

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERRI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude  
De MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : **Automatique**  
Option: **Commande des systèmes**

*Présenté par*

**Dhia BENALI  
Imane BAKEL**

Mémoire dirigé par Khayreddine SAIDI

Thème

**Commande adaptative floue d'un système non-linéaire  
(Application: pendule inversé)**

*Mémoire soutenu publiquement le 14/07/2015 devant le jury composé de :*

**M Belkacem MOULA**  
M.C.B, UMMTO , Président

**M Khayreddine SAIDI**  
M.C.A, UMMTO, Encadreur

**M Mourad ALLAD**  
M.A.A, UMMTO, Examineur

**M Moussa CHARIF**  
M.A.A, UMMTO, Examineur

---

**Ce travail a été réalisé à l'UMMTO**



## Dédicace

Je dédie ce modeste travail :  
A mes très chers parents qui m'ont couvert d'amour,  
de soutien qu'ils trouvent dans ce mémoire le fruit  
de leur travail.  
Mon père que je ne remercierai jamais assez pour  
tout ce qu'il a fait pour moi, que dieu le garde à  
jamais,  
Ma mère qui m'abreuve d'amour et d'affection  
intarissable, source de mon bonheur et ma raison  
d'être,  
A mes chers grand- parents que dieu les protège,  
ainsi que mes oncles et tantes,  
A mes frères,  
A mes sœurs,  
A mes cousines surtout : Faiza, Hanane  
A mes amis : Nawel, Celia, Dihia, Manel,  
A tous les enseignants qui m'ont aidé de proche ou  
de loin pour être un jour on Master.  
A tous les étudiants de Master 2 Automatique  
promotion 2015.  
A tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin,  
même qu'il soit un mot d'encouragement et de  
gentillesse.  
Qu'ils m'excusent de ne pas pouvoir les citer au  
risque d'oublier quelqu'un.

IMANE

## **Remerciement**

Nous remercions Dieu de nos avoir donnée la santé, la force, le courage et la patience de mener à bien ce modeste travail.

Nous tenons à remercier vivement nos chers parents pour leurs aides, leurs soutiens et leurs encouragements.

Nous tenons aussi à remercier notre promoteur Mr SAIDI, pour ses précieux conseils, idées et ses informations.

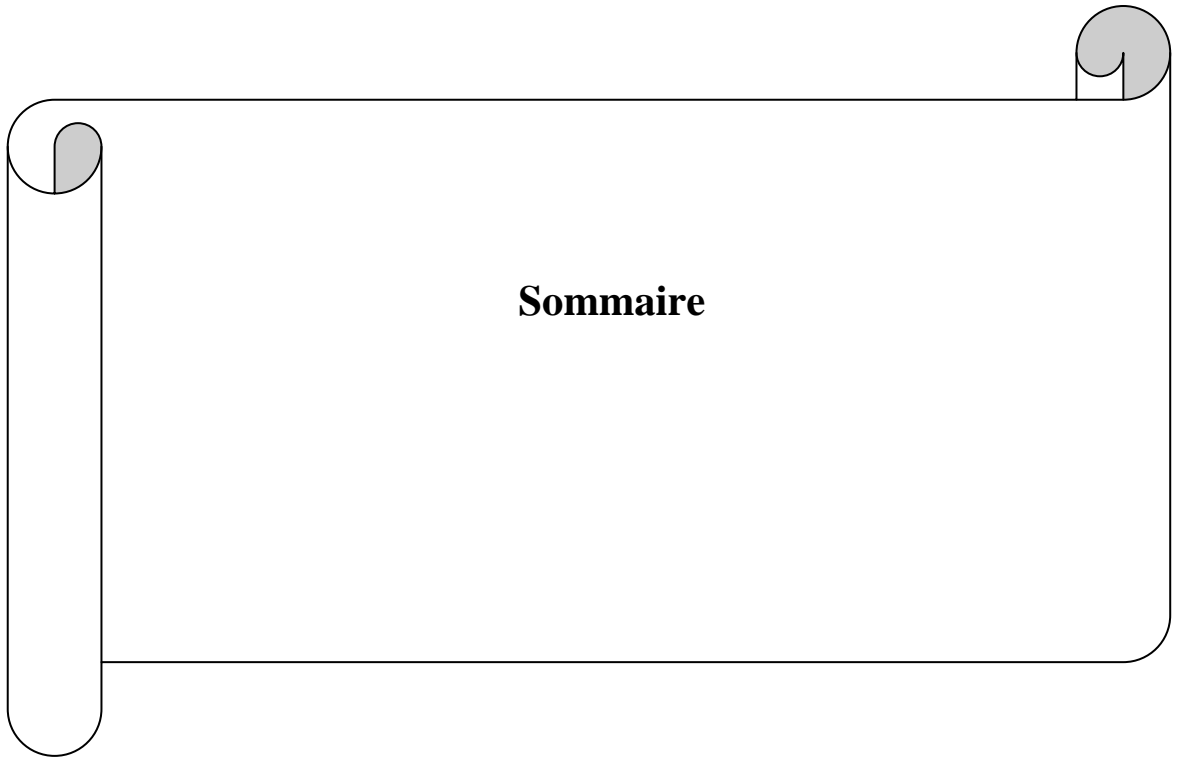
Nous adressons nos remerciements aux membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'évaluer notre mémoire.

Enfin, nous remercions tous ceux qui, de près ou de loin, ont apportés une aide afin que ce travail soit accompli.

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail :  
A mes très chers parents qui m'ont couvert d'amour,  
de soutien  
Qu'ils trouvent dans ce mémoire le fruit de leur  
travail.  
Mon père que je ne remercierai jamais assez pour  
tout ce qu'il a fait pour moi, que dieu le garde à  
jamais,  
Ma mère qui m'abreuve d'amour et d'affection  
intarissable, Source de mon bonheur et ma raison  
d'être,  
A mes chers grand- parents que dieu les protège,  
ainsi que mes  
Oncles et tantes,  
A mon frère islam,  
A ma sœur dalia,  
A mes cousines et cousins,  
A tous mes amis surtout : , Menouar meziani,  
imene ,manal ,amel, samir ,nabil, djamale,  
rafik,ali,farid ,hassine ,samiha ,lynda ,yasmine ,Lydia  
,ghilas ,amine ,abdeslame, fatah, mouhand,  
mokrane, achour ,houcine ,mehna , madjid ,hamida,  
sabrina ,fatma ,soumai ,merieme ,nassima, selia  
,dihia ,azddine ,amirouche, younes, sadek, khalef,  
mina ;sadia, said ,sofiane ,nordine  
A tous les enseignants qui m'ont aidé de proche ou  
de loin pour être un jour on Master.  
A tous les étudiants de Master 2 Automatique  
promotion 2015.  
A tous ceux qui m'ont aidé, de près ou de loin,  
même qu'il soit un mot d'encouragement et de  
gentillesse.  
Qu'ils m'excusent de ne pas pouvoir les citer au  
risque d'oublier  
Quelqu'un.

DIHIA



## **Sommaire**

<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Commande adaptative et Commande linéarisante par retour</b>	
<b>I.1. Introduction.....</b>	<b>3</b>
<b>I.2. Définition .....</b>	<b>3</b>
<b>I.3. Le principe.....</b>	<b>3</b>
<b>I.4 Commande adaptative directe et indirecte .....</b>	<b>4</b>
<b>I.4.1 Commande adaptative directe.....</b>	<b>4</b>
<b>I.4.2 Commande adaptative indirecte .....</b>	<b>5</b>
<b>I.5. Technique de la commande adaptative .....</b>	<b>6</b>
<b>I.5.1 Commande adaptative à gain programmé.....</b>	<b>6</b>
<b>I.5.2 Commande adaptative à modèle de référence(MRAC).....</b>	<b>7</b>
<b>I.5.3 La commande adaptative auto-ajustable .....</b>	<b>7</b>
<b>I.6. Les différents domaines de la commande adaptative.....</b>	<b>8</b>
<b>I.6.1. La commande adaptative floue .....</b>	<b>8</b>
<b>I.6.2 La commande adaptative neuronale.....</b>	<b>8</b>
<b>I.7.La loi de commande.....</b>	<b>8</b>
<b>I.7.1. La méthode du gradient :.....</b>	<b>9</b>
<b>I.7.2. La Fonctions de Lyapunov : .....</b>	<b>11</b>
<b>I.8. La commande par retour d'état pour les systèmes non linéaires .....</b>	<b>12</b>
<b>I.8.1 Objectif .....</b>	<b>12</b>
<b>I.8.2. Outil mathématique.....</b>	<b>12</b>
<b>I.8.2.1. La dérivée de Lie .....</b>	<b>13</b>
<b>I.8.2.2 Crochet de lie.....</b>	<b>13</b>

<b>I.8.2.3. Difféomorphisme .....</b>	<b>13</b>
<b>I.8.2.4. Distribution .....</b>	<b>13</b>
<b>I.8.2.5. Théorème de Frobenius .....</b>	<b>13</b>
<b>I.8.3. Linéarisation au sens entrées-état d'un système mono variable</b>	<b>14</b>
<b>I.8.3.1. Etapes à suivre .....</b>	<b>15</b>
<b>I.8.4. Linéarisation au sens entrées-sortie d'un système mono variable.....</b>	<b>17</b>
<b>I.8.4.1. Notion de degré relative .....</b>	<b>17</b>
<b>I.8.4.2. Dynamique interne .....</b>	<b>22</b>
<b>I.9. Commande Linéarisante:.....</b>	<b>24</b>
<b>Conclusion:.....</b>	<b>26</b>

## **Chapitre II : Les concepts de base de la logique floue**

<b>II.1. Introduction .....</b>	<b>27</b>
<b>II.2. Définition.....</b>	<b>28</b>
<b>II.3. Base générale .....</b>	<b>28</b>
<b>II.3.1. Variables linguistiques .....</b>	<b>28</b>
<b>II.3.2. Fonction d'appartenance .....</b>	<b>28</b>
<b>II.3.3. Formats de la fonction d'appartenance .....</b>	<b>29</b>
<b>II.3.4. Univers de discours .....</b>	<b>30</b>
<b>II.3.5. L'ensemble flou .....</b>	<b>30</b>
<b>II.3.6. L'opérateurs en logique floue .....</b>	<b>31</b>
<b>II.3.6.1. L'opérateur ET.....</b>	<b>31</b>
<b>II.3.6.2. L'opérateur OU (réunion).....</b>	<b>32</b>
<b>II.3.6.3. L'opérateur NON (complément) .....</b>	<b>33</b>
<b>II.4. la structure générale d'un contrôleur flou .....</b>	<b>33</b>

<b>II.4.1. Fuzzification .....</b>	<b>34</b>
<b>II.4.2. Le raisonnement flou .....</b>	<b>35</b>
<b>II.4.2.1. Les regèle flou.....</b>	<b>35</b>
<b>II.4.2.2. Mécanisme d'inférence .....</b>	<b>35</b>
<b>II.5. La défuzzification .....</b>	<b>38</b>
<b>II.5.1. Méthodes du maximum .....</b>	<b>38</b>
<b>II.5.2. Méthode par centre de gravité.....</b>	<b>39</b>
<b>II.5.3. Méthode de la somme pondérée (moyenne des maximums) .....</b>	<b>39</b>
<b>II.6. Différents types de régulateur flous .....</b>	<b>40</b>
<b>II.6.1. Régulateur de type Mamdani.....</b>	<b>40</b>
<b>II.6.2. Régulateur de type Sugeno.....</b>	<b>40</b>
<b>II.7. Avantages et inconvénients du régulateur flou .....</b>	<b>40</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>41</b>

### **Chapitre III : observateur d'état**

<b>III.1.Introduction : .....</b>	<b>42</b>
<b>III.2. Principe d'un observateur .....</b>	<b>42</b>
<b>III.3. Notion d'observabilité des systèmes non linéaires.....</b>	<b>44</b>
<b>III.3.1 Observabilité :.....</b>	<b>44</b>
<b>III.4. Observateur des systèmes non linéaires :.....</b>	<b>45</b>
<b>III.4.1. Observateur à grain gain :.....</b>	<b>46</b>
<b>Conclusion :.....</b>	<b>47</b>

### **Chapitre IV : résultats de simulation**

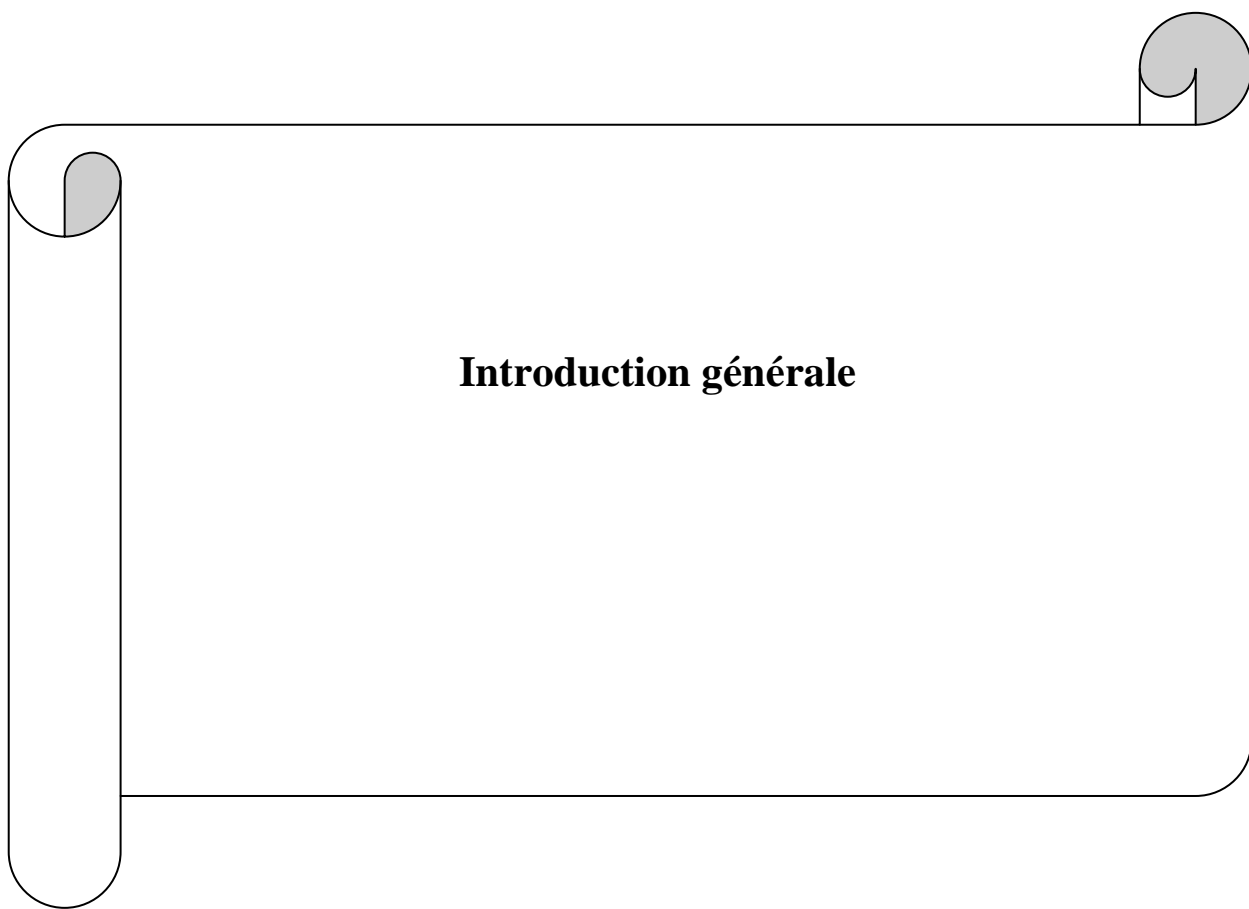
<b>IV.1. Introduction.....</b>	<b>48</b>
--------------------------------	-----------

<b>IV.2. Présentation du pendule inversé.....</b>	<b>48</b>
<b>IV.3. La commande par retour d'état du pendule inversé.....</b>	<b>50</b>
<b>IV.4. La commande adaptative floue du pendule inversé .....</b>	<b>51</b>
<b>IV.5. la commande adaptative floue avec un observateur du pendule inversé .....</b>	<b>57</b>
<b>IV.5.1. Observateur à grand gain : .....</b>	<b>58</b>
<b>Conclusion .....</b>	<b>73</b>
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>74</b>

## ***Résumé***

Les méthodes de commande non linéaire se basent sur l'existence d'un modèle analytique du système. Cependant pour les systèmes linéaires complexes, la commande adaptative présente un outil puissant pour la commande des systèmes non linéaire et pour la réduction de l'incertitude paramétrique. Dans ce mémoire nous combinerons la commande adaptative classique et la commande floue pour profiter de leurs caractéristiques communes dans la solution des problèmes de la commande des systèmes non linéaire incertains.

Dans ce travail on a appliqué trois commande sur le pendule inversé, la première la commande par retour d'états, en effet la difficulté vient si les fonctions sont inconnues pour remédier cette difficulté on a passe a la commande adaptative floue, cette commande possède aussi des limites telle que l'inaccessibilité des états si pour se la on a implémenté un observateur qui estimera les états, on a réalisé une commande en poursuite d'un pendule inversé. Les simulations sont réalisées sous l'environnement MATLAB et les résultats sont présentés dans notre mémoire



## **Introduction générale**

### Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif d'aborder les différentes techniques de commande, généralement employées en automatique afin de répondre mieux aux objectifs de performance et de robustesse. Pour la régulation d'un procédé, les lois de commandes proposées sont appliquées à la stabilisation d'un pendule inversé qui est un système instable, sous actionné et possède des non-linéarités non négligeables. C'est un outil didactique et un problème classique souvent utilisé pour tester les caractéristiques des nouvelles lois de commande.

Le premier chapitre est considéré comme une introduction à la commande adaptative d'une façon générale. Les principaux points traités par ce chapitre sont : La commande adaptative à modèle de référence, l'approche du gradient et règle MIT, et la théorie de Lyapunov. On a vu aussi les différents détails théoriques de la commande par retour d'états.

Au deuxième chapitre, nous avons donné quelques rappels théoriques de base de la logique floue et la représentation d'un régulateur flou et de ses différents constituants.

Au troisième chapitre, tout d'abord, nous avons commencé par rappeler quelques définitions relatives à l'observabilité des systèmes dynamiques puis nous avons présenté l'observateur à un grand gain.

En fin, au quatrième chapitre, nous avons appliqué des différentes stratégies de commande dans le but d'apporter des améliorations en poursuite et la convergence de l'erreur vers zéro.

Au terme de ce travail, nous pouvons conclure que chaque type de commande peut être avantageux dans un sens et désavantageux dans un autre, mais on peut affirmer que l'association de la commande adaptative floue et l'observateur à mode glissant s'avère très efficace dans le contrôle de processus complexes.



**Chapitre I : la commande adaptative et la commande  
linéarisante par retour d'états**



**Chapitre I : la commande adaptative et la commande  
linéarisante par retour d'états**

## I.1. Introduction

La commande adaptative a débutée principalement dans les années 50s, comme solution pour contrôler les processus fonctionnant sous des conditions et environnements variables dans le temps. Dans les années 60, plusieurs contributions de la théorie de commande ont été introduites dans le développement de la commande adaptative, comme par exemple l'analyse dans l'espace d'état, théorie de stabilité, théorie de la commande stochastique et programmation dynamique. Au début des années 70, les différentes méthodes d'estimation ont été introduites dans la commande adaptative.

La théorie de stabilité de la commande adaptative a commencé au début des années 80s en parallèle avec une rapide évolution en micro électronique qui a permis d'implémenter des régulateurs adaptatifs sur des systèmes à microprocesseurs.

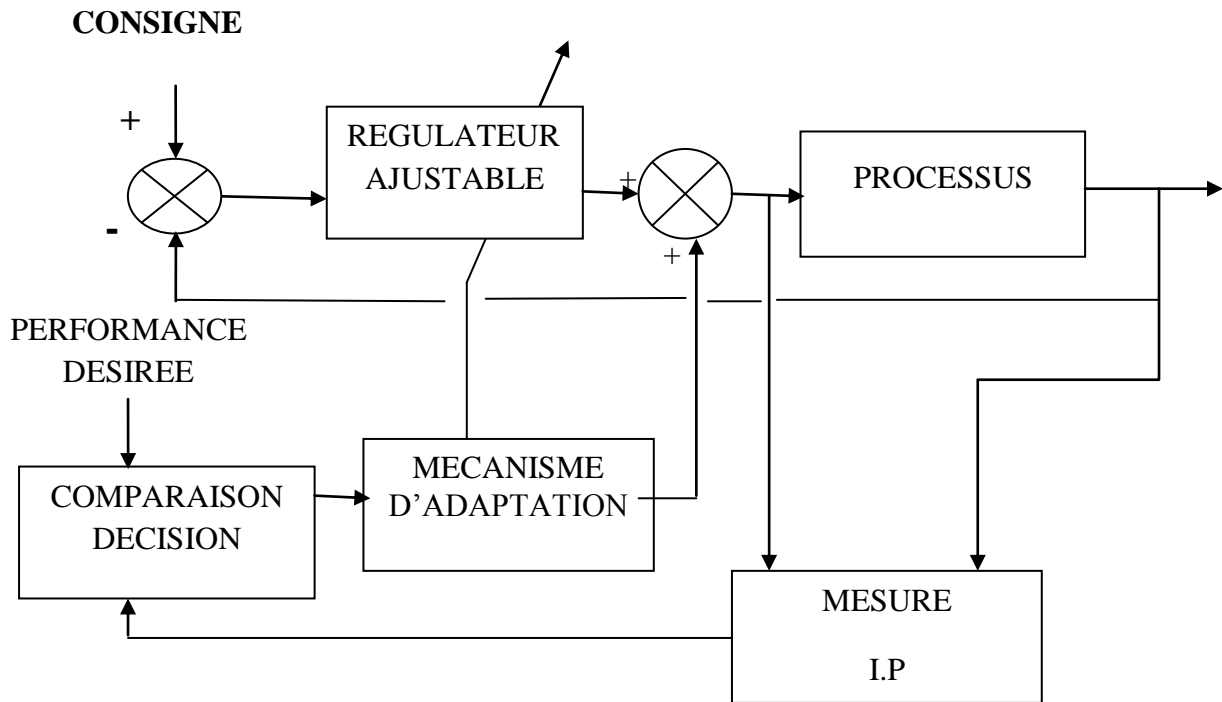
Dans la deuxième partie de ce chapitre on va présenter la commande par retour d'états. Cette commande a connu des développements significatifs dans différents domaines industriels et qui a attiré plusieurs chercheurs dans différents laboratoires, elle permet de linéariser le modèle des systèmes non linéaire. Elle est développée par **Filless et Kupka** en 1983, et présentée dans sa forme actuelle en temps continu dans **Isidori** en 1989. La linéarisation par retour d'état est basée sur des concepts théoriques de la géométrie différentielle telle que la dérivée de Lie, les crochets de Lie, le difféomorphisme...etc. Dans ce qui suit nous allons illustrer ces concepts pour les systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO)

## I.2. Définition

La commande adaptative est un ensemble de technique utilisée pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande afin de réaliser ou maintenir un certain niveau de performance quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus soit/et varient dans le temps[8].

## I.3. Le principe

En principe un système de commande adaptative mesure un certain indice de performance (IP) du système à commander à partir de l'écart entre l'indice de performance désiré et l'indice de performance mesuré. Le mécanisme d'adaptation commande certains paramètres du système ajustable ou introduit un signal supplémentaire de commande d'après l'IP. La figure(I.1) représente le principe général d'un système dans une plage donnée de commande adaptative [8].



**Figure(I.1) :** le principe général d'un système dans une plage donnée de commande adaptative.

#### **I.4 Commande adaptative directe et indirecte**

Comme nous l'avons cité, le principe de la commande adaptative consiste en l'ajustement des paramètres du régulateur. Cet ajustement se fait en une seule étape (commande adaptative directe), soit en deux étapes (commande adaptative indirecte).

Le schéma de la commande adaptative que soit direct ou indirect contient deux boucle :

- Une boucle a contre-réaction formée par le processus avec le régulateur.
- Une boucle d'adaptation qui permet d'ajuster les paramètres du régulateur.

##### **I.4.1 Commande adaptative directe**

L'idée consiste à calculer les paramètres du régulateur, mais sans identifier explicitement les paramètres du système, donc en une seule étape, justifiant ainsi la thermologie de commande directe. Cette technique induit souvent des algorithmes plus rapides et favorise une application temps réel.

La figure(I.2) illustre ce type de commande, pour laquelle les performances de la boucle fermée sont spécifiées par l'intermédiaire  $Y_m$  d'un modèle de référence choisie par l'utilisateur de façon cohérente avec les possibilités intrinsèques du système.

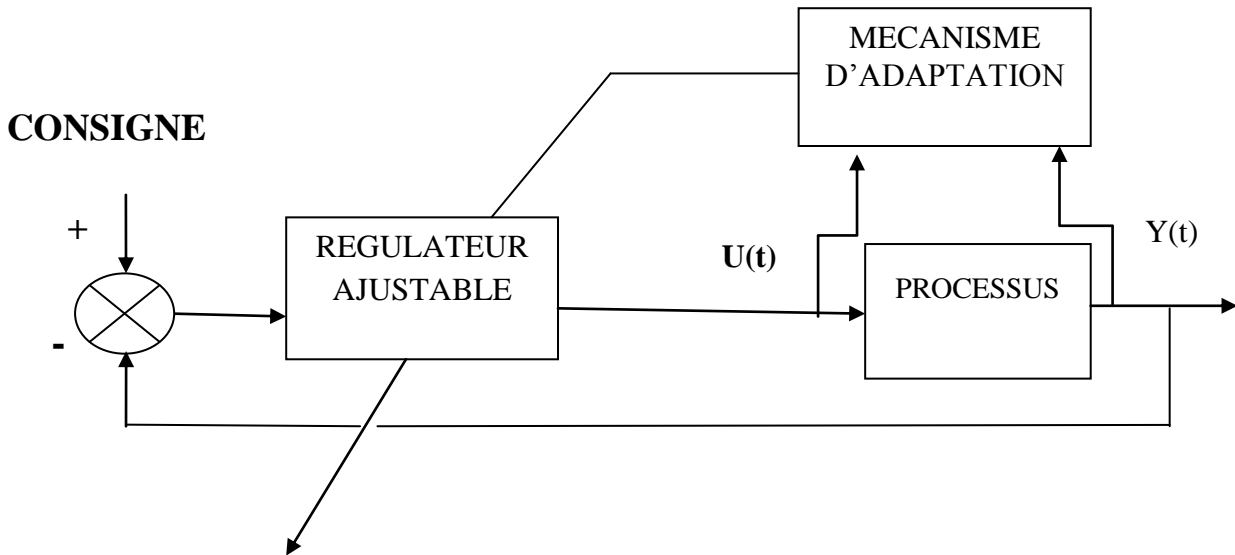


Figure (I.2) : la commande adaptative directe.

### I.4.2 Commande adaptative indirecte

Le schéma de commande indirecte est inspiré du concept même de la commande adaptative qui consiste à identifier les paramètres du processus, ensuite les utiliser pour le calcul de la loi de commande [8].

Le schéma de principe de ce type de commande est illustré dans la figure (I.3).

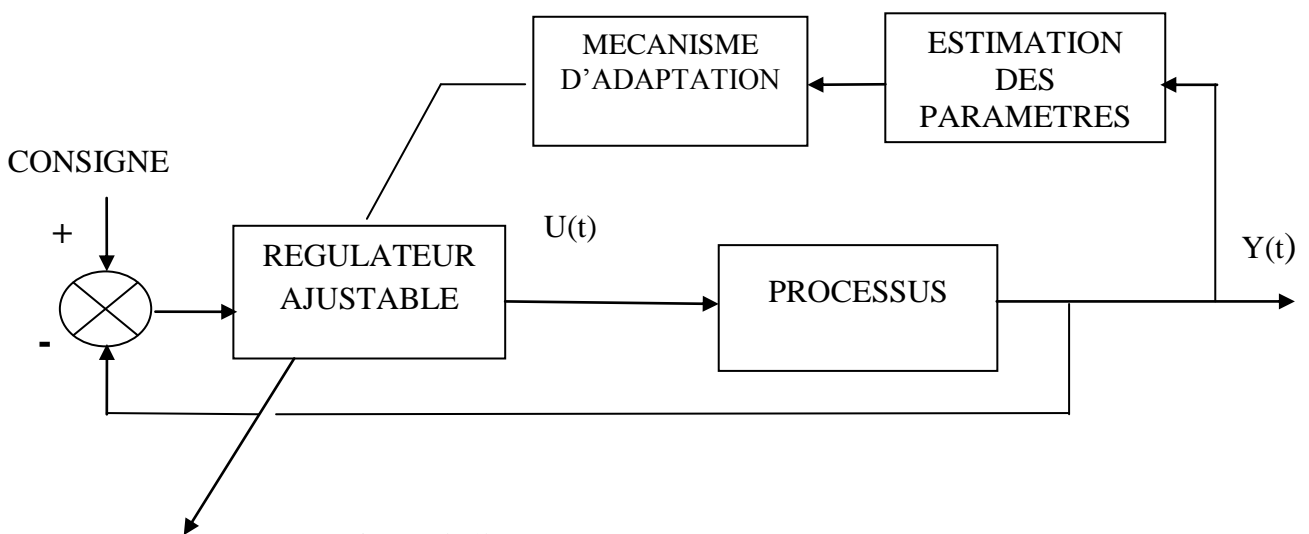


Figure (I.3) : la commande adaptative indirecte.

