MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI- OUZOU

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

OPTION : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Présentée par :

M$^{\text{lle}}$ Houria KHELOUFI

sujet :

Contribution à la commande basée sur un observateur pour les systèmes dynamiques incertains

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. Said Djennoune ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
Mme. Fazia Bedouhene ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
Mr. Ali Zemouche ;	M. Conférences HDR ;	Université de Lorraine ;	Co-Rapporteur
Mr. Mohamed Morsli ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Examinateur
Mme Fatima Bellahcene ;	M. conférences A ;	U.M.M.T.O ;	Examinatrice
Mr. Harouna Souley-Ali ;	M. Conférences HDR ;	Université de Lorraine ;	Examinateur
Mr. Angelo Alessandri ;	Professeur ;	University of Genova ;	Invité

soutenue : le 23/04/2015

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA), sous la direction scientifique du Professeur **Fazia Bedouhene**. Je tiens à la remercier très vivement pour son enthousiasme envers mon travail, sa disponibilité ainsi que son soutien scientifique et humain. Ce travail n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité.

Je tiens à exprimer également toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse **Ali Zemouche**, habilité à diriger des recherche à l'université de Lorraine qui a bien voulu me guider jusqu'au terme de ce travail. Merci pour vos échanges scientifiques, vos conseils précieux et votre rigueur.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Mr **Said Djennoune**, Professeur à l'université de Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de thèse.

En outre, je tiens à remercier Mr **Mohamed Morsli**, Professeur à l'université de Tizi-Ouzou ainsi que Mme **Fatima Bellahcene**, Maître de conférences à l'université de Tizi-Ouzou d'avoir accepté de faire partie du jury.

Une mention toute spéciale au Professeur **Angelo Alessandri** et **Harouna Souley-Ali** pour les nombreuses discussions enrichissantes et collaborations que nous avons eues. Merci également d'avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Enfin, je ne peux conclure sans adresser mes plus chaleureux remerciements à tous les membres de ma famille qui m'ont toujours soutenue. Il me faut également remercier de tout mon coeur mes chers amis qui n'ont pas cessé de m'encourager dans les moments difficiles. Je n'oublie pas, bien entendu, ma petite princesse **Selma** dont les sourires et les gazouillis ont égayé la rédaction de cette thèse.

Je dédie cette thèse
à toute ma famille,
à mes deux anges Lynda et Selma,
à mes amis,
à tous ceux que j'aime.

Table des matières

Introduction générale **1**

Chapitre 1
Généralités et bref état de l'art

1.1 Introduction 5
1.2 Analyse de la stabilité au sens de Lyapunov 6
1.2.1 Systèmes à temps continu 6
1.2.2 Systèmes à temps discret 7
1.2.3 Systèmes linéaires à commutations 8
1.3 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité 12
1.4 L'approche des inégalités matricielles linéaires 16
1.4.1 Définition et intérêts des LMIs 16
1.4.2 Aspects informatiques 18
1.4.3 Queqlues lemmes utiles 18
1.5 État de l'art sur les approches LMIs pour la stabilisation des systèmes 21
1.5.1 Stabilisation des systèmes à temps continu 22
1.5.2 Stabilisation des systèmes à temps discret 26
1.6 Conclusion 32

I Contribution à la commande basée sur un observateur pour les systèmes à temps continu

Chapitre 2
A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters

2.1 Introduction . . . 35
2.2 Problem formulation . . . 36
2.3 Less conservative LMI condition . . . 37
2.3.1 Systems without parameter uncertainties . . . 37
2.3.2 Systems with uncertainties . . . 39
2.3.3 Case of uncertainties in all state matrices . . . 41
2.3.4 On the necessary conditions related to the proposed approach . . . 42
2.4 Numerical validation and comparisons . . . 44
2.4.1 Application to flexible link robot . . . 45
2.4.2 Numerical evaluations . . . 47
2.5 Conclusion . . . 48

Chapitre 3
Observer-based $\mathscr{H}_\infty$ stabilization for Lipschitz nonlinear systems with uncertain parameters

3.1 Introduction . . . 49
3.2 Lipschitz nonlinearities as LPV parameters . . . 50
3.3 Observer-based controller synthesis . . . 53
3.4 Resilient controller design . . . 55
3.5 Numerical examples and comparisons . . . 57
3.5.1 Example . . . 57
3.5.2 Evaluation of the conservatism . . . 60
3.6 Conclusion . . . 62

II Contribution à la stabilisation des systèmes à temps discret

Chapitre 4
Observer-based stabilisation of discrete time linear systems with parameter uncertainties by using enhanced LMI conditions

4.1 Introduction 65
4.2 Problem formulation 66
4.3 New LMI design method : Enhanced LMI condition 67
4.4 Observer-based control by using the Euler approximate model 72
4.5 Conservatism lies in approaches with equality constraint 75
4.6 Numerical examples and comparisons 77
4.6.1 Example 1 : evaluation of maximum admissible uncertainty 77
4.6.2 Example 2 : Euler approximate model 78
4.6.3 Conservatism evaluation in the uncertainty-free case 79
4.6.4 Application to a one-link robot manipulator 79
4.7 Conclusion 81

Chapitre 5
Robust $\mathscr{H}_\infty$ Observer-Based Stabilization for discrete-time Systems with Uncertain Parameters and Lipschitz Nonlinearities

5.1 Introduction 83
5.2 LPV reformulation to Lipschitz nonlinearities 84
5.3 Robust observer-based controller design 86
5.4 Comments and comparisons 91
5.5 Numerical examples and comparisons 93
5.6 Conclusion 96

Chapitre 6
Stabilization of Switched linear systems with unknown switching mode

6.1 Introduction 99
6.2 Output feedback control in a noise-free setting 100
6.3 Output feedback control in the presence of disturbances 103
6.4 Numerical Examples 107
6.4.1 Example 1 107
6.4.2 Example 2 108
6.5 Conclusion 109

Conclusion générale et quelques perspectives de recherche **111**

Bibliographie

Table des figures

1.1 Principe d'estimation d'état. 13

2.1 The motor behavior : stabilized states vs uncontrolled states 46
2.2 The link behavior : stabilized states vs uncontrolled states 47
2.3 Percentage of systems for different values of m with $n = 5, p = 1$ 48

3.1 $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of the motor behavior 59
3.2 $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of the link behavior 60
3.3 Percentage of systems for different values of Lipschitz constant 62

4.1 State variables of the one-link robot manipulator 81

5.1 Example 1 : The simulated states and their estimates 95
5.2 Example 1 : The simulated controller and the disturbance 96

6.1 Output feedback observer-based control scheme. 100
6.2 Example 1 : states variables and their estimates. 108
6.3 Example 2 : states variables and their estimates 110

Notations et acronymes

1. ***Acronymes :***
   - LTI : Linéaire Temps Invariant (Linear Time Invariant).
   - LPV : Linéaire à Paramètres Variants (Linear Parameter Varying).
   - LMI : Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequality).
   - BMI : Inégalités matricielles bilinéaires (Bilinear matrix inequality).
   - SCL : Systèmes à Commutations Linéaires.
   - GAS : Globalement Asymptotiquement Stable.
   - CQLF : Fonction de Lyapunov Quadratique Commune (Commun Quadratic Lyapunov Function)
   - SDP : Semi Définie Positive.

2. ***Notations :***
   - $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels ;
   - $\mathbb{R}^n$ est l'espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels ;
   - $(\star)$ est utilisée pour les blocs induits par symétrie dans une matrice ou dans une inégalité matricielle ;
   - A^T représente la matrice transposée de A ;
   - $\mathbb{R}^{n\times m}$ est l'ensemble de toutes les matrices réelles de n lignes et m colonnes ;
   - I est une matrice d'identité de dimension appropriée et I_r représente une matrice d'identité de dimension r ;
   - La valeur 0 représente une matrice nulle de dimension appropriée, et $0_{(n,m)}$ désigne matrice nulle à n lignes et m colonnes ;
   - pour une matrice carrée S, $S > 0$ $(S < 0)$ signifie que cette matrice est définie positive (définie négative) ;
   - $A \leq B$ signifie que la matrice $B - A$ est semi-définie positive ;
   - $\mathscr{H}e(A)$ représente la somme $A + A^T$.
   - $\|.\|$ est la norme Euclidienne habituelle ;
   - L'ensemble L_2 est l'espace des fonctions de carré intégrable sur $[0,\infty)$ équipé de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$,
   - l_2^s est l'espace des suites carré sommables, i.e., $l_2^s = \{x = (x(k))_k \subset \mathbb{R}^s, \sum_{k=0}^{k=\infty} \|x(k)\|^2 < +\infty\}$ muni de la norme $\|x\|_{l_2^s} = \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \|x(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;
   - $\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_i)$ est la matrice diagonale par blocs ayant $A_1,\ldots,A_i$ sur sa diagonale principale.
   - $e_s(i) = \underbrace{(0,\ldots,\overbrace{1}^{i\text{th}},\ldots,0)}_{s \text{ composantes}} \in \mathbb{R}^s$, $s \geq 1$ est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^s$.
   - $\underline{\delta}(S)$ et $\bar{\delta}(S)$ désignent respectivement la valeur propre minimale et maximale de S.
   - $L_{loc}^p(\omega, K)$ est l'ensemble des applications de ω dans K, de puissance p intégrable.
   - $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions continûment différentiables.

Introduction générale

Préambule

L'automatique moderne a développé des outils puissants d'un point de vue théorique (espace d'état, théorie H_∞, inégalités matricielles affines [1],etc ...) pour intégrer des contraintes physiques (prise en compte des incertitudes dans la commande robuste [2], [3], [4], [5], [6], gestion et optimisation des performances, etc ...). Elle a aussi intégré les aspects informatiques (résolution numérique, optimisation convexe, logiciels d'aide à la commande de type Matlab ou Scilab de plus en plus nombreux). L'utilisation de ces nouveaux outils paraît donc intéressante dans des domaines où des performances sévères sont souvent requises, dans le milieu industriel notamment. Le problème se pose dans la méthodologie mathématique à mettre en oeuvre pour parvenir à exploiter ces nouveaux outils.

Un des besoins les plus répandus des industriels, est le concept de la stabilisation des systèmes. Rappelons que la notion de stabilisation consiste à maintenir un système stable via un contrôleur qui est calculé généralement en fonction de l'état [7], [8], [9], [10]. Lorsqu'il n'est pas possible de mesurer directement l'état, et ce pour des raisons physiques ou financières, on a recours à un système dynamique auxiliaire, appelé "observateur d'état". Ce dernier a le rôle d'estimer l'état du système en question [11], [12], [13], [14], [15], [16]. De plus, il convient de préciser que le fonctionnement du système est souvent soumis à des perturbations dues à des facteurs divers tels que des erreurs ou des bruit de mesure, des variations des paramètres internes ou externes, ou bien un vieillissement du système. Dans ce cas, le problème de stabilisation se ramène à une synthèse d'un contrôleur robuste assurant la stabilité, en dépit des perturbations qui peuvent affecter le fonctionnement du système. Notons que la négligence des perturbations affectant un système stable peut le rendre instable et dégrader de ses performances. C'est pourquoi, avant de choisir la méthodologie à mettre en oeuvre, il convient de faire une bonne représentation du système physique réel avec une précision suffisante et un modèle de structure simple. Ainsi, pour assurer un meilleur compromis du modèle vis-à-vis du processus réel et l'adéquation de celui-ci à une forme mathématique exploitable, plusieurs types de modèles de systèmes ainsi que des formes d'incertitudes ont été conçus. Les méthodologies à mettre en oeuvre sont en constante évolution. Néanmoins, malgré les avancées significatives, le problème de la commande des systèmes incertains reste un sujet de recherche ouvert et très actif. Il suscite de plus en plus l'intérêt de la communauté automaticienne.

Contrairement au problème de synthèse pour les systèmes linéaires sans incertitudes où l'on dispose d'une stratégie bien déterminée présentée par Kalman [17] et Luenberger [18], il n'existe pas de méthodes de synthèses universelles quand le système est affecté par des incertitudes paramétriques. La principale difficulté de la conception réside dans la nature non convexe du problème. Diverses activités de recherches ont été élaborées pour aboutir à des résultats de stabilisation de différentes classes de systèmes. Nous citons à titre de références [19], [20], [21], [22], [3], [23], [24], [5] pour les systèmes linéaires incertains, [12], [11], [14], [25], [26], [27], [28], [29], [30], pour les systèmes non linéaires ainsi que [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [20], [39], [40], pour une classe particulière de systèmes qui sont les systèmes à commutations. Ces techniques peuvent être distinguées selon le conservatisme qu'elles affichent à la résolution du problème de synthèse du contrôleur pour une classe assez large de systèmes [21], [5], [3], [26], [22]. Dans la plupart des cas, la nature non convexe des contraintes est contournée soit en faisant un choix particulier des variables [21], [26], [5], soit en ajoutant des contraintes égalités [5], [41], [42]. En outre, il existe des approches considérables dans la littérature traitant le problème de la conception de contrôleur en utilisant directement des conditions sous forme d'inégalités matricielles bilinéaires (BMI) [43], [44]. Toutefois, il est bien connu que la résolution d'une BMI est un problème NP difficile [45].

Contexte du travail

Dans le but de réduire le conservatisme des approches citées en préambule, nous avons mené des travaux de recherche sur la synthèse de la commande basée sur un observateur des systèmes incertains via l'approche des inégalités matricielles linéaires "LMI". Ce choix de l'approche LMI est motivé par le désir d'asseoir le problème de synthèse de la commande sur des bases numériques. De telles possibilités sont devenues envisageables grâce au développement d'outils numériques de résolution efficaces. L'avancée récente des outils informatiques et mathématiques basés sur les programmes d'optimisation convexe permettent de résoudre une classe importante de problèmes d'analyse et de commande des systèmes dynamiques.
Grâce à l'utilisation de la théorie de Lyapunov et d'un maniement judicieux des inégalités de Young, ainsi que quelques transformations algébriques, nous avons dérivé des conditions de stabilisation de différentes classes de systèmes, à savoir, les systèmes linéaires et non linéaires incertains à temps continu et discret, respectivement, ainsi que pour des systèmes à commutations. Ces résultats sont fournis en termes d'inégalités matricielles linéaires, sans l'ajout de contraintes égalité [5], [41], [42], ni de restriction sur le domaine des variables [21], [21], [26]. Une des contributions principales de notre travail de recherche est la généralisation des résultats de certaines approches récentes qui traitent le même problème [26], [21], [9]. Nous montrons que ces dernières peuvent être dérivées facilement en faisant un choix particulier de nos paramètres. Quant à l'application aux systèmes à commutations, la contribution principale réside dans la considération d'un mode de commutation inconnu dans le problème de synthèse. En effet, dans la plupart des références traitant le problème d'estimation ou de commande des systèmes à commutation, le mode de commutation est souvent présumé connu [20, 31–34]. Le problème est encore difficile à traîter si aucune information en temps réel n'est disponible sur le mode de commutation , comme indiqué dans [36, 37]. Dans notre cas, nous avons considéré un estimateur du mode de commutation qui permet de prédire le mode du sytème d'une longueur

d'avance, en utilisant l'état estimé du système retourné par un observateur de type de Luenberger proposé dans [38]. Enfin, après l'analyse de stabilité de Lyapunov du système augmenté, et quelques transformations algébriques, nous parvenons à dériver des conditions de stabilisation sous formes d' inégalités matricielles linéaires.

Structure du mémoire

Ce manuscrit est composé d'un chapitre introductif suivi de deux parties. La première partie de la thèse est dédiée aux résultats obtenus pour les systèmes incertains à temps continu. Cette dernière a fait l'objet de deux chapitres, à savoir le **chapitre 2** et le **chapitre 3**. Quant à la deuxième partie du manuscrit, elle est consacrée aux résultats de stabilisation obtenus pour des systèmes à temps discret à savoir les systèmes linéaires, les systèmes non linéaires et les systèmes à commutations. Dans ce qui suit, la répartition et un récapitulatif du contenu de chaque chapitre est présenté.

Chapitre 1 : ce chapitre est consacré à la présentation de quelques préliminaires utiles ainsi qu'aux rappels de quelques définitions essentielles et nécessaires pour mieux comprendre le manuscrit. En outre, il contient un état de l'art sur les différentes méthodes LMIs de synthèse de la commande basée sur un observateur des systèmes dynamiques incertains.

Chapitre 2 : ce chapitre présente des résultats de stabilisation des systèmes linéaires incertains avec des incertitudes structurées bornées en norme via un contrôleur basé sur un observateur. En se basant sur la théorie de Lyapunov et le manièment judicieux de l'inégalité de Young, une nouvelle condition suffisante exprimée sous forme d'inégalité matricielle linéaire (LMI) garantissant la stabilité asymptotique du systèmes en boucle fermée a été obtenue. L'étude a été complétée, d'une part, par une application de l'approche à un exemple réel qui permet de valider les résultats théoriques ; il s'agit de la stabilisation d'un robot à bras flexible, et d'une autre part par des comparaisons théoriques et numériques avec l'approche développée par Lien dans [5]. Ainsi, la réduction du conservatisme apportée par notre approche a été démontrée à travers les points suivants :

1. Nous avons montré analytiquement que pour une classe particulière importante de systèmes, la condition nécessaire pour la faisabilité de la LMI que nous avons obtenue est équivalente à la stabilisabilité/détectabilité du système considéré. Cependant, dans les théorèmes de Lien [5], la condition nécessaire pour la faisabilité de la LMI de Lien soumise à une contrainte égalité est plus forte que les conditions de stabilisabilité et de détectabilité du système en question.
2. Une évaluation numérique du conservatisme a été effectuée pour 50000 systèmes générés aléatoirement via la méthode de Monté Carlo dans le cas sans incertitudes. Les résultats obtenus montrent que notre condition LMI est faisable pour tous les systèmes, alors que les deux approches de Lien le sont uniquement pour 40% et 70% des systèmes, respectivement.

Chapitre 3 : ce chapitre est une extension des résultats du **chapitre 2** à une autre classe de système ; il s'agit des systèmes non linéaires avec des non linéarités Lipschitziennes et en tenant compte des performances H_∞. Cette extension au cas non linéaire Lipschitzien repose sur un théorème de reformulation de la propriété de Lipschitz présentée dans [29], qui tient compte de toutes les propriétés des non-linéarités du système. Comme conditions de synthèse LMIs assurant la stabilisation du système tout en respectant le critère de performance $\mathscr{H}_\infty$, nous avons présenté deux LMIs, la première repose sur l'approche basée sur l'inégalité de Young et la deuxième est une adaptation de l'approche contrainte égalité. Les deux approches sont validées numériquement. Des simulations de Monte Carlo sont établies pour les des approches, reflétant clairement la supériorité de notre approche par rapport à celle basée sur la contrainte égalité. Ce chapitre s'achève par une application des résultats obtenus sur l'exemple du robot à bras flexible.

Chapitre 4 : à l'instar du **chapitre 2**, Le **chapitre 4** présente des résultats de stabilisation par une commande basée sur un observateur des systèmes linéaires avec des incertitudes structurées bornées en norme. La difficulté majeure rencontrée dans ce cas réside dans la présence de deux variables dépendantes, à savoir la matrice de Lyapunov et son inverse dans l'inégalité de Lyapunov. En se basant sur l'introduction de variables additionnelles, connues dans la terminologie anglo-saxonne par "slack variables", dans l'inégalité de Lyapunov, nous avons obtenu de nouvelles conditions suffisantes exprimées en termes d'une seule LMI. Une étude comparative avec les travaux de S. Ibrir et al présentés dans [3], et [21] montre que l'approche développée dans ce chapitre est analytiquement une généralisation de celle développée par ces auteurs. De plus, la supériorité de cette approche est confirmée numériquement. Une autre étude comparative avec l'approche développée par B. Grandvallet et al. [46] est effectuée, où les auteurs ont abordé la même question en utilisant une matrice de Lyapunov diagonale dans l'analyse de la stabilité. Nous avons ainsi généralisé leur approche en utilisant une matrice de Lyapunov plus générale. Des comparaisons numériques ont été également présentées dans le but de montrer les marges d'incertitudes tolérées par notre approche et d'autres approches récentes.

Chapitre 5 : ce chapitre est une extension de l'étude faite au chapitre 4 pour tenir compte de la présence de deux contraintes complexes : les non-linéarités lipschitziennes et un bruit dans l'équation de l'état. En se basant sur l'approche LPV, le lemme de reformulation de la condition de Lipschitz dans [29] et les techniques développées dans le cas linéaire, de nouvelles méthodes de synthèse d'un contrôleur basé sur un observateur pour des classes de systèmes non-linéaires sont développées. Ainsi, de nouvelles conditions de synthèse moins contraignantes par rapport à des résultats existants dans la littérature ont été établies. La validité et la supériorité de notre nouvelle méthodologie ont été prouvées à travers des comparaisons théoriques et numériques.

Chapitre 6 : cette partie traite la stabilisation des systèmes à commutations. La question abordée dans ce chapitre consiste à construire une loi de commande basée sur un observateur. Une telle loi nécessite l'estimation à la fois de l'état du système et du mode de commutation. L'estimation de l'état du système est donnée par l'observateur de Luenberger et celle du mode de commutation est donnée par un mode d'observateur qui prédit le mode réel d'une longueur d'avance, en utilisant l'estimation de l'état actuel. Sous l'action de cette loi, et en utilisant le Lemme de Linéarisation de S. Ibrir, des conditions LMI de stabilisation de tels systèmes ont été dérivées dans le cas sans incertitudes. Des conditions suffisantes sur la bornitude quadratique des systèmes à commutation en presence d'incertitudes ont été également conçues. Le chapitre s'achève sur des simulations montrant la validité des résultats obtenus.

À la fin de ce manuscrit, quelques paragraphes sont consacrés à la conclusion et à quelques perspectives des travaux présentés.

