

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



En vue d'obtention du Diplôme Master en Recherche opérationnelle

Thème

La programmation mathématique floue stochastique et applications

Présenté par :

M^{lle} BELHADJ Hayat

M^{lle} BOUDOUKHA Manel

Devant le jury :

Président :	Mr	AICHE	Farid	MCB	UMMTO
Promoteur :	Mr	CHEBBAH	Mohammed	MCB	UMMTO
Examineur :	Mr	OUANES	Mohand	Professeur	UMMTO

Année universitaire : 2020/2021



Remerciement

*Tout d'abord, nous remercions **ALLAH** tous puissant qui nous a donné la santé, le courage, la volonté et la patience afin de pouvoir accomplir ce modeste travail.*

Il nous fait grand plaisir d'exprimer notre sincère remerciement à tous ceux qui nous ont apportés, de près ou de loin, l'aide et conseils, lors de l'élaboration de ce mémoire.

*Nous voudrions remercier en particulier notre promoteur Dr **CHEBBAH Mohammed**, pour accepter d'encadré et de dirigé ce mémoire, pour ces précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.*

*Nous remercions les membres de jury, Mr **AICHE Farid**, de nous faire l'honneur d'être le président, le Professeur **OUANES Mohand** pour avoir accepté d'évaluer ce travail.*





Dédicaces 1

Je dédie mon modeste travail

A mes chers parents

Mohamed et Fatima

Qui m'ont toujours comblé de leur amour, leur bonté et leur grande affection « Que Dieu vous garde »

A ma chère sœur

Sabrina

A mes chers frères

Abdelghani et lounes


A mes chers oncles et mes chères tantes

A mes chères amies, spécialement

*Razika, Yamina, toute la promotion de recherche opérationnelle
2020/2021*

A ma binome et sa famille

Hayat



Dédicace 2

Je dédie ce modeste travail en premier lieu, à mes chers parents " Boubaker" et "Farida", pour leur sacrifice, leurs amour, leurs patience, leurs soutien, leurs encouragement et pour tous les efforts qu'ils ont déployé durant toute ma vie.

A mes chers sœurs Nor El Houda et Roumaïssa, et mon petit frère Abdelmoumene.

A mes amies, mon binôme et sa famille et toute ma promotion de R.O.

A toute personne qui m'a aidé par un mot, une idée, ou par un encouragement.

Manel.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	
Dédicace 1	
Dédicace 2	
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Introduction au flou et à la stochastique	3
1.1. Introduction	4
1^{ère} partie : Théorie des ensembles flous	4
1.2. Introduction	4
1.3. Ensemble flou	4
1.3.1 Définition	4
1.4. Caractéristiques d'un sous-ensemble flou	5
1.5. Nombre flou.....	5
1.5.1.Définition d'un nombre flou	6
1.5.2.Opérations sur les ensembles flous	7
1.5.3.Intervalle flou	8
1.5.4.Comparaison d'intervalles flous.....	9
1.5.4.1. Comparaison d'intervalles de nombres réels	9
1.5.4.2. Comparaison d'intervalles flous	9
1.5.5.Nombre flou de type L-R	10
1.5.6.Intervalle flou de type L-R.....	11
1.5.7.Nombre flou de type triangulaire	11
1.5.7.1. Opérations sur les nombres flous de type triangulaire	12
1.5.7.2. Comparaison de deux nombres flous triangulaires	12
1.5.8.Nombre flou de type trapézoïdal.....	12
1.5.8.1. Opérations sur les nombres flous de type trapézoïdal.....	13
1.5.8.2. Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux	13
1.5.9.Nombre flou de type Gaussien.....	14
2^{ème} partie : Théorie de la probabilité	15
1.6.Introduction.....	15
1.7.Notions d'espace mesurable	15
1.7.1. Tribus d'évènements.....	15
1.7.2. Espace probabilisable	15
1.7.3. Espace probabilisé	15
1.7.4. Applications mesurables	16
1.8.Variables aléatoires	16
1.8.1. Définition	16

1.8.2. Propriétés.....	16
1.9. Fonction de répartition	16
1.10. Densité de probabilité.....	16
1.10.1. Fonction de densité	17
1.11. Lois de probabilité	17
1.11.1. Variable discrète.....	17
1.11.1.1. Loi uniforme discrète.....	17
1.11.1.2. Loi de Bernoulli	17
1.11.1.3. Loi de Binomiale.....	17
1.11.1.4. Loi de poisson.....	18
1.11.2. Variable continue	18
1.11.2.1. Loi uniforme	18
1.11.2.2. Loi normal	19
1.11.2.3. Loi exponentielle	19
1.12. Les moments d'une variable aléatoire.....	20
1.12.1. Espérance.....	20
1.12.2. Variance.....	21
1.12.3. L'écart type	21
1.12.4. La covariance.....	21

Chapitre 2 Programmation mathématique22

2.1. Introduction	23
-------------------------	----

1^{ère} partie : Programmation linéaire23

2.2. Introduction	23
2.3. Définition et modélisation d'un programme linéaire	23
2.3.1. Définition	23
2.3.2. Modélisation	23
2.4. Forme générale d'un programme linéaire	24
2.4.1. Forme canonique et forme standard d'un programme linéaire	25
2.5. Domaine de solutions réalisables et solutions optimales	26
2.6. Propriétés géométriques	26
2.7. Méthode du simplexe	26
2.7.1. Base et solution de base	27
2.7.2. Algorithme du simplexe	28
2.7.3. Tableau du simplexe	30
2.8. Initialisation de l'algorithme du simplexe	32
2.8.1. Méthode des deux phases.....	32
2.8.2. M-méthode.....	35
2.9. Méthode dual du simplexe	37
2.9.1. Définitions.....	37
2.9.2. Algorithme dual du simplexe	38

2^{ème} partie : Programmation non linéaire.....40

2.10.	Introduction	40
2.11.	Notions de base	40
2.12.	Définition d'un programme mathématique	42
2.13.	Optimisation sans contraintes	43
2.13.1.	Les conditions nécessaires du 1 ^{er} ordre (cas minimum)	43
2.13.2.	Les conditions suffisantes du 1 ^{er} ordre (cas minimum)	43
2.13.3.	Les conditions nécessaires du 2 ^{ème} ordre (cas minimum)	43
2.13.4.	Les conditions suffisantes du 2 ^{ème} ordre (cas minimum)	43
2.14.	Optimisation avec contraintes	44
2.14.1.	Qualification des contraintes	44
2.14.2.	Les conditions nécessaires de Karush-Kuhn- Tucker (CN du 1 ^{er} ordre)	45
2.14.3.	Les conditions nécessaires du 2 ^{ème} ordre	45
2.14.4.	Les conditions suffisantes du 2 ^{ème} ordre	45
2.15.	Cas particulier de la programmation mathématique	46
2.15.1.	Résolution d'un problème quadratique convexe.....	46
2.15.1.1.	Méthode de Wolfe (1959)	46
2.15.1.2.	Algorithme	46
2.15.2.	Résolution d'un problème fractionnaire	50
2.15.2.1.	Méthode de A. Cambini	51
2.15.2.2.	Algorithme	52

Chapitre 3 Programmation mathématique floue.....53

3.1.	Introduction	54
3.1.1.	Définition	54
3.2.	Programmation flexible	54
3.2.1.	Programmation linéaire flexible	54
3.2.1.1.	Décision dans un environnement flou	54
3.2.1.2.	Résolution d'un programme linéaire flexible.....	55
3.2.2.	Programmation non linéaire flexible	60
3.3.	Programmation robuste.....	63
3.3.1.	Programmation linéaire inexacte (Solster)	63
3.3.2.	Résolution d'un programme robuste	63
3.3.3.	Cas des nombres flous	64
3.3.4.	Cas des nombres flous de type L-R	65
3.4.	Chance-constrained programming with fuzzy coefficients	67
3.4.1.	Programme linéaire flou.....	67
3.4.2.	Chance-constrained programming with fuzzy coefficients	68

Chapitre 4 : Programmation mathématique stochastique.....70

4.1.	Introduction	71
4.2.	Les différentes approches	71
4.2.1.	Approche passive ou "wait and see"	71
4.2.2.	Approche active ou "here and now"	72
4.3.	Critère d'optimisation du problème équivalent	72
4.3.1.	Cas des objectifs aléatoires	72
4.3.1.1.	Le critère de l'espérance mathématique (E-modèle) ou critère de Bayes	72
4.3.1.2.	Le critère de la variance (V-modèle)	72
4.3.1.3.	Le critère espérance-variance (E-V modèle)	72

4.3.1.4.	Le critère de risque minimal (P-modèle)	73
4.3.1.5.	Le critère de Katoka	73
4.3.2.	Cas de contraintes aléatoires.....	74
4.3.2.1.	Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes (« chance constrained programming)	75
4.3.2.2.	Modèle avec recours	77
4.4.	Programmation non linéaire stochastique	81
 Chapitre 5 : Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients		83
5.1.	Introduction	84
5.2.	Programme linéaire flou stochastique	84
5.3.	Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients	84
5.3.1.	Différentes versions de chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients	85
5.3.1.1.	Combinaison de probabilité et possibilité.....	85
5.3.1.2.	Combinaison de probabilité et nécessité	86
5.3.2.	Convexité des ensembles de solutions admissibles.....	87
5.3.2.1.	Cas où A est déterministe ou flou	88
5.3.2.2.	Cas où A est stochastique ou flou stochastique.....	88
 Chapitre 6 : Application sur Lingo		94
6.1.	Introduction	95
6.2.	Installation du logiciel	95
6.3.	Applications	95
 Conclusion générale		105
 Références bibliographies		107



Introduction générale



Introduction générale

La recherche opérationnelle (R.O), aussi appelée aide à la décision, est la discipline des outils et méthodes scientifiques utilisables pour élaborer de meilleures décisions. C'est un ensemble de méthodes et techniques visant à résoudre des problèmes d'optimisation (programmes mathématiques minimisant ou maximisant un ou plusieurs critères en respectant certaines conditions dites « contraintes ») modélisant des problèmes réels dans différents domaines (économie, finance, gestion, transport, logistique, communication, etc.) [16].

Parmi ses outils : la programmation linéaire et non linéaire déterministes par exemples, qui sont des outils très puissants dans la recherche opérationnelle. En 1947, le professeur G.B Dantzig proposa le terme de programmation linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation d'une fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires. Un peu plus tard Kuhn et Tucker proposèrent la classe de « programmes non linéaires avec ou sans contraintes » [4].

La programmation mathématique peut avoir des données imprécises avec une imprécision de nature floue ou aléatoire, c'est ce qui a motivé l'introduction de la programmation floue et la programmation stochastique (Programmation floue stochastique) [1].

La théorie des ensembles flous est apparue en 1965, par le professeur Lotfi Zadeh, à Berkely à partir de l'idée d'appartenance partielle. C'est ce qui donna naissance à la programmation floue [26] [31].

Il est important de noter qu'un problème mathématique stochastique (floue / floue stochastique) sera mal posé du point de vue mathématique et qu'il sera donc essentiel de lui donner un sens en lui associant un problème déterministe (bien posé) équivalent, qu'on résoudra avec plusieurs méthodes [1].

Dans pas mal de situation le flou et l'aléa peuvent se trouver combinés dans un contexte optimisationnel, les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison. C'est ce qui a donné naissance à la programmation linéaire floue stochastique [3].

Notre travail se résume comme suit :

- Le premier chapitre est composé de deux parties : dans la première partie, nous avons présenté quelques généralités concernant la logique floue (quelques caractéristiques, les opérations de bases dans les ensembles, les nombres et les intervalles flous). Par la suite, dans la deuxième partie nous avons rappelés quelques notions de base concernant la théorie de probabilité, en exhibant les variables aléatoires et les lois de probabilités.
- Le deuxième chapitre comporte deux parties : la programmation linéaire et non linéaire ; dans la première, nous avons traité la méthode universelle du simplexe pour la résolution des problèmes et ses variantes (la méthode des deux phases et la M-méthode), dans la deuxième, nous avons présenté la programmation non linéaire, avec et sans contraintes (contraintes d'égalités et/ou d'inégalités). Nous avons aussi évoqué quelques approches de résolution des problèmes quadratiques et fractionnaires.
- Le troisième chapitre concerne la programmation mathématique floue. Les problèmes linéaires flous (flexible, robuste) ont été présentés avec des méthodes de résolution

Introduction générale

dues à Dubois « chance constrained programming with fuzzy coefficients » par exemple. [1] [2] [3].

- Le quatrième chapitre concerne la programmation mathématique stochastique. Des méthodes ont été présentées dans ce sens
- Le cinquième chapitre, comporte l'application de la méthode dite « chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients » à la résolution de programme linéaire en présence de variables aléatoires floues dans les contraintes et dont l'objectif est déterministe.
- Enfin, le dernier chapitre consiste à l'application des exemples dans le logiciel Lingo.

Chapitre 01 :
Introduction au flou et à la
stochastique

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif sera consacré aux deux parties, la première partie sur la théorie des ensembles flous où nous allons définir quelques notions de bases (les caractéristiques et les opérations) dans les nombres et les intervalles flous. Puis dans la deuxième partie nous allons présenter quelques généralités concernant la théorie de probabilité, tel que les variables aléatoires et les lois de probabilités qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

1^{ère} partie : Théorie des ensembles flous

1.2 Introduction

Les bases théoriques de la logique floue ont été formulées en 1965 par le professeur Lotfi A. Zadeh, de l'université de Berkeley en Californie. Il a introduit la notion de sous-ensemble flou pour fournir un moyen de représentation et de manipulation des connaissances imparfaitement décrites, vagues ou imprécises [26].

Aujourd'hui, on trouve la logique floue très utilisée dans différents domaines tel que: L'industrie (classification, aide à la décision, réglage et commandes de processus complexes liés à l'énergie, aux transports ...etc.), dans la technologie (appareils photos, machines à laver four à microondes ...etc.).

1.3 Ensemble flou

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément : appartenir (on note 1) ou ne pas appartenir (on note 0) à un ensemble. Mais en 1965 le professeur Zadeh a introduit la notion d'appartenance pondérée où il associe à chaque élément un degré d'appartenance défini dans l'intervalle réel $[0, 1]$.

Donc l'ensemble flou généralise l'ensemble classique, autrement dit l'ensemble classique est un cas particulier de l'ensemble flou.

Remarque 1.1

On utilise souvent le terme d'ensemble flou au lieu de sous-ensemble flou ou vice versa, par abus de langage [32].

1.3.1 Définition :

Soit X un référentiel, on définit un ensemble flou \tilde{A} dans X par la donnée d'une fonction $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$ qui associe à chaque élément $x \in X$, une valeur $\mu_{\tilde{A}}(x)$ désignant le degré avec lequel x appartient à A . Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance de l'ensemble flou \tilde{A} ".

\tilde{A} sera noté par $\tilde{A} = (X, \mu_{\tilde{A}})$ ou $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) ; x \in X\}$ avec :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ appartient à } A \\ 0 & x \text{ n'appartient pas à } A \\ \in]0,1[& \text{pour les cas intermédiaires} \end{cases}$$

Exemple 1.1

Soit U un ensemble de six personnes. On va considérer la propriété "être grand". Par exemple la personne a / mesure 1m60, la personne b / 1m70, la personne c / 1m85, ... etc. Si on définit une limite, et on dit que tous ceux qui dépassent 1m75 sont grands, on obtient un sous-ensemble A précis des personnes grandes. Mais cette propriété n'est pas précise. Les gens qui mesurent 1m74 sont-ils petits ? Donc cette propriété est floue, vague et dépend de l'opinion subjective de celui qui doit créer le sous-ensemble [19].

1.4 Caractéristiques d'un sous-ensemble flou [1] [28] [32]

- **Support de \tilde{A}**

Le support de \tilde{A} noté $\text{Supp } \tilde{A}$ est la partie de X où la fonction d'appartenance de \tilde{A} n'est pas nulle c'est-à-dire :

$$\text{Supp } \tilde{A} = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}.$$

- **Hauteur de \tilde{A}**

La hauteur de \tilde{A} noté $\text{Haut } \tilde{A}$ ou $h(\tilde{A})$ est la plus grande valeur prise par sa fonction d'appartenance c'est-à-dire :

$$\text{Haut } \tilde{A} = \text{Sup } \mu_{\tilde{A}}(x) ; x \in X.$$

- **Sous-ensemble flou normalisé**

Un sous-ensemble flou \tilde{A} de X est dit normalisé si sa hauteur est telle que :

$$\text{Haut } \tilde{A} = 1.$$

- **Sous-ensemble de niveau α et α strict**

a- sous-ensemble de niveau α : notée \tilde{A}^α est l'ensemble où la fonction d'appartenance de \tilde{A} contient des valeurs supérieures ou égales à α défini par :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

b- sous-ensemble de niveau α strict: notée $\tilde{A}^{\alpha\bar{}}$ est l'ensemble où la fonction d'appartenance de \tilde{A} contient des valeurs supérieures strictement à α défini par :

$$\tilde{A}^{\alpha\bar{}} = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

- **Noyau d'un sous-ensemble flou \tilde{A}**

Le noyau de \tilde{A} noté $\text{Noy}(\tilde{A})$ est un ensemble d'éléments de X où la fonction d'appartenance de \tilde{A} vaut 1 c'est-à-dire :

$$\text{Noy}(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

- **La cardinalité du sous-ensemble \tilde{A}**

La cardinalité du sous-ensemble \tilde{A} est définie par :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x).$$

• **Sous-ensemble flou convexe**

\tilde{A} est dit convexe si quelque soient x_1 et x_2 appartenant à X et $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1); \mu_{\tilde{A}}(x_2)].$$

Autrement dit \tilde{A} est convexe si $\mu_{\tilde{A}}$ est quasi concave.

Exemple 1.2

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$

• $\tilde{A} = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.2), (x_3, 0.9), (x_4, 0), (x_5, 0.1), (x_6, 0.4), (x_7, 1)\}.$

- $\text{Supp } \tilde{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}.$

- $\text{Haut } \tilde{A} = \text{Sup } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1.$

- \tilde{A} est un sous-ensemble normalisé car $\text{Haut } \tilde{A} = 1.$

- $\tilde{A}^{0.2} = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7\}.$

- $\tilde{A}^{\overline{0.2}} = \{x_1, x_3, x_6, x_7\}.$

- $|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 3.3.$

• $\tilde{B} = \{(x_1, 0.7), (x_2, 0.2), (x_3, 0.9), (x_4, 0), (x_5, 0.1), (x_6, 0.4), (x_7, 0.5)\}.$

- $\text{Supp } \tilde{B} = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7\}.$

- $\text{Haut } \tilde{B} = \text{Sup } \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.9.$

- \tilde{B} n'est pas un sous-ensemble normalisé car $\text{Haut } \tilde{B} \neq 1.$

- $\tilde{B}^{0.5} = \{x_1, x_3, x_7\}.$

- $\tilde{B}^{\overline{0.5}} = \{x_1, x_3\}.$

- $|\tilde{B}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 2.8.$

1.5 Nombre flou [1] [28]

1.5.1 Définition

Un nombre flou est un sous-ensemble flou \tilde{A} , convexe et normalisé sur un référentiel $X(X=\mathbb{R})$.

Exemple 1.3

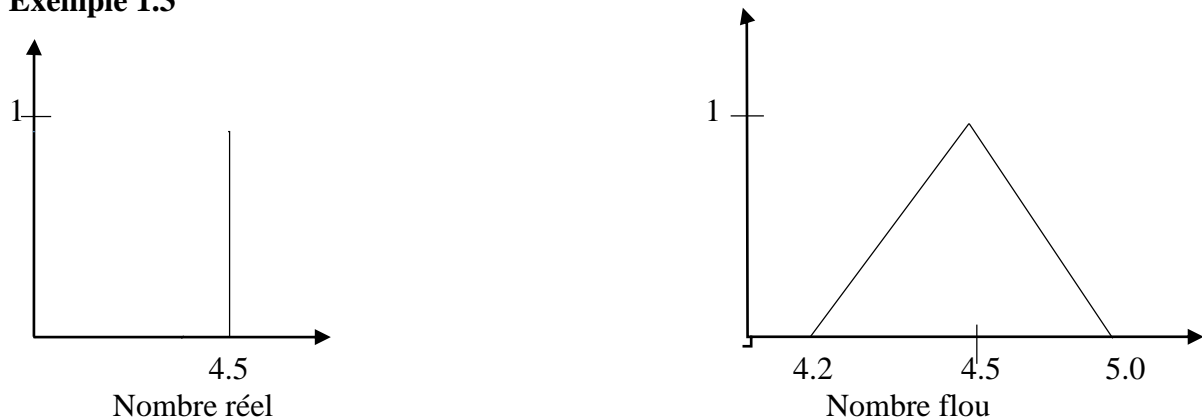


Figure 1.1- Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel.

1.5.2 Opération sur les ensembles flous [5] [27]

Etant donné que le concept de sous-ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept d'ensemble classique, on est conduit à introduire des opérations sur les sous-ensembles flous qui sont équivalentes aux opérations classiques de la théorie des ensembles lorsqu'on a affaire à des fonctions d'appartenance à valeurs 0 ou 1. On présente ici, les opérations les plus couramment utilisées.

- **L'inclusion**

Un sous-ensemble flou \tilde{A} est inclus dans un autre sous-ensemble flou \tilde{B} comme suit :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Egalité**

Deux sous-ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} de X sont égaux si :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X.$$

- **Complément**

Le complémentaire $\bar{\tilde{A}}$ d'un sous-ensemble flou \tilde{A} dans X est défini par sa fonction d'appartenance :

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X.$$

N.B. Contrairement aux sous-ensembles classiques, la propriété de non contradiction n'est pas satisfaites ici ($\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} \neq \emptyset$). De même que la propriété du tiers exclus ($\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} \neq X$).