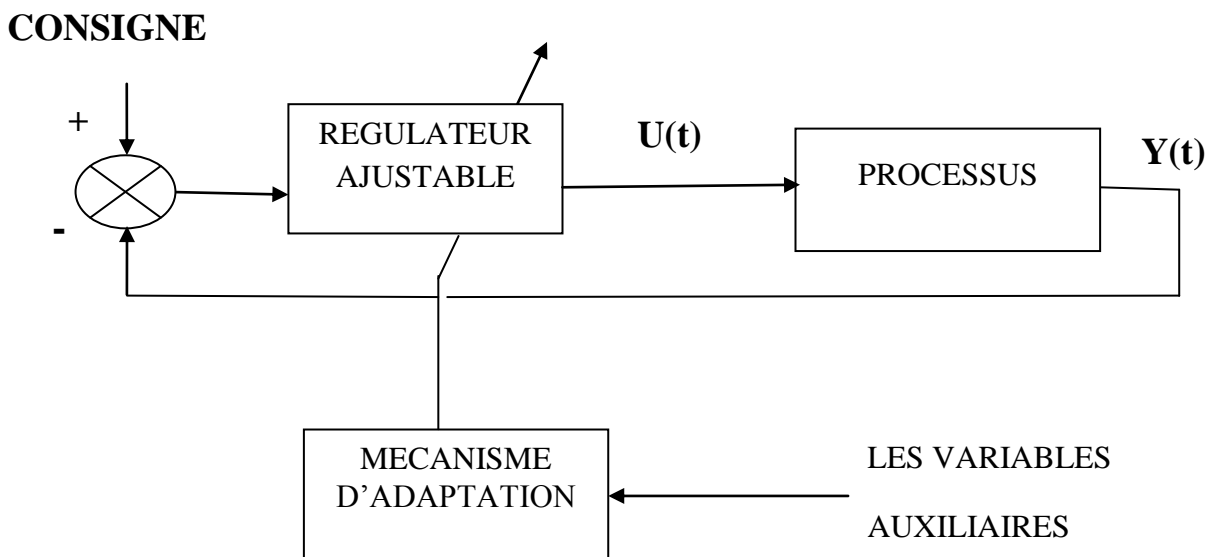
## I.5. Technique de la commande adaptative [8]

Il existe différents types de schémas destinés à assurer des performances acceptables quand les paramètres du procédé sont inconnus ou varient avec Le temps. Il y a ceux qui utilisent une boucle de contre réaction sur la mesure des performances et ceux qui utilisent une boucle ouverte pour la commande adaptative des systèmes.

Trois approches ont été essentiellement considérées pour le développent des stratégies de commande adaptative.

### I.5.1 Commande adaptative à gain programmé

Cette approche est appelée aussi « adaptation en boucle ouverte » la variation des paramètres du régulateur ne dépend pas directement de la sortie du système, mais elle est en fonction des variables auxiliaires du système corrélées avec les changements paramétriques.



**Figure (I.4) :**schéma d'une commande adaptative à gain programmé.

Ce type de commande sa réaction est très rapide, par contre il ignore l'effet de signaux non mesurable et il est limité dans sa réaction face à des comportements imprévus (non programmé)

### I.5.2 Commande adaptative à modèle de référence (MRAC)

La MRAC a été originellement développée par Waitaker et ses collègues en 1958. Ces dernières années, elle est devenue un moyen très efficace pour la commande des systèmes à paramètres inconnus et /ou variable dans le temps.

Le principe d'une telle approche est de décrire par un modèle de référence les performances désirées et de les comparer à chaque instant avec celles du système ajustable. L'erreur ainsi déterminée permet au mécanisme d'adaptation de réajuster les paramètres ajustables ou d'agir sur le signal de commande, de telle manière que l'erreur entre le modèle de référence et le système ajustable tend asymptotiquement vers zéro.

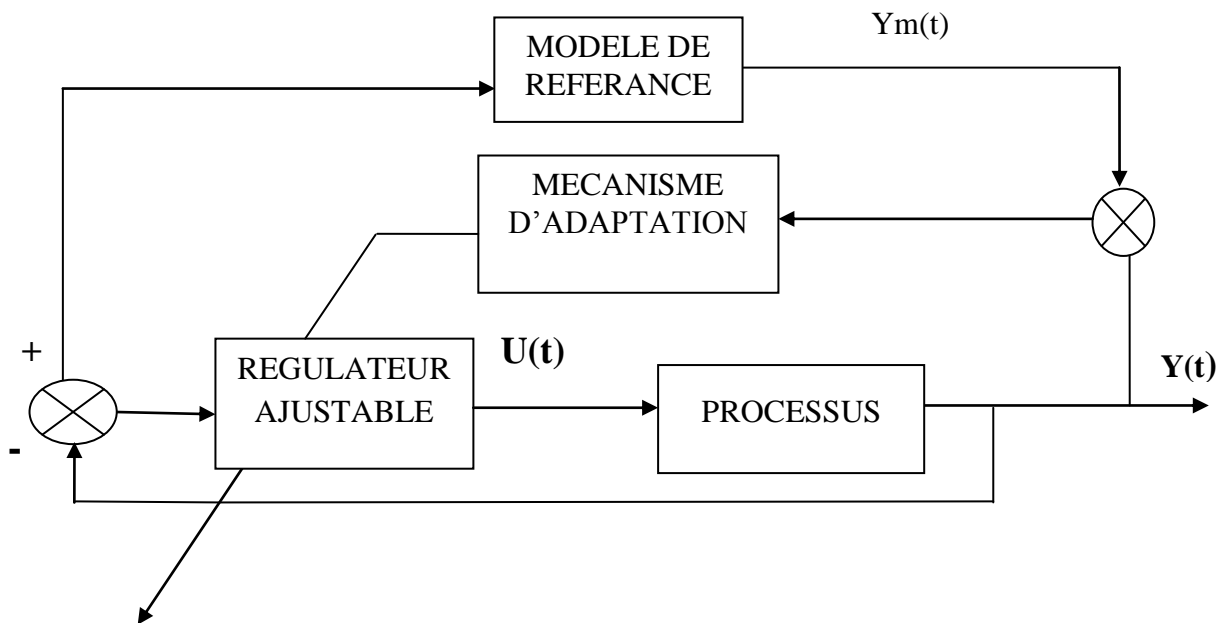


Figure (I.5) : commande adaptative à modèle de référence.

### I.5.3 La commande adaptative auto-ajustable

Cette approche a été proposée par Kalman en 1958, elle est différente des autres, et consiste à l'utilisation d'un estimateur paramétrique, à chaque instant on construit un prédictor de la sortie du procédé et l'erreur de prédiction sert à adapter les paramètres du prédictor, on utilise ces paramètres pour le calcul du régulateur [8].

La commande adaptative a été utilisée dans différents domaines pour conserver de bonnes performances du système.

## **I.6. Les différents domaines de la commande adaptative**

### **I.6.1. La commande adaptative floue**

La commande adaptative floue se compose donc d'un régulateur flou adaptatif. La différence entre un régulateur adaptatif flou et un régulateur adaptatif conventionnel est que le premier peut prendre en compte des informations linguistiques. Pour conserver des bonnes performances du système.

- **Commande adaptative directe floue**

Les systèmes flous sont utilisés comme contrôleurs.

- **Commande adaptative indirecte floue**

Les systèmes flous sont utilisés comme modèles pour les systèmes.

### **I.6.2 La commande adaptative neuronale**

La commande adaptative neuronale est la même que celle d'une commande adaptative conventionnel, la seule différence fait que le bloc identificateur et le contrôleur de celui-ci sont présentés avec des réseaux de neurones.

- **Commande adaptative neuronale directe**

La commande neuronale adaptative directe utilise un système neuronal comme contrôleur, placé en cascade avec le système à commander.

- **Commande adaptative neuronale indirecte**

Ce type de commande utilise une combinaison de deux réseaux de neurones le premier réseau est entraîné pour identifier le modèle dynamique du système. Le deuxième réseau de neurones est entraîné pour générer une commande nécessaire à appliquer au système.

## **I.7. La loi de commande**

L'ajustement des paramètres du régulateur peut être obtenu de deux manières en utilisant :

- la méthode du gradient (MIT)
- la théorie de stabilité (Lyapunov)

On va utiliser :

### I.7.1. La méthode du gradient :

Cette approche est basée sur l'hypothèse que les paramètres du procédé changent d'une manière très lente par rapport aux autres variables dans le système. L'approche du gradient ne fournit pas nécessairement un système stable en boucle fermée. Le mécanisme d'ajustement des paramètres est appelé généralement règle MIT.

➤ **Règle MIT**

Supposons que nous allons ajuster les paramètres du régulateur de telle sorte que l'erreur entre les sorties du procédé et du modèle de référence soit amenée à zéro. Soit  $e$  l'erreur de poursuite,  $\theta$  le paramètre à ajuster et soit le critère d'optimisation suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \tag{I.1}$$

Pour obtenir le min de  $J$ , il est raisonnable de changer les paramètres dans la direction négative du gradient de  $J$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \tag{I.2}$$

Cette règle MIT fonctionnera bien si le gain d'adaptation  $\gamma$  est faible. La grandeur permise de  $\gamma$  dépendra alors de l'amplitude du signal de référence et du gain du procédé. Par conséquent, il n'est pas possible de donner des limites fixées qui peuvent garantir la stabilité, donc la règle MIT peut donner un système instable en boucle fermée. Une loi d'ajustement modifiée utilisant la théorie de stabilité peut alors être introduite.

**Exemples :**

Soit un processus décrit par le modèle suivant :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -a y(t) + b u(t) \tag{I.3}$$

ou:  $u(t) = \theta_1 u_c(t) - \theta_2 y(t)$  Est le signal de commande et  $y(t)$  est la sortie mesurée.

Nous souhaitons que la sortie de ce modèle ait la même sortie que le modèle suivant :

$$\frac{dy_m(t)}{dt} = -a_m y_m(t) + b_m u_c(t) \tag{I.4}$$

**La solution :**

$$\dot{y} = y_m \rightarrow \dot{y} = y_m \tag{I.5}$$

$$y - ay + b\theta_1 u_c - b\theta_2 y = -a - b\theta_2 y + b\theta_1 u_c \tag{I.6}$$

$$b\theta_1 = b_m \quad (I.7)$$

$$-a_m = -a + b\theta_2 \rightarrow \begin{cases} \theta_2 = \frac{a_m - a}{b} \\ \theta_1 = \frac{b_m}{b} \end{cases} \quad (I.8)$$

Calculer l'erreur :

$$e = y - y_m \quad (I.9)$$

$$\rightarrow y = \frac{b}{s+a} u \rightarrow y = \frac{b}{s+a} (\theta_1 u_c - \theta_2 y) \quad (I.10)$$

$$\rightarrow y = \frac{b\theta_1 u_c}{s+a+b\theta_2} \quad (I.11)$$

$$\bullet \frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{dy}{d\theta_1} = \frac{d}{d\theta_1} \left( \frac{b u_c}{s+a+b\theta_2} \theta_1 \right) \quad (I.12)$$

$$\frac{de}{d\theta_1} = \frac{b}{s+a+b\theta_2} u_c \quad (I.13)$$

$$\bullet \frac{\partial e}{\partial \theta_2} = \frac{-b^2 \theta_1 u_c}{(s+a+b\theta_2)^2} \quad (I.14)$$

$$\text{Nous avons : } y = \frac{b\theta_1 u_c}{s+a+b\theta_2} \quad (I.15)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = \frac{-by}{s+a+b\theta_2} \quad (I.16)$$

Le paramètre d'adaptation :

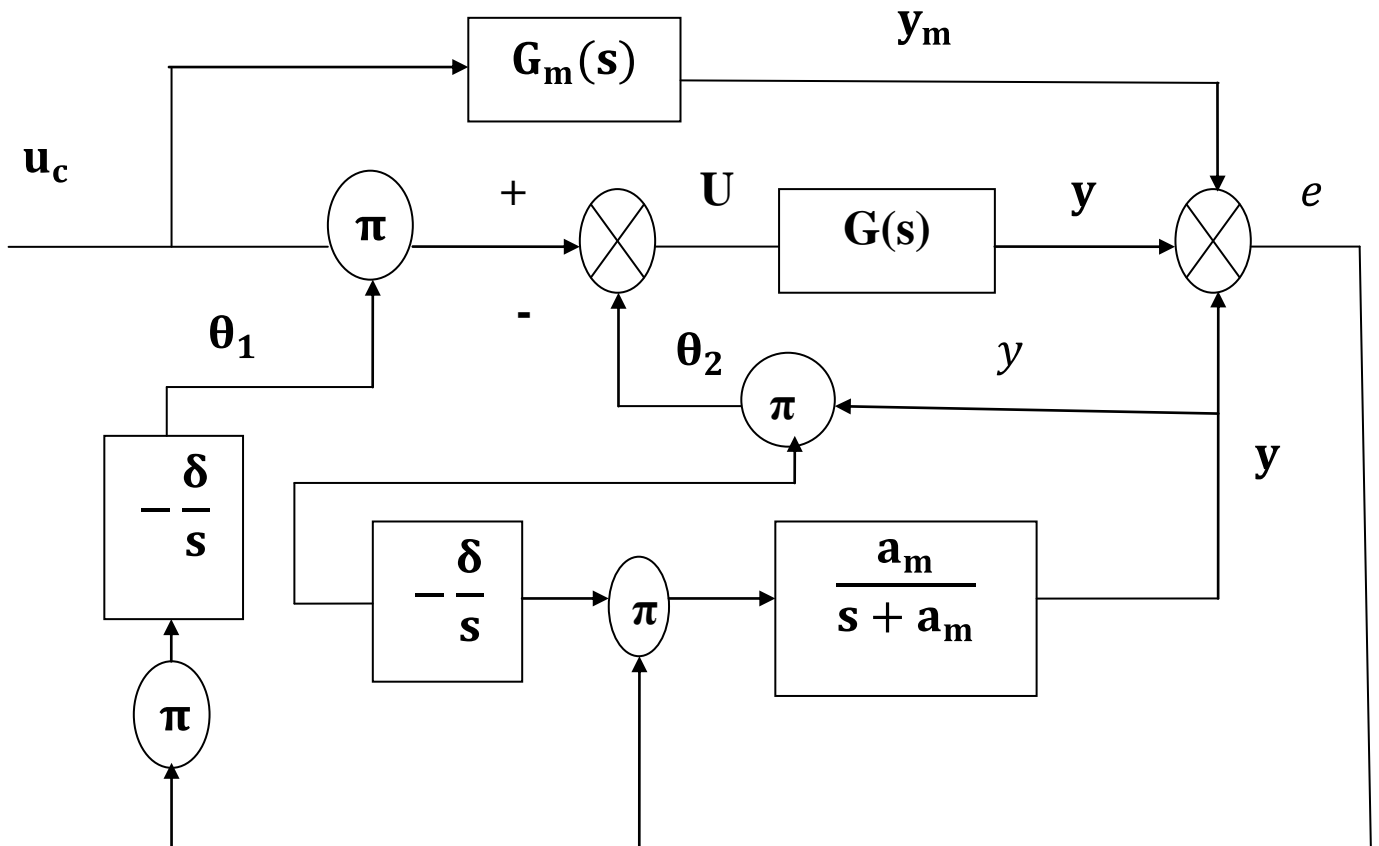
$$\frac{de}{d\theta_1} = \frac{b}{p+a_m} u_c \quad (I.17)$$

$$\frac{de}{d\theta_2} = \frac{-b}{s+a_m} y \quad (I.18)$$

Le paramètre d'adaptation :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\delta_1 \frac{b}{a_m} \frac{a_m}{s+a_m} = -\delta \frac{a_m}{s+a_m} \quad (I.19)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = -\delta_1 \frac{b}{a_m} \frac{a_m}{s+a_m} y_e = -\delta \frac{a_m}{s+a_m} y_e \quad (I.20)$$



### I.7.2. La Fonctions de Lyapunov :

Dans cette approche nous allons essayer de trouver des lois d'ajustements de telle sorte que la convergence de l'erreur vers zéro soit garantie.

Lyapunov [7][12] a introduit sa méthode directe pour étudier la stabilité d'une solution à une équation différentielle non linéaire. La philosophie de base de cette méthode est l'extension d'une observation physique fondamentale : si l'énergie totale d'un système Mécanique (ou électrique) est continuellement dissipée, alors le système convergera vers un état d'équilibre. Donc, on peut conclure la stabilité d'un système donné par simple examen d'une certaine fonction scalaire.

Soit l'équation différentielle

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t) \quad f(0, t) = 0 \tag{I.21}$$

Où  $\underline{x}$  est le vecteur d'état de dimension n. Le point d'équilibre est supposé être l'origine.

Soit la fonction  $V : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$  satisfaisant les conditions :

1.  $V(0, t) = 0 \quad \forall t \in \mathfrak{R}.$

2.  $V$  est différentiable en  $\underline{x}$  et en  $t$ .

3.  $V$  est définie positive, c'est à dire,  $V(\underline{x}, t) \geq g(\underline{x}) > 0$  où  $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  est une fonction

Continue et croissante avec  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

Une condition suffisante pour la stabilité asymptotique uniforme du système donné par l'équation (I.21) fonction :

$$V(\underline{x}, t) - f^T(\underline{x}, t) \text{ grad } V + \frac{\partial V}{\partial t} < 0 \text{ pour } \underline{x} \neq 0$$

Ce qui veut dire que  $V(\underline{x}, t)$  est définie négative.

La théorie de stabilité de Lyapunov [6][11] peut être utilisée pour concevoir une loi de commande adaptative qui peut garantir la stabilité du système en boucle fermée. Dans ce qui suit nous allons illustrer l'application de ce théorème sur un système linéaire du premier ordre.

## I.8. La commande par retour d'état pour les systèmes non linéaires

### I.8.1 Objectif

L'objectif de cette commande est d'obtenir un système linéaire en boucle fermée.

### I.8.2. Outil mathématique

Modèle :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{I.22}$$

$U$  : Vecteur d'entrée du système

$h(x)$ : Fonction analytique de  $x$ .

**f et g**: Champs de vecteurs supposés infiniment différentiables.

Pour faire la linéarisation d'un système non linéaire on utilise les notions de base de la géométrie différentielle telles que la dérivée de Lie, crochet de Lie, le difféomorphisme.

### I.8.2.1. La dérivée de Lie [9]

Noter

$$L_F h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot F(x) = \nabla h(x) \cdot f(x) \tag{I.23}$$

$$= \begin{matrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{matrix} \tag{I.24}$$

### I.8.2.2 Crochet de lie

Soient f(x) et g(x) deux champs de vecteur

$$F G = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \tag{I.25}$$

### I.8.2.3. Difféomorphisme [9]

Le changement de coordonnées  $z = \Phi(x)$  est un difféomorphisme

$\Phi(x)$  est difféomorphisme au voisinage d'un point  $x_0$  si et la jacobienne de  $\Phi(x)$  évaluée en  $x_0$  est une matrice inversible.

### I.8.2.4. Distribution [9]

Une distribution notée  $\Delta(x)$  est un espace vectoriel engendré par des champs de vecteurs  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)$

### I.8.2.5. Théorème de Frobenius[9]

Définition(1) :

Soit  $F = [f_1, \dots, f_m]$  un ensemble de champs de vecteurs linéairement indépendants défini dans  $R^n$ . F est complètement intégrable si et seulement s'il existe (m-n)



### I.8.3.1. Etapes à suivre [9]

La linéarisation au sens entrée-état est réalisée en quatre étapes.

1) construire le champ de vecteur  $[g, ad_f g, ad_f^2 g, \dots, ad_f^{n-2} g]$  vérifié les conditions de commandabilité et d'Involutivité.

2) choisir le premier élément du nouveau d'état  $z$  de façon à respecter les conditions :

$$\nabla_{z_1} ad_{f^i} g = 0 \tag{I.30}$$

$$\nabla_{z_1} ad_{f^{n-1}} g \neq 0 \tag{I.31}$$

3) construire le nouveau vecteur d'état  $z = [z_1 \ l_f z_1 \ \dots \ l_f^{n-1} z_1]$  ainsi la transformation de la commande définie par  $u = \alpha x + \beta x v$ .

Avec :

$$\alpha x = -\frac{l_f^n z_1}{l_g l_f^{n-1} z_1} \beta x = -\frac{1}{l_g l_f^{n-1} z_1}$$

Et  $v$  est la nouvelle entrée du système calculé à partir de la dynamique de l'erreur désirée.

On va démontrer cette procédure dans l'exemple suivant :

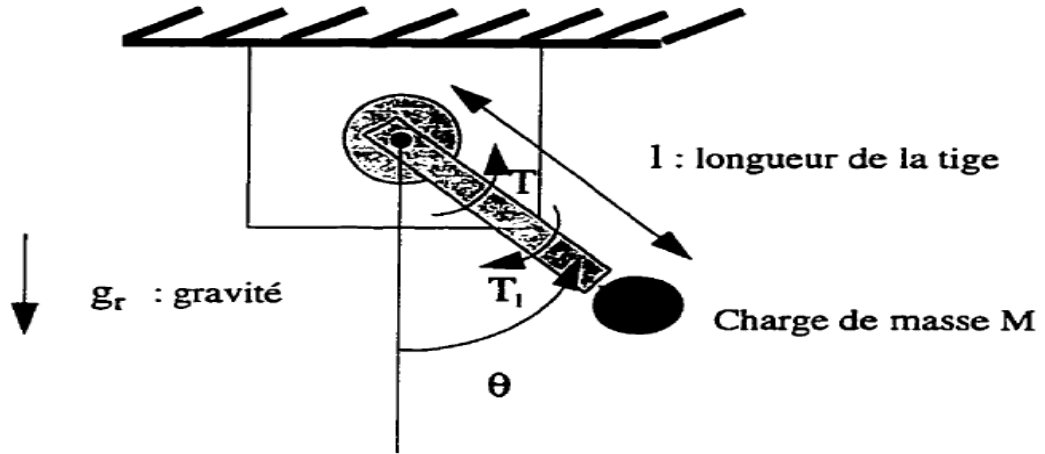
❖ **Exemple : [10]**

La figure (I.6) montre une configuration pendule d'un système moteur-charge.

Le moteur entraîne un pendule. Un tel système peut être représenté par un modèle non linéaire du deuxième ordre.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{I.32}$$

$$X = \begin{matrix} \theta \\ \omega \end{matrix} \quad f(x) = \begin{matrix} \omega \\ -\frac{b}{J}\omega - \frac{Mg r l}{J} \sin \theta \end{matrix} \quad g(x) = \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{matrix}$$



**Figure (I.6) :** Configuration mécanique du système moteur-charge.

**Solution :**

- La première étape consiste à vérifier la linéarisabilité du système. Dans ce sens nous pouvons démontrer que les deux vecteurs

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g \ x = \frac{\partial g}{\partial x} f \ x - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \tag{I.33}$$

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g \ x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J} \\ \frac{b}{J^2} \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

Sont linéairement indépendants.

- on vérifie que l'ensemble (g) est involutif, Le système est donc linéarisable au sens entrée-état. Le premier élément  $z_1$ , du nouvel état  $z$  est choisi de sorte que

$$\nabla_{z_1} g = 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \times 0 + \frac{\partial z_1}{\partial w} \times \frac{1}{J} = 0 \tag{I.34}$$

$$\nabla_{z_1} \text{ad}_f g \neq 0 \rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \times \frac{1}{J} + \frac{\partial z_1}{\partial w} \times \frac{B}{J^2} = 0 \tag{I.35}$$

La solution  $z_1 = \theta$  vérifie les conditions (I.16) et (I.17) alors  $Z = [Z_1 L_F Z_1]^T = [\theta \ w]^T$  devient le nouvel état du système.

En posant :

$$\alpha x = -\frac{l_f^2 z_1}{l_g l_f^1 z_1} = b\omega + Mg_r l \sin \theta \quad (\text{I.36})$$

$$\beta x = -\frac{1}{l_g l_f^1 z_1} = J \quad (\text{I.37})$$

La loi de commande linéarisante devient :

$$U = [b\omega + Mg_r l \sin \theta] + Jv \quad (\text{I.38})$$

### I.8.4. Linéarisation au sens entrées-sortie d'un système mono variable

Lorsque la linéarisation au sens entrée-état n'est pas réalisable, il est possible de faire une linéarisation au sens entrée-sortie.

#### I.8.4.1. Notion de degré relative [9]

Le système possède de degré relatif  $r$  au point  $x_0$  si :

$$l_g l_f^k h x = 0 \quad 0 < k < r-1 \quad (\text{I.39})$$

$$l_g l_f^{r-1} h x \neq 0 \quad (\text{I.40})$$

Le degré relatif nombre de fois qu'on dérive la sortie pour apparaitre l'entrée, si nous dérivons la sortie du système d'équation (I.32), on obtient:

$$y = \frac{\partial h}{\partial x} x \quad (\text{I.41})$$

$$y = \frac{\partial h}{\partial x} (f x + g x u) \quad (\text{I.42})$$

$$y = \frac{\partial h}{\partial x} f x + \frac{\partial h}{\partial x} g(x) \quad (\text{I.43})$$

$l_g h x = 0$  On fait  $n$  dérivée jusque qu'on trouve  $l_g h x \neq 0$  donc le système est commandable  $r \leq n$  non a deux cas :

#### • Cas1 : $r = n$

Lorsque on trouve que le degré relatif égale a la dimension de notre système, le système effectué une linéarisation qu'on se fait en deux étapes :

a) La mise du système sous la forme normale

b) Le retour d'état linéarisant.

On peut donc trouver la forme normale du système en appliquant le changement de coordonnées (un difféomorphisme)  $\phi(x) = [\phi_1 x, \dots, \dots, \phi_n]$

$$\begin{aligned} z_1 &= h x = \phi_1 x \\ z_2 &= l_f h x = \phi_2 x \\ &\vdots \\ z_n &= l_f^{n-1} h x = \phi_n x \end{aligned} \tag{I.44}$$

Dans les nouvelles coordonnées  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , le système (I.44) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= a x + b(x)u \end{aligned} \tag{I.45}$$

Retour d'état linéarisant :

$$u x = \frac{1}{b x} (-a x + v) \tag{I.46}$$

La forme équation (I.45) correspond à un système linéaire et contrôlable; elle est appelée la forme canonique

$$\dot{z}_n = Az + bv \tag{I.47}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

❖ Exemple :

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{I.48}$$

$$y = x_3 \quad (I.49)$$

Le degré relatif :

$$l_g h x = \frac{\partial h}{\partial x} g x = \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} \frac{\partial h}{\partial x_3} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.50)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (I.51)$$

$$l_g l_f h x = \frac{\partial l_f h x}{\partial x} g x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (I.52)$$

$$l_g l_f^2 h x = \begin{pmatrix} -1 & -2x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} = -(1 + 2x_2)e^{x_2} \quad (I.53)$$

$$l_g l_f^2 h x \neq 0 \rightarrow r = 3 = n \quad (I.54)$$

Changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} z_1 &= h x = x_3 = \phi_1 x \\ z_2 &= l_f h x = x_1 - x_2 = \phi_2 x \\ z_3 &= l_f^2 h x = -x_1 - x_2^2 = \phi_3 x \end{aligned} \quad (I.55)$$

$$\phi x = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{pmatrix} \quad (I.56)$$

Difféomorphisme si  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  est inversible  $\det \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \neq 0$ .

Forme normal :

$$z_1 = x_3 = x_1 - x_2 = z_2$$

$$z_2 = x_1 - x_2 = z_3$$

$$z_3 = -x_1 - 2x_2x_2 \quad (I.57)$$

$$z_3 = -e^{x_2}u - 2x_2 x_1 + x_2^2 + e^{x_2} u$$

$$z_3 = -2x_2 x_1 + x_2^2 - 1 + 2x_2 e^{x_2}u$$

Le feedback linéarisant :

$$u(x) = \frac{1}{b(x)}(-a(x) + v) \tag{I.58}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+2x_2 e^{x_2}}(2x_2 x_1 + x_2^2) + v \tag{I.59}$$

Le système en boucle fermée :

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ z_2 &= z_3 \\ z_3 &= u \end{aligned} \tag{I.60}$$

- **Cas 2 :  $r < n$**

La linéarisation partielle correspond à un degré relatif  $r$  inférieur à l'ordre du système  $r < n$  la forme normale est représentée par les fonctions  $h(x), l_f(x), \dots, l_f^{r-1}(x)$ , donnent les  $r$  premiers composants du difféomorphisme  $\Phi(x)$ . Les  $(n-r)$  composantes restantes sont choisies de sorte que :

$$l_g \phi_j(x) = 0 \quad \text{avec } r+1 \leq j \leq n \tag{I.61}$$

Ce choix est justifié pour les raisons suivantes :

Le système d'équation (I.29) donne le nouveau système de coordonnées, s'écrit :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= z_2 \\
 z_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 z_{r-1} &= z_r \\
 z_r &= a x + b(x) \\
 z_{r+1} &= \frac{d\phi_{r+1}}{dt} = \frac{\partial\phi_{r+1}}{\partial x} \cdot x \\
 &= \frac{\partial\phi_{r+1}}{\partial x} f x + \frac{\partial\phi_{r+1}}{\partial x} g x u \\
 z_{r+1} &= l_f \phi_{r+1} x + l_g \phi_{r+1} x u \\
 z_{r+2} &= l_f \phi_{r+2} x + l_g \phi_{r+2} x u \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 z_n &= l_f \phi_n x
 \end{aligned} \tag{I.62}$$

Le retour d'état linéarisant :

$$u x = \frac{1}{b x} (-a x + v) \tag{I.63}$$

Système en boucle fermée :

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 &= z_2 \\
 z_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 z_r &= v
 \end{aligned} \right\} \tag{I.64}$$

$$\left. \begin{aligned}
 z_{r+1} &= l_f \phi_{r+1} x \\
 z_{r+2} &= l_f \phi_{r+2} x \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 z_n &= l_f \phi_n x
 \end{aligned} \right\} \tag{I.65}$$

La linéarisation entrée-sortie partielle, décompose le système d'équation (I.61) en deux parties:

a) Une part linéaire sous forme canonique (partie externe), qui donnent une relation différentielle entre l'entre et la sortie.

b) Une partie interne non observable représentée par le système d'équation  $n = q(n, \delta)$ , cette partie est appelée la dynamique interne.

### I.8.4.2. Dynamique interne [10]

La dynamique de la partie non observable équation (I-64) est appelée la dynamique interne. La stabilité de cette dynamique est exigée pour la création de la commande. Pour un système linéaire, la dynamique interne est stable si les zéros de la fonction de transfert se situent dans le demi-plan gauche du domaine complexe. Par analogie, on introduit la notion de la dynamique des zéros pour étudier la stabilité de la dynamique interne d'un système non linéaire.