Références personnelles

On trouvera ci-dessous la liste des publications relatives aux travaux exposés :

– **Revues internationales avec comité de lecture**

1. ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE, *F.* BEDOUHENE & *M.* BOUTAYEB, *"On LMI Conditions to Design Observer-Based Controllers for Linear Systems with Parameter Uncertainties " Automatica 49 (**12**) : 3700-3704 (2013). http ://www.journals.elsevier.com/automatica.*
2. ***H.* KHELOUFI**, *F.* BEDOUHENE, *A.* ZEMOUCHE & *A.* ALESSANDRI, *"Observer-based stabilisation of linear systems with parameter uncertainties by using enhanced LMI conditions", International Journal of Control, DOI : 10.1080/00207179.2014.999258. Taylor & Francis.*
3. ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE, *F.* BEDOUHENE & *H.* SOULEY-ALI, *" Robust H_∞ Observer- Based Stabilization Method for Systems with Uncertain Parameters and Lipschitz Nonlin- earities", (2015), Révisé pour publication dans International Journal of Robust and Nonlinear Control. www.interscience.wiley.com.*

– **Conférences internationales avec comité de lecture**

1. *A.* ALESSANDRI, *F.* BEDOUHENE, ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE,*(2013) "Output Feedback Control for Discrete-Time Linear Systems by Using Luenberger Observers under Unknown Switching" In Proceeding 52nd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 5321 - 5326) Firenze : IEEE. ISSN : 0743-1546. http ://www.scopus.com*
2. ***H.* KHELOUFI**, *F.* BEDOUHENE, *A.* ZEMOUCHE, & *A.* ALESSANDRI,*(2013) "Convex Optimization Approach to Observer-Based Stabilization of Linear Systems with Parameter Uncertainties" In Proceeding 52nd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 1125-1130). Firenze :IEEE.ISSN : 0743-1546. http ://www.scopus.com*
3. *H.* KHELOUFI, *A.* ZEMOUCHE, *F.* BEDOUHENE & *M.* BOUTAYEB, *(2013)"A New Observer-Based Stabilization Method for Linear Systems with Uncertain Parameters", In Proceeding of European Control Conference (ECC) (pp 1120 - 1125) 2013, Zürich, Switzerland. IEEE. www.ieeexplore.ieee.org*
4. *A.* ALESSANDRI, *F.* BEDOUHENE, ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE,*(2014), " Output Feedback Control for a Class of Switching Discrete-Time Linear Systems", In Proceeding 53rd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 1533 - 1539) Los Angeles, California, USA : IEEE. ISSN : 0743-1546. http ://www.scopus.com*
5. ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE, *F.* BEDOUHENE & *H.* SOULEY-ALI, *(2014) "Robust H_∞ Observer-Based Controller for Lipschitz Nonlinear Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainties". In Proceeding 53rd IEEE Conference on Decision and Control (pp. 4336 - 4341) Los Angeles, California, USA : IEEE. ISSN : 0743-1546. http ://www.scopus.com*

– **Conférences nationales avec comité de lecture**

1. ***H.* KHELOUFI**, *A.* ZEMOUCHE, *F.* BEDOUHENE & *M.* BOUTAYEB, *(2013)"On LMI condition to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties", Workshop sur la Modélisation Mathématique et Contrôle, Annaba, 2013.*

2. ***H. Kheloufi**, A. Zemouche, F. Bedouhene & M. Boutayeb, (2013)"A New Observer-Based Stabilization Method for Linear Systems with Uncertain Parameters", First International Conference on Networking and Advanced Systems, Annaba, 2013.*

Chapitre 1

Généralités et bref état de l'art sur la commande basée sur un observateur des systèmes incertains

Sommaire

1.1 Introduction 5
1.2 Analyse de la stabilité au sens de Lyapunov 6
1.2.1 Systèmes à temps continu 6
1.2.2 Systèmes à temps discret 7
1.2.3 Systèmes linéaires à commutations 8
1.3 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité 12
1.4 L'approche des inégalités matricielles linéaires 16
1.4.1 Définition et intérêts des LMIs 16
1.4.2 Aspects informatiques 18
1.4.3 Queqlues lemmes utiles 18
1.5 État de l'art sur les approches LMIs pour la stabilisation des systèmes 21
1.5.1 Stabilisation des systèmes à temps continu 22
1.5.2 Stabilisation des systèmes à temps discret 26
1.6 Conclusion 32

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de représenter quelques rappels indispensables et nécessaires pour la compréhension de ce manuscrit, et un état de l'art sur les différentes méthodes LMIs de synthèse de la commande basée sur un observateur des systèmes incertains. Dans un premier temps, un rappel sur la stabilité (au sens de Lyapunov) est donné. Nous rappelons brièvement les critères de commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité des systèmes à explorer. Nous passons ensuite à une présentation de l'approche LMIs, tout en précisant l'intérêt de son utilisation. Enfin, nous terminons ce chapitre en présentant les résultats de quelques approches récentes traitant les mêmes classes de systèmes, qui font l'objet de comparaisons dans les chapitres suivants.

1.2 Analyse de la stabilité au sens de Lyapunov

La notion de stabilité possède un large éventail de définitions dans la littérature. Dans notre cas, nous nous focaliserons sur la stabilité au sens de Lyapunov, qui constitue un outil puissant dans l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre.

1.2.1 Systèmes à temps continu

Considérons le système autonome invariant dans le temps suivant

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est une fonction Lipschitzienne et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les points d'équilibre de (1.1) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 1.2.1. *Un point d'équilibre x^* du système* (1.1) *est dit*
– ***stable*** *si* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq 0,$$

– ***asymptotiquement stable*** *si x^* est stable et s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x^*,$$

– ***globalement asymptotiquement stable*** *si x^* est stable et $\forall x(0) \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x^*.$$

– ***localement exponentiellement stable*** *s'il existe trois nombres réels positifs c, K et λ tel que*

$$\forall \|x(0) - x^*\| < c \Rightarrow \|x(t) - x^*\| \leq K\|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t},$$

– ***instable*** *s'il n'est pas stable.*

Sans perte de généralité, nous considérons dans la suite $x^* = 0$. La théorie de Lyapunov est un outil important, permettant de conclure sur la stabilité d'un point d'équilibre du système. Elle repose sur l'existence de fonctions, vérifiant certains critères, et qui représentent d'une certaine manière l'énergie du système. Ce qui suit donne plus de détails sur de telles fonctions et sur la stabilité au sens de Lyapunov. Ces résultats classiques peuvent être trouvés dans la référence [47].

Définition 1.2.2. *Une fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est dite définie positive dans une région Ω autour de l'origine si :*

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Omega - \{0\}$ (1.2)

Si (1.2) est remplacée par $V(x) \geq 0$ alors la fonction est dite semi-définie positive.

Remarque 1.2.3. *Une classe de fonction souvent utilisée pour l'analyse de stabilité des systèmes est celle des fonctions quadratiques* $V(x) = x^T Px$ *où* P *est une matrice symétrique réelle.*

Proposition 1.2.4. *Une fonction quadratique* $V(x) = x^T Px$ *est définie positive (respectivement semi-définie positive) ssi toutes les valeurs propres de la matrice* P *sont strictement positive (respectivement positive).*

Théorème 1.2.5. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *une région incluant l'origine. L'état d'équilibre* $x^* = 0$ *est*

– ***localement stable*** *s'il existe une fonction continûment dérivable* $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- V *est définie positive et* $V(0) = 0$,
- $\dfrac{dV(x)}{dt} \leq 0, \; \forall x \in \Omega - \{0\}$.

– ***localement asymptotiquement stable*** *s'il existe une fonction continûment dérivable* $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- V *est définie positive et* $V(0) = 0$,
- $\dfrac{dV(x)}{dt} < 0, \; \forall x \in \Omega - \{0\}$.

– ***globalement asymptotiquement stable*** *s'il existe une fonction continûment dérivable* $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- V *est définie positive et* $V(0) = 0$,
- $\dfrac{dV(x)}{dt} < 0, \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- $V(x) \longrightarrow \infty$, *lorsque* $\|x\| \longrightarrow \infty$.

La fonction V est appelée fonction de Lyapunov.
Dans le cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) s'écrivant

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.3}$$

l'origine est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative.

Théorème 1.2.6. *Le point d'équilibre* $x^* = 0$ *est asymptotiquement stable si et seulement si, pour toute matrice* $Q = Q^T > 0$*, il existe une matrice* $P = P^T > 0$ *vérifiant l'equation de Lyapunov*

$$A^T P + PA + Q = 0. \tag{1.4}$$

1.2.2 Systèmes à temps discret

Considérons maintenant un système non linéaire à temps discret, s'écrivant

$$x_{k+1} = f(x_k). \tag{1.5}$$

Comme dans le cas du temps continu, la théorie de Lyapunov permet encore de fournir des conditions suffisantes de stabilité dans le cas général.

Théorème 1.2.7. *L'équilibre* $x^* = 0$ *est dit*

– ***localement stable*** *s'il existe une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et un voisinage* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de l'origine tels que :*

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \Omega$ *et* $V(0) = 0$,
- $\Delta V(x_k) \leq 0, \forall x_k \in \Omega, x \neq 0$,

– ***localement asymptotiquement stable*** *s'il existe une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ *et un voisinage* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de l'origine tels que :*

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \Omega$ *et* $V(0) = 0$,
- $\Delta V(x_k) < 0, \forall x_k \in \Omega, x \neq 0$,

– ***globalement asymptotiquement stable*** *s'il existe une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ *telle que*

- $V(x_k) > 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n$ *et* $V(0) = 0$,
- $\Delta V(x_k) < 0, \forall x_k \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$,
- $V(x_k) \longrightarrow \infty$ *lorsque* $\|x_k\| \longrightarrow \infty$

avec $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k)$.

Dans le cas particulier des systèmes linéaires à temps-discret, à l'instar du cas à temps continu, la condition d'existence d'une fonction de Lyapunov s'avère être nécessaire et suffisante.
En effet, considérons le système

$$x_{k+1} = Ax_k. \tag{1.6}$$

De la même manière que pour les systèmes LTI à temps continu, le théorème suivant rappelle la stabilité asymptotique des systèmes LTI à temps discret.

Théorème 1.2.8. *Le point* $x^* = 0$ *est asymptotiquement stable si et seulement si, pour tout* $Q = Q^T > 0$*, il existe une matrice* $P = P^T > 0$ *vérifiant l'équation de Lyapunov*

$$A^T PA - P + Q = 0. \tag{1.7}$$

1.2.3 Systèmes linéaires à commutations

Un système linéaire à commutations (SLC) est un système dynamique composé d'un nombre fini de sous-systèmes et d'une loi dite de commutation permettant de gérer les commutations entre ces différents sous-systèmes. En temps continu, un système linéaire à commutations est décrit par le modèle suivant

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) \tag{1.8}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, $t \in \mathbb{R}$ le temps, $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{I}$ la loi de commutations, $A_{\sigma(t)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dynamique du système, et $\mathscr{I}$ l'ensemble des indices $\{1, \ldots, N\}$ représentant les sous-systèmes ou encore les modes du système linéaire à commutations (1.8). De même manière, en temps discret, un SLC a la forme

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) \tag{1.9}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ l'état du système, $k \in N^+$ le temps, $\sigma : N^+ \longrightarrow \mathscr{I}$ la loi de commutations, $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dynamique du système, et $\mathscr{I}$ l'ensemble des indices $\{1, \ldots, N\}$ représentant les modes du système linéaire à commutations (1.9).
L'analyse de stabilité dans le cas des systèmes linéaires à commutations est différente du cas LTI

dans la mesure où l'on observe certains phénomènes intéressants. Nous pouvons citer le cas où même si tous les modes (sous-systèmes) sont asymptotiquement stables, nous pouvons trouver une loi de commutations qui déstabilise le système (1.8) [48]. Inversement, on peut trouver une loi de commutations qui stabilise un SLC composé de sous-systèmes instables [48].
Ainsi, ces phénomènes mettent en avant le fait que la stabilité asymptotique des sous-systèmes ne suffit pas pour garantir la stabilité du système linéaire à commutations global, mais qu'il faut prendre en compte les propriétés de la loi de commutations.
Par conséquent, l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à commutations peut être divisée en deux parties :
- d'une part, trouver les conditions de stabilité du système à commutations quelques soit la loi de commutations,
- d'autre part, trouver les conditions sur la loi de commutations telle que le SLC soit stable.

Dans notre cas, nous nous focalisons sur le premier problème qui correspond au cadre du sujet de ce mémoire. Pour cette classe de systèmes, l'analyse de la stabilité est étroitement liée à celle des inclusions différentielles [49]. Nous aborderons brièvement le problème dans le cas continu, puis porterons une attention plus particulière au problème à temps discret.

Stabilité des inclusions différentielles

Considérons les inclusions différentielles linéaires décrites par

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax,\ A \in \mathscr{A}\} \tag{1.10}$$

où $\mathscr{A}$ est un ensemble compact. Un système à commutation linéaire sous la forme

$$\dot{x} = A_{\delta(t)}x(t),$$

avec $A_{\delta(t)} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$, $\forall \delta(t) \in \mathscr{I}$, peut être exprimé comme une inclusion différentielle (1.10) avec $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$.
En temps discret, le système à commutation (1.9) peut être exprimé comme l'inclusion différentielle suivante :

$$x_{k+1} \in F(x_k) = \{y_k : y_k = Ax_k,\ A \in \mathscr{A}\} \tag{1.11}$$

En fait, l'analyse de la stabilité d'une inclusion différentielle linéaire est équivalente à l'analyse de son enveloppe convexe.

Théorème 1.2.9 ([49]). *L'inclusion différentielle* (1.10) *est asymptotiquement stable si et seulement si l'inclusion différentielle convexe*

$$\dot{x} \in \{y : y = Ax, A \in co\mathscr{A}\} \tag{1.12}$$

est stable

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité, fondée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov strictement convexes, homogènes sous la forme suivante

$$V(x) = x^T \mathscr{P}(x)x > 0 \tag{1.13}$$

avec

$$\mathscr{P}(x) = \mathscr{P}^T(x) = \mathscr{P}(\tau x),\ x \neq 0,\ \tau \neq 0$$

et

$$\dot{V}^* = \sup_{y\in F(x)} \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-1}\{V(x+hy)-V(x) \leq -\gamma\|x\|^2,\ \gamma>0\}$$

est donnée dans [49]. Cette condition se traduit par un critère algébrique lorsque l'ensemble $\mathscr{A}$ est un polyèdre convexe.

Théorème 1.2.10 ([49]). *Soit l'inclusion différentielle linéaire convexe*

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax,\ A \in co\{A_1,\dots,A_M\}\} \tag{1.14}$$

L'origine $x=0$ *de l'inclusion* (1.14) *est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un nombre* $m \geq n$*, une matrice* $\mathscr{L} \in \mathscr{R}^{n\times m}$ *de rang* n *et* M *matrices*

$$\Gamma_s = \left(\gamma_{ij}^{(s)}\right)_{i,j=1}^{m} \in \mathscr{R}^{m\times m},\ \forall s=1,\dots,M,$$

à diagonale dominante négative, c'est à dire

$$\gamma_{ii}^{s} + \sum_{i\neq j}|\gamma_{ij}^{(s)}| < 0,\ \forall i=1,\dots,m,\ s=1,\dots,M,$$

tels que la relation

$$A_s^T\mathscr{L} = \mathscr{L}\Gamma_s^T,\ \forall s=1,\dots,M$$

soit vérifiée.

Un résultat analogue a été présenté dans [49] pour les inclusions différentielles à temps discret :

Théorème 1.2.11 ([49]). *L'origine* $x=0$ *de l'inclusion* (1.11) *est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un nombre* $m \geq n$*, une matrice* $\mathscr{L} \in \mathscr{R}^{n\times m}$ *de rang* n *et* q *matrices*

$$\Gamma_s = \left(\gamma_{ij}^{(s)}\right)_{i,j=1}^{m} \in \mathscr{R}^{m\times m},\ \forall s=1,\dots,q,$$

vérifiant

$$\|\Gamma\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} |\gamma_{ij}^{(s)}| < 1,\ s=1,\dots,q,$$

tels que la relation

$$A_s^T\mathscr{L} = \mathscr{L}\Gamma_s^T,\ \forall s=1,\dots,q$$

soit vérifiée.

En général, il est assez difficile de mettre en application ce résultat en raison de la difficulté à trouver la matrice $\mathscr{L}$. Plus généralement, la recherche d'une fonction de Lyapunov du type (1.13) est assez complexe.

Fonction de Lyapunov quadratique commune

D'un point de vue pratique, il est très difficile de vérifier les critères proposés par le théorème précédent. En général, la recherche numérique d'une fonction de Lyapunov du type (1.13) ou d'une matrice de transformation $\mathscr{L}$ n'est pas aisée. Cette difficulté a conduit de nombreux chercheurs à limiter leur recherche à une fonction de Lyapunov quadratique sous la forme

$$V(x) = x^T Px.$$

L'existence d'une telle fonction est une condition suffisante pour la stabilité. Cette dernière peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires [1] dont la solution peut être trouvée par des algorithmes d'optimisation convexe.

Théorème 1.2.12 ([1]). *S'il existe une matrice P symétrique définie positive vérifiant*

$$A_i^T P + PA_i < 0, \text{ pour } i = 1, \ldots, N \tag{1.15}$$

alors la fonction $V(x) = x^T Px$ *est une fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF) pour le système* (1.8). *Le système à commutation* (1.8) *est alors GAS.*

En temps discret, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.13 ([1]). *S'il existe une matrice P symétrique définie positive vérifiant*

$$A_i^T PA_i - P < 0, \text{ pour } i = 1, \ldots, N \tag{1.16}$$

alors la fonction $V(x) = x^T Px$ *est une fonction de Lyapunov quadratique commune (CQLF) pour le système* (1.9). *Le système à commutation* (1.9) *est alors GAS.*

Le système d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) (1.15) ((1.16) respectivement en temps discret) est dit faisable s'il existe une solution P, sinon on dit qu'il est infaisable. Ainsi, déterminer l'existence d'une CQLF revient à vérifier la faisabilité des LMIs (1.15) ((1.16) respectivement). Ces dernières décennies, des algorithmes d'optimisation convexe ont vu le jour, permettant de résoudre ce type de LMIs [1]. Dans [50], les auteurs ont proposé un algorithme permettant de converger vers une CQLF en un nombre de pas fini. Mais, jusqu'à présent, trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une CQLF reste un problème ouvert dans le cas général. Dans [51], les auteurs utilisèrent l'algèbre de Lie pour exprimer les conditions d'existence d'une CQLF en terme d'algèbre de Lie solvable. En dehors de ces résultats, on trouve également des critères LMI permettant de vérifier qu'une fonction de Lyapunov commune n'existe pas pour une famille de systèmes :

Théorème 1.2.14 ([1]). *S'il existe des matrices* $R_i = R_i^T, \forall i \in \mathscr{I}$ *solutions des inégalités linéaires matricielles :*

$$R_i > 0, \forall i \in \mathscr{I}, \sum_{i=1}^{N} A_i^T R_i + R_i A_i > 0$$

alors il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune pour la famille des systèmes (1.8).

Fonction de Lyapunov affine dépendante des paramètres

Nous avons énoncé les critères de stabilité basés sur une fonction de Lyapunov quadratique commune. Toutefois, dans [52], les auteurs ont démontré analytiquement que l'on peut avoir des systèmes en commutation qui sont stables et pour lesquels il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune. Ce résultat a motivé la communauté scientifique à chercher d'autre types de fonctions de Lyapunov. On retrouve dans la littérature plusieurs fonctions de Lyapunov qui peuvent être regroupées, d'une manière générale, sous le nom de *fonction de Lyapunov multiple*. Les fonctions de Lyapunov multiples désignent une famille de fonctions sous la forme

$$V(x) = x^T P(\delta, x)x$$

dont la matrice de Lyapunov peut dépendre du vecteur d'état ou de la loi de commutation. Parmi les fonctions de Lyapunov multiples, nous citons les pseudo-fonctions de Lyapunov [48] pour lesquelles les théorèmes de stabilité élaborés sont fondés sur la décroissance de la fonction de

Lyapunov aux instants successifs d'activation du même sous système. Nous citons également les fonctions de Lyapunov poly-quadratiques [53], [54], pour les systèmes à temps discret. Étant donné que tous les sous-systèmes sont asymptotiquement stables, pour tout $i \in \mathscr{I}$, ils admettent tous une fonction de Lyapunov quadratique caractérisée par une matrice définie positive P_i. L'idée est de rassembler ces matrices P_i à l'aide de la loi de commutation afin de construire une fonction de Lyapunov du type

$$V(k,x(k)) = x^T(k)P_{\delta(k)}x(k). \tag{1.17}$$

La stabilité asymptotique peut être alors vérifiée en résolvant certaines LMIs comme on peut le voir dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.15 ([53]). *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une fonction de Lyapunov de la forme* (1.17) *strictement décroissante le long des trajectoires de* (1.9).

2. *Il existe des matrices définies positives P_i, pour tout $i \in \mathscr{I}$, vérifiant les inégalités matricielles linéaires*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0, \ \forall (i,j) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}.$$

3. *I existe des matrices symétriques définies positives S_i et des matrices $G_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i G_i \\ G_i^T A_i^T & P_j - G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0 \forall (i,j) \in \mathscr{I} \times \mathscr{I}.$$

Ce résultat peut être vu comme une généralisation des CQLFs puisqu'en posant $P_i = P$ pour tout $i \in \mathscr{I}$ dans (1.17), nous obtenons une CQLF.

1.3 Commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité

Comme la suite de ce manuscrit concerne les systèmes à temps continu et à temps discret, nous utilisons la notation unifiée suivante pour décrire un système dynamique (S)

$$\sigma_x = f(x,u) \tag{1.18a}$$

$$y = h(x,u) \tag{1.18b}$$

où

$$\sigma_x(t) = \begin{cases} \dot{x}(t), t \in \mathbb{R}^+ & \textit{dans la cas temps continu} \\ x(t+1), t \in \mathbb{N} & \textit{dans le cas temps discret} \end{cases}$$

La contrôlabilité (commandabilité) est une propriété indispensable pour qu'un système puisse être commandé. Elle permet de garantir l'existence de lois de commande de façon effective.

Définition 1.3.1 (Système commandable). *Un système est dit commandable s'il est possible, en agissant sur ses commandes, de l'amener, en un temps fini, de n'importe quel état x_0 à l'instant t_0 à n'importe quel état x_1 à l'instant T, i.e.,*

$$\begin{aligned} &\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \ \exists u \in L^\infty_{loc}([0,T],\mathbb{R}^m), \exists x : [0,T] \to \mathbb{R}^n \\ &\quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) \ sur \ [0,T] \\ &\quad x(0) = x_0, \ x(T) = x_1. \end{aligned}$$

Le concept de la stabilité est fortement lié au concept de stabilisation qui consiste en l'existence d'une loi de commande pour un système donné qui pourra rendre le système en boucle fermée (asymptotiquement) stable autour d'un point d'équilibre.

Définition 1.3.2 (Système stabilisable)**.** *Soit* (x^0, u^0) *un point d'équilibre du système* (1.18). *On dit que le système est (localement) stabilisable autour de* (x^0, u^0) *s'il existe une fonction continue*

$$\gamma : \Xi_0 \to \mathscr{U}, \gamma(x_0) = u_0 \tag{1.19}$$

définie sur un certain voisinage Ξ_0 *de* x_0 *pour lequel le système en boucle fermée (à espace d'état* Ξ_0*)*

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x)) \tag{1.20}$$

est (localement) asymptotiquement stable au point d'équilibre x_0*. Si de plus,* $\Xi_0 = \mathbb{R}^n$*, on dit que le système* (1.18) *est globalement stabilisable.*

Néanmoins, il convient de rappeler que l'état du système n'est pas toujours accessible. Dans une telle situation, la stabilisation par un retour d'état devient impossible. Nous avons donc recours à un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les entrées/sorties du système principal. Ce système auxiliaire appelé observateur est chargé d'estimer l'état du système. Par conséquent, sous certaines conditions, la stabilisation du système se fait via un retour de sortie dynamique où la commande s'écrit en fonction de l'état estimé retourné par l'observateur.

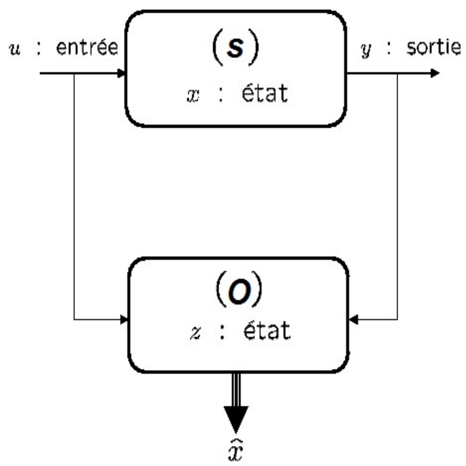


FIGURE 1.1 – Principe d'estimation d'état.

Définition 1.3.3. *Le système dynamique* $\mathscr{O}$ *décrit par les équations*

$$\sigma_z = \phi(z, u, y) \tag{1.21}$$
$$\hat{x} = \psi(z, u, y) \tag{1.22}$$

$z \in \mathbb{R}^s$ *est un observateur asymptotique locale pour le système* (S) *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

– $x(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) \forall t \geq 0$*;*

– *Il existe un voisinage ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que :*

$$\forall x(0) - \hat{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \|x(t) - \hat{x}(t)\| \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.23}$$

Si $\|x(t) - \hat{x}(t)\|$ tend exponentiellement vers zéros, le système $(\mathscr{O})$ est dit observateur exponentiel de (S).
Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$ l'observateur est dit observateur global de (S).

La structure d'observateur considérée dans la suite de cette thèse correspond à celle d'un observateur de type Luenberger.

Définition 1.3.4 (Observateur de Luenberger)**.** *Un observateur de Luenberger $\hat{x}$ de x est une solution d'un système du type*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \underbrace{f(\hat{x}, u)}_{(I)} + \underbrace{L(y(t) - \hat{y}(t))}_{(II)}, \\ \hat{y}(t) &= h(\hat{x}(t), u) \end{aligned} \tag{1.24}$$

La partie (I) est celle correspondante à la dynamique du système et la partie (II) est le correctif. Par définition d'un observateur, la matrice $L \in \mathscr{M}_{n,p}$ est telle que

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n,\ x(t) - \hat{x}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.25}$$

Avant d'entamer une procédure de conception d'observateur pour un système dynamique, il est important et nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier peut être estimé à partir des informations sur l'entrée et la sortie. L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être estimé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie. Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales.

