

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE
Spécialité : GENIE ELECTRIQUE
Filière : ENTRAINEMENTS ELECTRIQUES

Présenté par
Azouaou BERKACHE

Thème

Modélisation de structure CND par la méthode des
éléments finis stochastique

Mémoire soutenu publiquement le mois 2015 devant le jury composé de :

M.S.H OULD OUALI MCB, UMMTO	Président
M.H.MOHELLEI Professeur UMMTO	Rapporteur
M.F.HOCINI MCB UMMTO	Examineur
M.Z.OUDNI MCB UMMTO	Co-rapporteur

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu le BON DIEU de m'avoir donné le courage et la patience pour faire ce travail.

Je tiens à remercier mon promoteur M^r H.MOHELLEBI professeur à l'université MOULOUD MAMMERI de TiziOuzou, de m'avoir proposé ce sujet, et m'avoir suivi de très près tout au long de mon travail, je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également à M^{me} OUDNI pour avoir accepté de diriger ce travail, et pour les conseils et tout l'aide qu'elle m'a apportés pendant toute la durée de mon travail.

Mes remerciements vont également à M.HOCINI , M.HAMEL, Melle LARABI pour les conseils et leurs encouragements.

Je tiens à présenter mes remerciements pour tous les enseignants de la spécialité « Entraînements Electriques », pour leurs aides, leur patience, leur générosité, leur disponibilité et leurs encouragements.

Je remercie vivement le président et les membres de jury pour nous avoir honorés et acceptés d'examiner ce travail.

Je dédie ce travail :

A mes parents

A mes frères

A tous mes amis

A tous ceux qui me sont chers

Résumé

Les exigences croissantes sans cesse sur la qualité et la fiabilité des installations et des produits industriels notamment dans la métallurgie, l'aéronautique et le nucléaire ont conduit à l'apparition et au développement des méthodes de contrôle non destructif (CND).

Les méthodes du CND sont actuellement utilisées pour la recherche et la classification des défauts dans les pièces d'une part, et la caractérisation des matériaux d'autre part. Les techniques sont diverses (ultrasons, ressuage, radiographie, courant de Foucault...etc.). Chacune d'elles dépend à la fois de la nature des matériaux constituant les pièces à contrôler et du type de contrôle à effectuer (possibilité de contact ou non avec la pièce). Dans les dispositifs électromagnétiques utilisés en électrotechnique, généralement font appel aux méthodes électromagnétiques ; tel que le contrôle par courant de Foucault.

Le travail présenté dans ce mémoire traite la modélisation par la méthode des éléments finis stochastique (méthode de Monté Carlo) d'un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault. L'outil de calcul utilisé est Matlab, s'appuyant sur la simulation par la méthode de Monté Carlo.

Sommaire

Introduction générale	1
-----------------------------	---

Chapitre I : Généralité sur le contrôle non destructif

I.1 Introduction	4
I.2 Le contrôle non destructif	5
I.3 Les défauts surfaciques	5
I.3.1 Les défauts ponctuels	5
I.3.2 Les défauts d'aspect	5
I.4 Les défauts internes	5
I.5 Mise en œuvre d'un système CND	5
I.6 Les objectifs du CND	5
I.7 Domaines d'applications	5
I.8 Les méthodes de contrôle non destructif	5
I.8.1 Le contrôle visuel	5
I.8.2 Le ressuage	6
I.8.3 La magnétoscopie	9
I.8.4 La thermographie infrarouge	9
I.8.5 La radiographie	6
I.8.6 les ultrasons	9
I.8.7 CND par Courant de Foucault	9
I.8.7.1 Nature du contrôle non destructif par courant de Foucault	10
I.8.7.2 Différents types de contrôle par courant de Foucault	10
I.8.7.3 Technique par courants pulsés	10
I.8.7.4 Technique multifréquences	11
I.8.7.5 Capteurs et transducteurs	12
I.8.7.6 Les capteurs à courants de Foucault	12
I.8.7.6.1 Les fluxgates	12
I.8.7.6.2 Les capteurs à effet Hall	13
I.8.7.6.3 Les magnétorésistances	14
I.8.7.6.4 Les capteurs inductifs	14
I.8.7.6.4.1 Différents types des capteurs inductifs	14
I.8.7.6.4.2 Capteur absolu	14
I.8.7.6.4.3 Capteur double	15
I.8.7.6.4.4 Capteur différentiel	15
I.8.7.7 Effet de peau	16
I.8.7.7 Avantages et limites de la technique CF	17
I.8.7.7 Conclusion	17

Chapitre II : Les équations de l'électromagnétisme

II.1. Introduction	20
II.2. Lois classiques de l'électromagnétisme	20
II.2.1. Loi d'Ampère	21
II.2.2. Loi de Lenz	21
II.2.3. Loi de Faraday	21
II.2.4. Loi de Biot et Savart	21
II.2.5. Equations de Maxwell	22
II.2.6. Equation de la conservation de la charge	22

II.2.7. Lois de comportement des milieux.	22
II.2.8. Relations de passages	24
Formulation en potentiel vecteur magnétique.....	25
II.4. Equations des différentes régions d'un système électromagnétique	27
II.5. Conclusion.....	28

Chapitre III :Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

III.1. Introduction.....	29
III.2.Méthodes de résolution	
III.2.1.Méthodes analytiques.....	29
III.2.2.Méthodes semi analytiques.....	29
III.2.3.Méthodes numériques.....	30
III.2.3.1. Méthode des différences finies.....	30
III.2.3.2.Méthode des intégrales de frontières.....	31
III.2.3.3.Méthode des éléments finis.....	32
III.2.3.3.1. Formulation éléments finis.....	33
III.2.3.3.1.1 Formulation vibrationnelle.....	33
III.2.3.3.1.2.Formulation projective (résidus pondérés).....	34
III.2.3.4. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	36
III.2.3.4.1. Equation magnétostatique.....	37
III.2.3.4.2. Equation magnétodynamique.....	39
III.2.4. La méthode des éléments finis stochastique (MEFS).....	41
III.2.4.1. Les méthode de Monté Carlo.....	42
III.2.4.1.1.Méthode Monté Carlo standard.....	43
III.2.4.1.2. La méthode de simulation de Monté Carlo.....	43
III.2.4.1.3. Simulation par Monté Carlo.....	43
III.2.4.1.4. Technique de simulation.....	44
III.2.4.1.5.Organigramme de la simulation.....	45
III.2.4.1.6. Les méthodes FORM/SORM.....	46
III.3.Conclusion.....	46

Chapitre IV: Applications et validations

IV.1 Introduction.....	50
IV.2 Equation électromagnétique stochastique.....	50
IV.2.1 Description du dispositif d'étude.....	50
IV.2.2.1 Géométrie du dispositif	51
IV.2.2 Propriétés physiques associées au problème déterministe.....	51
IV.2.2.1Maillage du domaine de résolution et les conditions aux limites.....	51
IV.2.2.2 Résultats et interprétations.....	51
IV.2.2.3 Plaque sans défauts.....	52
Conclusion générale.....	54
Bibliographie.....

Introduction générale :

Dans l'industrie d'aujourd'hui, les matériaux (composants) utilisés doivent être contrôlés s'ils présentent des défauts au cours de la fabrication, de la production et durant la phase de vie du composant. Pour cela différentes techniques (méthodes) ont été mises au point au cours de ces dernières décennies et qui ont été regroupées sous le thème de contrôle non destructif (CND). Ces techniques permettent de réaliser la vérification sans endommager le matériau ou la structure à inspecter.

Les techniques CND sont exploitées dans plusieurs domaines de la physique (l'optique, la mécanique,...) selon le besoin et le type de l'industrie considérée. Avec l'arrivée progressive de nouveaux matériaux, le désir d'améliorer la qualité de détection, d'accroître la précision et la fiabilité des résultats de simulation, il est indispensable d'améliorer les méthodes existantes et le développement de nouvelles.[22,23]

La modélisation numérique des systèmes physiques est un outil complémentaire aux analyses théoriques, voire l'unique recours lorsque les théories mathématiques ne peuvent être établies ou résolues pour des systèmes complexes. Une telle formulation numérique des équations mathématiques représentatives de la physique étudiée remonte aux années cinquante, l'époque correspondant à l'essor des ordinateurs et leur accessibilité aux communautés scientifiques. Depuis, les capacités des modèles numériques à reproduire la physique n'ont cessé de croître. La modélisation d'une configuration réelle de CND par CF ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et fait appel à des méthodes numériques. Parmi celles-ci, la méthode élément fini (MEF) qui est développée depuis une cinquantaine d'années, est couramment utilisée de nos jours dans beaucoup d'industries afin d'évaluer de façon fine le comportement des systèmes électromagnétiques. De nombreux progrès ont été accomplis sur la formulation d'éléments finis performants, de lois de comportement pertinentes et des solveurs efficaces. Cependant la pertinence globale d'un modèle aux éléments finis repose sur l'idée que les paramètres d'entrée (géométries, propriétés physiques,...) sont parfaitement connus et maîtrisés..[6]

Modéliser l'aléa sur ces paramètres d'entrée et en caractériser les conséquences sur la réponse du modèle constitue donc une nouvelle étape dans la simulation numérique en électrotechnique..[6]

La méthode des éléments finis stochastiques est appliquée à des systèmes électromagnétiques dont les propriétés physiques du matériau constituant le dispositif seront considérées aléatoires.[6]

Ce travail est organisé comme suit :

- Dans le premier chapitre nous présentons des généralités sur le CND. Quelques méthodes de CND en expliquant leurs domaines d'applications, leurs avantages et leurs inconvénients, l'objectif est de s'intéresser beaucoup plus à la méthode par courant de Foucault.

- Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques généralités sur les phénomènes électromagnétiques.
- Dans le troisième chapitre nous abordons les différentes méthodes analytiques et numériques de résolution des équations électromagnétique, la méthode que nous avons retenue dans notre travail est la méthode des éléments finis stochastiques(MEFS).
- Dans le quatrième chapitre nous validons le modèle proposé et nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre I : Généralité sur le contrôle non destructif

I.1 Introduction

Les exigences croissantes sans cesse sur la qualité et la fiabilité des installations et des produits industriels notamment dans la métallurgie, l'aéronautique et le nucléaire ont conduit à l'apparition et au développement des méthodes de contrôle non destructif (CND).

Les méthodes du CND sont actuellement utilisées pour la recherche et la classification des défauts dans les pièces d'une part, et la caractérisation des matériaux d'autre part. Les techniques sont diverses (ultrasons, ressuage, radiographie, courant de Foucault...etc.). Chacune d'elles dépend à la fois de la nature des matériaux constituant les pièces à contrôler et du type de contrôle à effectuer (possibilité de contact ou non avec la pièce). Dans les dispositifs électromagnétiques utilisés en électrotechnique, généralement font appel aux méthodes électromagnétiques ; tel que le contrôle par courant de Foucault.

I.2. Le contrôle non destructif

Le contrôle non destructif a pour objectif de vérifier le bon fonctionnement des différentes parties d'un système sans atteintes à son fonctionnement.[12] Il existe deux types de défauts qui peuvent affectés une masse :

- Les défauts surfaciques.
- Les défauts internes.

I.3. Les défauts de surfaces

Sont accessibles à l'observation directe mais pas toujours visibles à l'œil nu (fissure, criques,...). A cet effet on peut les classés en deux types distincts :

I.3.1. Les défauts ponctuels

Correspond aux défauts les plus nocifs sur le plan technologique, puisqu'il s'agit des criques, piqûres, fissures, craquelures, généralement aptes à provoquer à terme la rupture de la pièce, en initiant par exemple des fissures de fatigue.

I.3.2 Les défauts d'aspect

C'est à dire à des plages dans lesquelles une variation des paramètres géométriques ou physiques (rugosité, surépaisseur, taches diverses) attire le regard et rend le produit inutilisable.

I.4. Les défauts internes

Sont des hétérogénéités de natures, de formes, de dimensions extrêmement variées, localisées dans le volume du corps à contrôler. Il s'agira de criques internes, de porosités, de soufflures, d'inclusions soudées. Dans d'autres cas, il s'agira simplement de la présence d'un corps étranger au sein d'une enceinte ou d'un produit emballé.

I.5.Mise en œuvre d'un système CND

Génération par émetteur d'un signal qui est perturbé par la pièce à contrôler, un émetteur permet de recueillir la réponse due à la pièce.[11]

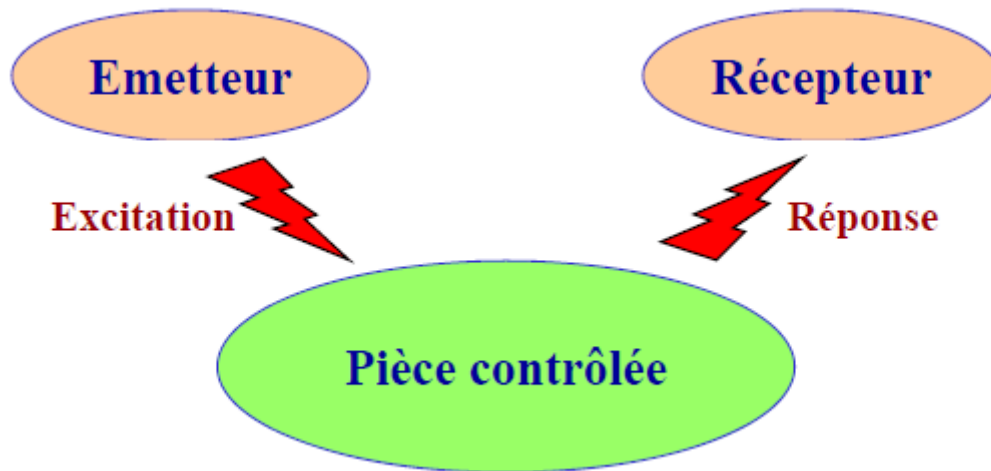


Figure I.1 Schéma d'un système de CND

I.6.Les objectifs du CND

Le contrôle non destructif a pour objectif, comme son nom l'indique, de contrôler l'état des pièces industrielles sans pour autant que les examens correspondants ne puissent nuire à leur utilisation future.[12,14] Ceci peut correspondre à deux types de contrôles : l'estimation d'un paramètre constitutif de la pièce comme par exemple l'épaisseur d'une paroi, la distance à un objet, les propriétés électromagnétiques constitutives du matériau ; la recherche d'une rupture de ces paramètres. Dans le deuxième cas, il s'agit en général de défauts, qui peuvent être par exemple des fissures, des inclusions, des porosités, des effets de la corrosion ou de la fatigue mécanique. Cette procédure de contrôle se produit souvent plusieurs fois au cours de la vie d'une pièce et doit satisfaire au mieux les critères suivants :

- La rapidité d'exécution : Il faut que le contrôle soit rapide pour qu'il ne soit pas trop pénalisant à la fois en termes d'immobilisation physique de chaque pièce, mais aussi au niveau des coûts que sont le temps de travail de la main-d'œuvre ou les frais de fonctionnement de l'usine.
- Le coût : Le contrôle qualité représente sur les pièces complexes un coût non négligeable et qui doit être minimisé dans la mesure du possible.
- La reproductibilité : La mesure ne doit pas souffrir des circonstances extérieures : une même pièce contrôlée plusieurs fois doit toujours donner le même résultat.
- La fiabilité : Le contrôle doit remplir son cahier des charges, et par exemple détecter tous les défauts qu'il est censé être capable de détecter, indépendamment des conditions d'inspection.

- La sensibilité : La sensibilité est le rapport des variations de la mesure. Plus la sensibilité est grande, plus les petites variations de mesure sont détectables, comme par exemple les défauts de faibles dimensions.
- La résolution : La résolution est la plus petite variation de signal pouvant être détecté, par exemple la dimension du plus petit défaut. Usuellement est défini le pouvoir de résolution, ici la dimension du plus petit défaut visible. Le pouvoir de résolution est fort si cette dimension est petite. Parmi ces critères, il est naturel de penser que la rapidité, la reproductibilité et la sensibilité sont respectivement fortement liées au coût, à la fiabilité et à la résolution. Il est très souvent nécessaire de consentir à des compromis entre les trois groupes ainsi définis.

I.7. Domaines d'applications

Le contrôle non destructif est utilisé dans différents secteurs industriels produisant des pièces à cout de production élevés en quantité et en qualité faible, et des pièces dont la fiabilité de fonctionnement est critique, on citera ci-dessous quelques domaines :[20]

- L'aéronautique (ailes d'avion, pièce moteurs...).
- L'industrie de l'automobile.
- L'industrie pétrolière.
- L'aérospatiale.
- Le génie civil et le bâtiment.
- La chaudronnière.
- L'inspection alimentaire.
- La ferroviaire.
- L'industrie de l'énergie.
- L'archéologie.

=



Figure I.2 Domaines d'application du CND

I.8. Les méthodes de contrôle non destructif [11, 12, 13, 14, 21]

Il existe plusieurs techniques de CND, peuvent être classées comme suit :

➤ Méthodes surfaciques

Visuel, ressuage, magnétoscopie, thermographie infrarouge, courant de Foucault,...