❖ Exemple :

$$\dot{x} = \begin{matrix} -x_1 & e^{x_2} \\ x_1 x_2 & + 1 \\ x_2 & 0 \end{matrix} u \quad (I.66)$$

$$y = x_3$$

**Solution :**

❖ Degré relatif :

$$l_g h x = \begin{matrix} & & e^{x_2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 0 \end{matrix} = 0 \quad (I.67)$$

$$l_g l_f h x = \begin{matrix} & & e^{x_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & & 0 \end{matrix} = 1 \quad (I.68)$$

Donc  $r=2 < n$

Présence de la dynamique de zéros

❖ Changement de coordonnée :

$$\begin{aligned} z_1 &= h x = x_3 \\ z_2 &= l_f h x = x_2 \\ \text{rest } z_3 &= \phi_3(x) \end{aligned} \quad (I.69)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_3}{\partial x_3} \begin{matrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{matrix} = 0 \quad (I.70)$$

Une solution :

$$\phi_3 x = 1 + x_1 - e^{x_2} \quad (I.71)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= 1 + x_1 - e^{x_2} \end{aligned}$$

$\emptyset \times$  Difféomorphisme

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 - e^{x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.72)$$

$$\det \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \emptyset \text{ est un difféomorphisme}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= x_3 = x_2 = z_2 \\ z_2 &= x_2 = x_1 x_2 + u \\ z_3 &= -x_1 - e^{x_2} x_1 x_2 + u \\ z_3 &= -x_1 - x_1 x_2 e^{x_2} \\ y &= z_1 \end{aligned} \quad (I.73)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ z_2 &= x_1 x_2 + u \end{aligned} \quad (I.74)$$

$$\text{Partie cachée } z_3 = -x_1 - x_1 x_2 e^{x_2} \quad (I.75)$$

Retour d'état linéarisant :

$$u x = \frac{1}{\beta x} -\alpha x + v = \frac{1}{1} -x_1 x_2 + v \quad (I.76)$$

$$u x = -x_1 x_2 + v \quad (I.77)$$

Système en boucle fermée :

$$\text{Partie linéaire } \begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ z_2 &= v \end{aligned} \quad (I.78)$$

Partie cachée  $z_3 = -(z_3 + 1 + e^{z_2}) - (z_3 + 1 + e^{z_2})z_2 e^{z_2} \implies$  la dynamique de zéros

## I.9. Commande Linéarisante:

Dans sa forme la plus simple, Feedback linéarisation concerne à simplifier les non linéarités dans un système non linéaire de telle façon la dynamique en boucle fermée soit linéaire.

Nous allons essayer de montrer cette idée sur l'exemple suivant:

Soit un système non linéaire décrit par la dynamique suivante:

$$\dot{x} = u - b \sqrt{2gx} \quad (\text{I.79})$$

Où a, b et g sont des constantes.

U la commande du système.

x l'état de sortie du système et soit  $x_d$  la sortie désirée du système.

Si  $u(t)$  est choisie comme:

$$u = b \sqrt{2gx} + av \quad (\text{I.80})$$

Avec  $v$  est une nouvelle entrée appelée dans la littérature "entrée équivalente" que nous devons définir, alors la nouvelle dynamique sera linéaire de la forme

$$\dot{x} = v \quad (\text{I.81})$$

Choisissant  $v$  tel que :

$$v = \dot{x}_d - k_p (x - x_d) \quad (\text{I.82})$$

Choisissant  $v$  tel que:

$$v = \dot{x}_d - k_p [x - x_d] \quad (\text{I.83})$$

Donc l'équation (I.81) devient:

$$\dot{x} - \dot{x}_d - k_p [x - x_d] \quad (\text{I.84})$$

Posant  $x_d - x = e$  qui est l'erreur, donc la dynamique résultante en boucle fermée sera:

$$\dot{e} + k_p e = 0 \quad (\text{I.85})$$

$k_p$  Doit être une constante strictement positive pour que l'erreur  $e(t)$  converge vers zéro, donc  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$

En basant sur cette analyse, la loi de commande non linéaire est donnée par

$$u = b \sqrt{2gx} + a[\dot{x}_d - k_p e] \quad (\text{I.86})$$

Notons que dans la loi de commande (IV.86) le premier terme est utilisé pour compenser la non linéarité  $b \sqrt{2gx}$ , tandis que le deuxième terme est utilisé pour assurer la poursuite de la trajectoire désirée [4].

L'idée de la commande linéarisante est d'éliminer les non linéarités et d'imposer une dynamique linéaire désirée. Elle peut être appliquée simplement à une classe de systèmes non linéaires décrits par ce qu'on appelle la forme compagne si sa dynamique est représentée par:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + g(x) \cdot u \quad (I.87)$$

Où  $u$  est l'entrée de commande  $u \in R$  ET  $x \in R^n$  est la sortie considérée,  $x = [x_1, x_2, \dots, x_{(n-1)}]^T$  est le vecteur d'état, et  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonction non linéaires dans l'espace d'état, l'équation considérée (I.87) peut être réécrite par:

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{matrix} = \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ f(x) + g(x) \cdot u \end{matrix} \quad (I.88)$$

Pour ce type de système, on suppose que  $g(x)$  est différente de zéro.

Si nous choisissons la commande suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)} [v - f(x)] \quad (I.89)$$

Alors, la dynamique du système sera comme suit

$$\dot{x}^{(n)} = v \quad (I.90)$$

Et pour que la dynamique soit linéaire et stable, l'entrée équivalente  $v$  doit être

$$v = \dot{x}_d^{(n)} - K_0 \cdot e - K_1 \cdot \dot{e} - K_{n-1} \cdot e^{(n-1)} \quad (I.91)$$

Avec les  $K_i$  sont choisis tel que le polynôme  $e^n + K_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + K_0e = 0$  soit stable  
 $x_d(t)$

La trajectoire désirée et  $e(t) = x(t) - x_d(t)$  est l'erreur de poursuite [1]

**Remarque:**

Des résultats similaires peuvent être obtenus si le scalaire  $x$  est remplacé par un vecteur et le scalaire par  $b$  par une matrice carrée inversible.

D'une manière générale, si le système est d'ordre  $n$  sa dynamique est donnée par:

$$u = \frac{1}{g} [-f \ x + x_d^n + K^T \underline{e}] \quad (\text{I.92})$$

Avec  $K = [K_n K_{n-1} \dots K_1]$  et  $\underline{e} = [e \ e \dots e^{n-1}]$

Cela nous permet d'obtenir la dynamique stable de l'erreur suivante :

$$e^n + K_1 e^{(n-1)} + \dots + K_n e = 0 \quad (\text{I.93})$$

### Conclusion:

Nous avons montrés dans ce chapitre les différentes approches de la commande adaptative, qui peut être utilisée de deux manières, soit en boucle fermée ou ouverte, là où on a constaté que c'est la commande adaptative en boucle fermée qui est la plus utilisée du fait qu'elle permet le maintien d'un fonctionnement correcte du procédé même en présence de fortes perturbations, ou lors du changement de consigne .

On a vu que la commande adaptative a été utilisée dans différents domaines pour améliorer les performances du système.

On a illustré aussi les concepts théoriques de la géométrie différentielle telle que la dérivée de Lie, les crochets de Lie, le difféomorphisme, le degré relatif. Sont les bases de la linéarisation par retour d'état pour les systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO).

On a vu les deux types de cette commande : linéarisation au sens entrées-sortie, linéarisation au sens entrées-états qui ont des propriétés différentes mais leurs buts d'obtenir un système linéaire en boucle fermé.



## **Chapitre II : Les concepts de base de la logique floue**

## Introduction

Dans la commande des systèmes non linéaires ou ayant des paramètres non constants, les lois de commande classique peuvent être insuffisantes car elles sont non robustes surtout lorsque les exigences sur la précision et autres caractéristiques dynamiques des systèmes sont strictes. On doit faire appel à des lois de commande insensibles aux variations des paramètres, aux perturbations et aux non linéarités.

Dans cet objectif, plusieurs outils sont proposés dans la littérature, dont on cite la logique floue. Depuis les travaux de Mamdani (1974), le domaine de contrôle par logique floue est devenu très important, grâce à ces capacités de traiter les informations incertaines. L'algorithme de contrôle par logique floue est constitué d'un ensemble de règles de décisions, il peut être considéré comme un algorithme de contrôle non mathématique contrairement aux algorithmes de contrôle conventionnel.

Dans le domaine de l'asservissement, les contrôleurs flous peuvent concurrencer les correcteurs classiques.

En effet, ils offrent de bonnes caractéristiques en termes de temps de réponse, dépassement et surtout robustesse dans certaines applications.

De plus, ils n'ont besoin que d'une connaissance sommaire du système à contrôler, qui s'exprime sous forme d'un tableau (moteur d'inférence) où l'on enregistre le comportement du correcteur.

Le temps de mise au point est donc beaucoup plus court bien qu'il soit nécessaire d'utiliser soit un microcontrôleur, soit un composant dédié. Dans un souci d'optimiser encore la qualité de l'asservissement, on se propose de trouver un moyen de rendre le contrôleur flou dynamique.

Ainsi, la base devrait se modifier petit à petit en suivant les variations des paramètres du système et assurer un asservissement optimal.

Dans ce chapitre, nous allons présenter en détail les principes de la logique floue et ses applications dans le domaine du réglage puis nous décrirons différentes solutions pour un organe de commande basé sur les principes flous.

## II.2. Définition

Le principe du réglage par la logique floue se rapproche de la démarche humaine dans le sens où les variables à traiter ne sont plus des variables logiques, mais des variables linguistiques, comme par exemple, aller vite, freiner, grand, petit, ...etc.

En outre, ces variables linguistiques sont traitées à l'aide de règles qui font référence si une certaine connaissance du comportement de système à régler.

En effet, sur la base de ce principe, les systèmes flous et l'ensemble de règles qui leur sont rattachées forment une classe de fonctions non linéaires, qui permet de construire par apprentissage une très large classe de modèles et de correcteurs.

La logique floue est une autre tentative pour modéliser les incertitudes

## II.3. Base générale

### II.3.1. Variables linguistiques [4]

Les variables linguistiques sont des variables non numériques sert à modéliser les connaissances imprécises ou vagues d'une variable dont sa valeur précise peut être inconnue.

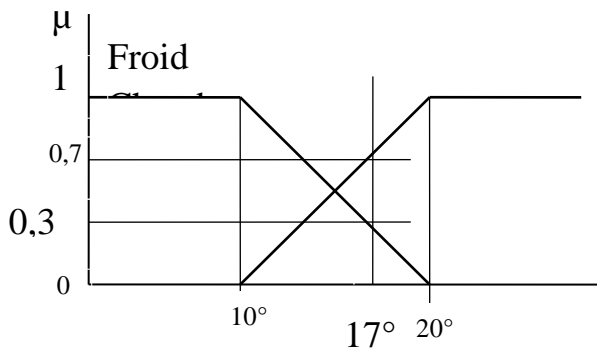
Elles décrivent les états (ou les situations) des phénomènes (ou des procédés) par des mots ou des phrases ou des expressions dans un langage naturel ou artificiel.

**Exemple :** la variable linguistique « température » peut appartenir aux ensembles flous « froid », « tiède » ou « chaud ».

### II.3.2. Fonction d'appartenance [5]

Au lieu d'appartenir à l'ensemble « vrai » ou à l'ensemble « faux » de la logique binaire traditionnelle, la logique floue admet des degrés d'appartenance à un ensemble donné. Le degré d'appartenance à un ensemble flou est matérialisé par un nombre compris entre 0 et 1. Une valeur précise de la fonction d'appartenance liée à une valeur de la variable est notée  $\mu$  et appelée « facteur d'appartenance ».

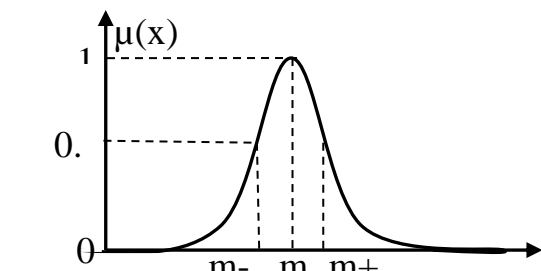
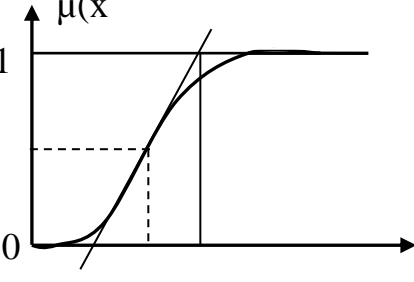
**Exemple**



D'après ce graphique, on peut constater que pour une valeur  $\theta = 17^\circ$ , le facteur d'appartenance à l'ensemble « froid » vaut  $\mu_{\text{froid}} = 0,3$  et le facteur d'appartenance à l'ensemble « chaud » vaut  $\mu_{\text{chaud}} = 0,7$

**II.3.3. Formats de la fonction d'appartenance [5]**

<i>Fonction</i>	<i>La forme algébrique</i>	<i>La forme graphique</i>
<b>singleton</b>	Une fonction d'appartenance égale a 1 $\mu_{x_0} x = 1 \text{ si } x = x_0$ $\mu_{x_0} x = 0 \text{ si non}$	
<b>Fonction triangulaire</b>	Elle est définie par trois paramètres $\{a, b, c\}$ qui déterminent les coordonnées des trois sommets $\mu x = \text{Max} \left( \min \left( \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right)$	
<b>Fonction trapézoïdale</b>	elle définie par quatre paramètres $a, b, c, d$ $\mu x = \text{Max} \left( \min \left( \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-d} \right), 0 \right)$	

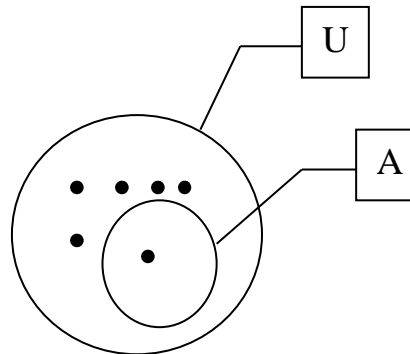
<p><b>Fonction gaussienne</b></p>	<p>Elle définie par de paramètre <math>m, \sigma</math></p> $\mu_x = \exp -\frac{(x - m)^2}{2 \sigma^2}$	
<p><b>Fonction sigmoïdale</b></p>	<p>Elle définie par deux point <math>a, c</math></p> $u_x = \frac{1}{1 + \exp(-a x - c)}$	

**II.3.4. Univers de discours [1]**

L'univers de discours représente l'ensemble de référence ou le domaine de variation de la variable linguistique.

**II.3.5. L'ensemble flou [1]**

Soient U l'univers du discours.  
 A: un sous-ensemble de U

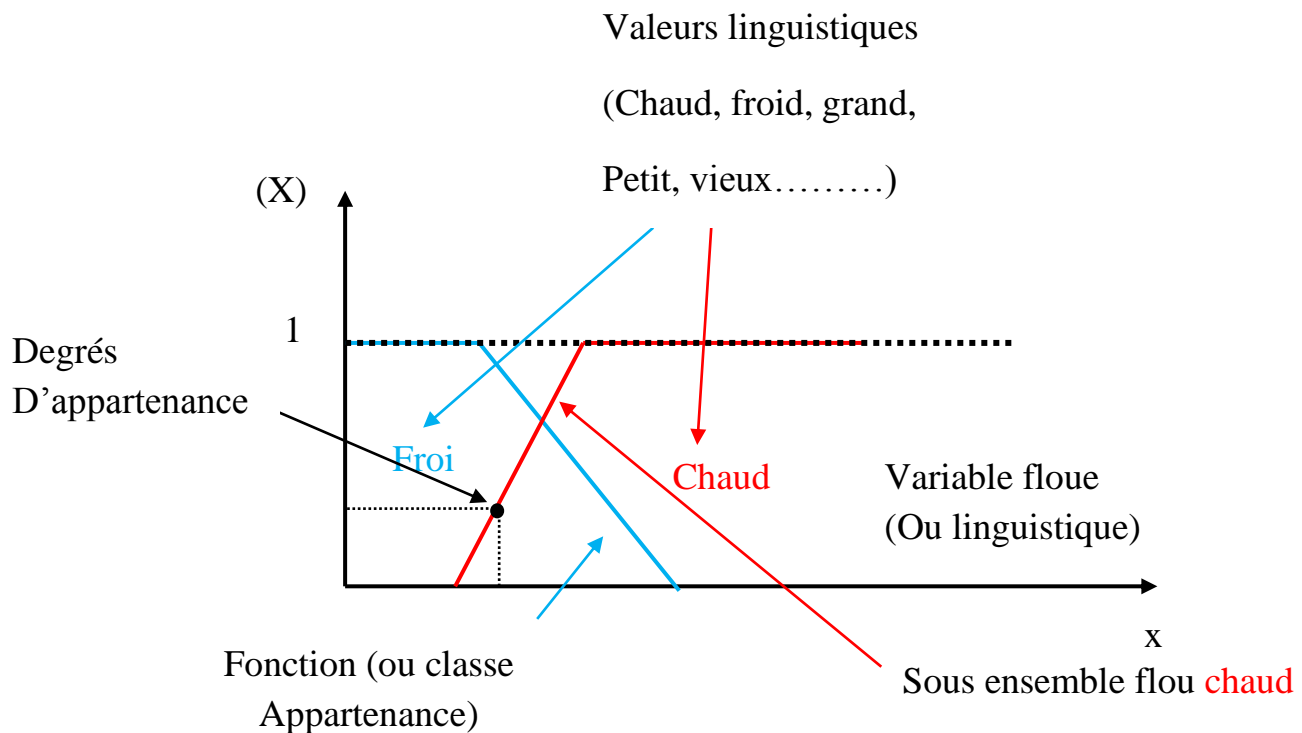


**Figure (II.1):** sous ensemble flou

Concept d'ensemble flou :

Si  $u_A$  est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou A

$$\forall A \in U \quad \mu_A(x) \in [0, 1]$$

**Exemple****II.3.6. L'opérateurs en logique floue [1]**

Trois opérateurs : et, ou, et la négation

**II.3.6.1. L'opérateur ET**

A est l'ensemble flou des personnes petites

B est l'ensemble flou des personnes moyennes

L'ensemble flou de personnes petites **ET** moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in \mu$$

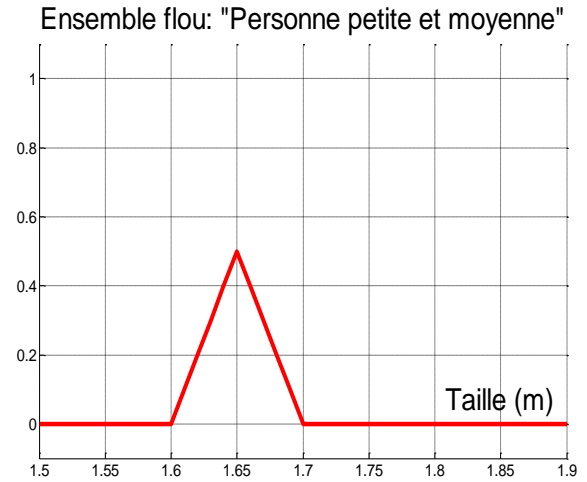
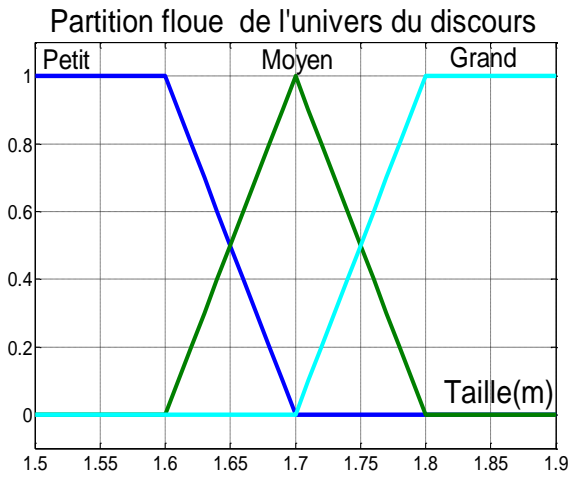


Figure (II.2) : Opérateur ET

### II.3.6.2. L'opérateur OU (réunion)

A est l'ensemble flou des personnes petites

B est l'ensemble flou des personnes moyennes

L'ensemble flou de personnes petites **OU** moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance.

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$

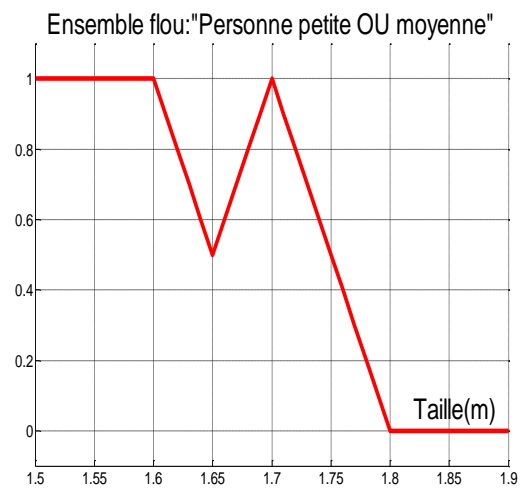
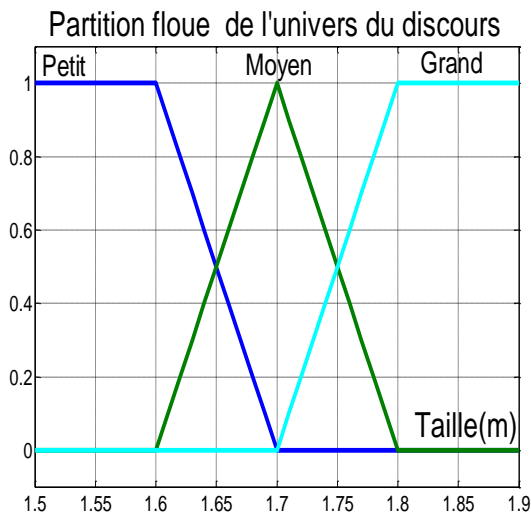


Figure (II.3) : Opérateur OU

### II.3.6.3. L'opérateur NON (complément)

A est l'ensemble flou des personnes petites

L'ensemble des personnes **NON** petites est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U$$

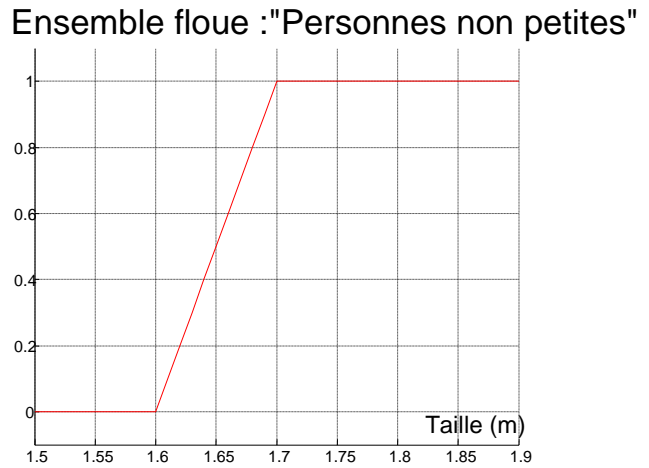
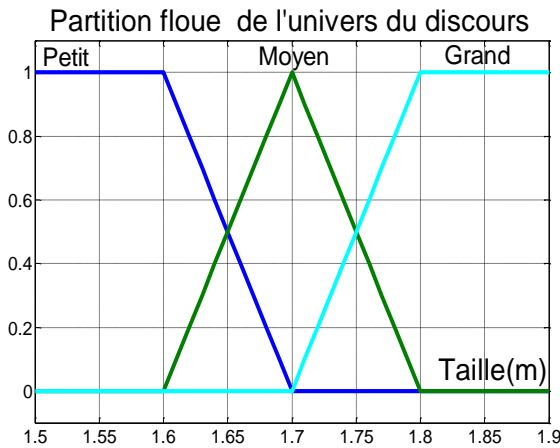
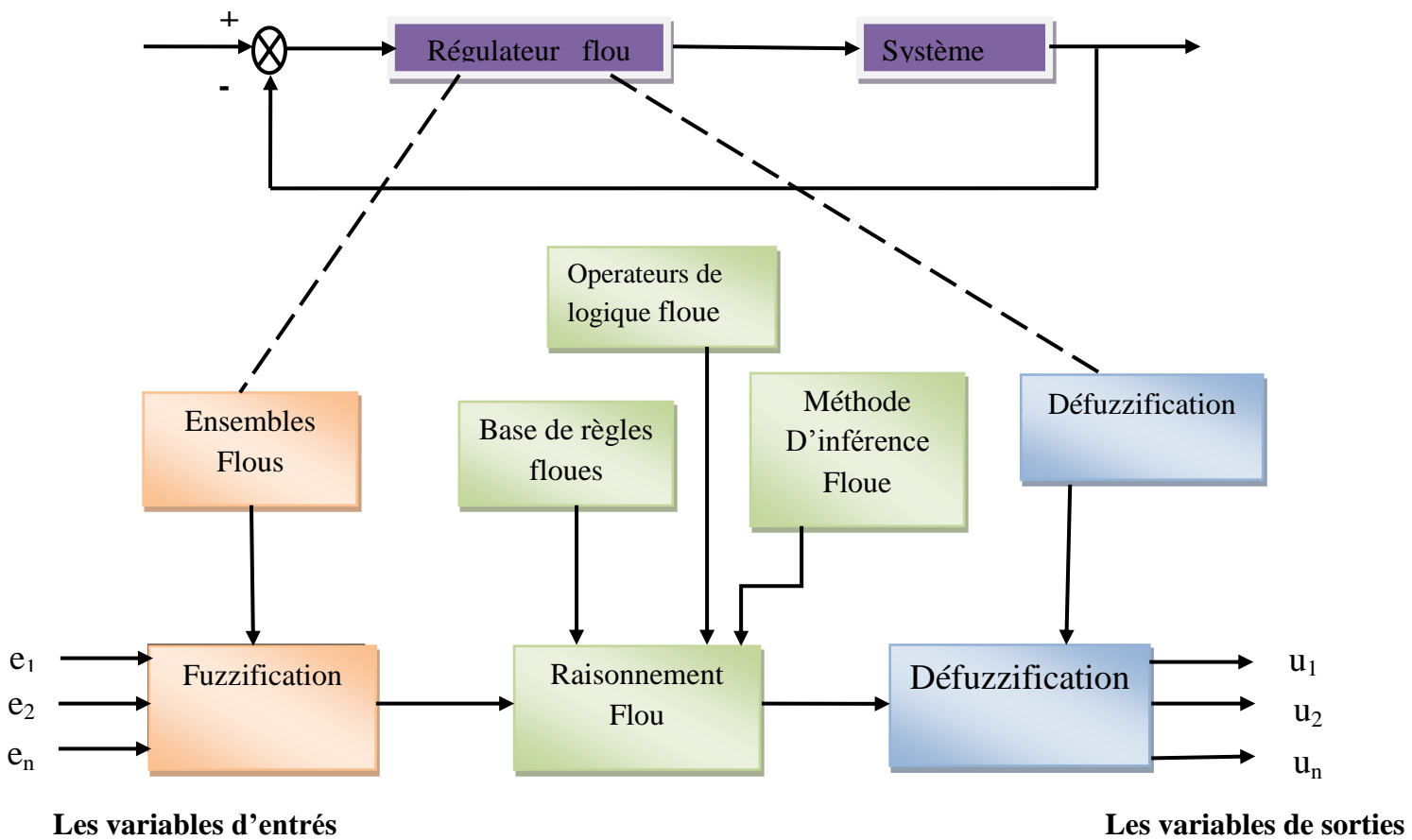


Figure (II.4) : Opérateur OU

### II.4.la structure générale d'un contrôleur flou [4]



Figure(II.5) : Structure d'une commande floue

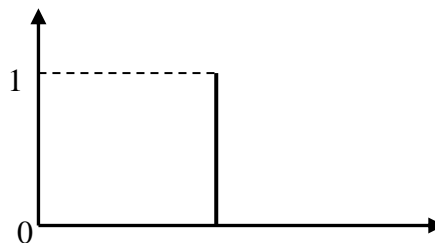
### II.4.1. Fuzzification [4]

C'est la transformation des grandeurs physiques (entrées) en valeurs linguistiques (sous ensemble flou) représentés par leurs fonctions d'appartenances qui peuvent être traitées ensuite par le mécanisme d'inférence.

- Si la mesure  $x_0$  est exacte la fonction d'appartenance utilisée singleton est alors définie par :

$$\mu_{x_0} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La Figure(II.6) : montre l'aspect de cette fonction d'appartenance



**Figure (II.6) :** Méthode de Fuzzification pour une mesure exacte

- Si la mesure est incertaine, le sous-ensemble flou  $X_0$  doit être représenté par un fait imprécis. dans ce cas on utilise une fonction d'appartenance sous forme triangulaire ou trapézoïdale, gaussienne.

**Triangulaire :**

$$\mu x = \text{Max} \min \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}, 0$$

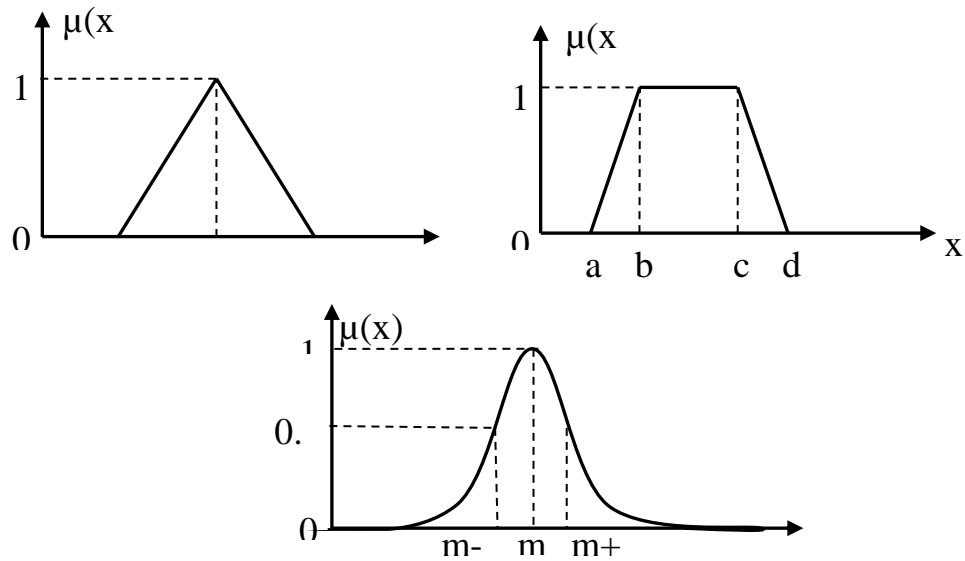
**Trapézoïdale :**

$$\mu x = \text{Max} \min \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-d}, 0$$

**Gaussienne :**

$$\mu x = \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

La représentation graphique des ces fonction sont représentée sur la figure(II.7)



Figure(II.7) : les fonctions d'appartenances

## II.4.2. Le raisonnement flou [4]

Cette partie concerne, en plus des opérateurs logiques flous déjà vus, les bases règles et les mécanismes d'inférences.

### II.4.2.1. Les règles flous

Elle rassemble l'ensemble des règles flous de type « *Si-Alors* » décrivant en termes linguistiques basés sur la connaissance d'un expert le comportement dynamique du système. L'ensemble des règles se présente sous la forme d'une énumération de type: «**si p alors q**».