Par contre, les autres propriétés sont conservées, notamment :

$$\bar{\bar{\tilde{A}}} = \tilde{A}; \quad \bar{\emptyset} = X; \quad \bar{X} = \emptyset; \quad |\tilde{A}| + |\bar{\tilde{A}}| = |X|; \text{ Si } X \text{ est fini.}$$

- **Union**

L'union de deux sous-ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} dans X est définie par sa fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

- **Intersection**

L'intersection de deux sous-ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} dans X est définie par sa fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)).$$

- **Propriétés de l'union et de l'intersection :**

Comme pour les ensembles classiques, toutes les propriétés de treillis distributifs et les relations de Morgan restent valables, ainsi que l'idempotence :

A/ Commutativité : $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A} \quad ; \quad \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$

B/ Associativité : $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} \quad ; \quad \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$

C/ Idempotence : $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A} \quad ; \quad \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$

D/ Distributivité : $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C}) ;$

$$\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$$

E/ Les relations de Morgan : $\overline{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cap \bar{\tilde{B}} \quad ; \quad \overline{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \bar{\tilde{A}} \cup \bar{\tilde{B}}$

F/ Les lois d'absorption : $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$

G/ $\tilde{A} \cap \emptyset = \emptyset ; \tilde{A} \cup X = X$

H/ Identité : $\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A} ; \tilde{A} \cap X = \tilde{A}$

I/ Cardinalité : $|\tilde{A}| + |\tilde{B}| = |\tilde{A} \cap \tilde{B}| + |\tilde{A} \cup \tilde{B}|$

J/ Formule d'équivalence : $(\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B})$

K/ Formule de la différence symétrique : $(\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})$

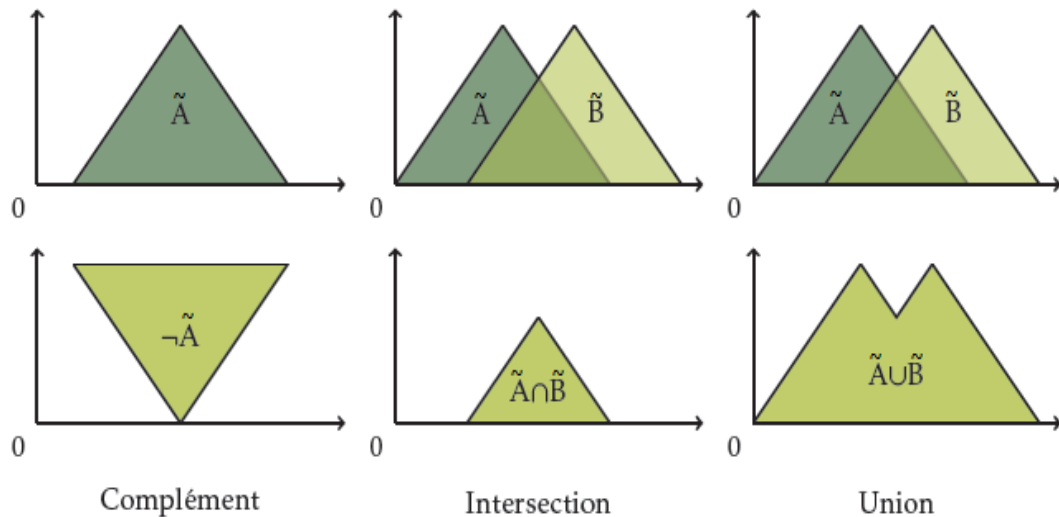


Figure 1.2- Quelques opérations de façon graphique

Exemple 1.4

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\tilde{A} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 0.1)\}$

$\tilde{B} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.6), (x_3, 1), (x_4, 0.9)\}$

- $\tilde{A} \not\subseteq \tilde{B}$
- $\tilde{A} \neq \tilde{B}$
- $\tilde{A} = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.5), (x_3, 1), (x_4, 0.9)\}$
- $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \{(x_1, 0.2), (x_2, 0.6), (x_3, 1), (x_4, 0.9)\}$
- $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.5), (x_3, 0), (x_4, 0.1)\}$

1.5.3 Intervalles flous [1] [2] [3]

Un intervalle flou \tilde{A} est une quantité floue dont la fonction d'appartenance est quasi-concave, on parle alors d'ensemble flou convexe qui obéit à la contrainte :

$$\forall x, y, \forall z \in [x, y], \quad \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)). \text{ et } \exists x \in \mathbb{R}, \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

l' α -coupe de \tilde{A} est $\tilde{A}^\alpha = \{x / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ est donc un intervalle fermé $[\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ et ces intervalles sont emboîtés ($\tilde{A}^\alpha \subseteq \tilde{A}^\beta$ si $\alpha \geq \beta$).

1.5.4 Comparaison d'intervalles flous [2] [3]

1.5.4.1 Comparaison d'intervalles de nombres réels

Soient $A = [\underline{a}, \bar{a}] =$ et $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ deux intervalles de nombres réels. Donc \underline{a}, \bar{a} et \underline{b}, \bar{b} sont des nombres réel tels que $\underline{a} < \bar{a}$ et $\underline{b} < \bar{b}$. Pour ordonner A et B , nous avons quatre relations $>_i, i = 1,2,3,4$ définies comme suit :

- a) $[\underline{a}, \bar{a}] >_1 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow \underline{a} > \bar{b}$ (i. e $\forall x \in A, \forall y \in B, x > y$)
- b) $[\underline{a}, \bar{a}] >_2 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b}$ (i. e $\forall x \in A, \forall y \in B, x \geq y$)
- c) $[\underline{a}, \bar{a}] >_3 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow \bar{a} > \bar{b}$ (i. e $\forall x \in A, \forall y \in B, x > y$)
- d) $[\underline{a}, \bar{a}] >_4 [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow \bar{a} > \underline{b}$ (i. e $\forall x \in A, \forall y \in B, x \geq y$)

La relation $>_1$ est la plus forte, $>_4$ est la plus faible, $>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires.

1.5.4.2 Comparaison d'intervalles flous

Considérons deux intervalles flou \tilde{A} et \tilde{B} dont les fonctions d'appartenance sont respectivement $\mu_{\tilde{A}}$ et $\mu_{\tilde{B}}$.

Dans ce qui suit les abréviations **pos** et **nec** représentent respectivement possibilité et nécessité.

1. Les relations $>_4$ et $>_1$, c'est-à-dire pour la plus faible et la plus forte, deviennent respectivement la possibilité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, notée $pos(\tilde{A} > \tilde{B})$ et la nécessité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, notée $nec(\tilde{A} > \tilde{B})$ définies comme suit :
 - $pos(\tilde{A} > \tilde{B}) = \sup(\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)))$ où x et y sont des nombres réels tels que $x > y$.
 - $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1 - pos(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = 1 - \sup(\min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y)))$ où x et y sont des nombres réels tels que $x \leq y$.
2. Les relations intermédiaires $>_2$ et $>_3$, deviennent respectivement nécessité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, noté $nec_2(\tilde{A} > \tilde{B})$ et la possibilité de $\tilde{A} > \tilde{B}$, noté $pos_3(\tilde{A} > \tilde{B})$ définies comme suit :
 - $pos_3(\tilde{A} > \tilde{B}) = \sup\{\inf[\min(\mu_{\tilde{A}}(u), 1 - \mu_{\tilde{B}}(v) / u > v)]\}$
 - $nec_2(\tilde{A} > \tilde{B}) = \inf\{\sup[\max(1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(v) / u < v)]\}$

Dans le but de ramener la comparaison d'intervalles flous utilisant possibilité et nécessité à celle de nombres réels, Dubois et Prade ont établi les résultats suivants :

Proposition 1 :

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux intervalles flous et $\tilde{A}^\alpha = [\underline{a}^\alpha, \bar{a}^\alpha]$, $\tilde{B}^\alpha = [\underline{b}^\alpha, \bar{b}^\alpha]$, $\tilde{A}^{1-\alpha} = [\underline{a}^{1-\alpha}, \bar{a}^{1-\alpha}]$ et $\tilde{B}^{1-\alpha} = [\underline{b}^{1-\alpha}, \bar{b}^{1-\alpha}]$ leurs coupes de niveau.

Alors on a :

1. $pos(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{a}^\alpha \leq \bar{b}^\alpha$.
2. $nec(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \Leftrightarrow \bar{a}^{1-\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$.
3. $pos_3(\tilde{A} \leq \tilde{B}) \geq \alpha \Leftrightarrow \bar{a}^{1-\alpha} \leq \bar{b}^\alpha$.
4. $nec_2(\tilde{A} > \tilde{B}) \geq \alpha \Leftrightarrow \underline{a}^\alpha \leq \underline{b}^{1-\alpha}$.

Proposition 2 :

1. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) \leq pos(\tilde{A} > \tilde{B})$.
2. $nec(\tilde{A} > \tilde{B}) > 0 \Rightarrow pos(\tilde{A} > \tilde{B}) = 1$.

1.5.5 Nombre flou de type L-R [20] [28]

La représentation de la fonction caractéristique de type L-R d'un nombre flou est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{pour } x \leq m \text{ avec } \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{pour } x \geq m \text{ avec } \beta > 0 \end{cases}$$

Où L et R sont des fonctions dites de référence du nombre flou vérifiant les propriétés :

- L et R fonctions non croissantes sur $[0, +\infty[$.
- L et R fonctions symétriques : $L(x)=L(-x)$; $R(x)=R(-x)$.
- $L(0)=R(0)=1$
- Si l'on ajoute à cette définition que $L(1)=R(1)=0$, le support du nombre flou est fini.

On note $\tilde{A} = (m; \alpha; \beta)_{L-R}$.

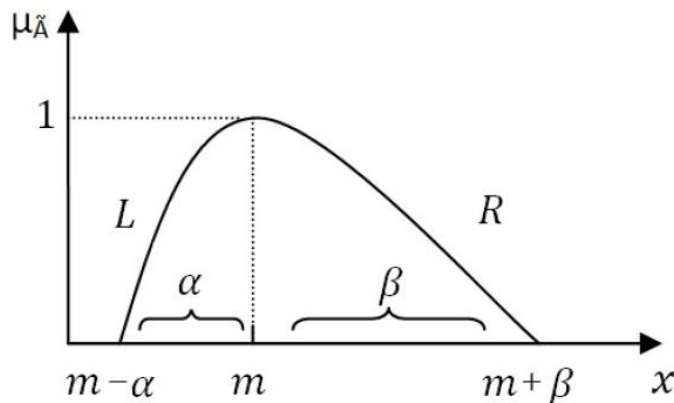


Figure 1.3- Représentation d'un nombre flou type L-R .

1.5.6 Intervalle flou de type L-R [20] [28]

Un nombre flou plat de type L-R, ou intervalle flou, est tel qu'il existe $m, n \in \mathbb{R}$, avec $m < n$ de sorte que : $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \quad \forall x \in [m, n]$.

Sa représentation de type L-R est alors

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{si } x < m \\ 1 & \text{si } m \leq x \leq n \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & \text{si } x > n \end{cases}$$

Nous désignerons un tel nombre flou \tilde{A} de type L-R par :

$$\tilde{A} = (m, n, \alpha, \beta)_{L-R}$$

Où : α et β sont les écarts à gauche et à droite de \tilde{A} respectivement, m et n sont les valeurs modales inférieures et supérieures de \tilde{A} respectivement ou bien la moyenne à gauche et à droite de \tilde{A} respectivement, $[m, n]$ est le noyau de \tilde{A} .

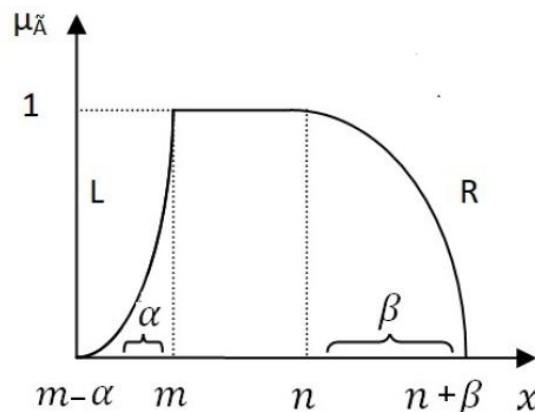


Figure 1.4- Représentation d'un nombre flou plat de type L-R .

1.5.7 Nombre flou de type triangulaire [13]

Un nombre flou est dit de type triangulaire noté (a, α, β) si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a - \alpha \leq x \leq a, \text{ avec } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } x = a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & \text{si } a \leq x \leq a + \beta, \text{ avec } \beta > 0 \end{cases}$$

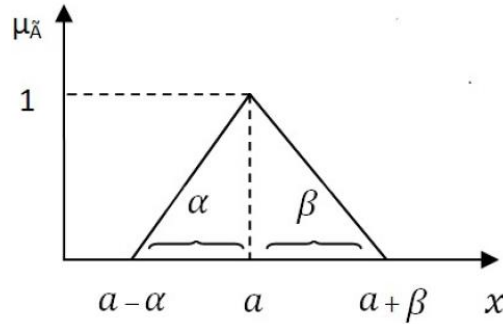


Figure 1.5 –Représentation d’un nombre flou triangulaire $(a; \alpha; \beta)$.

1.5.7.1 Opérations sur les nombres flous de type triangulaire

Soient deux nombres flous de type triangulaire $\tilde{A}=(a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$:

- $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.
- $-\tilde{A} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1)$.
- $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$.
- $\lambda \otimes \tilde{A} \begin{cases} (\lambda a, \lambda \alpha_1, \lambda \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ (\lambda a, -\lambda \beta_1, -\lambda \alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1.5.7.2 Comparaison de deux nombres flous triangulaire

Soient deux nombres flous triangulaires $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$:

- $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.
- $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2$.

1.5.8 Nombre flou de type trapézoïdal [13]

Un nombre flou \tilde{A} est dit de type trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ si sa fonction d’appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a^L+\alpha}{\alpha} & \text{si } a^L - \alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & \text{si } a^L \leq x \leq a^U \\ \frac{a^U+\beta-x}{\beta} & \text{si } a^U \leq x \leq a^U + \beta \end{cases}$$

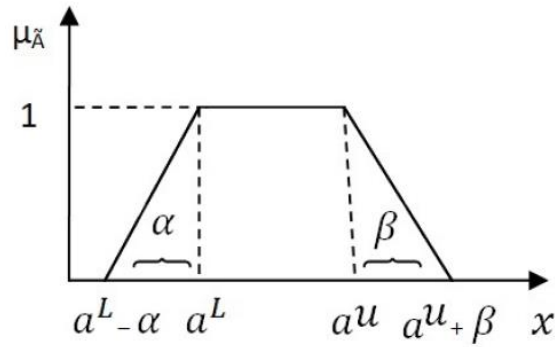


Figure 1.6- Représentation d'un nombre flou trapézoïdal.

1.5.8.1 Opérations sur les nombre flous de type trapézoïdal

Soient deux nombres flous de type trapézoïdal $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$

- $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.
- $-\tilde{A} = -(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1) = (-a^U, -a^L, \beta_1, \alpha_1)$.
- $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$.
- $\lambda \otimes \tilde{A} \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda \alpha_1, \lambda \beta_1) & \text{si } \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \\ (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda \beta_1, -\lambda \alpha_1) & \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1.5.8.2 Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous de type trapézoïdal $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$

- $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a^L = b^L, a^U = b^U, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.
- $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^U \leq b^U, a^L - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$.
- Un nombre flou trapézoïdal \tilde{A} est dit négatif si et seulement si :
 $a^U + \beta_1 \leq 0$.
- Un nombre flou trapézoïdal \tilde{A} est dit positif si et seulement si :
 $a^L - \alpha_1 \geq 0$.

1.5.9 Nombre flou de type Gaussien [10]

Un nombre flou \tilde{A} est de type gaussien si sa fonction d'appartenance est caractérisée par sa valeur centrale m et son écart type σ et défini par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

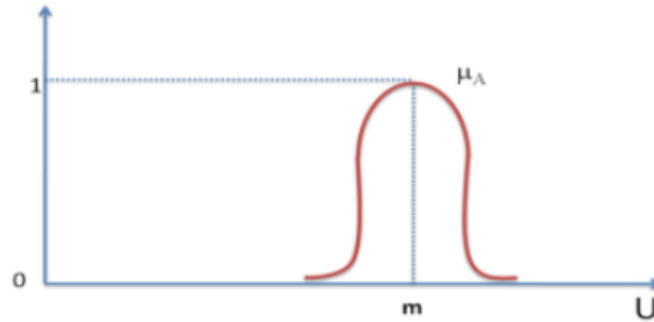


Figure 1.6- Représentation de la fonction d'appartenance gaussienne.

2^{ème} partie : Théorie de la probabilité

1.6 Introduction

Dans des domaines très différents, comme les sciences humaines, sociologiques ou les sciences médicales on s'intéresse à de nombreux phénomènes dans lesquels apparait souvent l'effet d'un hasard, ces phénomènes sont caractérisés par le fait que les résultats des observations varient d'une expérience à l'autre.

En théorie des probabilités on dit qu'un phénomène est stochastique s'il dépend de variable(s) aléatoire(s).

En pratique une variable aléatoire réelle est une application définie sur l'ensemble des éventualités c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire par exemple, le coté de la pièce dans un pile ou face.

1.7 Notions d'espace mesurable [1]

Soit Ω l'espace fondamental, il peut être fini, infini, dénombrable ou non.

1.7.1 Tribus d'évènements

Une famille F de sous-ensembles de Ω s'appelle tribu si :

- $\Omega \in F$
- $\forall A \in F \Rightarrow \bar{A} \in F$, où \bar{A} désigne le complémentaire de A
- $\forall A \in F, \forall B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$
- quel que soit la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F , on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F$

1.7.2 Espace probabilisable

- Le couple (Ω, F) où Ω ensemble fondamental et F tribu s'appelle espace mesurable ou probabilisable.
- Tout élément de F s'appelle évènement.

1.7.3 Espace probabilisé

Soit (Ω, F) un espace probabilisable, une probabilité P est une application de $F \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ où les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et I dénombrable, (Ω, F, P) s'appelle espace probabilisé.

1.7.4 Applications mesurables

Soient (Ω, F) et (E, T) deux espace probablisables toute application $X : \Omega \rightarrow E$ est dite mesurable si : $\forall A \in T \Rightarrow X^{-1}(A) \in F$.

1.8 Variables aléatoires [6] [27] [30]

1.8.1 Définition

Soient (Ω, A) et (E, F) deux espaces probablisables et X une application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E \\ \omega &\rightarrow x(\omega). \end{aligned}$$

X est dite variable aléatoire (*v. a*) si :

$$\begin{aligned} \forall B \in F, X^{-1}(B) &\in A \\ X^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que l'image réciproque de tout évènement par X est aussi un évènement. En d'autres termes, une variable est dite aléatoire si l'ensemble de ses valeurs dépend du hasard.

1.8.2 Propriétés

Si X, Y sont deux (*v. a*) alors :

- $aX + bY$ est aussi une (*v. a*), $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
- $X, Y ; \frac{X}{Y}$ ($Y \neq 0$) sont aussi des (*v. a*).
- $\forall f$ continue, $f(x)$ est aussi une (*v. a*).

1.9 Fonction de répartition [6] [30]

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , la fonction notée F définie par :

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\rightarrow [0,1] \\ F(x) &= P(X \leq x), P \text{ est une probabilité.} \end{aligned}$$

1.10 Densité de probabilité [6] [30]

Si la fonction de répartition F d'une variable aléatoire continue X est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$, de dérivée $f'(x)$, sauf peut-être en un nombre fini de points, et si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

On dit que X est une (*v. a*) absolument continue, f est appelée la densité de probabilité de X ou encore fonction de distribution de X .

1.10.1 Fonction de densité

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , f est dite fonction de densité si :

- 1- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2- f est intégrable
- 3- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$

1.11 Lois de probabilité [6] [30]

La loi de probabilité $P(x)$, est une fonction qui associe à chaque valeur x de la variable aléatoire X sa probabilité $P(X = x)$. On écrit : $P(x) = P(X = x)$ et on l'appelle loi de probabilité de X .

1.11.1 Variable discrète

Une (v. a) est dite discrète si l'ensemble des valeurs qu'elle prend est soit fini soit infini dénombrable.

1.11.1.1 Loi uniforme discrète

$$X(\Omega) = \{1,2,3 \dots \dots \dots , n\}$$

$$P(X = x) = \frac{1}{n} \quad x \in]1, n]$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

1.11.1.2 Loi de Bernoulli

On dit qu'une (v. a) X à valeur dans $\{0,1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, notée $B(p)$ si :

$$f(x, p) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad x = 0,1$$

$$E(X) = p \quad V(X) = p(1 - p).$$

1.11.1.3 Loi de Binomiale

On dit qu'une (v. a) X à valeur dans \mathbb{N} suit une loi Binomiale de paramètre (n, p) notée $B(n, p)$ si :

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x} \quad \text{pour } x \in \mathbb{N} \text{ et } C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$E(X) = n.p \quad V(X) = np(1 - p).$$

1.11.1.4 Loi de Poisson

On dit qu'une (v. a) X à valeur dans \mathbb{N} suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x \in \mathbb{N}$$

$$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda.$$

1.11.2 Variable continue

Soit X une (v. a) continue, alors la loi de X est caractérisée par l'ensemble des probabilités

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Où f_X est la densité de probabilité de X et a, b sont deux nombres réels, éventuellement infinis.

1.11.2.1 Loi uniforme

La loi uniforme sur un intervalle est la loi des "tirages au hasard" dans cet intervalle. Si a et b sont deux réels, la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ est notée $U(a, b)$, elle a pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et sa fonction de répartition définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Son espérance et sa variance mathématiques :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

1.11.2.2 Loi normal

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on dit que X suit une loi normale (loi de Laplace-Gauss) de paramètres (μ, σ^2) , notée $N(\mu, \sigma^2)$ si la loi de X a pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Et sa fonction de répartition définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx.$$

Son espérance et sa variance mathématiques :

$$E(X) = \mu \qquad \text{var}(X) = \sigma^2.$$

1.11.2.3 Loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ notée $\varepsilon(\lambda)$, si la loi de X a pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Et sa fonction de répartition définie par :

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Son espérance et sa variance mathématiques :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Tableau des lois continues

Loi	La fonction de densité	Espérance	Variance	L'écart type
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ avec $a \leq x \leq b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Normale	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$ $x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2	σ
Exponentielle	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ <i>pour $x \geq 0$</i>	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$

1.12 Les moments d'une variable aléatoire [30]

1.12.1 Espérance

Si X est une (v. a) discrète, qui prend les valeurs dans $\{x_1, \dots, x_k\}$, l'espérance (espérances mathématiques) de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i).$$

Si X est une (v. a) absolument continue de densité f , l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x).$$

Propriétés de l'espérance

- Soient a et b deux constantes et X une variable aléatoire :

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

- Soient X et Y deux (v. a) : l'espérance mathématique d'une somme de (v. a) est égale à la somme des espérances mathématiques de ces (v. a). De même pour la différence :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

- Soient X et Y deux (v. a) indépendantes :

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

1.12.2 Variance

On appelle variance de la variable aléatoire X , le nombre réel suivant :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2].$$

1.12.3 L'écart type

On appelle l'écart type la racine carrée de la variance est définie par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

1.12.4 La covariance

On appelle covariance de deux variables aléatoire X et Y , notée $Cov(X, Y)$, le nombre réel suivant :

$$cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Chapitre 02 :
Programmation mathématique

2.1 Introduction

Ce chapitre sera basé sur la programmation linéaire déterministe et non linéaire déterministe, on donne les méthodes de résolution comme simplexe, aussi les conditions nécessaires et suffisantes de K-K-T avec ou sans contraintes.

