
- $\sigma_{X,\theta} = \frac{\partial X}{\partial \theta} (t, \hat{\theta})$: fonction de sensibilité de l'état (équation (II.72)) par rapport au vecteur θ .

La fonction $\sigma_{X,\theta}$ s'obtient par la différentiation de l'équation d'état (II.72) par rapport à θ , soit :

$$\dot{\sigma}_{X,\theta} = A(\hat{\theta}) \sigma_{X,\theta} + \left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(\hat{\theta}) \right] X + \frac{\partial b}{\partial \theta}(\hat{\theta}) u \quad (\text{II. 79})$$

Les fonctions $\frac{\partial A}{\partial \theta}(\hat{\theta})$ et $\frac{\partial b}{\partial \theta}(\hat{\theta})$ étant calculées à partir de la représentation d'état (II.65) de l'opérateur d'intégration non entière.

Le calcul de $\sigma_{y,\theta}$ s'obtient ensuite par la différentiation de l'équation de sortie (II.72) par rapport à θ , soit :

$$\sigma_{y,\theta} = c(\theta) \sigma_{X,\theta} + \left[\frac{\partial c(\theta)}{\partial \theta} \right] X \quad (\text{II. 80})$$

II.5 Conclusion

Ce chapitre est divisé en deux parties. Dans la première partie, nous avons présenté certaines méthodes d'identification des systèmes entiers, soient non paramétriques (méthodes classiques) ou paramétriques (méthodes modernes), où nous avons vu que malgré leur différences dans la conception d'un modèle, elles découlent vers le même objectif qui consiste à une bonne estimation des paramètres du modèle afin de réduire l'erreur entre ce dernier et le système réel. Dans la seconde partie, nous avons abordé l'une des méthodes d'identification des modèles d'ordre non entier qui est la méthode à erreur de sortie, celle qui permet d'estimer au même titre les ordres non entiers ainsi que les paramètres d'un modèle d'état fractionnaire généralisé.

Chapitre III

Application à un procédé physique

III.1 Introduction

Le chapitre précédent a été consacré à la présentation du principe de certaines méthodes d'identification les plus utilisées, soit dans le cas des systèmes entiers, soit dans celui des systèmes non entiers. Le présent chapitre traite de l'utilisation de l'opérateur de dérivation non entière dans la modélisation des phénomènes diffusifs, tout en sachant que les développements qui s'y rapportent dans le domaine de la thermique, retenu comme champ applicatif, s'appliquent tout aussi bien aux autres phénomènes diffusifs.

Le lien entre l'opérateur de dérivation non entière et les phénomènes de diffusion a fait l'objet d'étude par de nombreux auteurs, qui ont contribué par plusieurs publications. A titre d'exemple, citons l'ouvrage d'Oldham et Spanier [Oldham et Spanier, 1974] dans lequel les auteurs établissent analytiquement, pour certaines géométries, le passage de l'équation de la chaleur à une équation différentielle non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

Ce chapitre propose l'étude du transfert de chaleur dans un milieu semi-infini à géométrie plane, à savoir un barreau d'aluminium de grande longueur, où l'entrée de ce système est un flux thermique $\varphi(t)$ et sa sortie est la température du barreau mesurée à une distance x de la surface chauffée.

III.2 Equation de diffusion de chaleur

Le transfert de chaleur idéalisé à une dimension est régi par l'équation aux dérivées partielles suivante, appelée équation de la chaleur [10] :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \frac{\sigma}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^p \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right], & 0 < r < \infty, t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = \varphi(t), & r = 0, t > 0 \\ T(r,t) = 0, & 0 \leq r < \infty, t = 0 \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où : σ représente le coefficient de diffusivité ;

λ est la conductivité thermique du milieu, supposé constante ;

r est l'abscisse du point de mesure ;

Et p est une variable désignant le type de géométrie du matériau considéré, telle que :

- $p = 0$ pour une géométrie plane ;
- $p = 1$ pour une géométrie cylindrique ;
- $p = 2$ pour une géométrie sphérique.

III.3 Etude du transfert de chaleur dans un milieu semi-infini plan

III.3.1 Description du système expérimental

Le système expérimental considéré est un barreau en aluminium de longueur de 40 cm, isolé afin d'assurer un transfert de chaleur unidirectionnel comme le montre la figure III.1, l'entrée de ce système est un flux thermique appliqué à l'une des extrémités, et sa sortie étant la température de la barre mesurée à une distance x de l'extrémité chauffée (voir figure III.2).

La température de la barre est mesurée à l'aide des sondes platines de type PT100, ces dernières sont insérées à l'intérieur de la barre. Les orifices permettant le passage de ces sondes apparaissent sur la figure III.1. Le flux thermique $\varphi(t)$ est généré par une résistance chauffante collée à l'une des extrémités de la barre (colle à haute conductivité thermique). Le flux maximal que peut produire la résistance est de 12 W, ce dernier est contrôlé par un calculateur à travers un convertisseur PWM (MLI), en variant la tension de l'entrée entre 0 et 12 V.



Figure III.1 : la barre d'aluminium, résistance chauffante 0 – 12W (à gauche) et orifices de mesures.

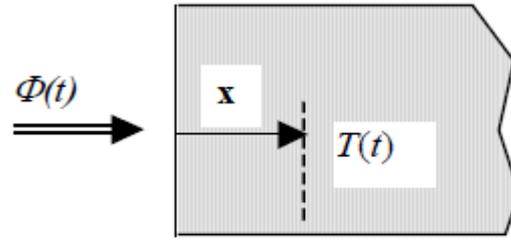


Figure III.2 : schéma du système thermique expérimental.