Par exemple, si un expert exprime la règle :

«**Si la température de l'eau est chaude, il faut ajouter de l'eau froide**»

### II.4.2.2. Mécanisme d'inférence

Sont des méthodes d'inférence permettant la réalisation des différents opérateurs **ET**, **OU**, **ALORS**,..... intervenant dans les règles et s'appliquant aux fonctions d'appartenance.

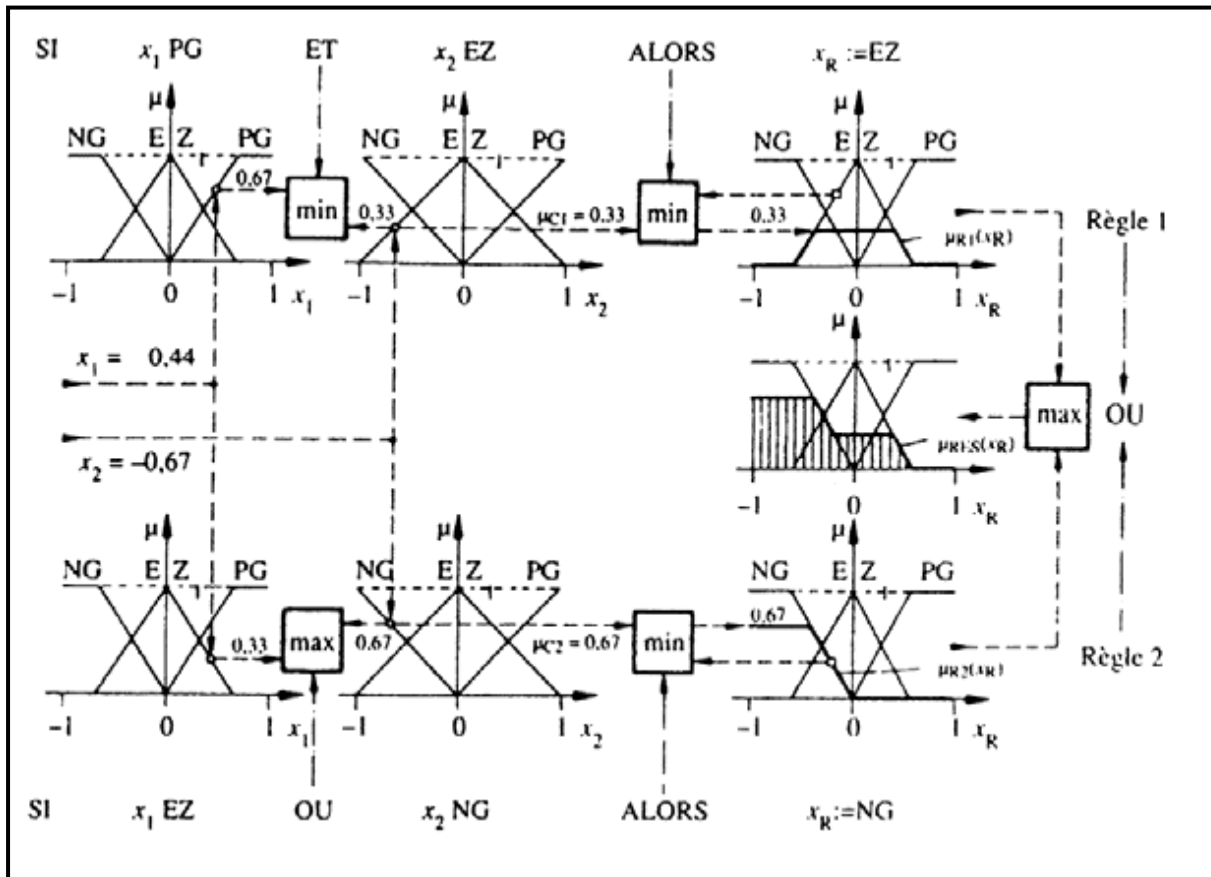
Trois méthodes sont généralement utilisées :

- Méthode de max-min (Mamdani)
- Méthode d'inférence max-prod (larsen)
- Méthode d'inférence somme -prod (Sugeno)

❖ Méthode de max-min

La méthode d'inférence max-min est réalisée au niveau de la condition, l'opérateur « ET » par la formation du minimum. La conclusion dans chaque règle, introduite par « ALORS » est réalisée par la formation du minimum. Enfin l'opérateur « OU » qui lie les différentes règles est réalisé par la formation du maximum.

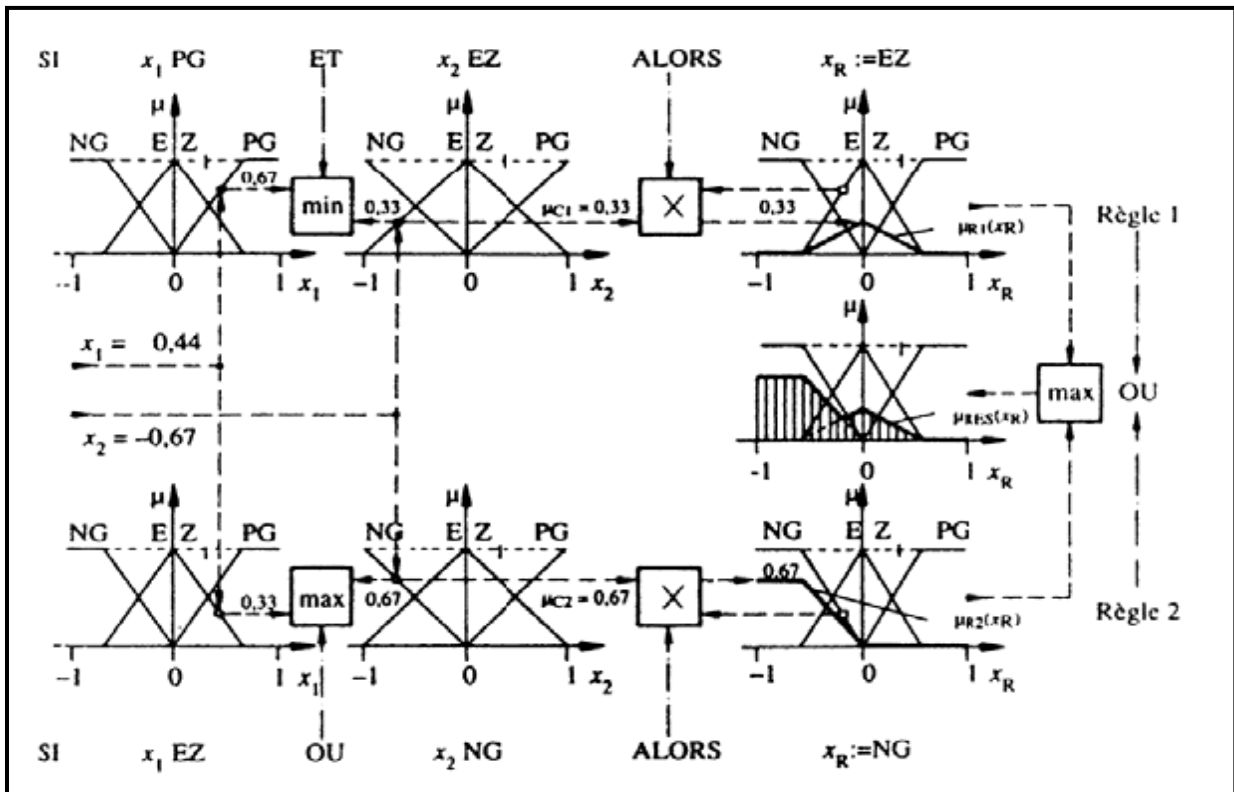
La Figure(II.8) : présentation graphiquement le principe de la méthode d'inférence max-



Figure(II.8) : la méthode d'inférence max-min pour deux variables d'entrée et deux règles

❖ **Méthode d'inférence MAX-PROD**

La méthode d'inférence max-produit est réalisée, au niveau de la condition, l'opérateur « ET » par la formation du produit. La conclusion dans chaque règle, introduite par « ALORS » est réalisée par la formation du produit. L'opérateur « OU », qui lie les différentes règles, est réalisé par la formation du maximum.

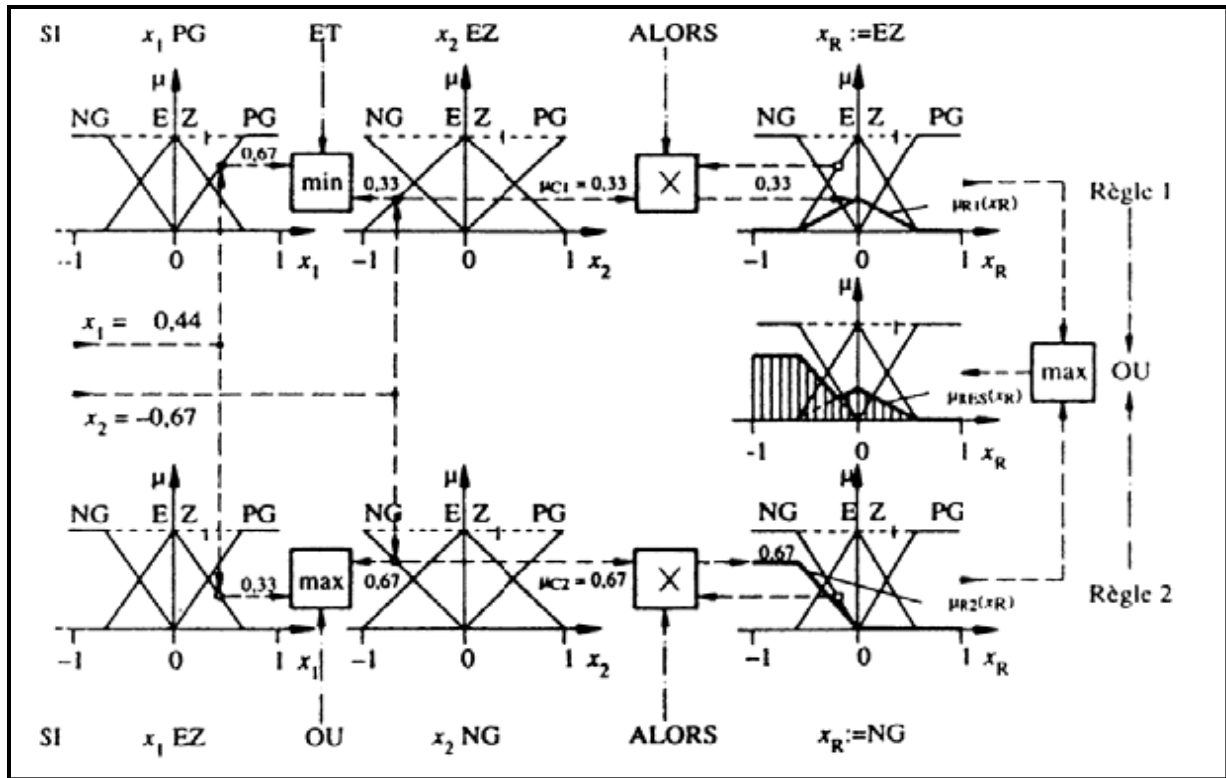


**Figure(II.9)** : la méthode d'inférence max-prod pour deux variables d'entrée et deux règles

❖ **Méthode d'inférence SOMME-PROD**

Dans cette méthode, l'opérateur "ET" est réalisé par le produit, de même que la conclusion "ALORS". Cependant, l'opérateur "OU" est réalisé par la valeur moyenne des degrés d'appartenance intervenant dans l'inférence.

La représentation graphique du principe de la méthode d'inférence somme-prod est représentée graphiquement à la figure(II.10)



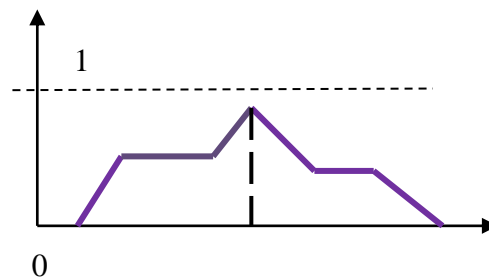
Figure(II.10) : la méthode d'inférence max-prod pour deux variables d'entrée et deux règles

## II.5. La défuzzification [10]

L'étape de défuzzification consiste à transformer l'ensemble flou résultant de l'inférence de différentes règles en une valeur numérique unique représentative de cet ensemble, cette valeur numérique est appliquée pour commander un processus réel. Plusieurs méthodes sont utilisées :

### II.5.1. Méthodes du maximum

Cette méthode consiste à choisir comme valeur de sortie celle correspondant à l'abscisse du maximum de la fonction d'appartenance



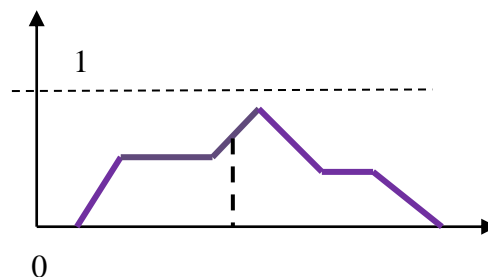
**Figure(II.11) :** défuzzification par la méthode du maximum

### II.5.2. Méthode par centre de gravité

La défuzzification par centre de gravité consiste à calculer l'abscisse du centre de gravité de la surface de la fonction d'appartenance résultante :

$$X_0 = \frac{\int_u X_r \mu(X_r) dX_r}{\int_u \mu(X_r) dX_r}$$

La figure (II.12) montre le principe de défuzzification



**Figure (II.12) :** Défuzzification par centre de gravité

### II.5.3. Méthode de la somme pondérée (moyenne des maximums)

C'est la moyenne des valeurs de sorties les plus vraisemblables

$$\frac{\int_s y dy}{\int_s dy}$$

## II.6. Différents types de régulateur flous

### II.6.1. Régulateur de type Mamdani

Dans le régulateur de ce type, on utilise des règles à prémises et conclusions symboliques (sous ensemble flou) sous la forme suivante :

$$\text{Si } x_1 = A_1 \quad \text{ET } x_2 = A_2 \quad \text{ALORS } y = B_1$$

### II.6.2. Régulateur de type Sugeno

Dans ce type, les conclusions des règles ne sont pas symboliques mais une fonction linéaire elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Si } x_1 = A_1 \quad \text{ET } x_2 = A_2 \quad \text{ALORS } y = z_1x_1 + z_2x_2 + z_0$$

## II.7. Avantages et inconvénients du régulateur flou

La commande par logique floue comporte évidemment un certain nombre d'avantages et d'inconvénients.

- La non-nécessité d'une modélisation du processus à commander, ainsi que d'une analyse mathématique profonde.
- La possibilité de bénéficier et d'implémenter des connaissances et des expertises humaines sur le système à commander.
- La maîtrise du système à régler avec un comportement complexe (fortement non linéaire et difficile à modéliser), aussi, cette approche offre la possibilité d'utiliser des processeurs spécialisés (dit processeurs flous), afin d'augmenter la précision ainsi la vitesse de calcul.

**Par contre, les inconvénients sont**

- Le manque de méthodes systématiques précises pour la conception et la synthèse d'une commande par logique floue
- L'impossibilité de la démonstration de la stabilité du circuit de commande en toute généralité, (en absence d'un modèle valable)
- La cohérence des inférences est non garantie a priori (apparition possible des règles d'inférence contradictoires).

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons vu les éléments de base relatifs à la théorie de la logique floue. Des définitions de base sur les variables flous, les sous ensembles flous, les différents opérateurs flous. L'utilisation de la logique floue dans la commande a été également présentée en décrivant les différents éléments constitutifs d'un régulateur flou. A travers cette étude, nous constatons que deux types de régulateur sont les plus utilisés celui de Mamdani et de Sugeno. On a vu aussi les avantages et les inconvénients de ce régulateur.



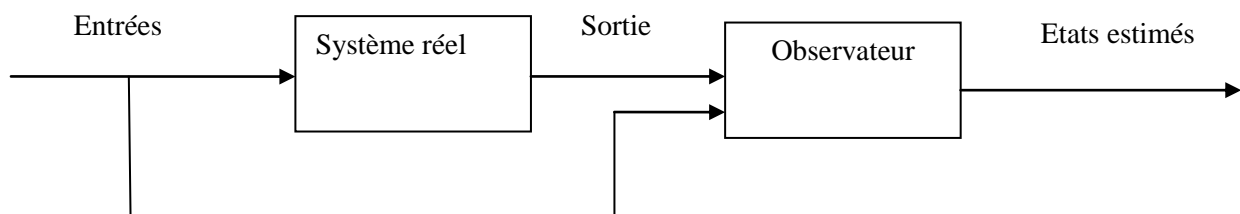
**Chapitre III : Observateur d'état**

### III.1.Introduction

Un observateur est un moyen de mesure 'informatique' qui permet de retrouver tous les états d'un système industriel en disposant du minimum d'information sur ces états .Ce minimum est obtenu à l'aide d'un capteur .Un observateur permet donc d'optimiser le nombre de capteur dans une application industrielle, d'où son intérêt économique dans l'industrie .durant ces dernières décennies beaucoup de travaux en automatique ont été menés sur la conception d'observateurs. Une manière brute d'observer les états d'un système consiste à dérivée numériquement l'information mesurée grâce aux capteurs .L'expérience à montrer que cette méthode à l'inconvénient de donner des résultats erronés à cause de l'amplificateur du bruit due aux imperfections de mesures.

### III.2. Principe d'un observateur [2]

Un observateur ou reconstituteur d'état est un capteur logiciel permettant la reconstruction des variables d'état internes d'un système à partir des entrées et des sorties du système réel. Alors, l'observateur ou l'estimateur d'état a pour entrées les entrées et les sorties du système réel et pour sorties le vecteur d'état estimé. Le schéma fonctionnel d'un observateur d'état est présenté par la figure (III.1).



**Figure (III.1):** Schéma fonctionnel d'un observateur d'état

La structure d'un observateur d'état est celle indiquée sur la figure (III.2) .elle fait intervenir tout d'abord un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui porte également le nom du prédicteur et qui est caractéristique par la même dynamique que celle du système.

La structure fonctionnant en boucle fermée obtenue par l'introduction d'une matrice de gains  $L$  permet d'imposer la dynamique propre à cet observateur.

Les différentes grandeurs mentionnées sur la figure représentent respectivement :

- un vecteur d'entrée  $U$  du système réel et de l'observateur
- un vecteur d'état  $X$  constitué des grandeurs à observer
- un vecteur de sortie  $Y$  dont les composants sont mesurable (courants, tensions).

Le dernier vecteur est comparé au vecteur équivalent  $Y$  donné par l'observateur pour assurer le fonctionnement en boucle fermée. Ainsi on définit une nouvelle variable l'erreur d'observation  $\varepsilon_y$ . celle-ci est multipliée par une matrice de gain  $L$  et envoyée à l'entrée de l'observateur pour influence les états estimés  $X$ . Ainsi, par un choix judicieux de la matrice de gain  $L$ , on peut modifier la dynamique de l'observateur et par conséquent faire évoluer la vitesse de convergence de l'erreur vers zéro.

Pour un système présenté par le système des équations suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, u, t) \\ y &= h x \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Où :

$x \in R^n$  représente le vecteur d'état

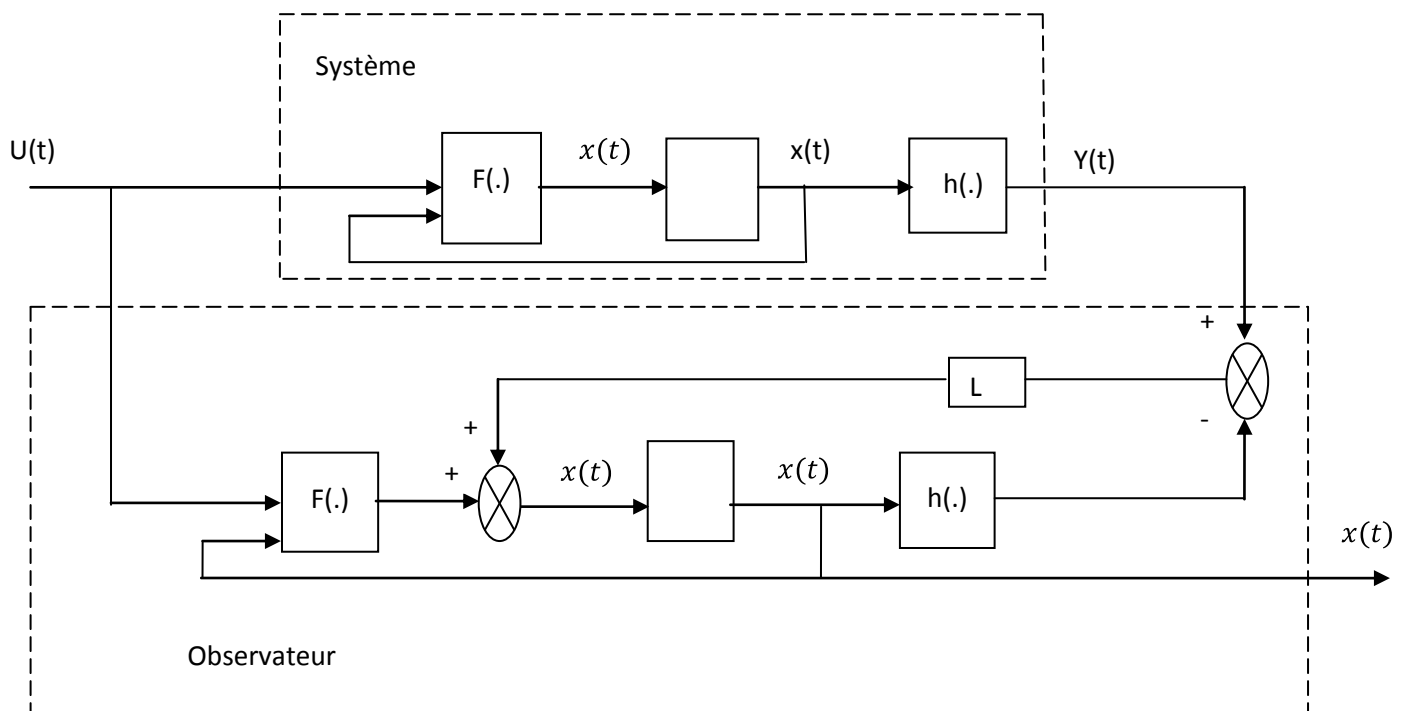
$u \in R^n$  Vecteur d'entrée ou de la commande

$y \in R^p$  Vecteur de sortie

Pour un système non linéaire défini par la relation (1), l'observateur d'état s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, t, u, t) + l(y(t) - y(t)) \\ y(t) &= h x(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Est présenté sur la figure



**Figure (III.2):** La structure d'un observateur d'état

Avant d'entamer la procédure de conception d'un observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. C'est en d'autres termes, s'assurer que le système est observable.

### III.3. Notion d'observabilité des systèmes non linéaires

L'observabilité d'un système assure la reconstruction de l'état initial à partir de la seule connaissance des entrées et des sorties disponibles sur un intervalle de temps.

Un système est dit observable si à partir des mesures des entrées et de sorties on peut reconstruire l'état initial du système.

#### III.3.1 Observabilité

Pour les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas des définitions universelles pour l'observabilité. Mais, on définit des types d'observabilité correspondant à des approches locales ou globales, dépendant des entrées ou non.

Dans ce qui suit, les différentes définitions d'observabilité seront données :

### ❖ Distinguable

deux états initiaux  $x_0^1, x_0^2 \in X$  tel que  $x_0^1 \neq x_0^2$  sont dits distinguables dans  $X$  si  $\exists t \geq 0$  et entrée admissible  $u : [0, t] \rightarrow U$  telle que les trajectoires des sorties  $y(t, x_0^1, u(t))$  et  $y(t, x_0^2, u(t))$  issues, respectivement des  $x_0^1$  et  $x_0^2$ , restent dans  $X$  pendant la durée  $[0, t]$  et vérifient  $y(t, x_0^1, u(t)) \neq y(t, x_0^2, u(t))$ . dans ce cas, on dira que  $u$  distingue  $x_0^1$  et  $x_0^2$  dans  $X$ .

### ❖ Observabilité et observabilité local faible

Un système est observable en  $x_0^1 \in X$  si tout autre état  $x_0^2 \neq x_0^1$  est distinguable en tout point de  $X$ . un système est localement faiblement observable en  $x_0^1 \in X$ , s'il existe un voisinage  $X' \subset X$  contenant  $x_0^1$ , tel que pour tout voisinage  $X'' \subset X'$  de  $x_0^1$ , pour tout point  $x_0^2 \in X''$ , les couples  $(x_0^1, x_0^2)$  sont distinguables et les trajectoires  $y(t, x_0^1, u)$  et  $y(t, x_0^2, u)$  évoluent à l'intérieur de  $X''$ .

Dans la pratique, ces notions sont relativement difficiles à vérifier et souvent on fait recours à la linéarisation du système au tour d'un point d'équilibre pour s'affranchir de l'observabilité ou pas du système au voisinage de ce point d'équilibre.

### ❖ Observabilité au sens du rang

On dit que la paire  $(f, h)$  est observable au sens du rang si

$$\text{Rang}\{dh, dl_f h, \dots, dl_f^{n-1} h\}^t = n$$

Où l'écriture de  $dl_f^k h$  est donnée par le vecteur :

$$dl_f^k h = \left( \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_1}, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial L_f^k h}{\partial x_n} \right) \quad (\text{III.3})$$

## III.4. Observateur des systèmes non linéaires

Dans la littérature on peut trouver plusieurs types d'observateurs pour les systèmes dynamiques non linéaires, dans le présent travail on s'intéressera à l'observateur à grand gain

### III.4.1. Observateur à grand gain

Les techniques dites à grand gain peuvent être appliquées sans transformation du système initial. Dans ce cas, la conception de l'observateur se fait directement à partir de la structure du système. Cette technique utilise la théorie de stabilité de Lyapunov pour adapter les techniques développées dans le cas linéaire. La méthode présentée dans [5] donne des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système, pour la classe des systèmes non linéaire décrits par le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, u) \\ y &= h x \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

La dynamique de l'état comporte une partie linéaire non commandée et une partie commandée, vérifiant en général la condition de Lipchitz par rapport à  $x$  suivant :

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \quad (\text{III.5})$$

L'observateur à grand gain possède la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(\hat{x}, u) + k(y - C\hat{x}) \quad (\text{III.6})$$

L'appellation grand gain provient de la structure de l'observateur : lorsque la fonction non linéaire a une grande constante de Lipchitz, la moindre erreur entre l'état réel et l'état estimé va se répercuter et croître. Par conséquent, le gain  $K$  de l'observateur (III.5) doit être important pour compenser cette amplification de l'erreur.

La dynamique de l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  se déduit de (III.4) et (III.6) :

$$\dot{e} = (A - LC)e + f(\hat{x}, u) - f(x, u) \quad (\text{III.7})$$

Il a été démontré dans [2] que si le gain  $k$  est choisi telle que :

$$k < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (\text{III.8})$$

Où  $k$  est la constante de Lipchitz de  $(f(x(t), u(t)))$ ,  $\lambda_{\min}(Q)$  et  $\lambda_{\max}(P)$  sont les valeurs propres maximales et minimales.  $Q$  est une matrice symétrique définie positive et  $P$  est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov

$$(A - kc)^T P + P A - kc = -Q \quad (\text{III.9})$$

Alors (III.6) est un observateur asymptotique du système non linéaire(III.4)

La synthèse de l'observateur consiste à ajuster les matrices  $P$ ,  $Q$  et  $k$  de façon à garantir l'égalité (III.9). Ensuite, on vérifie si la condition (III.8) est satisfaite. Ainsi, et malgré l'intérêt du résultat, cette méthode n'est pas constructive, elle ne donne aucune indication sur le choix d'un gain satisfaisant la condition (III.8). Cette approche a été étendue par plusieurs auteurs.

Pour simplifier le problème on peut remplacer la matrice  $Q$  par matrice identité, et cela revient à choisir un gain  $k$  qui satisfait :

$$k < \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \quad (\text{III.10})$$

Ces techniques dites à grand gain sont très répandues dans la littérature. Il s'agit principalement de techniques de vérification, qui permettent d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel

### **Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons rappelé quelques définitions relative à l'observabilité des systèmes dynamique, puis nous avons présenté l'observateur a grand gain, le principal avantage de cet observateur est la simplicité de son implémentation, cependant, ce type d'observateurs souffre d'un inconvénient réside dans le bon choix de son unique paramètre de synthèse. Ce dernier choix s'effectue généralement suite à plusieurs essais afin de satisfaire le compromis entre la rapidité ou la précision de l'observateur et son sensibilité vis-à-vis des bruits de mesure.



## **Chapitre IV : Résultats de simulation**

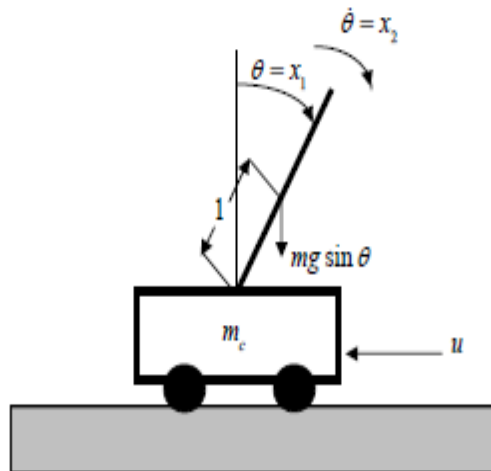
## IV.1. Introduction

Dans le domaine de l'Automatique réputé être celui de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques, l'étude des systèmes non linéaires constitue toujours un champ de recherche et investigations très riche. Ceci peut se comprendre par le fait que le monde réel n'est peuplé que d'objets non linéaires dont la maîtrise ne se satisfait pas toujours des simplifications ou des approximations qui souvent consistent à imposer l'hypothèse de linéarité.

## IV.2. Présentation du pendule inversé [3]

Le pendule inversé est un système non linéaire, utilisé pour tester de nouvelles techniques de contrôle.

Une représentation du pendule inversé est donnée par la figure (IV.1) ; un chariot surmonté d'une tige se déplaçant horizontalement.



**Figure (IV.1)** : description schématique du pendule inversé

Les variables principales sont :

- la position angulaire de la tige  $\theta$
- la vitesse angulaire de la tige  $\dot{\theta}$

Pour le pendule inversé, les variables d'état sont choisies comme suit :

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\x_2 &= \dot{\theta}\end{aligned}\quad (\text{IV.1})$$

Et après dérivations, nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} + \frac{\frac{\cos x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} u \\ y &= x_1\end{aligned}\quad (\text{IV.3})$$

Avec,  $g = 9.8\text{m/s}^2$  est l'accélération due à la gravité,  $m_c$  est la masse du chariot,  $m$  est la masse de la tige,  $l$  la demi longueur de la tige, et  $u$  est la force de commande appliquée.