Définition 1.3.5 (États distinguables)**.** *Deux états initiaux $x(t_0) = x_{01}$ et $x(t_0) = x_{02}$ tel que $x_{01} \neq x_{02}$ sont dits distinguables pour le système* (1.18)*, si $\forall t > t_0$, on a les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ vérifient $y_1(t) \neq y_2(t)$.*

Définition 1.3.6 (Système observable)**.** *Le système* (1.18) *est dit observable en x_0 si x_0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le système* (1.18) *est observable si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 est distinguable.*

Définition 1.3.7 (Système détectable)**.** *Un système pour lequel un observateur de la forme* (1.21) *existe et tel que la condition* (1.23) *soit satisfaite est dit détectable.*

La caractérisation de la contrôlabilité et de l'observabilité des systèmes non linéaires est un problème difficile et délicat. Il fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie du contrôle des systèmes non linéaires. En effet, l'étude de la contrôlabilité ainsi que l'observabilité conduit à des calculs lourds qui, pour être présentés de façon compacte, nécessitent la maîtrise de la géométrie différentielle et les crochets de Lie (voir [55], [56], [57] pour la caractérisation de la contrôlabilité et l'observabilité des systèmes non linéaires). Cependant, pour les systèmes linéaires décrits par les équations suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.26a}$$

$$y = Cx \tag{1.26b}$$

il existe deux critères dits de Kalman et d'Hautus donnant des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité.
Conditions : Le système linéaire (1.26a) est commandable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

– Critère de Kalman

$$rang\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n = dim(x) \tag{1.27}$$

– Critère d'Hautus

$$rang\left(\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}\right) = n = dim(x)\ \forall s \in \mathbb{C} \tag{1.28}$$

Le système (1.26) est observable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

– Critère de Kalman

$$rang\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n = dim(x) \tag{1.29}$$

– Critère d'Hautus

$$rang\left(\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n = dim(x)\ \forall s \in C \tag{1.30}$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante de stabilisation d'un système linéaire autonome en terme de commandabilité.

Théorème 1.3.8. *Si la paire (A,B) est commandable, on peut choisir une matrice K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A+BK$ dans le demi-plan gauche.*

Le théorème suivant donne une condition suffisante de commandabilité d'un système linéaire autonome en terme d'observabilité.

Théorème 1.3.9. *Si le système (A,C) est observable, alors le système* (1.26) *admet un observateur de Luenberger, i.e., on peut construire une matrice de gain L telle que $(A+LC)^T$ soit de Hurwitz.*

Ainsi, une solution du problème de stabilisation d'un système linéaire contrôlé-observé est apporté par le théorème ci-dessous :

Théorème 1.3.10. *Si le système* (1.26) *est contrôlable et observable, alors il est stabilisable par retour dynamique de sortie, i,e,. il existe des matrices $K \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que les matrices $A+BK$ et $A+LC$ soient de Hurwitz. Alors le système bouclé*

$$\dot{x} = Ax + BK\hat{x} \tag{1.31a}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \tag{1.31b}$$

est asymptotiquement stable.

Dans le cas où les critères de Kalman de commandabilité et d'observabilité ne sont pas vérifiés, les critères d'Hautus suivants donnent des conditions suffisantes pour la stabilisabilité et la détectabilité du système.

Théorème 1.3.11. *Le système* (1.26) *est stabilisable (respectivement détectable) si toutes les valeurs propres instables de A sont commandables (respectivement observables) (autrement dit, si toutes les valeurs propres non commandables (respectivement non observables) sont stables).*

Les critères d'Hautus (1.28) et (1.30) donnent les pôles commandables et observables (et donc les pôles non commandables et non observables) et sont donc efficaces pour caractériser la stabilisabilité et la détectabilité.

Théorème 1.3.12. *Le système* (1.26a) *est stabilisable si et seulement si le critère d'Hautus suivant est vérifiée*

$$rang\left(\begin{bmatrix} sI_n - A & B \end{bmatrix}\right) = n = dim(x) \ \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(s) \geq 0. \tag{1.32}$$

Théorème 1.3.13. *Le système* (1.26) *est détectable si et seulement si le critère d'Hautus suivant est vérifié*

$$rang\left(\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n = dim(x) \ \forall s \in C \text{ avec } Re(s) \geq 0. \tag{1.33}$$

Remarque 1.3.14. *Ces critères de commandabilité, observabilité, stabilisabilité et détectabilité sont valables au systèmes à temps discret à l'exception des critères* (1.32) *et* (1.33) *où nous devons remplacer* $Re(s) \geq 0$ *par* $|s| \geq 1$. *De plus, si le système* (1.34)

$$x_{k+1} = (I + \delta A)x_k + \delta B u_k \tag{1.34a}$$

$$y_k = Cx_k \tag{1.34b}$$

obtenu par une discrétisation du système (1.26) *par la méthode d'Euler avec un pas de discrétisation* δ*, est commandable (respectivement observable), donc, le système* (1.26) *est également commandable (respctivement observable). Il en est de même pour la propriété de stabilité,i.e., la stabilité du système*(1.34) *implique la stabilité du système* (1.26).

Pour plus de détails sur les différents résultats présentés dans cette section, nous renvoyons le lecteur à la référence [58]. Il y trouvera également une extension au cas des systèmes non linéaires.

1.4 L'approche des inégalités matricielles linéaires

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités. Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de Riccati basées sur des contraintes égalités. Plus récemment, les progrès effectués dans le domaine de l'optimisation convexe et l'introduction des LMIs par Yakubovich dans la commande des systèmes ont permis de franchir une nouvelle étape qui combine les possibilités mathématiques avec la puissance de calcul informatique. La référence encore incontournable en matière de LMI est l'ouvrage [1] où est fait un historique et un répertoire des nombreux problèmes faisant appel aux LMIs.

1.4.1 Définition et intérêts des LMIs

Définition 1.4.1 (Linear Matrix Inequality). *Une contrainte LMI* [1] *est une contrainte sur un vecteur réel* $x \in \mathbb{R}^m$ *de la forme*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \geq 0, \tag{1.35}$$

où les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *sont données, et le symbole d'inégalité au sens large (rep.strict) signifie que F est semi-définie (resp. définie) positive, c'est à dire que* $u^T F u \geq 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$.

1. Le terme "Linear Matrix Inequality" n'est pas cohérent avec l'expression $F(x) \geq 0$ puisque $F(x)$ n'est pas nécessairement linéaire en la variable x mais affine. Le terme d'AMI pour Inégalités Matricielles Affines semblerait plus approprié.

La contrainte LMI est équivalente à un ensemble de n contraintes inégalités polynômiales (correspondant aux mineurs principaux de $F(x)$).

Remarque 1.4.2. *Nous rencontrerons souvent des problèmes dans lesquels les variables sont des matrices, par exemple, l'inégalité de Lyapunov* (1.7). *Dans ce cas, on n'écrira pas la LMI explicitement sous la forme $F(x) > 0$, mais plutôt nous indiquerons clairement les matrices qui sont variables. L'expression "la LMI $A^T P + PA < 0$ en P" signifie que la matrice P est une variable. La condition* (1.7) *est bien évidemment une LMI par rapport aux éléments de la matrice P et peut se ramener à la forme fondamentale* (1.35) *en choisissant*

$$F_0 = 0,\ F_i = A^T P_i + P_i A,\ i = 1, \ldots, m$$

avec P_i matrice symétrique, élément de la base de cardinalité $m = n(n+1)/2$ de l'ensemble des matrices symétriques de dimension n

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ ou\ P_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Définition 1.4.3 (Bilinear Matrix Inequality)**.** *une contrainte BMI est une contrainte sur $x \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^r$ qui est de la forme*

$$F(x,y) := F_{0,0} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} x_i y_j F_{i,j} \geq 0, \tag{1.36}$$

avec $F_{0,0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $F_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Il s'agit de la généralisation de la notion de LMI. Une grande variété de problèmes d'automatique peuvent se formuler comme des BMI. Cependant, les BMI ne sont pas convexes, ce qui génére des difficultés dans leur résolution.
L'intérêt des LMIs est résumé dans les quatre points décrits ci-dessous.

1. *Convexité* : La LMI (1.35) définit une contrainte convexe en x. En effet, $\forall\{x,y\} \in \mathbb{E}, \mathbb{E} := \{x|F(x) > 0\}$, alors
$$F(\alpha x + (1-\alpha y)) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha F(y))\ \forall \alpha \in]0,1[, \tag{1.37}$$
où $F(x)$ est donnée par (1.35).
2. *Concaténation* : Des LMIs multiples peuvent se ramener en une seule. En effet,résoudre les deux LMIs $F_1(x) > 0$ et $F_2(x) > 0$ est équivalent à résoudre $\bar{F}(x) > 0$ avec $\bar{F} = diag(F_1, F_2)$.
3. *Algorithmes* : Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes LMI sont efficaces : une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme, cette convergence étant à temps polynômial. Actuellement, les principales classes d'algorithmes sont basées sur les méthodes des points intérieurs [59].
4. *Applications* :De nombreuses conditions classiques en automatique peuvent se formuler sous la forme de problème LMI. De plus, il est possible de convertir certaines inégalités non linéaires (notamment de Riccati) en LMI par l'utilisation de lemme de Schur.

1.4.2 Aspects informatiques

Cette sous-section permet de clarifier certaines notions qui apparaîtront dans certains chapitres, notamment lorsqu'il sera question d'aspects logiciels. Nous allons énoncer brièvement les différents concepts utiles.

Définition 1.4.4 (Temps polynômial). *Un problème est dit résolvable en temps polynômial lorsqu'il existe un algorithme de résolution dont le temps de calcul requis est une fonction polynômiale de la taille* [2] *du problème.*

Définition 1.4.5 (NP-difficile). *Un problème est dit NP-difficile lorsque le temps de calcul requis est une fonction du types* a^n *avec* $a > 1$ *et* n *la taille du problème.*

Un problème du type BMI est un exemple de problème NP-difficile tandis qu'un problème LMI ne l'est pas car il est résolvable en temps polynômial. Toutefois, un grand nombre de problèmes en automatique sont par nature de type BMI. Pour les résoudre, on doit donc se ramener à une formulation de type LMI, ce qui introduit un *conservatisme*.

Définition 1.4.6 (Conservatisme). *Une condition (ou une contrainte) est dite conservative lorsqu'elle est trop contraignante par rapport au problème considéré.*

Le dilemme entre complexité et conservatisme intervient constamment et influence les choix (autant théoriques que pratiques) effectués dans la résolution d'un problème. En effet, afin d'obtenir une synthèse de correcteur la moins conservative possible, on augmente le nombre de spécifications du problème. Le problème peut devenir NP-difficile. Pour le résoudre, c'est-à-dire diminuer la complexité de ce problème, on est amené soit à approximer, soit à supprimer certaines des spécifications. Par conséquent, on augmente le conservatisme des solutions obtenues.

1.4.3 Queqlues lemmes utiles

Dans ce qui suit, nous collectons quelques inégalités mathématiques et lemmes utiles qui ont été largement utilisés dans le manuscrit. Rappelons tout d'abord le "complément de Schur" qui permet de transformer certaines inégalités matricielles non linéaires en LMI.

Lemme 1.4.7 (Complément de Schur). *Soit* Q_1, Q_2 *et* Q_3 *trois matrices de dimensions appropriées telles que* $Q_1 = Q_1^T$ *et* $Q_3 = Q_3^T$. *Alors,*

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{1.38}$$

si et seulement si

$$Q_3 < 0, \textit{ et } Q_1 - Q_2 Q_3^{-1} Q_2^T < 0$$

ou de manière équivalente

$$Q_1 < 0, \textit{ et } Q_3 - Q_2^T Q_1^{-1} Q_2 < 0$$

Une des idées maîtresse que nous avons adopté dans la linéarisation des termes bilinéaires consiste à l'application des inégalités de Young décrites dans le lemme suivant.

2. La taille d'un problème est en général définie comme le nombre de variables mis en jeu dans la résolution du problème.

Lemme 1.4.8 (Inégalité de Young)**.** *Soit X et Y deux matrices de dimensions appropriées, nous avons pour toute matrice inversible S et scalaire $\varepsilon > 0$,*

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T S X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T S^{-1} Y. \tag{1.39}$$

Le lemme S-procédure permet de lier un ensemble de contrainte LMIs afin de déduire la faisabilité d'une contrainte LMI à partir des autres.

Lemme 1.4.9 (S procédure)**.** *Soit $T_0, \ldots, T_p$ des matrices symétriques dans $\mathbb{R}^{n\times n}$. Nous considérons les conditions suivantes sur $T_0, \ldots, T_p$:*

$$\zeta^T T_0 \zeta > 0 \, \forall \zeta \neq 0 \text{ tels que } \zeta^T T_i \zeta \geq 0, \; i = 1, \ldots, p. \tag{1.40}$$

Il est evident que si

$$\text{il existe } \tau_1 \geq 0, \ldots, \tau_p \geq 0, \text{tels que } T_0 - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0 \tag{1.41}$$

alors, l'inégalité (1.40) *est vérifiée.*

Un des obstacles les plus répandus dans la synthèse des conditions de stabilisation est la coexistence de variables dépendantes telles qu'une variable et son inverse. Ibrir a proposé dans son article [9] une formule de linéarisation permettant de remédier à ce problème.

Lemme 1.4.10 (Linéarisation de Ibrir)**.** *Soient X, Y, Z trois matrices de dimensions appropriées $X = X^\top > 0$ et $Z = Z^\top > 0$. Alors, l'inégalité* (1.42)

$$\begin{bmatrix} -X & Y^\top \\ Y & -Z^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.42}$$

est satisfaite s'il existe $\alpha > 0$ tel que la LMI suivante est faisable :

$$\begin{bmatrix} -X & \alpha Y^\top & 0 \\ \alpha Y & -2\alpha I & Z \\ 0 & Z & -Z \end{bmatrix} < 0. \tag{1.43}$$

Nous disposons d'une formule plus générale dans les travaux de De Oliveira et al. [60].

Lemme 1.4.11 (Lemme De Oliveira et al.)**.** *Les deux conditions suivantes sont équivalents :*

1. *Il existe une matrice symétrique $P > 0$ telle que*

$$A^T P A - P < 0. \tag{1.44}$$

2. *Il existe une matrice symétrique P et une matrice G telles que*

$$\begin{bmatrix} P & A^T G^T \\ GA & G + G^T - P \end{bmatrix} > 0. \tag{1.45}$$

Ce lemme représente une extension de la condition de Lyapunov standard de stabilité des systèmes linéaires discret à temps invariant. En effet, l'utilisation de ce lemme dans les problèmes de la synthèse de la commande avait permis de réduire le conservatisme des méthodes basées sur la condition de stabilité standard [61] vu qu'il permet la conception des matrices de gains indépendamment de la matrice de Lyapunov. Ceci réduit le nombre de contraintes auxquelles la

matrices de Lyapunov est soumise.
Dans le contexte des systèmes non linéaires à temps continu, un récent travail assez intéressant est présenté par Zemouche et Boutayeb [29] lorsque les non linéarités sont Lipschitziennes. Il ont fourni un outil puissant permettant de traiter les non linéarités du système comme étant des paramètres LPV. Il s'agit de la reformulation de la condition de Lipschitz. Cette reformulation permet de prendre en considération toutes les propriétés des non linéarités du système. Avant de présenter le lemme, nous introduisons une définition nécessaire à la compréhension du lemme qui suit.

Définition 1.4.12. *Considérons les deux vecteurs suivants :*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; et \; Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $i = 0, \dots, n$, on définit le vecteur auxilliaire $X^{Y_i} \in \mathbb{R}^n$ associé à X et Y tel que :

$$\begin{cases} X^{Y_i} = & \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_i \\ x_{i+1} \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \; pour \;\; i = 1, \dots, n \\ X^{Y_0} = & X. \end{cases}$$

Le lemme suivant donne une reformulation de la propriété de Lipschitz permettant de traiter les non linéarités d'un système comme des paramètres LPV.

Lemme 1.4.13 ([29]). *Pour toute fonction $\phi : \; R^n \longrightarrow \; R^n$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

– ***Propriété de Lipschitz :***
  ϕ est γ_ϕ-Lipschitz, i.e. $\|\phi(X) - \phi(Y)\| \leq \gamma_\phi \|X - Y\| \; \forall X, \; Y \in \mathbb{R}^n$.
– ***Reformulation de la propriété de Lipschitz :***
  pour tout $i, \; j = 1, \dots, n$ il existe des fonctions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et des constantes $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ et $\overline{\gamma}_{\phi_{ij}}$ telles que $\forall$ X,Y$\in \mathbb{R}^n$,

$$\phi(X) - \phi(Y) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \phi_{ij} H_{ij}(X - Y) \tag{1.46}$$

et

$$\underline{\gamma}_{\phi_{ij}} \leq \phi_{ij} \leq \overline{\gamma}_{\phi_{ij}} \tag{1.47}$$

où

$$\phi_{ij} \triangleq \phi(X^{Y_{j-1}}, X^{Y_j}) \;\; et \; H_{ij} = e_n(i) e_n^T(j).$$

L'utilisation du lemme ci dessus dans le contrôle des systèmes non linéaires Lipschitziens a joué un rôle très important dans la réduction du conservatisme, dans le sens où, les conditions suffisantes de stabilisation obtenues tolèrent des constantes de Lipschitz beaucoup plus importantes que celles obtenues via l'utilisation de la propriété de Lipschitz classique.

1.5 État de l'art sur les approches LMIs pour la stabilisation des systèmes

La préoccupation première dans la théorie de la commande, a toujours été la stabilité qui fut introduite par Routh et Hurwitz dès le $19^{ème}$ siècle, puis explorée en détail par Lyapunov dont les travaux sont toujours utilisés de nos jours. Outre la stabilité, un système asservi se doit de satisfaire divers objectifs de performance tel que la robustesse vis-à-vis des incertitudes qui peuvent affecter le système. En effet, selon le type d'informations disponibles à priori, nous pouvons distinguer deux types d'incertitudes :

– *Les incertitudes paramétriques* : provenant des erreurs de modélisation ou de mesure, et dépendantes d'un paramètre, et dont le modèle mathématique est bien défini. De plus, selon le mode de variation du paramètre, nous pouvons distinguer

  1. Des incertitudes polytopiques où les paramètres variants sont supposés appartenir à des intervalles ou des ensembles convexes, de façon à ce que les matrices d'incertitudes s'écrivent sous la forme de combinaisons convexes de plusieurs matrices.

  2. Des incertitudes structurées en normes bornées où nous nous disposons pas d'informations sur le domaine des paramètres variants, mais, les matrices contenant le paramètre incertains sont soumises à des contraintes de bornitudes en norme.

– *Les incertitudes non structurées* : il s'agit des fonctions de Lebesgue mesurables, où seules les amplitudes possibles des incertitudes sont présumées connues. Notons que l'objectif ciblé en cas de présence de ce genre de perturbations l_2 bornées, consiste à optimiser la réponse du système face à l'effet d'un signal d'entrée déstabilisant. Par conséquent, nous obtenons les critères de robustesse $\mathscr{H}_2$ et $\mathscr{H}_\infty$. En effet, la norme $\mathscr{H}_\infty$ ou le gain $\mathscr{L}_2$ est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée. Autrement dit, cette norme privilégie la pulsation pour laquelle le gain est maximal. Si l'on cherche à minimiser une telle norme, cela signifie que l'on s'intéresse à la fréquence la plus défavorable. L'effort de minimisation porte donc sur cette fréquence "la pire" et le niveau de performance qui en découle est ensuite a fortiori garanti pour les autres fréquences. Il en est tout autrement pour la norme $\mathscr{H}_2$. Elle ne privilégie aucune fréquence mais traduit plutôt une énergie des sorties répartie sur toutes les fréquences. La minimiser signifie porter l'effort de minimisation sur l'ensemble des fréquences.
  En effet, la norme $\mathscr{H}_\infty$ n'est autre que la norme $\|.\|_\infty$ de la matrice de transfert G. Si l'on connaît l'expression de la valeur singulière maximale de la matrice de transfert, on a donc

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega \|G(i\omega)\|_2 = \sup_\omega \overline{\sigma}(G(i\omega)). \tag{1.48}$$

  Pour les cas pratiques rencontrés en automatique, si l'on suppose que les signaux sont à énergies finies (i.e. sont donc dans $\mathscr{L}^2$). Ainsi, si l'on suppose que Z est l'image de w par un opérateur $\mathscr{R}$, alors on peut définir le gain $\mathscr{L}^2$ de $\mathscr{R}$ par

$$\mathscr{G}_{\mathscr{L}^2}(\mathscr{R}) = \sup_{w\in\mathscr{L}^2} \frac{\|Z\|_2}{\|w\|_2} \tag{1.49}$$

où

$$\begin{aligned} \|X\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{i}\omega)^* X(\mathrm{i}\omega) d\omega\right)^{1/2} && (1.50)\\ &= \left(\int_0^{\infty} x(t)^* x(t) dt\right)^{1/2} && (1.51)\\ &= \left(\int_0^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt\right)^{1/2} && (1.52)\\ & && (1.53)\end{aligned}$$

Le gain $\mathscr{G}_{\mathscr{L}^2}(\mathscr{R})$ est en fait le plus grand gain en énergie associé à l'opérateur $\mathscr{R}$. La norme $\mathscr{H}_\infty$ d'une matrice de transfert correspond donc au gain $\mathscr{L}_2$ du système. Le problème général de la commande $\mathscr{H}_\infty$, s'énonce alors comme suit :
À un niveau de performance γ garanti pour la norme $\mathscr{H}_\infty$, le problème de commande $\mathscr{H}_\infty$ correspond à déterminer une commande stabilisante sous la contrainte d'optimalité $\mathscr{H}_\infty$ de niveau $\gamma : \|G\|_\infty < \gamma$.

Parmi les travaux pionniers qui ont intégré les modèles incertains dans le problème de la commande basée sur un observateur, nous citons [62], où des conditions suffisantes d'existence d'une fonction de Lyapunov permettant l'utilisation du principe de séparation ont été dérivées. Ainsi, un contrôle non linéaire a été proposé avec une structure fixée à priori pour la stabilisation des systèmes considérés. Dans la référence [63], les auteurs ont proposé pour la stabilisation d'un système linéaire incertain un contrôle composé d'un terme linéaire qui sert à la stabilisation du système nominal, plus un terme non linéaire pour faire face aux incertitudes. L'existence d'un tel contrôleur requiert certaines contraintes de rang des matrices de gain de l'observateur. Plus tard, dans la référence [30], des incertitudes structurées bornées en norme ont été considérés dans le problème de stabilization où les conditions de stabilisation sont exprimées par des équations de Riccati. À présent, il existe un véritable arsenal de méthodes, basées sur les mêmes principes fondamentaux, mais dont les caractéristiques individuelles peuvent varier assez fortement. Notons que notre objectif n'est pas de fournir une liste exhaustive de toutes les approches qui ont été proposées à ce jour, mais, plutôt de présenter les principaux résultats qui feront l'objet de comparaisons dans les chapitres suivants tout en mettant en évidence les idées sous-jacentes.

1.5.1 Stabilisation des systèmes à temps continu

Concernant les systèmes à temps continu, nous disposons d'un aperçu des résultats les plus significatifs de la théorie de la commande robuste des systèmes incertains dans [64], où un historique des méthodes introductives à la commande des systèmes incertains a été brièvement rappelé. Les auteurs ont exposé des approches deterministes, d'autres probabilistes traitant la commande robuste tout en classifiant les incertitudes sous leur diverses formes (structurées et non structurées). Dans cette section, nous présenterons uniquement les méthodes LMI utiles pour la compréhension des contributions apportées dans ce manuscrit.