III.3.2 Modélisation du système thermique

La barre est considérée comme étant un milieu semi-infini plan. Le milieu est considéré homogène de conductivité λ , de diffusivité σ et à température initiale nulle en tout point. Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . On considère aussi qu'il n'y a pas de perte au niveau de la surface d'application du flux.

L'étude d'un milieu semi-infini plan correspond au cas où $p = 0$ et $r = x$, x désignant l'abscisse du point de mesure de température à l'intérieur du milieu (voir figure III.3). Alors le système d'équation (III.1) se simplifie et devient [10] :

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, & t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \varphi(t), & x = 0, t > 0 \\ T(x, t) = 0, & 0 \leq x < \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (\text{III. 2})$$

avec :

$$\sigma = \frac{\lambda_c}{\rho c_p} \quad (\text{III. 3})$$

c_p : représente la chaleur massique du milieu.

ρ : représente la densité massique du milieu.

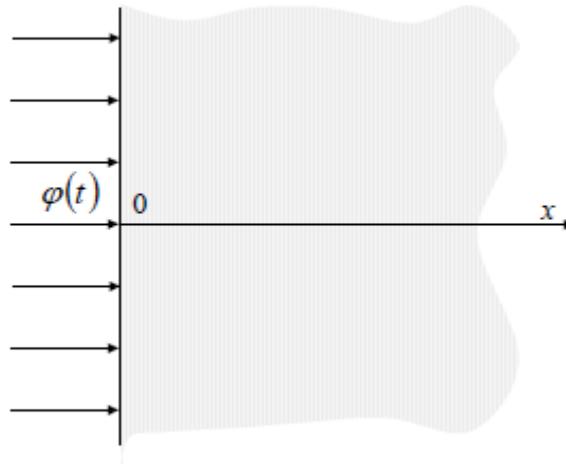


Figure III.3 : Mur plan semi-infini.

On utilise la transformée de Laplace appliquée à la première équation du système d'équation (III.2).

$$\mathcal{L}(T(x, t)) = T(x, s) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-st} dt \quad (\text{III. 4})$$

Avec :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}\right) = sT(x, s) - T(x, 0) \quad (\text{III. 5})$$

$T(x, 0) = 0$ si on pose une hypothèse de condition initiale de la température nulle.

Et :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}(T(x, t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, s) \quad (\text{III. 6})$$

Alors la première équation du système d'équation (III.2) comme suit :

$$sT(x, s) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, s) \quad (\text{III. 7})$$

Ou encore :

$$\sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, s) - sT(x, s) = 0 \quad (\text{III. 8})$$

Qui représente une équation différentielle du deuxième ordre (par rapport à x) sans second membre. Elle admet pour équation caractéristique :

$$\sigma \lambda^2 - s = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \sqrt{\frac{s}{\sigma}} \quad (\text{III. 9})$$

La solution générale de l'équation différentielle est sous la forme suivante :

$$T(x, s) = K_1(s) e^{\lambda_1 x} + K_2(s) e^{\lambda_2 x} \quad (\text{III. 10})$$

Soit :

$$T(x, s) = K_1(s) e^{x\sqrt{\frac{s}{\sigma}}} + K_2(s) e^{-x\sqrt{\frac{s}{\sigma}}} \quad (\text{III. 11})$$

La prise en compte des conditions aux limites du système d'équation (III.1) permet d'établir un transfert de la forme :

$$H(x, s) = \frac{T(x, s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho c_p}} e^{-x\sqrt{\frac{s}{\sigma}}} \quad (\text{III. 12})$$

On peut distinguer deux cas possibles par rapport à x : le premier est caractérisé par $x = 0$, correspond à l'étude de l'impédance thermique du milieu. Le second à l'étude du transfert défini pour tout $x > 0$.

➤ **Impédance thermique du milieu (cas où $x = 0$) :**

le transfert (III.12) se réduit à :

$$H(0, s) = \frac{T(0, s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\sqrt{s} \sqrt{\lambda \rho c_p}} \quad (\text{III. 13})$$

qui dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), se traduit par :

$$T(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda \rho c_p}} I_t^{0.5} \varphi(t) \quad (\text{III. 14})$$

La relation (III.14) traduit un résultat maintenant bien connu : l'impédance thermique d'un milieu semi-infini plan est définie par un intégrateur d'ordre 0.5. Ce résultat, permettent d'exprimer analytiquement la température $T(0, t)$ uniquement en fonction de l'intégrale d'ordre 0,5 du flux $\varphi(t)$, met ainsi en avant le caractère compact de l'opérateur de dérivation non entière. Il est vrai que la modélisation d'une telle impédance par une approche basée sur une méthode de discrétisation spatio-temporelle (méthode des éléments finis par exemple) conduit à une approximation par un modèle entier de très grande dimension.