Nous choisissons  $m_c = 1\text{kg}$ ,  $m = 0.1\text{kg}$ , et  $l = 0.5\text{m}$ .

La forme compagne de ce modèle est alors [3]:

$$\theta = \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} + \frac{\frac{\cos x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} u = f x + g x u \quad (\text{IV.4})$$

Avec :

$$f x = \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} \quad \text{Et} \quad g x = \frac{\frac{\cos x_1}{m_c+m}}{l \frac{4}{3} \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}} \quad (\text{IV.5})$$

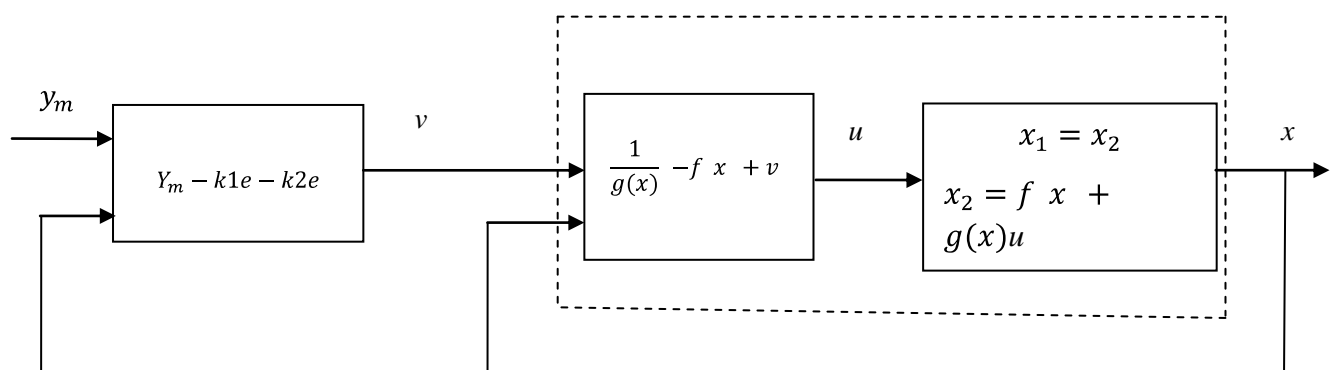
### IV.3. La commande par retour d'état du pendule inversé

Par application de la technique de commande linéarisante, la loi de commande  $u$  donnée par la relation suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)} (-f x + v) \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$v = y - k_1 e - k_2 \dot{e} \quad (\text{IV.7})$$

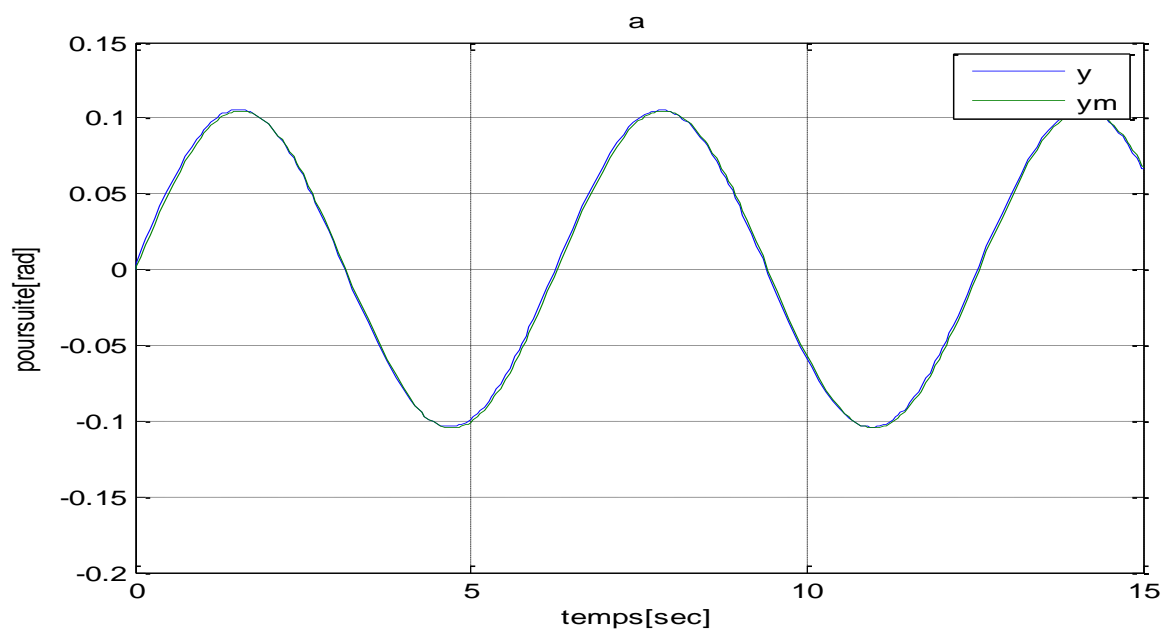


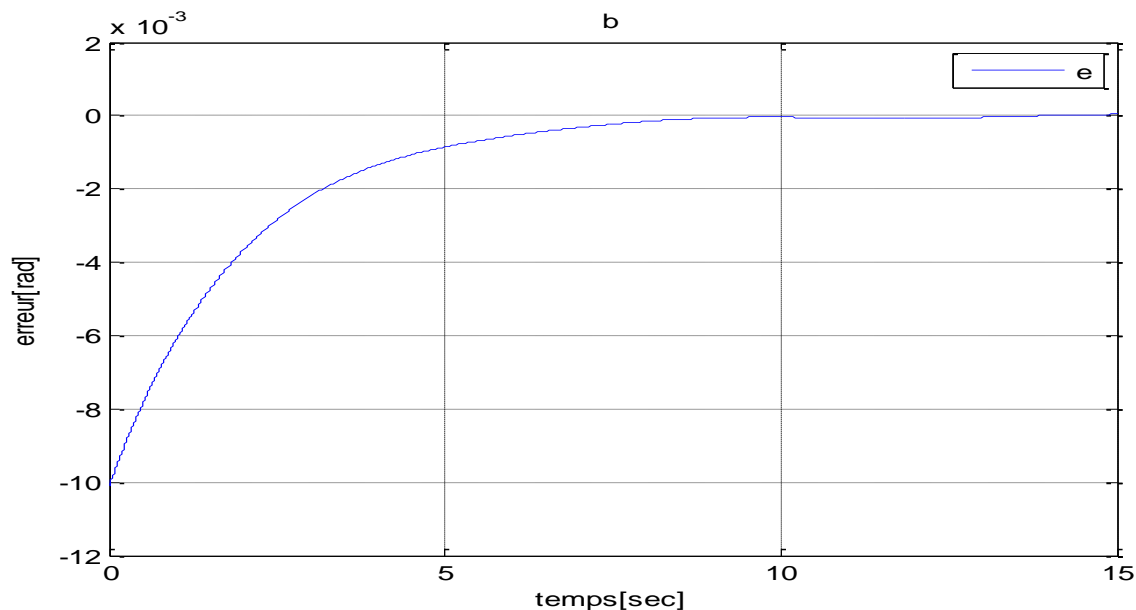
**Figure (IV. 2):** structure de la commande linéarisante.

Après simulation nous avons obtenu les résultats suivants :

Pour:  $k_1=500$  et  $k_2= 1000$

$x_{10} = 0.1$        $x_{20} = 0$





**Figure(VI.3)** : réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de la commande linéarisation

Les réponses du système pendule inversé à une entrée sinusoïdale  $y_m = \left(\frac{\pi}{30}\right) \sin t$  avec la commande linéarisante sont données dans la figure (VI.3).

D'après la réponse en position figure(IV.3.a), on remarque qu'on a une bonne poursuite, la sortie du système converge très bien vers  $y_m$ , l'erreur converge vers zéro figure (IV.3.b).

Pour utiliser la commande linéarisante par retour d'état nous avons supposé que la dynamique du système à commander est connue, dans le cas contraire cette commande est insuffisante. Pour remédier à ce problème, nous avons proposé d'utiliser la commande adaptative floue.

#### IV.4. La commande adaptative floue du pendule inversé

Dans la réalité,  $f$  et  $g$  ne sont pas connues, donc nous devons les remplacer par leurs estimations  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  qui vont être des systèmes flous. La nouvelle loi de commande va prendre la forme suivante :

$$u = \frac{1}{\hat{g} \times \theta_g} \hat{f} \times \theta_f + y_m^n + k_c^T e - u_a \quad (\text{IV.8})$$

Avec :

$$f(x) - \theta_f^T \Psi(x) \text{ et } g(x) - \theta_g^T \Psi(x) \quad (\text{IV.9})$$

Où  $u_a$  est un terme robuste utilisé pour compenser les erreurs d'approximation floue.

$$u_a = -1/rB^T p e \quad (\text{IV.10})$$

On calcule l'équation de l'erreur :

$$e = y_m - y \quad (\text{IV.11})$$

$$e^n = y_m - x^n \quad (\text{IV.12})$$

Et après quelques manipulations, on obtient l'équation d'erreur suivante :

$$e^n = -k_c^T e + f - f(x) + g - g(x) u \quad (\text{IV.13})$$

Ce qui est équivalent dans l'espace d'état à :

$$e = Ae - B f - f(x) + g - g(x) u \quad (\text{IV.14})$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k_{c2} & -k_{c1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les paramètres d'adaptation :

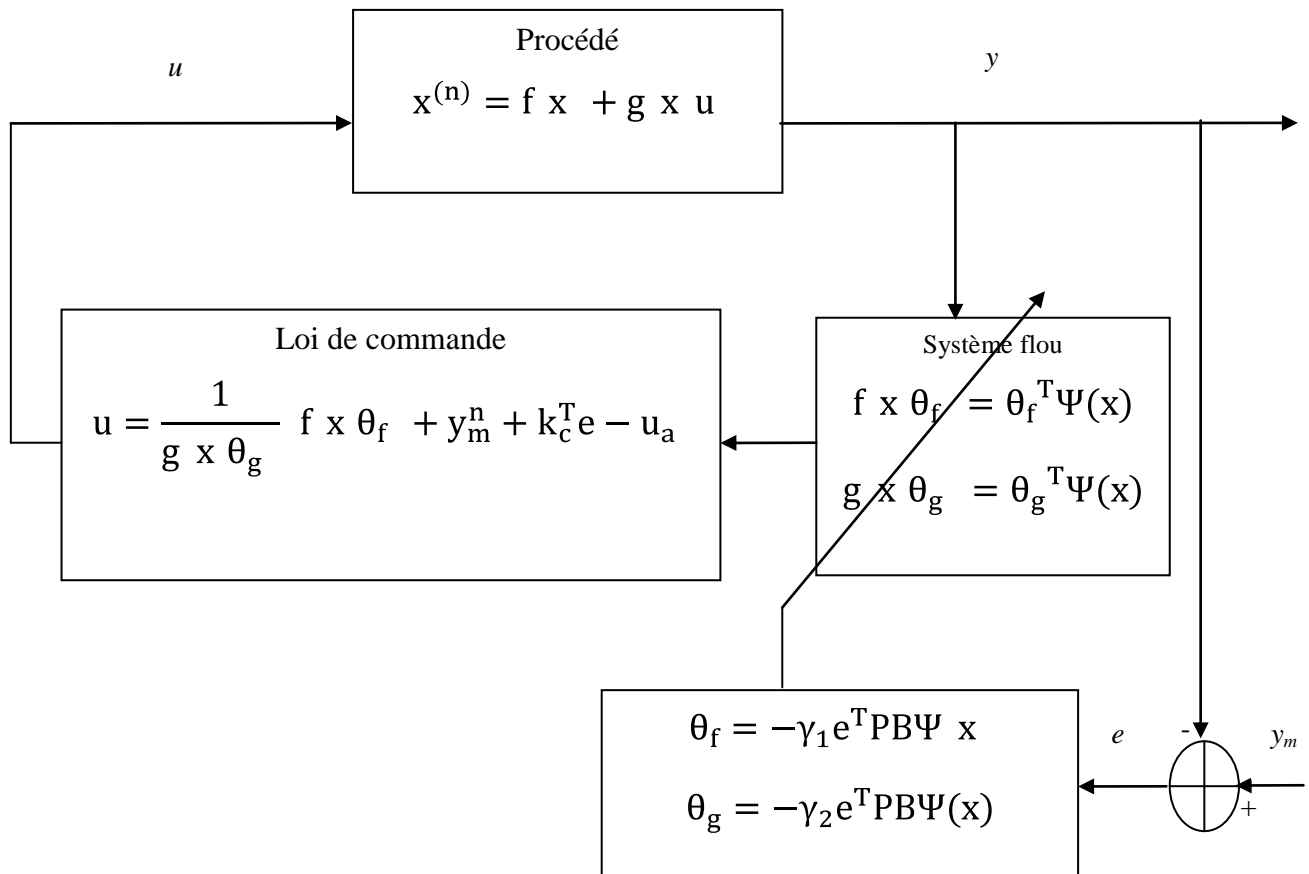
$$\theta_f = -\gamma_1 e^T P B \Psi_1 x \quad (\text{IV.15})$$

$$\theta_g = -\gamma_2 e^T P B \Psi x$$

P : matrice définie positive solution de l'équation matricielle suivante :

$$(\text{IV.16})$$

$$(A - BK_C^T)^T P + P A - BK_C^T = Q$$



**Figure (IV.4)** :structure de la commande adaptative floue

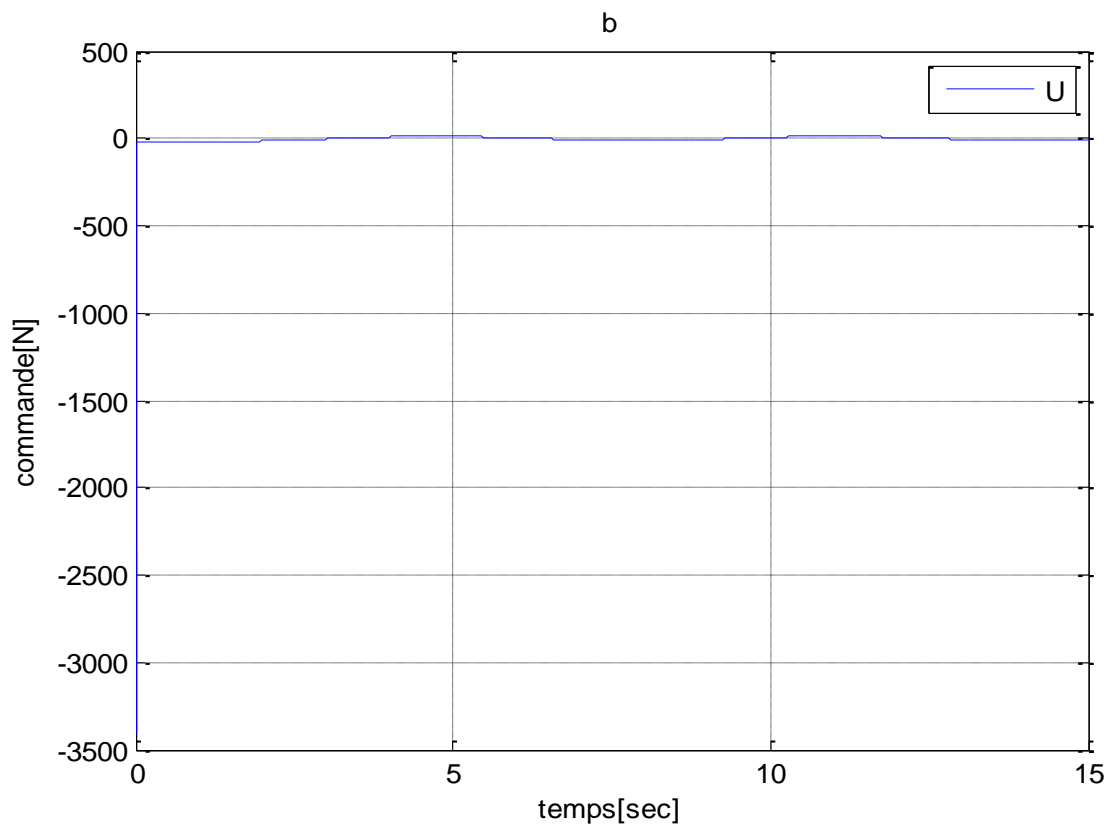
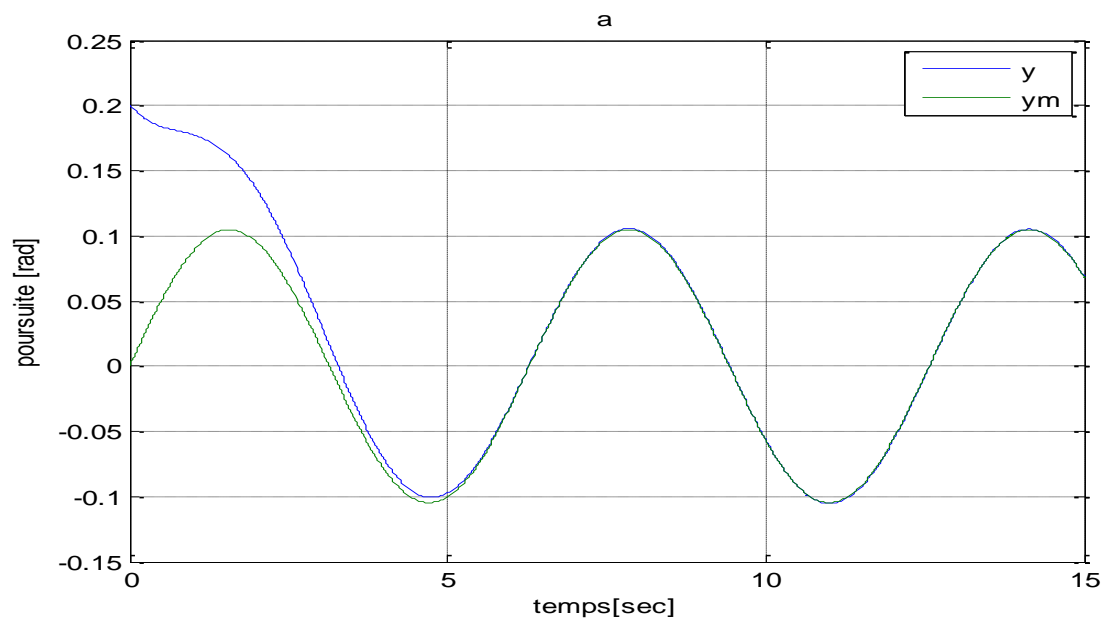
Nous avons appliqué cette approche à notre système, après simulation nous avons obtenu ces résultats avec est sans perturbation :

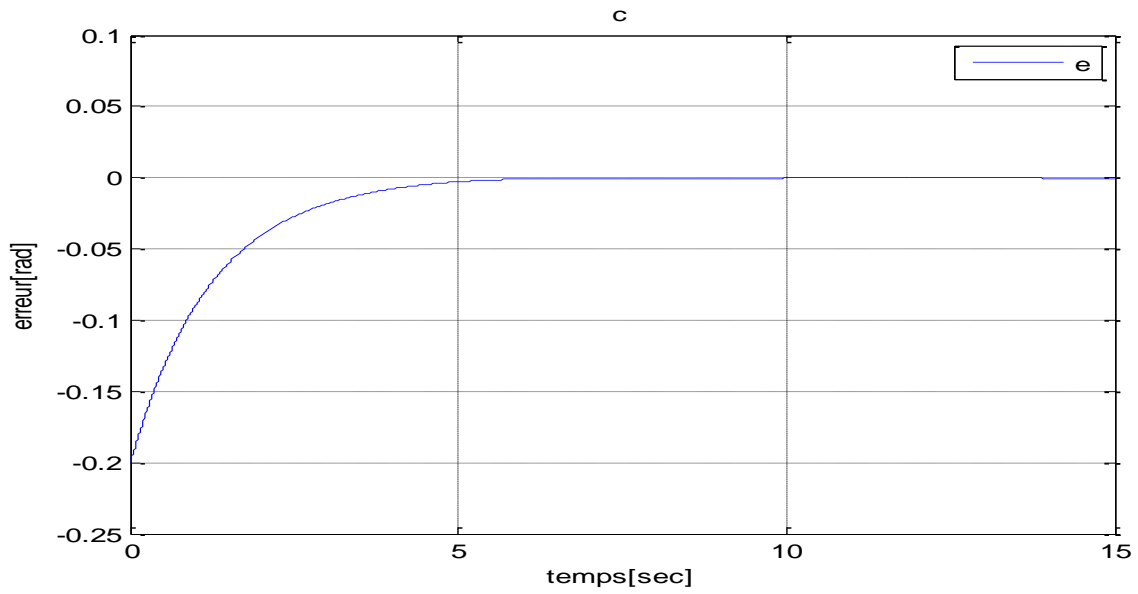
$$\gamma_1 = 0.1$$

$$\gamma_2 = 0.01$$

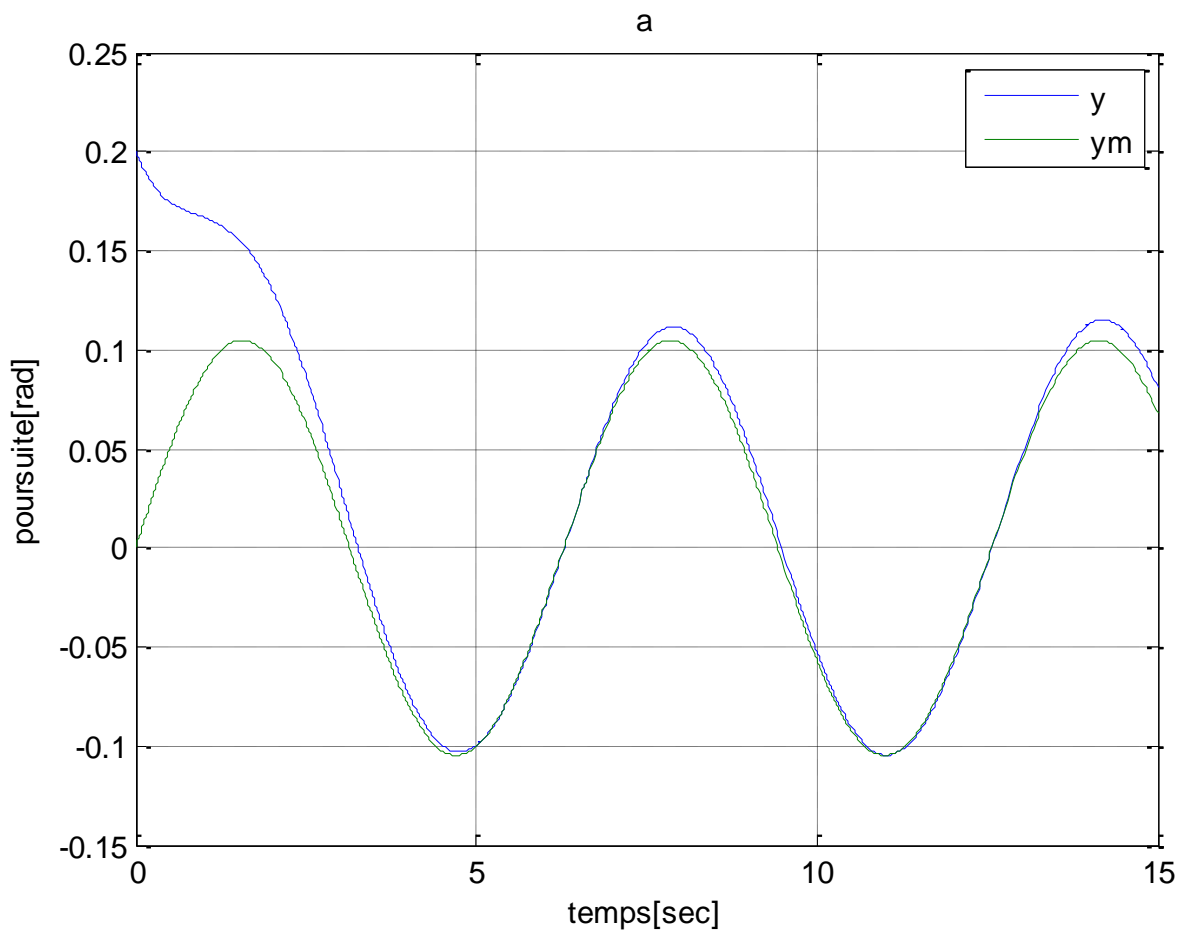
$$p = \begin{matrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{matrix}$$

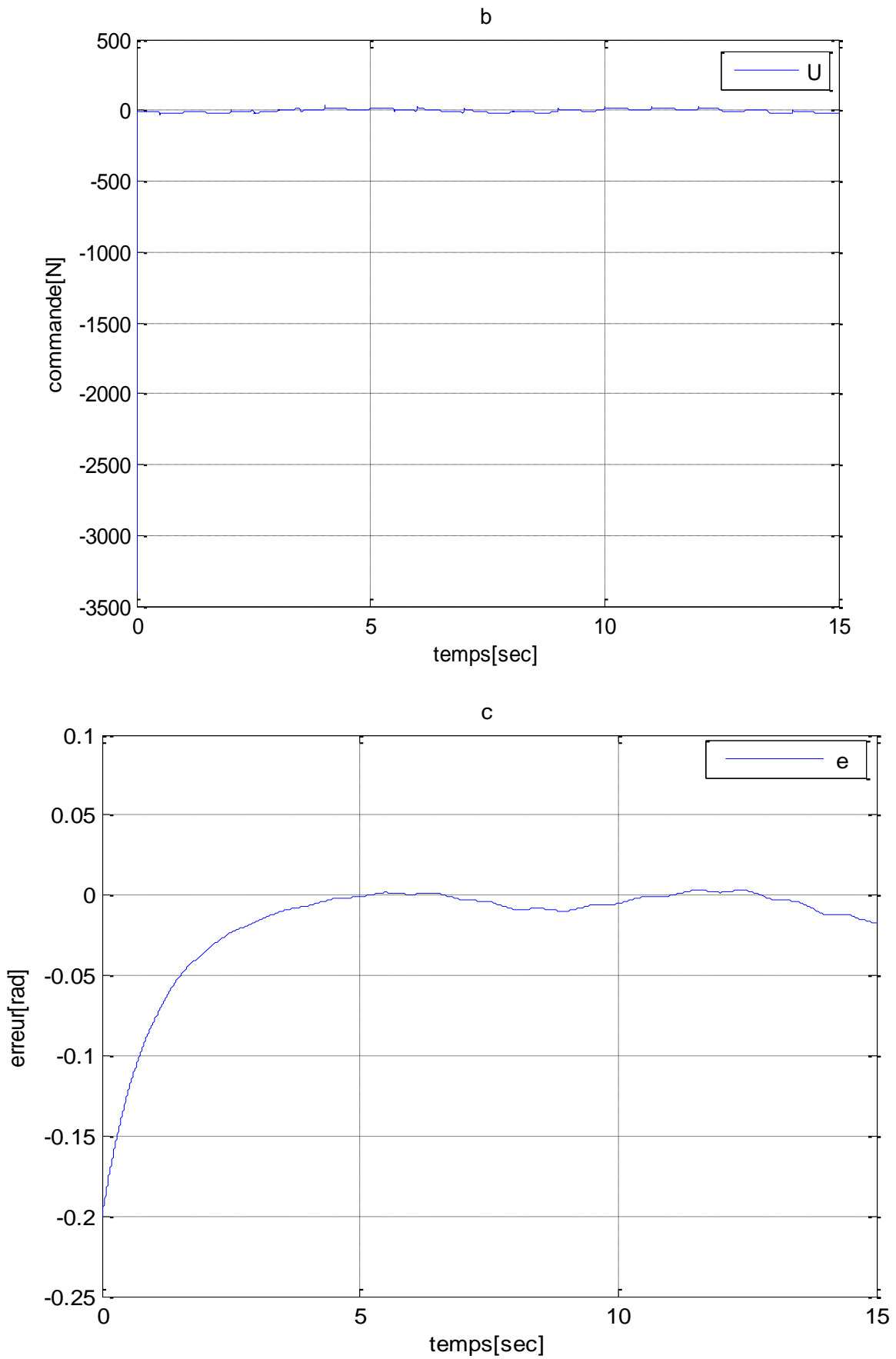
◆ La commande adaptative floue sans perturbation





Avec perturbation :





**Figure(IV.5):** réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de la commande adaptative floue

D'après la figure (IV.5) nous avons remarqué qu' même si on a des différentes conditions initiales, « y » va rejoindre sa référence durant un temps minimal et l'erreur oscille autour de zéro. On constate qu'on a un bon estimateur.

Lorsque les variables d'états sont inaccessibles, on ne peut pas utiliser la commande adaptative floue.

Dans ce cas, Nous allons implémenter un observateur qui permet de trouver tout les états du système à partir d'entrée et de sortie de ce dernier.