➤ Méthodes volumiques :

Radiographie, ondes guidées, ultrasons...

I.8.1 Le contrôle visuel

Le contrôle visuel est la technique la plus utilisée pour détecter des défauts grossiers surfaciques.

a- Méthode directe : se fait à l'œil nu.

b- Méthode indirecte : se fait à l'aide de petits simples équipement (endoscopie, caméras...)

➤ Avantage :

- Simplicité.

- Coût.

➤ Limitation :

- Reproductibilité.

- Défauts surfaciques seulement.

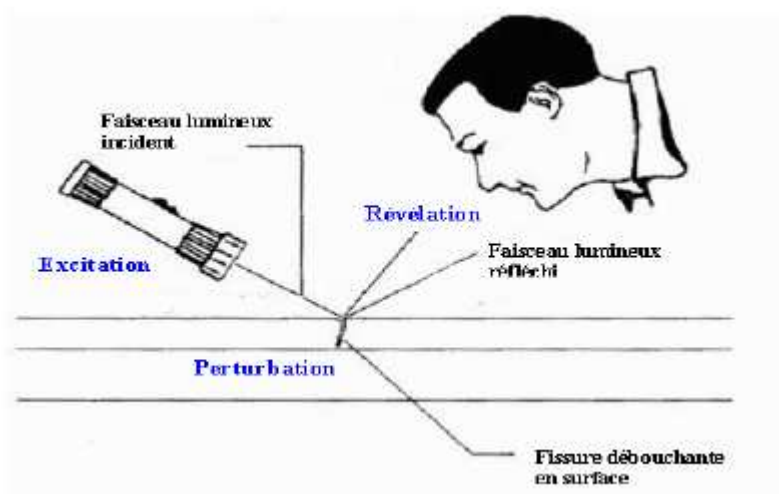


Figure I.3 Le contrôle visuel

I.8.2. Le ressuage

Cette méthode détecte des défauts débouchant sur structures métalliques ou composites, elle est en trois parties :

a-/application d'un liquide (pénétrant) sur la surface.

b-/après pénétration du liquide et l'enlèvement du produit par l'eau ou par solvant

c-/application du produit révélateur qui après certains temps, l'apparition d'une tache colorée qui révèle la présence du défaut.

- Avantage :
 - Simplicité.
 - Possibilité de ressuage à chaud 240c°.
- Limitations :
 - Influence de l'état de surface.
 - Nécessité d'un nettoyage de surface avant l'examen.
 - Pas de dimensionnement précis des défauts.
 - Produits toxiques.

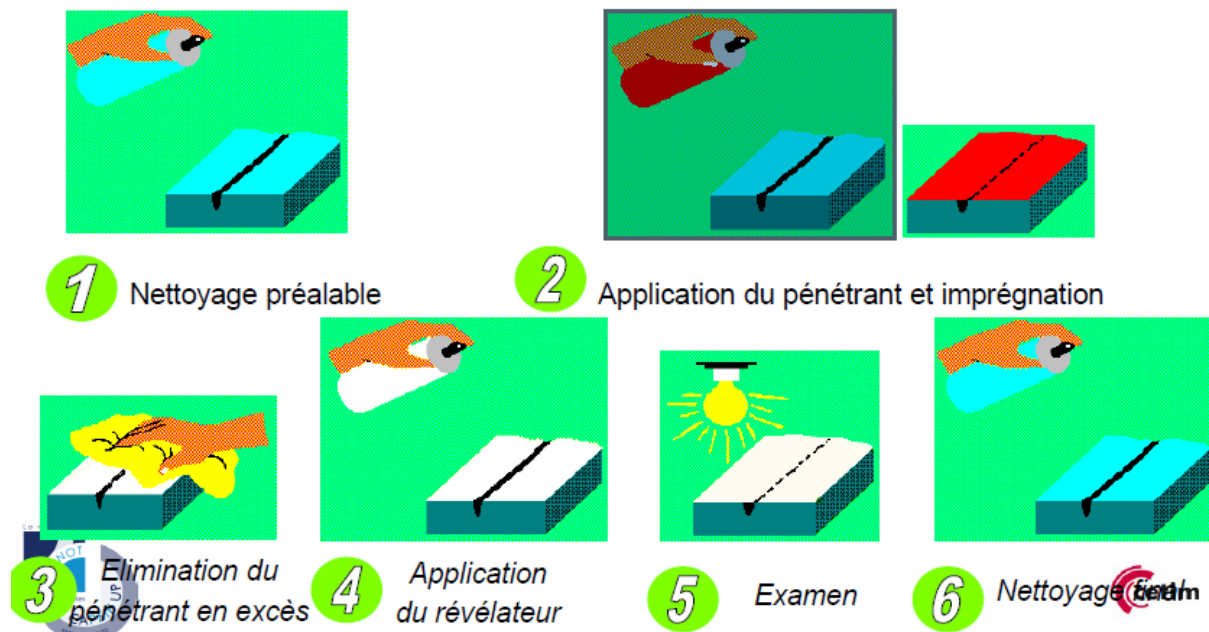


Figure I.4 Inspection par ressuage

I.8.3.La magnétoscopie

Cette méthode consiste à soumettre la pièce à inspecter à l'action d'un champ magnétique jusqu'à saturation et s'il y a un obstacle (défaut) le champ se trouve divisé. Si les lignes du champ sortent à l'extérieur, donc le défaut est proche de la surface, mais pour qu'il y ait révélation d'existence de défaut ces derniers doivent être perpendiculaires aux lignes de champs.[12,14,24]

- Avantages
 - Plusieurs méthodes d'aimantation sont possibles.
 - Rapidité.
 - Visualisation des défauts par produits indicateurs.

- Limitations :
 - Ne s'applique que sur les matériaux ferromagnétiques.
 - Nécessite de nettoyage de la surface avant et après examen.
 - Désaimantation de la pièce après examen.

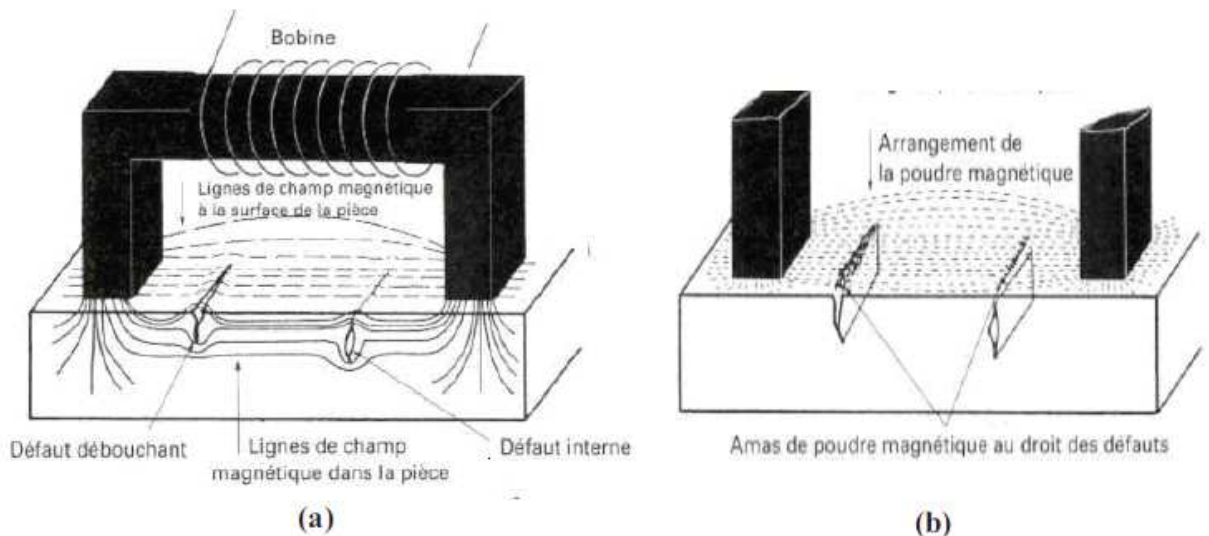


Figure I.5 Inspection par magnétoscopie.

I.8.4. La thermographie

La thermographie infrarouge (IR) (thermographie active) utilise une caméra comme moyen de détection et un système d'illumination (éclairer) permettant de transmettre un échauffement à la pièce à contrôler. La présence de défaut est mise en évidence par une modification de la température à la surface du matériau. La thermographie passive, l'analyse du gradient de température se fait sans source d'excitation. [12,13,14]

- Avantage :
 - s'applique pour les matériaux métalliques.
 - S'applique pour les matériaux composites...
- Limitations :
 - Coût de caméras très élevé.
 - Défaut surfacique.

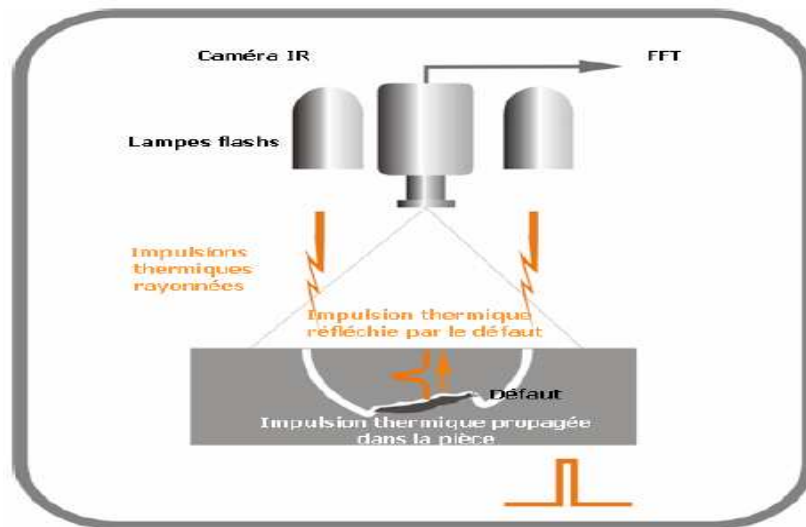


Figure I.6 Cas d'excitation par lampe flash

I.8.5.La radiographie

La radiographie consiste à projeter des rayons, traversant en partie la structure à inspecter, l'autre partie étant absorbé par la structure. Un film photographique capte les rayons ressortant, un examen visuel de ce film est réalisé par l'utilisateur afin de déterminer la nature des défauts.[12,14,23]

- **Avantage :**
 - Contrôle tout type de matériaux.
 - N'importe qu'elle géométrie.
 - Possibilité de détermination de la position d'un défaut en profondeur.
- **Limitations :**
 - Taille d'échantillon limité.
 - Certification du personnel.
 - La salle d'utilisation doit être entourée de plomb pour confiner les radiations.

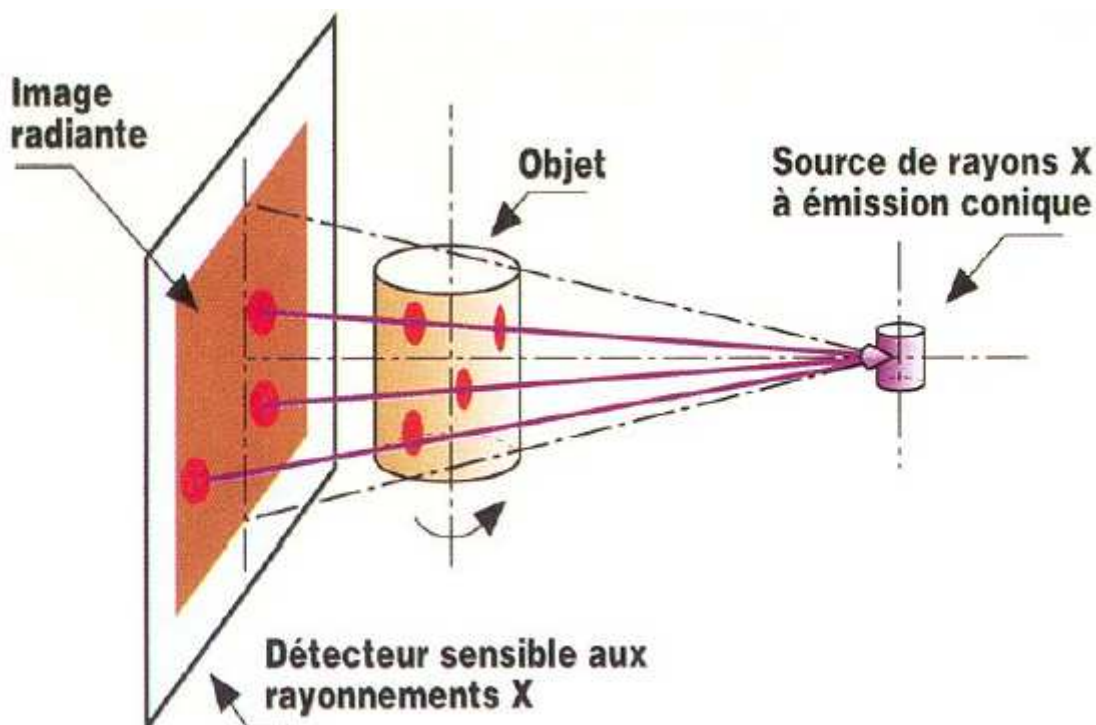


Figure I.7 Contrôle par radiographie

I.8.6. Les ultrasons

La technique des ultrasons (us) repose sur la propagation dans la pièce à contrôler d'une onde ultrasonore générée à l'aide d'un transducteur émetteur. Un transducteur récepteur reçoit les ondes réfléchies avec un certain retard dû à la propagation des ondes à travers la pièce.

Connaissant la vitesse de propagation sonore dans le matériau, il est alors possible de distinguer l'écho correspondant au fond de la pièce, d'un éventuel écho correspondant à un défaut situé à l'intérieur de la pièce. [13,14,24]

- **Avantage :**
 - Excellente pénétration des us.
 - Estimation des dimensions des défauts par plusieurs méthodes.
 - Possibilité d'un examen automatique et traitement d'information.
- **Limitations :**
 - Nécessité d'un couplage avec la surface examinée.
 - Relation caractéristique d'un défaut par rapport à un signal d'écho.
 - Sensibilité à l'orientation des défauts par rapport aux champs us.

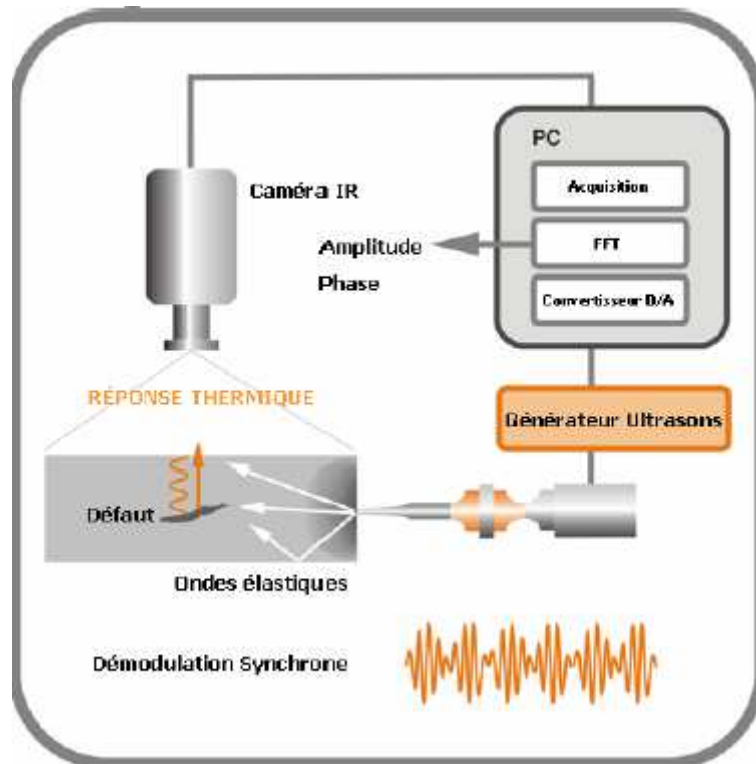


Figure I.8 Examen par ultrasons

I.8.7. Courant de Foucault

On appelle courant de Foucault, les courants électriques créés dans une pièce conductrice, soit par variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant la pièce, soit par un déplacement de cette pièce dans un champ constant.

La variation du champ est responsable de l'apparition d'une force électromotrice à l'intérieur du milieu conducteur, cette force induit des courants dans la masse qui ont deux effets :

- Provoquant un échauffement par effet joule de la pièce.
- Créant un champ magnétique qui s'oppose à la cause de la variation du champ extérieur.

I.8.7. Le principe du CND par courant de Foucault

Une bobine parcourue par un courant variable crée un champ magnétique variable est placé en face de la pièce conductrice à inspecter, donne lieu au phénomène des courants de Foucault, le flux magnétique créé par les courants induits modifie la force électromotrice de la bobine, et l'analyse de cette variation nous permet de nous renseigner sur la pièce, car dès que ces derniers rencontrent un défaut, les lignes de courants induits sont divisées ce qui provoque une modification du champ de réaction .[11]

En générale on utilise une méthode comparative, dont l'objet est de mesurer la différence entre l'impédance Z de la bobine et de la pièce contrôlée et celle d'une pièce de référence (sans défauts). En jouant sur la fréquence du courant d'excitation et la géométrie des bobines, il est possible de contrôler jusqu'à quelques millimètres de la surface.