➤ **Cas où la mesure de température s'effectue à l'intérieur du milieu $x = x_0 > 0$:**

Le transfert $H(x_0, s)$ est donné par l'équation (III.12) :

$$H(x_0, s) = \frac{T(x_0, s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda \rho c_p}} e^{-x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}} \quad (\text{III. 15})$$

Posant $z = x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}$, et évaluer l'ordre p de e^{-z} par l'approximation de Padé suivante :

$$e^{-z} \approx \frac{\sum_{k=0}^p \frac{(2p-k)!}{k!(p-k)!} (-z)^k}{\sum_{k=0}^p \frac{(2p-k)!}{k!(p-k)!} z^k} \quad (\text{III. 16})$$

En remplaçant l'approximation de Padé de e^{-z} dans (III.15), on obtient :

$$H(x_0, s) \approx H_p(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda \rho c_p}} \frac{\sum_{k=0}^p \frac{(2p-k)!}{k!(p-k)!} \left(-x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}\right)^k}{\sum_{k=0}^p \frac{(2p-k)!}{k!(p-k)!} \left(x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}\right)^k} \quad (\text{III. 17})$$

- Le développement de l'approximation de Padé du premier ordre, nous donne une nouvelle fonction de transfert $H(x_0, s)$:

$$H(x_0, s) \approx H_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda \rho c_p}} \frac{2 + \left(-x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}\right)}{2 + \left(x_0\sqrt{\frac{s}{\sigma}}\right)} \quad (\text{III. 18})$$

- **Valeurs des paramètres considérés :**

- La température est mesurée à une distance $x_0 = 0,5 \text{ cm}$, avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,5 \text{ s}$.
- La conductivité thermique du milieu est : $\lambda = 237 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- La densité massique du milieu est : $\rho = 2700 \text{ Kg m}^{-3}$.
- La chaleur massique du milieu est : $c_p = 0.880 \cdot 10^3 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- Le coefficient de diffusivité est : $\sigma = 9975 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

L'application de ces valeurs pour la fonction de transfert (III.18), nous donne :

$$H_1(s) = \frac{10^{-5}}{s^{0.5}} \left(\frac{-2,11 s^{0.5} + 8,43}{0,50 s^{0.5} + 2,00} \right) \quad (\text{III.19})$$

Le développement final de la fonction (III.19), donne :

$$H_1(s) = \frac{-2,11 \cdot 10^{-5} s^{0.5} + 8,43 \cdot 10^{-5}}{0,5 s^{0.5} s^{0.5} + 2 s^{0.5}} \quad (\text{III.20})$$

Malti et al. [10] montrent que l'approximation de Padé (III.16), qui a donné la fonction de transfert (III.20) ne correspond pas aux données expérimentales, car certainement le barreau thermique n'est pas parfaitement isolé. De plus, la présence de pertes thermiques a influencé sur l'homogénéité du milieu.

C'est pourquoi on propose d'utiliser une autre structure de modèle d'ordre non entier qui est totalement différente de celle de la fonction (III.20), afin d'identifier ses paramètres avec la méthode des moindres carrés récursifs, par variation de l'ordre fractionnaire de dérivation. Les résultats obtenus seront comparés aux résultats expérimentaux [10].

III.3.3 Identification du barreau thermique par un modèle d'ordre non entier

Comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, nous procédons dans ce qui suit à l'identification des paramètres d'un modèle d'ordre non entier avec la méthode des moindres carrés récursifs, tout en variant l'ordre de dérivation non entier α . Nous exploitons les données entrées/sorties expérimentales obtenues par Malti [10] pour la méthode d'identification utilisée, et les considérons comme étant une référence, afin de pouvoir comparer la sortie du modèle identifié à la sortie du système réel.

La structure considérée du modèle d'ordre non entier est la suivante :

$$G(s) = \frac{c}{s^\alpha + a} \quad (\text{III.21})$$

Les données entrées / sorties de [10] sont mesurées au moyen d'un système d'acquisition de données, avec une période d'échantillonnage $T_e = 0,5$ seconde. L'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) d'amplitude de 12W, avec un nombre d'échantillons

$N= 4421$. L'excitation et la réponse du système réel sont représentées sur les figures III.4 et III.5 respectivement.

➤ *Allures entrée et sortie des données expérimentales [10] :*

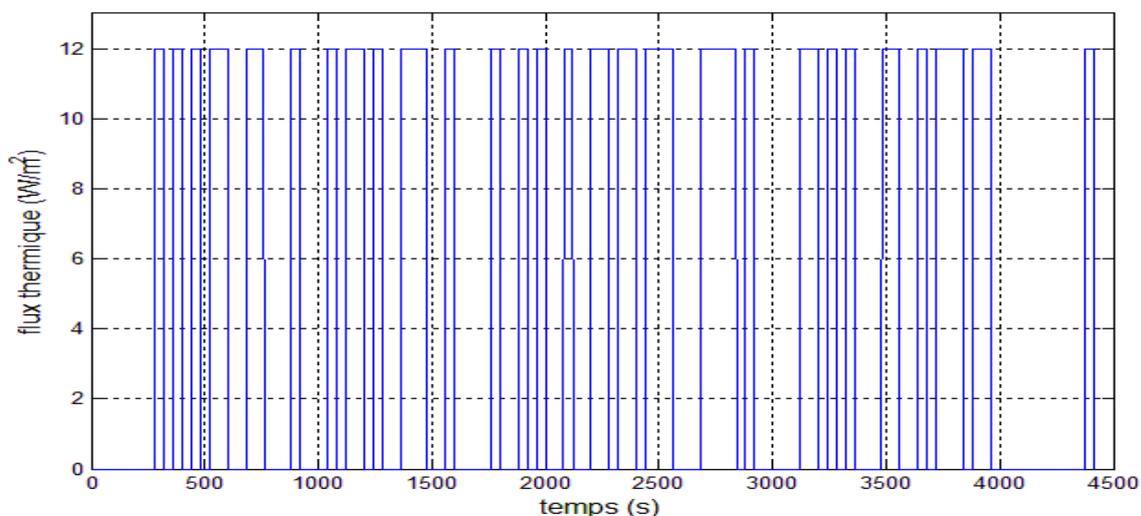


Figure III.4 : signal d'entrée SBPA du système réel.