1^{ère} partie : Programmation linéaire

2.2 Introduction

Une des parties essentielle de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire qui a été introduite par le russe Kantorovitch, et la première résolution a été faite par l'américain G.B Dantzig en 1947.

La programmation linéaire consiste à résoudre entre autres des problèmes de gestion d'économie, statistique, physique...etc. La méthode de résolution générale et universelle pour ces problèmes est la méthode du simplexe [4].

2.3 Définition et modélisation d'un programme linéaire

2.3.1 Définition

Un problème de programmation linéaire (PL) consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction objectif linéaire z dépendant de n variables de décision tout en vérifiant un ensemble de contraintes linéaires (égalités et/ou inégalités) [28].

2.3.2 Modélisation [7]

Un modèle, est une construction mathématique utilisée pour représenter certains aspects significatifs des problèmes du monde réel. Il existe différents types de modèles mathématiques, mais nous nous focaliserons sur les modèles d'optimisation (PL). Il y a trois composantes principales dans un modèle d'optimisation entre autres :

-**Variables** : elles représentent les composantes du modèle qui peuvent être modifiées pour créer des configurations différentes.

-**Contraintes** : elles représentent les limitations sur les variables.

-**Fonction objectif** : cette fonction assigne une valeur à chaque configuration différente. Le terme « objectif » vient du fait que l'objectif est d'optimiser cette fonction.

Exemple 2.1 [18]

Problème de découpes :

Une entreprise cherche à découper dans un stock de barres d'aciers de 1m de longueur, en des barres de longueur respectivement de 28 cm et 45 cm.

On désire avoir au moins 36 barreaux de 28 cm et 24 barreaux de 45 cm commandés par un client.

Etablir le modèle mathématique qui minimise la chute ?

Ou bien sous la forme matricielle :

$$\begin{cases} \min(\max)Z = c'x \\ SC \\ Ax(=, \geq, \leq)b \\ x \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (2.3)$$

Où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (A est une matrice $n \times m$ et $\text{rang}(A) = m \leq n$)

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2.4.1 Forme canonique et Forme standard d'un programme linéaire [28]

La forme canonique (ou normale) d'un programme linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min Z(\max Z) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ SC \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq (\text{resp } \leq) b_i, i = 1 \cdots m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1 \cdots n \end{cases} \quad (2.4)$$

Les c_j , a_{ij} et b_i sont des nombres réels

On peut toujours écrire un programme linéaire sous forme standard à partir de la forme canonique en ajoutant des variables d'écart.

Donc la forme générale d'un problème écrit sous forme standard est :

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ SC \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad b_i \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Sa forme matricielle associée est :

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ Ax = b \\ x \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (2.5)'$$

Les contraintes principales dans la forme standard sont toujours d'égalités.

Remarque 2.1

Les problèmes de minimisation et de maximisation sont équivalents puisque

$$\min Z = -\max(-Z) \quad \text{et} \quad \max Z = -\min(-Z).$$

2.5 Domaine de solutions réalisables et solutions optimales [4]

- Tout vecteur x vérifiant les contraintes (2) et (3) pour le problème (2.2) est appelé solution réalisable (admissible)
- Une solution admissible x^0 de (1)-(3) pour le problème (2.2) est optimale si $c'x^0 = \max(c'x)$, pour toute solution réalisable.
- Le domaine réalisable pour le problème (2.5), c'est l'ensemble des solutions réalisables qui est défini par :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}.$$

2.6 Propriétés géométriques [28]

- Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si $\forall x, y \in E, \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$
Pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.
- Si \mathcal{D} est un polytope
 - Soit la solution optimale est unique et est située en un sommet de \mathcal{D}
 - Soit il existe une infinité de solutions optimales qui sont les points d'une face de \mathcal{D} ; ces solutions optimales sont donc combinaison convexe d'un nombre fini de sommets.
- Si \mathcal{D} est un polyèdre convexe, non vide mais non borné, en plus des situations décrites à ci-dessus, il est possible que le problème n'ait pas de solution optimale à distance finie, il existe alors une solution admissible (à l'infini).
- Si $\mathcal{D} = \emptyset$, le problème n'a pas de solution optimale.

2.7 Méthode du simplexe [22]

La méthode du simplexe a été développée en 1947 par George Dantzig, elle reste d'actualité pour résoudre des problèmes de grande taille. Cette méthode évolue sur la frontière du domaine réalisable de sommet en sommet adjacent, en optimisant la valeur de l'objectif jusqu'à l'optimum. Un critère d'optimalité simple permet de reconnaître le sommet optimal éventuel.

2.7.1 Base et Solution de base

Compte tenu du problème (2.5)'.

A. Base

C'est une sous matrice A_B d'ordre m extraite de A de déterminant non nul ($\det(A_B) \neq 0$), les vecteurs colonnes de A_B sont linéairement indépendants (L.I), et les variables associées aux colonnes de A_B sont appelées variables de base et les $n - m$ variables restantes sont appelées variables hors base.

Dans ce cas A et x sont décomposées de la manière suivante :

$$A = [A_B, A_H], \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow [A_B, A_H] \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix} = b \Rightarrow A_B x_B + A_H x_H = b.$$

B. Solution de base

Une solution réalisable x est dite de base si $(n - m)$ de ses composantes sont nulles, et aux autres $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$, correspondent m vecteurs $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m})$ de la matrice de condition A linéairement indépendants.

L'ensemble $J_B = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ est appelé ensemble des indices de base.

$J_H = J \setminus J_B$ ensemble des indices hors base.

Autrement dit :

Une solution réalisable $x = x(J)$ est solution de base si

$$x_H = x(J_H) = 0, \det A_B \neq 0 \text{ où } A_B = A(I, J_B), x(J_B) \geq 0.$$

La matrice A_B est appelée la matrice de base. $x_j, j \in J_B$, les composantes de base, $x_j, j \in J_H$ les composantes de hors base.

-Une solution réalisable de base x est dite non dégénérée si $x_j > 0, j \in J_B$.

L'accroissement de la fonction objectif Z est égale à :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = c' \bar{x} - c' x = c' \Delta x \quad (\bar{x} = x + \Delta x).$$

Construisons le m -vecteur $y = y(I)$ vecteur des potentiels :

$$y' = c'_B A_B^{-1}.$$

Et le vecteur $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$; le vecteur des estimations :

$$\begin{cases} \Delta' = y' A - c' \\ \Delta_j = y' a_j - c_j, j \in J. \end{cases}$$

Théorème 2.1 [28]

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ. L'inégalité $\Delta_H = \Delta(J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x, A_B\}$.

2.7.2 Algorithme du simplexe maximisation [4]

Soit $\{x, A_B\}$ une solution réalisable de base de départ et supposons que le critère d’optimalité n’est pas vérifié, c’est-à-dire l’inégalité $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$, n’est pas vérifiée.

Choisissons l’indice $j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} = \min_{\Delta_j < 0, j \in J_H} \Delta_j$

Le but de l’itération est de faire rentrer cet indice j_0 dans la base (autrement dit la colonne a_{j_0} va rentrer dans la base).

Donc il faut trouver un indice $j_1 \in J_B$ qui sortira de la base (à cet indice correspond la colonne $a_{j_1} \in A_B$), et ceci constitue l’itération qui permet le passage de la solution de base (point extrême) $\{x, A_B\}$ à la solution $\{\bar{x}, \bar{A}_B\}$ (sommet voisin) et tel que $Z(\bar{x}) \geq Z(x)$.

La nouvelle solution de base \bar{x} sera trouvée de la manière suivante :
 $\bar{x} = x + \theta l$, où l est la direction du changement de x et θ le pas le long de cette direction.
 Construisons la direction l de la manière suivante :

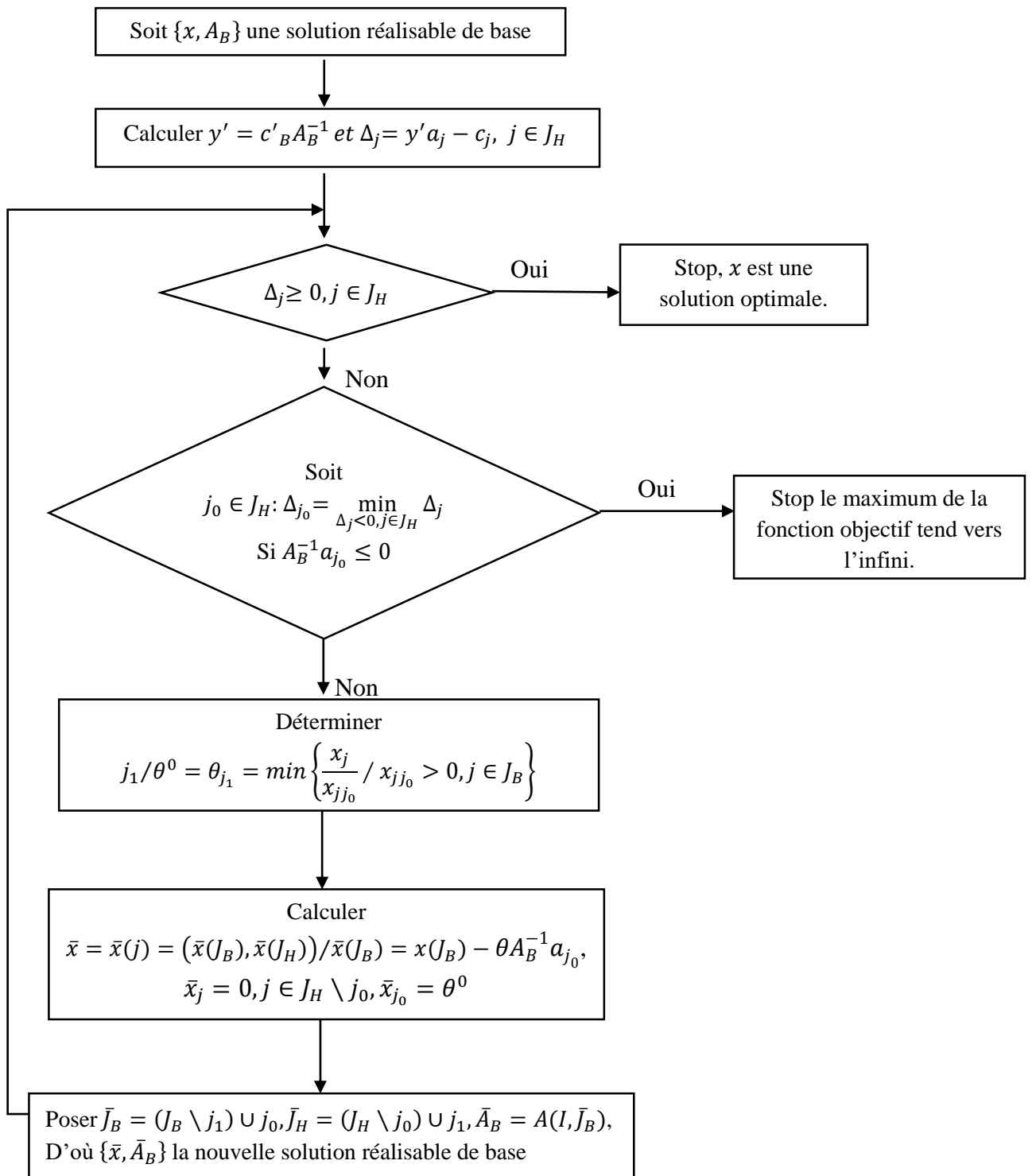
- Sur J_H posons : $l_j = \begin{cases} 0, & j \in J_H \setminus j_0 \\ 1, & j = j_0 \end{cases}$
- Sur J_B : \bar{x} doit être réalisable, donc elle doit vérifier $A\bar{x} = b$ et comme $Ax = b$ donc $\theta A l = 0$, de cette dernière relation on obtient: $l_B = l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l_H$.
 De là $\bar{x}_H = x_H + \theta l_H = \theta l_H \geq 0$ et $\bar{x}_B = x_B + \theta l_B \Rightarrow \bar{x}_j = x_j - \theta A_B^{-1} a_{j_0}, j \in J_B$.
- Si les composantes du vecteur $A_B^{-1} a_{j_0} \leq 0$, alors $\bar{x}_j \geq 0, \forall \theta \geq 0$, donc on peut prendre $\theta = \infty$ et on aura une solution infinie.
- Sinon, ils existent des composantes de $A_B^{-1} a_{j_0}$ qui nous permettent d’avoir $\bar{x}_B \geq 0$, il faut prendre un pas maximal θ^0 :

$$\theta^0 = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min \left\{ \frac{x_j}{x_{j j_0}} / x_{j j_0} > 0, j \in J_B \right\} = \theta_{j_1}, j_1 \in J_B$$

où $x_{j j_0}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de $A_B^{-1} a_{j_0}$.

La nouvelle base sera : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$ et $\bar{A}_B = (A_B \setminus a_{j_0}) \cup a_{j_1}$.

Organigramme de l'algorithme du simplexe maximisation [4]



2.7.3 Tableau du simplexe [4]

Les différents calculs qu'on aura à effectuer dans les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant :

c			c_1	c_2	c_3	...	c_m	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n	
c_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	...	a_m	a_{m+1}	...	a_j	...	a_n	θ_j
c_1	a_1	$b_1 = x_1$	1	0	0	...	0	$x_{1,m+1}$...	x_{1j}	...	x_{1n}	θ_1
c_2	a_2	$b_2 = x_2$	0	1	0	...	0	$x_{2,m+1}$...	x_{2j}	...	x_{2n}	θ_2
c_3	a_3	$b_3 = x_3$	0	0	1	...	0	$x_{3,m+1}$...	x_{3j}	...	x_{3n}	θ_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
c_m	a_m	$b_m = x_m$	0	0	0	...	1	$x_{m,m+1}$...	x_{mj}	...	x_{mn}	θ_m
$Z =$	$c'_B x_B$	Δ_j	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = 0$...	$\Delta_m = 0$	$\Delta_{m+1} = 0$...	Δ_j	...	Δ_n	

Exemple 2.2

Soit à résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + 2x_2 \\ SC \\ x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Transformons le programme sous forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3, x_4

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + 2x_2 \\ SC \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \\ x_1 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases} \quad (2.7)$$

La solution de base de départ est $x = (0,0,16,4)$ avec $J_B = \{3,4\}$ et $J_H = \{1,2\}$ le vecteur des potentiels est : $y' = c'_B A_B^{-1} = (0,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0)$.

Déterminons le vecteur des estimations Δ :

$$\Delta_j = y'a_j - c_j$$

$$\Delta_1 = y'a_1 - c_1 = (0,0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -3$$

$$\Delta_2 = y'a_2 - c_2 = (0,0) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -2$$

$$\Delta_3 = \Delta_4 = 0 \quad \text{Car on sait bien que : } \Delta_j = 0, j \in J_B.$$

Le critère d'optimalité n'est pas vérifié, donc la solution de départ n'est pas optimale.

Le premier tableau du simplexe :

c			3	2	0	0	
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	16	1	2	1	0	
0	x_4	4	1	0	0	1	$\frac{4}{1}$
		Δ_j	-3	-2	0	0	

x_1 Va entrer dans la base et x_4 sorte, la nouvelle base sera : $\bar{x} = (x_3, x_1)$.

Le deuxième tableau du simplexe :

c			3	2	0	0	
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	12	0	2	1	-1	$\frac{12}{2}$
0	x_1	4	1	0	0	1	/
		Δ_j	0	-2	0	3	

x_2 qui va entrer dans la base et x_3 sorte, la nouvelle base sera : $\bar{x} = (x_2, x_1)$.

Le troisième tableau du simplexe :

c			3	2	0	0	
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_2	6	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	/
0	x_1	4	1	0	0	1	/
		Δ_j	0	0	1	2	

Le critère d'optimalité est vérifié, donc la solution $\bar{x} = (4,6,0,0)$ est optimale pour programme standard, donc la solution optimale de (2.7) est $x^0 = (4,6)$ avec $z^0 = 24$.

2.8 Initialisation de l'algorithme du simplexe [4]

2.8.1 Méthode des deux phases

Dantzig a proposé la méthode des deux phases pour trouver le point extrême de départ, on considère le problème du PL suivant :

$$\begin{cases} \max Z = c' x \\ SC \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

La solution de base réalisable de départ non apparent.

Première phase :

La première phase de résolution du problème (2.8) consiste à déterminer une solution de base réalisable de (2.8). Pour cela on construit le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \max \Psi = -\sum_{i=1}^m x_{n+i} \\ SC \\ [Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2.9)$$

Où les x_{n+i} sont appelées des variables artificielles. Le problème (2.9) possède $n + m$ variables $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})'$ et m équations. Le vecteur $\bar{x} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)'$ est réalisable pour (2.9).

D'un autre côté, la fonction objective est bornée supérieurement :

$$-\sum_{i=1}^m x_{n+i} \leq 0, \text{ donc le problème (2.9) admet une solution optimale } X^0 = (x^0, x_a^0)'.$$

Soit $\{x^0, x_a^0\}$ une solution optimale de (2.9).

Si $x_{n+i}^0 = 0, \forall i$ et \exists un indice $i_0/a_{i_0} \in A_B^0$, faire sortir de la base a_{i_0} tel que x_{i_0} variable artificiel.

Exemple 2.3

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z = -3x_1 + x_2 \\ SC \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

a) Forme standard :

$$\begin{cases} \max Z = -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ SC \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

b) Résoudre phase (1) :

$$\begin{cases} \max Z_1 = -x_5 - x_6 \\ SC \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases} \quad (2.12)$$

Initialisation

c			0	0	0	0	-1	-1
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_5	1	1	1	-1	0	1	0
-1	x_6	2	2	3	0	-1	0	1
		Δ_j	-3	-4	1	1	0	0

1^{ère} Itération :

c			0	0	0	0	-1	-1
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	/
0	x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	/
		Δ_j	$-\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	/

2^{ème} Itération :

c			0	0	0	0	-1	-1
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	1	1	0	-3	1	/	/
0	x_2	1	1	1	-1	0	/	/
		Δ_j	0	0	0	0	/	/

La solution de base réalisable obtenue est $x = (0,1,0,1)$.

c) Résoudre phase (2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z_2 = -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ SC \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

On démarrart avec le dernier tableau simplexe de la phase (1) et en actualisant les c_j

c			-3	1	0	0
c_B	Base	B	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_4	1	1	0	-3	1
1	x_2	1	1	1	-1	0
		Δ_j	4	0	-1	0

Pas de pivot positif l'optimum est non borné $Z \rightarrow +\infty$.

2.8.2 M-méthode [4]

On construit un problème (2.14) de la manière suivante pour le problème (2.8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z = c'x - M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \\ SC \\ [Ax]_i + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, x_{n+i} \geq 0, j = \overline{1, n+m} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Où $M \gg 0$ (un nombre positif très grand) et $x_{n+i}, i = \overline{1, m}$, des variables artificielles.

Le vecteur $X = (0, b)' = (x = 0, x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m})'$ est une solution de base réalisable de (2.14) avec $A_B = (a_{n+1}, \dots, a_{n+m})$.

Exemple 2.4

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = x_1 + x_2 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

a) Forme standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

b) Rendre le second membre positif :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

c) Introduction d'une variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Initialisation

c			1	1	0	0	0	M
c_B	Base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
M	x_6	2	2	-1	-1	0	0	1
0	x_4	2	1	-2	0	1	0	0
0	x_5	5	1	1	0	0	1	0
		Δ_j	2M-1	-M-1	-M	0	0	0

1^{ère} Itération :

c			1	1	0	0	0	M
c_B	Base	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	/
0	x_4	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	/
0	x_5	4	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	/
		Δ_j	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	/

La solution optimale est $x = (1,0,0,1,4)$.

2.9 Méthode dual du simplexe [4]

Etant donné le problème primal de programmation linéaire :

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Et son dual

$$\begin{cases} \min W = b'y \\ SC \\ A'y \geq c \\ y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (2.20)$$

2.9.1 Définitions [4]

Définition 1

De l'ensemble J , choisissons un sous ensemble $J_B \in J$ et soit $A_B = (I, J_B)$ une sous matrice inversible de A .

En utilisant la matrice A_B , on construit le vecteur y :

$$y' = c'_B A_B^{-1} \quad (1)$$

Le vecteur y est dit plan dual basique et A_B la matrice de base si

$$A'_H y \geq c_H \quad (2) \quad \text{où } A_H = (I, J_H), J_H = J \setminus J_B.$$

Définition 2

Un plan dual basique y est dit non dégénéré si $A'_H y > c_H$.

En utilisant un plan dual basique de départ y , on construit les vecteurs suivants :

$$\delta(J) = A'y - c, x(J) = (x(J_B), x(J_H))', \quad x(J_B) = x_B = A_B^{-1}b, \quad x(J_H) = x_H = 0$$

Appelés coplan et pseudo plan respectivement du problème (2.19).

Remarque 2.2

Par construction $\delta(J_B) = 0$ et $\delta(J_H) \geq 0$.

Si y est un plan dual basique alors δ et x sont dits basiques.

2.9.2 Algorithme dual du simplexe [4]

Considérant un plan dual basique y avec sa matrice de base A_B .

En utilisant A_B , on calcule le pseudo plan $x = (x_B = A_B^{-1}b, x_H = 0)'$.

Si $x_B \geq 0$ Alors x est optimale pour le problème (2.19), et y optimal du dual (2.20)

Sinon, on calcule $x_{j_0} = \min x_j, (x_j < 0, j \in J_B)$ de la l'indice j_0 doit sortir de la base et la colonne a_{j_0} doit sortir de A_B , c'est-à-dire, on change de base $A_B \rightarrow \overline{A_B}$.

Le changement de base entraine le changement du plan dual y ($y \rightarrow \overline{y}$) qui entraine aussi le changement du coplan δ ($\delta \rightarrow \overline{\delta}$).

Ce changement de coplan se fera de la manière suivante : $\overline{\delta} = \delta + \Delta\delta$, où :

$$\Delta\delta_j = \begin{cases} \sigma, & j = j_0 \\ 0, & j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

Où σ est le pas dual positif ou nul.

$\Delta\delta_j = \sigma x_{j_0j}, j \in J_H$. Où x_{j_0j} est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $A_B^{-1}a_j$.

Pour que $\bar{\delta}$ soit un coplan, il faut avoir un pas maximal σ° :

$$\sigma^\circ = \min_{x_{j_0j} < 0, j \in J_H} \left\{ \frac{-\delta_j}{x_{j_0j}} \right\} = \frac{-\delta_{j_1}}{x_{j_0j_1}}$$

La nouvelle base sera $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$, et $\bar{A}_B = A(I, \bar{J}_B)$, la nouvelle itération débutera avec $\bar{x} = (\bar{x}_B = (\bar{A}_B^{-1}b, \bar{x}_H = 0)$.