Stabilisation des systèmes linéaires incertains

La motivation principale de notre étude des systèmes linéaires incertains à temps continu fut le travail publié par Lien dans [5], où l'auteur a considéré les systèmes linéaires incertains décrits par les équations suivantes :

$$\dot{x} = \Big(A + \Delta A(t)\Big)x + Bu \tag{1.54a}$$

$$y = \Big(C + \Delta C(t)\Big)x + Du \tag{1.54b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande. A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.
Les paramètres du système (1.54) sont soumis aux hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.5.1. – *Les paires (A,B) et (A,C) sont respectivement stabilisable et détectable ;*
– *Il existe des matrices $M_A, N_A, F_A(t), M_C, N_C, F_C(t)$, de dimensions appropriées telles que :*

$$\Delta A(t) = M_A F_A(t) N_A, \quad \Delta C(t) = M_C F_C(t) N_C \tag{1.55}$$

où les matrices inconnues $F_A(t), F_C(t)$ vérifient la condition suivante.

$$F_A^T(t) F_A(t) \leq I, \quad F_C^T(t) F_C(t) \leq I. \tag{1.56}$$

Pour stabiliser le système (1.54), L'auteur a fait appel à une commande basée sur un observateur du type (1.57) :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\Big(y - C\hat{x} - Du\Big) \tag{1.57a}$$

$$u = -K\hat{x} \tag{1.57b}$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est l'état estimé de x, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est le gain associé au contrôleur, $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ est le gain de l'observateur. Ainsi, la stabilisation du système (1.54) via la commande basée sur l'observateur (1.57) se ramène à l'étude de la stabilité asymptotique du système augmenté ci dessous

$$\dot{\overbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} \Big(A - BK + \Delta A(t)\Big) & BK \\ \Big(\Delta A(t) - L\Delta C(t)\Big) & \Big(A - LC\Big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

où $\varepsilon = x - \hat{x}$ représente l'erreur d'estimation de l'état du système. L'application du Théorème 1.2.5 au système augmenté (1.58), avec comme fonction de Lyapunov candidate $v(\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}) = x^T P x + \varepsilon^T R \varepsilon$ conduit à la condition de stabilisation suivante :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.59}$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{11} = &\left[\Big(A - BK\Big)^T P + P\Big(A - BK\Big)\right] \\ &+ \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) N_A^T N_A + \varepsilon_3 N_C^T N_C + \frac{1}{\varepsilon_1} P M_A M_A^T P\right] \end{aligned} \tag{1.60}$$

$$\begin{aligned} \sum_{22} = &\left[\Big(A - LC\Big)^T R + R\Big(A - LC\Big)\right] \\ &+ \left[\frac{1}{\varepsilon_2} R M_A M_A^T R + \frac{1}{\varepsilon_3} R L M_C M_C^T L^T R\right] \end{aligned} \tag{1.61}$$

et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ des scalaires positifs réels. Notons que la présence du terme PBK fait de l'inégalité (1.59) une BMI. Afin de contourner cet obstacle, Lien a imposé un choix particulier de la matrice P, qui est $P = I$. Finalement, l'utilisation du lemme de Schur permet de linéariser la BMI (1.59) et d'aboutir à la condition LMI ci dessous.

Théorème 1.5.2 ([5]). *Le système* (1.54a)*est asymptotiquement stabilisable via le control* (1.57) *s'il existe des constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, une matrice $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie positive, deux matrices $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} X_{11} & BK & M_A & 0 & 0 \\ (\star) & X_{22} & 0 & RM_A & \hat{L}M_C \\ (\star) & (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.62}$$

où

$$X_{11} = A^T + A - K^T B^T - BK + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) N_A^T N_A + \varepsilon_3 N_C^T N_C$$
$$X_{22} = A^T R + RA - \hat{L}C - C^T \hat{L}^T.$$

Les matrices de gain sont données par K et $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}$.

Tentant de réduire le conservatisme lié au choix particulier de la matrice P, Lien s'est inspiré de [19] pour proposer une approche alternative où il a introduit une nouvelle variable $\hat{P}$ qui se doit de satisfaire la contrainte égalité $PB = B\hat{P}$. Il suffit alors d'un simple changement de variable $\hat{K} = PK$ pour contourner le problème du terme bilinéaire PBK, qui devient $PBK = BPK = B\hat{K}$, qui est linéaire par rapport à la nouvelle variable $\hat{K}$. Cette approche alternative a donné lieu à la condition de stabilisation formulée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.5.3 ([5]). *Le système* (1.54a) *est asymptotiquement stabilisable via la commande* (1.57) *s'il existe des constantes positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, deux matrices définie positives $P, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & B\hat{K} & PM_A & 0 & 0 \\ (\star) & Y_{22} & 0 & RM_A & \hat{L}M_C \\ (\star) & (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.63}$$

$$PB = B\hat{P} \tag{1.64}$$

où

$$Y_{11} = A^T P + PA - \hat{K}^T B^T - B\hat{K} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) N_A^T N_A + \varepsilon_3 N_C^T N_C$$
$$Y_{22} = A^T R + RA - \hat{L}C - C^T \hat{L}^T.$$

Les matrices de gain de la commande et de l'observateur sont données respectivement par $K = \hat{P}^{-1}\hat{K}$ et $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}$.

Malgré que le Théorème 1.5.3 fournit une condition de synthèse moins restrictive que celle du Théorème 1.5.2, elle reste conservative en raison de la présence de la contrainte égalité (1.64). En effet, l'ajout de cette contrainte égalité exclut une des caractéristiques les plus avantageuse de l'utilisation des LMI qui est la résolution efficace par les solveurs numériques. En effet, on trouve dans les travaux de Daniel, W.C. Ho & Guoping, Lu [65] un résultat qui permet de clarifier cette difficulté. Grâce à la décomposition en valeur singulière de la matrice B , l'équation matricielle (1.64) se réécrit comme suit :

$$P\overbrace{U\begin{bmatrix}B_0\\0\end{bmatrix}V}^{B} = \overbrace{U\begin{bmatrix}B_0\\0\end{bmatrix}V}^{B}\hat{P}, \tag{1.65}$$

ou bien

$$U^TPU\begin{bmatrix}B_0\\0\end{bmatrix}V = \begin{bmatrix}B_0V\hat{P}\\0\end{bmatrix}. \tag{1.66}$$

Supposons que la matrice P s'écrit comme suit :

$$P = U\begin{bmatrix}P_1 & P_{12}\\P_{12}^T & P_2\end{bmatrix}U^T$$

avec $P_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$. L'équation (1.66) est alors équivalente à la suivante

$$\begin{bmatrix}P_1B_0V\\P_{12}^TB_0V\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_0V\hat{P}\\0\end{bmatrix}. \tag{1.67}$$

Cette dernière est solvable si et seulement si $P_{12}^TB_0V = 0$, i.e., $P_{12} = 0$. Cette technique de décomposition en valeurs singulières permet d'obtenir une LMI (non soumise à une contrainte égalité) avec une structure particulière de la matrice P. L'application de cette approche de décomposition en valeurs singulières au résultat de Lien (Théorème (1.5.3)), permet d'aboutir au théorème suivant (qui n'est autre qu'une reformulation équivalente du Théorème 1.5.3) :

Théorème 1.5.4. *Le système* (1.54a) *est asymptotiquement stabilisable via la commande* (1.57) *s'il existe des constantes positives $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$, deux matrices définie positives $P,R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, telles que*

$$\begin{bmatrix}Y_{11} & B\hat{K} & PM_A & 0 & 0\\(\star) & Y_{22} & 0 & RM_A & \hat{L}M_C\\(\star) & (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0\\(\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0\\(\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I\end{bmatrix} < 0 \tag{1.68}$$

avec

$$P = U\begin{bmatrix}P_1 & 0\\0 & P_2\end{bmatrix}U^T$$

La matrice $\hat{P}$ prend ainsi la forme suivante

$$\hat{P} = VB_0P_1B_0^{-1}V^{-1}$$

où les matrices $U \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B_0 \in \mathbb{R}^{m,m}$ et $V \in \mathbb{R}^{m,m}$ sont connues et proviennent de la décomposition en valeurs singulière de la matrice B. Les termes Y_{11},Y_{22} sont ceux définis dans (1.5.3). *Les matrices de gain de la commande et de l'observateur sont données respectivement par $K = \hat{P}^{-1}\hat{K}$ et $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}$.*

Néanmoins, L'implantation de la LMI (1.68) ne garantit pas la validité de la contrainte égalité (1.64). Ceci est dû au fait que la décomposition en valeurs singulières retournée par les solveurs numériques n'est pas toujours exacte. Ce qui fait que la contrainte n'est souvent pas atteinte avec un ordre de précision suffisant.

Outre la méthode de Lien, il existe d'autres approches traitant la stabilisation des systèmes linéaires incertains à temps continu, avec d'autres types d'incertitudes et d'autres structures d'observateurs. Nous citons à titre de référence [66], où les auteurs ont proposé un contrôleur basé sur un observateur robuste d'ordre réduit dont la conception passe par deux étapes. Dans un premier temps, les auteurs proposèrent un contrôleur par retour d'état vérifiant le critère de performance $\mathscr{H}_\infty$, qu'ils utilisèrent par la suite pour faire converger l'erreur d'estimation du système vers zéro. Enfin, sous une contrainte égalité, les auteurs dérivèrent une condition LMI pour la synthèse des matrices des gains de l'observateur. Notons, que l'observateur considéré est un observateur générale pour lequel l'analyse de la stabilité se fait plus aisément. En effet, les termes bilinéaires provenant des couplages entre la matrice de Lyapunov et les matrices des gains peuvent être linéarisés directement par des techniques de congruence et des changements de variables qui deviennent bijectifs grâce à la multiplicité des matrices des gains. D'autres méthodes utilisent les LMIs itératives pour contourner le problème des BMIs [67], [68], où le principe consiste à fixer une variable de sorte à ce que l'inégalité devienne affine par rapport à la deuxième variable de la BMI, puis résoudre la LMI, en actualisant à chaque itération la valeur de la variable fixée à priori. Néanmoins, ces méthodes s'avèrent peu efficaces vu que l'on a aucune garantie sur la convergence des itérations.

1.5.2 Stabilisation des systèmes à temps discret

La stabilisation des systèmes à temps discret est un sujet qui a fortement suscité et motivé l'intérêt de la communauté automaticienne [69], [22], [60], [20], [3], [21], [46], [25]. Une variété de conditions de stabilisation ont été établies pour différentes classes de systèmes.

Stabilisation des systèmes linéaires incertains

Considérons à présent la classe des systèmes linéaires incertains décrites par les équations suivantes :

$$x_{k+1} = (A + \Delta A(k))\,x_k + Bu_k \tag{1.69a}$$
$$y_k = (C + \Delta C(k))\,x_k \tag{1.69b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande. A, B, C sont des matrices réelles de dimensions appropriées. Les hypothèses 1.5.1 sont supposées vérifiées.Pour la commande basée sur un observateur, nous considérons que les approches utilisant l'observateur de Luenberger suivant :

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \tag{1.70}$$

où $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est la matrice de gain de l'observateur, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ est l'état estimé de x_k à l'instant k. Soit $e_k := x_k - \hat{x}_k$ l'erreur d'estimation. Alors, sous l'action de la commande

$$u_k = -K\hat{x}_k \tag{1.71}$$

le système augmenté s'écrit comme suit

$$z_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK + \Delta A & BK \\ \Delta A - L\Delta C & A - LC \end{bmatrix}}_{\Pi} z_k \tag{1.72}$$

où $z_k^T = (x_k^T, e_k^T) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est le gain de la commande.
L'objectif consiste à déterminer les matrices K et L assurant la stabilité asymptotique du système augmenté (1.72). Pour cela, il convient de choisir une fonction de Lyapunov quadratique $V(z_k)$ qui vérifie :

$$\Delta V_k = z_k^T(\Pi^T P\Pi - P)z_k < 0, \forall z_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.73}$$

Cette dernière est vérifiée si et seulement si

$$\Pi^T P\Pi - P < 0. \tag{1.74}$$

Il est clair que le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(z_k) = z_k^T P z_k$, avec une matrice de Lyapunov P non diagonale, conduit à plusieurs termes bilinéaires provenant des couplages entre les matrices de gain et la matrice de Lyapunov. Grâce à l'application du lemme 1.4.10, Ibrir a pu éviter ces termes bilinéaires dans la stabilisation d'un système linéaire à temps continu (1.54) discrétisé par la méthode d'Euler (1.75) avec un pas de discrétisation noté δ. Le système discrétisé s'exprime donc sous la forme suivante :

$$x_{k+1} = (I + \delta(A + \Delta A(k)))x_k + \delta B u_k \tag{1.75a}$$
$$y_k = (C + \Delta C(k))x_k \tag{1.75b}$$

La commande basée sur un observateur considérée est la suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = (I + \delta(A + \Delta A(k)))\hat{x}_k + \delta B u_k + \delta L(C\hat{x} - y_k) \tag{1.76a}$$
$$u_k = K\hat{x}_k. \tag{1.76b}$$

En effet, l'application du lemme de linéarisation 1.4.10 sur l'inégalité (1.74) a permis de dériver une condition LMI en faisant quelques changements de variables pour aboutir à la condition LMI formulée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.5.5. *[21] Soit δ_{max} le pas de discrétisation maximal. Si pour un δ_{max} fixé, il existe une matrices définie positive $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, deux matrices $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ des constantes positives $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ telles que la LMI suivante soit feasable*

$$(C1) \begin{bmatrix} -\delta_{max}^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2\alpha & \beta \\ 0 & \beta & -1 \end{bmatrix} < 0, \tag{1.77}$$

$$(C2) \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \star & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \tag{1.78}$$

$$(C3) \begin{bmatrix} \mathbb{W}_{11} & -P_{12} & \alpha I + \beta A^T + \tilde{K}^T B^T & 0 & \beta N_A^T & \beta N_A^T & 0 \\ (\star) & -P_{22} & \tilde{K}^T B^T & \alpha I + \beta A^T + C^T \tilde{L}^T & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \mathbb{W}_{33} & P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{W}_{44} & 0 & 0 & \tilde{L}M_C \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{1.79}$$

où

$$\mathbb{W}_{11} = -P_{11} + \varepsilon_3 N_C^T N_C,$$
$$\mathbb{W}_{33} = -2\alpha I + P_{11} + \varepsilon_1 M_A M_A^T,$$
$$\mathbb{W}_{44} = -2\alpha I + P_{22} + \varepsilon_2 M_A M_A^T,$$

Alors le système (1.76a) *est asymptotiquement stabilisable par le contrôle basé sur un observateur* (1.76) *pour tout* $\delta \leq \delta_{max}$.

Il obtient ainsi un résultat élégant, mais, d'une applicabilité limitée à cause du choix particulier des paramètres de linéarisation (variables scalaires) et aussi de la dépendance implicite de la LMI du pas de discrétisation δ qui se doit de satisfaire la contrainte (C1).
Une autre issue permettant de réduire le nombre de bilinéarités est l'utilisation des matrices de Lyapunov diagonales ou particulière [46], [22]. Tel est le cas dans [3], où les auteurs ont considéré une fonction de Lyapunov avec matrice de Lyapunov diagonale dans l'analyse de stabilité. L'approche proposée est une approche de séparation permettant la synthèse des matrices de gains du contrôleur et de l'observateur séparément. La technique utilise plusieurs transformations par le lemme de Schur et une application du lemme de linéarisation 1.4.10, pour aboutir à une inégalité qui a une structure une structure diagonale équivalente aux deux conditions LMIs formulées dans le théorème suivant.

Théorème 1.5.6 ([3]). *S'il existe deux matrices définies positives* $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, deux matrices réelles* $Y_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}, Y_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$*, des constantes positives* $\alpha, \beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *telles que les conditions LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} P_1 & I \\ \star & (2\beta-\alpha)I \end{bmatrix} > 0, \tag{1.80}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1+\varepsilon_3 M_A M_A^T & AP_1+BY_1 & BY_1 & 0 & 0 & 0 \\ \star & -P_1 & 0 & P_1N_A^T & P_1N_C^T & P_1N_A^T \\ \star & \star & -\alpha I & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -\varepsilon_2 I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0, \tag{1.81}$$

$$\begin{bmatrix} -P_2 & A^TP_2+C^TY_2^T & \beta I & 0 & 0 \\ \star & -P_2 & 0 & P_2M_A & Y_2M_C \\ \star & \star & -P_1 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -(2-\varepsilon_2)I & 0 \\ \star & \star & \star & \star & -(2-\varepsilon_3)I \end{bmatrix} < 0, \tag{1.82}$$

alors, il existe deux matrices de gain $L = P_2^{-1}Y$ *et* $K = Y_1P_1^{-1}$ *telles que le système* (1.69) *soit asymptotiquement stabilisable par la commande basée sur un observateur* (1.70).

Malgré les avantages de cette approche qui peuvent se résumer par l'absence des contraintes égalités, ainsi que d'autres contraintes sur les matrices d'état, reste conservative à cause de la contrainte (1.80) sur la matrice P_1. En effet, la condition nécessaire pour la faisabilité de la LMI (1.81) est

$$P_1 > \varepsilon_3 M_A M_A^T,$$

d'où

$$P_1 > \max\{\varepsilon M_A M_A^T, \frac{1}{2\beta-\alpha}I\}.$$

Une telle condition influe sur l'efficacité de la méthode dans le sens où elle réduit l'applicabilité de l'approche à des classes importantes des systèmes ($\twoheadrightarrow$ chapitre 3).

Il existe d'autres approches traitant la stabilisation des systèmes linéaires incertains à temps discret avec d'autres types d'incertitudes telles que les incertitudes de type LPV [20, 22] où le système est régit par l'équation suivante

$$x_{k+1} = A(\theta)x_k + B(\theta)u_k \tag{1.83a}$$
$$y_k = C(\theta)x_k \tag{1.83b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $u \in \mathbb{R}^m$ est la commande. $A(\theta), B(\theta), C(\theta)$ sont supposées appartenant à des polytopes convexes avec un nombre fini de sommets. En effet, les résultats liés à ce type d'incertitudes sont généralement obtenus sous certaines contraintes additionnelles telle que la dépendance affine des paramètres variants, ainsi que d'autres arguments de convexité [70], [71], [72], [69]. L. Jetto et V. Orsini ont développé dans [22] une nouvelle approche permettant d'éviter ces contraintes additionnelles et de réduire le nombre des LMI à résoudre de façon à ce qu'elles ne dépendent pas du nombre de paramètres variants. Pour cela, ils ont proposé une approche dite approche basée sur des matrices ITV (matrices définies dans des intervals à temps variants). Sous les hypothèses suivantes :

- le vecteur $\theta(.) = \left[\theta_1(.), \ldots, \theta_p(.)\right]^T$ prend ses valeurs dans un ensemble compact ;
- les vecteurs extremums $\theta^- \triangleq \left[\theta_1^-, \ldots, \theta_p^-\right]^T$ et $\theta^+ \triangleq \left[\theta_1^+, \ldots, \theta_p^+\right]$ sont connus ;
- le triplet $(C, \bar{A}, B)$ est detectable et observable ;

Jetto et Orsini ont proposé des conditions suffisantes de stabilisation du système (1.83) avec $B(\theta) = B, C(\theta) = C$, via la commande basée sur un observateur suivante :

$$z(k+1) = (A(\theta(k)) + LC)z(k) + Bu(k) - Ly(k) \tag{1.84}$$
$$u(k) = Kz(k). \tag{1.85}$$

Ces conditions de stabilisation sont exprimées sous forme LMIs et formulées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.5.7 ([22]). *Si pour $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1]$, il existe deux matrices U_1, U_2, et deux matrices diagonales $S_1 > 0_n$ and $S_2 > 0_n$ telles que les conditions LMIs suivantes sont faisables*

$$\begin{bmatrix} S_1 & \frac{1}{\rho_1}(\bar{A}S_1 + BU_1)^T \\ (\star) & S_1 \end{bmatrix} > 0, \tag{1.86}$$
$$\begin{bmatrix} S_2 & \frac{1}{\rho_2}(\bar{A}^T S_2 + C^T U_2)^T \\ (\star) & S_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{1.87}$$
$$\bar{A}S_1 + BU_1 \succeq 0_n, \bar{A}S_2 + C^T U_2 \succeq 0_n, \; -BU_1 \succeq 0_n, \tag{1.88}$$
$$-\bar{A}S_1 - 2BU_1 - A^- S_1 \preceq 0_n, \tag{1.89}$$
$$-\bar{A}^T S_2 - 2C^T U_2 - A^{-^T} S_2 \preceq 0_n, \tag{1.90}$$

avec

$$\bar{a}_{ij} = \max\{|a_{ij}^-|, |a_{ij}^+|\}$$

alors, le système (1.83) *est asymptotiquement stabilisable via la commande basée sur un observateur* (1.84)-(1.85).

Stabilisation des systèmes non linéaires incertains

La référence de L. Xie et al. dans [73] fut un des travaux pionniers traitant les systèmes non linéaires, où les auteurs se sont penchés sur la question de la synthèse d'un filtre robuste des systèmes non linéaires incertains. Les conditions de synthèse obtenues sont dérivées via l'approche des équations de Riccati. Plus tard, le problème de la commande basée sur un observateur a été intégré dans quelques résultats de recherche à savoir [27] où les auteurs ont établi des conditions suffisantes de stabilisation via une commande basée sur un observateur des systèmes non linéaires avec des non-linéarités Lipschitziennes grâce à l'utilisations du théorème des accroissements finis DMVT (differential mean value theorem). En effet, grâce à ce dernier, les auteurs ont pu séparer le problème de synthèse de la commande et du gain de l'observateur en deux sous systèmes dont les solutions s'obtiennent via la résolution de deux LMIs indépendantes. Il existe peu de résultats dans la littérature [3], [42], [9], [46] traitant la stabilisation d'un système non linéaire quand ce dernier est affecté par des incertitudes paramètriques ou de type $\mathscr{L}_2$ bornées ou bien les deux. La dynamique de cette classe de système est régie par l'équation suivante :

$$x_{k+1} = \Big(A + \Delta A(k)\Big)x_k + Bu_k + \phi(x_k) + D\omega_k \tag{1.91a}$$

$$y_k = \Big(C + \Delta C(k)\Big)x_k + \psi(x_k) + E\omega_k \tag{1.91b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y_k \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée de commande, A, B, C, D et E sont des matrices constantes de dimensions appropriées, le vecteur $\omega \in l_2^s$ est une perturbation bornée (pouvant représenter des bruits de mesures, par exemple). Les fonctions Φ et Ψ représentent les non-linéarités Lipschitziennes du système, $\Delta A(k)$ et $\Delta C(k)$ sont des incertitudes structurées de la forme (5.2). Les références citée ci-dessus fournissent des conditions suffisantes de stabilisation en termes d'inégalités matricielles linéaires obtenues via des techniques différentes permettant de contourner la nature non convexe du problème. Néanmoins, toutes ces méthodes affichent du conservatisme lié à la restriction et la limitation de leur applicabilité. La première référence citée [3] consiste en une extension des résultats (1.80)-(1.81)-(1.82) à des systèmes non linéaires avec des non linéarités Lipschitziennes pouvant se réécrire sous forme d'incertitudes structurées de type (5.2). Nous citons également l'approche développée par Abbaszadez et Marquez [42], où les auteurs ont proposé dans un premier temps des conditions suffisantes de stabilité d'un observateur robuste, ensuite, un retour de sortie

$$u_k = Ky_k,$$

pour la stabilisation du système (1.91). Les conditions retournées dans ce cas garantissent la stabilisation du système, cependant, la matrice de gain K n'est pas retournée par les solutions de la LMI faisable. En effet, l'obtention de la matrice K nécessite des conditions supplémentaires sur les dimensions des matrices d'états ($m \geq n/2$ et $p > 1$ (voir [42], Proposition 1)). Une approche alternative pour la synthèse de la matrice de gain via les solutions de la LMI a été présentée par les auteurs. Cependant, cette dernière restreint le domaine des solutions, à cause de la contrainte égalité insérée dans le problème à résoudre. Ce qui est un inconvénient pour l'applicabilité de la méthode. Dans [9], l'auteur a pu éviter cet inconvenient grâce au lemme de linéarisation (1.4.10). Dans le cas sans incertitudes structurées ($\Delta A = \Delta C = 0$) et de non-linéarités dans la sortie ($\psi(x_k) = 0$), l'auteur avait proposé pour la stabilisation du système (1.91) dans un premier temps un retour de sortie statique $u_k = Ky_k$, puis dans un second cas un contrôle basé sur observateur comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + \phi(\hat{x}_k) + L\Big(C\hat{x}_k - y_k\Big) \\ u_k &= K\hat{x}_k. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Sous l'hypothèse que la jacobienne de $\phi(x)$, appartienne à un polytope convexe défini par

$$\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}(\beta) = \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i F_i,\ \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i = 1,\ \beta_i \geq 0\}, \tag{1.93}$$

Ibrir a dérivé les conditions de stabilisation formulées dans le théorème ci-dessous.