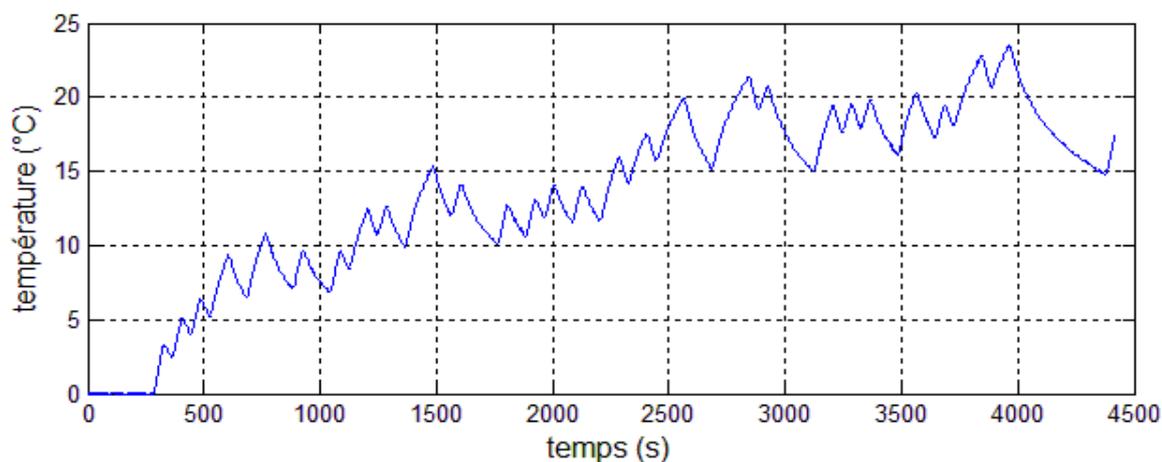


Figure III.5 : signal de sortie du système réel.

L'objectif est d'essayer d'approcher au mieux le comportement du système réel avec le modèle identifié (voir la figure III.5). Pour ce faire, il faut d'abord discrétiser le modèle d'ordre non entier (III.21) à l'aide de la fonction génératrice de Tustin PSE (power series expansion ou développement en série de puissances) qui est sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
H_T^\alpha(z^{-1}) &= \left(\frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^\alpha = \left(\frac{2}{T_e} \right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} \binom{-\alpha}{k-j} \right] z^{-k} \\
&= h_T^\alpha(0) + h_T^\alpha(1) z^{-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} h_T^\alpha(k) z^{-k} \tag{III.22}
\end{aligned}$$

T_e représente la période d'échantillonnage.

Les binômes de Newton seront calculés avec la formule suivante :

$$C_{j+1} = C_j \binom{\alpha-j}{j+1} \tag{III.23}$$

où: $j=0, \dots, k$ et α est l'ordre de dérivation non entier.

- *Discrétisation à l'ordre 1 le modèle d'ordre non entier $G(s)$ avec Tustin PSE :*

- *Approximation du terme s^α :*

$$\begin{aligned}
H_T^\alpha(z^{-1}) &= \left(\frac{2}{T_e} \right)^\alpha \sum_{k=0}^1 \left[\binom{\alpha}{0} \binom{-\alpha}{1} - \binom{\alpha}{1} \binom{-\alpha}{0} \right] z^{-k} \\
&= \left(\frac{2}{T_e} \right)^\alpha \left[\binom{\alpha}{0} \binom{-\alpha}{1} - \binom{\alpha}{1} \binom{-\alpha}{0} + \left[\binom{\alpha}{0} \binom{-\alpha}{1} - \binom{\alpha}{1} \binom{-\alpha}{0} \right] z^{-1} \right]
\end{aligned}$$

on signalant que : $C_0 = \binom{\alpha}{0} = \binom{-\alpha}{0} = 1$, $C_1 = \binom{\alpha}{1} = \alpha$ et $C_1 = \binom{-\alpha}{1} = -\alpha$, $T_e = 0.5s$

On aura :

$$H_T^\alpha(z^{-1}) = 4^\alpha [1(-\alpha) - \alpha(1) + (1(-\alpha) - \alpha(1))z^{-1}]$$

Donc :

$$H_T^\alpha(z^{-1}) = 4^\alpha (-2\alpha - 2\alpha z^{-1}) \tag{III.24}$$

En remplaçant le résultat (III.24) dans (III.21), nous obtenons :

$$G(z) = \frac{c}{4^\alpha(-2\alpha - 2\alpha z^{-1}) + a} \quad (\text{III. 25})$$

Nous pouvons écrire :

$$G(z) = \frac{Y_m(z)}{U(z)} = \frac{c}{4^\alpha(-2\alpha - 2\alpha z^{-1}) + a} \quad (\text{III. 26})$$

où $Y(z)$ est la transformée en z de la sortie du modèle non entier, et $U(z)$ est la transformée en z de l'entrée appliquée au modèle non entier.