Remarque 2.3

Les problèmes du type :

$$\begin{cases} \min Z = c'x \\ SC \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0, c \geq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Sont résolus dans la plupart des cas par la méthode duale du simplexe, car en ajoutant des variables d'écart, on obtient facilement la solution de base de départ. Par contre si on utilise la méthode du simplexe, on ajoute des variables d'écart et des variables artificielles et ceci, augmente la dimension du problème.

2^{ème} partie : Programmation non linéaire**2.10 Introduction**

La programmation mathématique se propose pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation. Ainsi que la conception de mise en œuvre des algorithmes de résolution, le terme programmation dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie et de la recherche opérationnelle.

Comme G. Dantzig a proposé le terme de programmation linéaire, Kuhn et Tucker proposent le nom de programmation non linéaire pour l'étude des problèmes d'optimisation non linéaire avec ou sans contraintes [25].

2.11 Notions de base [25] [11]**Définition 1**

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de \mathbb{R}^n et $x' = (x_1 \dots x_n)$ son transposé, on définit la norme euclidienne de x comme suit : $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.

Définition 2

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite affine si elle s'écrit : $f(x) = c'x + d$, où $c \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de constantes et $d \in \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est affine si chacune de ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1 \dots m$, est affine.

Dans ce cas, elle peut s'écrire $f(x) = Ax + b$, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice et $b \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur.

Définition 3

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$x \in S, \forall y \in S \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S \text{ avec } \lambda \in [0,1].$$

Définition 4

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 5

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si $-f$ est une fonction convexe, c'est-à-dire si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Définition 6

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction notée $\nabla f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée le gradient de f et est définie par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{df(x)}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{df(x)}{dx_n} \end{pmatrix}$$

Elle peut ne pas exister pour certains $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 7

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de f en x dans la direction d est donnée par :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha d) - f(x)}{\alpha}$$

Si la limite existe. De plus, lorsque le gradient existe, la dérivée directionnelle est le produit scalaire entre le gradient de f et la direction d , c'est-à-dire $\nabla f(x)'d$.

Définition 8

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle de f dans la direction d existe, alors la fonction f est dite différentiable.

Définition 9

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. La fonction $J(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ est appelée matrice jacobienne et est définie par :

$$J(x) = \nabla f(x)' = \begin{pmatrix} \nabla f(x)'_1 \\ \vdots \\ \nabla f(x)'_m \end{pmatrix}.$$

Définition 10

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. La fonction notée $\nabla^2 f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est appelée matrice hessienne ou hessien de f et est définie par :

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Remarque 2.4

La matrice hessienne est toujours symétrique.

Définition 11

Soit A une matrice carrée ($n \times n$) symétrique, A est dite :

- Semi définie positive (*resp semi définie négative*) si $x'Ax \geq 0$ (*resp* $x'Ax \leq 0$) avec $x \in \mathbb{R}^n$.

- définie positive (*resp définie négative*) si $x'Ax > 0$ (*resp* $x'Ax < 0$) avec $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

Remarque 2.5

1. Si Hessienne f ($hessf$) est définie positive (*resp définie négative*) alors f est convexe (*resp f est concave*).

2. Un autre critère qui utilise les valeurs propres :

Si λ_i (les valeurs propres de A) sont tel que :

- $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i < 0$) Alors A est défini positive (*resp définie négative*).
- $\lambda_i \geq 0$ ($\lambda_i \leq 0$) Alors A est semi défini positive (*resp semi définie négative*).

2.12 Définition d'un programme mathématique

Un programme mathématique est un problème d'optimisation dans \mathbb{R}^n s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min(\max) f(x) \\ x \in D, \end{cases} \quad (2.22)$$

Où $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, p}\}$,
avec : $g_i, h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

On appelle f la fonction objectif et D l'ensemble des solutions réalisables (admissibles).

Définition 12

Pour le problème (2.22) ci-dessus $x^* \in D$ est un :

-Minimum local (*resp maximum local*) si

$$f(x^*) \leq f(x), (\text{resp } f(x^*) \geq f(x)) \quad \forall x \in v(x)$$

Tel que $v(x)$ le voisinage de x .

- Minimum global (*resp maximum global*) si

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ resp } (f(x^*) \geq f(x)), \forall x \in D.$$

2.13 Optimisation sans contraintes [11] [25]**Définition 13**

Un problème d'optimisation sans contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.23)$$

Où $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue différentiable.

2.13.1 Les conditions nécessaires du 1^{er} ordre (cas minimum)**Théorème**

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, x^* est un minimum local (ou global) alors $\nabla f(x^*) = 0$.

2.13.2 Les conditions suffisantes du 1^{er} ordre (cas minimum)

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et convexe, alors x^* est un minimum local (ou global)

($\nabla f(x^*) = 0$).

2.13.3 Les conditions nécessaires du 2^{ème} ordre (cas minimum)**Théorème**

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , x^* est un minimum local (ou global) alors :

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnaire).
- $Hf(x^*)$ est semi définie positif (SDP).

2.13.4 Les conditions suffisantes du 2^{ème} ordre (cas minimum)**Théorème**

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 si :

- $\nabla f(x^*) = 0$ (stationnaire)
- $Hf(x^*)$ est définie positif (DP)

Alors x^* est un minimum local (ou global) strict.

2.14 Optimisation avec contraintes [11] [25]

Définition 14

On définit le problème d'optimisation avec contraintes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i \leq 0, \quad i = \overline{1, m} \\ h_j = 0 \quad j = \overline{1, p} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.24)$$

Où : $g_i, h_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 15

Les contraintes sont dite actives au point x^0 si $g_i(x^0) = 0$.

2.14.1 Qualification des contraintes (QC) [25]

Pour que la qualification des contraintes soit vérifiée en tout point $x \in D$, il suffit que l'une des conditions (1) ou (2) soit réalisée :

- (1) toutes les fonctions $g_i, i = \overline{1, m}$ et $h_j, j = \overline{1, p}$ sont linéaires ou affines (Karlin).
- (2) toutes les fonctions $g_i, i = \overline{1, m}$ sont convexes et les $h_j, j = \overline{1, p}$ sont linéaires et il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $g_i(\bar{x}) < 0, (i = \overline{1, m}), h_j(\bar{x}) = 0 (j = \overline{1, p})$ (Slater).

Pour que (QC) soit vérifiée en un point x^0 , il suffit que l'on ait :

- (3) les gradients des contraintes actives $\nabla g_i(x^0), (i = \overline{1, m})$ et $\nabla h_j(x^0), (j = \overline{1, p})$ sont linéairement indépendant (Fiacco-McCormick).

Définition 16

Le Lagrangien du programme mathématique (P_3) est défini par :

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \mu_j \in \mathbb{R}.$$

2.14.2 Les conditions nécessaires de Karush-Kuhn- Tucker (CN du 1^{er} ordre) [11] [25]

Théorème

On suppose que les fonctions $f, g_i, i = \overline{1, m}$ et $h_j, j = \overline{1, p}$ sont continument différentiables, et que l'hypothèse de (QC) est vérifiée en $x^0 \in D$ avec :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; h_j(x) = 0, j = \overline{1, p}\}$$

Alors la condition nécessaire pour que x^* soit un optimum local (global) de (2.24) est qu'il existe les multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \\ \text{avec} \\ \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (\text{condition d'optimalité}) \\ \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = \overline{1, m} \quad (\text{condition de complémentarité}) \\ \lambda_i^* \geq 0, i = \overline{1, m} \\ g_i^*(x^*) \leq 0, i = \overline{1, m} \\ h_j(x^*) = 0, j = \overline{1, p} \end{array} \right.$$

2.14.3 Les conditions nécessaires du 2^{ème} ordre

Théorème

Soient les fonctions $f, g_i, i = \overline{1, m}$ et $h_j, j = \overline{1, p}$ de classe C^2 , x^* est un minimum local qualifié alors il existe des multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tel que :

- x^* vérifier les CN de KKT
- $H_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ est semi définie positive sur l'espace tangent $T(x^*)$ au point x^* du problème (P_3) qui est défini par :

$$T(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)'y = 0, i = \overline{1, m} \text{ et } \nabla h_j(x^*)'y = 0, j = \overline{1, p}\}.$$

2.14.4 Les conditions suffisantes du 2^{ème} ordre

Théorème

Soient les fonctions $f, g_i, i = \overline{1, m}$ et $h_j, j = \overline{1, p}$ de classe C^2 , s'il existe des multiplicateurs $\lambda^* \in \mathbb{R}_+^m$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tel que :

- x^* vérifie les CN de KKT
- $H_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ est définie positive sur l'espace tangent $T(x^*)$ au point x^* du problème (2.24) qui est défini par :

$$T(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)'y \leq 0, i = \overline{1, m} \text{ et } \nabla h_j(x^*)'y = 0, j = \overline{1, p}\}$$

Alors x^* est un minimum local qualifié.

2.15 Cas particulier de la programmation mathématique

2.15.1 Résolution d'un problème quadratique convexe

La programmation quadratique est une branche de l'optimisation non linéaire où la fonction objectif à minimiser est une fonction quadratique et les contraintes définissant le domaine des solutions réalisables sont linéaires et/ou quadratiques.

Une version du problème quadratique peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x + g \\ SC \\ Ax = b \\ Qx \leq h \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.25)$$

Où D est une matrice symétrique d'ordre n , c et x sont des n -vecteurs, A est une (p, n) matrice avec $\text{rang}(A) = p$, Q est une (m, n) matrice, $\text{rang}(Q) = m$, b est un p -vecteurs et h est un m -vecteurs, et $g \in \mathbb{R}$.

2.15.1.1 Méthode de Wolfe (1959) [29]

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème de la programmation quadratique, mais on s'intéresse à la méthode la plus classique de Wolfe qui n'est que la méthode du simplexe légèrement modifiée.

Le principe de cette méthode est la résolution du système de Kuhn-Tucker et consiste à trouver une solution réalisable pour un système linéaire avec une condition supplémentaire de type $x_j \delta_j$ où x et δ sont des vecteurs de même dimension.

2.15.1.2 Algorithme de Wolfe [29]

Début

1. Introduire les données D, A, b, c
 Appliquer les conditions de KKT au problème
 Déterminer les équations de KKT
 Détermination des paramètres du programme linéaire

2. Détermination des paramètres du programme linéaire
 Introduire les variables artificielles
 Construire la matrice des contraintes
 Construire le vecteur du second membre
 Construire le vecteur des coûts

3. Initialiser le vecteur de solution (x, λ, δ, v)
 Déterminer l'ensemble des indices J_B et J_H
 Extraire les éléments de base x_B, c_B, A_B

 4. Calculer le vecteur des potentiels $y' = c'_B A_B^{-1}$
 Calculer le vecteur des estimations $\Delta'_H = y' A_H - c'_H$
 Si $\Delta'_H \geq 0$ alors la solution actuelle est optimale
 Fin Si
 Sinon aller à 5.

 5. Déterminer la variable qui entre en base tout en vérifiant la condition $\delta_j x_j = 0, j = \overline{1, n}$
 Déterminer la variable qui sort de la base
 Mettre à jour A_B, x_B, c_B, J_B, J_H et aller en 4.
- Fin.

Exemple 2.5

Soit à résoudre le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 12x_2^2 - x_1 + 4x_2 \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \min f(x) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 12x_2^2 - x_1 + 4x_2 \\ \text{sc} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases} \quad (2.27)$$

Si $(x_1, x_2, x_3, x_4)'$ est un point minimum de la fonction f , alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \geq 0$ tel que :

$$L(x, \lambda, \delta) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 12x_2^2 - x_1 + 4x_2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 3) + \lambda_2(2x_1 + x_2 + x_4 - 2) - \delta_1x_1 - \delta_2x_2 - \delta_3x_3 - \delta_4x_4$$

On applique le théorème de CS de KKT.

Alors on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + x_2 - 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \delta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 24x_2 + 4 + \lambda_1 + \lambda_2 - \delta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \lambda_1 - \delta_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \delta_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = \lambda_2 - \delta_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \delta_4$$

Et

$$\lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0$$

$$\lambda_2(2x_1 + x_2 + x_4 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - \delta_1 + \delta_3 + 2\delta_4 = 1 & L_1 \\ x_1 + 24x_2 - \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = -4 & L_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 & L_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 & L_4 \\ \delta_j x_j = 0 \\ x_j \geq 0, \delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases} \quad (2.28)$$

En multipliant (L_2) par (-1) on aura :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - \delta_1 + \delta_3 + 2\delta_4 = 1 \\ -x_1 - 24x_2 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ \delta_j x_j = 0 \\ x_j \geq 0, \delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases} \quad (2.29)$$

Nous avons obtenu un système linéaire de quatre équations

Appliquons la première phase du simplexe

On considère le problème de programmation linéaire suivante :

$$\begin{cases} \max Z = -v_1 \\ sc \\ 4x_1 + x_2 - \delta_1 + \delta_3 + 2\delta_4 + v_1 = 1 \\ -x_1 - 24x_2 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ \delta_j x_j = 0 \\ x_j \geq 0, \delta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}, v_1 \geq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Le vecteur } \bar{x} = (x, \delta, v_1)' &= (x_1, x_2, x_3, x_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, v_1)' \\ &= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)' = (0, 0, 3, 2, 0, 4, 0, 0, 1)' \end{aligned}$$

est une solution réalisable initial basique de problème.

Dressons alors les tableaux simplexe suivant :

c			0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
c_B	<i>base</i>	<i>b</i>	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	θ	
-1	x_9	1	4	1	0	0	-1	0	1	2	1	$\frac{1}{4}$	
0	x_6	4	-1	-24	0	0	0	1	-1	-1	0	/	
0	x_3	3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3	
0	x_4	2	2	1	0	1	0	0	0	0	0	2	
		Δ_j	-4	-1	0	0	1	0	-1	-2	0	/	

x_1 Entre dans la base et x_9 sort.

c			0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
c_B	<i>base</i>	<i>b</i>	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
0	x_1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
0	x_6	$\frac{17}{4}$	0	$-\frac{95}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$		
0	x_3	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		
0	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$		
		Δ_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

La solution optimale du problème linéaire $\bar{x} = (x, \delta, v_1)' = (0.25, 0, 2.75, 1.5, 0, 4.25, 0, 0, 0)'$.

La solution réalisable basique du système d'optimalité du problème quadratique est le vecteur $(\hat{x}, \hat{\delta})'$ telle que :

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)' = (0.25, 0, 2.75, 1.5)'$$

$$\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3, \hat{\delta}_4)' = (0, 4.25, 0, 0)'$$

2.15.2 Résolution d'un problème fractionnaire

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif mais sous la forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non linéaires, soumis à un ensemble de contraintes. Etant donné f, h et g_i pour $i \in \{1, \dots, m\}$ des fonctions réelles définies de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , avec h ne s'annulant pas sur un sous-ensemble I .

Le problème de programmation fractionnaire (P_F) consiste à déterminer un élément $x \in I$ optimisant la fonction $\frac{f(x)}{h(x)}$ (avec $h(x) \neq 0$) sur un domaine réalisable I défini par le système de contraintes $g_i(x) \leq 0$ ($i \in \{1, \dots, m\}$) avec $x \in \mathbb{R}^n$. Il a donc la forme suivante :

$$(P_F) \begin{cases} \max \frac{f(x)}{h(x)} \\ SC \\ I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, m\}\} \end{cases}$$

Vérifiant les hypothèses classiques suivantes :

- Les fonctions f, h et g_i pour $i \in \{1, \dots, m\}$ sont continues sur \mathbb{R}^n .
- I est un domaine non vide et borné de \mathbb{R}^n .
- $h(x) > 0, \forall x \in X$.

Remarque 2.6

(P_{LF}) est dit programme linéaire fractionnaire, lorsque f, h et g sont des fonctions linéaires et affines de la variable x .

2.15.2.1 Méthode de A.Cambini [12]

On considère le programme fractionnaire linéaire continu (2.31) :

$$(2.31) \begin{cases} \max Z = \frac{c'x + \alpha}{d'x + \beta} \\ x \in S \end{cases}$$

Où $S = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b \geq 0\}$ avec α et β sont des réel, c et d sont des vecteur de \mathbb{R}^n , A est une matrice réelle de format $m \times n$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m .

Définition 17

On dira que x^* est solution optimale niveau pour (2.31) si et seulement si x^* est solution optimale du problème (P_θ) pour certaine valeur de θ :

$$(P_\theta) \begin{cases} \max c'x + \alpha \\ x \in S \\ d'x + \beta = \theta \end{cases}$$

L'algorithme de Cambini et al. génère une séquence finie $x^k, k = \overline{1, l}$ de solutions optimales niveau dont la première est trouvée de la façon suivante :

Résoudre le programme linéaire

$$(P_{\theta_0}) \begin{cases} \min d'x + \beta \\ x \in S \end{cases}$$

Soit x^0 est unique, alors elle est une solution niveau, sino résoudre le programme linéaire

$$(P_{\theta_1}) \begin{cases} \max c'x + \alpha \\ x \in S \end{cases}$$

Si (P_{θ_1}) n'admet pas de solution, alors la valeur de fonction objectif est infinie, sinon une solution optimale x^1 de (P_{θ_1}) est aussi une solution optimale niveau.

Théorème [12]

Si $J = \{j \in N / \hat{d}_j > 0\} = \emptyset$, ou $\hat{v} = \hat{\beta}\hat{C}_N - \hat{\alpha}\hat{d}_N$ est tel que $\hat{v}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in N$, alors x^k est une solution optimale du problème (2.31).

2.15.2.2 Algorithme [12]

Etape 1 :

Trouvé la solution optimale niveau x^1 .

Si une telle solution n'existe pas, alors $\sup \left\{ \frac{cx+\alpha}{dx+\beta} / x \in S \right\} = +\infty$ terminer.

Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape 2.

Etape 2 :

Si $J = \{j \in N / \hat{d}_j > 0\} = \emptyset$, terminer x^k est une solution optimale du problème (2.31).

Sinon soit W tel que $\frac{\hat{c}_w}{\hat{d}_w} = \max \left(\frac{\hat{c}_j}{\hat{d}_j} \right)$.

Si $\hat{\gamma}_j > 0$, aller en 3.

Sinon, terminer, x^k est une solution optimale du problème (2.31).

Etape 3 :

La variable hors base x_w entre dans la base au moyen d'une opération pivot, poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 2.

Si une telle opération n'est pas possible, terminer: $\sup \left\{ \frac{cx+\alpha}{dx+\beta} / x \in S \right\} = \frac{\hat{c}_w}{\hat{d}_w}$.

Chapitre 03 :
Programmation mathématique floue

3.1 Introduction

L'origine de l'optimisation floue est l'article de Zadeh et Bellmann publié en 1970 qu'introduisent les concepts des contraintes floues, objectif flou, décision floue...

La programmation mathématique floue (PLF) est un domaine où les données sont imprécises ou incertaines avec une imprécision de nature floue et des cas où les contraintes et/ou l'objectif ne sont pas des impératifs stricts.

On distingue deux cas :

- Le cas où les inégalités (ou égalités) sont relaxées, on parlera du programme flexible.
- Le cas où les données imprécises sont représentées par des ensembles flous on parlera de programmation robuste [21].

3.1.1 Définition [3]

Un modèle général d'un (PLF) est présenté sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{min} \widetilde{Z}(x) = \widetilde{c}'x \\ SC \\ \widetilde{A}x \begin{pmatrix} \widetilde{\geq} \\ \widetilde{\leq} \\ \widetilde{=} \end{pmatrix} \widetilde{b} \\ x \geq 0 \\ avec \widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. \quad (PLF)$$

Où \widetilde{c}_j , \widetilde{a}_{ij} et \widetilde{b}_i sont des nombres flous.

Les symboles \widetilde{min} et $\widetilde{\leq}$ (inégalité floue appelée aussi inégalité flexible) respectivement représentent les versions flous de minimiser et \leq .

3.2 Programmation flexible [21]

3.2.1 Programmation linéaire flexible

3.2.1.1 Décision dans un environnement flou

La décision qui doit satisfaire l'objectif et les m contraintes est donc représentée par un ensemble flou, l'intersection de ces derniers et dont la fonction d'appartenance est μ_D telle que :

$$\mu_D(x) = \min(\mu_i(x)/i = \overline{0, m})$$

La meilleure décision est déterminée par la résolution du problème suivant :

$$\max(\mu_D(x) / x \in X) = \max \{ \min(\mu_i(x)/i = \overline{0, m}) / x \in X \}.$$

3.2.1.2 Résolution d'un programme linéaire flexible [1] [20] [21]

Considérons le programme linéaire flexible suivant :

$$\begin{cases} \widetilde{\text{Max}} Z = c'x \\ \text{sc} \\ A_i x \tilde{\theta} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$\tilde{\theta} \in \{\tilde{\leq}, \tilde{=}, \tilde{\geq}\}$ sont les version flexibles de $\leq, =, \geq$ respectivement.

La notation \sim désigne le fait que l'objectif et les contraintes ne sont pas des impératifs stricts.

Selon Zimmermann, le programme (3.1) peut s'interpréter comme suit :

$x \in (\mathbb{R}^+)^n$ telle que :

$$\begin{cases} c'x \tilde{\leq} Z_0 \\ \text{sc} \\ A_i x \tilde{\theta} b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Z_0 : est une valeur fixée.

L'objectif flou et les contraintes flous peuvent être représentés par les ensembles flous respectifs U_0 et $U_i, i = \overline{1, m}$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement μ_0 et $\mu_i, i = \overline{1, m}$ est définie selon que $\tilde{\theta}$ est $\tilde{\leq}, \tilde{=}$ ou $\tilde{\geq}$ comme suit :

- $\tilde{\theta}$ est $\tilde{\leq}$:

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{A_i x - b_i}{d_i} & \text{si } b_i \leq A_i x \leq b_i + d_i \\ 0 & \text{si } A_i x > b_i + d_i \\ & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Représentation graphique

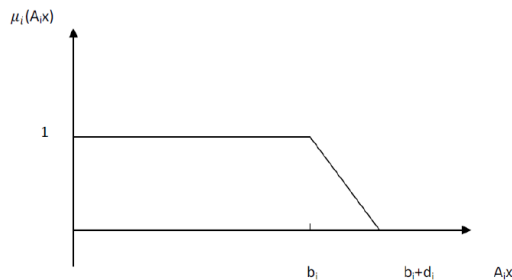


Figure 3.1- Contraintes du type $A_i(x) \cong b_i, i = \overline{1, m}$.