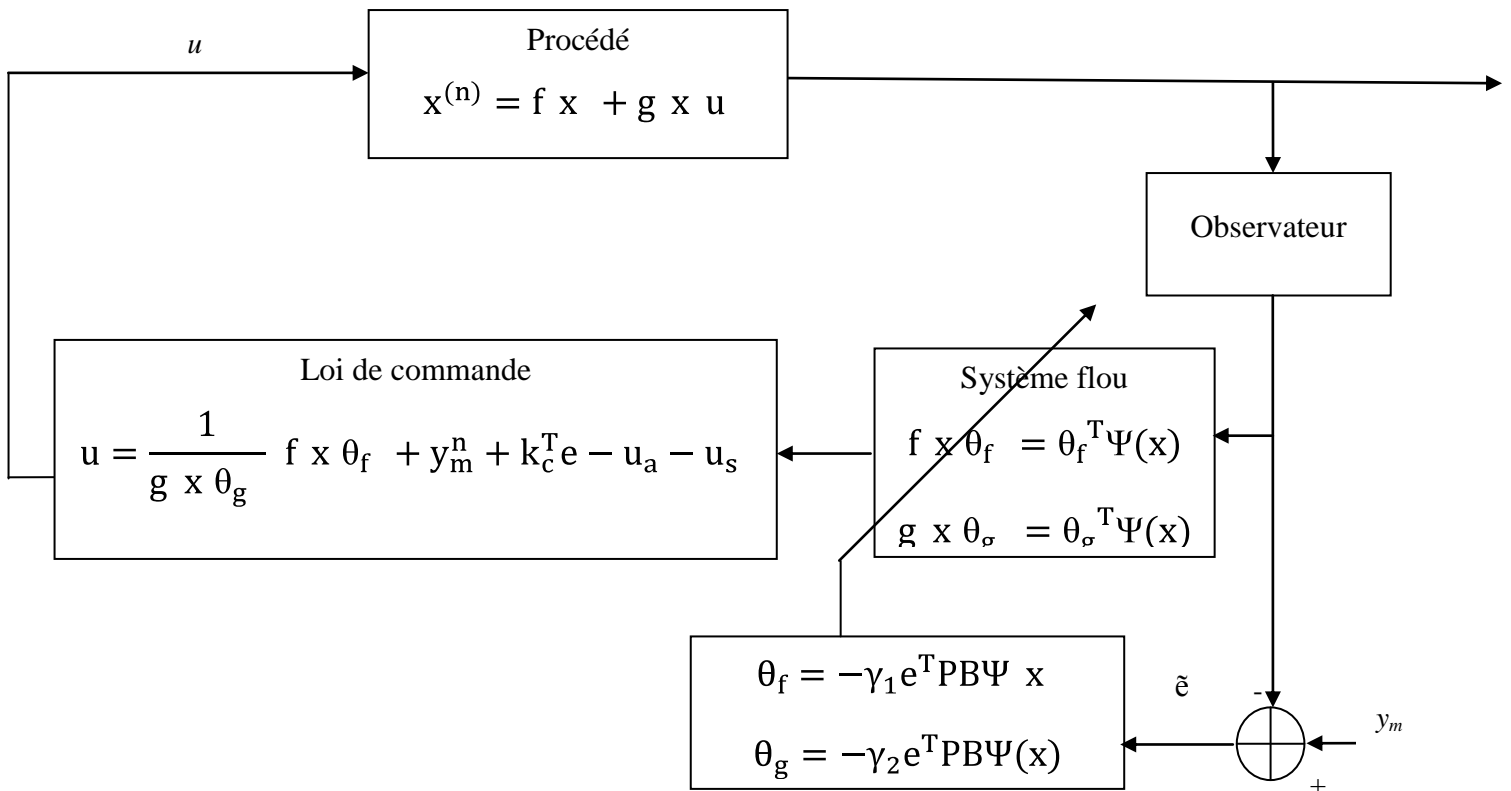
### IV.5. la commande adaptative floue avec un observateur du pendule inversé

Si les états du système sont inaccessibles, nous devons placer un observateur qui nous permet de trouver les états estimés du système. La nouvelle loi de commande va prendre la forme suivante :

$$u = \frac{1}{g(x)\theta_g} f(x)\theta_f + y_m^n + k_c^T e - u_a - u_s \tag{IV.17}$$

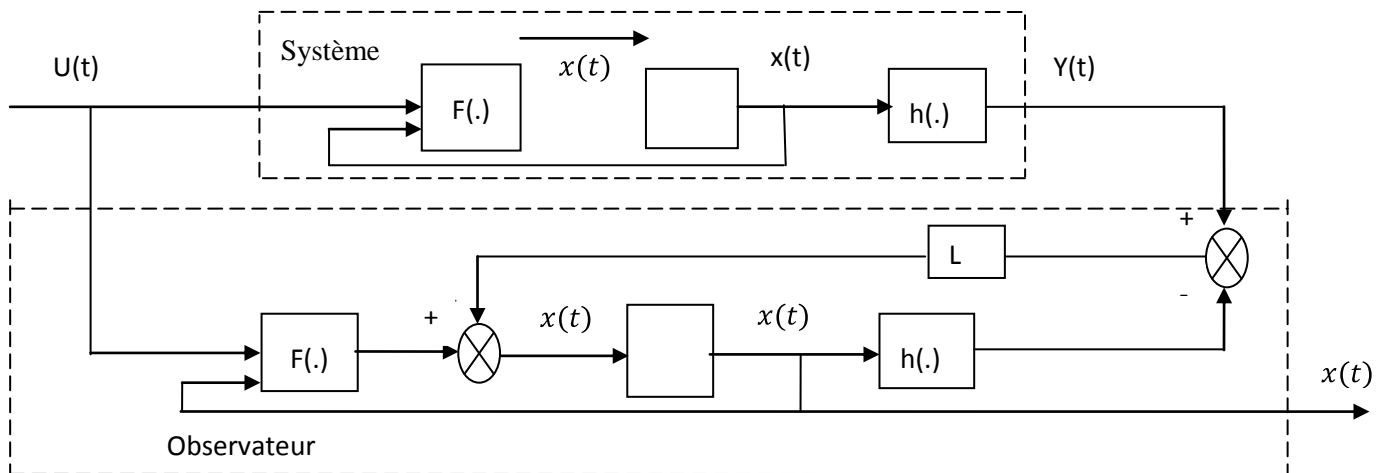
$$u_s = -k_0^T p_1 e \tag{IV.18}$$

Avec :  $p_1 = \begin{bmatrix} 51 & 0.05 \\ 0.05 & 0.504 \end{bmatrix}$



Figure(IV.6): structure de la commande adaptative floue avec un observateur

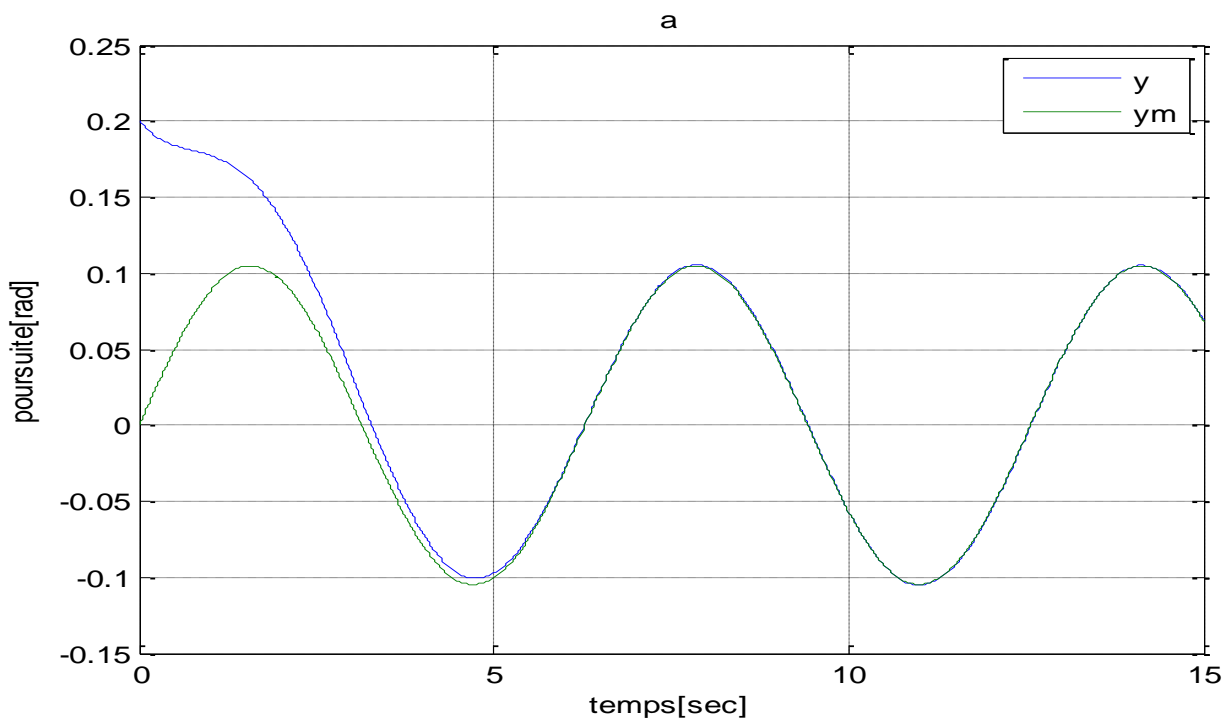
**IV.5.1. Observateur à grand gain :**

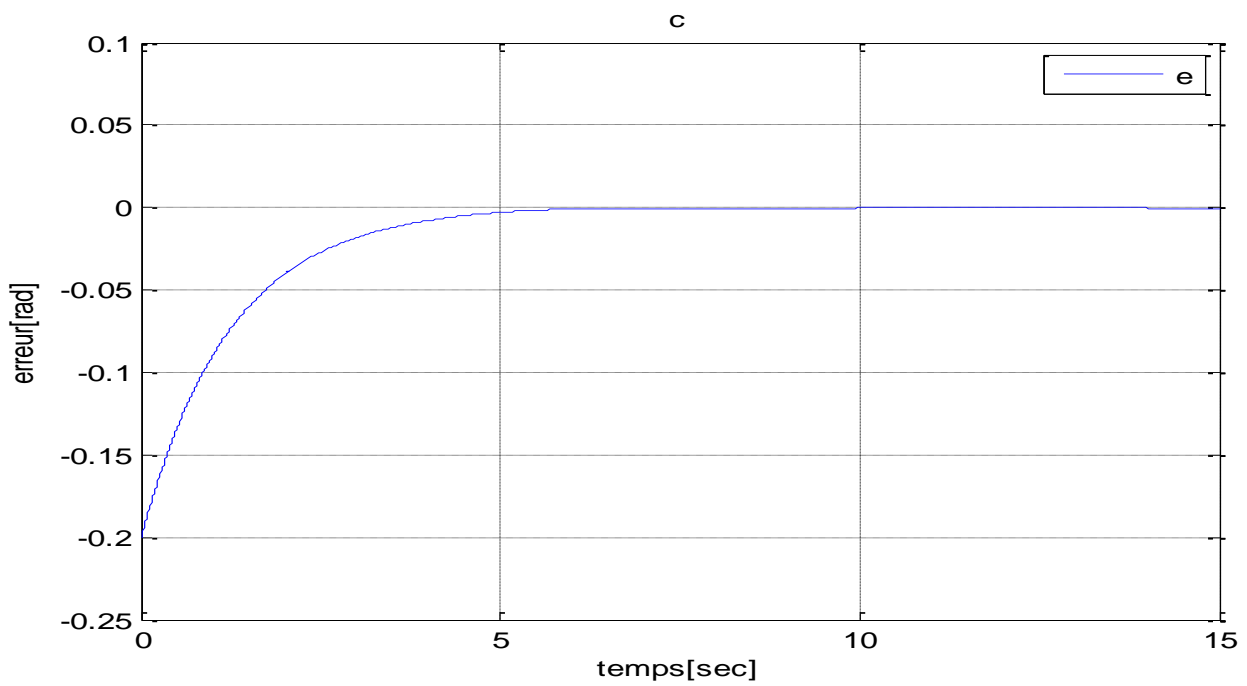
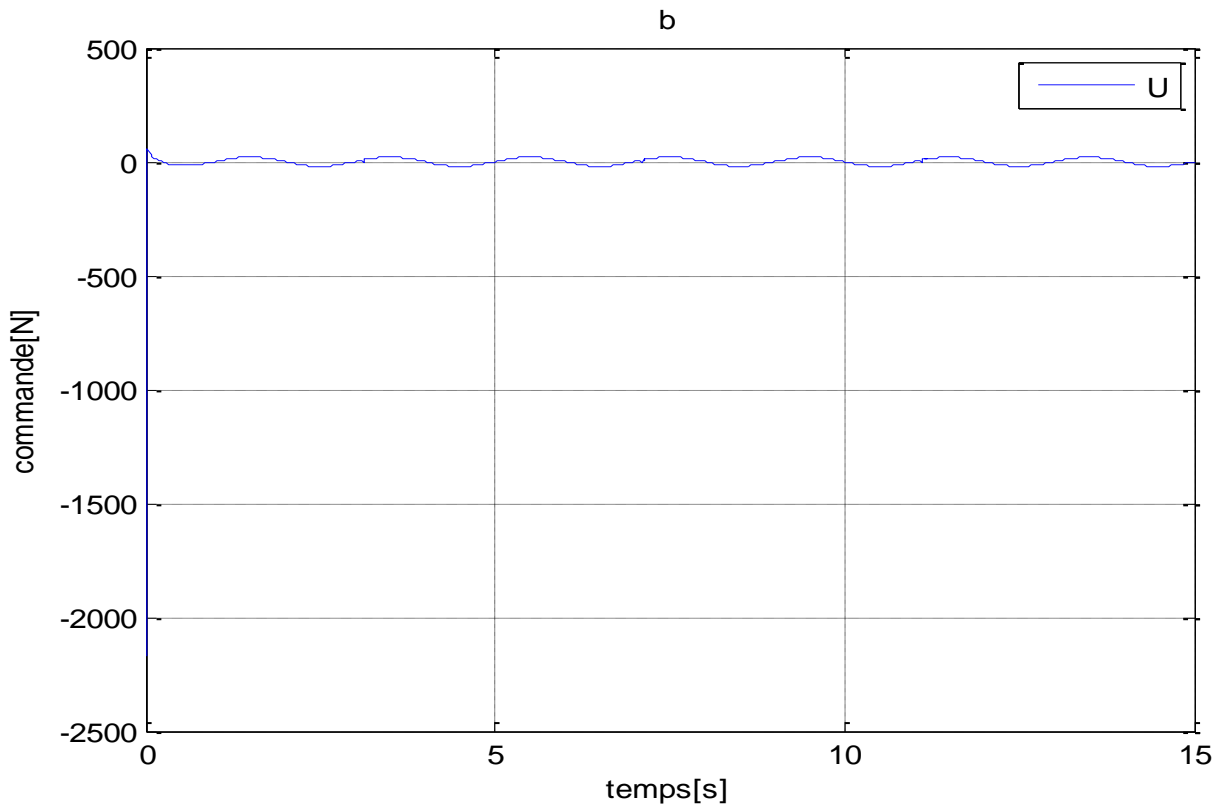


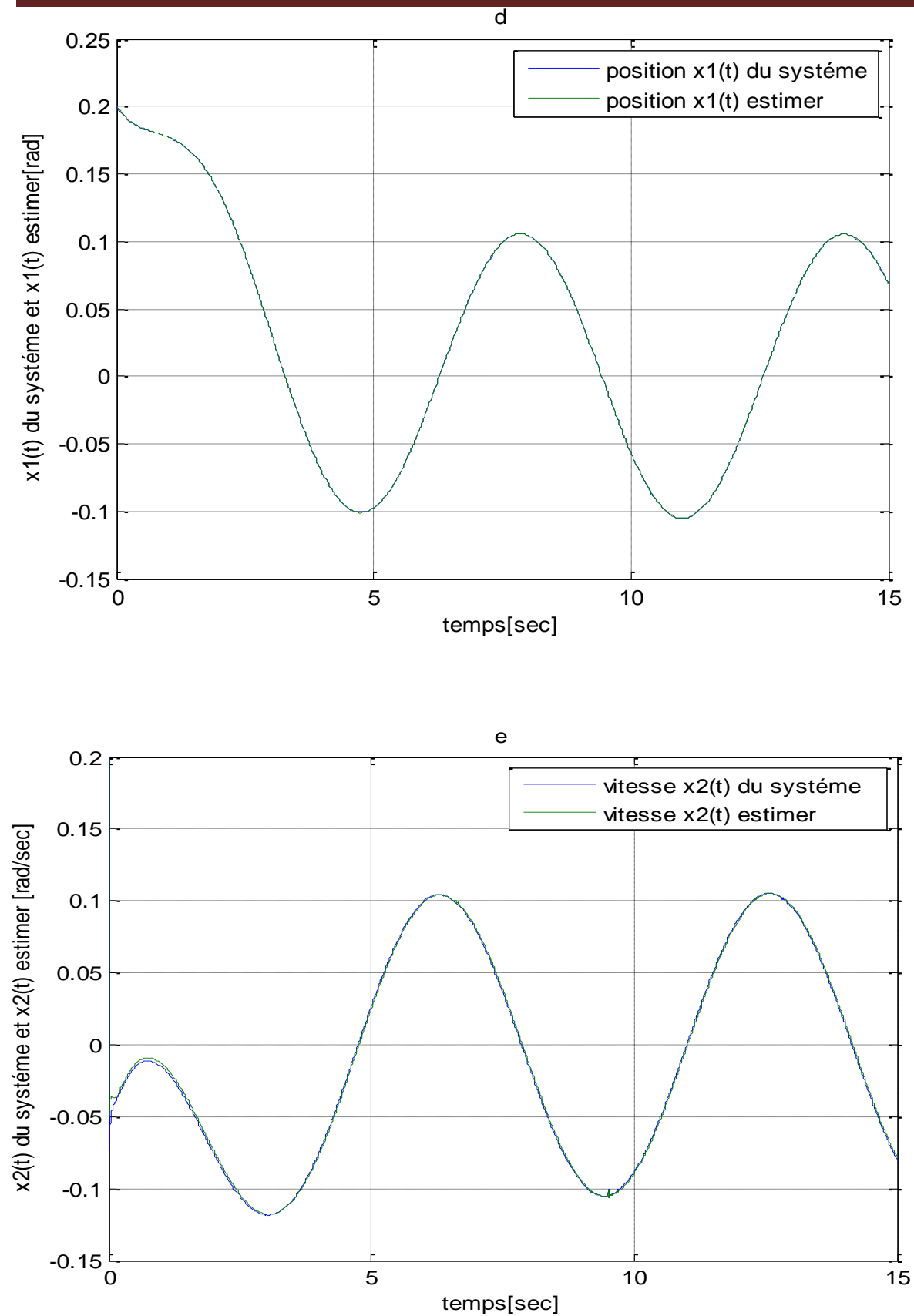
**Figure(IV.7):** Structure de l'observateur à grand gain

Après simulation on a obtenue ces résultats avec et sans perturbation :

L'observateur à grand gain sans perturbation :

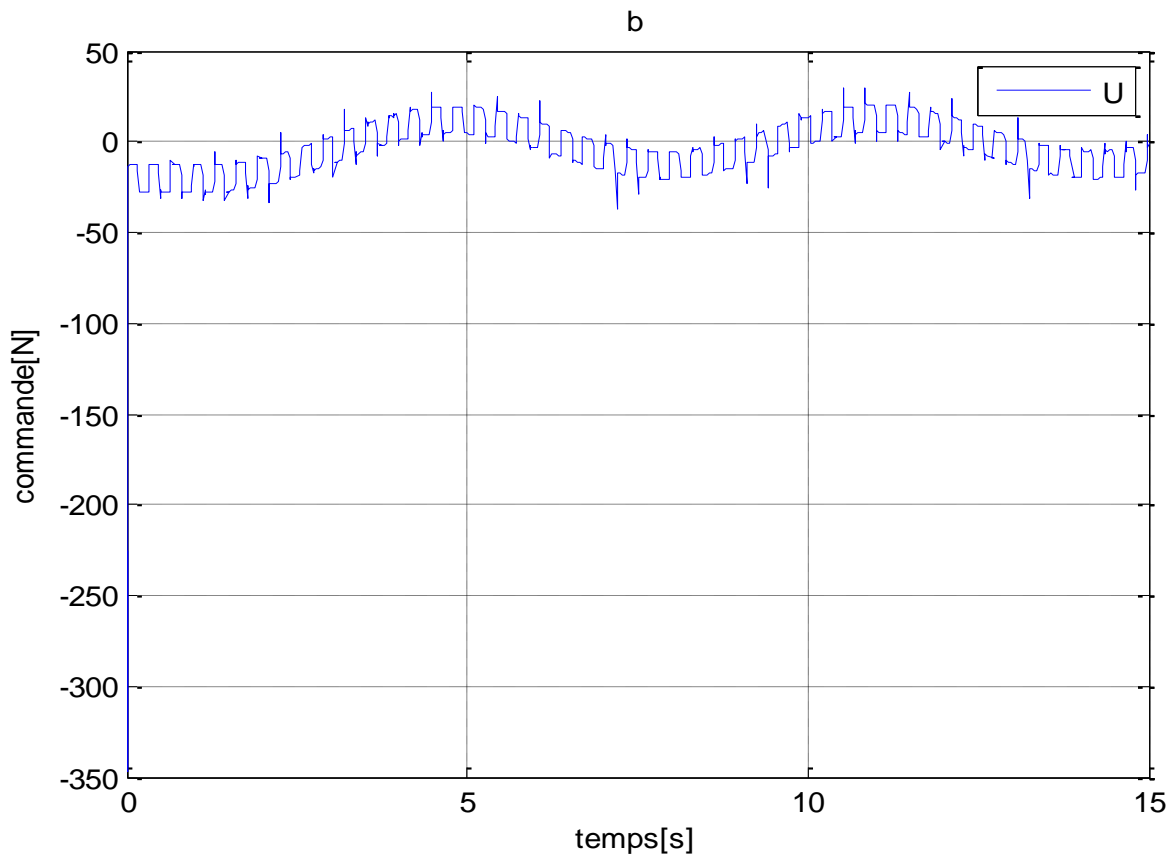
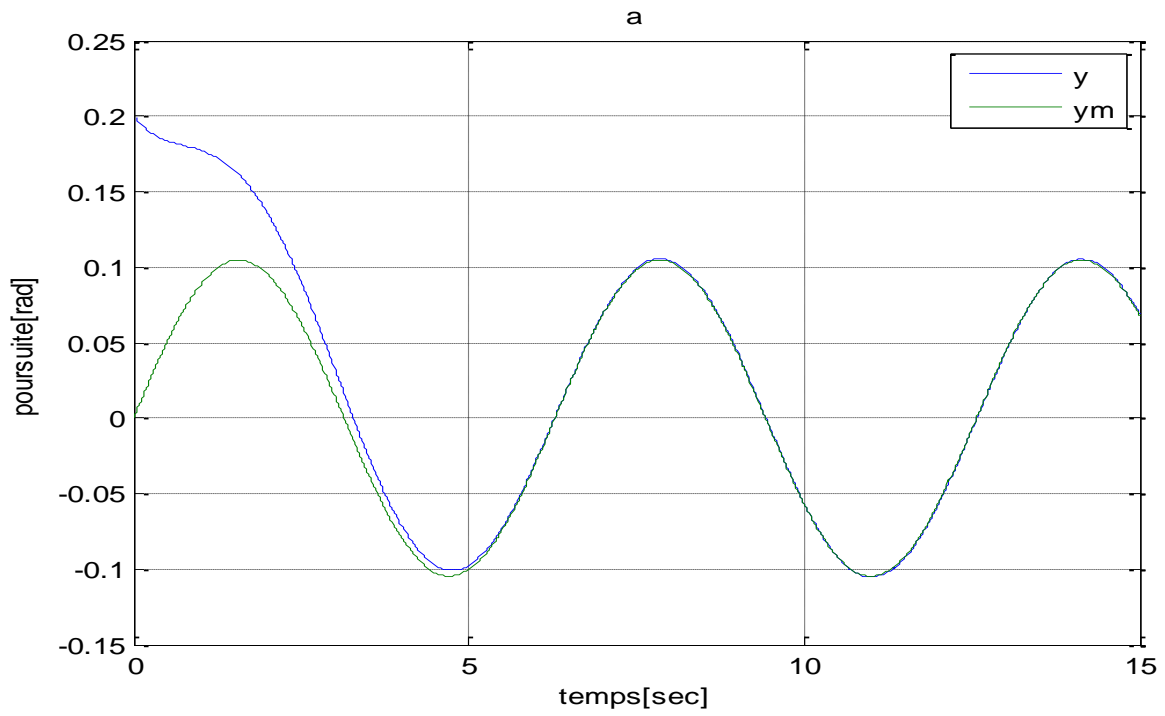


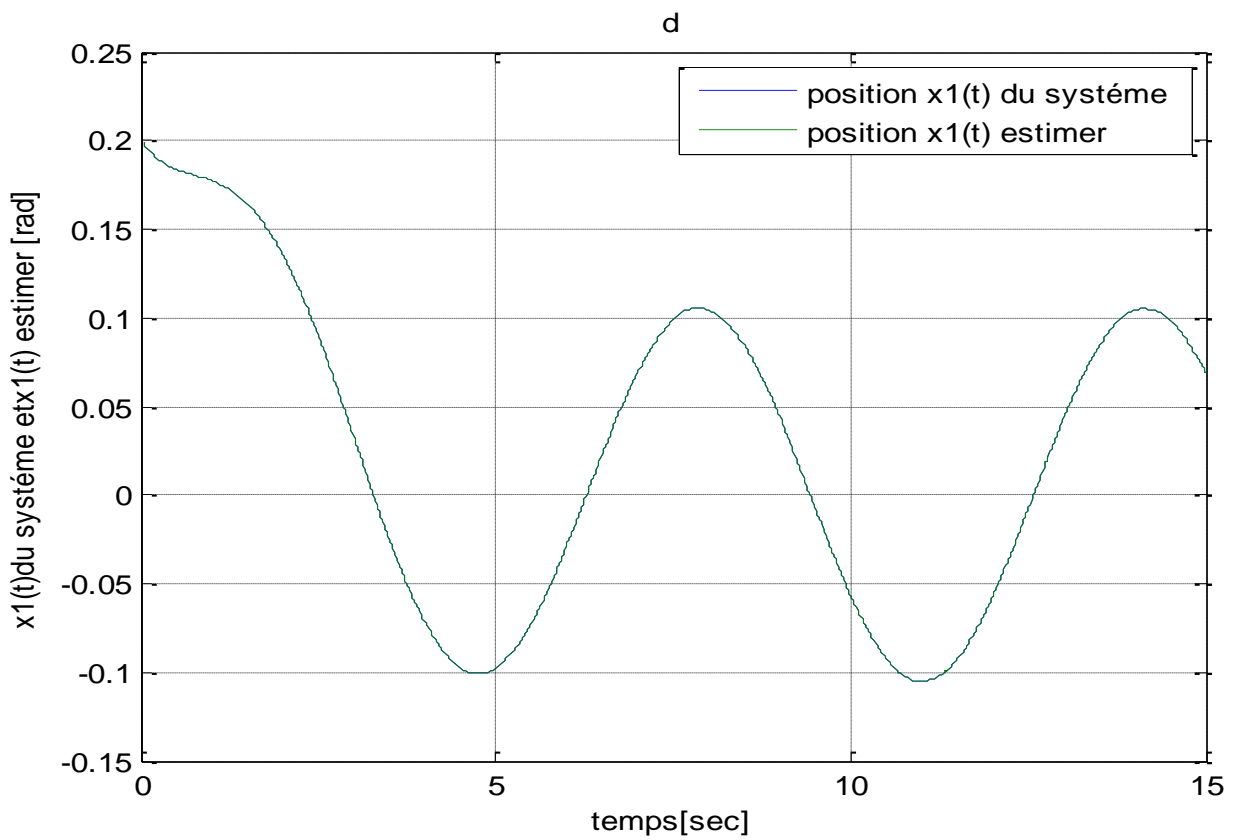
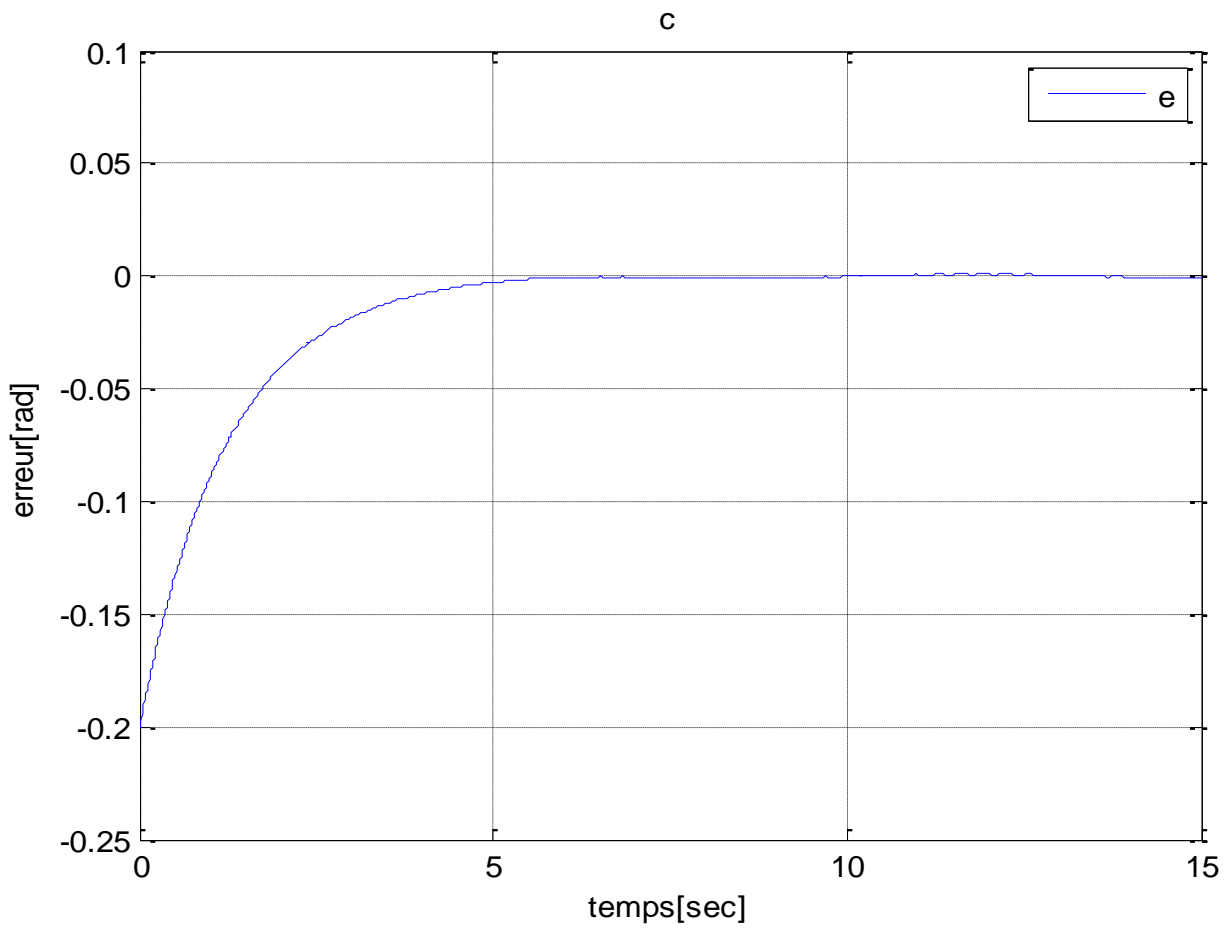


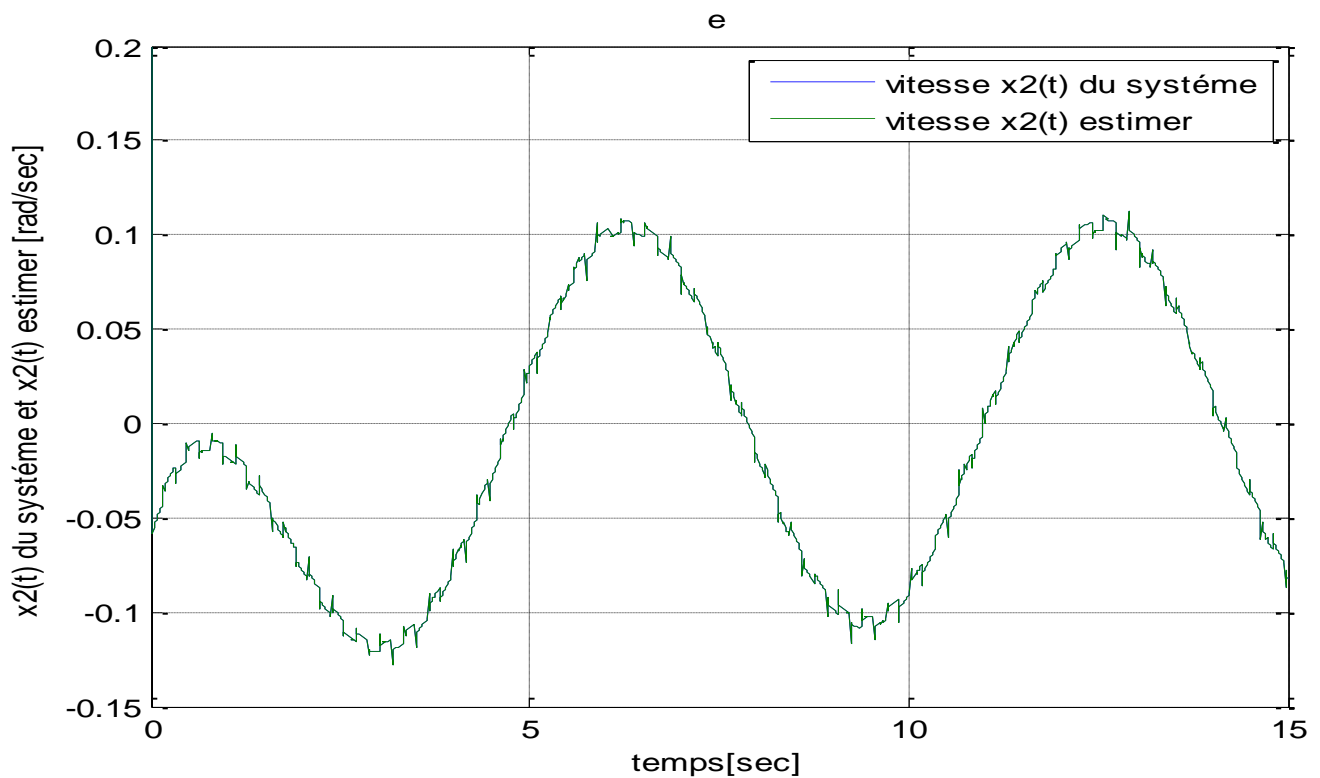


**Figure(IV.8) :** Réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de l'observateur à grand gain sans perturbation

L'observateur à grand gain avec perturbation:







**Figure(IV.9)** : Réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de l'observateur avec perturbation

D'après la figure (IV.8.a) on remarque que la réponse suit toujours la référence malgré les différentes conditions initiales, l'erreur converge vers zéros tel qu'il est montré par la figure (IV.8.c), donc on a une très bonne poursuite.