Ainsi, $[4^\alpha(-2\alpha - 2\alpha z^{-1}) + a] Y_m(z) = c U(z)$

$$4^\alpha(-2\alpha - 2\alpha z^{-1}) Y_m(z) + a Y_m(z) = c U(z)$$

$$(a - 2\alpha 4^\alpha) Y_m(z) = 2\alpha 4^\alpha z^{-1} Y_m(z) + c U(z)$$

$$Y_m(z) = \frac{2\alpha 4^\alpha}{(a - 2\alpha 4^\alpha)} z^{-1} Y_m(z) + \frac{c}{(a - 2\alpha 4^\alpha)} U(z)$$

D'où l'équation de récurrence suivante :

$$y_m(t) = -\left(\frac{2\alpha 4^\alpha}{a - 2\alpha 4^\alpha}\right) y_m(t-1) + \frac{c}{a - 2\alpha 4^\alpha} u(t) \quad (\text{III. 27})$$

Nous constatons que l'équation de récurrence (III.27) précédente est sous la structure ARX (Auto Régressive eXogène) :

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_0 u(t) \quad (\text{III. 28})$$

Puisque les données expérimentales de [10] qui sont bruitées, nous procédons à l'identification du modèle d'ordre non entier (III.21) avec la méthode des moindres carrés sous la structure ARX.

➤ *Identification du modèle d'ordre non entier $G(s)$:*

Afin de pouvoir identifier le modèle considéré, on lui applique la même entrée que le système réel c'est-à-dire une SBPA qui correspond à un flux de $12 \text{ W} / \text{m}^2$, et on récupère en sortie la réponse propre du modèle identifié y_m , celle qu'on compare à la sortie du système réel. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures suivantes :

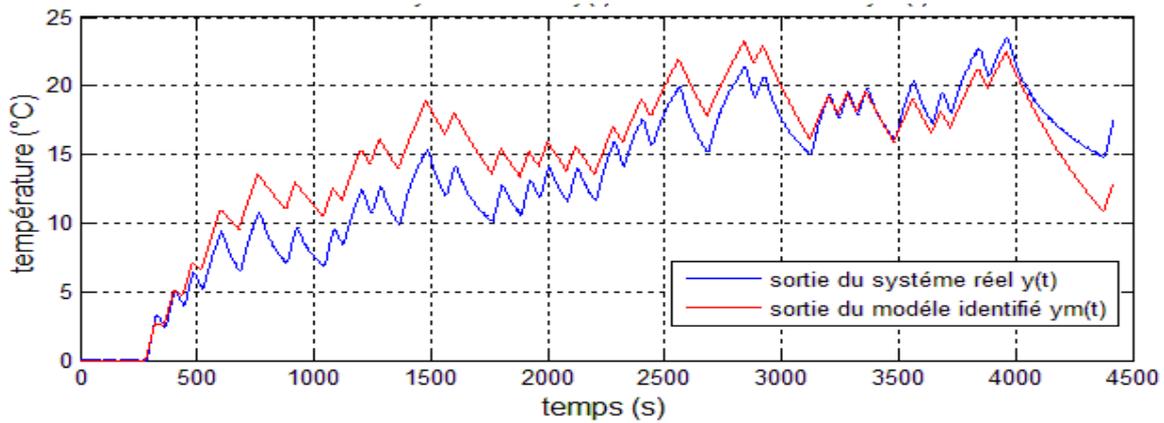


Figure III.6 : Sortie du système réel et sortie du modèle après identification.

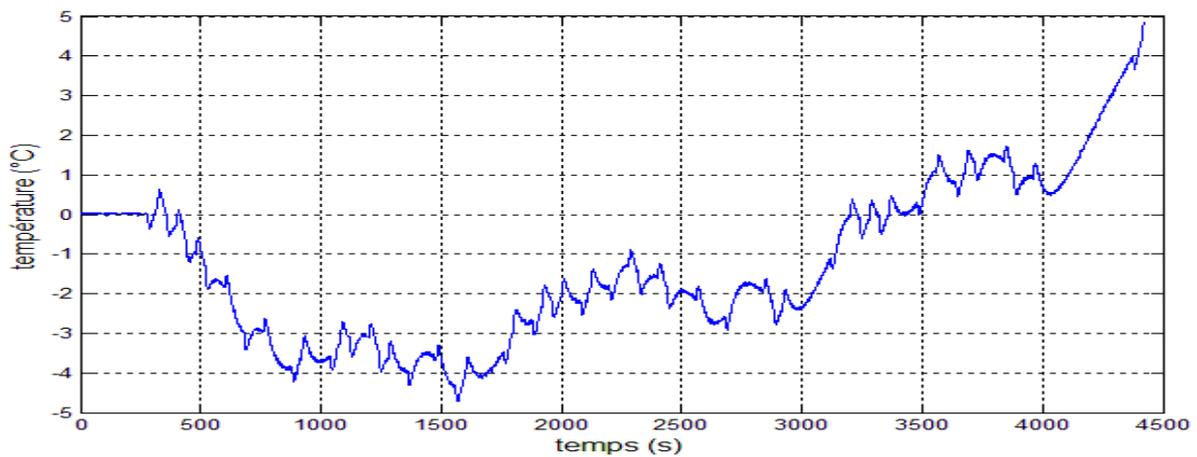


Figure III.7 : Erreur obtenue entre le modèle considéré et le système réel.