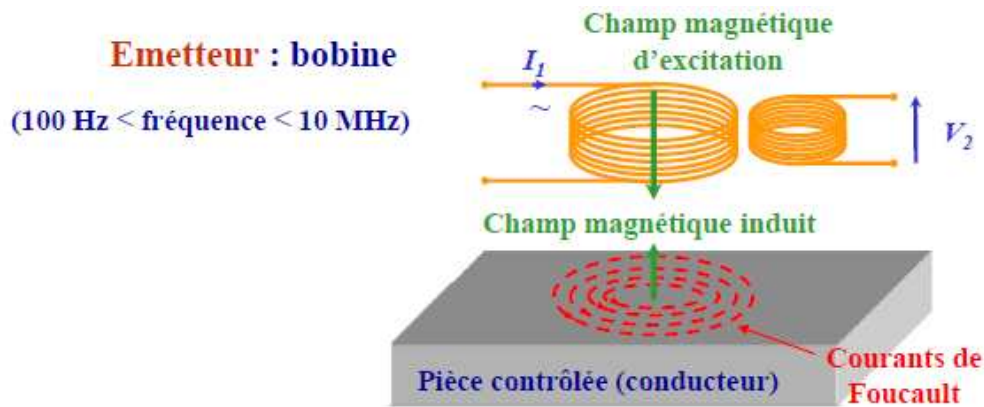


Figure I.10 Principe du capteur à courants de Foucault

I.8.7.1. Nature du contrôle non destructif par courant de Foucault :

La répartition et l'intensité des courants de Foucault dépendent essentiellement de :

- La conductivité électrique.
- La perméabilité magnétique μ .
- La fréquence d'excitation f .
- La géométrie du matériau à contrôler.
- L'entrefer (lift-off), la distance entre le capteur et la pièce.
- Du défaut lui-même.
- La température.

I.8.7.2. Différents types de contrôle par courant de Foucault : [11]

Le choix de la technique dépend essentiellement du type de contrôle qu'on veut effectuer et sur la base de la variation temporelle du champ d'excitation et de la géométrie du dispositif de contrôle, on peut citer parmi ses techniques :

- Les courants de Foucault sinusoïdaux.
- Les courants de Foucault pulsés.

I.8.7.3. Technique par courants pulsés [13]

L'utilisation de courants pulsés conduit à une technique particulière en courants de Foucault, qui consiste à exciter la bobine sonde par des impulsions plutôt que par une tension sinusoïdale entretenue.

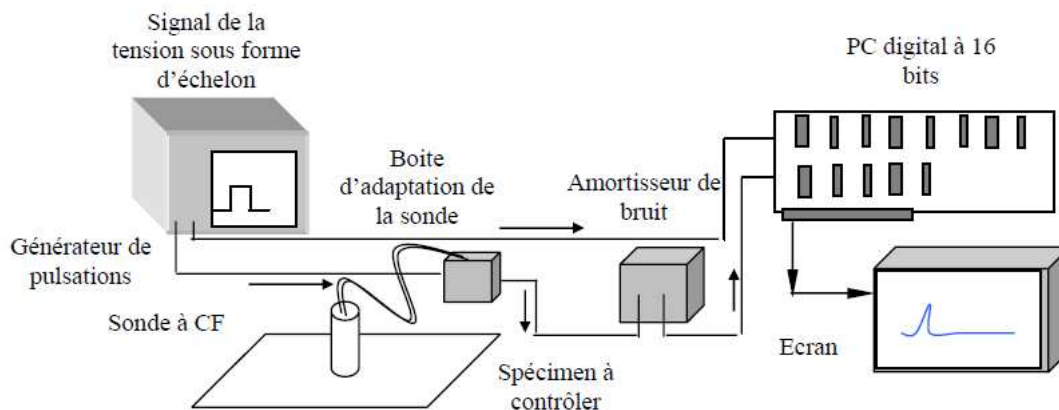


Figure I.11 : Illustration d'appareillage utilisé pour les courants pulsés

L'onde électromagnétique ainsi engendrée se propage dans le matériau et est recueillie par une sonde réceptrice distincte et protégée du rayonnement direct de la bobine émettrice, le caractère «pseudo-échographique» des signaux les rend sensibles à la nature interne du matériau, ce qui explique que cette technique est utilisée pour la mesure d'épaisseur des revêtements et pour la détection de défauts sous-cutané. La figure illustre l'appareillage utilisé pour l'effectuation de cette technique. [14]

I.8.7.4. Technique multifréquences

La phase et l'amplitude d'un signal produit par un quelconque paramètre agissant sur l'équilibre d'un pont de bobines varient avec la fréquence d'excitation, et cette variation dépend elle-même du type de paramètre considéré. Ainsi, par exemple, certains paramètres donnent une réponse en amplitude forte à basse fréquence, d'autres à haute fréquence. On conçoit ainsi que l'utilisation simultanée de plusieurs fréquences d'excitation des sondes doit permettre une discrimination des divers paramètres d'action ; tel est le principe de la technique multifréquence qui permet effectivement ; dans les cas de contrôle difficile ; d'atténuer fortement l'effet des facteurs perturbateurs ; ou encore dans d'autres ; d'effectuer simultanément la détection de plusieurs types de défauts bien différenciés.

Le contrôle par courants de Foucault multifréquence est très utilisé pour l'inversion des données fournies par le capteur en vue de déterminer des paramètres du matériau en regard.

La méthode multifréquences consiste à choisir judicieusement les fréquences d'excitation du capteur de manière à recueillir des informations riches et complémentaires sur le matériau à contrôler. L'idéal serait que chaque paramètre ait une influence sur le signal de mesure à une fréquence et une seule. Ceci est évidemment difficile voire impossible à réaliser en pratique. Quant au nombre de fréquences d'alimentation nécessaire, il est étroitement lié aux nombres de paramètres [20, 21]

I.8.7.5. Capteurs et transducteurs

Un capteur est un dispositif qui transforme l'état d'une grandeur physique observée en une grandeur utilisable (par exemple : une tension, une hauteur de mercure, une intensité ...). On fait souvent (à tort) la confusion entre capteur et transducteur : le capteur est au minimum constitué d'un transducteur. Les capteurs sont les éléments de base des systèmes d'acquisition de données. Leur mise en œuvre est du domaine de l'instrumentation.

Les capteurs et les transducteurs servent à mesurer des grandeurs mécaniques, thermiques, électriques ou chimiques. Un capteur est sensible aux variations de la grandeur mesurée, par exemple la température d'un élément, la position d'une pièce d'une machine, ou la concentration chimique d'une solution. Les valeurs ainsi mesurées sont alors converties en signaux électriques par le transducteur, puis transmises à un dispositif capable de lire, enregistrer ou contrôler les grandeurs mesurées par rétroaction. Capteurs et transducteurs peuvent opérer dans des sites éloignés de l'opérateur, voire dans un environnement inaccessible ou hostile à l'être humain [12,13,14]

I.8.7.6. Les capteurs à courants de Foucault

La technique du contrôle non destructif par courants de Foucault nécessite la mise en place d'un système permettant l'émission et la réception d'un champ magnétique alternatif. Ces deux fonctions peuvent être réalisées par un seul élément ou par deux éléments distincts.

Les capteurs magnétiques transforment les variations du champ magnétique en une variation de tension mesurable. Nous pouvons classer les capteurs permettant de mesurer un champ magnétique variable en deux grandes familles : [22]

- les capteurs **inductifs**. Historiquement les premiers éléments sensibles au champ connus, ils sont des bobines qui transforment le champ magnétique qui les traverse en tension. Elles peuvent être utilisées en émission et en réception.
- les capteurs **magnétiques**. La variation de l'impédance ou de la résistance de ces capteurs est proportionnelle au champ magnétique dans lequel ils sont plongés. L'émission du champ magnétique alternatif doit être réalisée par un autre élément.

I.8.7.6.1. Les fluxgates

Les fluxgates ont été initialement développés pour la fabrication de compas des systèmes de navigation. Ils sont composés d'un noyau ferromagnétique et au minimum de deux bobinages. L'idée à la base est d'exploiter la saturation du cycle d'hystérésis du noyau ferromagnétique

Le premier bobinage est appelé bobinage d'excitation, en bleu dans la figure, et le second est appelé bobinage de mesure, en rouge dans la figure 3.4a. Nous allons brièvement présenter le principe de fonctionnement de ces capteurs avec un exemple d'une configuration simplifiée. La bobine d'excitation est alimentée par un courant de forme triangulaire, présenté dans la figure 3.4b, généralement de basse fréquence, entre 50 et 1000 Hz. Ce courant crée un

champ magnétique \mathbf{H} qui sature périodiquement le noyau ferromagnétique. Lorsque le noyau est saturé, la variation de l'aimantation \mathbf{M} à l'intérieur du noyau est nulle, et donc la bobine de mesure présente une tension nulle à ses bornes. Lorsque le noyau n'est pas saturé, la bobine de mesure présente une valeur constante à ses bornes, correspondant à la dérivée des variations de l'aimantation. La tension mesurée aux bornes de la bobine de mesure a donc une forme d'onde caractérisée par des impulsions. En l'absence d'un champ magnétique extérieur, la tension \mathbf{V} mesurée est parfaitement symétrique par rapport à l'origine de temps, comme montré par le signal noir. En présence d'un champ magnétique extérieur, la saturation du noyau est plus vite atteinte pour une demi-période que pour l'autre, ce qui engendre un décalage temporel dans la tension mesurée par la bobine.[22]

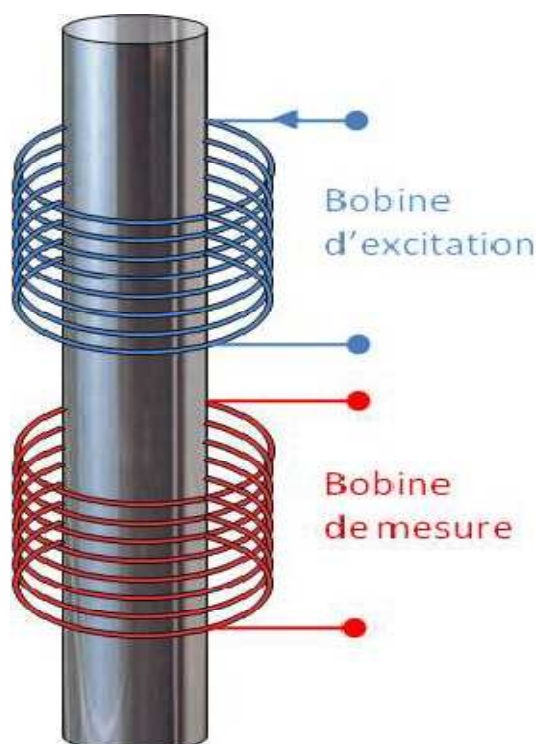


Figure I.15 : Schéma d'un fluxgate constitué par un noyau ferromagnétique et deux bobines en bleu la bobine d'excitation et en rouge la bobine de mesure

I.8.7.6.2. Les capteurs à effet Hall

Le principe de fonctionnement de ces capteurs magnétiques est basé sur l'effet Hall. Il est plus important dans des matériaux semi-conducteurs mais afin d'illustrer le principe, on considère des matériaux conducteurs par simplicité. Quand une piste conductrice (l'épaisseur est généralement comprise entre 0.4 et 100 μm) est parcourue par un courant continu I appliqué selon l'axe y , voir figure et soumise à une induction magnétique \mathbf{B} , appliqué dans cet exemple selon l'axe z , il apparaît une différence de potentiel V_H dans la direction perpendiculaire à celle de l'induction et à celle du courant, c'est à dire l'axe x . Cette tension, dite de Hall, est due à la force de Lorentz et est donnée [22]

I.8.7.6.3. Les magnétorésistances

La magnétorésistance (MR) est la propriété liée à certains matériaux de voir leur résistance varier en présence d'un champ magnétique. Tous les conducteurs présentent un effet magnétorésistif qui est typiquement trop faible pour pouvoir les employer comme capteur de champ. Toutefois, on peut trouver des matériaux magnétiques qui présentent un effet magnétorésistif suffisant, appelés magnétorésistances anisotropes (AMR), et qui sont utilisés pour réaliser des capteurs. Ainsi, les avancées récentes des technologies et matériaux permettent de réaliser des dispositifs composés de couches minces dotées d'un fort effet magnétorésistif, telles que les magnétorésistances géantes (GMR) et tunnel (TMR). [22]

I.8.7.6.4. Les capteurs inductifs

Les capteurs plus couramment utilisés en contrôle non destructif sont les bobines « filaires ». Leur conception est la plus simple à réaliser et la moins coûteuse, caractéristiques qui les rendent très intéressantes pour des applications industrielles. Ils sont constitués d'un fil de cuivre enroulé autour d'un noyau qui peut être composé d'air ou de ferrite. L'intérêt de la ferrite est sa faculté à canaliser le champ et l'amplifier, des exemples de capteur inductif sont présentés. Le volume de ces capteurs varie selon l'application demandée.

Le fonctionnement de ces capteurs est basé sur le phénomène d'induction électromagnétique : une force électromotrice e est induite dans un circuit fermé soumis à un flux magnétique. [12,13,14]

I.8.7.6.4.1 Différents types des capteurs inductifs

Il existe un grand nombre de façons pour mettre en œuvre le bobinage afin de réaliser un contrôle par courants de Foucault. Nous indiquons ici les configurations de base des capteurs

I.8.7.6.4.2. Capteur absolu

C'est un capteur à double fonction, il est constitué d'une seule bobine émettrice-réceptrice qui crée le flux alternatif grâce au courant qui la parcourt et subit des variations d'impédance que l'on peut détecter en mesurant très finement son signal de sortie. [12,13,14]

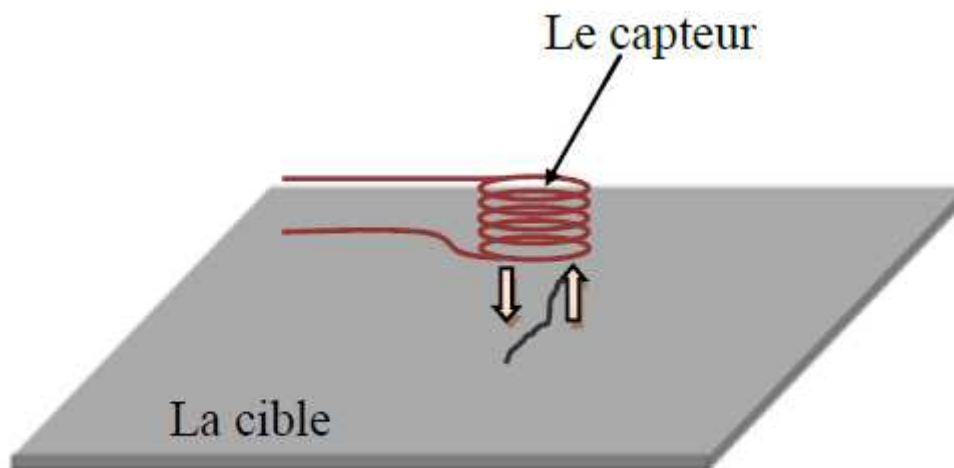


Figure I.12 : Le capteur absolu

I.8.7.6.4.3. Capteur double

C'est un capteur à fonctions séparées, il est constitué de deux bobines une excitatrice pour créer le flux et l'autre réceptrice pour le recueillir. Ces deux bobines sont moulées dans un même boîtier pour éviter toute modification fortuite de leur mutuelle. Ce type de capteur est très utilisé pour les contrôles à basses fréquences ($f < 1\text{kHz}$) [12,13,14]. Comme dans le cas du capteur absolu, la figure illustre les signaux de sortie d'un capteur double

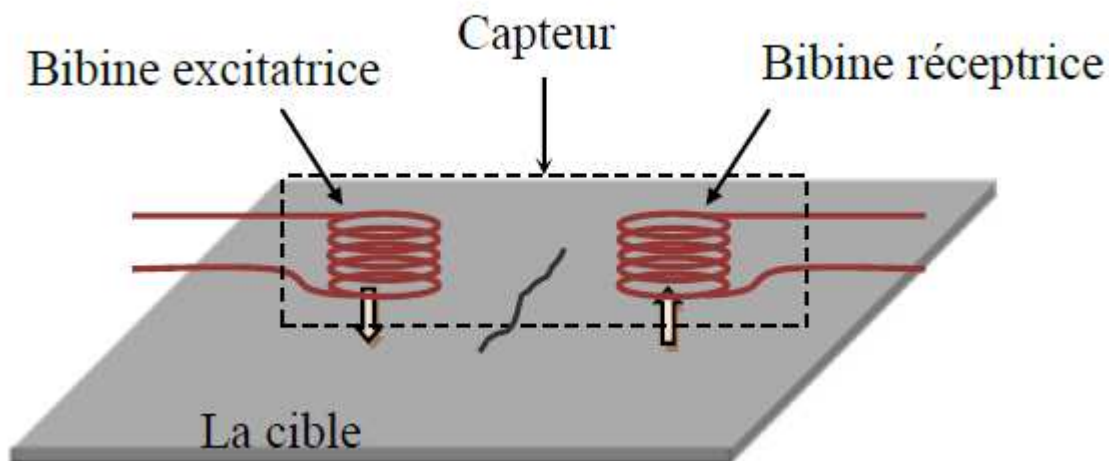


Figure I.13 : Le capteur double

I.8.7.6.4.4. Capteur différentiel

Un capteur en mode différentiel est une sonde destinée à accéder aux seules variations locales des caractéristiques du produit examiné, par différence permanente de deux mesures simultanées en deux zones voisines. Le capteur peut être constitué de deux enroulements identiques dont on mesure l'écart de l'impédance (figure I.14). Cette sonde est particulièrement utilisée pour détecter des discontinuités lors de son déplacement le long

d'une pièce en s'affranchissant des perturbations induites telle que les variations de la distance sonde-pièce (lift-off) [12,13,14].