- $\tilde{\theta}$ est \cong :

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i x = b_i \\ 1 - \frac{A_i x - b_i}{d_i} & \text{si } b_i < A_i x \leq b_i + d_i \\ 1 - \frac{b_i - A_i x}{d_i} & \text{si } b_i - d_i \leq A_i x < b_i \\ 0 & \text{si } A_i x > b_i + d_i, A_i x < b_i - d_i \\ & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Représentation graphique :

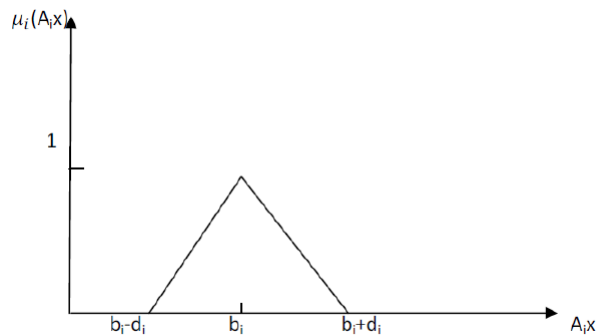


Figure 3.2- Contraintes du type $A_i(x) \cong b_i, i = \overline{1, m}$.

- $\tilde{\theta}$ est \cong :

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i x \geq b_i \\ 1 - \frac{b_i - A_i x}{d_i} & \text{si } b_i - d_i \leq A_i x \leq b_i \\ 0 & \text{si } A_i x < b_i - d_i \\ & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Représentation graphique

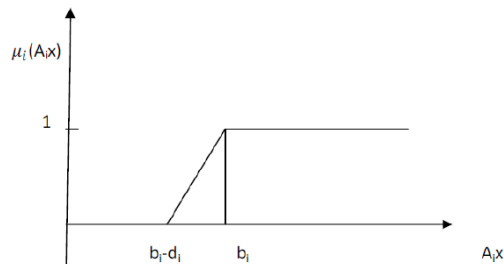


Figure 3.1- Contraintes du type $A_i(x) \cong b_i, i = \overline{1, m}$.

Remarque 3.1

La méthode flexible joue un rôle identique à la fonction objectif et aux contraintes, on détermine la fonction d'appartenance de la fonction objectif de la même manière que les contraintes. Il faut fixer un objectif à atteindre et le degré de satisfaction.

Méthode d'agrégation des degrés de satisfaction

Il s'est basé sur le principe d'agrégation de Bellman et Zadeh pour déduire une fonction objectif finale à maximiser. Cette fonction exprime le degré total de satisfaction

$$\mu_D(x) = \min(\mu_0(x), \mu_1(x) \dots \mu_m(x)).$$

Chercher la solution qui réalise le meilleur degré de satisfaction. La solution optimale est alors déterminée par résolution du problème déterministe :

$$\max_{x \geq 0} \mu_D(x)$$

Qui est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \max Z = \lambda \\ SC \\ \lambda \leq \mu_i(x), i = \overline{0, m} \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Exemple 3.1

On considère le programme flexible suivant :

$$\begin{cases} \overline{\max} Z = x_1 + 3x_2 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 \gtrsim -4 \\ 5x_2 \gtrsim 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

On détermine les fonctions d'appartenance de l'objectif et des contraintes sachant que l'objectif n'excède la valeur $Z_0 = 4$ et que les écarts de tolérance de l'objectif et des contraintes sont respectivement $d_0 = 1, d_1 = 2, d_2 = 3$.

Selon Zimmermann, le programme (3.4) devient :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \lesssim 4 \\ SC \\ 2x_1 - x_2 \gtrsim -4 \\ 5x_2 \lesssim 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Transformation de l'objectif :

$$\begin{aligned} \mu_0(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 1 - \frac{x_1 + 3x_2 - 4}{1} & \text{si } 4 \leq x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 0 & \text{si } x_1 + 3x_2 > 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 5 & \text{si } 4 \leq x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 0 & \text{si } x_1 + 3x_2 > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Transformation de la 1^{ère} contrainte

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ 1 - \frac{-4 - 2x_1 + x_2}{2} & \text{si } -6 \leq 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 0 & \text{si } 2x_1 - x_2 < -6 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } 2x_1 - x_2 \geq -4 \\ \frac{2x_1 - x_2 + 6}{2} & \text{si } -6 \leq 2x_1 - x_2 \leq -4 \\ 0 & \text{si } 2x_1 - x_2 < -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Transformation de la 2^{ème} contrainte

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5x_2 \leq 2 \\ 1 - \frac{5x_2 - 2}{3} & \text{si } 2 \leq 5x_2 \leq 5 \\ 0 & \text{si } 5x_2 > 5 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5x_2 \leq 2 \\ \frac{-5x_2 + 5}{3} & \text{si } 2 \leq 5x_2 \leq 5 \\ 0 & \text{si } 5x_2 > 5 \end{cases}$$

Le problème déterministe (DP) associé à (3.4) est

$$(DP) \begin{cases} \max \lambda \\ SC \\ \lambda \leq \frac{-x_1 - 3x_2 + 5}{1} \\ \lambda \leq \frac{2x_1 - x_2 + 6}{2} \\ \lambda \leq \frac{-5x_2 + 5}{3} \\ 0 \leq \lambda \leq 1, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max \lambda \\ SC \\ \lambda + x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2\lambda - 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 3\lambda + 5x_2 + x_5 = 5 \\ \lambda + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}, \quad \lambda > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Résolution du problème (DP) par la méthode du simplexe.

c			0	0	0	0	0	0	1	θ_j
c_B	base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ	
0	x_3	5	1	3	1	0	0	0	1	5
0	x_4	6	-2	1	0	1	0	0	2	3
0	x_5	5	0	5	0	0	1	0	3	$\frac{5}{3}$
0	x_6	1	0	0	0	0	0	1	1	1
		Δ_j	0	0	0	0	0	0	-1	
0	x_3	4	1	3	1	0	0	-1	0	
0	x_4	4	-2	1	0	1	0	-2	0	
0	x_5	2	0	5	0	0	1	-3	0	
1	λ	1	0	0	0	0	0	1	1	
		Δ_j	0	0	0	0	0	1	0	

Infinité de solutions optimales d'après l'algorithme.

3.2.2 Programmation non linéaire flexible [21]

Considérons le problème de programmation non linéaire, (noté PNL), suivant :

$$(PNL) \begin{cases} \max f(x) \\ SC \\ g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (3.8)$$

Où $x' = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur à n composantes, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ et $g_i(x) = g_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = \overline{1, m}$, sont des fonctions réelles à n variables x_1, \dots, x_n .

En s'inspirant du modèle de PL flexible donné par Sakawa on a porté les changements suivants au problème PNL : il est possible de relaxer l'exigence qui consiste en une maximisation flexible de la fonction objectif sous des contraintes flexibles. Pour une telle situation, le problème de PNL est transformé en un problème de programmation non linéaire floue flexible donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \overline{\max} f(x) \\ SC \\ g_i(x) \lesssim 0, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (3.9)$$

Où les symboles \overline{max} et $\overline{\leq}$ représentent les relations flexibles ou bien flous de maximiser et \leq respectivement du cas usuel. Cela veut dire que « la fonction objectif doit être maximisée aussi que possible » et « les contraintes doivent être satisfaites aussi bien que », respectivement.

Toute exigence par rapport à la fonction objectif $f(x)$ et aux contraintes $g_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, peut être représentée par les fonctions d'appartenance $\mu_i(g_i(x))$, $i = \overline{0, m}$, par convention, on note $\mu_0(f_i(x))$ par $\mu_0(g_0(x))$,

Pour exprimer le degré de satisfaction, on doit déterminer la fonction d'appartenance subjective $\mu_i(g_i(x))$, qui est une fonction monotone décroissante par rapport à g_i sous la forme suivante :

$$\mu_i(g_i(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_i(x) \leq g_i^1 \\ d_i(x) & \text{si } g_i^1 \leq g_i(x) \leq g_i^0, \quad i = \overline{0, m} \\ 0 & \text{si } g_i^0 \leq g_i(x) \end{cases}$$

Où

g_i^1 représente la valeur de g_i pour laquelle la fonction d'appartenance est égale à 1 ;

g_i^0 représente la valeur de g_i pour laquelle la fonction d'appartenance est égale à 0 ;

Pour les valeurs intermédiaires, la valeur de g_i est exprimée par $d_i(x)$ qui est une fonction monotone décroissante par rapport à g_i .

En utilisant les fonctions d'appartenance et en se basant sur le principe de Bellman et Zadeh, Sakawa a défini « le degré total de satisfaction » du décideur par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_D(x) = \min_{i=\overline{0, m}} \{\mu_i(g_i(x))\}.$$

La solution est alors, celle qui réalise le meilleur degré de satisfaction, c'est-à-dire :

Chercher la solution x^* telle que $\max_x \min_{i=\overline{0, m}} \{\mu_i(g_i(x))\}$.

En introduisant une variable auxiliaire λ , le problème est transformé au problème de maximisation suivant :

$$\begin{cases} \max \lambda \\ \lambda \leq \mu_i(g_i(x), i = \overline{0, m}) \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Dans ce cas, on peut utiliser n'importe quel algorithme de la programmation non linéaire, pour résoudre ce problème.

Remarque 3.2 [21]

Les différentes approches proposées dans la littérature, pour résoudre les problèmes d'optimisation floue (PLF et PNLF), dépendant :

1. de la façon dont le flou intervient dans le modèle (inégalités floues, contraintes floues, maximisation floue, fonction floue....)
2. de la nature de l'aspect flou dans le modèle (nombre flou selon Dubois, nombre flou du type L-R, nombre flou triangulaire symétrique ou non symétrique...).

Exemple 3.2

On considère le programme non linéaire flexible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{min}f(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \\ SC \\ \qquad \qquad \qquad 2x_1 - x_2 \widetilde{\geq} -4 \\ \qquad \qquad \qquad 5x_2 \widetilde{\leq} 2 \\ \qquad \qquad \qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

On détermine les fonctions d'appartenance de l'objectif et des contraintes sachant que l'objectif excède la valeur $Z_0 = 2$ et que les écarts de tolérance de l'objectif et des contraintes sont respectivement: $d_0 = 1, d_1 = 2, d_2 = 3$.

Transformation de l'objectif :

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ 1 - \frac{2 - (-x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2)}{1} & \text{si } 1 \leq -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 0 & \text{si } -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 < 1 \end{cases}$$

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1 - 3x_2 - 1 & \text{si } 1 \leq -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 0 & \text{si } -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 < 1 \end{cases}$$

Les transformations de la 1^{ère} contrainte et de la 2^{ème} contrainte sont faites dans l'exemple(3.1).

$$\begin{cases} \max \lambda \\ SC \\ \lambda \leq x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1 - 3x_2 - 1 \\ \lambda \leq \frac{2x_1 - x_2 + 6}{2} \\ \lambda \leq \frac{-5x_2 + 5}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \max \lambda \\ SC \\ \lambda - x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_1 + 3x_2 \leq -1 \\ 2\lambda - 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3\lambda + 5x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Le point minimum du problème (3.11) est le vecteur $x^* = (0.1 \times 10^8, 0)$, $\lambda = 1$

N.B La résolution de ce problème est faite par Lingo.

3.3 Programmation robuste [20] [23]

La programmation robuste couvre des problèmes où les coefficients des contraintes sont des données incertaines et l'inégalité (égalité) est remplacée par inclusion \subseteq .

3.3.1 Programmation linéaire inexacte (Solster)

Un programme linéaire inexact est un programme de la forme

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ x_1K_1 + x_2K_2 + \dots + x_nK_n \subseteq K \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.14)$$

Où : $(K_j); j = \overline{1, n}$ et K sont des ensembles convexes de \mathbb{R}^n ; \subseteq est l'inclusion entre ensemble et $+$ représente l'addition ensembliste, elle est définie comme suit :

Soient A et B deux ensembles, alors $A + B = \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\}$.

3.3.2 Résolution d'un programme linéaire robuste (flou)

Un programme linéaire robuste est un programme linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \dots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n [\subseteq] \tilde{b} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.15)$$

Où : $(\tilde{A}_j); j = \overline{1, n}$ sont des sous-ensembles flous de \mathbb{R} et " \oplus " addition des ensembles flous et " $[\subseteq]$ " inclusion entre ensembles flous.

On représente l'ensemble des contraintes de (3.15) par :

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \dots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n [\subseteq] \tilde{b} / x \geq 0\}.$$

Théorème [11]

On dit que $x^0 \in E$, est optimal pour (3.15), si et seulement si $x^0 \in E$ est optimal pour le programme suivant :

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ x_1 \tilde{A}_1^\alpha + x_2 \tilde{A}_2^\alpha + \dots + x_n \tilde{A}_n^\alpha \subseteq \tilde{b}^\alpha \quad \forall \alpha \in [0; 1] \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.16)$$

(3.16) est un programme semi-infini, c'est-à-dire un programme avec une infinité de contraintes.

En supposant que les images des fonctions d'appartenance des sous-ensembles flous sont discrètes et finies, on obtient un programme linéaire avec un nombre fini de contraintes comme suit :

Proposition [23]

Si $Im \mu \tilde{A}_j = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ avec $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p < 1$, alors :

$$x \in E = \{x \in \mathbb{R}^n / x_1 \odot \tilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \tilde{A}_2 \oplus \dots \oplus x_n \odot \tilde{A}_n [\subseteq] \tilde{b} / x \geq 0\}$$

Si et seulement si

$$x \in E' = \left\{ \begin{array}{l} x_1 \tilde{A}_1^{\alpha_k} + x_2 \tilde{A}_2^{\alpha_k} + \dots + x_n \tilde{A}_n^{\alpha_k} \subseteq \tilde{b}^{\alpha_k} \quad k = \overline{1, p} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

3.3.3 Cas des nombres flous [1]

Si les composantes \tilde{a}_{ij} de \tilde{A} et \tilde{b}_i de \tilde{b} sont des nombres flous dont les ensembles de niveau respectifs sont des intervalles compacts.

Alors, le programme (3.15) s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} \max Z = c'x \\ SC \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1} \quad \overline{\tilde{a}}_{11}^{\alpha_1} \right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1} \quad \overline{\tilde{a}}_{12}^{\alpha_1} \right] x_2 + \dots + \left[\underline{\tilde{a}}_{1n}^{\alpha_1} \quad \overline{\tilde{a}}_{1n}^{\alpha_1} \right] x_n \subseteq \left[\underline{\tilde{b}}_1^{\alpha_1} \quad \overline{\tilde{b}}_1^{\alpha_1} \right] \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{21}^{\alpha_2} \quad \overline{\tilde{a}}_{21}^{\alpha_2} \right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{22}^{\alpha_2} \quad \overline{\tilde{a}}_{22}^{\alpha_2} \right] x_2 + \dots + \left[\underline{\tilde{a}}_{2n}^{\alpha_2} \quad \overline{\tilde{a}}_{2n}^{\alpha_2} \right] x_n \subseteq \left[\underline{\tilde{b}}_2^{\alpha_2} \quad \overline{\tilde{b}}_2^{\alpha_2} \right] \\ \vdots \\ \left[\underline{\tilde{a}}_{m1}^{\alpha_p} \quad \overline{\tilde{a}}_{m1}^{\alpha_p} \right] x_1 + \left[\underline{\tilde{a}}_{m2}^{\alpha_p} \quad \overline{\tilde{a}}_{m2}^{\alpha_p} \right] x_2 + \dots + \left[\underline{\tilde{a}}_{mn}^{\alpha_p} \quad \overline{\tilde{a}}_{mn}^{\alpha_p} \right] x_n \subseteq \left[\underline{\tilde{b}}_m^{\alpha_p} \quad \overline{\tilde{b}}_m^{\alpha_p} \right] \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, p} \end{cases} \quad (3.17)$$

Où :

- $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k} = \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\}$
- $\underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k} = \text{Inf} \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\}$
- $\overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k} = \text{Sup} \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{a}_{ij}}(x) \geq \alpha_k\}$
- $\tilde{b}_i^{\alpha_k} = \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k\}$
- $\underline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k} = \text{Inf} \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k\}$
- $\overline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k} = \text{Sup} \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\tilde{b}_i}(x) \geq \alpha_k\}$

Remarque 3.3 [20]

Puisque \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i sont des nombres flous donc ce sont des ensembles flous convexes normalisés de \mathbb{R} .

Les ensembles $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k}$ et $\tilde{b}_i^{\alpha_k}$ sont des convexes dans \mathbb{R} , et par hypothèse $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k}$ et $\tilde{b}_i^{\alpha_k}$ sont compacts.

Par conséquent :

$$\tilde{a}_{ij}^{\alpha_k} = [\underline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k}, \overline{\tilde{a}}_{ij}^{\alpha_k}] , \tilde{b}_i^{\alpha_k} = [\underline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k}, \overline{\tilde{b}}_i^{\alpha_k}]$$

3.3.4 Cas des nombres flous de types L-R [1]

Si les composantes \tilde{a}_{ij} de \tilde{A} et \tilde{b}_i de \tilde{b} sont des nombres flous de type L-R.

$$\tilde{a}_{ij} = (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}) \text{ et } \tilde{b}_i = (m_i, \alpha_i, \beta_i).$$

Où :

$$\begin{cases} \alpha_{ij} > 0 \\ \beta_{ij} > 0 \\ \alpha_i > 0 \\ \beta_i > 0 \end{cases}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est admissible pour le programme (3.15) si et seulement si x vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j = m_i & i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}x_j \leq \alpha_i & i = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n \beta_{ij}x_j \leq \beta_i & i = \overline{1, m} \end{cases}$$

Exemple 3.3

En posant $\alpha = 0.6$ et en utilisant l'algorithme du simplexe, on trouve la solution optimale du problème (3.18) :

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + x_2 \\ SC \\ \widetilde{a}_1 x_1 + \widetilde{a}_2 x_2 \subseteq \widetilde{b} \\ 2x_1 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Sachant que :

$$\widetilde{a}_1 = \{(2/0.4), (1/0.9), (5/0.2), (5/0.7)\}$$

$$\widetilde{a}_2 = \{(1/0.3), (3/0.6), (-2/0.1), (4/0.8)\}$$

$$\widetilde{b} = \{(5/0.6), (2/0.1), (4/0.2), (-3/0.7)\}$$

On aura :

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + x_2 \\ SC \\ [1,5]x_1 + [3,4]x_2 \subseteq [-3,5] \\ 2x_1 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + x_2 \\ SC \\ x_1 + 3x_2 \geq -3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ 2x_1 \geq -4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + x_2 \\ SC \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_5 = -4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + x_2 \\ SC \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \quad (3.22)$$

c			3	1	0	0	0	θ_j
c_B	base	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	3	-1	-3	1	0	0	
0	x_4	5	5	4	0	1	0	1
0	x_5	4	-2	0	0	0	1	
		Δ_j	-3	-1	0	0	0	
0	x_3	4	0	$-\frac{11}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	
3	x_1	1	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	
0	x_5	6	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	1	
		Δ_j	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	0	

Le critère d'optimalité est vérifié, tous les $\Delta_j \geq 0$

$x^* = (1,0)$ est la solution optimal avec $Z^* = 3$.

3.4 Chance-constrained programming with fuzzy coefficients

3.4.1 Programme linéaire flou

Un programme linéaire flou est un programme linéaire en présence d'intervalle flou. Dans ce que suit on s'intéresse au programme linéaire avec contraintes flous et objectif déterministe.

Considérons le programme linéaire flou suivant :

$$(P_F) \begin{cases} \max cx \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Où \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i pour $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ sont des intervalles flous.

3.4.2 Chance-constrained programming with fuzzy coefficients

Dubois [17] a montré que la méthode « Chance- constrained programming » peut être appliquée aux contraintes en présence d'intervalle flous. Cette dernière permet de transformer les contraintes floues en des contraintes déterministes équivalentes.

Dubois a remplacé dans « Chance-constrained programming » due à Charnes et Cooper [15], probabilité par :

1. Possibilité.
2. Nécessité.

Compte tenu des relations existantes entre possibilité et nécessité (définies dans chapitre 1) à savoir que nécessité d'un ensemble flou est inférieure à sa possibilité, il a été déduit que les contraintes résultantes du deuxième cas sont plus fortes que celles résultant du premier, donc on distingue entre les deux comme suit :

1. Contraintes faibles :

$$(P_p)' \begin{cases} \max cx \\ pos(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

2. Contraintes fortes :

$$(P_n)' \begin{cases} \max cx \\ nec(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Néanmoins, pour les deux autres possibilités notées *pos3* et *nec2*, les contraintes suivantes sont intermédiaires :

- En utilisant *pos3* :

$$(P_{p3})' \begin{cases} \max c'x \\ pos_3(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

- En utilisant *nec2* :

$$(P_{n2})' \begin{cases} \max c'x \\ nec_2(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Remarque

D'après les préliminaires on a : soient \tilde{A} et \tilde{B} deux ensembles flous d'un même référentiel X quel que soit $\alpha \in]0,1]$, on a :

- $(\tilde{A} + \tilde{B})^\alpha = \tilde{A}^\alpha + \tilde{B}^\alpha$
- $(\lambda\tilde{A})^\alpha = \lambda\tilde{A}^\alpha$.

En vertu des propriétés de *pos*, *nec*, *pos3* et *nec2* qui consistent à transformer les inégalités entre ensemble flous en inégalités entre nombres réels [17] les contraintes ci-dessus énumérées peuvent s'écrire sous formes linéaires déterministes comme suit :

1. Cas des contraintes faibles :

$$(P_P^c)'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \tilde{b}_i^{\alpha_i} \quad , \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Où $\tilde{a}_{ij}^{\alpha_i} = [\underline{\tilde{a}}_{ij}^\alpha, \overline{\tilde{a}}_{ij}^\alpha]$ $\tilde{b}_i^{\alpha_i} = [\underline{\tilde{b}}_i^\alpha, \overline{\tilde{b}}_i^\alpha]$

2. Cas de contraintes fortes :

$$(P_n^c)'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \tilde{b}_i^{1-\alpha_i} \quad , \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Où $\tilde{a}_{ij}^{1-\alpha_i} = [\underline{\tilde{a}}_{ij}^{1-\alpha}, \overline{\tilde{a}}_{ij}^{1-\alpha}]$ $\tilde{b}_i^{1-\alpha_i} = [\underline{\tilde{b}}_i^{1-\alpha}, \overline{\tilde{b}}_i^{1-\alpha}]$

3. Cas de contraintes intermédiaires :

- En utilisant *pos3* :

$$(P_{P3})'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \tilde{b}_i^{\alpha_i} \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

- En utilisant *nec2* :

$$(P_{n2})'' \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \tilde{b}_i^{1-\alpha_i} \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Chapitre 04 :
Programmation mathématique
stochastique

4.1 Introduction

Les problèmes stochastiques sont des programmes mathématiques où certaines des données incorporés à l'objectif ou les contraintes sont incertaines. L'incertitude est habituellement caractérisée par une distribution de probabilité sur les paramètres.