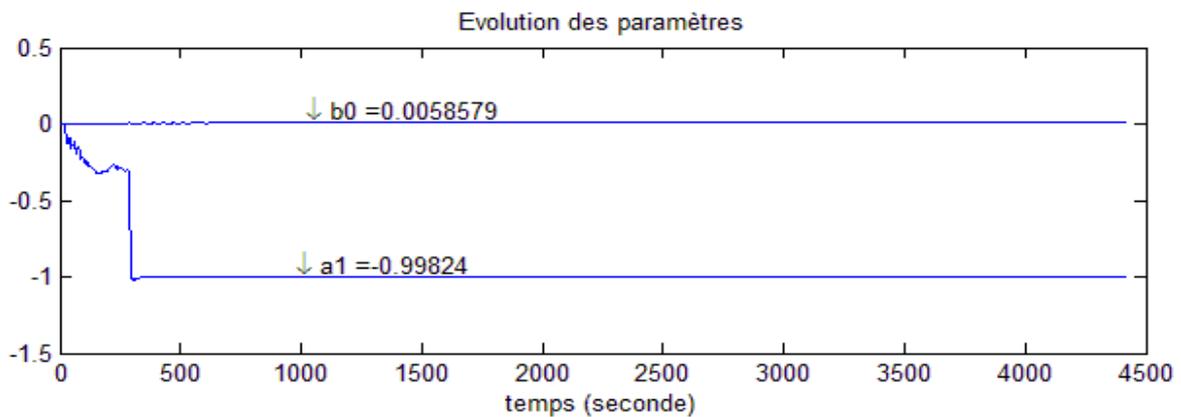


Figure III.8 : Evolution des paramètres du modèle identifié.

D'après la Figure III.6, nous constatons que le modèle présente une dynamique semblable à celle du système réel. Cependant la température du modèle augmente plus que celle du système réel jusqu'à environ 3200 échantillons, ce qui a causé une erreur de -5 °C ; traduisant le caractère approché de la modélisation. Nous observons également, à partir des 3200

échantillons, un écart de température $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$ d'environ entre le système réel et celle du modèle, avec une convergence rapide des paramètres vers les valeurs finales déterminées en fin d'identification (voir Figure III.8).

D'après les résultats obtenus, on peut conclure que le modèle suit correctement la dynamique du système réel, mais avec une certaine erreur, qui est en certaines plages assez importante qui représente une erreur quadratique moyenne de $J = 5,58$, correspondant à une erreur relative $ER = \frac{y(t)-y_m(t)}{y(t)} = 27,78\%$. Nous nous attachons dans ce qui suit à minimiser, ou essayer de réduire cette erreur ER en faisant varier l'ordre de dérivation non entier α .

➤ *Résultats obtenus pour différentes valeurs de α sont :*

a) **pour $\alpha = 0,5$** : on obtient les valeurs des deux paramètres comme suit :

$$a = 4,0035 \text{ et } c = 0,0117$$

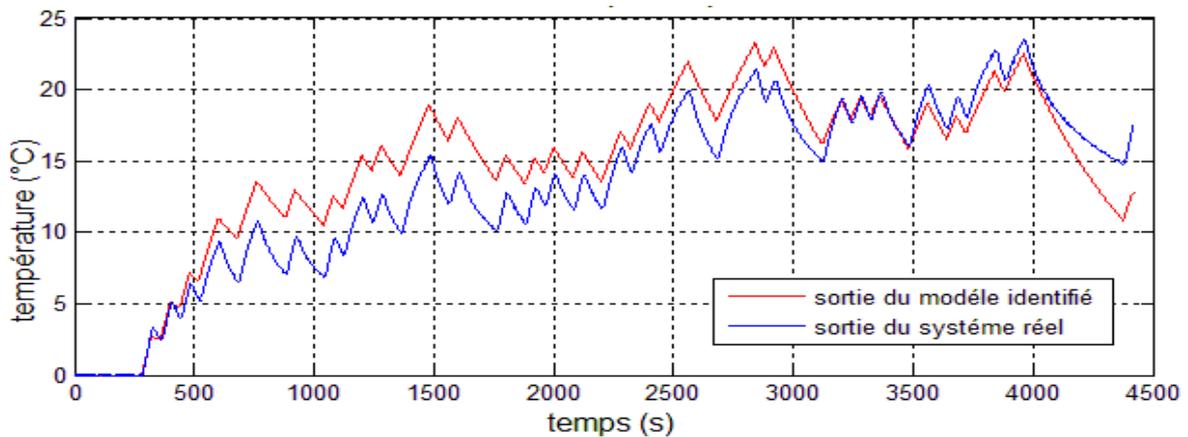


Figure III.9 : Sortie du système réel et sortie du modèle identifié pour $\alpha=0,5$.

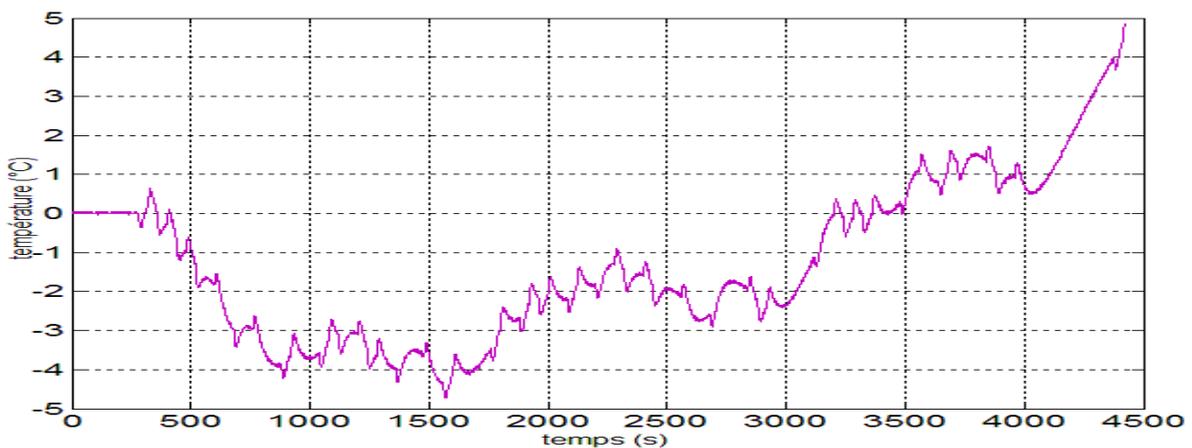


Figure III.10 : Erreur obtenue entre le système réel et le modèle identifié pour $\alpha=0,5$.