A partir de la figure(IV.8.d) et la figure(IV.8.e) on a une bonne estimation pour la position et la vitesse, L'observateur arrive à estimer notre variable d'états.

Nous avons ajouté une perturbation d'où aucune influence n'a été remarqué, tel qu'il est montré par les figures (IV.9.a, b, c, d).Par contre, des perturbations sur la figure(IV.9.e) apparaissent. Ce qui nous oblige à utiliser à un autre observateur à mode glissant.

- ◆ Observateur à mode glissant :

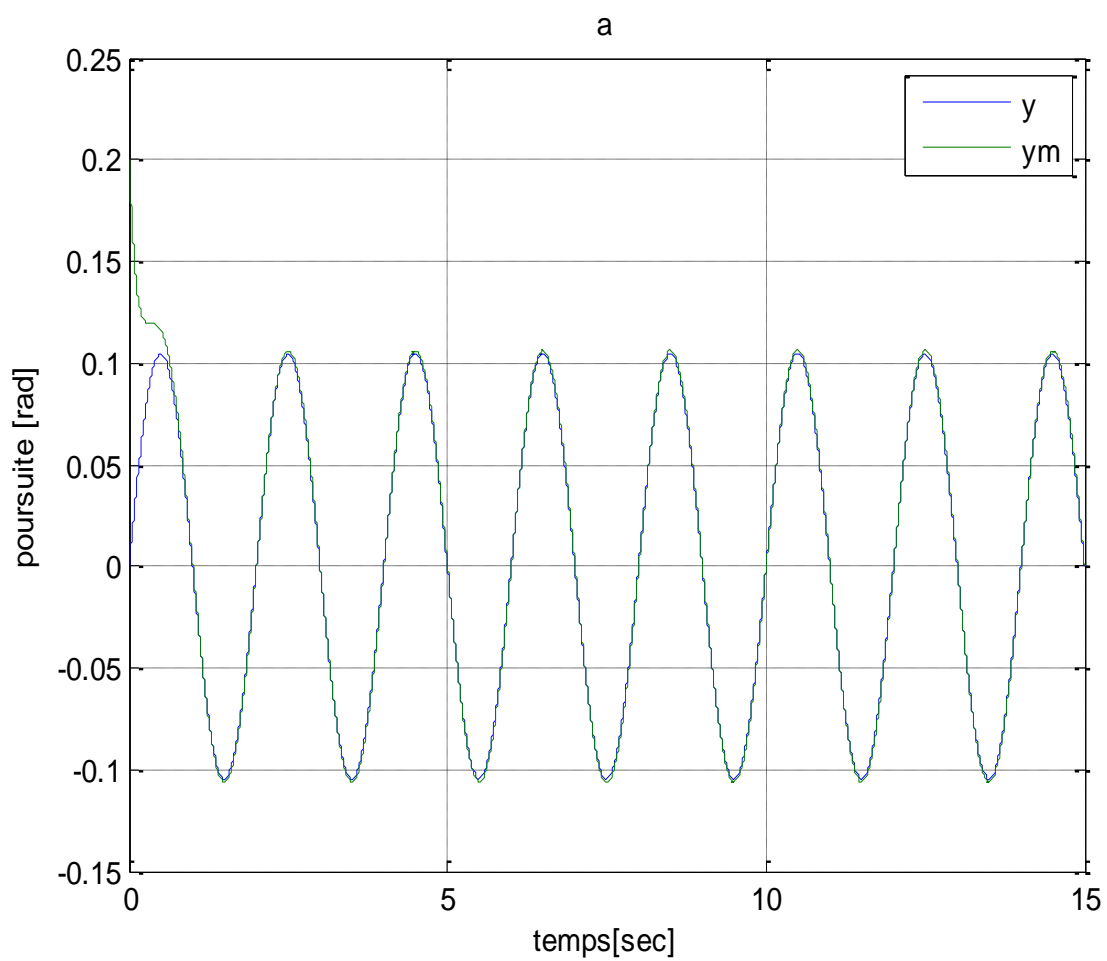
Sa formule présentée comme suit :

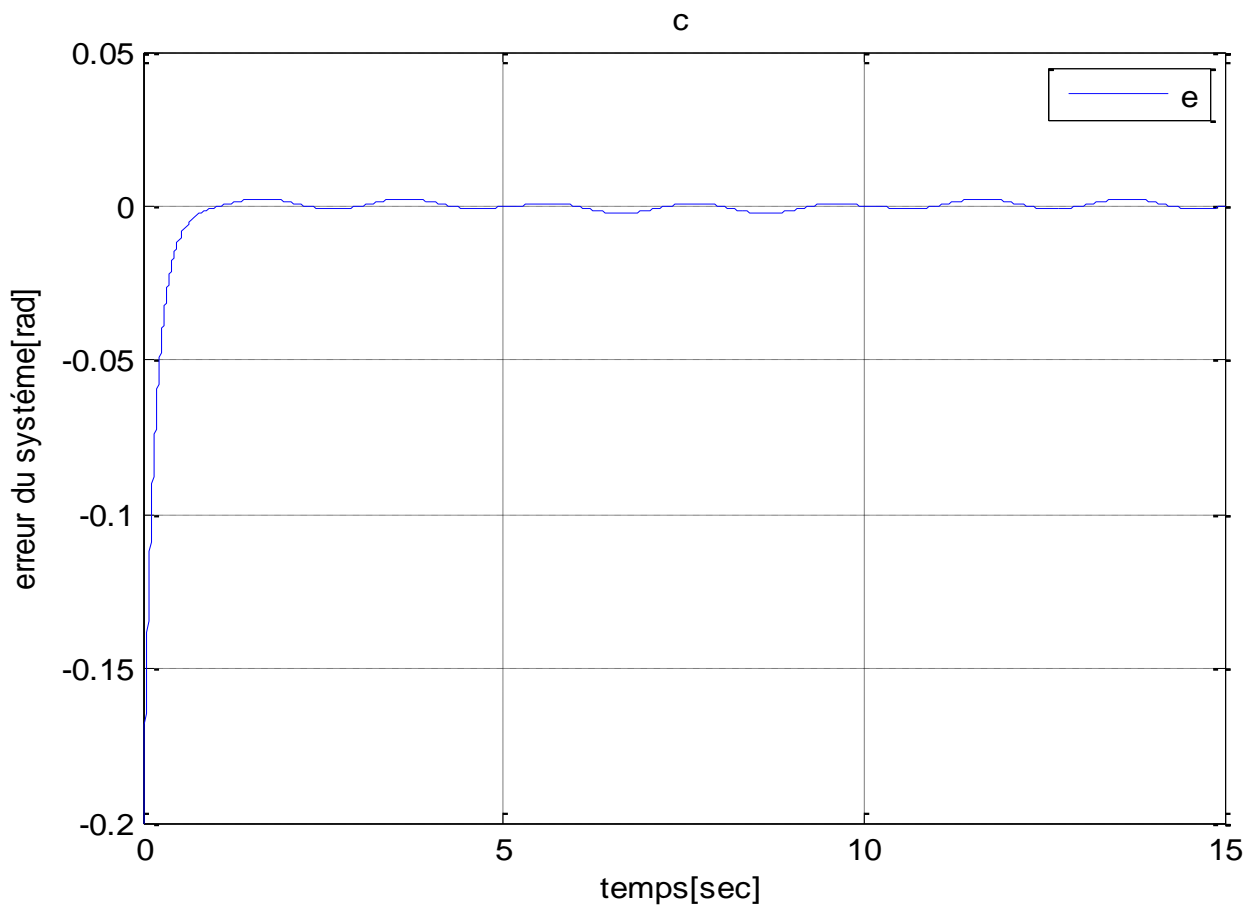
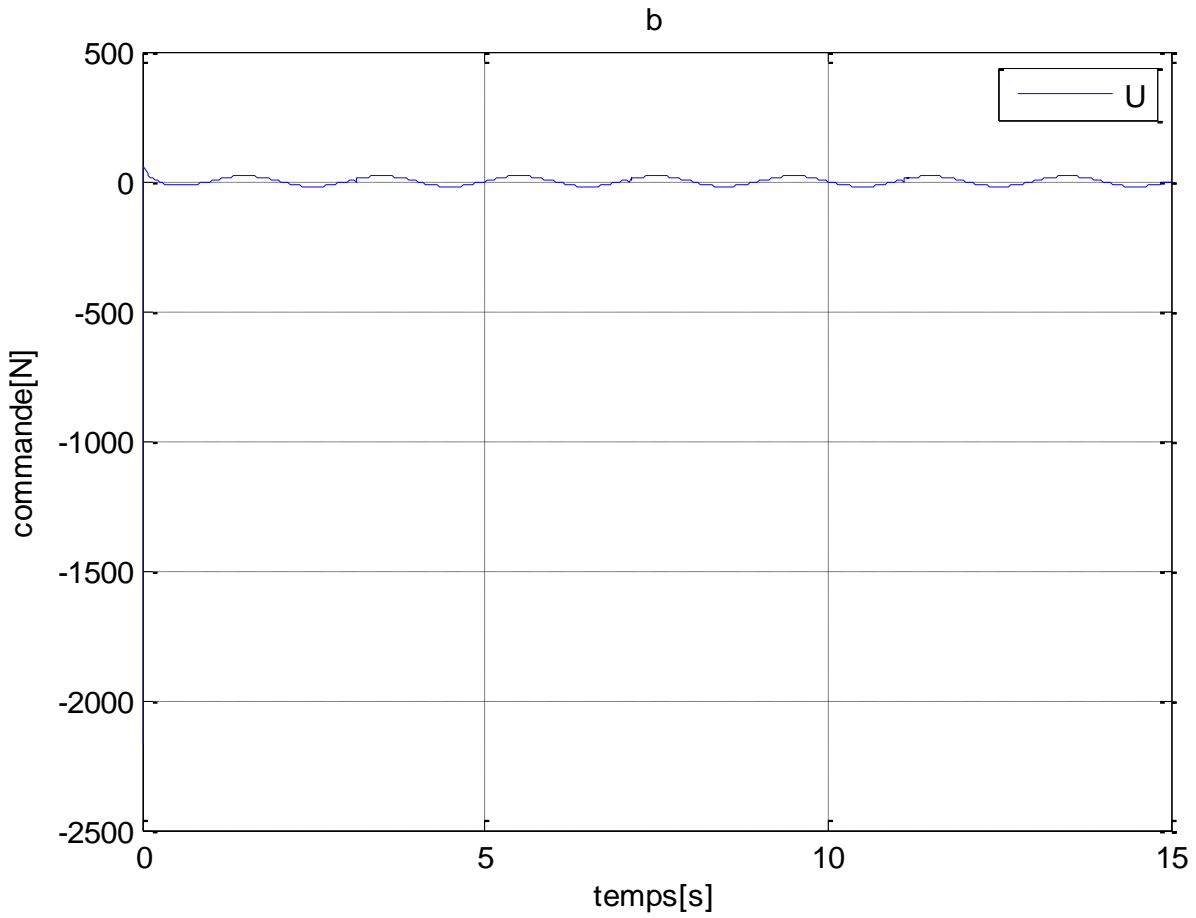
$$\dot{e} = Ae - bk_c^t e + \lambda \operatorname{sgn} e - \dot{e}$$

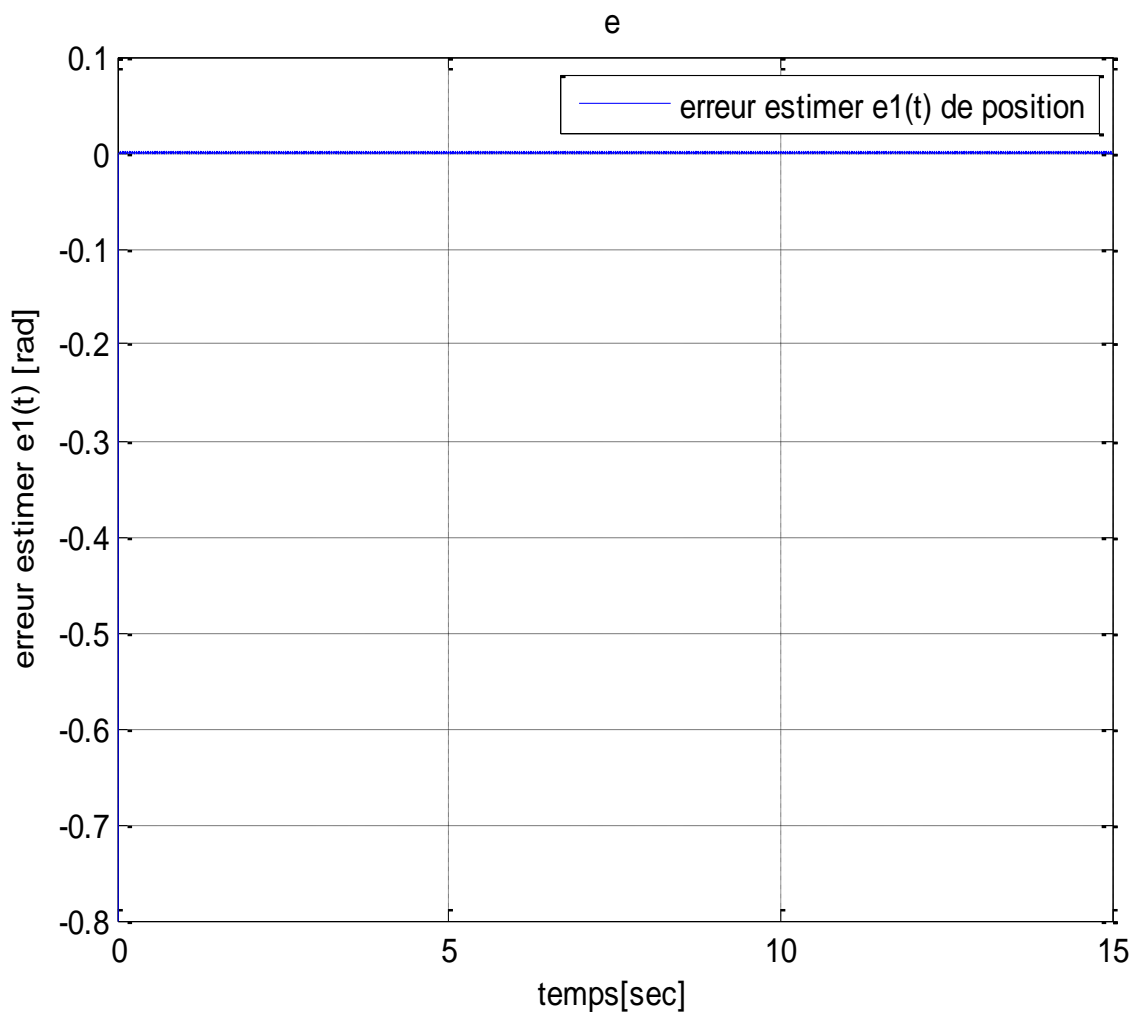
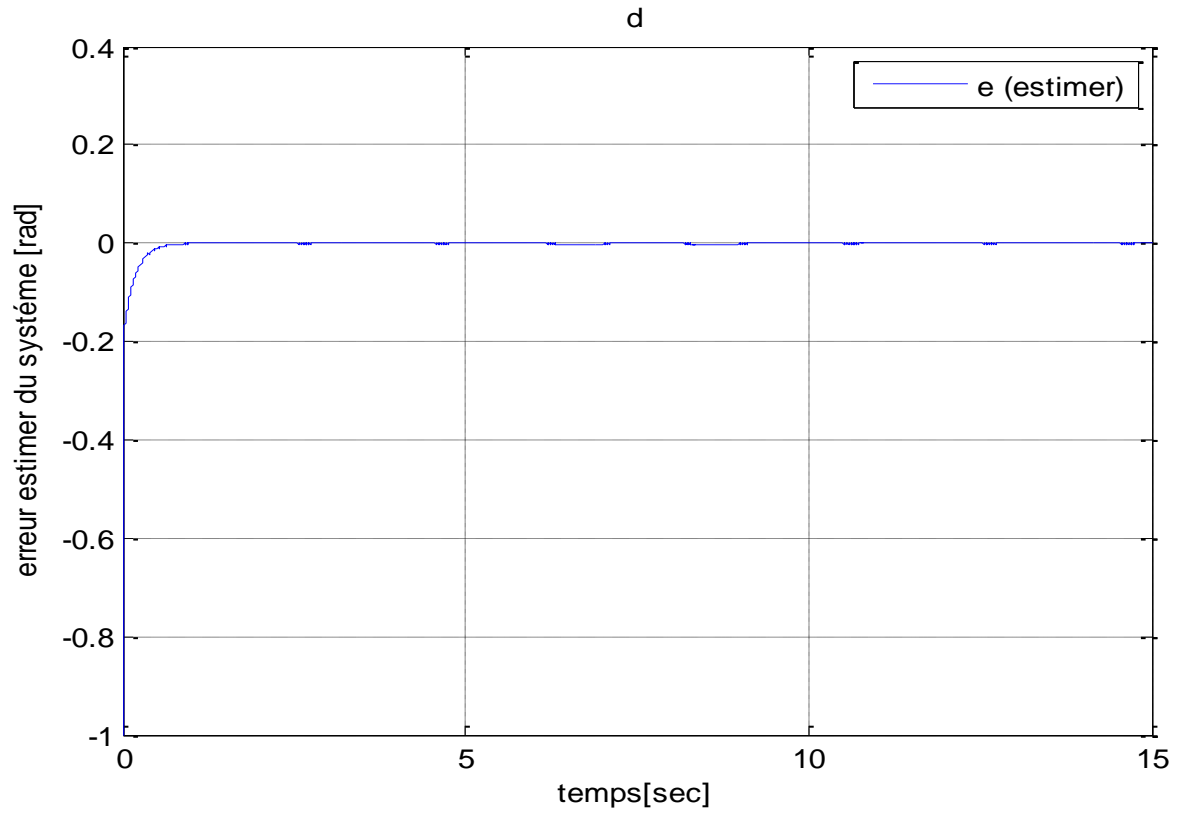
$$e = C^T e$$

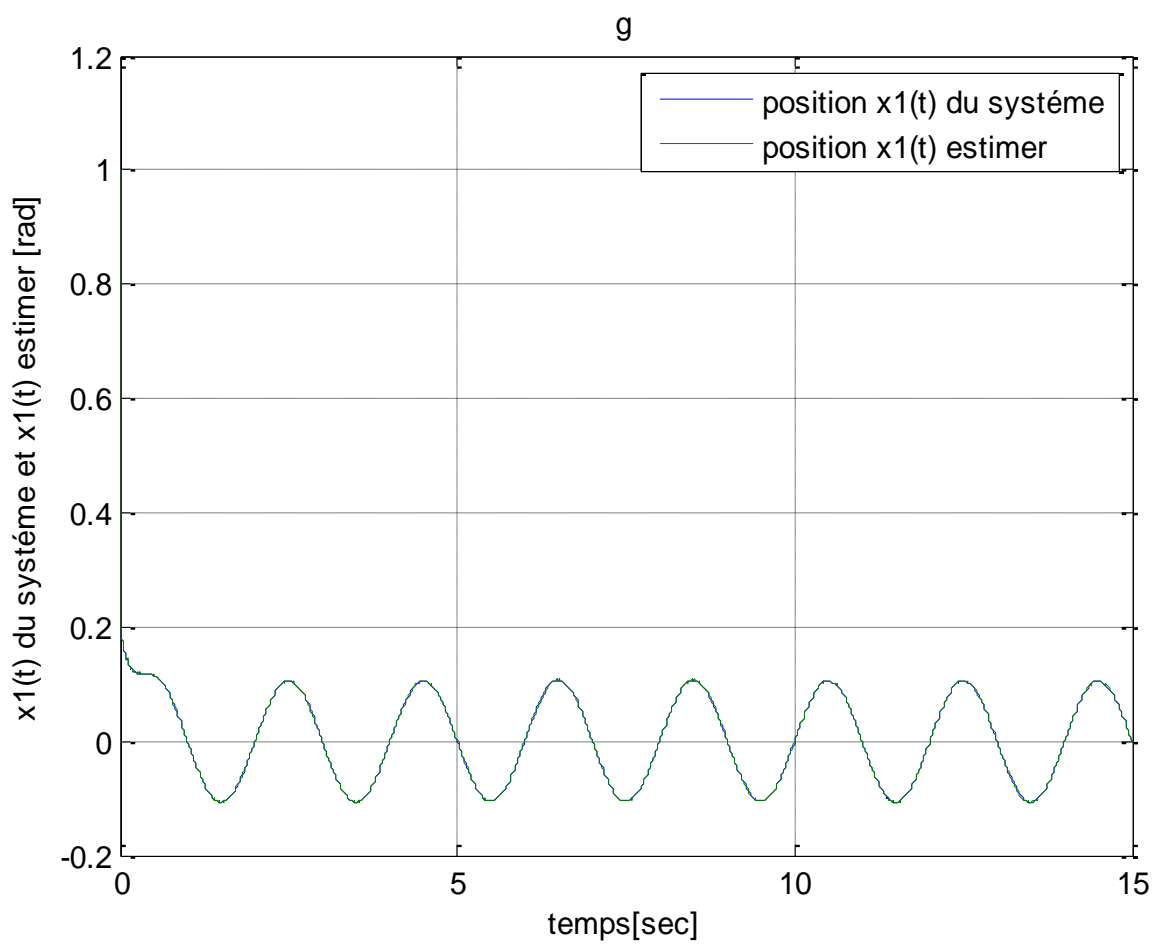
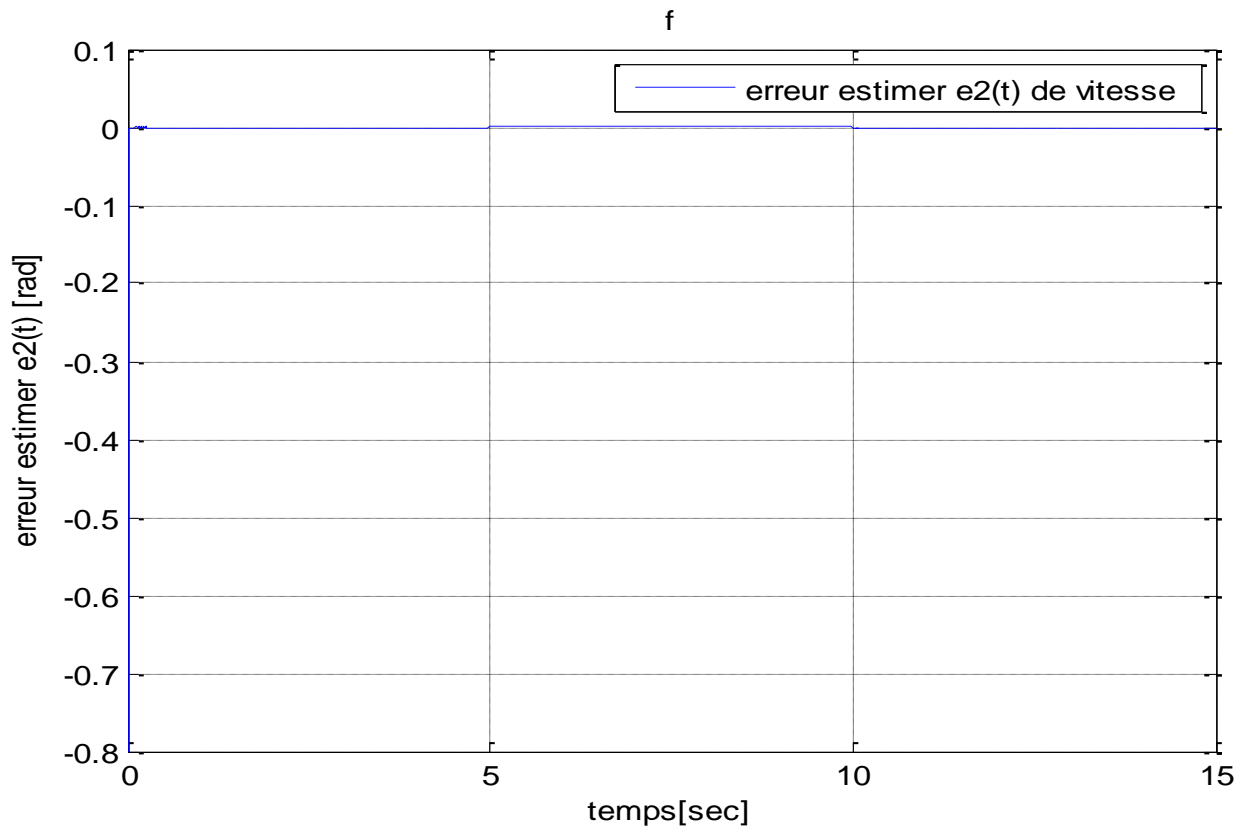
Après simulation on aura les résultats suivant :

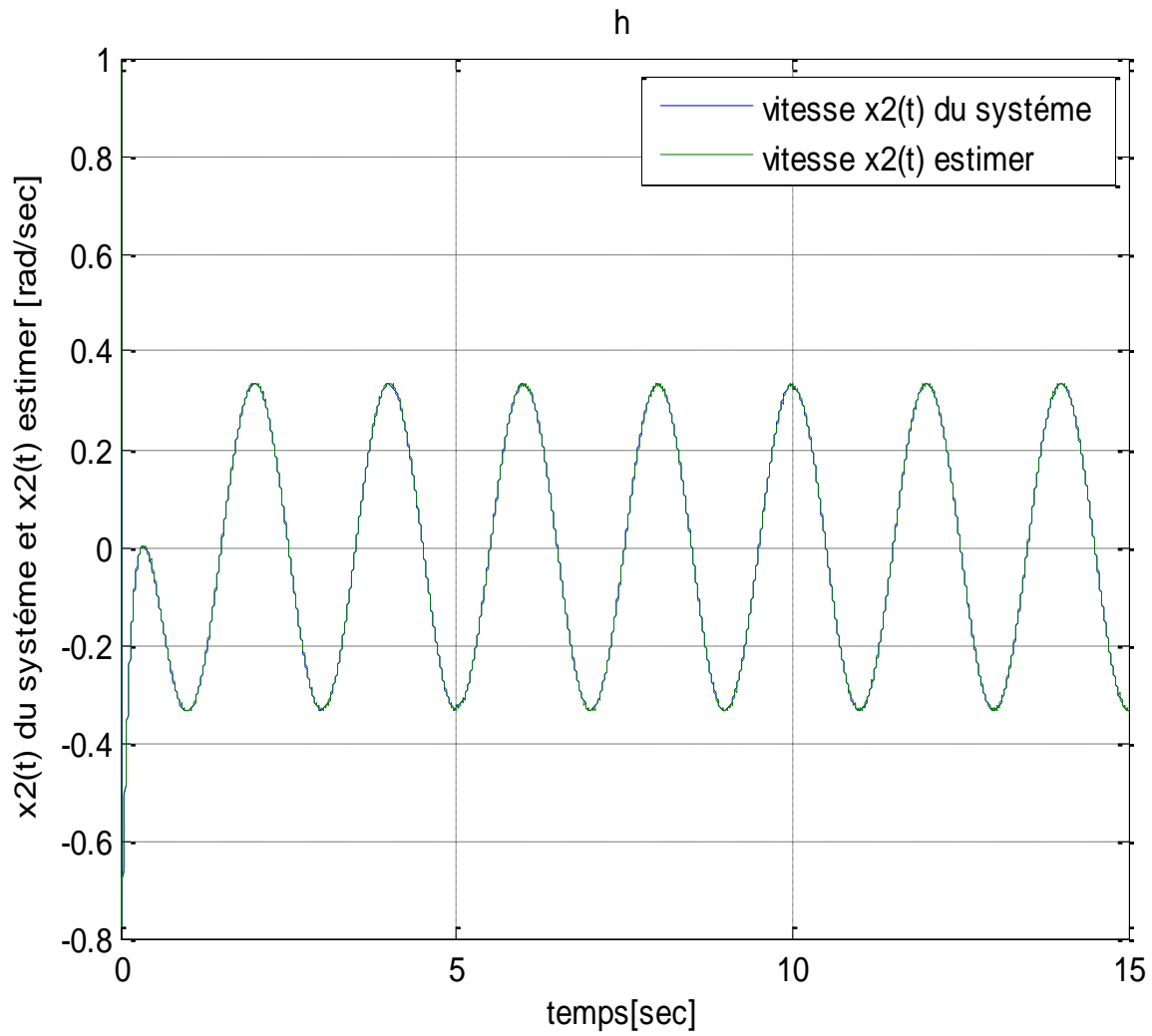
- sans perturbation :