Théorème 1.5.8 ([9]). *S'il existe une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, deux matrices réelles $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, deux constantes α et γ telles que la LMI suivante*

$$\begin{bmatrix} -P+\mathscr{C}_\phi^T\mathscr{C}_\phi & 0 & \begin{bmatrix} \alpha(A+F_i)+B\tilde{K} & B\tilde{K} \\ 0 & \alpha(A+F_j+\tilde{L}C) \end{bmatrix}^T & 0 \\ (\star) & -\mu^2 I & \alpha\mathscr{D}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & -2\alpha I & P \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{1.94}$$

avec

$$\mathscr{C}_\phi = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix},$$

est faisable pour $1 \leq i, j \leq \nu$, alors, le système (1.91) *est asymptotiquement stable sous l'action de la commande basée sur un observateur* (1.92) *quand $\omega_k = 0$, et satisfait la condition d'optimalité $\| \mathscr{C}_\phi \theta_k \| \leq \gamma \| \omega_k \|$ pour tout $\omega_k \neq 0$, où $\theta_k = \begin{bmatrix} x_k & \hat{x}_k - x_k \end{bmatrix}^T$. Les matrices K et L sont alors données par $K = \tilde{K}/\alpha$ et $L = \tilde{L}/\alpha$ respectivement.*

Plus récemment (2013), un résultat dont on s'est largement inspiré dans le cadre de cette thèse a été proposé dans [46] où, pour l'analyse de la stabilisation $\mathscr{H}_\infty$ du système (1.91) lorsque $\Delta A = \Delta C = 0$, $B = A_u$ et $\phi(x_k) = Bf(x_k)$, et $f(x)$ est telle que

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(H_1 x)^T \dots f_q(H_q x)^T \end{bmatrix}^T,$$

les auteurs ont proposé le contrôle basé sur l'observateur suivant

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + A_u u_k + B\sum_{i=1}^{i=q} e_q(i) f_i(\vartheta_k^i) + L(y_k - C\hat{x}), \\ \vartheta_k^i &= H_i\hat{x}_k + K_i(y_k - C\hat{x}_k), \\ u_k &= -F\hat{x}_k. \end{aligned} \tag{1.95}$$

L'analyse de la stabilisation $\mathscr{H}_\infty$ du système (1.91) s'est basée sur l'utilisation judicieuse des inégalités de Young et de quelques transformations algébriques. Les conditions de synthèse obtenues sont formulées dans le théorème qui suit.

Théorème 1.5.9 ([46]). *Le système* (1.91) *est robustement asymptotiquement stabilisable via la commande* (1.95) *avec un niveau d'atténuation de perturbations minimal μ, si pour un scalaire positif ε, il existe des matrices $Z > 0$, $P_2 > 0, R, R_2$ et K_i, $i = 1, \dots, q$ telles que le problème d'optimisation convexe* (1.96) *soit vérifié.*

$$\begin{cases} \min(\mu) & \textit{tel que ;} \\ (1.97) & \textit{soit feasable} \end{cases} \tag{1.96}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Delta & 0 \\ (\star) & -\Phi & \Theta D_\omega \\ (\star) & (\star) & -\mu I_s \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} ZA_x^T - R_1 A_u^T & 0 \\ 0 & A_x^T P_2 - C^T R_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \Omega^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & E_w^T P_2 - D_w^T R_2 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & -\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C^T R_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ D_w^T R_2 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1} P_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon P_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{1.97}$$

où

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \text{BLOCK-DIAG}\left(\begin{bmatrix}\beta_{11}I_{s_1} & 0\\ 0 & \beta_{11}I_{s_1}\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}\beta_{1s_1}I_{s_1} & 0\\ 0 & \beta_{1s_1}I_{s_1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\beta_{21}I_{s_2} & 0\\ 0 & \beta_{21}I_{s_2}\end{bmatrix},\dots,\begin{bmatrix}\beta_{qs_q}I_{s_q} & 0\\ 0 & \beta_{qs_q}I_{s_q}\end{bmatrix}\right),\\
\Delta &= \begin{bmatrix} \Delta_1 K_1 & \dots & \Delta_q K_q \end{bmatrix},\\
\Delta_i K_i &= \underbrace{\begin{bmatrix} H_i' & 0\\ (K_iC)' & (H_i-K_iC)'\end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix} H_i' & 0\\ (K_iC)' & (H_i-K_iC)'\end{bmatrix}}_{s_i\ times},\\
\Omega &= \begin{bmatrix} B & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}H_{11} & 0\\ 0 & H_{11}\end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix}H_{1s_1} & 0\\ 0 & H_{1s_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{21} & 0\\ 0 & H_{21}\end{bmatrix}\dots\begin{bmatrix}H_{qs_q} & 0\\ 0 & H_{qs_q}\end{bmatrix}\right],\\
\Theta &= \left[\left[\underbrace{\begin{bmatrix}K_1\\ K_1\end{bmatrix}^T\dots\begin{bmatrix}K_1\\ K_1\end{bmatrix}^T}_{S_1 times}\right]\dots\left[\underbrace{\begin{bmatrix}K_i\\ K_i\end{bmatrix}^T\dots\begin{bmatrix}K_i\\ K_i\end{bmatrix}^T}_{S_i times}\right]\dots\left[\underbrace{\begin{bmatrix}K_q\\ K_q\end{bmatrix}^T\dots\begin{bmatrix}K_q\\ K_q\end{bmatrix}^T}_{S_q times}\right]\right]^T.
\end{aligned}
$$

Les matrices des gains de l'observateur et du contrôleur sont données par :

$$P_1 = Z^{-1}, F = R_1^T P_1, L = P_2^{-1} R_2^T.$$

Ce résultat constitue un des meilleurs résultats obtenus à ce jour. Néanmoins, il est souhaitable d'avoir plus de degré de liberté qui permettra la synthèse des matrices de gain de la commande et de l'observateur de façon à ce qu'elles soient indépendantes de la matrice de Lyapunov (chapitre 5).
Avant de conclure cette partie, nous tenons à préciser que les approches présentées pour la stabilisation des systèmes non linéaires à temps discret ont des versions homologues pour les systèmes non linéaires à temps continu. Nénmoins, dans le but d'éviter les répititions, nous nous sommes contenté de présenter les résultats dans le cas discret. À titre d'exemple, nous citons les travaux de Y. Ohta et D.D. Šiljak dans [74], qui consiste à appliquer la technique de séparation et [75] pour l'adaptation de l'approche de Marquez et al pour la synthèse d'une commande basée sur un observateur pour les systèmes non linéaires à temps continu. du système sans connaissance du mode de commutation.

1.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré, dans une première partie, à des rappels sur des concepts relatifs à la stabilité et la stabilisation, puis à l'approche LMI. Par la suite, un bref récapitulatif des approches antérieurs a été présenté, où nous nous sommes concentrés sur des méthodes basées sur les LMIs. En effet, on a remarqué que pour les systèmes incertains, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthodes universelles pour la synthèse de la commande basée sur un observateur. La question du conservatisme des principales approches citées a été discutée pour les différentes classes de systèmes considérées. Dans le but de performer les résultats existants dans la littérature, nous allons nous intéresser dans les chapitres suivants à l'obtention de méthodes de conception d'une commande basée sur un observateur les moins conservatives possibles et cela pour différentes classes de systèmes.

Première partie

Contribution à la commande basée sur un observateur pour les systèmes à temps continu

CHAPITRE 2

A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters

Sommaire

2.1 Introduction **35**
2.2 Problem formulation **36**
2.3 Less conservative LMI condition **37**
2.3.1 Systems without parameter uncertainties 37
2.3.2 Systems with uncertainties 39
2.3.3 Case of uncertainties in all state matrices 41
2.3.4 On the necessary conditions related to the proposed approach . . . 42
2.4 Numerical validation and comparisons **44**
2.4.1 Application to flexible link robot 45
2.4.2 Numerical evaluations 47
2.5 Conclusion **48**

2.1 Introduction

The aim of this chapter is to deal with the observer-based stabilization problem of uncertain continuous-time linear systems. Thus, new design methodology is proposed. By using the Lyapunov function approach combined with a judicious use of the Young's relation, we get a new LMI synthesis methodology. This leads to a quite simple LMI condition that is numerically tractable with any LMI software. It is important to underline that the proposed LMI condition is derived without any additional restrictive conditions, namely the *a priori* choice of the Lyapunov matrix and the equality constraint [5], [4]. To show the validity of the proposed new design methodology, our approach is applied on a single-link flexible robot manipulator. Finally, an evaluation of the conservatism is provided through Monte Carlo simulations, in the goal to provide comparisons with [5].

2.2 Problem formulation

In this section, we introduce the class of linear system with parameters uncertainties to be studied and the proposed observer-based control. Consider a continuous uncertain linear system of the form

$$\dot{x} = \Big(A + \Delta A(t)\Big)x + Bu \tag{2.1a}$$

$$y = \Big(C + \Delta C(t)\Big)x \tag{2.1b}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y \in \mathbb{R}^p$ is the output measurement and $u \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector. A, B, C and D are constant matrices of adequate dimensions. The parameters of the system are presumed to satisfy assumptions (1.5.1). The parameter uncertainty structure as in (5.2)-(5.3) comprises the well-known "matching conditions" and many practical systems possess parameter uncertainties which can be either exactly modeled, or overbounded as in equation (5.3). The uncertain matrices $F_A(t), F_C(t)$ are unknown and time-varying containing the uncertain parameters in the state and output matrices, and are allowed to be state dependent as long as (5.3) is satisfied along all possible state trajectories (one can think to unknown time-varying matrices with trigonometric functions as components). In the other hand, the matrices M_A, N_A, M_C, N_C specify how the uncertain parameters $F_A(t)$ and $F_C(t)$ affect the nominal matrices of system (2.1). Furthermore, the unit overbound for $F_A(t)$ and $F_C(t)$ does not cause any loss of generality. Indeed, $F_A(t)$ and $F_C(t)$ can always be normalized, in the sense of (5.3), by appropriately choosing the matrices M_A, M_C and N_A, N_C.
The observer-based controller that we consider to stabilize system (2.1) is the same as in [5] :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\Big(y - C\hat{x} - Du\Big) \tag{2.2a}$$

$$u = -K\hat{x} \tag{2.2b}$$

where $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ is the estimate of x, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is the control gain, $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is the observer gain. Hence, we can write

$$\dot{x} = \Big(A - BK + \Delta A(t)\Big)x + BK\varepsilon \tag{2.3a}$$

$$\dot{\varepsilon} = \Big(\Delta A(t) - L\Delta C(t)\Big)x + \Big(A - LC\Big)\varepsilon \tag{2.3b}$$

or equivalently

$$\dot{\overbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} \Big(A - BK + \Delta A(t)\Big) & BK \\ \Big(\Delta A(t) - L\Delta C(t)\Big) & \Big(A - LC\Big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

where $\varepsilon = x - \hat{x}$ represents the estimation error of the system.
Now, consider the Lyapunov function candidate

$$V\left(\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} = x^T P x + \varepsilon^T R \varepsilon. \tag{2.5}$$

Notice that the Lyapunov function (2.5) is well known in the literature for this problem, especially in [5] which is the main motivation of this part. Now, after calculating the derivative of V along the trajectories of (2.4), we have :

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK + (\Delta A - L\Delta C)^T R \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

where

$$\sum_{11} = \left[\left(A - BK + \Delta A\right)^T P + P\left(A - BK + \Delta A\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\sum_{22} = \left[\left(A - LC\right)^T R + R\left(A - LC\right)\right] \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

Notice that $\dot{V} < 0, \forall \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} \neq 0$ if the matrix inequality

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK + (\Delta A - L\Delta C)^T R \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.10}$$

holds. However, the matrix inequality (2.10) is a Bilinear Matrix Inequality (BMI), which is not exploitable numerically. To overcome this difficulty, many research activities have been recently proposed in the literature, but this concern systems in discrete-time case [4], [76], [21], [20], [3]. In the next section, we present a new design methodology for continuous-time systems. We propose a novel manner to overcome the obstacle of the coupling *PBK* without any equality constraint.

2.3 Less conservative LMI condition

For simplicity of the presentation and to understand easily the proposed main result, we first consider linear systems without parameter uncertainties. That is $\Delta A(t) = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$ and $\Delta C(t) = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^{p\times n}}$.

2.3.1 Systems without parameter uncertainties

At this stage, we can state the following main theorem.

Theorem 2.3.1. *System* (2.26a) *is asymptotically stabilizable by* (2.2) *if for a fixed scalar $\varepsilon > 0$, there exist two positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, and matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ so that the following LMI condition is feasible :*

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{P}_1(\mathscr{P},\hat{K}) & 0 \\ 0 & \mathbb{P}_2(R,\hat{L}) \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} B\hat{K}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_2^T} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} \hat{K}B^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}\mathscr{P} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\mathscr{P} \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_3} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.11}$$

where

$$\mathbb{P}_1(\mathscr{P},\hat{K}) = \mathscr{P}A^T - \hat{K}B^T + A\mathscr{P} - B\hat{K}^T$$

$$\mathbb{P}_2(R,\hat{L}) = A^T R - C^T\hat{L} + RA - \hat{L}^T C.$$

Hence, the stabilizing observer-based control gains are given by $K = \hat{K}^T\mathscr{P}^{-1}$ and $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}^T$.

Proof : The aim consists to linearize the bilinear inequality (2.10). First, notice that from the congruence technique, we have :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.12}$$

is equivalent to

$$\overbrace{\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & PBK \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}^{\Sigma_{\text{equiv}}} < 0. \tag{2.13}$$

Detailing the calculations and letting $\mathscr{P} = P^{-1}$, we obtain

$$\Sigma_{\text{equiv}} = \begin{bmatrix} \mathscr{P}\Big(A - BK\Big)^T + \Big(A - BK\Big)\mathscr{P} & BK \\ (BK)^T & \Big(A - LC\Big)^T R + R\Big(A - LC\Big) \end{bmatrix}$$

which can be rewritten under the following suitable form :

$$\Sigma_{\text{equiv}} = \mathscr{Q}_1 + \overbrace{\begin{bmatrix} BK \\ 0 \end{bmatrix}}^{X^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}}^{Y} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}^{Y^T} \overbrace{\begin{bmatrix} (BK)^T & 0 \end{bmatrix}}^{X} \tag{2.14}$$

with

$$\mathscr{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathscr{P}\Big(A - BK\Big)^T + \Big(A - BK\Big)\mathscr{P} & 0 \\ 0 & \Big(A - LC\Big)^T R + R\Big(A - LC\Big) \end{bmatrix}.$$

From Young's relation, we deduce that

$$\Sigma_{\text{equiv}} \leq \mathscr{Q}_1 + \varepsilon X^T S X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T S^{-1} Y. \tag{2.15}$$

The key idea to retrieve the variable $\hat{K} = \mathscr{P}K^T$ and eliminating the isolated variable K consists to replace in the Young's relation the matrix S by $\mathscr{P}$. Hence, from the Schur lemma and $S = \mathscr{P}$, the inequality $\Sigma_{\text{equiv}} < 0$ holds if the following one is fulfilled.

$$\begin{bmatrix} \mathscr{Q}_1 & \overbrace{\begin{bmatrix} B(K\mathscr{P}) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_2^T} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} (K\mathscr{P})^T B^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\mathscr{Q}_2} & \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon}\mathscr{P} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\mathscr{P} \end{bmatrix}}_{\mathscr{Q}_3} \end{bmatrix} < 0. \tag{2.16}$$

Notice that (2.16) is identical to (2.11) using the change of variables $\hat{K} = \mathscr{P}K^T, \hat{L} = L^T R$. That is, under the LMI condition (2.11) of theorem 2.3.1, we have $\Sigma < 0$ which means that the vector $\begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ is asymptotically stable. This ends the proof. □

2.3.2 Systems with uncertainties

Theorem 2.3.2. *System* (2.26a) *is asymptotically stabilizable by* (2.2) *if for fixed scalars $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_3 > 0$ and $\varepsilon_4 > 0$, there exist two positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, two matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ and a positive scalar ε_2 so that the LMI condition* (2.17) *is feasible.*

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \daleth_{11} & 0 \\ 0 & \daleth_{22} \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B\hat{K}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathscr{P}N_A^T & \mathscr{P}N_A^T & \mathscr{P}C_C^T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ RM_A & \hat{L}^T M_C \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_2^T} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}B^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} N_A\mathscr{P} & 0 \\ N_A\mathscr{P} & 0 \\ N_C\mathscr{P} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & M_A^T R \\ 0 & M_C^T \hat{L} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_1}\mathscr{P} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\mathscr{P} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_3}I & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_4}I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} -\varepsilon_3 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathscr{Q}_3} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

where

$$\daleth_{11} = \mathscr{P}A^T - \hat{K}B^T + A\mathscr{P} - B\hat{K}^T + \varepsilon_2 M_A M_A^T,$$
$$\daleth_{22} = A^T R - C^T\hat{L} + RA - \hat{L}^T C.$$

Hence, the stabilizing observer-based control gains are given by $K = \hat{K}^T\mathscr{P}^{-1}$ and $L = \hat{R}^{-1}\hat{L}^T$.

Proof : We rewrite the matrix Σ as a sum of two matrices, one contains the uncertainties and an other one without the uncertainties, that is :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_{11} & PBK \\ (\star) & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ (\star) & 0 \end{bmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} A_{11} &= (A - BK)^T P + P(A - BK) \\ A_{22} &= (A - LC)^T R + R(A - LC) \\ B_{11} &= (\Delta A)^T P + P(\Delta A) \\ B_{12} &= (\Delta A - L(\Delta C))^T R. \end{aligned}$$

We pre and post multiply Σ by the matrix $\mathrm{diag}(P^{-1}, I)$, putting $\mathscr{P} = P^{-1}$ and by developing ΔA

and ΔC we obtain :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma} = &\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}BK\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(BK)^T & 0\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix} F_A^T\begin{bmatrix}M_A^T & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}M_A\\ 0\end{bmatrix} F_A(t)\begin{bmatrix}N_A\mathscr{P} & 0\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix} F_A^T(t)\begin{bmatrix}0 & M_A^T R\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ RM_A\end{bmatrix} F_A(t)\begin{bmatrix}N_A\mathscr{P} & 0\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}-\mathscr{P}N_C^T\\ 0\end{bmatrix} F_C^T(t)\begin{bmatrix}0 & M_C^T L^T R\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ RLM_C\end{bmatrix} F_C(t)\begin{bmatrix}-N_C\mathscr{P} & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.18}$$

where $\mathbb{A}_{11} = \mathscr{P}\Big(A - BK\Big)^T + \Big(A - BK\Big)\mathscr{P}$.

The reformulation (2.18) plays an important role in obtaining a relaxed condition. Now, by applying the Young's relation (see, e.g. [1]), we get the following estimation :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma} \leq &\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\\ &+ \varepsilon_1\begin{bmatrix}BK\\ 0\end{bmatrix}\mathscr{P}\begin{bmatrix}BK\\ 0\end{bmatrix}^T + \frac{1}{\varepsilon_1}\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}\mathscr{P}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ I\end{bmatrix}^T\\ &+ \frac{1}{\varepsilon_2}\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix}\varepsilon_2 M_A M_A^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &+ \varepsilon_3\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_A^T\\ 0\end{bmatrix}^T + \frac{1}{\varepsilon_3}\begin{bmatrix}0\\ RM_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ RM_A\end{bmatrix}^T\\ &+ \varepsilon_4\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_C^T\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathscr{P}N_C^T\\ 0\end{bmatrix}^T + \frac{1}{\varepsilon_4}\begin{bmatrix}0\\ \hat{L}^T M_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \hat{L}^T M_C\end{bmatrix}^T\end{aligned} \tag{2.19}$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ and ε_4 are positive constants. Using the change of variables $\hat{K} = \mathscr{P}K^T$ and $\hat{L} = L^T R$, the right hand side of inequality (2.19) takes the following form :

$$\mathscr{Q}_1 - \mathscr{Q}_2\mathscr{Q}_3^{-1}\mathscr{Q}_2^T \tag{2.20}$$

where $\mathscr{Q}_1, \mathscr{Q}_2$ and $\mathscr{Q}_3$ are given in (2.17). Finally, from Schur's Lemma (see, e.g. [1]), we deduce that the inequality $\widetilde{\Sigma} < 0$ is satisfied if the LMI (2.17) is feasible.

□

Proposition 2.3.1. *If for fixed scalars $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_3 > 0$ and $\varepsilon_4 > 0$, there exist two positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, two matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ and a positive scalars ε_2, ρ so that the LMI condition* (2.21)

$$\begin{bmatrix}\mathscr{Q}_1 + \rho I & \mathscr{Q}_2^T\\ \mathscr{Q}_2 & \mathscr{Q}_3\end{bmatrix} < 0, \tag{2.21}$$

where $\mathscr{Q}_1$, $\mathscr{Q}_2$, $\mathscr{Q}_3$ as defined in Theorem 2.3.2, then, system (2.1) *is exponentially stabilisable by the feedback* (2.2)*, and the system convergence rate is* $[\rho/2\max(\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R))]$.

Proof : Indeed, by Schur lemma, inequality (2.21) is equivalent to

$$\mathscr{Q}_1 - \mathscr{Q}_2^T\mathscr{Q}_3^{-1}\mathscr{Q}_2 < -\rho I. \tag{2.22}$$

On the other hand, from Theorem 2.3.2 we have

$$\Sigma < \mathscr{Q}_1 - \mathscr{Q}_2^T\mathscr{Q}_3^{-1}\mathscr{Q}_2 < -\rho I \tag{2.23}$$

That is

$$\dot{V}(z_t) = z_t^T \Sigma z_t < -\rho \parallel z_t \parallel^2 \tag{2.24}$$

where $z_t = \begin{bmatrix} x_t & \varepsilon_t \end{bmatrix}^T$. By the definition of the Lyapunov function (2.5), we have

$$\min[\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(R)] \parallel z_t \parallel^2 \leq V(z_t) \leq \max[\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)] \parallel z_t \parallel^2 \tag{2.25}$$

where $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(R)$ and $\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)$ denote the minimum and maximum eigenvalue of P and R respectively. Combining the estimations (2.24) and (2.25), we get

$$\dot{V}(z_t) \leq \beta V(z_t),$$

where $\alpha = \rho / \max[\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)]$. After integration of the two sides of the inequality, we get

$$V(z_t) \leq V(z_0) \exp(-\beta t).$$

Using the estimation (2.25), we can write

$$\min[\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(R)] \parallel z_t \parallel^2 \leq V(z_t) \leq \max[\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)] \parallel z_0 \parallel^2 \exp(-\alpha t),$$

which leads to

$$\parallel z_t \parallel \leq \sqrt{\frac{\max[\lambda_{\max}(P), \lambda_{\max}(R)]}{\min[\lambda_{\min}(P), \lambda_{\min}(R)]}} \parallel z_0 \parallel \exp(-\beta t),$$

where $\beta = \alpha/2$. This end the proof.