L'erreur quadratique moyenne est : $J = 5,58$, qui correspond à une erreur relative $ER = 27,78 \%$.

b) pour $\alpha = 0,65$: on obtient les valeurs des deux paramètres comme suit :

$$a = 6,4076 \text{ et } c = 0,0188$$

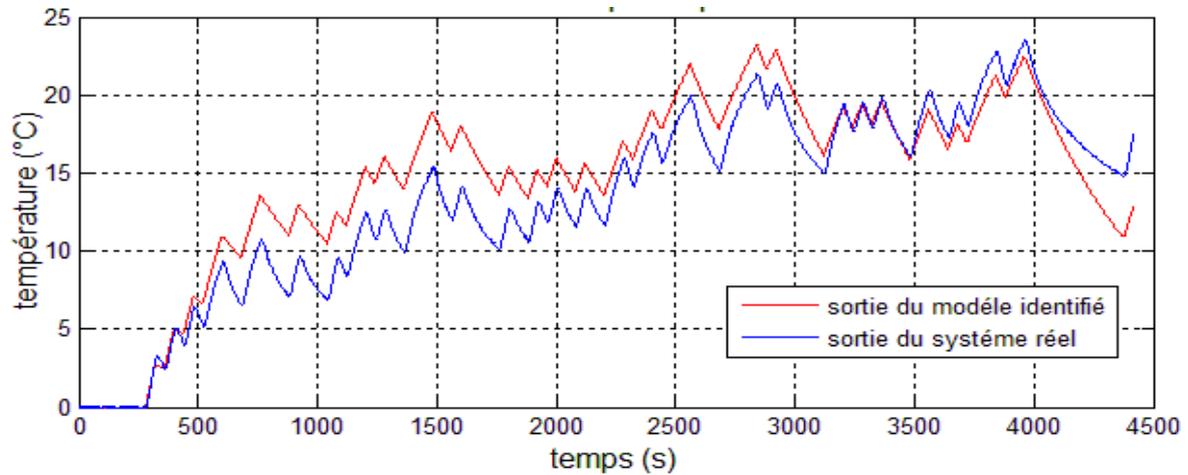


Figure III.12 :Sortie du système réel et sortie du modèle identifié pour $\alpha=0,65$.

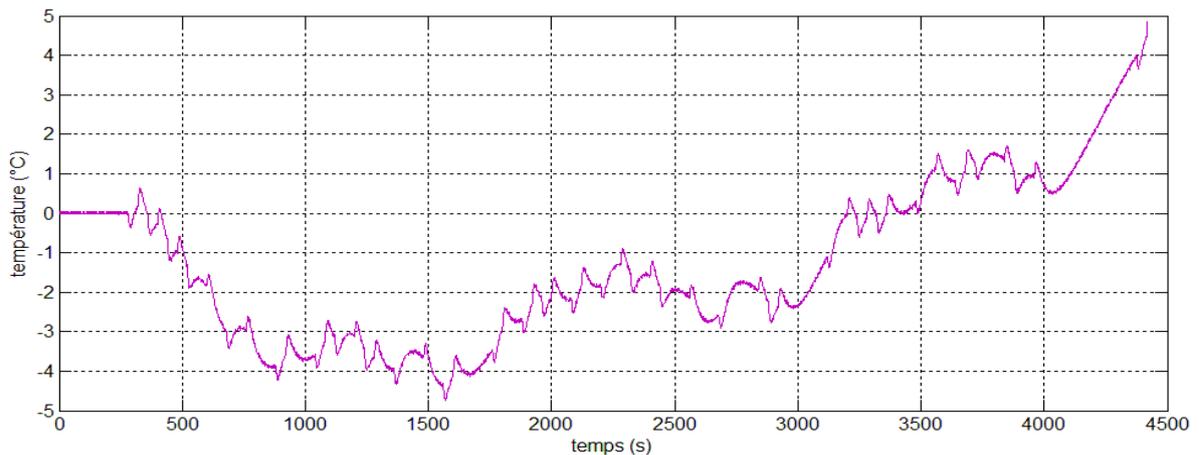


Figure III.13 : Erreur obtenue entre le système réel et le modèle identifié pour $\alpha=0,65$.

L'erreur quadratique moyenne : $J = 5,58$, ce qui correspond à une erreur relative de $ER = 27,78 \%$.