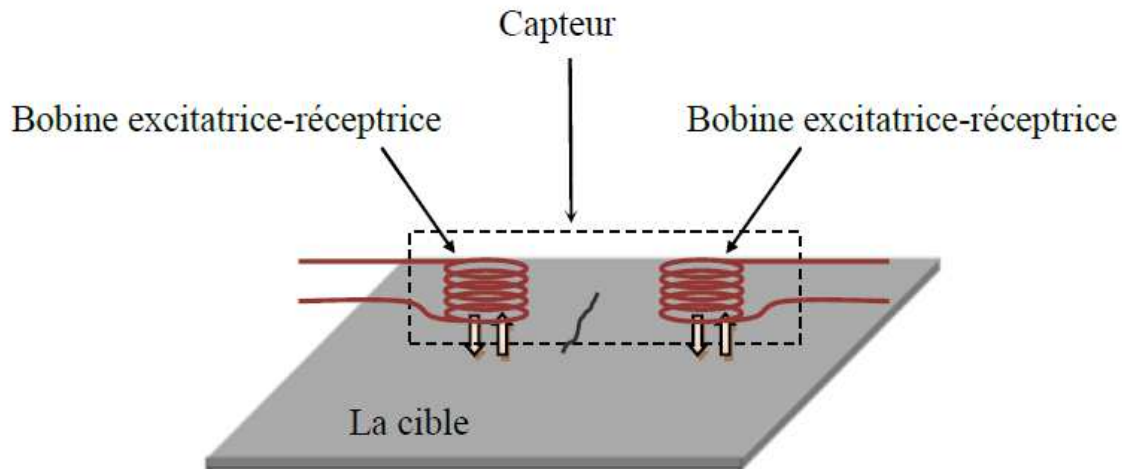


Figure I.14 : Le capteur différentiel

I.8.7.7. Effet de peau :

L'effet de peau ou effet pelliculaire ou plus rarement (effet kelvin) est un phénomène électromagnétique qui fait que, à fréquence élevée, le courant a tendance à circuler en surface du conducteur.

Ce phénomène d'origine électromagnétique existe pour tous les conducteurs parcourus par des courants alternatifs. Il provoque la décroissance de la densité de courant à mesure que l'on s'éloigne de la périphérie du conducteur. Cet effet est décrit par la profondeur de pénétration conventionnelle δ en (mm). [1,2]

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho}{\omega \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma \cdot \mu \cdot \pi \cdot f}}$$

δ : épaisseur de peau [m].

σ : conductivité électrique [s/m].

μ : perméabilité magnétique [h/m].

f : fréquence du courant [Hz].

ω : pulsation [rd/s].

ρ : résistivité [$\Omega \cdot m$].

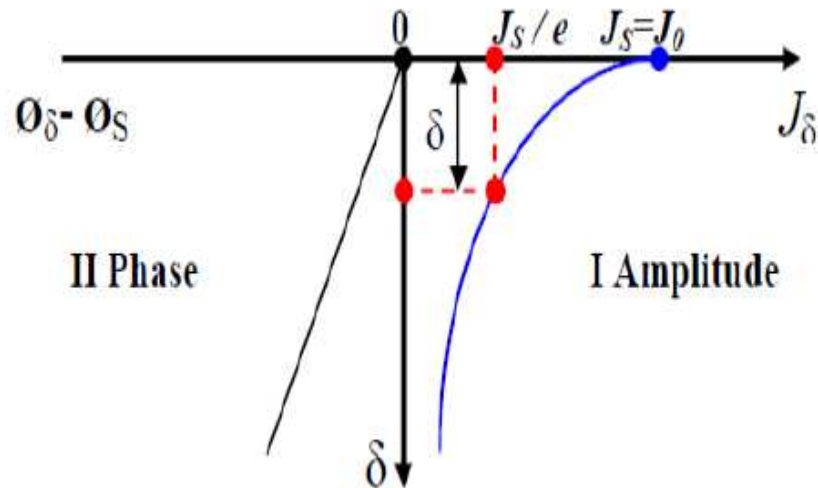


Figure I.16 Répartition des courants de Foucault dans une pièce en fonction de la profondeur.

I.8.7.8. Avantages et limites de la technique CF

La méthode permet de rechercher des défauts situés à des profondeurs variables (de zéro à quelques millimètres) et de connaître la taille de la fissure ou de la piqûre. Toutefois, elle ne présente pas une grande sensibilité. Pour donner un ordre d'idées, les courants de Foucault détectent des fissures d'une longueur minimale de 0,2 mm et d'une largeur de 1 mm. La technique par courants de Foucault offre les possibilités suivantes :

- ♣ Inspection rapide, simple et fiable pour la détection de défauts de surface et de faible profondeur sur des matériaux conducteurs.
- ♣ Peut être utilisée pour mesurer la conductivité électrique de matériaux ;
- ♣ Mesure de revêtement non conducteur.
- ♣ Inspection de trous avec l'utilisation de scanners tournant à grande vitesse et de sondes de surface.

Le CND par courants de Foucault ne s'applique que sur les pièces réalisées en matériaux conducteurs en électricité [12,13]

I.9. Conclusion

Les techniques de contrôle non destructif font partie des outils incontournables de l'évaluation de la qualité des produits. Dans ce chapitre nous avons passé en revue certaines méthodes de contrôle non destructif et présenté quelques procédures d'emploi et certains résultats d'application de quelques unes, après avoir rappelé la définition et le but de ce type

de contrôle (CND). L'une des techniques les plus utilisées est celle des courants de Foucault, l'intérêt que nous avons porté à celle-ci dans ce travail est le plus important à cause de son appartenance à notre domaine de formation modélisation des systèmes électromagnétiques.

Des progrès technologiques importants ont été réalisés ces dernières années dans le domaine de technologie de capteurs. Un tel progrès fait de cette technologie un outil très puissant pour un grand nombre d'applications industrielles.

Chapitre II : Les équations de l'électromagnétisme

II.1. Introduction

En 1864 James Maxwell unifie les théories antérieures, comme l'électrostatique, l'électrocinétique ou la magnétostatique. Cette théorie unifiée explique entre autres le comportement des charges et courants électriques, des aimants, ou des ondes électromagnétiques, telles la lumière ou les ondes radio. L'électromagnétisme est né.

Les phénomènes électromagnétiques (électriques et magnétiques) se présentent dans plusieurs dispositifs tels que les machines électriques, les appareils de coupure, les appareillages à haute tension, etc. Ces phénomènes sont produits par des charges électriques, des courants et des aimants permanents. L'électromagnétisme considère les phénomènes électriques et magnétiques à un niveau macroscopique.

L'effet d'induction par courants de Foucault présente le phénomène électromagnétique prépondérant dans le contrôle non destructif par courants de Foucault qui est généré par un couplage des champs magnétiques et électriques dans un modèle magnétodynamique. La description de ce phénomène à l'intérieur d'une théorie unifiée de l'interaction électromagnétique fût l'œuvre de Maxwell en 1864. Grâce au remarquable travail de ce théoricien, on a pu décrire le comportement électromagnétique à l'aide des quatre équations fondamentales.[25]

II.2. Lois classiques de l'électromagnétisme

II.2.1. Loi d'Ampère

André Marie Ampère (1775-1836), physicien Français, est impressionné par les travaux de Hans Christian Oersted. Il reprend en 1826 l'étude de l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée et en quelques jours, il découvre la loi expérimentale qui porte son nom [].

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_{int} \quad (\text{II.1})$$

n : Nombres de spires.

l : Longueur du circuit magnétique

\vec{B} : Induction magnétique de chaque spire.

I : Courant électrique.

La circulation de \vec{B} sur une courbe fermée est donc directement liée au courant qui traverse la surface délimitée par cette courbe.

Le choix du sens de la circulation sur le contour d'Ampère choisi, est purement arbitraire. Une fois ce choix fait, la règle de l'observateur d'Ampère permet d'attribuer un signe aux courants qui traversent la surface ainsi délimitée [7].

II.2.2. Loi de Lenz

On peut induire une f.e.m dans un circuit filiforme (C) fermé en faisant varier le flux magnétique à travers le circuit : c'est le phénomène d'induction électromagnétique. Les cas de variations du flux du champ magnétique à travers un circuit sont :

- ✓ Le cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent.
- ✓ Le cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique variable.
- ✓ le cas général d'un circuit mobile dans un champ magnétique variable.

Pour trouver de manière qualitative le sens du courant induit, on utilise la loi de Lenz qui stipule que : Le sens du courant induit est tel que le champ magnétique qu'il crée s'oppose à la variation de flux qui lui a donné naissance. Puisque une f.e.m apparaît dans le circuit (C) et y fait circuler un courant ceci implique l'existence d'un champ électromoteur agissant sur les porteurs de charge du circuit (C). Ce champ est appelé champ électrique induit.[7]

II.2.3. Loi de Faraday

Durant la décennie 1830, des expériences portant sur l'induction électromagnétique ont été réalisées par Michael Faraday (1791-1867) en Angleterre et par Joseph Henry (1797-1878) aux USA. Par une pure expérience, Faraday remarque qu'à chaque fois qu'il y a variation de flux magnétique ou variation du champ d'induction lui-même, un courant est alors mesuré par le galvanomètre. Ce courant est dit courant induit. En effet, cette loi relie la force électromotrice induite (e) à la variation de flux magnétique (Φ) qui l'engendre.

Les phénomènes d'inductions prennent naissance dans un circuit électrique traversé par des flux Φ variables dans le temps : une variation temporelle de Φ fait apparaître dans le circuit une f.e.m. e donnée par la loi de Faraday.

La f.e.m. induite dans un circuit fermé est égal à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers ce circuit :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Cette relation (loi fondamentale de l'électromagnétisme) est valable quelque que soit la cause de la variation du flux que ce soit un circuit fixe dans un champ variable, un circuit mobile dans un champ permanent, un champ dû à des courants ou à des aimants, ou qu'il y ait superposition de tous ces aspects.[7]

II.2.4. Loi de Biot et Savart

Savart plus compliquée, mais plus générale. Jean Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841) formulent en 1820 la loi expérimentale qui porte leurs noms. En un point p de l'espace, l'élément de conducteur dl , parcouru par un courant I génère un champ d'induction magnétique élémentaire dB dans le vide. Cette induction est donnée par :[1]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_u}{r^2}$$

II.2.5. Equations de Maxwell

L'étude des phénomènes électromagnétiques sont basée sur la théorie des équations de maxwell qui est donnée par un système d'équation aux dérivées partielles sous la forme suivante [2] :

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{Théorème de Gausse (II.4)}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Loi de Faraday (II.5)}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{Loi de conservation de flux (II.6)}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Équation d'Ampère Maxwell(II.7)}$$

\vec{H} : Champ magnétique (A/m).

\vec{B} : L'induction magnétique (T).

\vec{E} : Le champ électrique (V/m).

\vec{D} : L'induction électrique (C/m²).

\vec{J} : La densité de courant d'induction (A/m²)

ρ : La densité volumique de charge(C/m²).

- Les relations (1) et (2) expriment le couplage entre les grandeurs électriques et magnétiques.
- Les relations (3) et (4) représentent la conservation des flux.

II.2.6. Equation de la conservation de la charge

A partir des équations (1) et (4), on obtient la conservation de la charge électrique donnée par :[2]

$$\text{div } J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(II.8)}$$

ρ : La densité volumique de la charge électrique [C/m³].

II.2.7. Lois de comportement des milieux

Les équations de Maxwell sont générales et s'appliquent à tous les milieux. Pour prévoir le comportement des phénomènes électromagnétiques, il faut ajouter à ces équations des relations particulières aux milieux considérés : les relations de constitution. Ces relations se formulent de la façon suivante : [2]

Les champs vectoriels précédemment ($\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}$) sont reliées entre eux par les lois de comportement qui expriment les lois de comportement :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \text{ Avec : } \mu = \mu_0 \mu_r \text{ (II.9)}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \text{ Avec : } \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \text{ (II.10)}$$

Avec :

μ : La perméabilité magnétique (H/m).

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$: Perméabilité magnétique du vide [H/m].

ε : La permittivité électrique (F/m).

$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$: Permittivité électrique du vide [F/m].

σ : La conductivité électrique ($\Omega^{-1} m^{-1}$).

ε_r : Permittivité relative du milieu considéré.

Les valeurs μ, ε et σ sont des tenseur et elles peuvent varier en fonction de la température, de la saturation, etc...

➤ La loi d'Ohm

Elle exprime la relation liant la densité du courant \vec{J} au champ électrique \vec{E} à travers la conductivité électrique σ , elle est donnée par [12]:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad \text{(II.11)}$$

σ : Conductivité électrique [$(\Omega \cdot m)^{-1}$]

\vec{J} : La densité de courant [A/m^2].

► Pour un milieu immobile :

$$\vec{J}_i = \sigma_i \vec{E}_i \text{ (II.12)}$$

\vec{J}_i : La densité de courant du milieu i [A/m^2].

\vec{E} : Le champ électrique induit [V/m].

► **Pour un milieu en mouvement**

$$\vec{j}_i = \sigma i \vec{E}_i + \sigma(v \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.13})$$

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{II.14})$$

\vec{E}' : Le champ électromoteur.

\vec{v} : La vitesse de déplacement du milieu en mouvement [m/s].

\vec{B} : L'induction magnétique [T].

► **Du milieu en générale :**

$$\vec{j}_i = \sigma i \vec{E}_i + \sigma(v \wedge \vec{B}) + JMij \quad (\text{II.15})$$

II.2.8. Relations de passages

A l'interface entre deux milieux différents respectivement (1) et (2), les champs de vecteurs doivent vérifier certaines conditions dites relations de passages. Elles s'énoncent comme suit [13] [14] :

- **Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique**

$$(\vec{D}_{n1} - \vec{D}_{n2}) \cdot \vec{n} = \sigma_s \quad (\text{II.16})$$

\vec{D}_{n1} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 1.

\vec{D}_{n2} : La composante normale de l'induction électrique dans le milieu 2.

σ_s : La densité de charge électrique portée par la surface de séparation.

\vec{n} : Le vecteur unité suivant la normale de l'interface.

- **Conservation de la composante tangentielle du champ électrique**

$$(\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.20})$$

\vec{E}_{t1} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 1.

\vec{E}_{t2} : La composante tangentielle du champ électrique dans le milieu 2.

- **Conservation de la composante normale de l'induction magnétique**

$$(\vec{B}_{n1} - \vec{B}_{n2}) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.21})$$

\vec{B}_{n1} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 1.

\vec{B}_{n2} : La composante normale de l'induction magnétique dans le milieu 2.

- **Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique**

$$(\vec{H}_{t1} - \vec{H}_{t2}) \wedge \vec{n} = k \quad (\text{II.22})$$

\vec{H}_{t1} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 1.

\vec{H}_{t2} : La composante tangentielle du champ magnétique dans le milieu 2.

k : Densité de courant porté par la surface de séparation.

II.2.9. Conditions aux limites

➤ Condition type Dirichlet

Cette condition nous informe sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière du domaine d'étude Ω .

Elle est sous forme :

$$A = A_0 \quad (\text{II.23})$$

A : La fonction inconnue.

A_0 : Constante.

➤ Condition type Neumann

Elle est appliquée sur la frontière lorsque la valeur de la grandeur calculée n'est pas connue à la frontière du domaine d'étude.

$$\frac{\partial A}{\partial n} = A_0 \quad (\text{II.24})$$

➤ Condition mixte

C'est la combinaison des deux types précédents, elle s'exprime de la manière suivante :

$$\alpha A + \beta \frac{\partial A}{\partial n} = \gamma \quad (\text{II.25}) \text{ Avec : } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des constantes.}$$

➤ Condition de périodicité et d'anti-périodicité

Cette périodicité du champ peut être utilisée pour définir un autre type de conditions aux limites pour réduire la taille du modèle numérique. On parle alors de condition de périodicité. La condition de l'anti-périodicité est appliquée lorsque nous avons les mêmes contraintes en module mais de polarité inverse.