$\square$

Remarque 2.3.2. *Notice that the matrix inequality* (2.17) *is an LMI if the scalar variable* $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ *are fixed* a priori. *In order to overcome the difficulty of the choice of* ε_i*, we proceed as in [77, Remark 5] by using the gridding method. This latter consists to scale* ε_i *by defining* $\kappa = \frac{\varepsilon_i}{1+\varepsilon_i}$ *(and then* $\varepsilon_1 = \frac{\kappa}{1-\kappa}$*). We know that* $\varepsilon_i > 0$ *if and only if* $\kappa \in]0,1[$*. Then, we assign a uniform subdivision of the interval* $]0,1[$ *and we solve the LMI* (2.17) *for each value of this subdivision.*

2.3.3 Case of uncertainties in all state matrices

Consider now system (2.26) that represents the general case where uncertainties are present in all the state matrices.

$$\dot{x} = \Big(A + \Delta A(t)\Big)x + (B + \Delta B)u \tag{2.26a}$$

$$y = \Big(C + \Delta C(t)\Big)x + (D + \Delta D)u \tag{2.26b}$$

where $\Delta B = M_B F_B(t) N_B$, $\Delta_D = M_D F_D(t) N_D$, and $F_B(t), F_D(t)$ satisfy the following conditions

$$F_B(t)^T F_B(t) \leq I, F_D^T(t) F_D \leq I.$$

We show by state augmentation that the problem of observer-based control of system (2.26) turns out to be a stabilization problem of an augmented system of form (2.1). To this end, let us consider the new state variables $\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$, with $v(t) = \dot{u}(t)$ is the new control input. Then, the dynamics of the $\xi(t)$-system becomes

$$\dot{\xi} = \Big(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}(\mathbf{t})\Big)\xi + \mathbf{B}v, \tag{2.27a}$$

$$y = \Big(\mathscr{C} + \Delta\mathbf{C}(\mathbf{t})\Big)\xi, \tag{2.27b}$$

where,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Delta C(t) & \Delta D(t) \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

The resulting uncertainties take the initial forms $\Delta\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \mathbf{M_A}\mathbf{F_A}(\mathbf{t})\mathbf{N_A}$ and $\Delta\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \mathbf{M_C}\mathbf{F_C}(\mathbf{t})\mathbf{N_C}$, where

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} M_A & M_B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F_A}(t) = \begin{bmatrix} F_A(t) & 0 \\ 0 & F_B(t) \end{bmatrix}, \mathbf{N_A} = \begin{bmatrix} N_A & 0 \\ 0 & N_B \end{bmatrix}, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{M_C} = \begin{bmatrix} M_C & M_D \end{bmatrix}, \mathbf{F_C}(t) = \begin{bmatrix} F_C(t) & 0 \\ 0 & F_D(t) \end{bmatrix}, \mathbf{N_C} = \begin{bmatrix} N_C & 0 \\ 0 & N_D \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Thus, we arrive to the following result :

Corollaire 2.3.3. *System* (2.26) *is asymptotically stabilizable by* (2.2) *if for fixed scalars* $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_3 > 0$ *and* $\varepsilon_4 > 0$*, there exist two positive definite matrices* $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, two matrices* $\hat{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$*,* $\hat{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *and a positive scalar* ε_2 *so that the LMI condition* (2.32) *is feasible.*

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} \bar{\daleth}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{\daleth}_{22} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_1} & \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathscr{P}\mathbf{N_A^T} & \mathscr{P}\mathbf{N_A^T} & \mathscr{P}\mathbf{C_C^T} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{RM_A} & \hat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}\mathbf{M_C} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2^{\mathbf{T}}} \\ \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}\mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{N_A}\mathscr{P} & 0 \\ \mathbf{N_A}\mathscr{P} & 0 \\ \mathbf{N_C}\mathscr{P} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M_A^T}\mathbf{R} \\ 0 & \mathbf{M_C^T}\hat{\mathbf{L}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_2} & \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_1}\mathscr{P} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1\mathscr{P} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_3}I & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_4}I \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} -\varepsilon_3 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{\mathcal{Q}_3} \end{bmatrix} < 0 \tag{2.32}$$

where

$$\bar{\daleth}_{11} = \mathscr{P}\mathbf{A}^T - \hat{\mathbf{K}}\mathbf{B}^T + \mathbf{A}\mathscr{P} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{K}}^T + \varepsilon_2\mathbf{M_A}\mathbf{M_A}^T,$$
$$\bar{\daleth}_{22} = \mathbf{A^T R} - \mathbf{C^T}\hat{\mathbf{L}} + \mathbf{RA} - \hat{\mathbf{L}}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}.$$

Hence, the stabilizing observer-based control gains are given by $K = \hat{\mathbf{K}}^{\mathbf{T}}\mathscr{P}^{-\mathbf{1}}$ *and* $L = \hat{\mathbf{R}}^{-\mathbf{1}}\hat{\mathbf{L}}^T$.

2.3.4 On the necessary conditions related to the proposed approach

This part is devoted to some remarks about the feasibility of the proposed sufficient LMI condition. A discussion on the necessary conditions for the feasibility of (2.17) is provided. It should be noticed that the necessary condition for the feasibility of the LMI (2.17) is $\mathcal{Q}_1 < 0$, which is equivalent to the stabilizability and detectability of the system (2.1). However, in theorem 1.5.2 and

theorem 1.5.3, the necessary condition for the feasibility of (1.63) and (1.64) is more strong than the stabilizability of (A,B). Indeed, to linearize the BMI (2.10) the authors in [5] chose to take particular solutions, namely $P = I$ in (1.62) and the additional strong equality constraint (1.64) in theorem 1.5.3.
Indeed, let us consider the following example :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$M_1 = 0, \; M_2 = 0, \; N_1 = 0, \; N_2 = 0$$

If the equality constraint

$$PB = B\hat{P}$$

holds, then we will get

$$B^{\perp}PB = 0,$$

where $B^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ is the orthogonal matrix of B. Let us putting $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ and $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$.
Since $B^{\perp}PB = p_{12} = 0$, then the Lyapunov matrix P must be diagonal.
Now, assume that LMI (1.63) is satisfied. This leads obviously to the inequality $Y_{11} < 0$, from which we deduce that

$$\Big(A - BK\Big)^T P + P\Big(A - BK\Big) < 0 \tag{2.33}$$

By developing the calculation, we obtain

$$P\Big(A - BK\Big) = \begin{bmatrix} -p_{11}(1+k_1) & p_{11}(2-k_2) \\ 2p_{22} & 3p_{22} \end{bmatrix}.$$

Hence,

$$\Big(A - BK\Big)^T P + P\Big(A - BK\Big) = \begin{bmatrix} -2p_{11}(1+k_1) & \mathbf{(1.2)} \\ \mathbf{(1.2)}^T & 6p_{22} \end{bmatrix} < 0$$

where

$$\mathbf{(1.2)} = 2p_{22} + p_{11}(2-k_2)$$

and consequently, $p_{22} < 0$, which contradicts the definition of $P > 0$. On the other hand, the LMI (1.62) is not solvable since the Lyapunov matrix chosen by the author is $P = I_n$, which is diagonal.
Otherwise, by using Matlab LMI toolbox, our LMI (2.17) is solvable by choosing $\varepsilon_1 = 0.1$. So, we obtain the following solutions :

$$\mathscr{P} = \begin{bmatrix} 20.84 & -7.29 \\ -7.29 & 4.25 \end{bmatrix},$$
$$R = \begin{bmatrix} 118.98 & -33.76 \\ -33.76 & 17.68 \end{bmatrix},$$
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 53.7083 \\ 1.7287 \end{bmatrix},$$
$$\hat{L} = \begin{bmatrix} 35.6795 & 12.6032 \end{bmatrix}.$$

The gains K and L are respectively given by

$$K = \begin{bmatrix} 7.11 & 18.96 \end{bmatrix},$$
$$L = \begin{bmatrix} 4.30 \\ 19.87 \end{bmatrix}.$$

Now, consider a more general case. One takes a system so that

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The equality constraint

$$PB = B\hat{P}$$

leads to

$$P_{12} = B^{\perp}PB = 0$$

with $B^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, which means that the Lyapunov matrix P is diagonal. On the other hand, the LMI (1.63) means that

$$\left(A - BK\right)^T P + P\left(A - BK\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{(1.1)} & \mathbf{(1.2)} \\ \mathbf{(1.2)}^T & \mathbf{(2.2)} \end{bmatrix} < 0$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{(1.1)} &= P_{11}(A_{11} - B_1K_1) + (A_{11} - B_1K_1)^T P_{11}, \\ \mathbf{(1.2)} &= A_{21}^T P_{22} + P_{11}(A_{12} - B_1K_2), \\ \mathbf{(2.2)} &= A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22}. \end{aligned}$$

Hence, A_{22} must be Schur stable to guarantee

$$A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22} < 0. \tag{2.34}$$

Notice also that the feasibility of the LMI (1.62) requires

$$A_{22}^T + A_{22} < 0 \tag{2.35}$$

since, in particular, we have $P_{22} = I$. To resume, for this type of systems, in addition to the stabilizability and the detectability, the necessary condition for the feasibility of (1.62) and (1.63)-(1.64) is the Schur stability of A_{22} in the sense of (4.45) and (2.35), respectively.

2.4 Numerical validation and comparisons

This section is devoted to numerical comparison that aims to show the effectiveness of the new proposed approach. The first example is a physical model treated previously in the literature. The goal is to show the applicability of the main result to real models. After that, a numerical evaluation of the related conservatism were provided through Monte Carlo simulations.

2.4.1 Application to flexible link robot

Here, let us consider, as real example, the flexible link robot. The dynamic model is nonlinear. The nonlinearity is considered as structured uncertainties. The dynamic of the system is described by the following differential equations :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{\tau}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{b}{J_m}\omega_m + \frac{K_\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{\tau}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{Mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \tag{2.36}$$

where $\theta_m, \omega_m, \theta_l$ and ω_l are the motor and link positions and velocities respectively. J_m and J_l are the motor and link inertia, $2h$ and M are the length and mass of the link, b is the viscous friction and K_τ is the amplifier gain. The measurements are the position and velocity of the motor.
From the mean value theorem, there exists $0 < \eta < 1$ so that the nonlinearity $\sin(\theta_l)$ can be rewritten under the form

$$\sin(\theta_l) = \cos(\eta\theta_l)\theta_l.$$

Therefore, considering the nonlinearity as uncertainty and by setting $x = \begin{bmatrix}\theta_m & \omega_m & \theta_l & \omega_l\end{bmatrix}^T$, the set of equations (4.48) can be rewritten under the form (2.1), with

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{J_m} & -\frac{b}{J_m} & \frac{\tau}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\tau}{J_l} & 0 & -\frac{\tau}{J_l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_\tau}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mgh}{J_l}\cos(\eta\theta_l) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta C(t) = 0_{\mathbb{R}^{2\times 4}}.$$

The uncertainties can be rewritten under the form (5.2)-(5.3) with

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\eta\theta_l) \end{bmatrix}, \quad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mgh}{J_l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_C(t) = 1, \quad N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We show through this example that Theorems 1.5.2 and 1.5.3 cannot provide solutions. Indeed, as shown in section 2.3.4 (equation (4.45)), if the LMI (1.63) under the equality constraint (1.64) is feasible, then the matrix bloc $A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -1.9355 & 0 \end{bmatrix}$ of A must be *Schur* stable. That is, there exists $P_{22} = P_{22}^T = \begin{bmatrix} P_{22}^{11} & P_{22}^{12} \\ P_{22}^{12} & P_{22}^{22} \end{bmatrix} > 0$ so that

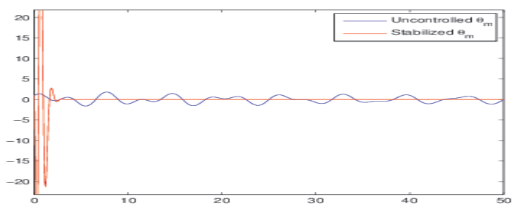
$$A_{22}^T P_{22} + P_{22}A_{22} = \begin{bmatrix} -3.87P_{22}^{12} & -1.93P_{22}^{22} + P_{22}^{11} \\ -1.93P_{22}^{22} + P_{22}^{11} & 2P_{22}^{12} \end{bmatrix} < 0$$

which leads (if satisfied) to $P_{22}^{12} > 0$ and $P_{22}^{12} < 0$, which is contradictory. Notice also that LMI (1.62) cannot be applied to this real example because we have $P = I$, which is diagonal.

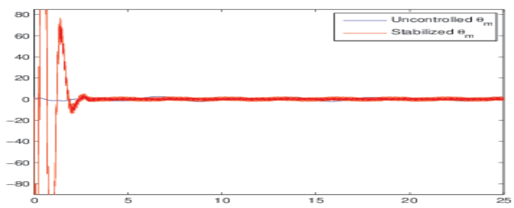
On the other hand, applying our design methodology, after solving the LMI (2.17), with $\varepsilon_1 = 0.0638$, $\varepsilon_3 = 1.01$ and $\varepsilon_4 = 1.01$. we find the following gains :

$$K = \begin{bmatrix} 3.2059 & 0.5269 & 27.0880 & 12.5435 \end{bmatrix}, \; L = \begin{bmatrix} 0.4829 & -25.2085 \\ -22.2169 & 9.7037 \\ 5.4497 & 106.1807 \\ 146.1391 & 795.1366 \end{bmatrix}.$$

The simulation results are given in Figures 2.1 and 2.2. These simulations were performed using the software simulink and tacking as initial conditions $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ and $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$

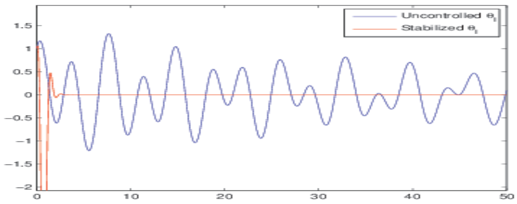


(a) The motor position θ_m

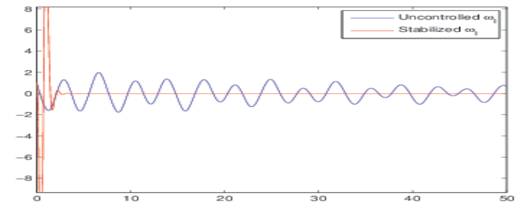


(b) The motor velocity ω_m

FIGURE 2.1 – The motor behavior : stabilized states vs uncontrolled states



(a) The link position θ_l



(b) The link velocity ω_l

FIGURE 2.2 – The link behavior : stabilized states vs uncontrolled states

2.4.2 Numerical evaluations

This subsection is dedicated to show the superiority of our proposed new design methodology to design observer-based controllers. We will study numerically the conservatism of the LMI methods considered in this chapter and their relation to the detectability and stabilizability conditions. For this, we consider linear systems without uncertainties in order to demonstrate that our design method is not strong compared to the necessary conditions, namely the detectability and stabilizability conditions. The influence of the number of inputs is also addressed.

Evaluation of the conservatism

We have randomly generated 1000 stabilizable and detectable systems of dimension $n = 3, m = 2$ and $p = 1$. The results are summarized in Table 2.1. Indeed, the condition (2.17) of Theorem 2.3.2 provides an observer-based controller for 100% of these systems. Nevertheless, the LMIs (8), (10)-(11) in [5] succeeded for 40.4% and 70.4%, respectively.

LMI (8) in [5]	**LMI (10)-(11) in [5]**	**LMI** (2.17)
40.4%	70.4%	100%

TABLE 2.1 – Percentage of systems for $n = 3, m = 2, p = 1$

Relationship with the number of inputs

The approach of [5] depends on the input matrix B. Indeed, the *a priori* choice of the Lyapunov matrix $P = I$ and the introduction of the strong equality constraint $PB = B\hat{P}$ is due to the presence of the bilinear term PBK, which is difficult to linearize because of the matrix B. To overcome this difficulty, the author in [5] developed an LMI method depending on the number of inputs m

in the system, then on the matrix B. For this reason, this part is devoted to the influence of the number of inputs on the feasibility of the LMIs (8), (10)-(11) in [5]. We show that our proposed design methodology does not depend on m and works successfully for all $m \leq n$. To do this, we have randomly generated 1000 detectable and stabilizable systems of dimension $n = 5, p = 1$ and m ranging from 1 to n. The results are given in Figure 2.3, which gives the percentage of systems for which the different methods addressed in this note succeeded for each value of m. It is well clear, from Figure 2.3, that our proposed design methodology succeeded for 100% of the systems and for each $m \leq n$. However, the results obtained by LMIs (8), (10)-(11) in [5] depend on the value of m. For instance, the percentage of systems for which the LMIs (8), (10)-(11) in [5] succeeded for $m = 1$ are 00% and 17.8%, respectively, and for $m = 3$ are 08.6% and 53.0%, respectively. The best results for the approach of [5] are obtained with $m = n = 5$, where the percentage of systems for which (8) and (10)-(11) in [5] succeeded are respectively, 99.9% and 100%. It is quite clear that our proposed design methodology is much superior and less conservative than that of [5].

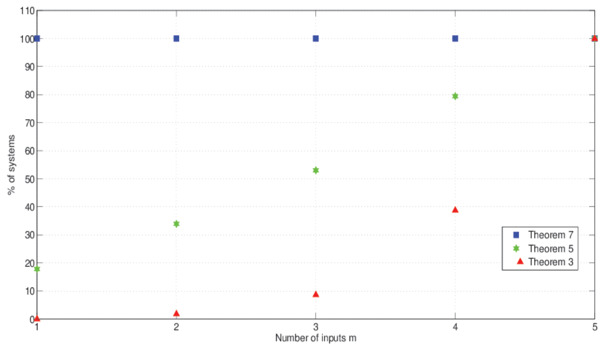


FIGURE 2.3 – Percentage of systems for different values of m with $n = 5, p = 1$

Remarque 2.4.1. *It should be noticed that more than 50000 randomly generated detectable and stabilizable systems are tested. Our proposed design method is found feasible for 100% of them. This shows, numerically, the superiority of our LMI approach. However, at this stage we cannot demonstrate analytically the relationship between our method and those of [5]. Indeed, we proposed only sufficient conditions for which the necessary conditions for the feasibility are the detectability and stabilizability without any additional constraint, contrarily to [5], where some additional constraint are required as shown in the previous sections.*

2.5 Conclusion

In this chapter, a linear matrix inequality approach to design observer-based controllers for uncertain linear systems is addressed. We have shown that a judicious use of Young's relation led to a less restrictive LMI condition. A comparison study of the results derived in this work with respect to those given in [5] and [41] shows the superiority of the proposed design methodology.

CHAPITRE 3

Observer-based $\mathscr{H}_\infty$ stabilization for Lipschitz nonlinear systems with uncertain parameters

Sommaire

3.1 Introduction **49**
3.2 Lipschitz nonlinearities as LPV parameters **50**
3.3 Observer-based controller synthesis **53**
3.4 Resilient controller design **55**
3.5 Numerical examples and comparisons **57**
3.5.1 Example 57
3.5.2 Evaluation of the conservatism 60
3.6 Conclusion **62**

3.1 Introduction

This chapter focuses on the design of an $\mathscr{H}_\infty$ observer-based controller, in LMI setting, for a class of Lipschitz nonlinear continuous-time systems with parameter uncertainties. Stabilization of nonlinear systems has been extensively studied in many research papers, see for example [78], [21], [4]. It is important to stress that many of the developed algorithms to the deal with this problem require that the Lipschitz constants of nonlinearities should be sufficiently small to increase the chance of finding an observer-based stabilizing controller. In addition, in [4], it is speculated that the design of the observer and the controller gains may be difficult or impossible for some nonlinear systems because of a required equality constraint. This is, for example, the case of nonlinear systems with single input [4]. On other hand, it is shown analytically in **chapter 2** the efficiently of the methodology based on a judicious use of the Young's relation for a particular class of systems. Indeed, for systems with a control matrix denoted B of the form $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \end{bmatrix}^T$, the approach in [5] does not work, since the necessary conditions related to the equality constraint required are very strong and do not hold for many real models, such as robot

manipulators. This fact is illustrated in [79, Example 1]. Motivated by the above discussions, we aim to deal with the $\mathscr{H}_\infty$ control problem for a class of nonlinear systems. Thanks to the reformulated Lipschitz condition in [29, Lemma 7] that leads to an LPV approach, we show that the approach based on a judicious use of the Young's relation tolerates high Lipschitz constant compared to the approach based on equality constraint. The objective is to develop an observer based controller for nonlinear systems using a reformulation of the Lipschitz property in order to transform the problem of nonlinear design to the stability of LPV systems.
The rest of this chapter is organized as follows. Section 2 formulates the problem under consideration. The stability condition and $\mathscr{H}_\infty$ performance of the closed-loop observer-based feedback control system are given in Section 3. The presented approach is extended to a robust and resilient observer-based controller synthesis in sections 4. To illustrate the advantages in terms of conservatism reduction, the results on an extensive campaign of Monte Carlo simulations will be discussed in Section 5. Finally, in Section 6, the conclusion is given.

3.2 Lipschitz nonlinearities as LPV parameters

We consider the class of nonlinear systems described by the following set of equations

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x) + E\omega \\ y = Cx + g(x) + D\omega \end{cases} \tag{3.1}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y \in \mathbb{R}^p$ is the output measurement, $u \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector. The nominal matrices A, B, C, D, and E are real matrices of appropriate dimensions. The vector $\omega \in L_2$ is an unknown exogenous disturbance. We assume that the pairs $(A;B)$ and $(A;C)$ are controllable and observable, respectively. The nonlinear functions f and g are assumed to be globally Lipschitzian with Lipschitz constant γ_f and γ_g respectively. Without loss of generality we assume that $f(0) = 0$.
To stabilize system (3.1), we consider the classical Luenberger observer for nonlinear systems :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}) + L(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x} + g(\hat{x}) \\ u = -K\hat{x} \end{cases} \tag{3.2}$$

Before introducing our design methodology, we need to consider an augmented system with the state and error dynamics and deal with the nonlinearities f and g : under the feedback $u_(t) = -K\hat{x}(t)$, the closed-loop system has the form

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} z \\ &+ \begin{bmatrix} f(x) \\ f(x) - f(\hat{x}) - L(g(x) - g(\hat{x})) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E \\ E - LD \end{bmatrix} \omega(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

where $z^T = (x^T, e^T)$ and $e = x - \hat{x}$. According to [29, Lemma 7], the Lipschitz property on f and g leads to the existence of bounded functions

$$f_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$g_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

and constants $\underline{\gamma}_{f_{ij}}$, $\bar{\gamma}_{f_{ij}}$, for $i,j=1,\ldots,n$, $\bar{\gamma}_{g_{ij}}$ and $\underline{\gamma}_{g_{ij}}$, for $i=1,\ldots,p$ and $j=1,\ldots,n$, so that

$$\left\{\begin{array}{r}\underline{\gamma}_{f_{ij}} \leq f_{ij} \leq \bar{\gamma}_{f_{ij}},\\ \underline{\gamma}_{g_{ij}} \leq g_{ij} \leq \bar{\gamma}_{g_{ij}},\\ f(x) = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}H_{ij}\right](x),\\ f(x)-f(\hat{x}) = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}H_{ij}\right](x-\hat{x}),\\ g(x)-g(\hat{x}) = \left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}H_{ij}\right](x-\hat{x}),\end{array}\right. \tag{3.4}$$

where : $H_{ij}^{p,n} = e_p(i)e_n^T(j)$. Put $\Theta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}H_{ij}^{n}$, $\Xi = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}H_{ij}^{p,n}$,

$$\mathscr{A}(\Theta) = A + \Theta$$

and

$$\mathscr{C}(\Xi) = C + \Xi.$$

Thus, system (3.3) can be rewritten under the suitable form

$$\dot{z} = \overbrace{\begin{bmatrix}\mathscr{A}(\Theta)-BK+ & BK\\ 0 & \mathscr{A}(\Upsilon)-L\mathscr{C}(\Xi)\end{bmatrix}}^{\Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)} z + \overbrace{\begin{bmatrix}E\\ E-LD\end{bmatrix}}^{\Pi_2}\omega. \tag{3.5}$$

Notice that in view of [29, Lemma 7], the parameters Θ, Υ and Ξ belong to bounded convex sets $\mathscr{H}_n$ and $\mathscr{H}_p$ respectively, for which the set of vertices are, respectively, defined by :

$$\begin{array}{rcl}\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} & = & \left\{\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}, \Phi_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{f_{ij}}, \bar{\gamma}_{f_{ij}}\}\right\}\\ \mathscr{V}_{\mathscr{H}p} & = & \left\{\Psi \in \mathbb{R}^{p\times n}, \Psi_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{g_{ij}}, \bar{\gamma}_{g_{ij}}\}\right\}.\end{array}$$

The proposed lemma provides a detailed version of the Lipschitz property. This detailed version allows to use the LPV approach, and will lead to less conservative observer based synthesis conditions. Indeed, instead of the Lipschitz constant presumed to be the same for all the components of the nonlinear function in the classical Lipschitz condition, the new reformulated Lipschitz property uses the detailed form of the nonlinear function to obtain lower and upper bounds for each of its component.
Our objective consists in finding matrices K and L so that

1. The augmented closed-loop system (3.5) with $\omega(t)=0$ is asymptotically stable ;
2. The effect of $\omega(t)$ on the tracking error $Z(t)=Hz(t)$, where H is a known matrix of appropriate dimension, is attenuated below a desirable level in the $\mathscr{H}_\infty$ sens. More specially, it is required that

$$\|Z\|_2 < \sqrt{\mu\|\omega\|_2^2 + \nu\left\|\begin{bmatrix}x_0\\ e_0\end{bmatrix}\right\|_2^2},\ \forall\omega \in L_2[0,\infty) \tag{3.6}$$

   where $\mu > 0$ is the disturbance attenuation level, and $\nu > 0$ will be determined later.