Les problèmes linéaires stochastiques entre autres sont des problèmes mal posés mathématiquement, étant donné qu'il faille optimiser une fonction stochastique et respecter des contraintes stochastiques.

Définition 4.1 [28]

Dans un cas général, le problème linéaire stochastique s'écrit :

$$\begin{cases} \min Z(\omega) = c'(\omega)x \\ A(\omega)x \leq b(\omega) \\ x \in T_1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Où (A, c, b) dont les paramètres de dimension respective $(m \times n)$, $(n \times 1)$ et $(m \times 1)$ est un vecteur aléatoire sur un espace de probabilité (Ω, F, P) et T_1 est un polyèdre convexe déterministe, par exemple :

$$T_1 = \{x/x \geq 0, A_1x \leq b\}$$

Nous supposons que les contraintes sont fournies sous forme d'inégalités (introduction de variables d'écart) mais ceci sans aucune restriction.

Le symbole "" signifie qu'il s'agit d'une optimisation imprécise du point de vue mathématique.

4.2 Les différentes approches

On distingue deux approches de la programmation linéaire stochastique :

- L'approche passive ou "wait and see"
- L'approche active ou "here and now"

4.2.1 L'approche passive ou "wait and see"

Dans cette approche le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires et résoudre le programme déterministe résultant. Dans ce cas on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou son espérance mathématique (et/ou) sa variance.

4.2.2 L'approche active ou "here and now"

Cette approche est basée sur la décision sur x ou stratégie sur x qui est prise à l'avance avant la réalisation des variables aléatoires.

4.3 Critère d'optimisation du problème équivalent

4.3.1 Cas des objectifs aléatoires

Plusieurs façons de définir la fonction objectif du problème équivalent peuvent être considérées.

Soit: $T = \{x \in \mathbb{R}^n / A(x) \leq b, x \geq 0\}$.

4.3.1.1 Le critère de l'espérance mathématique (E-modèle) ou critère de Bayes

Ce critère consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique

$$\begin{cases} \min E(Z(\omega)) \\ x \in T \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3.1.2 Le critère de la variance (V-modèle)

Ce critère consiste à minimiser la variance de l'objectif comme suit :

$$\begin{cases} \min \sigma^2(Z(\omega)) = \min x'Vx \\ x \in T \end{cases} \quad (4.3)$$

Avec V est la matrice de covariance du vecteur aléatoire $c(\omega)$.

4.3.1.3 Le critère espérance-variance (E-V modèle)

Ce modèle consiste à minimiser la variance de l'objectif $Z(\omega)$ tout en réalisant un niveau de rendement minimum Z_0 fixé préalablement par le décideur.

$$\begin{cases} \min_{x \in T} \sigma^2(Z(\omega)) \\ E(Z(\omega)) \geq Z_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Le problème est de choisir Z_0 convenable.

4.3.1.4 Le critère de risque minimal (P-modèle)

Ce critère est basé sur la maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau u choisi par le décideur, où ce paramètre u à fixer, correspond à un niveau de risque à respecter.

Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \max P(c'(\omega)x \leq u) \\ x \in T \end{cases} \quad (4.5)$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien est donnée par le programme fractionnel suivant :

$$\begin{cases} \max \frac{-\bar{c}'x + u}{\sqrt{x'Vx}} \\ x \in T \end{cases} \quad (4.6)$$

\bar{c} : Représente l'espérance mathématique du vecteur aléatoire $c(\omega)$

V : La matrice covariance du vecteur aléatoire $c(\omega)$

$x'Vx$: La variance de l'objectif $c'(\omega)x$.

4.3.1.5 Le critère de Katoka [1]

Supposons que $\alpha \in]0,1[$ donnée, Soit l'interprétation

$$\begin{cases} \min u \\ P(c'(\omega)x \leq u) = \alpha \\ x \in T \end{cases} \quad (4.7)$$

Dans le cas gaussien on a :

$$\begin{aligned} P(\omega/c'(\omega)x \leq u) &= P\left\{\omega/\frac{c'(\omega)x - \bar{c}'x}{\sqrt{x'Vx}} \leq \frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x'Vx}}\right\} = \Phi\left(\frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x'Vx}}\right) = \alpha \\ &\Rightarrow \frac{u - \bar{c}'x}{\sqrt{x'Vx}} \Phi^{-1}(\alpha) \Rightarrow u = \bar{c}'x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'Vx} \end{aligned}$$

Φ : est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite

Par conséquent résoudre le problème (4.7) revient, dans ce cas gaussien, à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \bar{c}'x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'Vx} \\ x \in T \end{cases} \quad (4.8)$$

$\bar{c}'x + \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x'Vx}$ est convexe si $\phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}$, ce qui revient à dire, si on revient au problème (4.8), si $P(\omega/c'(\omega)x \leq u) = \alpha \geq \frac{1}{2}$; avoir le minimum de perte avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ (si $\alpha = 1$ on revient au E-modèle).

4.3.2 Cas de contraintes aléatoires

Dans cette partie nous supposons que l'objectif est déterministe ou qu'il a été rendu déterministe en appliquant l'un des critères précédents. Mais les contraintes sont stochastiques

$$A(\omega)x \leq b(\omega).$$

La première méthode utilisée pour la résolution d'un tel programme linéaire stochastique consiste à remplacer chacune des variables aléatoires des contraintes par leurs espérances mathématiques respectives et résoudre le programme déterministe résultant.

Exemple 4.1

Soit le programme stochastique suivant :

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 \\ b_1(\omega)x_1 + x_2 \geq 6 \\ b_2(\omega)x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Où $b_1(\omega) \in [2,4]$ et $b_2(\omega) \in [1,3]$ suivant des lois uniformes indépendante sur leur intervalles.

En remplaçant $b_1(\omega)$ et $b_2(\omega)$ par leur espérance mathématique avec :

$$E(b_1(\omega)) = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{et} \quad E(b_2(\omega)) = \frac{1+3}{2} = 2$$

Le problème déterministe équivalent est :

$$\begin{cases} \min 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

La solution optimale est : $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$ et $Z^* = 4$.

Cherchons la probabilité pour que cette solution soit réalisable :

$$P(b_1(\omega) x_1^* + x_2^* \geq 6, b_2(\omega) x_1^* + x_2^* \geq 4) = P(b_1(\omega) \geq 3) \cdot P(b_2(\omega) \geq 2)$$

$$= (1 - F_{b_1}(3)) \cdot (1 - F_{b_2}(2)) = \frac{1}{4}$$

Où F_{b_1} et F_{b_2} sont les fonctions de répartition des variables aléatoires respectives $b_1(\omega)$ et $b_2(\omega)$.

La probabilité pour que cette solution soit réalisable est donc faible, ce qui montre le manque de réalisme d'une telle méthode.

Donc pour la résolution d'un programme linéaire stochastique, on utilise deux modèles essentiels :

- Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes (« chance constrained programming »)
- Modèle avec recours.

4.3.2.1 Modèles avec seuil de probabilités sur les contraintes (« chance constrained programming ») [9] [25] [28]

Ce modèle a été introduit en programmation stochastique par Charnes et Cooper (1959). L'idée de la modélisation consiste à imposer que la violation des contraintes ne se produise qu'avec une probabilité fixée.

-Soit on impose un seuil de probabilité α avec $0 \leq \alpha \leq 1$, pour l'ensemble des contraintes.

Soit le problème stochastique suivant :

$$\begin{cases} \min c'x \\ A(\omega)x \leq b(\omega) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Le problème déterministe équivalent de (4.11) est donc :

$$\begin{cases} \min c'x \\ sc \\ P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

-Soit on impose un seuil de probabilité individuel α_i , avec $0 \leq \alpha_i \leq 1$ pour chacune des Contraintes.

Le problème déterministe équivalent de (4.11) est donc :

$$\begin{cases} \min c'x \\ sc \\ P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \\ x \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (4.13)$$

Dans les deux cas la question est de savoir si les ensembles :

$$T(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha, x \geq 0\}$$

Et

$$T(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n / P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, x \geq 0\}, \quad i = 1, \dots, m$$

Sont convexes.

La convexité de ces deux ensembles ne dépend pas seulement de la distribution de A et b , mais aussi des seuils α et α_i .

Quelques conditions de convexité de $T(\alpha)$ ou $T(\alpha_i)$.

- **Cas où A et b sont aléatoire, mais de distribution discrète**

$$\text{Soit } P(A = A^i; b = b^i) = p_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{cases} T_i(\alpha_i) \text{ est convexe si } \alpha_i \geq \max_{1 \leq i \leq m} (1 - p_i) \\ T(\alpha) \text{ est convexe si } \alpha \geq \max_{1 \leq i \leq m} (1 - p_i) \end{cases}$$

- **Cas où A et b sont aléatoires, mais de distribution normale**

$$T_i(\alpha_i) \text{ est convexe si } \alpha_i \geq \frac{1}{2}.$$

- **Cas où A et b non indépendants**

Pour ce cas général, on suppose que (A_i, b_i) est un vecteur aléatoire normalement distribué de moyenne $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ et de matrice de covariance V_i . En vertu de la théorie des probabilités, la variable aléatoire $t_i(x) = A_i x - b_i$ a une distribution normale de moyenne

$$m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \mu_{i,n+1} \text{ et de variance } \sigma_i^2(x) = z' V_i z \text{ avec } z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)' \text{ et } \sigma_i(x) > 0, \forall x \text{ car } x_{n+1} = -1.$$

$$\begin{aligned}
 T(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n / P(t_i(x) \leq 0) \geq \alpha_i\} \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n / P\left(\frac{t_i(x) - m_i(x)}{\sigma_i(x)} \leq \frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\right\} \\
 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n / \Phi\left(\frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\right\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n / m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0\}.
 \end{aligned}$$

Puisque $m_i(x)$ est affine en x et $\sigma_i(x)$ est convexe en x , la contrainte $m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0$ est convexe si et seulement si $\Phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$

- **Cas où A est déterministe, b aléatoire**

$\{T_i(\alpha_i)\}$ est toujours convexe
 $\{T(\alpha)\}$ est convexe si la distribution conjointe des composantes b_i du vecteur b est quasi concave

Intéressons-nous à présent au cas particulier A déterministe et b aléatoire et notons $F_i(t)$ la fonction de répartition de b_i .

- **Seuil individuel de probabilité**

Le problème (4.13) est équivalent au problème linéaire

$$\begin{cases} \min c'x \\ A_i(w)x \leq F_i^{-1}(1 - \alpha_i) \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

4.3.2.2 Modèle avec recours

a) Le recours général

Pour présenter cette approche, on procède en deux étapes :

Choisissons \bar{x} , préalablement à toute réalisation de l'aléatoire « here and now ».

-Ensuite, étant donnée une réalisation observée $\bar{\omega} \in \Omega$, une décision corrective représentée par un vecteur $y(k \times 1)$ appelé recours est prise pour compenser la violation des $q'(\omega)y'$ qui est généralement linéaire.

La minimisation de cette pénalité correspond au problème de recours ou de deuxième niveau de la forme suivante :

$$\begin{cases} Q(\bar{\omega}, \bar{x}) = \min q'(\bar{\omega})y \\ W(\bar{\omega})y = b(\bar{\omega}) - A(\bar{\omega})\bar{x} \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Où $\begin{cases} q'(\omega) \text{ est un vecteur } (1 \times k) \text{ de pénalisation} \\ W(\omega) \text{ est une matrice } (m \times k) \text{ de recours} \end{cases}$

Considérées globalement, ces deux étapes fournissent le problème :

$$\begin{cases} \min_x E \left(c'(\omega)x + \min_y q'(\omega)y \right) \\ A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega) \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

S'écrit de manière équivalente

$$\min_{x \in T_2} (E(c'(\omega)x) + E(Q(x, \omega))) \quad (4.17)$$

Où $T_2 = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 / A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega)\}$

Pour que le problème (4.15) ait un sens il faut que l'ensemble T_2 soit non vide, autrement dit, il faut qu'il existe toujours, quelle que soit la réalisation de l'aléatoire, un recours y possible (c'est-à-dire $Q(x, \omega) < \infty, \forall \omega \in \Omega$)

Sous des conditions très général, il a été montré que ce problème (4.17) est convexe i.e T_2 est convexe et la fonction à optimiser est convexe ($E(Q(x, \omega))$ est une fonction convexe).

b) Recours fixe

Le recours fixe au cas où W et q sont déterministe.

Dans le cas de recours fixe le problème (4.17) est toujours convexe. Dans le cas particulier où

- la matrice A est déterministe ;
- le vecteur b est une variable aléatoire discrète, $P(b = b^i) = p^i, i = 1, \dots, m$

Le problème (4.17) est même linéaire et s'écrit :

$$\begin{cases} \min E(c'(\omega))x + \sum_{i=1}^m p^{(i)}q^{(i)}y^{(i)} \\ Ax + Wy^{(i)} = b^i & i = 1, \dots, m \\ y^{(i)} \geq 0 & i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (4.18)$$

Où $y^{(i)}$ est le vecteur recours correspondant à la réalisation ;

$q^{(i)}$ le vecteur de pénalisation associé.

c) Recours (fixe) simple

Le recours simple correspond où la matrice de recours de dimension $m \times 2m$ et est égale à $(I, -I)$ c'est-à-dire $W = (I, -I)$

Où I est la matrice identité. Dans ce cas, le vecteur y est décomposé en deux parties :

- $y^+(m \times 1)$: variable d'écart par défaut.
- $y^-(m \times 1)$: variable d'écart par excès.

Parallèlement, le vecteur de pénalisation s'écrit $q(\omega) = (q^+(\omega), q^-(\omega))$.

Avec :

- $q^+(\omega) = [b(\omega) - Ax]$ si $b(\omega) - Ax \geq 0$.
- $q^-(\omega) = [Ax - b(\omega)]$ si $b(\omega) - Ax \leq 0$.

Le problème (4.17) s'écrit :

$$\begin{cases} \min_x E(c'(\omega))x + E(\min q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-) \\ Ax + y^+ - y^- = b(\omega) \\ y^+ \geq 0, y^- \geq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Théorème (Kall, 1976) [25]

$Q(x, \omega)$ est fini, si et seulement si, $q^+(\omega) + q^-(\omega) \geq 0$ avec une probabilité 1.

Exemple 4.2

$$\begin{cases} \min Z(x) = 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq b(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Ce problème correspond à la recherche du coût minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La demande est aléatoire uniforme est un problème de capacité limiter : l'opération à 4 unités.

Remplaçons en premier lieu la demande par son espérance $E(b(\omega)) = \frac{1.2+1.8}{2} = 1.5$

Le problème déterministe équivalent à (4.20) est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 1.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

La solution optimale est : $x_1^* = 0, x_2^* = 3, Z^* = 3.75$.

Cherchons la probabilité que cette solution soit réalisable :

$$P(0.6x_1^* + 0.4x_2^* \geq b(\omega)) = P(b(\omega) \leq 1.5) = F_b(1.5) = \frac{1}{2}.$$

F_b est la fonction de répartition de $b(\omega)$.

Pour l'interprétation avec seuil sur les contraintes, posons $\alpha = 0.9$.

Cette interprétation peut être utilisée par la firme si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits, Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90%. Dans ce cas, la contrainte devient :

$$P(0.6x_1 + 0.4x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9.$$

Soit F_b est la fonction de répartition de $b(\omega)$ donc

$$F_b(0.6x_1 + 0.4x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9 \Leftrightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq b(\omega) \geq F_b^{-1}(0.9) \text{ et}$$

$$F_b^{-1}(0.9) = 1.74.$$

Donc le problème équivalent à (4.21) est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = 3x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 1.74 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

La solution est $x_1^* = 0$, $x_2^* = 4.35$, $Z^* = 4.35$

Considérons maintenant un problème avec recours.

Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite, et qu'elle commande le minerai à l'avance. Si elle produit trop, elle écoule l'excédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au-dessous du taux fixé.

Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au-dessus du taux fixé. Les coûts supplémentaires sont :

$$2(0.6x_1 + 0.4x_2 - b(\omega)) \text{ Si } (0.6x_1 + 0.4x_2 - b(\omega)) \geq 0$$

$$4(b(\omega) - 0.6x_1 - 0.4x_2) \text{ Si } (0.6x_1 + 0.4x_2 - b(\omega)) \leq 0$$

Notons $Q(x_1, x_2, \omega)$ ces coûts supplémentaires, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à la fonction économique d'origine.

Le problème avec recours revient à résoudre :

$$\begin{cases} \min 3x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, \omega)) \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

L'espérance mathématique de $Q(x_1, x_2, \omega)$ est $E(Q(x_1, x_2, \omega)) = Q(x_1, x_2)$.

Donc on a :

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= \frac{1}{0.6} \int_{1.2}^{0.6x_1+0.4x_2} 2(0.6x_1 + 0.4x_2 - t)dt + \frac{1}{0.6} \int_{0.6x_1+0.4x_2}^{1.8} 4(t - 0.6x_1 - 0.4x_2)dt \\ &= 5(0.6x_1+0.4x_2)^2 - 16(0.6x_1+0.4x_2) - 19.2 \end{aligned}$$

Le problème (4.23) devient :

$$\begin{cases} \min 5(0.6x_1+0.4x_2)^2 - 9.6x_1 - 6.4x_2 - 19.2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

La solution optimale est : $x_1^* = 1.656220$, $x_2^* = 1.515670$, $Z^* = -32$.

7

4.4 Programmation non linéaire stochastique

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \max P(c'(\omega)x > t) \\ Ax \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \text{ où } x \in \mathbb{N}^n \end{cases} \quad (4.25)$$

$c' = (c_1, \dots, c_n)$ n coefficient de variables aléatoires indépendantes normale , le problème déterministe équivalent est :

$$\begin{cases} \max \frac{(\mu'x-t)}{\sqrt{v'x}} \\ Ax \leq b \\ x \in \{0,1\}^n \text{ où } x \in \mathbb{N}^n \end{cases} \quad (4.26)$$

μ : désigne l'espérance mathématique des composantes de c

v : désigne variance des composantes de c

Ce problème est difficile à résoudre par ce que il fait appel à des techniques d'optimisations globales considérons un autre problème :

$$\begin{cases} \max \frac{c'_1(\omega)x}{c'_2(\omega)x} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \text{ et } c_2(\omega)x \geq 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

On lui associe le problème déterministe suivant :

$$\begin{cases} \max \frac{E(c'_1(\omega)x)}{E(c'_2(\omega)x)} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Et pour résoudre le problème (4.28) on fait appel à la méthode de A.Cambini.

Chapitre 05 :
**Chance constrained programming
with fuzzy stochastic coefficients**

5.1 Introduction

Il existe des situations dans un contexte d'optimisation ou de décision où les deux principales incertitudes, à savoir le flou et l'aléa, ne sont pas mutuellement exclusives. Elles peuvent se trouver combinées [1].

5.2 Programme linéaire flou stochastique :

Un programme linéaire flou stochastique est un programme linéaire où le flou et l'aléatoire se trouvent combinés [1] [2] [3].

Nous pouvons nous retrouver face à des situations où les coefficients des contraintes sont des variables aléatoires floues.

Considérons le programme linéaire flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}) \begin{cases} \max c'x \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \\ x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0\} \end{cases}$$

Où $c'x$ est un objectif déterministe avec $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ des nombres réels, \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i sont des variables aléatoires floues, et \odot , \leq et $\sum_{j=1}^n$ représentent la généralisation au moyen du principe d'extension de la multiplication, l'inégalité et l'addition de nombres réels aux intervalles flous.

Dans le but de transformer les contraintes en des contraintes déterministes, dans l'esprit de la deuxième version de chance constrained programming due à Charnes et Cooper, nous considérons la probabilité de réalisation de chacune d'elles au moins égale à un seuil qui peut différer d'une contrainte à une autre. Or chaque réalisation est une comparaison entre deux intervalles flous.

Nous avons donc recours aux méthodes de comparaison d'intervalles flous. D'où la combinaison de probabilité et ces dernières qui peuvent être les approches possibilistes. C'est en quelque sorte une généralisation conjointe aux variables aléatoires floues des deux variantes de chance constrained programming en « chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients ».

5.3 Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [3] [24]

(P_{FS}) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{FS}) \begin{cases} \max c'x \\ \tilde{A}(\omega) \odot x \leq \tilde{b}(\omega) \\ x \in B = \{x \in \mathbb{R}^n / x \geq 0\} \end{cases}$$

Où $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$ sont les composantes de la matrice $\tilde{A}(\omega)(m \times n)$ et du vecteur $\tilde{b}(\omega)(m \times 1)$ respectivement et $c' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ des nombres réels.

On a par définition : $\forall \omega \in \Omega, \Pi_{\tilde{b}_i(\omega)} = \mu_{\tilde{b}_i(\omega)}$.

Les contraintes du problème flou stochastique (P_{FS}) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right\}$$

Si $\tilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}(\omega), \bar{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des intervalles flous de type L-R alors :

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^a x_j, \sum_{j=1}^n \gamma_{ij}^a x_j).$$

Pour simplifier les expressions, nous considérons la matrice $A(m \times n)$ et le vecteur $b(m \times 1)$ dont les composantes sont respectivement a_{ij} et b_{ij} .

Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients prend la forme suivante :

$$P(\rho(\tilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i.$$

Cette forme est une combinaison de probabilité et ρ où $\rho(\tilde{a}, \tilde{b})$ évalue le degré de confiance pour lequel le coefficient restreint par \tilde{a} est plus grand que le coefficient restreint par \tilde{b} .

5.3.1 Différentes versions de chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients :

Nous avons trois versions selon le choix de ρ qui peut représenter :

1. Les degrés de préférence possibiliste (combinaison de probabilité et possibilité) où les degrés de préférence nécessaire (combinaison de probabilité et nécessité).
2. Les indices de dominance stochastique des intervalles aléatoires dus à Chanas et Col. [14] (combinaison de probabilité et indices de comparaison d'intervalles aléatoires).
3. Les indices scalaires de comparaison d'intervalles flous (combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues).

Dans ce chapitre on a choisi de mettre en avant la première version en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et nécessité.

5.3.1.1 Combinaison de probabilité et possibilité

$$(P_p) \left\{ p \left\{ \begin{array}{l} \max c'x \\ \omega: pos(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right\} \geq p_i, i = \overline{1, m} \right.$$

Où p et pos représentent respectivement probabilité et possibilité. Une solution admissible

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)' \geq 0$ de (P_p) est appelée pro-pos admissible. L'ensemble des solutions pro-pos admissibles de (P_p) est noté $X_p^i(p_i, \beta_i)$.