Elle s'exprime comme suit :

$$A|_{\Gamma} = K \cdot A|_{\Gamma+d\Gamma} \quad (\text{II.26})$$

A : Fonction inconnue.

$d\Gamma$: Période spatiale suivant le contour Γ .

Si : $K = 1$ condition périodique.

Si : $K = -1$ condition anti-périodique.

II.3. Formulation en potentiel vecteur magnétique

Bien que les équations de Maxwell permettant de modéliser le phénomène des courants de Foucault soient connues depuis longtemps, l'acquisition de cette connaissance se heurte à de nombreuses difficultés. En effet, ces courants induits sont purement tridimensionnels dans la plupart des situations de contrôle [1] ce qui demande un temps de résolution très coûteux. De plus les formulations en champs présentent un inconvénient majeur, c'est celui de la discontinuité aux interfaces et particulièrement aux coins.

Pour pallier à ces problèmes, on fait appel à une entité mathématique connue sous le nom de potentiel. Celle-ci provient de considération purement mathématique (les identités vectorielles) plutôt que physiques. Par ailleurs, si le potentiel n'a à ce jour aucun sens physique, la nature de sa variation par contre, est significative.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (\text{II.27})$$

$$\text{On a } \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \exists \vec{V} / \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \quad (\text{II.28})$$

V : potentiel scalaire électrique.

$$\text{Or } \vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \quad (\text{II.29})$$

$$\text{On pose } \vec{J}_s = -\sigma \operatorname{grad} V \quad (\text{II.30})$$

On obtient l'expression suivante :

$$\vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \quad (\text{II.31})$$

Pour un matériau conducteur, on prend considération considère l'hypothèse suivante :

$\vec{J}_c \gg \vec{J}_d$. Les courants de conduction l'emportent devant les courants de déplacements

D'où l'équation (II.7) devient :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_c \quad (\text{II.32})$$

$$\text{On sait que : } \begin{cases} \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_c \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu} = \vec{J}_s - \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{On a } \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

d'où :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{\overrightarrow{rot} \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{J}_s - \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.33})$$

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{\overrightarrow{rot} \vec{A}}{\mu} \right) + \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{II.34})$$

Avec : $\vec{J}_s = -\sigma \text{grad}V$.

Et on obtient l'équation magnétodynamique transitoire en termes de potentiel vecteur magnétique est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{rot} \left(\frac{1}{\mu} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) \right) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{J}_s \quad (\text{II.35})$$

L'équation (II.35) représente l'équation magnétodynamique transitoire en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} . Cette équation traduit les phénomènes d'effet de peau dans les conducteurs ou le régime transitoire des dispositifs électromagnétiques.

II.4. Equations des différentes régions d'un système électromagnétique

II.4.1. Equation dans l'induit [1]

Dans ce cas le courant n'est créé que par la variation temporelle du potentiel vecteur magnétique par conséquent on a :

$$\text{Avec : } \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] - j\omega\sigma A = 0 \quad (\text{II.36})$$

II.4.2. Equation dans l'inducteur

L'inducteur est caractérisé par une perméabilité égale à celle du vide. Lorsque celui-ci est alimenté par un générateur de tension, l'équation en terme de \vec{A} devient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = -\vec{J}_s \quad (\text{II.37})$$

Dans ce cas, le potentiel scalaire V doit être relié à la tension du générateur alimentant l'inducteur, le courant de celui-ci étant inconnu.

II.4.3. Equation dans le vide

Les régions non conductrices sont caractérisées par une conductivité nulle, l'équation en termes de \vec{A} est donnée par []:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] = 0 \text{ (II.38)}$$

II.5. Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre les lois classiques et les équations de base de l'électromagnétisme qui régissent les phénomènes électromagnétiques traduit par les équations de maxwell

Dans le chapitre suivant nous allons présenter les méthodes utilisés pour la résolution des problèmes électromagnétiques.

Chapitre III : Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

III.1.Introduction :

La modélisation des systèmes électromagnétiques est un outil indispensable pour l'analyse, la prédiction de comportement et l'optimisation des dispositifs; elle aide à réduire au minimum le temps et le coût de conception. Dans ce contexte, le but des outils numériques est de garantir des résultats précis de la simulation avec le moindre coût en termes de temps de calcul et de consommation d'espace mémoire. De nos jours, beaucoup d'outils de simulation basés sur les méthodes numériques de discrétisation sont disponibles. Généralement, c'est la méthode des éléments finis MEF qui est employée. Cette technique a montrée son efficacité dans plusieurs travaux de modélisation. Néanmoins, on peut trouver d'autres méthodes numériques dont l'exploitation est prometteuse, tel que les différences finies (MDF) et les intégrales de frontières (MIF).

Parmi les logiciels les plus populaires dans La modélisation des systèmes électromagnétiques nous citons: Matlab P.D.E Tool, Maxwell 2D/3D, Flux 2D/3D...[3,4] .

III.2.Méthodes de résolution

La modélisation des systèmes physiques, et dans notre cas il s'agit de systèmes électriques, peut être réalisée par trois types de méthodes différentes [1] :

- Les méthodes analytiques ;
- Méthodes semi analytiques
- Les méthodes numériques

III.2.1.Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques est un ensemble d'équations mathématiques qui déduit le comportement des phénomènes physiques.

La solution analytique des problèmes électromagnétiques de contrôle non destructif est très difficile. La raison principale est l'interaction complexe du champ électromagnétique avec des hétérogénéités existantes dans les matériaux constituant les systèmes électromagnétiques telles que les défauts. [1,2]

L'approche analytique est caractérisée par :

- La solution est générale et exacte.
- Le modèle est décrit sous forme des équations mathématiques.
- L'analyse du modèle est presque toujours faite en résolvant les équations aux dérivées partielles linéaires
- Une difficulté liée à la complexité de traitement des géométries complexe.

Parmi ces méthodes nous citons

- la méthode des séries exponentielles.
- la méthode de séparation des variables.

III.2.2.Méthodes semi analytiques

Les modèles analytiques et numériques peuvent être mixés pour former un modèle hybride (intermédiaire ou bien semi-analytique). Ce type de modèle a des performances intermédiaires en termes de temps de calcul et de précision. [1,2]

Parmi ces méthodes nous citons

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

- 1a Méthode des images électriques.
- Méthode des circuits couplés.

III.2.3.Méthodes numériques

Les méthodes numériques ont pris un essor considérable avec l'avènement des moyens Informatiques, dans les années 50. Celles-ci sont d'autant plus utilisées que les configurations à traiter sont complexes. L'utilisation de ces méthodes de discrétisation pour la résolution des équations aux dérivées partielles dont le domaines d'études, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébrique dont la solution donne les valeurs et la distribution des grandeurs recherchées. [1]

Parmi ces méthodes nous citerons la méthode des différences finies, la méthode d'intégrales de frontières et la méthode des éléments finis qui feront l'objet de développement dans ce qui suit

III.2.3.1. Méthode des différences finies (MDF)

La méthode des différences finies est la plus simple et historiquement la première, cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnu aux points de calcul (nœuds) du domaine de résolution [2].

La méthode des différences finies a été la première méthode numérique utilisée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles de types « Laplace » ou « Poisson ». Elle a été rendu populaire grâce à l'invention du calculateur numérique et son implémentation qui s'est fait vers 1949. Les équations aux dérivées partielles résolues sont considérées avec des conditions aux limites de types : Dirichlet, Neumann et mixte [1].

Considérons le domaine suivant :

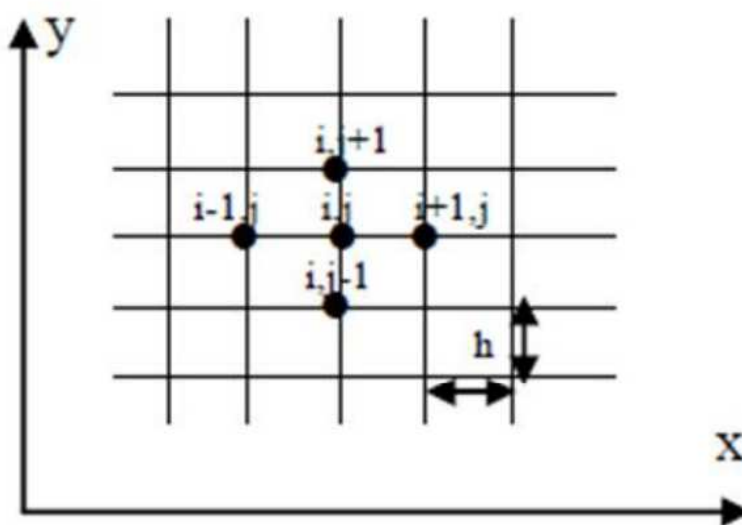


Figure III.1 : Représentation du maillage type différences finies.

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Si on applique un développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{III.1})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \quad (\text{III.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{III.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \quad (\text{III.4})$$

Ce qui permet de déduire l'expression du Laplacien :

$$\begin{aligned} (\Delta A)_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \\ (\Delta A)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

L'équation (III.5) est appelée la formule à cinq points. Elle s'écrit pour tous les points du domaine de résolution sous la forme d'un système matriciel donné sous la forme suivante:

$$[M][A] = [S] \quad (\text{III.6})$$

Avec :

[M] : Matrice inversible.

[A] : Vecteur des inconnus.

[S] : Vecteur source.

La méthode des différences finies est relativement simple de mise en œuvre, mais présente l'inconvénient d'avoir une faible qualité d'approximation des variables et l'incapacité de modéliser les géométries complexes []. Par ailleurs, elle exige un schéma de maillage très fin, qui peut ainsi se traduire par un coût de calcul prohibitif.

III.2.3.2. Méthode des intégrales de frontières(MIF)

La méthode des intégrales de frontières a été utilisée dans le domaine numérique pour la résolution des équations de Maxwell par C.W Trowbridge et son groupe. Elle permet la détermination des grandeurs inconnues sur la frontière du domaine et ne s'applique que dans

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

le cas où le milieu considéré est linéaire. [1]

La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. Cette méthode utilise le théorème d'Ostrogradski-Green.

Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude. Elle est utilisée en magnétostatique ou bien elle est couplée avec la MEF pour calculer des champs électromagnétiques dans les milieux linéaires et non conducteurs. Cependant, la MIF a la difficulté de prendre en considération la saturation, alors elle nécessite un espace mémoire et un temps de calcul importants, car elle conduit à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls) [2].

Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte des domaines infinis, une taille de systèmes algébriques réduite dans ce cas précis et donc un temps de calcul minime. Comme elle présente l'inconvénient de ne résoudre que les problèmes linéaires et une imprécision due à la considération des courants surfaciques.

III.2.3.3. Méthode des éléments finis (MEF)

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Elle consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts, d'une part le domaine est subdivisé en sous domaines de géométries simples appelés éléments, et d'autre part les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel ou par l'utilisation de la méthode des résidus pondérés. [1,2]

Elle permet aussi de traiter des problèmes représentés par des fonctionnels d'énergie. Cette méthode a été utilisée initialement pour l'analyse des structures (mécanique, génie civil).

Elle fut introduite pour la première fois en électromagnétisme par P.SILVESTER et M.K.V CHARI vers 1970. Son champ d'application couvre les domaines suivants :

- Contraintes et déformations.
- Mécanique des fluides.
- Problèmes thermiques.
- Electromagnétisme.

Plus récemment les problèmes couplés :

- Magnéto-thérmiq.ue.
- Magnéto-mécanique.

C'est une méthode de portée général étant donné qu'elle permet la modélisation de tout système physique régit par les équations différentielles aux dérivées partielles ou par des fonctionnelles d'énergies. Elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

complexes. La solution finale s'obtient en résolvant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine.

Dans la plupart des cas, cette méthode s'intègre à des logiciels C.A.O (conception assistée par ordinateur). Ce qui constitue un avantage de taille pour le concepteur appelé à concevoir les systèmes physiques désirés.

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur une formulation intégrale du problème à équations aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites ou d'une fonctionnelle d'énergie du système, elle peut être de deux types :

- Formulation variationnelle.
- Résidus pondérés.

III.2.3.3.1. Formulation éléments finis

Nous définissons la méthode des éléments finis comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin : elle remplace la forme intégrale globale par la somme de formes intégrales élémentaires puis discrétiser celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis [1,2].

III.2.3.3.1.1 Formulation variationnelle

En générale la formulation variationnelle est construite à partir du principe de l'action hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par.

$$F(A) = \int_{\Omega} L(x_i, q_i, q'_{ik}) d\Omega \quad (III.7)$$

L : Fonction de Lagrange (Lagrangien) qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

Ω : Domaine de résolution.

Avec :

$$L(x_i, q_i, q'_{ik}) = W_c - W_p \quad (III.8)$$

W_c : Energie cinétique.

W_p : Energie potentielle.

x_i : Variables.

q_i : Variables d'état.

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

$q'_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{ik}}$: Dérivées des fonctions d'état.

➤ Cas d'un phénomène magnétique

Dans ce cas, la fonction de Lagrange est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B \nu B dB - JA \quad (\text{III.9})$$

Avec :

A : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

J : Densité de courant [A/m^2].

$\nu = \frac{1}{\mu}$: Réductivité magnétique [H/m]⁻¹.

B : Induction magnétique [T].

L'expression de la fonctionnelle d'énergie est donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu B dB - JA \right] d\Omega \quad (\text{III.10})$$

La résolution du problème variationnel défini par la fonctionnelle d'énergie **F(A)** revient à minimiser cette fonctionnelle ; la minimisation est effectuée en utilisant le principe de Rayleigh-Ritz qui s'énonce comme suit [6]: « la dérivée de la fonctionnelle d'énergie **F(A)** par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle ».

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{III.11})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_3} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (\text{III.12})$$

Avec :

n : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : L'inconnu aux nœuds *i* du domaine.

III.2.3.3.1.2. Formulation projective (résidus pondérés) :

Cette formulation consiste à projeter le résidu des équations différentielles du modèle à traiter, sur un ensemble de fonction indépendantes appelées fonctions de pondérations. Si on

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

prend comme fonctions de pondération les fonctions de forme, on tombe sur la méthode de Petrov-Galerkine qui conduit à un système matriciel symétrique. [1,2]

Pour avoir la solution recherchée, il faut que l'intégrale du résidu de l'équation différentielle projetée sur la base des fonctions tests soit nulle. Sachant que le domaine de résolution est subdivisé en triangle, la formulation intégrale sur un domaine s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}_i \cdot \phi_i \cdot d\Omega = 0$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}(\mathbf{A}) - \mathbf{f}_v$$

Avec :

\mathbf{R} : Représente le résidu de l'approximation.

$\mathbf{L}(\mathbf{A})$: Opérateur différentiel.

\mathbf{f}_v : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

\mathbf{A} : L'inconnue du problème.

ϕ_i : Fonction de projection.

Fonction d'approximations nodales :

La variable du potentiel vecteur magnétique dans un point du domaine (Ω) de résolution est donnée par :

$$\mathbf{A}(x,y) = A_i N_i + A_j N_j + A_k N_k$$

La fonction d'approximation N_n ($n=i, j, k$), pour les éléments triangulaire :

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e}$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i$$

A_n : Inconnue au nœud (i, j, k).

Δ_e : L'air d'un élément triangulaire.

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Dans le cas global contenant n nœuds, l'inconnue s'exprime alors comme suit :

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j \quad (\text{III.19})$$

Avec : n est le nombre de nœuds.

\mathbf{A}_j : Valeur de l'inconnue au nœud j .

α_j : Fonction d'interpolation au nœud j .