➤ *Interprétation des résultats :*

nous constatons à l'examen des Figures III.6 à III.13 que la méthode appliquée permet seulement l'identification des paramètres du modèle considéré, à l'exclusion de α . Lorsque

nous faisons varier l'ordre non entier α sur un intervalle $[0.5 \ 0.9]$, nous obtenons les mêmes résultats que ceux obtenus après l'identification (figure III.6) où le modèle suit la dynamique du système réel avec une erreur quadratique identique pour toutes les valeurs successives de α , et seul les paramètres qui changent d'une manière à garder à chaque fois les mêmes valeurs du vecteur d'estimation $[a_1 \ b_0]$ obtenus de l'identification par l'algorithme des moindres carrés récursifs.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vu en premier lieu la description et la modélisation du système thermique à savoir une barre d'aluminium. Puis ce dernier a été identifié par un modèle d'ordre non entier en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs. À travers les différentes simulations nous avons constaté que cette méthode permet seulement l'identification des paramètres du modèle considéré, et qu'elle donne les mêmes résultats pour n'importe quel ordre de dérivation α , ce qui nous permet de dire qu'elle n'est pas appropriée pour l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons abordé le problème de l'identification de systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire. Au premier chapitre le contexte de la dérivée d'ordre non entier à été présenté en donnant les outils de base employés dans le calcul fractionnaire. De plus, les différents modes de représentation des systèmes d'ordre non entier ont été présentés, à savoir équation différentielle généralisée, fonction de transfert et représentation d'état. La stabilité des systèmes d'ordre non entier commensurable a été étudiée à travers le théorème de *Matignon*.

Au deuxième chapitre une revue des principales méthodes d'identification a été présentée. Ces méthodes sont réparties en deux classes. La première traite de l'identification des systèmes d'ordre entier où l'identification se limite seulement aux paramètres du modèle considéré, parmi elles on cite la méthode des moindres carrés récursifs qui est la plus utilisée dans ce genre d'approche. L'autre classe concerne l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire où l'ordre de dérivation est estimé au même titre que les paramètres.

Enfin, le troisième chapitre a permis de mettre en application les différentes contributions de ce mémoire sur un système physique réel : un barreau d'aluminium soumis à un flux de chaleur à l'une de ses extrémités. Nous avons étudié son comportement en sortie, à savoir l'évolution de la température en un point de ce barreau. Après une description et modélisation de ce système expérimental, une identification par la méthode des moindres carrés récursifs à été effectuée afin de déterminer le modèle le plus adéquat. Les résultats de simulation ont montré que la méthode utilisée n'est pas adaptée à l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire puisque l'algorithme des moindres carrés récursifs ne tient pas compte de l'ordre non entier du modèle à identifier, mais seulement de ses paramètres. De cette étude, nous tirons ainsi cet enseignement important : il est préférable de rechercher une nouvelle voie, par rapport aux voies classiques.

Nous avons limité notre objectif dans ce mémoire, à l'identification d'un modèle fractionnaire, en estimant seulement ses paramètres tout en fixant l'ordre de dérivation non entier. Il serait judicieux d'élaborer et de mettre en œuvre une méthode qui inclurait l'ordre - ou les ordres- de dérivation non entier(s) dans un algorithme prenant en compte comme paramètres du modèle à identifier, et qui les incluraient dans le critère d'optimisation.

Une telle méthode existe. Elle est dite « à erreur de sortie » et est basée sur une programmation non linéaire (algorithme de Marquardt). Elle sort de l'objectif de ce mémoire ; elle est envisageable comme perspective à ce travail et permettra d'estimer l'ordre non entier du modèle fractionnaire au même titre que ses paramètres et d'améliorer la précision de l'identification.

Références bibliographiques

- [1] : Amar Si Amour (2011) « *Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire* ». Thèse de doctorat en Automatique à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.
- [2] : Ivo Petràš (2010) « *Fractionnal-Order Nonlinear Systems* ». Technical University of Košice, Faculty of BERG. Email : ivo.petras@tuke.sk
- [3] : Rachid Mansouri (2008) « *Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état* ». Thèse de doctorat en Electrotechnique à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.
- [4] : Nadir Fergani (2009) « *Réglage de PID fractionnaire pour une réponse désirée en boucle fermée* ». Mémoire de Magister en Electronique à l'Université Mentouri de Constantine.
- [5] : Djamah Tounsia (2010) « *Identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire* ». Thèse de doctorat en Automatique à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou .
- [6] : Maurice Rivoir \ Jean-Louis Ferrier. Cours d'automatique tome 3 « *Commande par calculateur et identification.* » .
- [7] : Gonzalo Cabodevila (2009/2010) « *Identification des systèmes* ». Ecole Nationale Supérieure de Mécanique – France. Site web : [http:// intranet-tice.ens2m.fr](http://intranet-tice.ens2m.fr) .
- [8] : Olivier Cois (2002) « *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique* ». Thèse de doctorat en Automatique et Productique, Signal et Image. Laboratoire (LAP-UMR 5131 CNRS) –Université Bordeaux 1- Ecole Nationale supérieure d'Electronique. Informatique et Radiocommunication de Bordeaux (ENSEIRB) .
- [9] : Abdelbaki Djouambi (2008) « *Contribution à la commande CRONE* ». Thèse de doctorat en Electronique option contrôle à l'Université Mentouri de Constantine.

[10] : Rachid Malti, Jocelyn Sabatier, et Huseyin Akçay « *Thermal modeling and identification of an aluminum rod using fractional calculus* ». Université de Bordeaux, IMS, UMR 5218 CNRS, 351 cours de la Libération 33405 Talence cedex, France.

Email : [{rachid.malti,jocelyn.sabatier} @laps.ims-bordeaux.fr](mailto:{rachid.malti,jocelyn.sabatier}@laps.ims-bordeaux.fr)

[11] : Ioan Doré Landau (1993) « *Identification et commande des systèmes* ».