Proposition

$X_p^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :

1. Si $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :

$$X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : p(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega) x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i \right\}, i = \overline{1, m}$$

Où $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\tilde{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\tilde{b}_i^{\beta_i}(\omega)$.

2. Si $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, alors :

$$X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P \left(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) x_j - L^{-1}(\beta_i) \delta_{ij}^a x_j \leq \tilde{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i) \gamma_i^b) \right) \geq p_i \right\},$$

$i = \overline{1, m}.$

Remarque

Si les coefficients $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :

- Des variables aléatoires réelles $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$, alors :

$$P\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\} \geq p_i \text{ se réduit à}$$

$$P \left\{ \omega : \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) \odot x_j \leq b_i(\omega) \right) \right\} \geq p_i$$

- Des intervalles flous Si \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i , alors :

$$P\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\} \geq p_i \text{ se réduit à}$$

$$pos(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \beta_i$$

5.3.1.2 Combinaison de probabilité et nécessité

$$(P_n) \quad \begin{cases} \max cx \\ P\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_j(\omega)) \geq \beta_i\} \geq p_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Où P et nec représentent respectivement probabilité et nécessité. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$ de (P_n) est appelée pro-nec admissible. L'ensemble des solutions pro-nec admissibles de (P_n) est noté $X_n^i(p_i, \beta_i)$.

Proposition

$X_n^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :

1. Si $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_j(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :

$$X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P(\omega : \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega) x_j \leq \tilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)) \geq p_i \right\}, i = \overline{1, m}$$

Où $\tilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\tilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ et $\tilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\tilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$.

2. Si $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de types L-R, alors :

$$X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 : P\left(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b \geq p_i \right) \right\}, i = \overline{1, m}.$$

Remarque

Si les coefficients $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :

-des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors :

$$P\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\} \geq p_i \quad \text{se réduit à}$$

$$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i.$$

-des intervalles flous \tilde{a}_{ij} et \tilde{b}_i , alors $P\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \leq \tilde{b}_i(\omega))\} \geq p_i$ se réduit à

$$nec(\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \odot x_j \leq \tilde{b}_i) \geq \beta_i.$$

5.3.2 Convexité des ensembles de solutions admissibles

Sous contraintes conditions, les ensembles de solutions admissibles peuvent être convexes pour toutes distributions de probabilité des variables aléatoires floues comme suit dans le théorème :

Proposition [1]

Soient $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ et $\tilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ des variables aléatoires floues de type L - R.

Nous avons alors :

- $X_{\mu_2}^i(p_i, \beta_i) = \{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_{ij}^a) x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b) \geq p_i\}$.
- $X_{\mu_3}^i(p_i, \beta_i) = \{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_{ij}^a) x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b) \geq p_i\}$.

Théorème [1] [3]

Si $p_i = 0$ ou $p_i = 1$ alors :

- $X_F^i(p_i)$ est convexe.
- $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexe $\forall \beta_i \in [0,1]$
- $X_{\mu_2}^i\left(p_i, \frac{1}{2}\right)$ et $X_{\mu_3}^i\left(p_i, \frac{1}{2}\right)$ sont convexes.
- $X_S^i(p_i^s, \alpha_s)$ est convexe $\forall \alpha_s \in [0,1]$.

5.3.2.1 Cas où A est déterministe ou flou

Nous considérons le cas le plus général : A est flou et b est flou stochastique dont les composantes sont des variables aléatoires floues en général ou des variables aléatoires floues particulières, de type L-R.

Théorème [1] [3]

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, \tilde{a}_{ij} et $\tilde{b}_i(\omega)$ les composantes de la matrice $\tilde{A}(m \times n)$ et du vecteur $b(\omega)$ ($m \times 1$) respectivement.

1. \tilde{a}_{ij} sont des intervalles flous et $\tilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues.
Alors pour toute distribution de probabilité de $\tilde{b}_i(\omega)$, on a :
 - $\forall \beta_i \in (0,1)$ et $\forall p_i \in [0,1]$, $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.
 - $\forall p_i \in [0,1]$, $X_F^i(p_i)$ est convexe.
 - $\forall \alpha_s \in (0,1)$ et $\forall p_i^s \in [0,1]$, $X_S^i(p_i^s, \alpha_s)$ est convexe .
2. Si \tilde{a}_{ij} sont des intervalles flous de type L-R et $\tilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R.
Alors pour toute distribution de probabilité de $\tilde{b}_i(\omega)$, on a :
 - $\forall \beta_i \in (0,1)$ et $\forall p_i \in [0,1]$, $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.
 - $\forall p_i \in [0,1]$, $X_{\mu_2}^i\left(p_i, \frac{1}{2}\right)$ et $X_{\mu_3}^i\left(p_i, \frac{1}{2}\right)$ sont convexes.
 - $\forall \alpha_s \in (0,1)$ et $\forall p_i^s \in [0,1]$, $X_S^i(p_i^s, \alpha_s)$ est convexe .

5.3.2.2 Cas où A stochastique ou flou stochastique

Nous considérons le cas le plus général : A et b sont flous stochastiques dont les composantes sont des variables aléatoires floues, en général, ou particulières, de type L-R.

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues**A. Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro :****Théorème**

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, $\tilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\tilde{b}_i(\omega)$ les composantes de la matrice $\tilde{A}(m \times n)$ et du vecteur $b(\omega)$ ($m \times 1$) respectivement.

Si $\tilde{a}_{i1}, \tilde{a}_{i2}, \dots, \tilde{a}_{in}, \tilde{b}_i$ sont $(n + 1)$ variables aléatoires floues normales d'espérances mathématiques respectivement $\tilde{\mu}_{i1}, \tilde{\mu}_{i2}, \dots, \tilde{\mu}_{in}, \tilde{\lambda}_i$ qui sont des intervalles flous et de variances respectives $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2, V_i^2$.

Alors :

- $\forall \beta_i \in (0,1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.
- $\forall \alpha_s \in (0,1]$ et pour $p_i^s > \frac{1}{2}$, $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$ est convexe.

B. Cas des variables aléatoires floues discrètes :

Théorème

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, muni d'une distribution de probabilité discrète finie suivante : $(P(\omega_k) = q_k, k = 1, 2, \dots, r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$ alors pour $p_i > 1 - \min_{k \in (1,2,\dots,r)} q_k$ on a : $X_F^i(p_i)$ est convexe

- $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexe $\forall \beta_i \in (0,1]$ et pour $p_i > 1 - \min_{k \in (1,2,\dots,r)} q_k$
- $\forall \alpha_s \in (0,1]$ et pour $p_i^s > 1 - \min_{k \in (1,2,\dots,r)} q_k$, $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$ est convexe .

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues de type L-R :

A. Cas des variables aléatoires flous normales de type L-R :

Corollaire1 : soit (Ω, F, P) un espace de probabilité et $\tilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et

$\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ des variables aléatoires floues normales de type L-R telle que :

- $\underline{a}_{i1}, \underline{a}_{i2}, \dots, \underline{a}_{in}, \underline{b}_i$ sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}_{i1}, \underline{\mu}_{i2}, \dots, \underline{\mu}_{in}, \underline{\lambda}_i$ et de variances respectives $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2, \delta_i^2$
- $\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \dots, \bar{a}_{in}, \bar{b}_i$ sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\bar{\mu}_{i1}, \bar{\mu}_{i2}, \dots, \bar{\mu}_{in}, \bar{\lambda}_i$ et de variances respectives $\sigma_{i1}^2, \sigma_{i2}^2, \dots, \sigma_{in}^2, \delta_i^2$.

Alors pour $p_i > \frac{1}{2}$:

- $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in [0,1]$.
- $X_{\mu_2}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_3}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.

B. Cas des variables aléatoires floues discrètes de type L-R :

Corollaire2 : soit (Ω, F, P) un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, muni d'une distribution de probabilité discrète $P(\omega_k) = q_k, k = 1, 2, \dots, r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$ et soient $\tilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\tilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \bar{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ des variables aléatoires floues discrètes de type L-R.

Alors pour $p_i > 1 - \min_{k \in (1,2,\dots,r)} q_k$ on a :

- $X_p^i(p_i, \beta_i)$ et $X_n^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in [0,1]$.
- $X_{\mu_2}^i(p_i, \beta_i)$ et $X_{\mu_3}^i(p_i, \beta_i)$ sont convexes.

Exemple 5.1

Considérons le programme linéaire flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}^1) \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \\ \tilde{1}x_1 + \tilde{3}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Où $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, muni de la distribution de probabilité suivante : $P(\omega_1) = 0.4$,

$P(\omega_2) = 0.6$. On a :

$$P(\tilde{b}_1(\omega_1) = \tilde{2}) = P(\tilde{b}_2(\omega_1) = \tilde{1}) = 0.4$$

$$P(\tilde{b}_1(\omega_2) = \tilde{4}) = P(\tilde{b}_2(\omega_2) = \tilde{3}) = 0.6$$

$\tilde{m}, m = 1,2,3,4$ sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance $\mu_{\tilde{m}}$ sont définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m - 1 \\ x - m + 1 & \text{si } m - 1 \leq x < m \\ 1 & \text{si } m \leq x < m + 1 \\ -x + m + 2 & \text{si } m + 1 \leq x \leq m + 2 \\ 0 & \text{si } x > m + 2 \end{cases}$$

Donc

$$\mu_{\tilde{1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x + 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ -x + 4 & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{4}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ -x + 6 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

On obtient :

- $\underline{\tilde{1}}^{0.6} = 0.6$ et $\overline{\tilde{1}}^{0.6} = 2.4$ $\tilde{1}^{0.6} = [0.6, 2.4]$
- $\underline{\tilde{2}}^{0.6} = 1.6$ et $\overline{\tilde{2}}^{0.6} = 3.4$ $\tilde{2}^{0.6} = [1.6, 3.4]$
- $\underline{\tilde{3}}^{0.6} = 2.6$ et $\overline{\tilde{3}}^{0.6} = 4.4$ $\tilde{3}^{0.6} = [2.6, 4.4]$
- $\underline{\tilde{4}}^{0.6} = 3.6$ et $\overline{\tilde{4}}^{0.6} = 5.4$ $\tilde{4}^{0.6} = [3.6, 5.4]$

- $\underline{\tilde{1}}^{0.4} = 0.4$ et $\overline{\tilde{1}}^{0.4} = 2.6$ $\tilde{1}^{0.4} = [0.4, 2.6]$
- $\underline{\tilde{2}}^{0.4} = 1.4$ et $\overline{\tilde{2}}^{0.4} = 3.6$ $\tilde{2}^{0.4} = [1.4, 3.6]$
- $\underline{\tilde{3}}^{0.4} = 2.4$ et $\overline{\tilde{3}}^{0.4} = 4.6$ $\tilde{3}^{0.4} = [2.4, 4.6]$
- $\underline{\tilde{4}}^{0.4} = 3.4$ et $\overline{\tilde{4}}^{0.4} = 5.6$ $\tilde{4}^{0.4} = [3.4, 5.6]$

a) En combinant probabilité avec $p_1 = p_2 = 0.6$ et $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$ on a :

$$\overline{\tilde{b}}_1^{0.6} : \begin{pmatrix} \overline{\tilde{2}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{4}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix}; \quad \overline{\tilde{b}}_2^{0.6} : \begin{pmatrix} \overline{\tilde{1}}^{0.6} \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\tilde{3}}^{0.6} \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\tilde{b}}_1^{0.6} : \begin{pmatrix} 3.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}; \quad \overline{\tilde{b}}_2^{0.6} : \begin{pmatrix} 2.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$P\left(\overline{\tilde{b}}_1^{0.6}(\omega_1) = 3.4\right) = P\left(\overline{\tilde{b}}_2^{0.6}(\omega_1) = 2.4\right) = 0.4$$

$$P\left(\overline{\tilde{b}}_1^{0.6}(\omega_2) = 5.4\right) = P\left(\overline{\tilde{b}}_2^{0.6}(\omega_2) = 4.4\right) = 0.6$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P\{\omega / \text{pos}(\tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \geq 0.6\} \geq 0.6 \\ P\{\omega / \text{pos}(\tilde{1}x_1 + \tilde{3}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \geq 0.6\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_1^{0.6}(\omega)\right)\right\} \geq 0.6 \\ P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{1}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_2^{0.6}(\omega)\right)\right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_1^{0.6}(\omega)\right)\right\} \geq 0.6 \\ 1 - P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{1}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_2^{0.6}(\omega)\right)\right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_1^{0.6}(\omega)\right)\right\} \leq 0.4 \\ P\left\{\omega \left(\underline{\tilde{1}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_2 \leq \overline{\tilde{b}}_2^{0.6}(\omega)\right)\right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_{\overline{\tilde{b}}_1^{0.6}}^{-1} F_{\underline{\tilde{b}}_1^{0.6}}(\underline{\tilde{2}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{4}}^{0.6} x_2) \leq F_{\overline{\tilde{b}}_1^{0.6}}^{-1}(0.4) \\ F_{\overline{\tilde{b}}_2^{0.6}}^{-1} F_{\underline{\tilde{b}}_2^{0.6}}(\underline{\tilde{1}}^{0.6} x_1 + \underline{\tilde{3}}^{0.6} x_2) \leq F_{\overline{\tilde{b}}_2^{0.6}}^{-1}(0.4) \end{array} \right\}$$

$$F_{\overline{\tilde{b}}_1^{0.6}}^{-1}(0.4) = \left\{x / F_{\underline{\tilde{b}}_1^{0.6}}(x) = 0.4\right\} = 3.4; \quad F_{\overline{\tilde{b}}_2^{0.6}}^{-1}(0.4) = \left\{x / F_{\underline{\tilde{b}}_2^{0.6}}(x) = 0.4\right\} = 2.4.$$

Obtient le programme linéaire suivant :

$$(P_d^1)_p \quad \begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ 1.6x_1 + 3.6x_2 \leq 3.4 \\ 0.6x_1 + 2.6x_2 \leq 2.4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est : $x_1^* = 2.125$ $x_2^* = 0$ $Z^* = 2.125$.

- b) En combinant probabilité et nécessité avec $p_1 = p_2 = 0.6$ et $\beta_1 = \beta_2 = 0.6$, on a :
 Les distributions de probabilité des variables aléatoires réelles $\tilde{\underline{b}}_1^{0.4}, \tilde{\underline{b}}_2^{0.4}$ sont comme suit :

$$\tilde{\underline{b}}_1^{0.4} = \left(\begin{matrix} \tilde{2}^{0.4} \\ 0.4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \tilde{4}^{0.4} \\ 0.6 \end{matrix} \right); \quad \tilde{\underline{b}}_2^{0.4} = \left(\begin{matrix} \tilde{1}^{0.4} \\ 0.4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \tilde{3}^{0.4} \\ 0.6 \end{matrix} \right)$$

$$\tilde{\underline{b}}_1^{0.4} = \left(\begin{matrix} \tilde{1}^{0.4} \\ 0.4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \tilde{3}^{0.4} \\ 0.6 \end{matrix} \right); \quad \tilde{\underline{b}}_2^{0.4} = \left(\begin{matrix} \tilde{0}^{0.4} \\ 0.4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \tilde{2}^{0.4} \\ 0.6 \end{matrix} \right)$$

$$P(\tilde{\underline{b}}_1^{0.4}(\omega_1) = 1.4) = P(\tilde{\underline{b}}_2^{0.4}(\omega_1) = 0.4) = 0.4$$

$$P(\tilde{\underline{b}}_1^{0.4}(\omega_2) = 3.4) = P(\tilde{\underline{b}}_2^{0.4}(\omega_2) = 2.4) = 0.6.$$

Les contraintes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} P\{\omega / nec(\tilde{2}x_1 + \tilde{4}x_2 \leq \tilde{b}_1(\omega) \geq 0.6)\} \geq 0.6 \\ P\{\omega / nec(\tilde{1}x_1 + \tilde{3}x_2 \leq \tilde{b}_2(\omega) \geq 0.6)\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P\left\{ \omega \left(\tilde{2}^{1-0.6} x_1 + \tilde{4}^{1-0.6} x_2 \leq \tilde{b}_1^{1-0.6}(\omega) \right) \right\} \geq 0.6 \\ P\left\{ \omega \left(\tilde{1}^{1-0.6} x_1 + \tilde{3}^{1-0.6} x_2 \leq \tilde{b}_2^{1-0.6}(\omega) \right) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P\left\{ \omega \left(\tilde{2}^{-0.4} x_1 + \tilde{4}^{-0.4} x_2 \leq \tilde{b}_1^{0.4}(\omega) \right) \right\} \geq 0.6 \\ 1 - P\left\{ \omega \left(\tilde{1}^{-0.4} x_1 + \tilde{3}^{-0.4} x_2 \leq \tilde{b}_2^{0.4}(\omega) \right) \right\} \geq 0.6 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - P\left\{ \omega \left(\tilde{2}^{-0.4} x_1 + \tilde{4}^{-0.4} x_2 \leq \tilde{b}_1^{0.4}(\omega) \right) \right\} \leq 0.4 \\ 1 - P\left\{ \omega \left(\tilde{1}^{-0.4} x_1 + \tilde{3}^{-0.4} x_2 \leq \tilde{b}_2^{0.4}(\omega) \right) \right\} \leq 0.4 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\underline{b}_1}^{-1} F_{\underline{b}_1}^{0.4} (\overline{2}^{0.4} x_1 + \overline{4}^{0.4} x_2) \leq F_{\underline{b}_1}^{-1}(0.4) \\ F_{\underline{b}_2}^{-1} F_{\underline{b}_2}^{0.4} (\overline{1}^{0.4} x_1 + \overline{3}^{0.4} x_2) \leq F_{\underline{b}_2}^{-1}(0.4) \end{cases}$$

$$F_{\underline{b}_1}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\underline{b}_1}^{0.4}(x) = 0.4 \right\} = 1.4 \quad ; \quad F_{\underline{b}_2}^{-1}(0.4) = \left\{ x / F_{\underline{b}_2}^{0.4}(x) = 0.4 \right\} = 0.4.$$

Obtient le programme linéaire suivant :

$$(P_d^1)_n \quad \begin{cases} \max x_1 + 2x_2 \\ 3.6x_1 + 5.6x_2 \leq 1.4 \\ 2.6x_1 + 4.6x_2 \leq 0.4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est : $x_1^* = 0$ $x_2^* = 0.86 \times 10^{-1}$ $Z^* = 0.1739130$.

Chapitre 06 :
Application sur Lingo

Lingo : est un logiciel pour la résolution des programmes linéaires et non linéaires (les programmes flous et stochastiques).

6.1 Introduction

Lingo est un outil pour utiliser la puissance de l'optimisation linéaire, non linéaire, quadratique, pour formuler de gros problèmes de manière concise, les résoudre et analyser la solution.

6.2 Installation du logiciel

Pour utiliser cette version de Lingo, il est conseillé d'avoir au moins un processeur 486 et 8 Mo de mémoire RAM. Il faut aussi prévoir un espace disque dur de 2 Mo pour pouvoir l'installer.

Les étapes de l'installation sont :

- 1- Démarrer Windows.
- 2- Insérer CD-ROM.
- 3- Cliquer sur l'icône setup (install) dans votre explorateur de Windows.
- 4- Suivre les instructions de l'écran.

Pour plus d'information sur ce logiciel visiter l'adresse web www.Lingo.com.

6.3 Applications

Application 1 : Exemple 2.2

Programmation du problème linéaire (Résolution).

The screenshot shows the Lingo 13.0 interface with a 'Solution Report - Lingo1' window open. The report contains the following information:

```

Model:
max=3*x1+2*x2;
x1+2*x2<=16;
x1<=4;
end
    
```

Solution Report - Lingo1

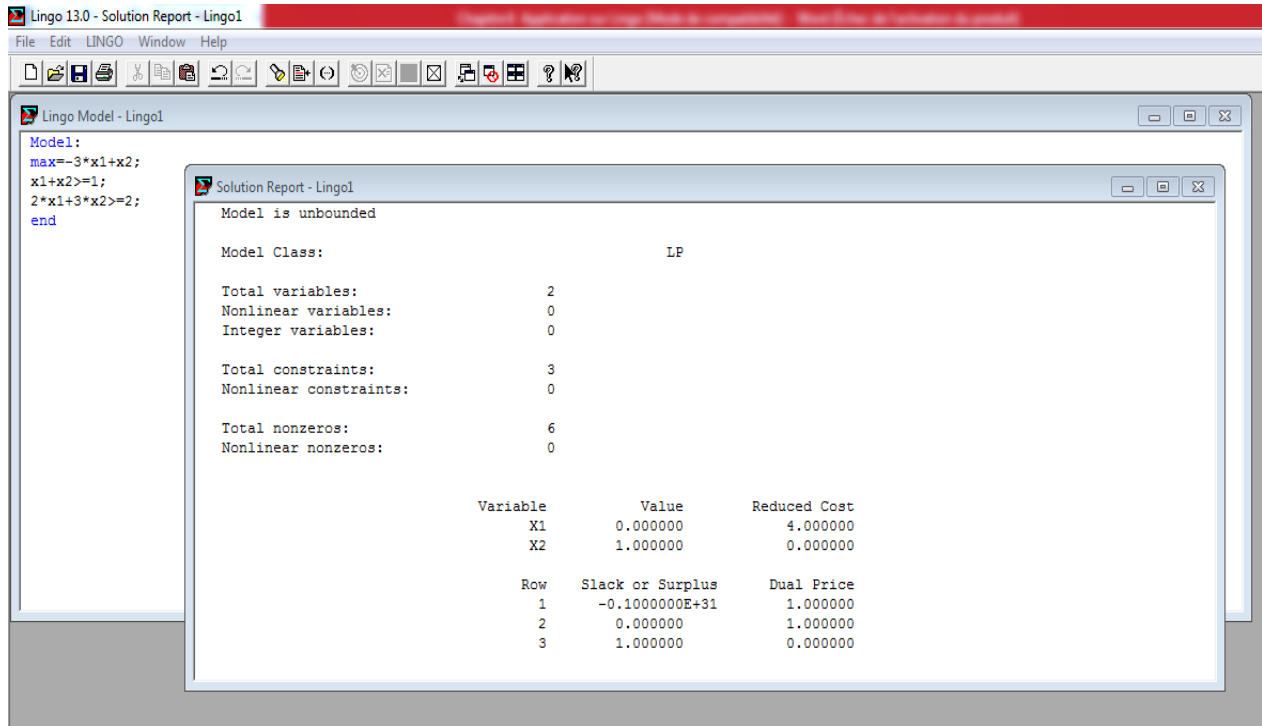
- Objective value: 24.00000
- Infeasibilities: 0.000000
- Total solver iterations: 0
- Model Class: LP
- Total variables: 2
- Nonlinear variables: 0
- Integer variables: 0
- Total constraints: 3
- Nonlinear constraints: 0
- Total nonzeros: 5
- Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	24.00000	1.000000
2	0.000000	1.000000
3	0.000000	2.000000

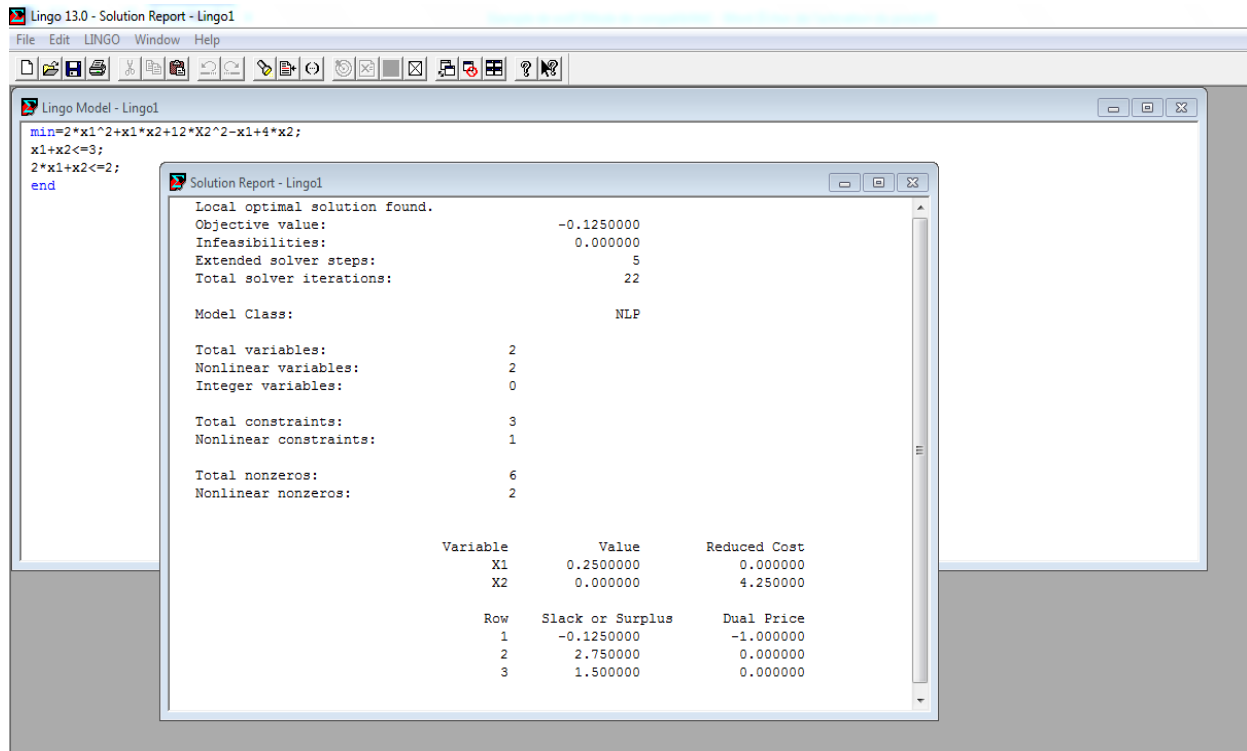
Application 2 : Exemple 2.3

Programmation du problème linéaire (Résolution).