III.2.3.4. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

III.2.3.4.1. Equation magnétostatique

➤ Cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = J_s \quad (\text{III.20})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.20) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_s \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{III.21})$$

L'équation (III.21) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(- \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.22})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (III.22) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \right. & (\text{III.23}) \\ & \left. = - \iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n,x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n,y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \right. \end{aligned} \right.$$

Où $\cos(n,x)$ et $\cos(n,y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (III.23) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{III.24})$$

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \mathbf{n}} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{III.25})$$

L'expression (III.24) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.26})$$

L'équation (III.26) en écriture condensée devient ;

$$\iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \mathbf{A}_z} dx dy \quad (\text{III.27})$$

Sachant que :

$$\mathbf{A}_z = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j$$

Et en remplaçant dans (III.27), on aboutira à :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot \mathbf{A}_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy \quad (\text{III.28})$$

Avec :

i, j : Entiers naturels variant de 1 à n .

n : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de (III.28) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{K}] \quad (\text{III.29})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_z \cdot dx dy$$

$[\mathbf{A}]$: Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

➤ Cas axisymétrique

Dans ce cas, l'équation magnétostatique est donnée par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{III.30})$$

En considérant comme inconnue le potentiel vecteur modifié donné par $\mathbf{A} = r \cdot \mathbf{A}_\varphi$ l'équation (III.30) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{III.31})$$

La formulation intégrale de l'expression (III.31) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - J_\varphi \right) dr dz = 0 \quad (\text{III.32})$$

L'équation (III.32) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \quad (\text{III.33})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (III.33) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) \cdot dr dz = & (\text{III.34}) \\ & = - \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr dz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) \cdot d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (III.33) dans (III.34), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A \cdot dr dz - \int_{\Gamma} \nu \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \quad (\text{III.35})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \nu \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0$$

L'équation (III.35) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A \cdot dr dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot dr dz \quad (\text{III.36})$$

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Sachant que : $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j$

Et en remplaçant dans (III.36), on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{r} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} \, d\mathbf{r} dz \right] \cdot \mathbf{A}_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} \cdot d\mathbf{r} dz \quad (\text{III.37})$$

L'écriture de (III.35) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{K}] \quad (\text{III.38})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{r} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} \, d\mathbf{r} dz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} \cdot d\mathbf{r} dz$$

III.2.3.4.2. Equation magnétodynamique

➤ Cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas où elle comporte une source est donnée par :

$$\overline{\nabla} \wedge (\mathbf{v} \overline{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{A}}) + \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{J}}_s \quad (\text{III.39})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (III.39) s'écrit :

$$\overline{\nabla} \wedge (\mathbf{v} \overline{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{A}}) + j\sigma\omega \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{J}}_s \quad (\text{III.40})$$

Après transformation, l'équation (III.40) devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z = J_s \quad (\text{III.41})$$

La formulation intégrale de l'équation (III.41) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z - J_s \right) \cdot dxdy = 0 \quad (\text{III.42})$$

L'équation (III.42) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dxdy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dxdy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dxdy \quad (\text{III.43})$$

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dxdy = & (III.44) \\ & = - \iint_{\Omega} \mathbf{v} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dxdy + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, y) \right) \cdot d\Gamma = \\ & = \iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dxdy + \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (III.43) dans (III.44), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dxdy - \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dxdy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dxdy \quad (III.45)$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma = 0$$

L'expression (III.44) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dxdy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dxdy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dxdy \quad (III.46)$$

Sachant que : $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$

Et en remplaçant dans (III.46), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dxdy \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dxdy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dxdy \quad (III.47)$$

L'écriture de (III.47) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (III.48)$$

Avec : $M_{ij} = \iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dxdy$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dxdy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dxdy$$

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

➤ Cas axisymétrique

En considérant comme précédemment le régime harmonique, la formulation intégrale dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$- \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot drdz + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A \cdot \frac{drdz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (III.49)$$

L'application du théorème de Green nous permettra d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot drdz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A \cdot \frac{drdz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (III.50)$$

Dans le cas de conditions aux limites Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} drdz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{drdz}{r} \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (III.51)$$

L'écriture de (III.51) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel en grandeurs complexes suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (III.52)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} drdz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{drdz}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

III.2.4. La méthode des éléments finis stochastique (MEFS)

La méthode des éléments finis stochastique est applicable à des systèmes électromagnétiques dont les propriétés physiques du matériau constituant le dispositif seront considérées aléatoires. Entre autre, la perméabilité magnétique, la conductivité électrique, les deux en même temps, ainsi que la génération de géométries aléatoires et ce, en considérant les dimensions du défaut aléatoires. [6]

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Depuis une vingtaine d'année, le couplage éléments éléments finis-probabilités s'est développé sous deux aspects :

➤ **Le calcul des moments statistiques**

Par lequel on s'intéresse essentiellement à la variabilité (écart-type...) de la réponse autour de sa moyenne.

➤ **Les méthodes de fiabilité**

Par lesquelles on cherche à calculer une probabilité de défaillance associée à un critère, représenté par une fonction d'état limite dont les arguments dépendent du résultat d'un calcul aux éléments finis.

Parmi les méthodes stochastiques on peut citer plusieurs, parmi celles-ci

III.2.4.1. Les méthode de Monté Carlo

Le terme méthode de Monte-Carlo, ou méthode Monte-Carlo, désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires. Le nom de ces méthodes, qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo, a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis, et publié pour la première fois en 1949 dans un article coécrit avec Stanislaw Ulam. [19]

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces et des volumes). Elles sont également couramment utilisées en physique des particules, où des simulations probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur. La comparaison des données mesurées à ces simulations peut permettre de mettre en évidence des caractéristiques inattendues, par exemple de nouvelles particules.

La méthode de simulation de Monte-Carlo permet aussi d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet, tels que le chiffre d'affaires ou la marge, et à leur affecter une distribution de probabilités. Pour chacun de ces facteurs, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de trouver la probabilité d'occurrence de chacun des résultats.

Le véritable développement des méthodes de Monte-Carlo s'est effectué sous l'impulsion de John von Neumann et Stanislas Ulam notamment, lors de la Seconde Guerre mondiale et des recherches sur la fabrication de la bombe atomique. Notamment, ils ont utilisé ces méthodes probabilistes pour résoudre des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la Monte-Carlo N-Particle transport (MCNP). [19]

Chapitre III Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Parmi ces méthodes nous citerons

- Méthode Monté Carlo standard.
- Monté Carlo conditionnel.
- Méthode de simulations de sous ensemble.
- Méthodes combinées.

III.2.4.1.1. Méthode Monté Carlo standard

L'idée de la méthode Monté Carlo standard est de produire n.i.i.d vecteurs au hasard $(x_i)_{i=1, \dots, n}$. Avec la densité de probabilité f et estimer I par le moyen empirique.

I^{MC} : estimateur impartial.

$$\hat{I}^{MC} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X_i).$$

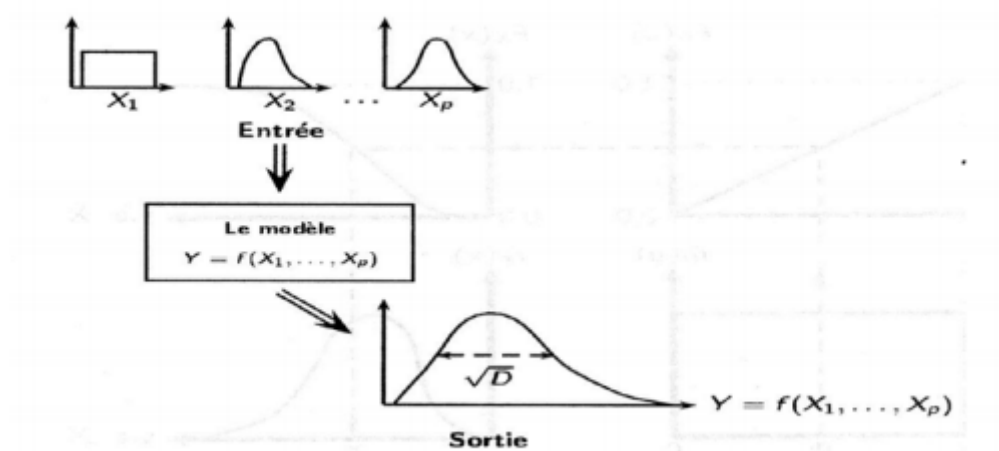
Cette méthode est fiable et contrôlable grâce aux théorèmes probabilités qui donnent une mesure statistique exacte de l'erreur d'estimation.[17,18]

III.2.4.1.2. La méthode de simulation de Monté Carlo

La simulation de Monté Carlo, basée sur la loi de grands nombres, permet d'aborder les deux classes de problèmes mais à des coups de calcul souvent prohibitifs, ce qui n'est pas envisageable dans le milieu industriel. C'est pourquoi les méthodes d'approximation ont été développées.[6,19]

III.2.4.1.3. Simulation par Monté Carlo

La simulation de Monté Carlo est représentée par les différentes phases décrites ci-dessous :

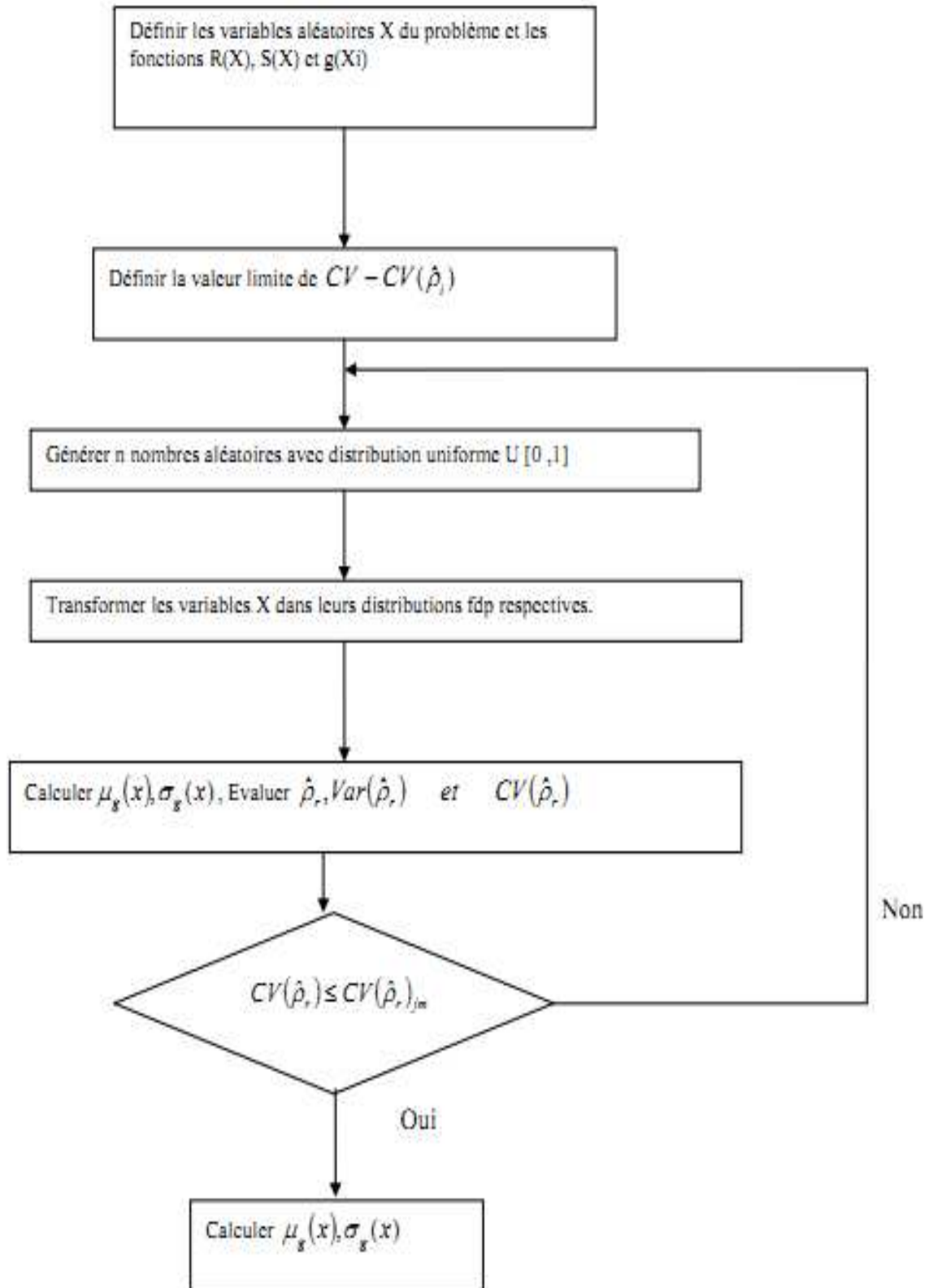


III.2.4.1.4. Technique de simulation [6]

La technique de simulation est divisée essentiellement en 6 phases qui sont :

1. Définition du problème en termes de variables aléatoires
2. Quantification des caractéristiques probabilistes de toutes les variables aléatoires
3. Génération des valeurs aléatoires de ces variables.
4. Evaluation du problème déterministe pour chaque ensemble de réalisation ou tirages de toutes les variables aléatoires.
5. Obtention de l'information probabiliste de N réalisations, c'est adire, évaluer la probabilité de faille, déterminer la moyenne et l'écart types des variables de sortie du problème.
6. Déterminer la stabilité de la simulation.

III.2.4.1.5. Organigramme de la simulation [6]



III.2.4.1.6. Les méthodes FORM/SORM

Le principe général des méthodes FORM/SORM est une approximation du domaine de défaillance par un domaine adapté et simplifié sur lequel des techniques numérique sont utilisées. Ces méthodes d'approximation permettent de diminuer les couts de calcul. Mais engendrent une perte de précision dans certain cas en comparaison de la méthode de Monté Carlo.[6,18]

III.3. Conclusion

Nous avons présenté les différentes méthodes de résolutions, analytiques, semi analytiques et numérique. La méthode des éléments finis stochastique ayant été retenue pour notre travail elle est appliquée à des problèmes ayant différents niveaux de complexité.

Chapitre IV: Applications et validations

IV.1 Introduction

Dans cette partie le logiciel MATLAB a été exploité pour l'étude et la caractérisation d'un système électromagnétique constitué d'une plaque conductrice présentant un défaut dont la propriété du matériau constitutif est la conductivité électrique, considérée comme étant variable aléatoire, et d'un capteur à courant de Foucault. Pour ce faire on a utilisé la méthode de Monté Carlo.

IV.2 Equation électromagnétique stochastique

Considérant un problème électromagnétique dont l'inconnue est représentée par le potentiel vecteur magnétique. Afin d'illustrer l'application de la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS) dans le calcul électromagnétique, nous considérons un problème magnétodynamique en coordonnées cartésiennes traduit par une équation aux dérivées partielles de la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - j\sigma\omega A_z = -J_s$$

Région de l'inducteur :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = -J_s$$

Région du défaut :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - j\sigma_1\omega A = 0$$

Plaque conductrice :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - j\sigma\omega A = 0$$

Région de l'air :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = 0$$

Avec :

$$\omega = 2\pi f$$

σ : conductivité électrique [s/m].

ν : Réductivité magnétique [h/m].

f : fréquence du courant [Hz].

ω : pulsation [rd/s].

J_s = Densité de courant source [A/m^2].

La formulation éléments finis conduit, en considérant des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, à un système matriciel de la forme :

$$([M] + j\omega \cdot [N])[A] = [F]$$

Les éléments finis de termes généraux du système matriciel (V.1.) sont définis par :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right) dx dy$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} \delta \alpha_i \alpha_j dx dy$$

$$F_i = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy$$

$$[A] = [A_1, A_2, \dots, A_n]^T$$

[A]: représente le vecteur des inconnues.

α_i : Fonction de forme au noeud i

α_j : Fonction de projection choisie identique à la fonction de forme α_i .

IV.3-Description du dispositif de contrôle non destructif

Le dispositif considéré dans ce travail pour valider le modèle électromagnétique stochastique est une plaque conductrice présentant un défaut et un capteur.

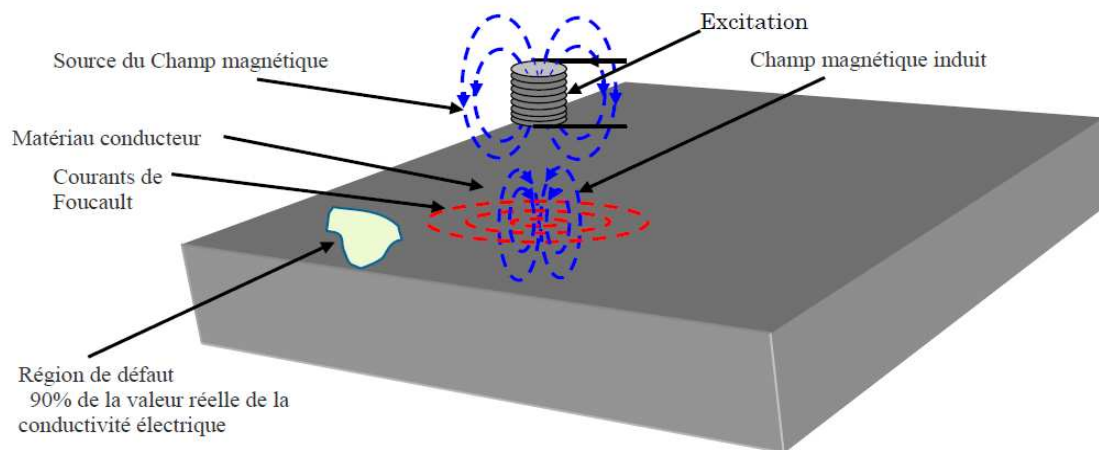
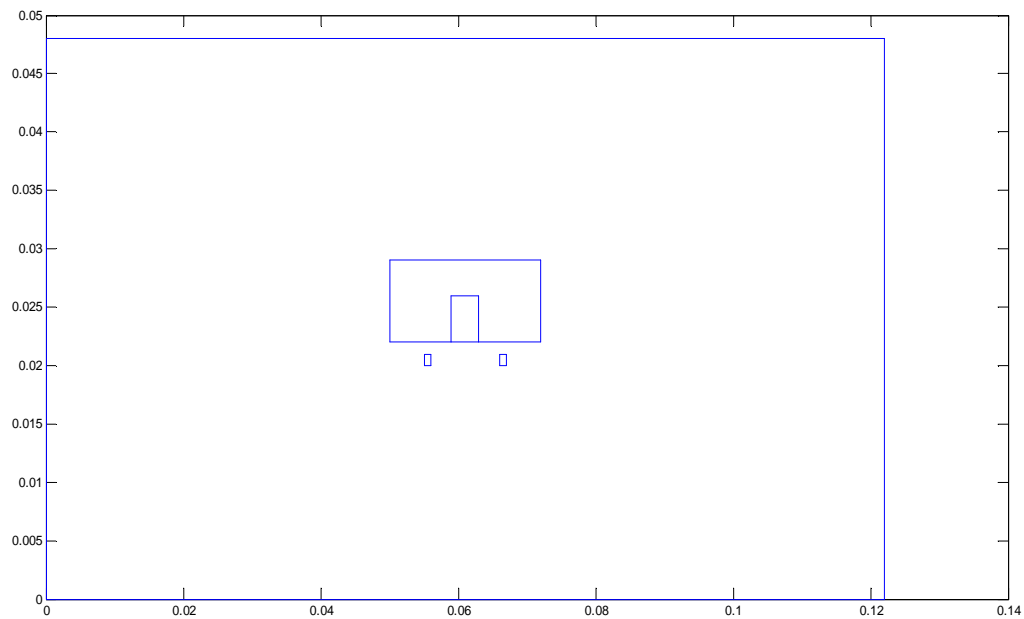


Figure IV.1 Dispositif d'étude

IV.4-géométrie du dispositif

Le domaine de résolution et les conditions aux limites sont représentés dans la figure V



FigureIV.2 Domaine de résolution et condition aux limites

IV.5. Propriétés physiques associées au problème déterministe**Inducteur :**

Conductivité électrique : $5.9 \cdot 10^7$ [s/m].