We say the $\mathscr{H}_\infty$ output control is achieved if the aforementioned two requirements are met. Notice that the problem of solving the $\mathscr{H}_\infty$ asymptotic convergence inequality (3.6) can be reduced to find a Lyapunov function $V_t = z_t^T Q z_t$, with $Q > 0$ so that

$$Z^T(t)Z(t) - \mu^2 \omega(t)^T \omega(t) + \dot{V}(t) < 0, \forall t \in [0, \infty). \tag{3.7}$$

Indeed, if inequality (3.7) is fulfilled, then

$$\mathscr{J} = \int_0^\infty [Z^T(t)Z(t) - \mu^2 \omega(t)^T \omega(t) + \dot{V}(t)]dt \leq 0. \tag{3.8}$$

which is equivalent to

$$\int_0^\infty Z^T(t)Z(t) - \int_0^\infty \mu^2 \omega(t)^T \omega(t) dt + V(\infty) - V_0 \leq 0 \tag{3.9}$$

Since $V(\infty) \geq 0$, and due to $V_0 = V\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix}\right)$, we obtain

$$-V\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix}\right) + \| Z_t \|_2^2 - \mu \| \omega \|_2^2 \leq 0. \tag{3.10}$$

From the fact that

$$V\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix} \leq \lambda_{\max}(Q) \left\| \begin{bmatrix} x_0 \\ e_0 \end{bmatrix} \right\|^2, \tag{3.11}$$

then the relation (3.6) is inferred with $\nu = \lambda_{\max}(Q)$.
Choosing a Lyapunov function of the form $V(z(t)) = z(t)^T Q z(t)$, with $Q = \mathrm{diag}(P, R)$, inequality (3.7) is rewritten as follows :

$$\begin{bmatrix} z \\ \omega \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} \Pi_1(\Theta, \Xi)^T Q + Q\Pi_1(\Theta, \Upsilon, \Xi) + H^T H & Q\Pi_2 \\ (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix}}^{\Sigma(\Theta,\Upsilon,\Xi)} \begin{bmatrix} z \\ \omega \end{bmatrix} < 0$$
$$\forall(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p,$$

which holds if and only if

$$\Sigma(\Theta, \Upsilon, \Xi) < 0, \forall(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p. \tag{3.12}$$

Thus, according to the convexity principle [1], equality (3.12) holds for all $(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p$ if and only if it is for all $(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$. After developing, we get

$$\Sigma(\Theta, \Upsilon, \Xi) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}(\Theta) & PBK & PE \\ (\star) & \Sigma_{22}(\Upsilon, \Xi) & R(E - LD) \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.13}$$

for all $(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$. where

$$\Sigma_{11}(\Theta) = \mathscr{H}e\{P\mathscr{A}(\theta) - PBK\} + H^T H$$

$$\Sigma_{22}(\Upsilon, \Xi) = \mathscr{H}e\left\{R\Big(\mathscr{A}(\Upsilon) - L\mathscr{C}(\Xi)\Big)\right\}.$$

The main difficulty of the design in (3.13), in LMI setting, stems from the bilinear term PBK. To our knowledge, there is no congruence transformation turning it directly into a linear matrix inequality. This problem is still rather unsolved. In the chapter, we exploit the main idea in [80] to solve the problem of observer-based controller design via LMI, namely the use of the Young relation in a judicious way to handle the standard BMI problem (3.13) without any a priori choice of the Lyapunov matrix or an additional strong equality constraint. For presentation convenience, we give also the approach that uses the equality constraint.

3.3 Observer-based controller synthesis

Let us start by presenting sufficient conditions including an equality constraint to ensure the stability of the system (3.3) and the $\mathscr{H}_\infty$ criterion (3.6). We simply adapte the approach in [5] in order to linearize (3.13). For this purpose, it is necessary to make the assumption that the matrix B is of full column rank, i.e., $\mathrm{rank}(B) = m$.

Theorem 3.3.1. *System* (3.1) *is asymptotically stabilizable by* (3.2) *if there exist positive definite matrices $P, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ and $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so that the following LMI optimization problem with equality constraint has a solution*

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}(\delta)\\
&\textit{subject to the following set of LMIs}\\
&\begin{bmatrix} \mathscr{L}_{11} & B\hat{K} & PE \\ (\star) & \mathscr{L}_{22} & R(E-LD) \\ (\star) & (\star) & -\delta I \end{bmatrix} \qquad (3.14)\\
&PB = B\hat{P} \qquad (3.15)\\
&\textit{for all } (\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}.
\end{aligned}
$$

where

$$
\mathscr{L}_{11} = \mathscr{H}e\left\{P\mathscr{A}(\theta) - B\hat{K}\right\} + H^T H
$$

$$
\mathscr{L}_{22} = \mathscr{H}e\left\{R\mathscr{A}(\Upsilon) - \hat{L}\mathscr{C}(\Xi)\right\}
$$

is feasible for all $(\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$. The stabilizing observer-based control gains are given by $K = \hat{P}^{-1}\hat{K}$ and $L = R^{-1}\hat{L}$ and the optimal disturbance attenuation level is given by $\mu_{\min} = \sqrt{\delta}$.

Proof : Starting by the condition (3.14), we find that if equation (3.15) is verified, then by simple change of variables $\hat{K} = \hat{P}K$, $\hat{L} = RL$ and $\delta = \mu^2$, the inequality (3.13) becomes identical to the LMI (3.14). That ends the proof.

Remarque 3.3.1. *Since the optimization problem in Theorem 3.3.1 contains the constraint of matrix equation $PB = B\hat{P}$, MATLAB LMI Toolbox [81] is hard to solve* (3.14) – (3.15) *directly. To overcome this difficulty, an elegant result is given in [82, Lemma 3]. Indeed, for the matrix B of full column rank, there always exist two orthogonal matrices $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ such that $B = U\begin{bmatrix}\Sigma^T & 0\end{bmatrix}^T V$ where $\Sigma = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_m)$, and $\tau_i (i = 1, \ldots, m)$ are nonzero singular values of B. According to [82, Lemma 3], equality $PB = B\hat{P}$ holds if and only if P has the structure $P = U\mathrm{diag}(P_1, P_2)U^T$. The expression of $\hat{P}$ is then given by $\hat{P} = \Sigma^{-1}V^{-1}P_1\Sigma V$. However, mostly, from the numerical point of view, the alternative approach proposed in [82] doesn't ensure the reachability of the equality constraint despite the feasibility of the inequality constraint* (3.14) *with the particular form of P proposed in [82]. In fact, this is due to the inaccuracy of the singular value decomposition of the numerical solvers returning inexact unitary matrices. Indeed, we simulated 1000 matrices $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, where $n = 1, \ldots, 5$ and $m = 1, \ldots, n$, and we calculated the number of matrices for which* *the numerical solver returned singular value decomposition satisfying $U^TU = I_n$ and $V^TV = I_m$. Among the 14000 simulated matrices, only 293 were decomposed with exact unitary matrices. We conclude that, despite the advantages of this approach in some cases, e.g. [82] and [5], this constraint imposes a particular structure of the Lyapunov matrix, which implicitly depends on the input matrix B.*

Now, we proceed to present our own method to obtain an LMI condition for the robust observer-based controller design problem. Note that this method does not depend on m and works successfully for all $m \leq n$. As in the linear case [79, 80], this method is based on a judicious use of the Young's relation to linearize the classical BMI problem (3.13).

Theorem 3.3.2. *The stabilization of the augmented system* (3.3) *and the $\mathscr{H}_\infty$ criterion* (3.6) *are fulfilled with a minimum attenuation level μ if for a given positive scalar $\varepsilon_1 > 0$ there exist two positive definite matrices $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, two matrices $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ so that the following LMI optimization problem has a solution*

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize}(\delta)\\
&\textit{subject to the following set of LMIs}\\
&\begin{bmatrix}
\mathscr{K}_{11}(\Theta) & \mathscr{X}H^T & 0 & E & B\hat{K} & 0\\
(\star) & -I & 0 & 0 & 0 & 0\\
(\star) & (\star) & \mathscr{K}_{22}(\Upsilon,\Xi) & \mathscr{K}_{23} & 0 & I\\
(\star) & (\star) & (\star) & -\delta I & 0 & 0\\
(\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1\mathscr{X} & 0\\
(\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{X}
\end{bmatrix} < 0 \qquad (3.16)\\
&\textit{for all } (\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
\mathscr{K}_{11}(\Theta) &= \mathscr{H}e\left(\mathscr{A}(\theta)\mathscr{X} - B\hat{K}\right),\\
\mathscr{K}_{22}(\Upsilon,\Xi) &= \mathscr{H}e\left(R\mathscr{A}(\Upsilon) - \hat{L}\mathscr{C}(\Xi)\right),\\
\mathscr{K}_{23} &= RE - \hat{L}D.
\end{aligned}
$$

Hence, the $\mathscr{H}_\infty$ stabilizing observer-based control gains are given by $K = \hat{K}\mathscr{X}^{-1}$ and $L = R^{-1}\hat{L}$, and the optimal disturbance attenuation level is given by $\mu_{\min} = \sqrt{\delta}$.

Proof : The proof of this theorem is similar to that of theorem 2.3.1. That is after the congruence step made by pre and post multiplying inequality (3.13) by $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}$, we get the following equivalent inequality

$$
\Sigma_{equiv}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix}
\tilde{\Sigma}_{11}(\Theta) & BK & E\\
(\star) & \Sigma_{22}(\Upsilon,\Xi) & R(E-LD)\\
(\star) & (\star) & -\mu^2 I
\end{bmatrix} < 0 \qquad (3.17)
$$

for all $(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$. where

$$
\tilde{\Sigma}_{11}(\Theta) = \mathscr{H}e\left\{\mathscr{A}(\theta)\mathscr{X} - B\hat{K}\right\} + \mathscr{X}H^T H\mathscr{X},\ \mathscr{X} = P^{-1},\ \hat{K} = K\mathscr{X}.
$$

This later is equivalent by Schur lemma to the following one

$$\Sigma_{equiv}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \mathscr{H}e\left\{\mathscr{A}(\theta)\mathscr{X} - B\hat{K}\right\} & \mathscr{X}H^T & BK & E \\ (\star) & -I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \Sigma_{22}(\Upsilon,\Xi) & R(E-LD) \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.18}$$

for all $(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n}\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$.
Inequality (3.18) can be rewritten as follow

$$\Sigma_{equiv}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathscr{H}e\left\{\mathscr{A}(\theta)\mathscr{X} - B\hat{K}\right\} & \mathscr{X}H^T & 0 & E \\ (\star) & -I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \Sigma_{22}(\Upsilon,\Xi) & R(E-LD) \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix}}^{\Sigma_0} + \mathscr{H}e\{ \begin{bmatrix} BK \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^T \} < 0 \tag{3.19}$$

for all $(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$. It is notable that an isolated variable K is inferred from the application of the congruence principle. The crucial idea that allows us to overcome the constraint of the coexistence o f the two dependant variables K and $\hat{K}$ is the use of the Young's relation in a judicious way. Indeed, applying Young 's relation to inequality (3.19), we get

$$\Sigma_{equiv} \leq \Sigma_0 + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} BK \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{X} \begin{bmatrix} BK \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \varepsilon_1^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \mathscr{X}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}^T. \tag{3.20}$$

From Schur lemma the right hand side of inequality (3.20) is negative definite if and only if LMI (3.16) is feasible. This end the proof. □

3.4 Resilient controller design

In this section we consider a resilient observer-based controller which is inaccurate. That is we assume that

$$K = K_0 + \Delta K(t),\ L = L_0 + \Delta L(t), \tag{3.21}$$

where ΔK, ΔL represent the gain perturbations, which have the following forms :

$$\Delta K(t) = K_1 F_K(t) K_2,\ \Delta L(t) = L_1 F_L(t) L_2, \tag{3.22}$$

in which K_1,K_2, L_1, and L_2 are known matrices and F_k, F_L satisfy the conditions :

$$F_K^T(t) F_K(t) \leq I,\ F_L^T(t) F_L(t) \leq I \tag{3.23}$$

Replacing in (3.16) L and K by $K_0+\Delta K(t)$ and $L=L_0+\Delta L(t)$ respectively, we have (3.7) satisfied if the following inequality holds

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11}(\Theta) & \mathscr{Z}H^T & 0 & E & B\bar{K} & 0 \\ (\star) & -I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \mathbb{K}_{33}(\Theta,\Xi) & \mathbb{K}_{34} & 0 & I \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\delta I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon\mathscr{Z} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon^{-1}\mathscr{Z} \end{bmatrix}}_{\Omega(\Theta,\Xi)}$$
$$+\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11}^{\Delta} & 0 & 0 & 0 & B\Delta K(t) & 0 \\ (\star) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \mathbb{K}_{33}^{\Delta} & R\Delta L(t)D & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega^{\Delta}(\Xi)} < 0 \tag{3.24}$$
$$\text{for all } (\Theta,\Upsilon,\Xi)\in\mathscr{V}_{\mathscr{H}n}\times\mathscr{V}_{\mathscr{H}n}\times\mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$$

where

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{11}(\Theta) &= \mathscr{H}e\left((\mathscr{A}(\theta))\mathscr{Z}-B\bar{K}\right),\\
\mathbb{K}_{33}(\Upsilon,\Xi) &= \mathscr{H}e\left(R\mathscr{A}(\Upsilon)-\bar{L}\mathscr{C}(\Xi)\right),\\
\mathbb{K}_{34} &= RE-\bar{L}D\\
\bar{K} &= K_0\mathscr{Z},\\
\bar{L} &= RL_0,\\
\mathbb{K}_{11}^{\Delta} &= \mathscr{H}e\left(-B\Delta K(t)\mathscr{Z}\right)\\
\mathbb{K}_{33}^{\Delta} &= \mathscr{H}e\left(-R\Delta L(C+\mathscr{C}(\Xi))\right).
\end{aligned}$$

Now, we will decompose the parametric matrix $\Omega^{\Delta}(\Xi)$ under the suitable following form :

$$\Omega^{\Delta}(\Xi) = X_1^TY_1+Y_1^TX_1+X_2^TY_2+Y_2^TX_2$$

where

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{bmatrix}(BK_1)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
Y_1 &= F_K(t)\begin{bmatrix}K_2\mathscr{Z} & 0 & 0 & 0 & K_2 & 0\end{bmatrix},\\
X_2 &= \begin{bmatrix}0 & 0 & (RL_1)^T & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
Y_2 &= F_L(t)\begin{bmatrix}0 & 0 & L_2(C+\mathscr{C}(\Xi)) & L_2D & 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Applying the Young relation, we deduce that the left side of (3.24) is negative definite if the following inequality holds for some positive scalars ε_2, ε_3.

$$\Omega(\Theta,\Xi)+\varepsilon_2X_1^TX_1+\varepsilon_2^{-1}Y_1^TY_1+\varepsilon_3^{-1}X_2^TX_2+\varepsilon_3Y_2^TY_2<0 \tag{3.26}$$
$$\text{for all } (\Theta,\Upsilon,\Xi)\in\mathscr{V}_{\mathscr{H}n}\times\mathscr{V}_{\mathscr{H}p}.$$

Consequently, the Schur lemma yields to the following BMI inequality which becomes LMI by freezing the scalar ε_1 :

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{K}_{11} & \mathscr{X}H^T & 0 & E & B\bar{K} & 0 & \mathscr{X}K_2^T & 0 \\ (\star) & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \mathfrak{K}_{33} & \mathfrak{K}_{34} & 0 & I & 0 & RL_1 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathfrak{K}_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1\mathscr{X} & 0 & K_2^T & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{X} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.27}$$

$$\text{for all } (\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p}$$

where

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{11}(\Theta) &= \mathbb{K}_{11}(\Theta) + \varepsilon_2 BK_1K_1^T B^T, \\ \mathfrak{K}_{33}(\Upsilon,\Xi) &= \mathbb{K}_{33}(\Upsilon,\Xi) + \varepsilon_3\mathscr{C}(\Xi)^T L_2^T L_2\mathscr{C}(\Xi), \\ \mathfrak{K}_{34}(\Xi) &= \mathbb{K}_{34} + \varepsilon_3\mathscr{C}(\Xi)^T L_2^T L_2 D \\ \mathfrak{K}_{44} &= -\delta I + \varepsilon_3 D^T L_2^T L_2 D, \end{aligned}$$

Theorem 3.4.1. *The stabilization of the augmented system* (5.5) *and the* $\mathscr{H}_\infty$ *criterion* (3.6) *are fulfilled with a minimum attenuation level* μ *if for a given positive scalar* $\varepsilon_1 > 0$ *there exist two positive definite matrices* $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *two matrices* $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\bar{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *two positive scalars* $\varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$ *so that the following LMI optimization problem has a solution*

$$\begin{aligned} &\text{minimize}(\delta) \\ &\textit{subject to the set of LMIs } (3.27), \\ &\textit{for all } (\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Hence, the $\mathscr{H}_\infty$ *stabilizing resilient observer-based control gains are given by* (3.21) *with* $K_0 = \bar{K}\mathscr{X}^{-1}$ *and* $L_0 = R^{-1}\bar{L}$, *and the optimal disturbance attenuation level is given by* $\mu_{\min} = \sqrt{\delta}$.

3.5 Numerical examples and comparisons

This section is divided into two parts, the first one is devoted to the resilient controller synthesized in section 3.4. Whereas in the second part, two numerical examples are given in order to evaluate the conservatism of the design methodologies given in Theorem 3.3.1 and 3.3.2. The goal of the first example is to show that the LPV-based method tolerates nonlinearities with larger values of Lipschitz constant. The second example concerns the $\mathscr{H}_\infty$ method

3.5.1 Example

The aim of this example is to validate the results in section 3.4 about the resilient observer-based controller. To this end, we take again the example of the flexible link robot given in the subsection 2.4.2. But, here, we will not consider the nonlinearity as uncertainties, much more, it will be introduced in the structure of the observer. Then, we deal with the nonlinearity with the LPV reformulation. Thus, we aim to design a robust resilient observer-based controller with

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \; K_2 = 0.1I_4, \; L_1 = I_4, L_2 = 0.01 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

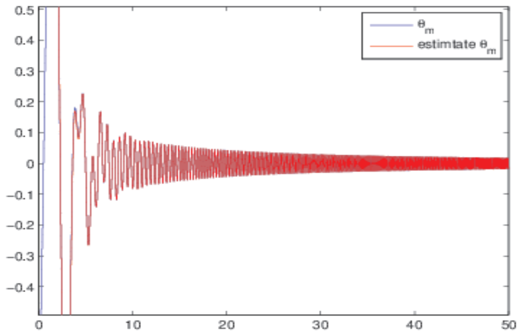
The parameter A, B, C are the same that given in the subsection 2.4.2. the nonlinear function is given by : $f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{bmatrix}$. Then, according to lemma 7 in [29], Θ, and ϒ belong to the following set of vertices

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}_n} = -\frac{Mgh}{J_l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

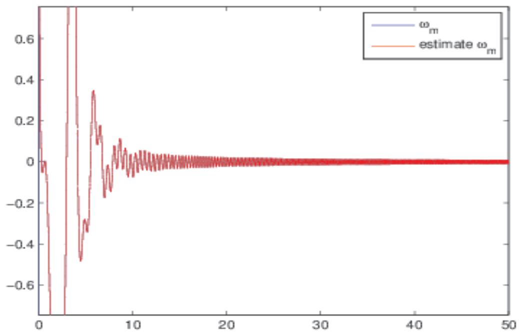
Applying our theorem 3.4.1 with $H = I_4$ and for $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, we get the following gains matrices

$$K_0 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.1470 & 0.4621 & -1.3469 & 0.6159 \end{bmatrix},$$
$$L_0 = \begin{bmatrix} 1.0001 & -112.6616 \\ -0.0000 & 191.8980 \\ 1.0001 & 187.3619 \\ 0.0000 & 539.3788 \end{bmatrix}$$

with an optimal index performance $\mu = 3.86$. The behavior of the system is simulated using the Simulink software and taking as initial conditions $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ and $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$. The results are shown in Figures 3.1 and 3.2 .

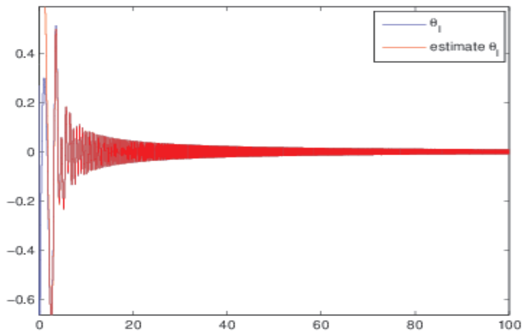


(a) The motor position θ_m

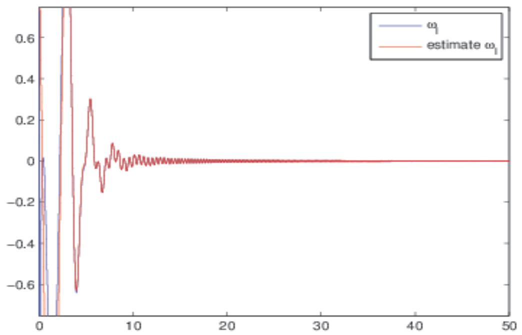


(b) The motor velocity ω_m

FIGURE 3.1 – $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of the motor behavior



(a) The link position θ_l



(b) The link velocity ω_l

FIGURE 3.2 – $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of the link behavior

3.5.2 Evaluation of the conservatism

Evaluation of high Lipschitz constants tolerated

This example is devoted to provide a comparison between the different proposed methods in the $\mathscr{H}_\infty$ free case, i.e. : $E = D = 0$. We will concentrate on the maximum Lipschitz constant allowed by each method. The value of γ_f and γ_g will be increased until the LMIs give no solutions. We simulated 1000 randomly stabilizable and detectable systems under the form (3.1), for $n = 3$, $m = 2$, $p = 1$ and we take the nonlinearities f and g as follows :

$$f(x) = \begin{bmatrix} \Phi(x) & \Phi(x) & \Phi(x) \end{bmatrix}^T,$$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, where g and $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfy :

$$0 \leq \frac{\phi(x_1, x_2, x_3) - \phi(\hat{x}_1, x_2, x_3)}{x_1 - \hat{x}_1} \leq \gamma_\phi$$
$$0 \leq \frac{\phi(\hat{x}_1, x_2, x_3) - \phi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3)}{x_2 - \hat{x}_2} \leq \gamma_\phi$$
$$0 \leq \frac{\phi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3) - \phi(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}{x_3 - \hat{x}_3} \leq \gamma_\phi$$

and

$$0 \leq \frac{g(x_1, x_2, x_3) - g(\hat{x}_1, x_2, x3)}{x_1 - \hat{x}_1} \leq \gamma_g$$
$$0 \leq \frac{g(\hat{x}_1, x_2, x_3) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x3)}{x_2 - \hat{x}_2} \leq \gamma_g$$
$$0 \leq \frac{g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}3)}{x_3 - \hat{x}_3} \leq \gamma_g.$$

The nonlinearities f and g satisfy the reformulated Lipschitz condition (5.7) with $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}} = 0$, $\overline{\gamma}_{\phi_{ij}} = \gamma_\phi$ for all for $i, j = 1, \dots, 3$, and $\underline{\gamma}_{g_{11}} = \underline{\gamma}_{g_{12}} = \underline{\gamma}_{g_{13}} = 0$, $\overline{\gamma}_{g_{11}} = \overline{\gamma}_{g_{12}} = \overline{\gamma}_{g_{13}} = \gamma_g$. Thus, without loss of generality, we can write the matrix Θ at the point $\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, under the following form

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

where $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \in [0, \gamma_\phi]$, $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \in [0, \gamma_\phi]$, $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_3} \in [0, \gamma_\phi]$.