Application 3 : Exemple 2.5

Programmation du problème quadratique (Wolf) (Résolution).



Application 4 : Exemple 3.1

Programmation linéaire flexible (Résolution).

The screenshot shows the Lingo 13.0 interface with a 'Solution Report - Lingo1' window open. The report displays the following information:

```

Model:
max=y;
y+x1+3*x2<=5;
2*y-2*x1+x2<=6;
3*y+5*x2<=5;
y<=1;
y>=0;
end
    
```

Solution Report - Lingo1

Global optimal solution found.
Objective value: 1.000000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 0

Model Class: LP

Total variables: 3
Nonlinear variables: 0
Integer variables: 0

Total constraints: 6
Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 11
Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
Y	1.000000	0.000000
X1	0.000000	0.000000
X2	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	1.000000
2	4.000000	0.000000
3	4.000000	0.000000
4	2.000000	0.000000
5	0.000000	1.000000
6	1.000000	0.000000

Application 5 : Exemple 3.2

Programmation non linéaire flexible (Résolution).

The screenshot displays the Lingo 13.0 interface with two windows open: 'Lingo Model - Lingo1' and 'Solution Report - Lingo1'.

Lingo Model - Lingo1 contains the following code:

```

Model:
max=y;
y-x1^2+2*x1*x2+3*x2^2-4*x1+3*x2<=-1;
2*y-2*x1+x2<=6;
3*y+5*x2<=5;
y<=1;
y>=0;
end
    
```

Solution Report - Lingo1 displays the following results:

Local optimal solution found.
Objective value: 1.000000
Infeasibilities: 0.000000
Extended solver steps: 5
Total solver iterations: 56

Model Class: NLP

Total variables: 3
Nonlinear variables: 2
Integer variables: 0

Total constraints: 6
Nonlinear constraints: 1

Total nonzeros: 11
Nonlinear nonzeros: 2

Variable	Value	Reduced Cost
Y	1.000000	0.000000
X1	0.1000000E+08	0.000000
X2	0.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	1.000000
2	0.1000000E+15	0.000000
3	0.2000000E+08	0.000000
4	2.000000	0.000000
5	0.000000	1.000000
6	1.000000	0.000000

Application 6 : Exemple 4.1

Programmation stochastique (Résolution).

The screenshot displays the Lingo 13.0 interface. On the left, the 'Lingo Model - Lingo1' window shows the following model code:

```

Model:
min=2*x1+x2;
3*x1+x2>=6;
2*x1+x2>=4;
end
    
```

On the right, the 'Solution Report - Lingo1' window displays the following summary statistics:

```

Objective value:          4.000000
Infeasibilities:         0.000000
Total solver iterations: 1

Model Class:              LP

Total variables:          2
Nonlinear variables:      0
Integer variables:        0

Total constraints:        3
Nonlinear constraints:    0

Total nonzeros:          6
Nonlinear nonzeros:      0
    
```

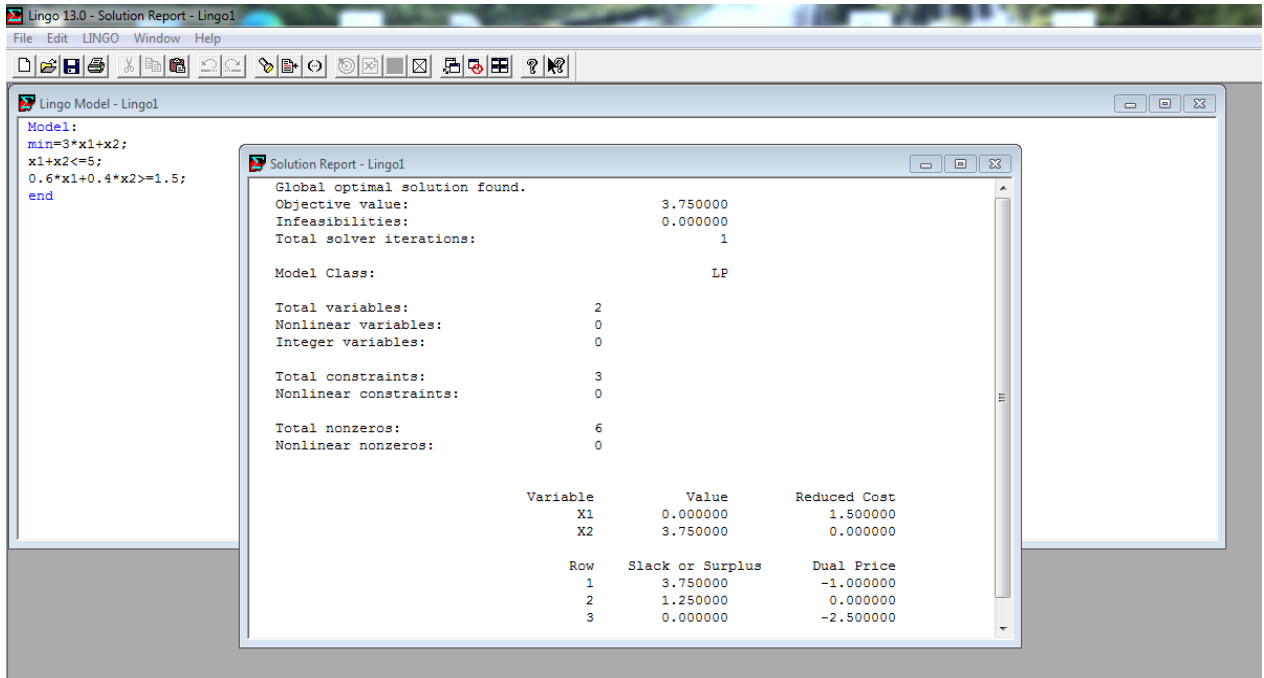
Below the summary, a table provides the values for variables and constraints:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	0.000000	0.3333333

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	4.000000	-1.000000
2	0.000000	-0.6666667
3	0.000000	0.000000

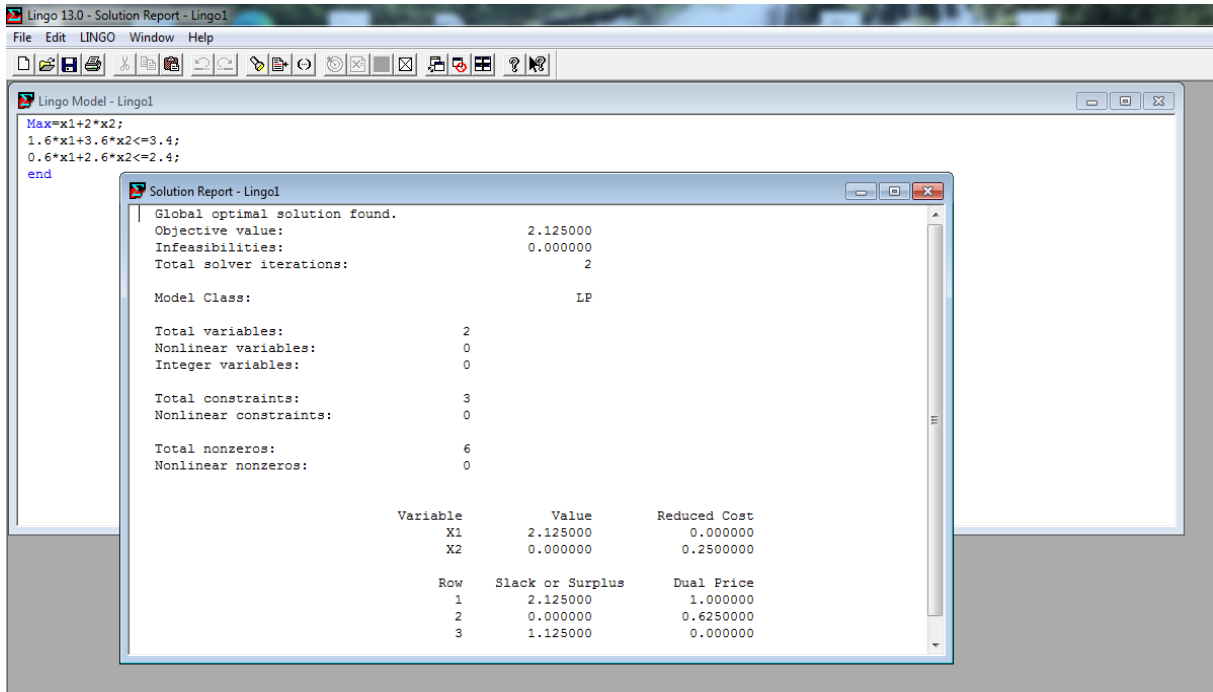
Application 7 : Exemple 4.2

Programmation stochastique avec recours (Résolution).



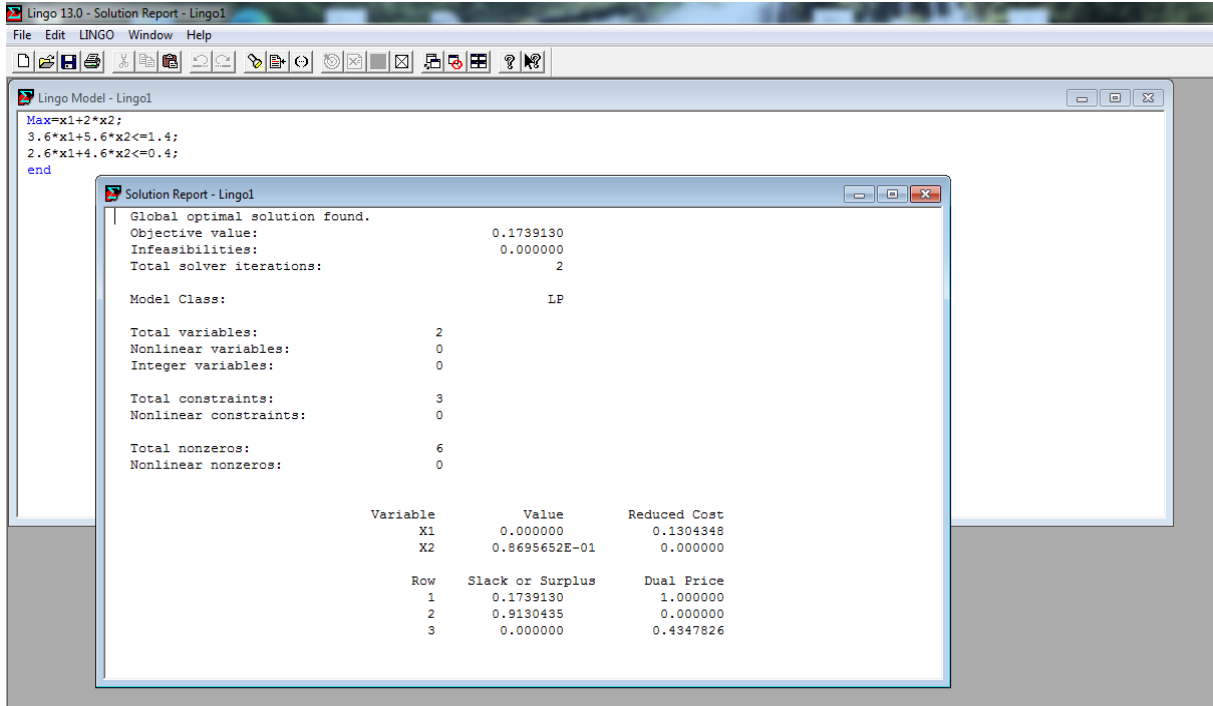
Application 8 : Exemple 5.1

Programmation floue stochastique (Résolution).



Application 9 : Exemple 5.1

Programmation floue stochastique (Résolution).





Conclusion générale



Conclusion générale

Les problèmes imprécis ou incertitude de nature flou ou stochastique sont considérés difficiles à résoudre, mais après l'apparition des méthodes de résolution, ces problèmes sont devenus facile à résoudre et cela. En transformant ces problèmes flous et stochastiques (flous stochastiques) en problèmes déterministes.

Dans ce travail, nous avons abordé les notions de base de la théorie des ensembles flous, des variables aléatoires (probabilités) et autres.

En premier lieu, nous avons traité des programmes linéaires et non linéaires dont les données sont supposées être connues avec précision qui sont appelées problèmes (linéaires/non linéaire) d'optimisation déterministe avec la méthode du simplexe et autre.

En deuxième lieu, nous avons traité des programmes linéaires et non linéaires où les données sont mal connues de nature flou qui sont appelés des problèmes d'optimisation floue, on a défini la méthode « chance constrained with fuzzy coefficients » pour la résolution entre autres.

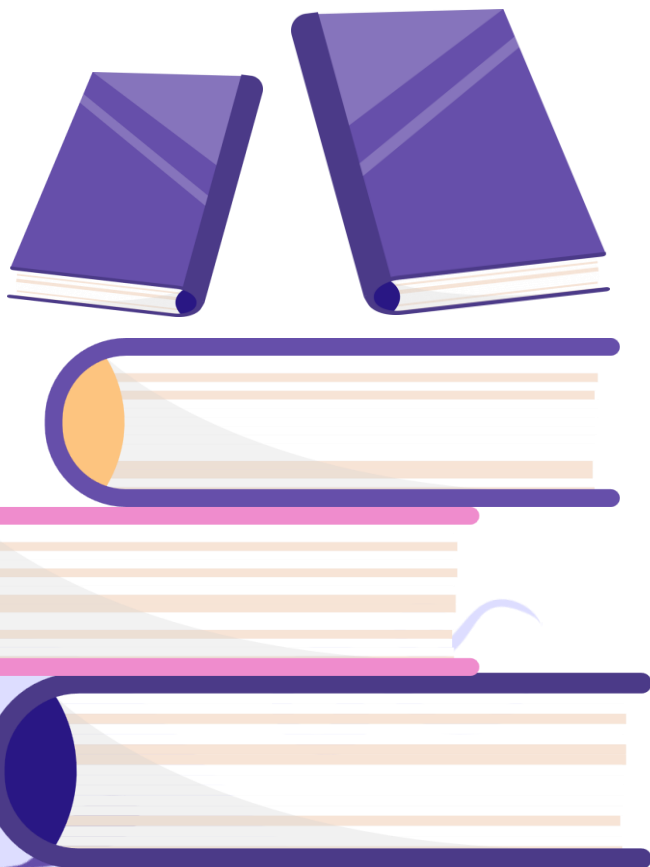
En troisième lieu, nous avons donné les méthodes d'optimisation stochastique (linéaires et non linéaires), ces méthodes sont basées sur la transformation des problèmes stochastiques en problèmes déterministes pour avoir une solution optimale entre autres.

Enfin, nous avons appliqué la méthode de « chance constrained with fuzzy sochastic coefficients », pour la résolution d'un programme linéaire flou stochastique en considérant deux cas à savoir la combinaison de probabilité et possibilité et la combinaison de probabilité et nécessité.

Cette expérience, nous a permis de parfaire nos connaissances en matière de programmation mathématique floue, la programmation stochastique et la programmation floue stochastique.

Bien que notre travail et le seul soit achevé, il est le sujet à des améliorations futures en termes de théories et des applications.

Références bibliographiques



Bibliographie :

- [1] Aiche.F, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi objectif floues Stochastique ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou, (2013).
- [2] Aiche.F, M abbas and D.Dubois, Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients, fuzzy optimization and decision making, Springer (2012).
- [3] Aiche.F, sur l'optimisation floue stochastique, thèse de magistère, Université de Tizi-Ouzou (1995).
- [4] Aiden M., Oukacha B., Programmation linéaire, Editions Pages Bleues (2005).
- [5] Ambapour S. Théorie des ensembles flous : application à la mesure de la pauvreté au Congo, *Bureau d'application des méthodes statistiques et informatiques* : 1-38 pp (2009).
- [6] Amzallag E., Piccioli N..Introduction à la statistique. Paris, France, 309p (1993).
- [7] Bastin Fabian .Modèle de recherche opérationnelle, Université de Montréal.1-105p (2010).
- [8] Bellahcene F, thèse de doctorat sur la programmation linéaire multi objectif. stochastique en nombre entier ; Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou (2006).
- [9] Bellebia M . Loudahi L., Programmation mathématique stochastique et application, thèse de master, université de Tizi-Ouzou (2018).
- [10] Belouaar H .Modélisation d'une approche basée agent et logique floue pour la qualité des services Web. Thèse Doctorat en informatique, Université de Mohammed Khider, Biskra (2019).
- [11] Bierlaire.M., Introduction à l'optimisation différentiable, presses polytechniques et universitaires romandes première édition, (2006).
- [12] Bitran G.R., and Novaes G., Linear Programmingwith a fractional objective function *Operations Research* 24, pp. 675-699, (1976).
- [13] Bouam Y., AMIRI D. Extension de la dualité dans un environnement flou.Mémoire de master en mathématiques appliquées à la gestion, Université de Tizi Ouzou. 62p (2017).
- [14] Chanas.S, Zielinski.P, Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets-further results. *Information Sciences* 117, 191-200 (1999).

[15] Charnes.A and W.W.Coper, Chance constrained programming, Management sci. 6 73-79 (1959).

[16] Danial Brun, Frank Guérin. La logistique Ses métiers, ses enjeux, son avenir. EMS édition. (2014) En ligne.

[17] Dubois.D, linear programming with fuzzy data, in J.C.Bezdek, Ed. Analysis of fuzzy information volume 3, Application in Engineering and Sciences,(C.R.C.Press) 241-263 (1987).

[18] Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle.

[19] Godjevac J.Idées nettes sur la logique floue.1^{er} édition, Suisse. (1999) En ligne.

[20] Hacour S., Kebbal S. Programmation mathématique floue et applications. Mémoire de master en mathématiques appliquées à la gestion, Université de Tizi Ouzou. 62p (2018).

[21] Kacher F., Concept d'équilibre pour un jeu non coopératif sous forme normale avec paramètre indéterminés flous, Thèse de doctorat, université de Tizi ouzou (2006).

[22] Kebbiche.Z., 2007. Etude st extensions d'Algorithmes de points intérieurs pour la programmation non linéaire. Thèse doctorat en mathématiques appliquées, Université Ferhat Abbas, Sétif.75p.

[23] Luhandjula M.K., Fuzzy optimization : An appraisal, Fuzzy Sets and Systems 187-203 (2004).

[24] Messaoudi.F., Oudni.Y ., Application de la méthode chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients pour la résolution d'un programme linéaire en présence de variable aléatoires floues dans les contraintes. Mémoire de master en recherche opérationnelle, Université de Tizi-Ouzou.

[25] Michel.M., Programmation mathématique, Théorie et Algorithme 2^{ème} édition, TEC et DOC (2009).

[26] Mokeddem D. Contrôle Flou des Processus Biotechnologiques à Base d'Algorithmes Génétiques. Thèse Doctorat en Sciences Electronique, Université Ferhat Abbas, Sétif. 134 p (2010).

[27] Sifihi M.,Meguellati B.Optimisation discrète et application aux problèmes stochastiques. Mémoire de master en mathématique appliquées à la gestion de l'université Tizi Ouzou. (2018).

[28] Teghem J.programmation linéaire. Edition ellipses SMA éditions de l'université de Bruxelles. (1996).

[29] Wolfe P., the simplex method for quadratic programming. Econometrica (1959).

[30] Yadolah D. premières pas en statistique. springer-verlag France (2003).

[31] Zadeh, L.A. Soft computing and fuzzy logic. IEEE Software, pp 48-56 (1994).

[32] ZIANE O. Sur les nombres flous et ses opérations. Mémoire de master en algèbre et mathématiques discrets, Université Mohamed BOUDIAFDE, M'SILA. 43 p (2018).