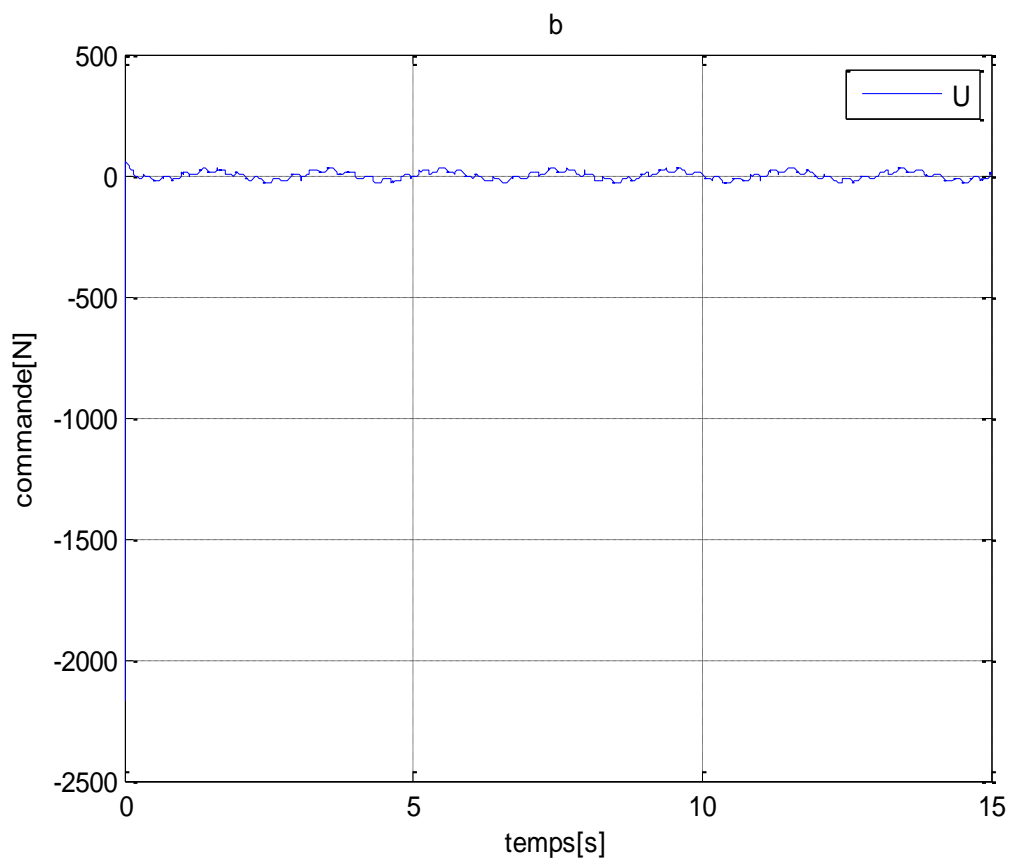
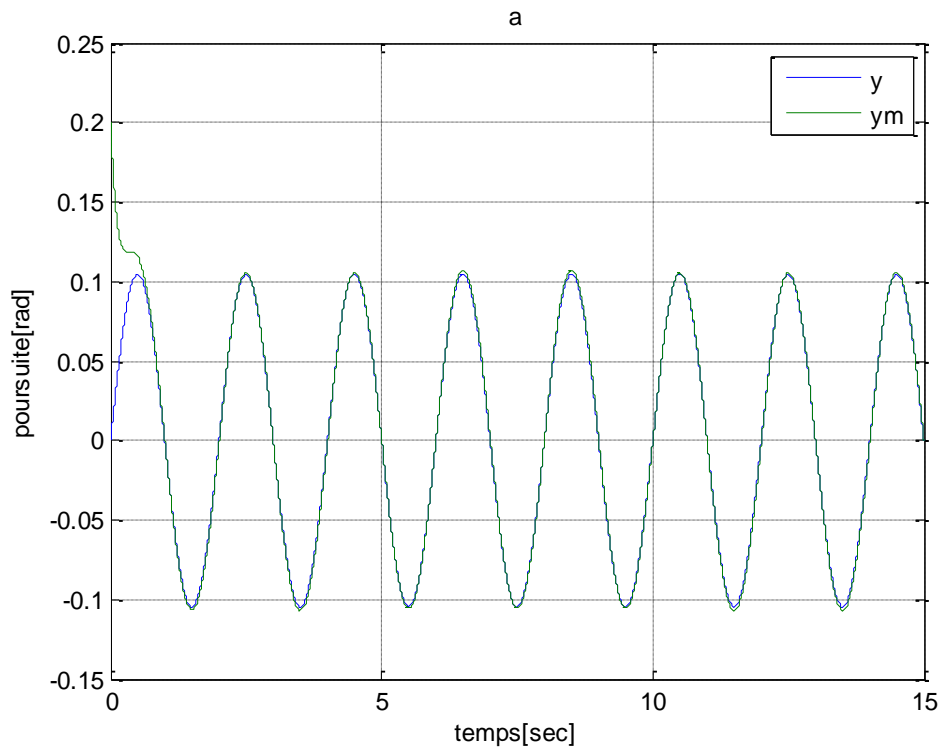


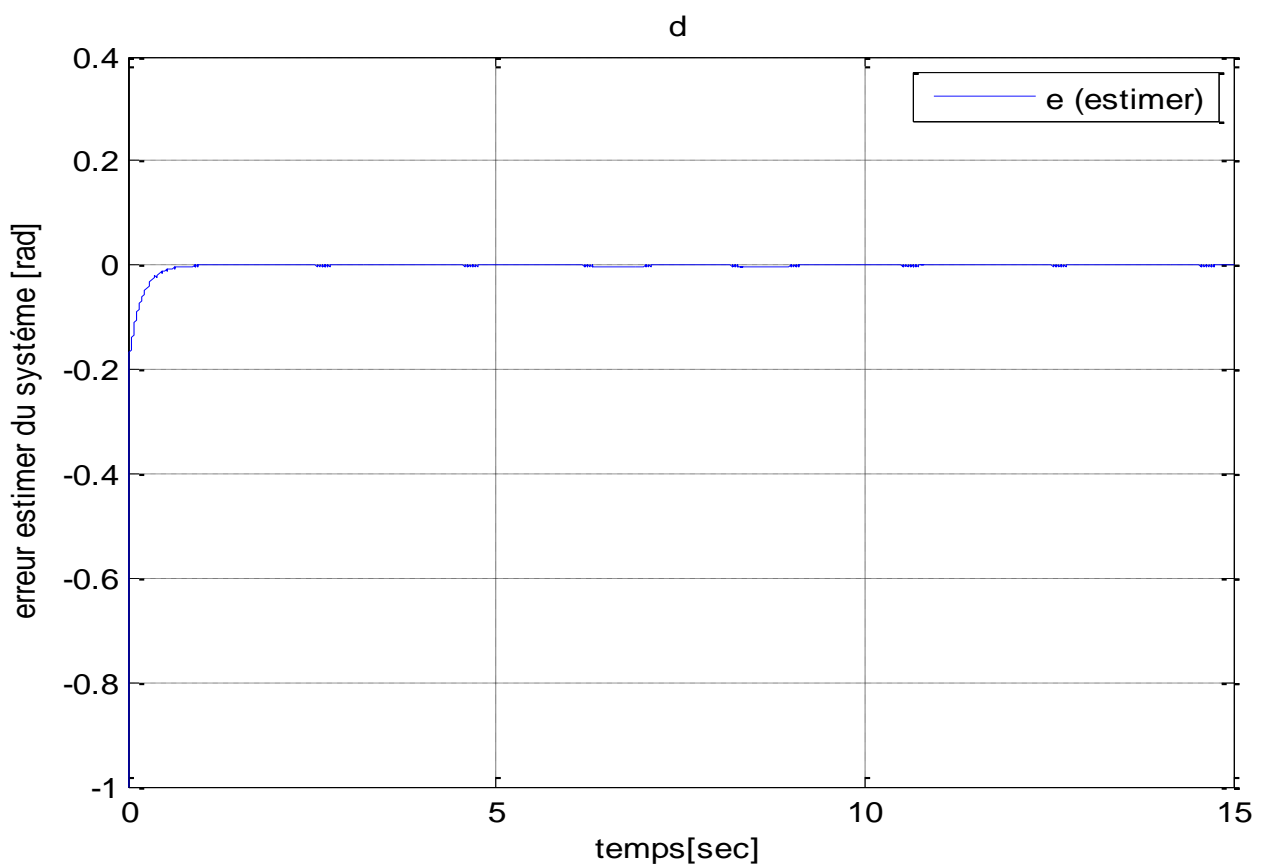
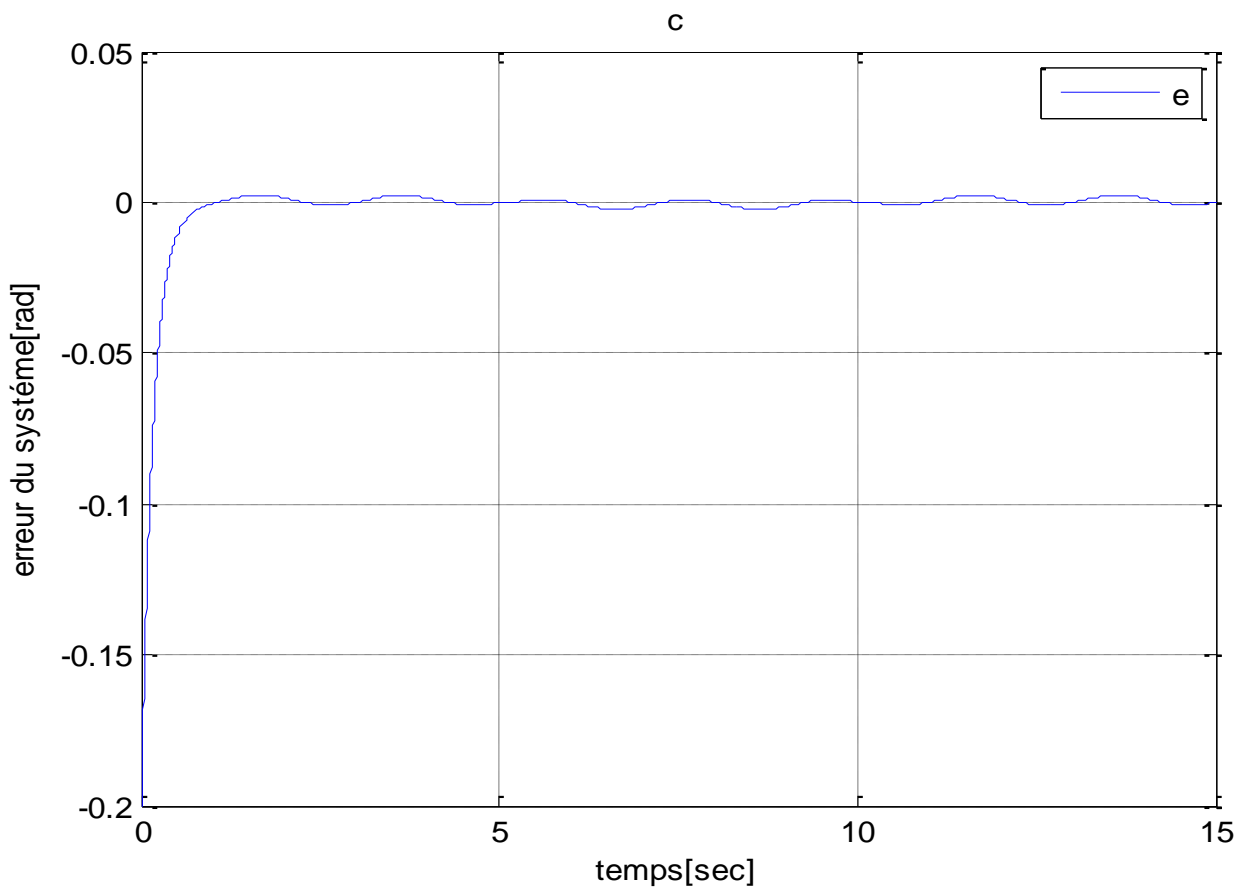


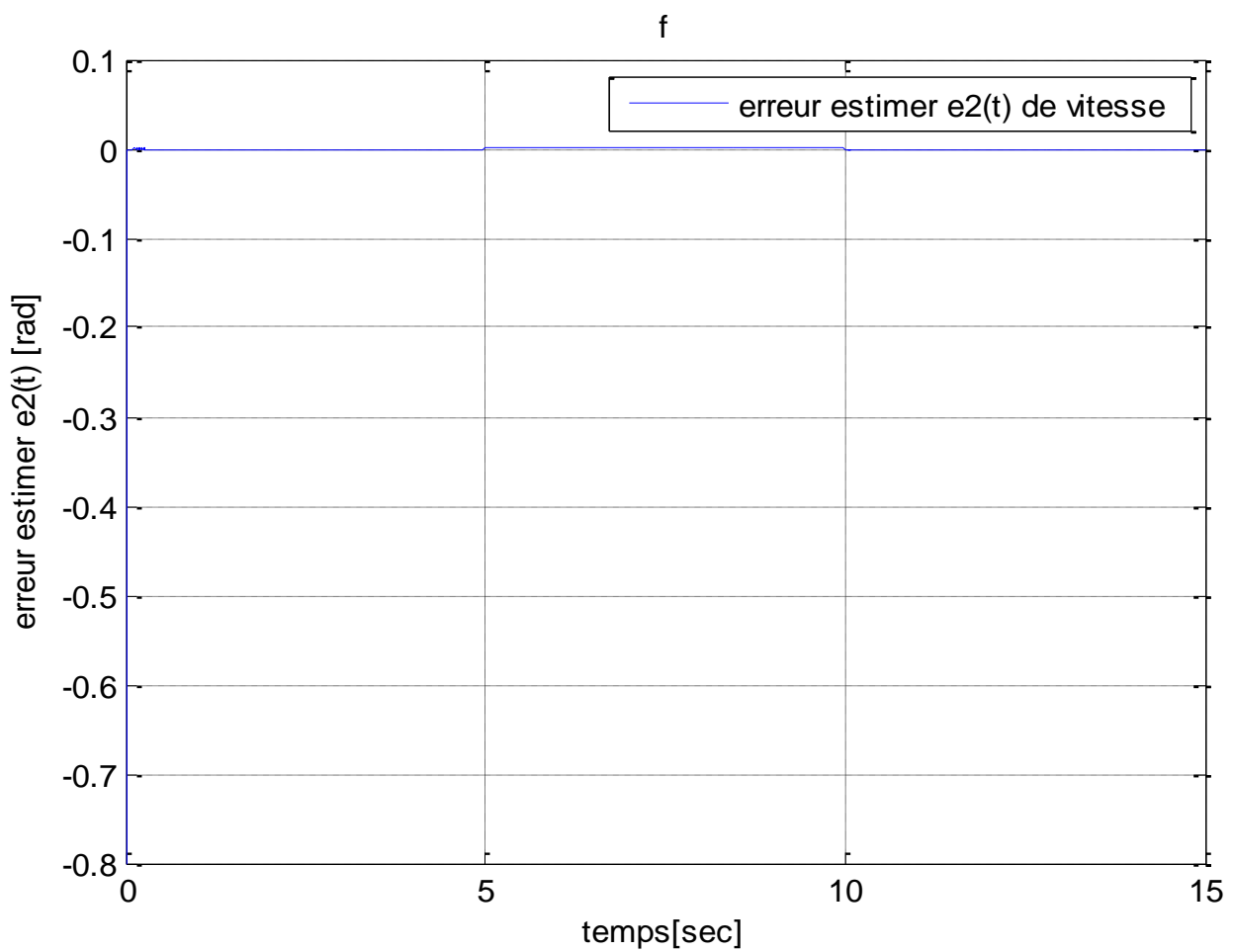
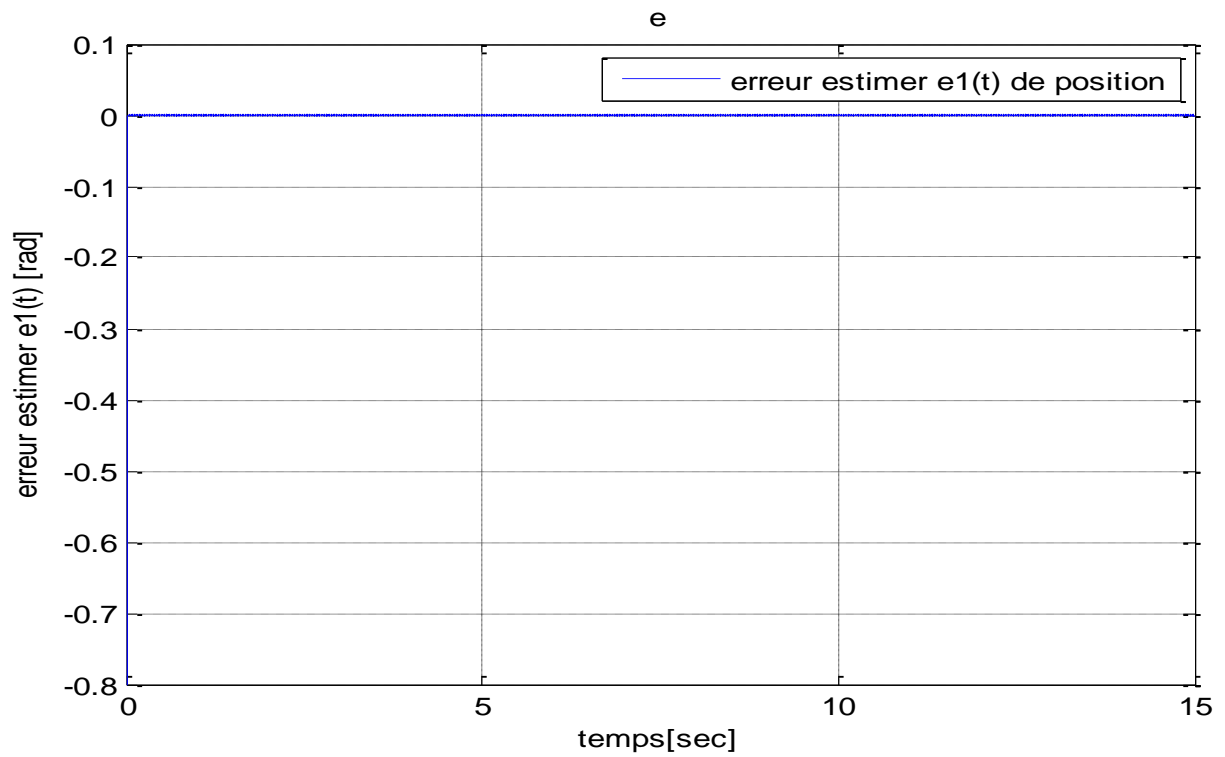


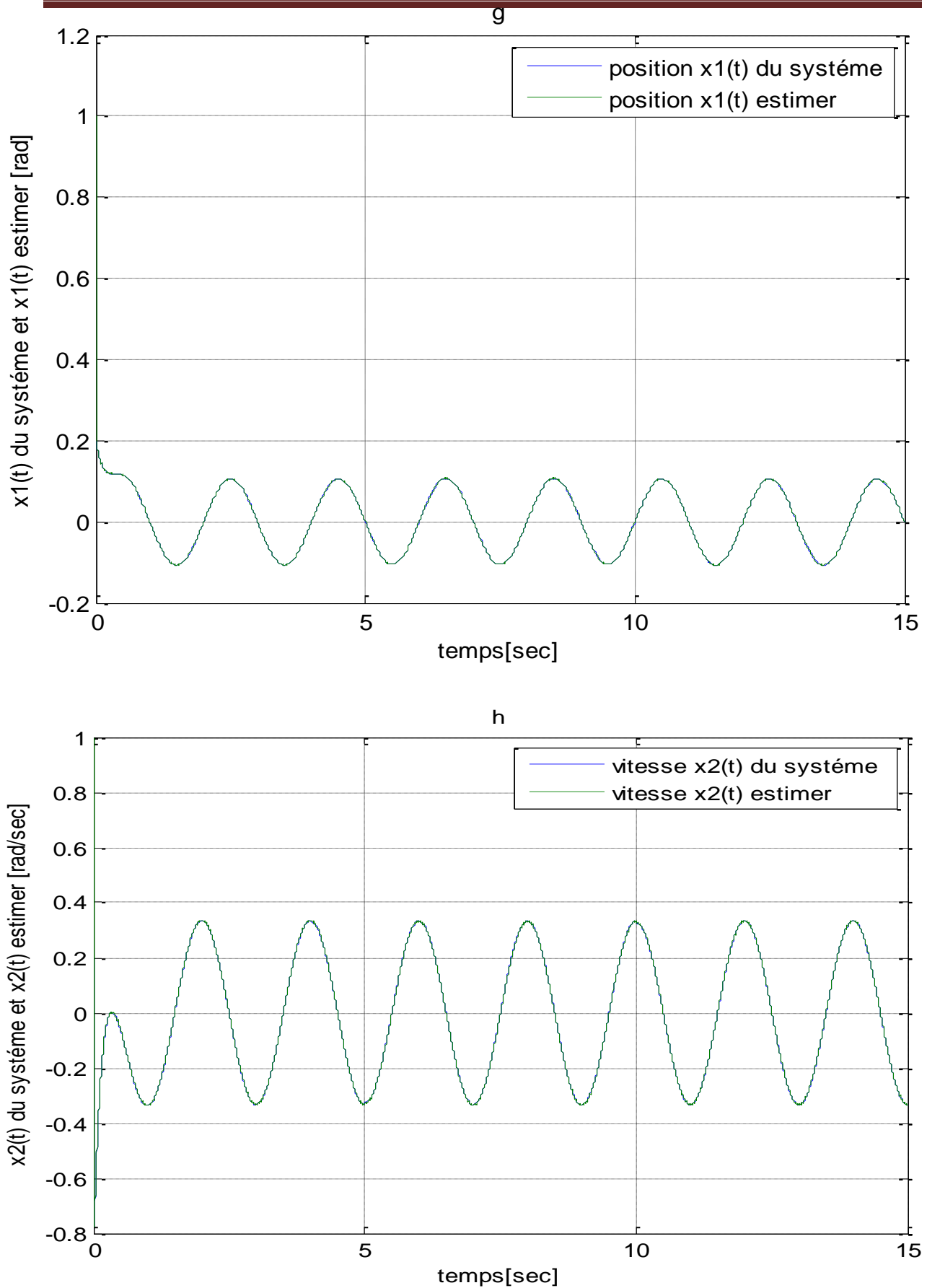
**Figure(IV.10)** : réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de l'observateur à mode glissant sans perturbation.

- avec perturbation :









**Figure(IV.11)** : réponse du système (pendule inversé) à une sinusoïdale sous l'action de l'observateur à mode glissant avec perturbation

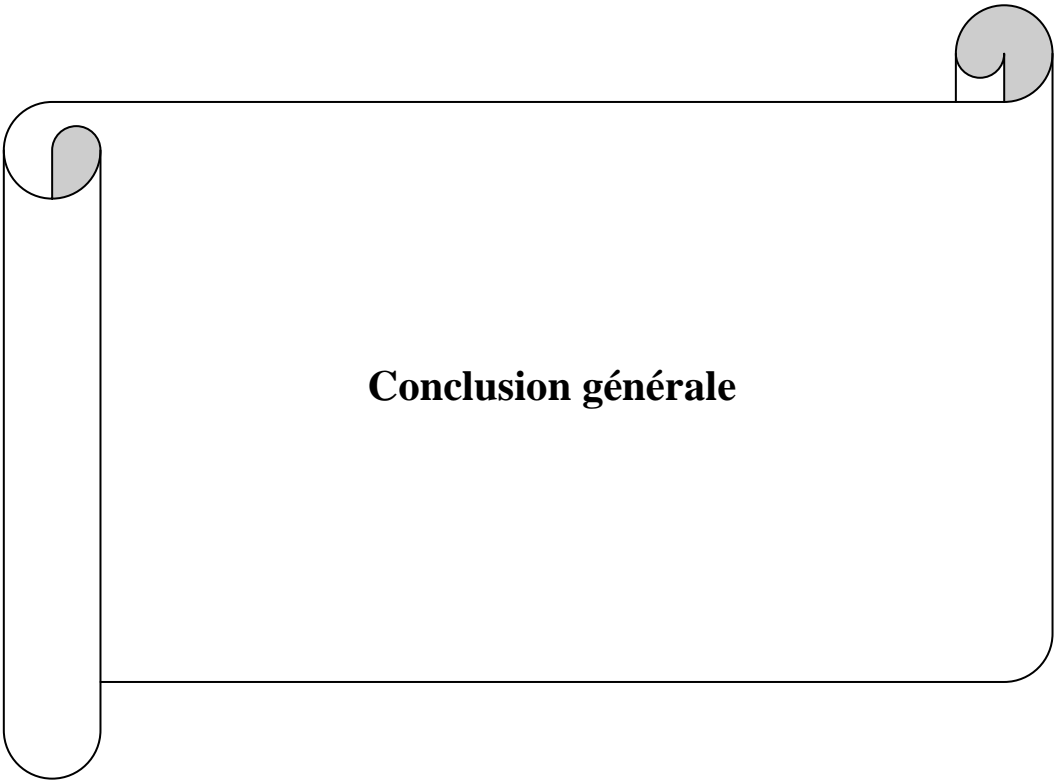
Dans les figures (IV.10.a), (IV.11.a), nous présentons la réponse du pendule inversé, nous constatons que «  $y$  » converge très bien vers  $y_m$  dans les deux cas avec et sans perturbation, et évidemment l'erreur dans les figures (IV.10.c) et (IV.11.c) converge vers zéro.

On remarque à partir de ces figures (IV.10.g, h), (IV.11.g, h) qu'on a une très bonne estimation, notre observateur arrive à estimer les variables d'états dans les deux cas avec et sans perturbation. L'erreur d'estimation converge vers zéro, comme il est montré dans les figures suivantes : (IV.10.e), (IV.10.f), (IV.11.e) et (IV.11.f), la perturbation n'influence pas sur nos résultats.

## Conclusion

Dans ce chapitre, en premier lieu nous avons appliqué la commande linéarisante à notre système. Les résultats ont montré l'efficacité de cette méthode, mais le problème se pose lorsque les paramètres sont inconnus, ce qui la rend pratiquement insuffisante. Nous sommes passés à la commande adaptative floue pour remédier à ce problème. Elle permet d'adapter les paramètres du système, les résultats sont satisfaisants.

A la fin, nous avons supposé que les variables d'états sont inconnues. Nous avons placé un observateur pour les estimer ; les résultats ont été satisfaisants.



**Conclusion générale**

### Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif d'aborder les différentes techniques de commande, généralement employées en automatique afin de répondre mieux aux objectifs de performance et de robustesse. Pour la régulation d'un procédé, les lois de commandes proposées sont appliquées à la stabilisation d'un pendule inversé qui est un système instable, sous actionné et possède des non-linéarités non négligeables. C'est un outil didactique et un problème classique souvent utilisé pour tester les caractéristiques des nouvelles lois de commande.

Le premier chapitre est considéré comme une introduction à la commande adaptative d'une façon générale. Les principaux points traités par ce chapitre sont : La commande adaptative à modèle de référence, l'approche du gradient et règle MIT, et la théorie de Lyapunov. On a vu aussi les différents détails théoriques de la commande par retour d'états.

Au deuxième chapitre, nous avons donné quelques rappels théoriques de base de la logique floue et la représentation d'un régulateur flou et de ses différents constituants.

Au troisième chapitre, tout d'abord, nous avons commencé par rappeler quelques définitions relatives à l'observabilité des systèmes dynamiques puis nous avons présenté l'observateur à un grand gain.

En fin, au quatrième chapitre, nous avons appliqué des différentes stratégies de commande dans le but d'apporter des améliorations en poursuite et la convergence de l'erreur vers zéro.

Au terme de ce travail, nous pouvons conclure que chaque type de commande peut être avantageux dans un sens et désavantageux dans un autre, mais on peut affirmer que l'association de la commande adaptative floue et l'observateur à mode glissant s'avère très efficace dans le contrôle de processus complexes.

## BIBLIOGRAPHIES

- [1] ANTOINE CORNUEJOLS, « Introduction à la Logique Floue ».Cours d'I.A.
- [2] CARLOS CANUDAS de WIT, « Optimisation Discrétisation et Observateurs ».Sermes Cience.
- [3] CHING-HSIANG LEE, and YEONG-CHAN« Chang, $H^\infty$ Tracking desgn of uncertain nonlinear SISO systems: Adaptive fuzzy approach »
- [4] DOUDOU SOFIANE, « Contribution à la commande moderne des systèmes non linéaires multi variables non affines », thèse doctorat, spécialité : automatique, université SETIF1, année 2013.
- [5] F.E.THOU, « Observing the State of Non –Linear Dynamic Systems », international journal of control, American Control Conference, SANFRANCISCO, USA, 1993.
- [6] GACOGNE, LOUIS, « Eléments de Logique Floue ».Paris : Hermès ,1997.
- [7] H. K. KHALIL, «Nonlinear Systems Prentice Hall», 1996.
- [8] I.D.LANDAU et L.DUGARD(1986), « Commande Adaptative, Aspects Pratiques et Théoriques », éditeur : MASSON.
- [9] J. J .E. SLOTINE, W. LI, « Applied Nonlinear control », Prentice-Hall, USA, 1991.
- [10] LOFT1 BEN AMOR, « Commande non linéaire d'un moteur à luctance variable », thèse doctorat, université de MONTREAL, octobre 1996.
- [11] MOKEDDEM DIAB, «Contrôle Flou des Processus Biotechnologiques à base d'Algorithmes Génétiques », spécialité : sciences en électronique, université FERHAT ABBAS de SETIF,2010.
- [12] M.VIDYASAGAR, « Nonlinear Systems Analysis», Prentice Hall, 1993.
- [13] TOUFIK AMIEUR et MOHAMED BOUMEHRAZ « commande adaptative floue indirecte avec mode de glissement des systèmes non linéaires », the international conference on electronics & oil: from theory to applications march 05-06, 2013, ouargla, algeria