Fréquence : 150000Hz

Induit :

Conductivité électrique : $1 \cdot 10^6$ [s/m].

Conductivité électrique de la zone du défaut : $1 \cdot 10^6$ [s/m].

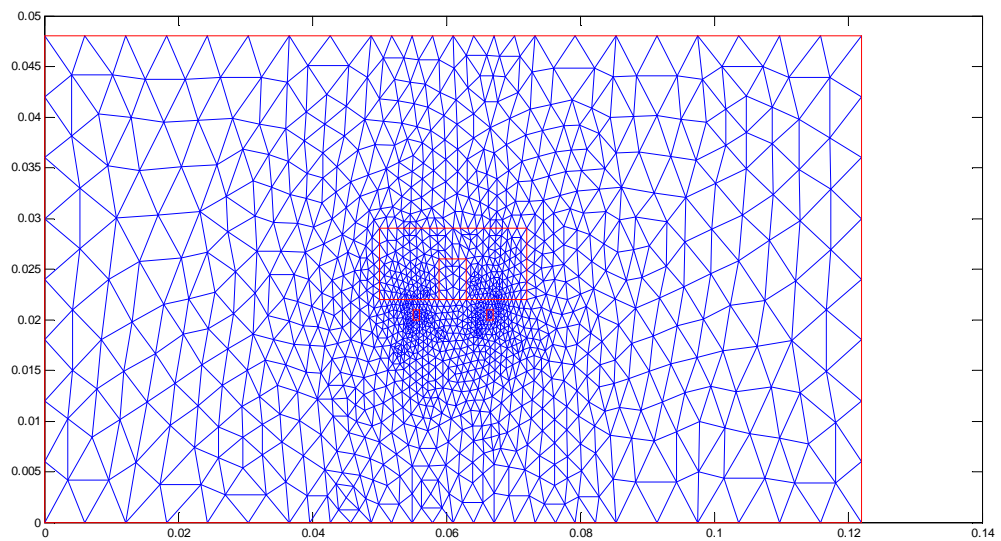
IV.6- Maillage du domaine de résolution et les conditions aux limites

Figure IV.3 Domaine du domaine.

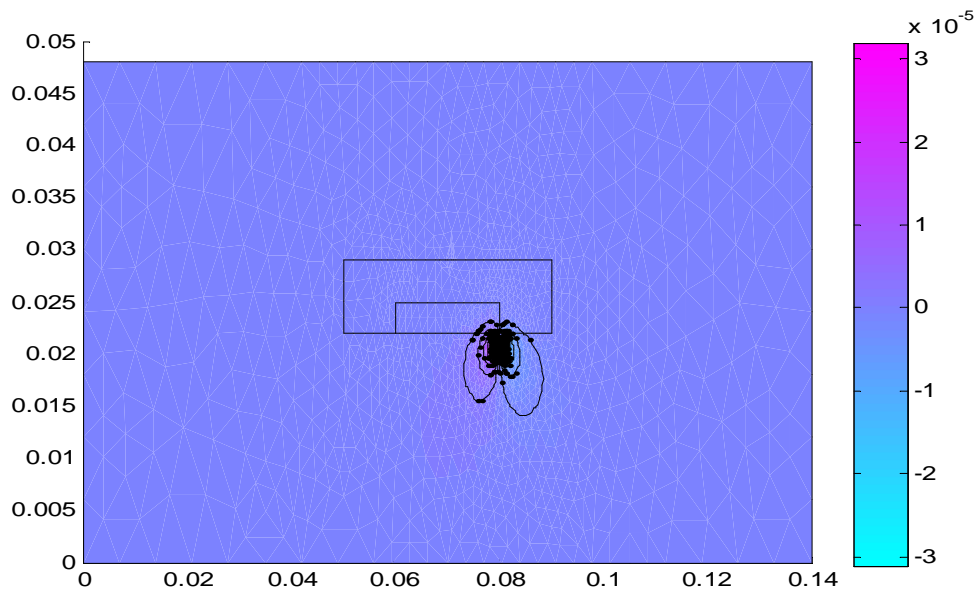


Figure IV.4 Topologie des lignes du potentiel vecteur magnétique

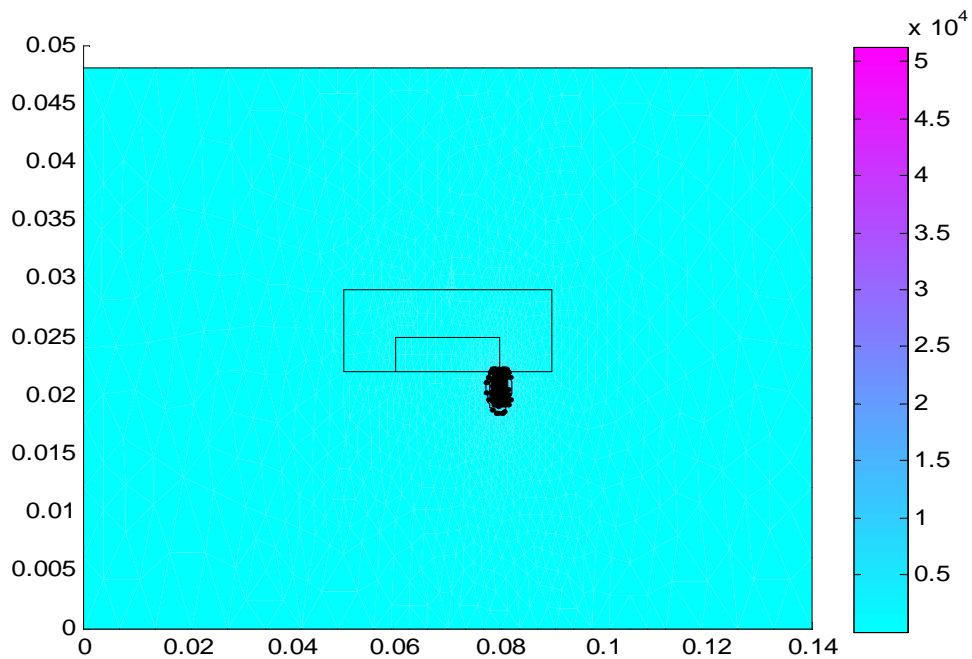


Figure IV.5 Topologie des lignes de champ magnétique

Cas constant :

Sans défaut : $\sigma = 1^e + 6$

Profondeur défaut : 0,002m

largeur default :0,009m

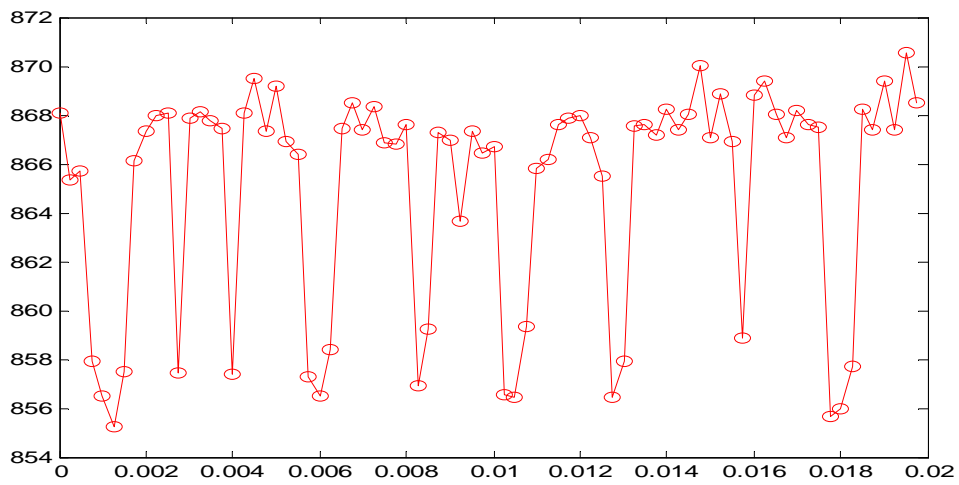


Figure IV.6représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Cas aleatoire :

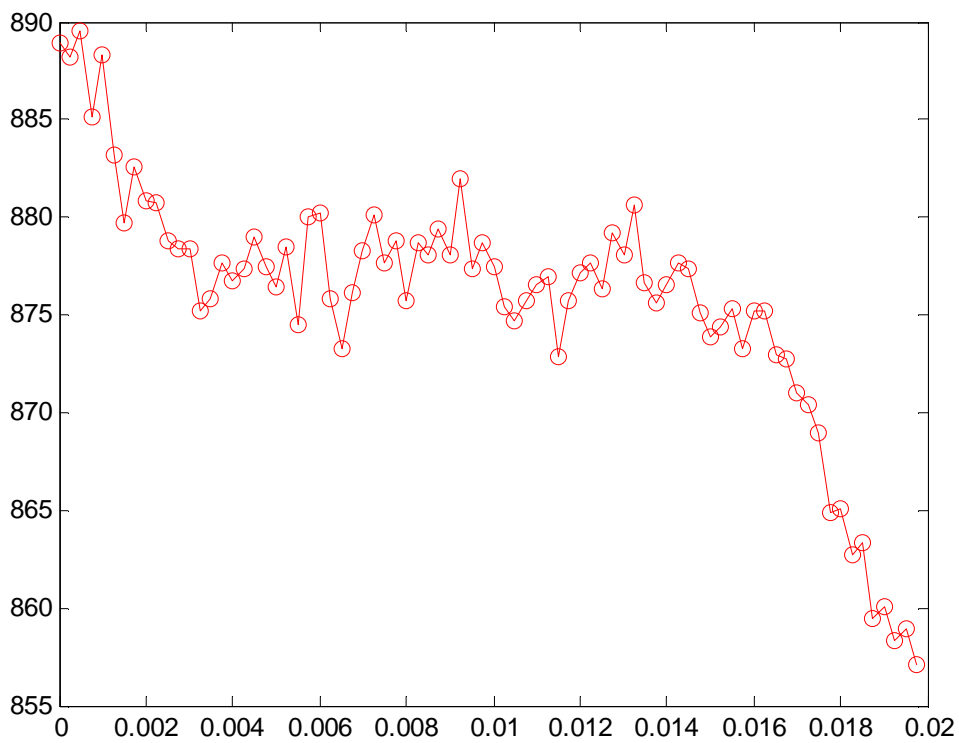


Figure IV.7représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Poue $\sigma=1^e+5$

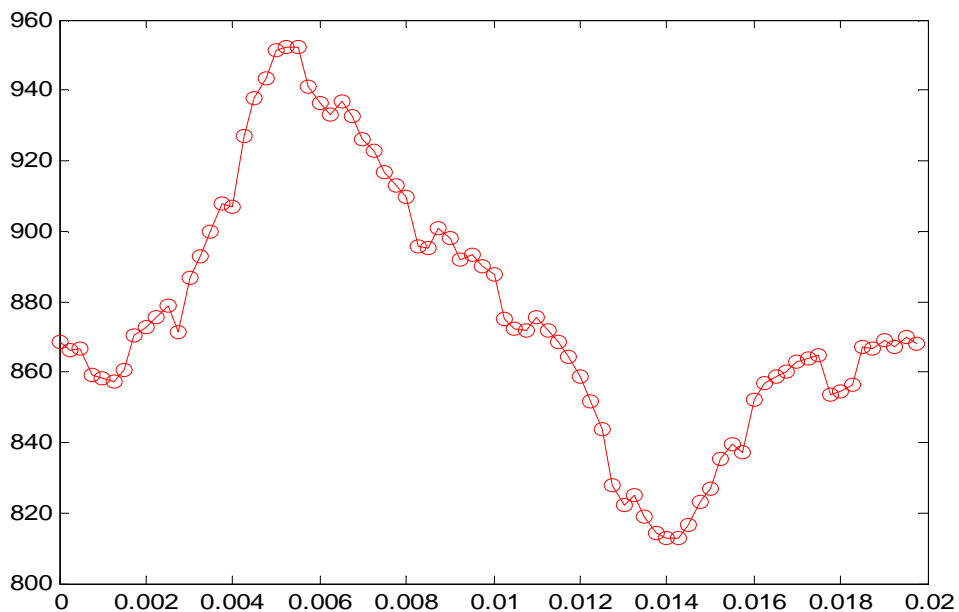


Figure IV.8représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Cas aleatoire

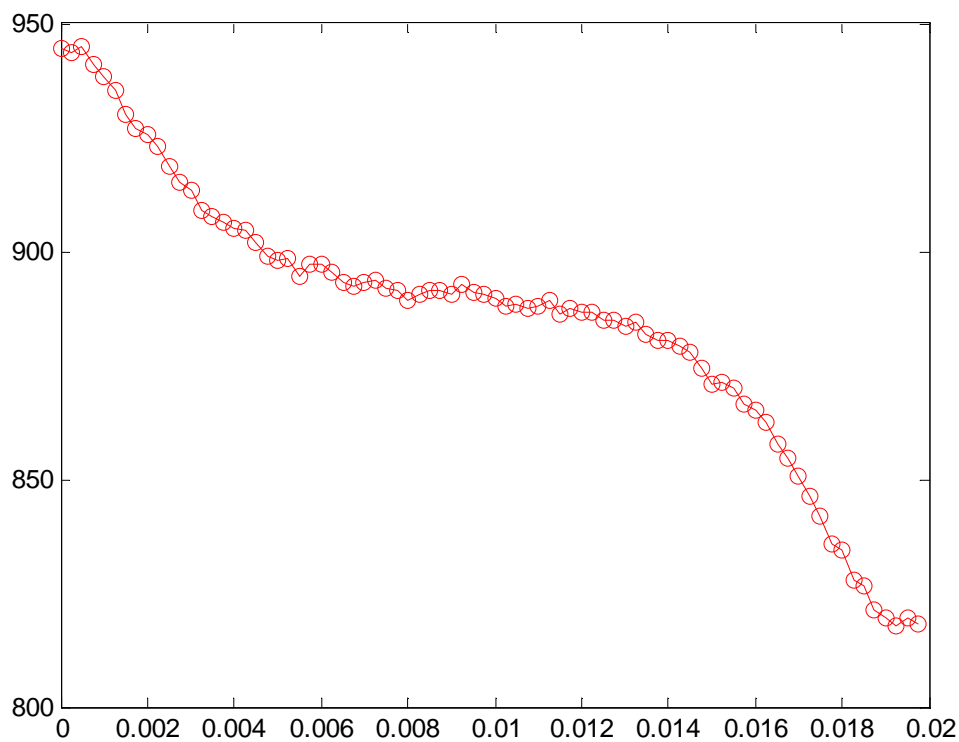


Figure IV.9représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Pour $\sigma=0.45 \cdot 10^4$

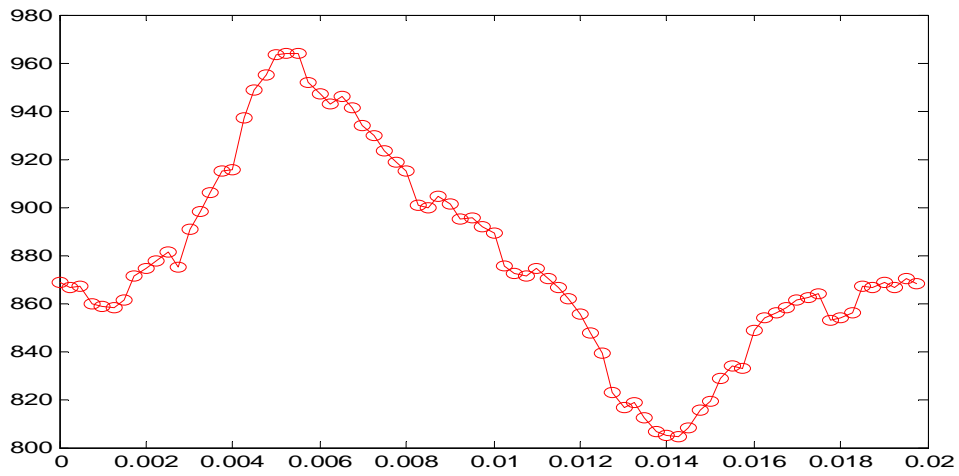


Figure IV.10 représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Cas aleatoire

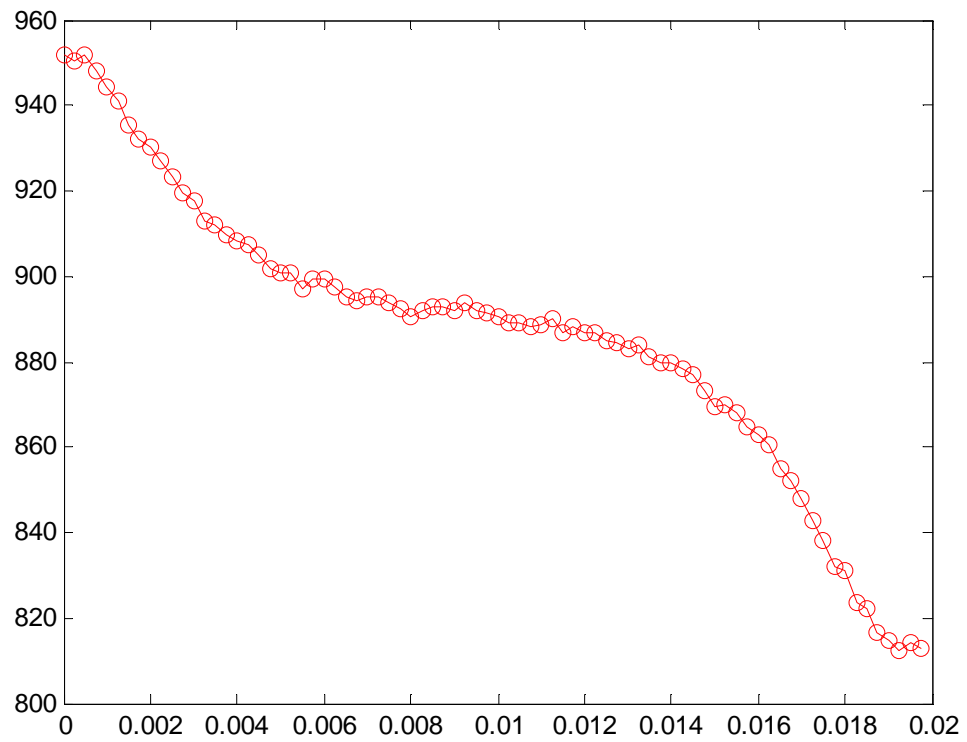


Figure IV.11 représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Cas de conductivité $\sigma = 0.9 \cdot 10^6$ / Profondeur du défaut :

Profondeur du défaut 0,002m / Largeur du défaut : 0,009m

Profondeur du défaut 0,002m / Largeur du défaut : 0,009m

Profondeur du défaut 0,002m / Largeur du défaut : 0,009m

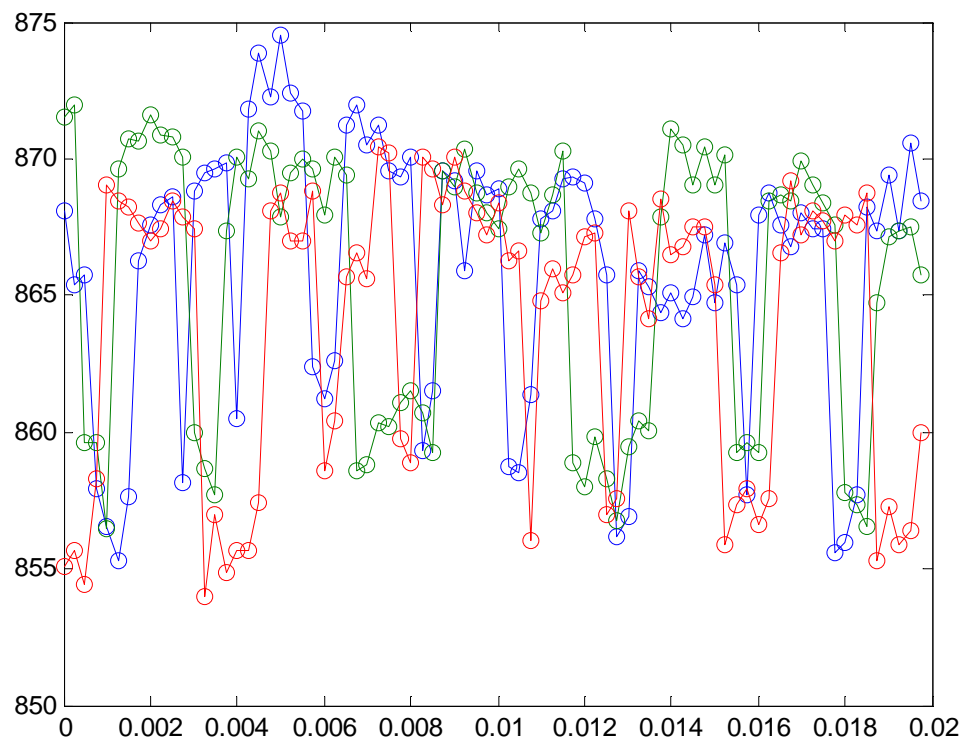


Figure IV.12représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Cas aleatoire

Profondeur du défaut 0,002m/Largeur du défaut : 0,009m (rouge)

Profondeur du défaut 0,004m/Largeur du défaut : 0,001m (bleu)

Profondeur du défaut 0,003m/Largeur du défaut : 0,02m (verte)

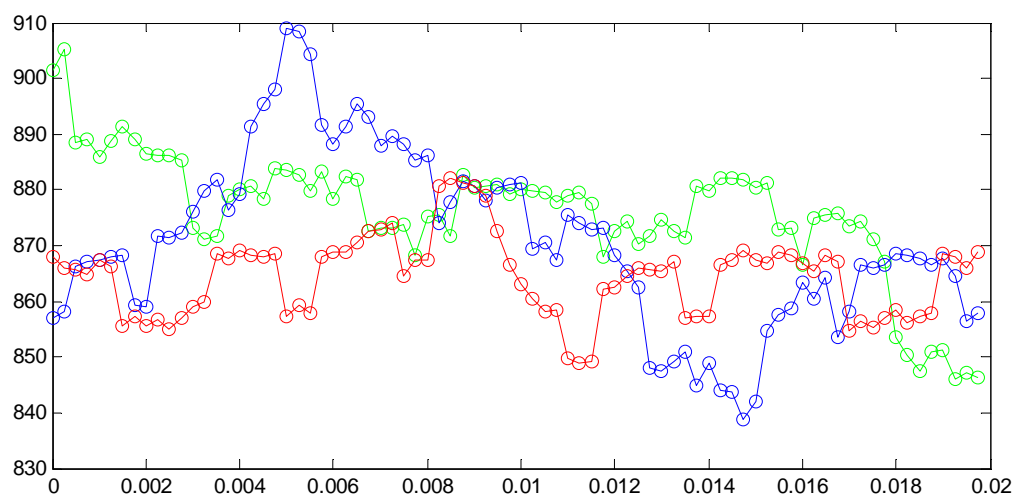


Figure IV.13représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

F=100000Hz.

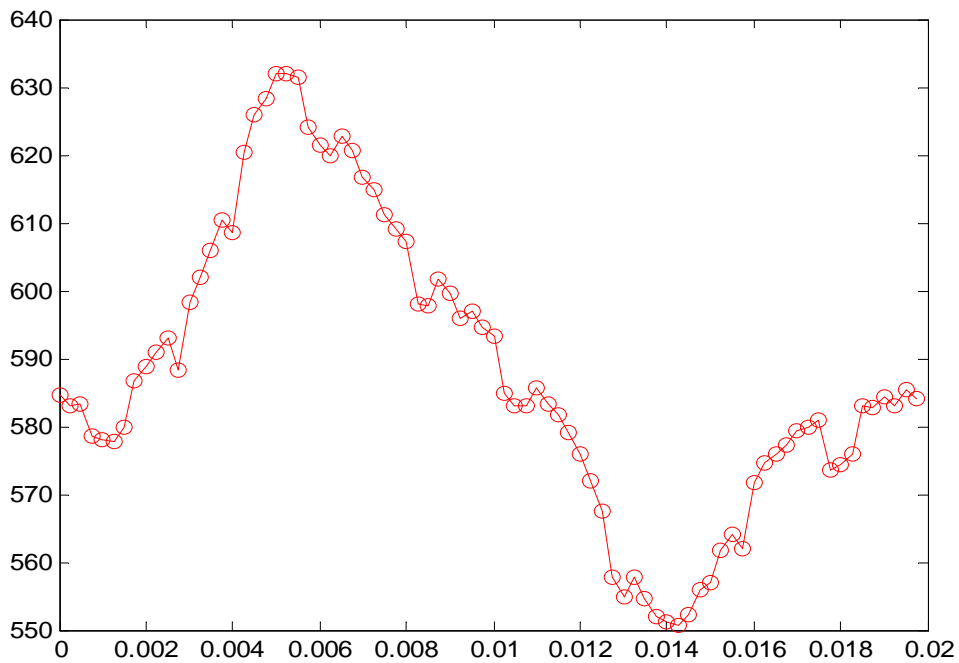


Figure IV.14 représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Lif-off=0.001

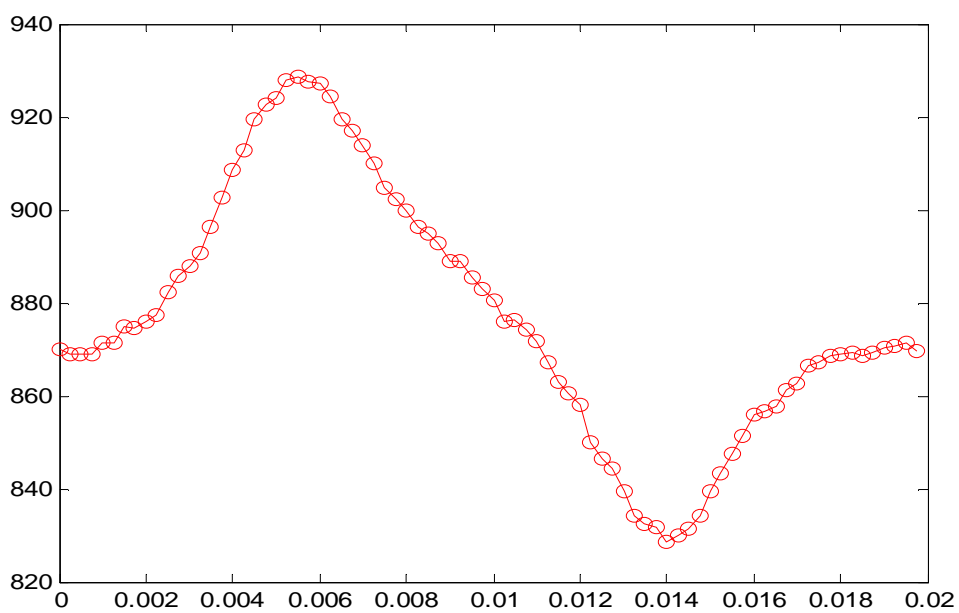


Figure IV.15 représente le module de l'impédance en fonction du déplacement du capteur.

Interprétation des résultats :

En remarque que plus la profondeur est grande plus la detection est meilleure.

Plus la fréquence est plus importante la variation de l'impédance est meilleure.

Plus que le liff-off entre le capteur est la plaque augmente l'impédance diminue.

Conclusion générale

Les exigences croissantes en termes de sûreté de fonctionnement d'un produit industriel ainsi que la volonté d'optimisation de la durée de vie des pièces qui le constituent, conduisent à mettre en place des contrôles de qualité. L'utilisation des courants de Foucault permet un contrôle non destructif fiable, rapide et peu coûteux des matériaux conducteurs. La simplicité de son contrôle et sa robustesse d'utilisation en font de cette technique parmi les plus utilisées dans l'industrie de nos jours.

Le travail présenté dans ce mémoire traite la modélisation par la méthode des éléments finis stochastique (méthode de Monté Carlo) d'un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault. L'outil de calcul utilisé est Matlab, s'appuyant sur la simulation par la méthode de Monté Carlo.

Dans ce travail, nous avons traité le problème de CND-CF présentant un défaut. La détection des fissures permet de prévenir la destruction des pièces en fonctionnement et d'augmenter la fiabilité des produits industriels.

L'effets des différents paramètres géométriques et électromagnétiques sur les performances du capteur a été fait dans la partie application.

Le modèle développé des défauts considérant la conductivité aléatoire. Il serait intéressant d'inclure la perméabilité aléatoire ainsi que la géométrie.

Bibliographie :

[1] H.MOHELLEBI « Cours méthodes numérique de calcul du champ » Cours Master Académique Entraînement Electrique 2014, UMMTO.

[2] H.MOHELLEBI « Cours notion d'électromagnétisme » Cours Master Académique Entraînement Electrique 2014, UMMTO.

[3] H.MOHELLEBI « Cours CAO des systèmes d'entraînements électriques » Cours Licence Académique Entraînement Electrique 2013, UMMTO.

[4] F.HOCINI. « Cours CAO des systèmes d'entraînements électriques » Cours Master Académique Entraînement Electrique 2015, UMMTO.

[5] F.HOCINI. « Association de la commande pour l'étude par élément finis des phénomènes magnéto-élastiques et vibratoires dans les systèmes électrotechniques » Thèse de Doctorat, option machines électriques, UMMTO, 2013.

[6] Z. OUDNI « L'étude de la fiabilité de fonctionnement de structures électromagnétiques liée à la dégradation des propriétés physiques » Thèse de Doctorat, option Entraînement Electrique, UMMTO, 2014.

[7] S.H OULD OUALI. « Cours machines a courant alternatif » Cours Licence Académique Entraînement Electrique, UMMTO, 2013

[8] E. KUHN « CONTRÔLE NON DESTRUCTIF D'UN MATÉRIAU EXCITÉ PAR UNE ONDE ACOUSTIQUE OU THERMIQUE » Thèse de Doctorat, Spécialité : Energétique et Génie des Procédés, UNIVERSITE PARIS OUEST NANTERRE LA DEFENSE, 2013.

[9] K. BEDDEK « Propagation d'incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme Application au contrôle non destructif par courants de Foucault » Thèse de Doctorat, Spécialité Génie Electrique, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2012.

[10] Anthony Nouy « Construction of generalized spectral bases for the approximate resolution of stochastic problems. Rapport téléchargeable

[11] Yann Le Bihan « Modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault. Rapport téléchargeable

[12] M.HAMEL, « Etude et réalisation d'un dispositif de détection de défauts par méthodes électromagnétique » Mémoire de Magister en Entraînement Electrique, UMMTO, 2012.

[13] F. BOUALI, « Utilisation d'une méthode semi-analytique pour l'étude du contrôle non destructif en régime pulsé » Mémoire de Magister en Entraînement Electrique, UMMTO, 2010.

[14] A. Abdou, « Contrôle Non Destructif par Courant de Foucault, Etude et réalisation d'un Capteur Inductif ». Mémoire de Magister, Université Elhadj Lakhder de Batna, 2006.

[15] W.SLIMANE «Modélisation par les volumes finis d'un problème de contrôle non destructif de forme complexe». Mémoire de Magister, Université Mohamed Kheider – Biskra, 2014.

[16] Graham, C. and D. Talay. Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods: Mathematical Foundations of Stochastic Simulation. Springer, 2013.

[17] Asmussen, S. and P. Glynn. Stochastic Simulation. Springer, 2007

[18] Kroese, D. P., T. Taimre and Z. Botev. Handbook of Monte Carlo Methods. Wiley, 2011.

[19] Wikipédia Eléments finis stochastiques 2015.

[20] Wikipédia Le contrôle non destructif 2015.

[21] W.SLIMANE «Conception d'un Système Multi-Capteurs à Courants de Foucault pour le Contrôle Non Destructif (CND)». Mémoire de Magister, Université Elhadj Lakhder de Batna, 2008

[22] Chiara ZORNI « Contrôle non destructif par courants de Foucault de milieux ferromagnétiques : de l'expérience au modèle d'interaction » Thèse de Doctorat, L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11.

[23] Henri Walaszek Pôle EPI Expert référent. CNDRapport téléchargeable

[24] CONTRÔLE NON DESTRUCTIF DE STRUCTURES COMPOSITES
POUR L' AÉRONAUTIQUE NON DESTRUCTIVE TESTING OF COMPOSITE
MATERIALS IN AERONAUTICS

[25] Wikipédia électromagnétisme 2015.