Thus, according to lemma 7 in [29], the number of vertices is $2^3 = 8$, and the set of vertices of Θ and Υ is given by

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} = \left\{ \begin{bmatrix} \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} \\ \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} \\ \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} & \{0, \gamma_\phi\} \end{bmatrix} \right\}$$

Same goes to the matrix Ξ. That is we can write Ξ at $(x - \hat{x})$ under the following form

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{g(x_1, x_2, x_3) - g(\hat{x}_1, x_2, x3)}{x_1 - \hat{x}_1} & \frac{g(\hat{x}_1, x_2, x_3) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x3)}{x_2 - \hat{x}_2} & \frac{g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3) - g(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}3)}{x_3 - \hat{x}_3} \end{bmatrix}.$$

Thus, according to lemma 7 in [29], the number of vertices is $2^3 = 8$ (2 raised to a power equal to the number of the varying parameters), and the set of vertices of Ξ is given by

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}p} = \left\{ \begin{bmatrix} \{0, \gamma_g\} & \{0, \gamma_g\} & \{0, \gamma_g\} \end{bmatrix} \right\}.$$

In all we solved each LMI provided by each approach for 512 combination of (Θ, Υ, Ξ). The simulation results are illustrated in Figure 3.3, which clearly reflect the superiority of the approach in Theorem 3.3.2 giving the better results for each value of the Lipschitz constant. One can see that despite the increasing of the Lipschitz constant, Theorem 3.3.2 provides solutions for more than 90% of the simulated systems whatever the value of $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \leq 10^5$, contrarily to the design method in Theorem 3.3.1 which is very sensitive to the increase of the Lipschitz constant γ and gives best results only for $\gamma \leq 10^{-3}$.

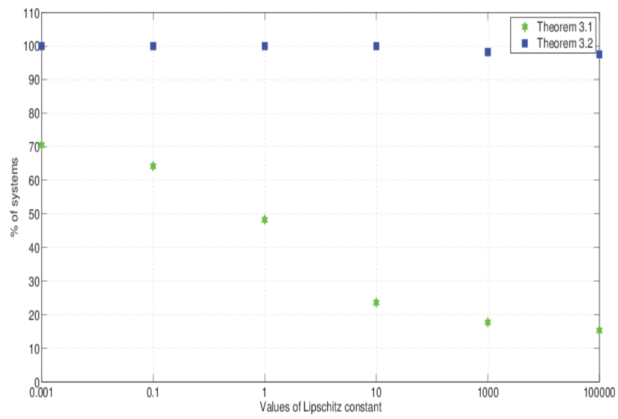


FIGURE 3.3 – Percentage of systems for different values of Lipschitz constant

Evaluation of better index performance tolerated

We have randomly generated 1000 stabilizable and detectable systems. The results are summarized in Table 3.1. Note that the values of the objective function are fixed to be all lower than $\mu_{max} = 10$. As shown in the following table, the approach in Theorem 3.3.2 provides solution for the largest percentage of systems. Note that among the LMIs (3.14)-(3.15) found feasible, 60% returned values of μ larger than those returned by LMIs (3.16). Which means that, LMI(3.16) provides a performance index better than that returned by (3.14)-(3.15) in 60% of cases. Note that the variable ε to be fixed a priori in LMIs (3.16) is returned by the gridding method [77, Remark 5].

Method	**LMIs** (3.14)**-**(3.15)	**LMI** (3.16)
feasible LMIs	39.4%	63.4%

TABLE 3.1 – Superiority of the proposed LMI methodology

3.6 Conclusion

This chapter has studied the problem of $\mathscr{H}_\infty$ stabilization by means of a dynamic output feedback law for a class of continuous-time Lipschitzian nonlinear systems. It is shown that the problem can be reformulated as convex optimization problem in the form of LMI. The results presented in this paper show the superiority of the method that use judiciously the Young inequality over the one retrieved by means of the equality constraint.

Deuxième partie

Contribution à la stabilisation des systèmes à temps discret

Chapitre 4

Observer-based stabilisation of discrete time linear systems with parameter uncertainties by using enhanced LMI conditions

Sommaire

4.1 Introduction **65**
4.2 Problem formulation **66**
4.3 New LMI design method : Enhanced LMI condition **67**
4.4 Observer-based control by using the Euler approximate model **72**
4.5 Conservatism lies in approaches with equality constraint **75**
4.6 Numerical examples and comparisons **77**
4.6.1 Example 1 : evaluation of maximum admissible uncertainty 77
4.6.2 Example 2 : Euler approximate model 78
4.6.3 Conservatism evaluation in the uncertainty-free case 79
4.6.4 Application to a one-link robot manipulator 79
4.7 Conclusion **81**

4.1 Introduction

In line with **chapter 2**, here we focus on the problem of the observer-based control for linear systems subject to norm-bounded uncertainties in discrete time case by using LMI design techniques. Thus, we propose a new observer-based controller design method that overcomes the difficulty of dealing with the original bilinear matrix inequality (BMI) stability conditions. Specifically, the aim of this part consists in turning such conditions into more tractable LMIs thanks to a judicious use of the famous Young inequality and some algebraic transformations. The proposed design methodology is related to the approach presented by [46] for Lipschitz nonlinear systems. The advantage of our design technique lies in the use of a more general Lyapunov matrix that leads to a more favorable LMI condition, which makes our method less conservative as compared with [3] and [46]. In order to illustrate the advantages in terms of conservatism reduction, the results on an extensive campaign of Monte Carlo simulations will be discussed.

4.2 Problem formulation

Consider the following class of linear discrete-time uncertain systems :

$$x_{k+1} = (A+\Delta A(k))x_k + Bu_k \tag{4.1a}$$
$$y_k = (C+\Delta C(k))x_k \tag{4.1b}$$

where $x_k \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y_k \in \mathbb{R}^p$ is the output measurement, and $u_k \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector. The nominal matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are known and constant. The pairs (A,B) and (A,C) are assumed to be stabilizable and detectable, respectively. The uncertain terms $\Delta A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\Delta C(k) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are unknown matrices that account for time-varying parameter uncertainties and are assumed to be structured under the form

$$\Delta A(k) = M_A F_A(k) N_A, \quad \Delta C(k) = M_C F_C(k) N_C \tag{4.2}$$

where M_A, N_A, M_C, and N_C are known real constant matrices ; $F_A(k)$ and $F_C(k)$ are unknown real time-varying matrices satisfying the inequalities

$$F_A^T(k)F_A(k) \leq I, \quad F_C^T(k)F_C(k) \leq I, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

For the sake of simplicity, we will denote in the sequel $\Delta A(k)$ and $\Delta C(k)$ by ΔA and ΔC, respectively. Such a notation will be adopted also for all the matrices that depend on $\Delta A(k)$ and $\Delta C(k)$.

The asymptotic stabilization of the discrete-time linear system (5.1) is addressed by using the Luenberger-type observer

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \tag{4.4}$$

where $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is the observer gain to be determined and $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ is the estimate of x_k at time k. Let $e_k := x_k - \hat{x}_k$ be the estimation error. Then, under the feedback

$$u_k = -K\hat{x}_k \tag{4.5}$$

where $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is the controller gain, the closed-loop dynamics is described by

$$z_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A-BK+\Delta A & BK \\ \Delta A - L\Delta C & A-LC \end{bmatrix}}_{\Pi} z_k \tag{4.6}$$

where $z_k^T = (x_k^T, e_k^T) \in \mathbb{R}^{2n}$ is the augmented state vector.

The aim is to find suitable controller and observer gains K and L that guarantee the asymptotic stability of (4.6). Toward this end, let $V_k := V(z_k) = z_k^T P z_k$ with $P > 0$ be the Lyapunov function candidate. The closed-loop system (4.6) is asymptotically stable if there exists a matrix $P > 0$ such that the difference between the Lyapunov functions at two consecutive time instants, $\Delta V_k := V_{k+1} - V_k$, is strictly negative for all $z_k \neq 0$, i.e.,

$$\Delta V_k = z_k^T(\Pi^T P \Pi - P)z_k < 0, \forall z_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Then, inequality (4.7) holds if the following sufficient matrix inequality is fulfilled :

$$\Pi^T P \Pi - P < 0\,. \tag{4.8}$$

The LMI approach for this problem is a challenge due to its BMI nature. Several techniques are available to solve (4.8) (see [3, 22, 25, 83]), but they turn out to be quite conservative. Based on the aforesaid, here we propose a new manner to handle this BMI. Specifically, thanks to a judicious use of Young inequality and some algebraic decompositions, we construct a systematic synthesis methodology that allows one to find the observer and controller gains simultaneously. Note that such a simultaneous synthesis is not possible with the various approaches proposed by [3, 20].

4.3 New LMI design method : Enhanced LMI condition

In this section, we shall present a numerically efficient technique to find the observer-based controller gains in such a way to stabilize the system in closed loop, i.e., to ensure that (4.6) is asymptotically stable. We summarize the resulting LMI design conditions in the following theorem.

Theorem 4.3.1. *If there exist $\varepsilon_2 > 0$, two symmetric positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ and $\mathscr{G}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, and $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ such that the LMI*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{W}_{11} & \mathscr{W}_{12} \\ (\star) & -\mathscr{P} \end{bmatrix} & \mathscr{W}_2 & \mathscr{W}_3 & \mathscr{W}_4 & \mathscr{W}_5 \\ (\star) & \mathbb{D}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{33} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.9}$$

with

$$\mathscr{P} = \begin{bmatrix} \mathscr{P}_{11} & \mathscr{P}_{12} \\ \mathscr{P}_{12}^T & \mathscr{P}_{22} \end{bmatrix},\; \mathscr{W}_{11} = \begin{bmatrix} \mathscr{P}_{11} - 2\mathscr{G}_1 + \varepsilon_2 M_A M_A^T & \mathscr{P}_{12} \\ \mathscr{P}_{12}^T & \mathscr{P}_{22} - (G_2 + G_2^T) \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{W}_{12} = \begin{bmatrix} A\mathscr{G}_1 - B\hat{K} & 0 \\ 0 & G_2^T A - \hat{L}C \end{bmatrix},\; \mathscr{W}_2 = \begin{bmatrix} \hat{K}^T B^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathscr{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_A\mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix}^T,\; \mathscr{W}_4 = \begin{bmatrix} 0 & M_A^T G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_A\mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathscr{W}_5 = \begin{bmatrix} 0 & M_C^T \hat{L}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_C\mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbb{D}_{11} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1\mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{D}_{22} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_3 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_3^{-1} I \end{bmatrix},\; \mathbb{D}_{33} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_4 I & 0 \\ 0 & -\varepsilon_4^{-1} I \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

is feasible for some positive constants ε_1, ε_3, *and* ε_4, *then* (4.6) *is asymptotically stable with* $K = \hat{K}\mathscr{G}_1^{-1}$ *and* $L = (G_2^T)^{-1}\hat{L}$.

Proof : In line with approach by [60], we linearize the BMI (4.8) by introducing an additional matrix of appropriate dimension that can be regarded as a slack variable and is denoted by G. Indeed, using [60, Theorem 1], the inequality (4.8) turns out to be equivalent to the following :

$$\begin{bmatrix} P-G-G^T & G^T\Pi \\ (\star) & -P \end{bmatrix} < 0. \tag{4.11}$$

The use of (4.11) allows one to eliminate the coupling between the Lyapunov matrix and the observer and controller gains. By choosing $G = \mathrm{diag}(G_1, G_2)$, we deduce that (4.11) holds if the condition

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \begin{bmatrix} G_1^T(A-BK+\Delta A) & G_1^T BK \\ G_2^T(\Delta A - L\Delta C) & G_2^T(A-LC) \end{bmatrix} \\ & \\ (\star) & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{4.12}$$

with

$$\bar{P} = P - \mathrm{diag}\left(G_1 + G_1^T, G_2 + G_2^T\right)$$

is fulfilled. Note that (4.12) is still a BMI because of the presence of the coupling term $G_1^T BK$. To linearize such a BMI, we choose $G_1 = G_1^T$ and pre- and post-multiply it by $\mathrm{diag}(G_1^{-1}, I, G_1^{-1}, I)$. Therefore, (4.12) can be rewritten as follows :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ (\star) & \Sigma_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.13}$$

where

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} &= \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2G_1^{-1} & 0 \\ 0 & G_2 + G_2^T \end{bmatrix}, \\
\Sigma_{12} &= \begin{bmatrix} (A-BK+\Delta A)G_1^{-1} & BK \\ G_2^T(\Delta A - L\Delta C)G_1^{-1} & G_2^T(A-LC) \end{bmatrix}, \\
\Sigma_{22} &= -\begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

To simplify the presentation, we introduce the following notations and changes of variables :

$$\mathscr{P} = -\Sigma_{22}, \quad \mathscr{G}_1 = G_1^{-1}, \quad \hat{K} = KG_1^{-1}, \quad \hat{L} = G_2^T L.$$

Then, (4.13) can be rewritten under the following more suitable form :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \mathscr{P} - \begin{bmatrix} 2\mathscr{G}_1 & 0 \\ (\star) & G_2 + G_2^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A\mathscr{G}_1 - B\hat{K} & 0 \\ 0 & G_2^T A - \hat{L}C \end{bmatrix} \\ (\star) & -\mathscr{P} \end{bmatrix}}^{\Sigma}$$

$$+ \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} \Delta A\mathscr{G}_1 & 0 \\ G_2^T(\Delta A - L\Delta C)\mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & 0 \end{bmatrix}}^{\Sigma_\Delta}$$

$$+ \overbrace{\begin{bmatrix} BK \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{X^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}}^{Y} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}}^{Y^T} \overbrace{\begin{bmatrix} (BK)^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{X} < 0. \tag{4.14}$$

Using the Young inequality, we obtain that (5.27) holds if the inequality

$$\begin{aligned} &\Sigma + \Sigma_\Delta + X^T S X + Y^T S^{-1} Y \\ &= \Sigma + \Sigma_\Delta - \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

is satisfied for some $S > 0$. The key idea consists in judiciously replacing S with $\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1$ in (5.28) and retrieving the variable $\hat{K} = K\mathscr{G}_1$ to eliminate the isolated variable K. Hence, using the Schur lemma, (5.28) holds if

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Sigma + \Sigma_\Delta & \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 SX)^T & Y^T \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1\mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.16}$$

is satisfied, where $\varepsilon_1 SX = \begin{bmatrix} (B\hat{K})^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Now, we linearize the last inequality with respect to the uncertainties, i.e., we write Ω as a sum of matrix without uncertainties, namely $\bar{\Omega}$, and matrices containing the uncertainties terms, where

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Sigma & \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 SX)^T & Y^T \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1\mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Consequently, using the Young inequality and (4.3), we have

$$\Omega \leq \bar{\Omega} + \varepsilon_2 Z_1 Z_1^T + \frac{1}{\varepsilon_2} Z_2 Z_2^T + \frac{1}{\varepsilon_3} Z_3 Z_3^T + \varepsilon_3 Z_2 Z_2^T + \frac{1}{\varepsilon_4} Z_4 Z_4^T + \varepsilon_4 Z_5 Z_5^T \tag{4.17}$$

for any $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$, and $\varepsilon_4 > 0$, where

$$\begin{aligned} &Z_1^T = \begin{bmatrix} M_A^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_A\mathscr{G}_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_3^T = \begin{bmatrix} 0 & M_A^T G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &Z_4^T = \begin{bmatrix} 0 & M_C^T \hat{L}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_C\mathscr{G}_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Using the Schur lemma in the right hand side of (5.30), we obtain that $\Omega < 0$ holds if the LMI (4.9) is satisfied, which ends the proof. □

Before proceeding with the next section, we briefly comment what has been presented so far to clarify the novel contribution given by Theorem 4.3.1 as compared with the results available in the current literature. In particular, comparisons are deserved with the approaches proposed by [3, 46].

Remarque 4.3.1. *In [3], a free parameter, denoted by α, is introduced to solve the problem of the observer-based controller design by converting the original BMI into two dependent BMI conditions to design controller and observer (see also [84]). This decoupling technique leads to the apparition of the term αP_1^{-2}. In order to linearize this term, an additional parameter β is introduced. Therefore, a supplementary condition on the matrix P_1 is required, namely,*

$$P_1 > \frac{\alpha}{\beta^2} I \tag{4.18}$$

and from [3, LMI (11)], a necessary condition for the feasibility of LMI (11) in [3] is :

$$P_1 > \varepsilon M_A M_A^T. \tag{4.19}$$

It follows from (4.18) *and* (4.19) *that*

$$P_1 > \max\{\varepsilon M_A M_A^T, \frac{\alpha}{\beta^2} I\}.$$

Furthermore, the integration of the variable G_1 reduces the conservatism in the sense that if we put $G_1 = P_1$, we end up with the condition (4.19) *that restricts the set of solutions of P_1. However, with $G_1 \neq P_1$, we end up with $W_{11} < 0$ that requires only that $\mathscr{P}_{11} < 2\mathscr{G}_1 - \varepsilon M_A M_A^T$, which is more general than* (4.19) *and does not requires the strong constraint* (4.18)*. This makes our design methodology less conservative than the approach by [3].*

Remarque 4.3.2. *The choice of a diagonal matrix G is justified by the desire to unify the structures of the variables $\hat{K}$ and $\hat{L}$. Otherwise, we will end up with terms like $G_{12}L$, $G_{22}L$, $G_{12}^T BK$ and $G_{11}BK$ which leads to $G_{12} = G_{11} = G_{22}$. Toward this end, we need $G_{12}L = G_{22}L$ and $G_{12}^T B = G_{11}B$ for $\hat{L}$ and $\hat{K}$, respectively. This is the reason for which a choice of a diagonal matrix G overcomes the problem.*

Remarque 4.3.3. *The condition* (4.9) *is an LMI if the scalars ε_1, ε_3, and ε_4 are fixed a priori. The computational issue involved by the LMI* (4.9) *can be tackled by using the gridding technique proposed in [85, Remark 5]. Such a technique consists in scaling ε_i by defining $\kappa_i = \varepsilon_i/(1+\varepsilon_i)$. Clearly, $\varepsilon_i > 0$ if and only if $\kappa_i \in (0,1)$. Then, we assign a uniform subdivisions of the interval $(0,1)$ and solve* (4.9) *for each subdivision. This may be onerous from the point of view of complexity, i.e., if we consider subintervals of length equal to Δ, one must solve LMI* (4.9) *for at most $(1/\Delta)^3$ times. Of course, as it would be preferable to treat also ε_3 and ε_4 as tunable parameters, we can use the Young inequality by considering α_3, α_4, β_3, and β_4 instead of ε_3 and ε_4 after replacing ε_3 and ε_4 with α_3^2/β_3^2 and α_4^2/β_4^2, respectively. Since*

$$\left(\beta - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 I \geq 0, \quad \left(\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 I \geq 0 \tag{4.20}$$

for any real α and β, we obtain the inequalities

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2} I \leq \beta^2 I - 2\alpha I, \; -\frac{\beta^2}{\alpha^2} I \leq \alpha^2 I - 2\beta I$$

to bound the terms $-\varepsilon_3 I$, $-\varepsilon_4 I$ and their respective inverses $-\varepsilon_3^{-1}I$, $-\varepsilon_4^{-1}I$ in (4.9)*. Thus, the Schur lemma leads to the LMI*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{W}_{11} & \mathscr{W}_{12} \\ (\star) & -\mathscr{P} \end{bmatrix} & \mathscr{W}_2 & \mathscr{W}_3 & \mathscr{W}_4 & \mathscr{W}_5 \\ (\star) & \mathbb{D}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{44} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{55} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.21}$$

with $\mathscr{W}_{11}$ and $\mathscr{W}_{12}$, $\mathscr{W}_3, \mathscr{W}_4, \mathscr{W}_5$ are defined in (4.10) *and*

$$\mathbb{D}_{44} = \begin{bmatrix} -2\beta_3 I & \alpha_3 I & 0 & 0 \\ \alpha_3 I & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_3 I & \beta_3 I \\ 0 & 0 & \beta_3 I & -I \end{bmatrix}, \mathbb{D}_{55} = \begin{bmatrix} -2\beta_4 I & \alpha_4 I & 0 & 0 \\ \alpha_3 I & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_4 I & \beta_4 I \\ 0 & 0 & \beta_4 I & -I \end{bmatrix}.$$

Note that (4.21) *is linear with respect to the variables α_3, α_4, β_3, and β_4. Still, we have to deal with the variable ε_1 related to the matrix $\mathscr{G}_1$ with the gridding technique. Of course, the additional constraints* (4.20) *breed some conservatism, but, when the resulting LMI* (4.21) *is feasible, the computational effort is reduced.*

Remarque 4.3.4. *As pointed out in [46], the choice of a non-diagonal Lyapunov matrix leads to coupling between the observer and controller parameters. However, the use of judicious mathematical decompositions and congruence principle allows one to overcome this coupling by considering a non-diagonal Lyapunov matrix. Hence, our design methodology can be viewed as an extension of the approach by [46]. In other words, all the solutions of the LMI obtained by using such an approach can be regarded as particular solutions of the LMI* (4.9)*. Using a diagonal Lyapunov matrix $P = \mathrm{diag}(P_1, P_2)$ and the congruence principle as in [46], the inequality* (4.7) *is equivalent to the following one :*

$$\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Pi^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} < 0. \tag{4.22}$$

In line with [46], the factorization

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

and the Schur lemma lead to the following reformulation of (4.22) *:*

$$\begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \Pi \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ (\star) & -\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0. \tag{4.23}$$

Now, after linearizing the last inequality with respect to the uncertainties and judiciously using the

Young inequality, we obtain the LMI condition

$$\begin{bmatrix} \mathscr{W} & \bar{\mathscr{W}}_2 & \bar{\mathscr{W}}_3 & \bar{\mathscr{W}}_4 & \bar{\mathscr{W}}_5 \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1\mathscr{P}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{P}_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{33} \end{bmatrix} < 0 \tag{4.24}$$

where

$$\mathscr{P}_1 = P_1^{-1}, \bar{\mathscr{W}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{K}^T B^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \bar{\mathscr{W}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_A\mathscr{P}_1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathscr{W}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & M_A^T P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_A\mathscr{P}_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \bar{\mathscr{W}}_5 = \begin{bmatrix} 0 & M_C^T \hat{L}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_C\mathscr{P}_1 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathscr{W} = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} \mathscr{P}_1 - \varepsilon_2 M_A M_A^T & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A\mathscr{P}_1 - B\hat{K} & 0 \\ 0 & P_2 A - \hat{L}C \end{bmatrix} \\ (\star) & -\begin{bmatrix} \mathscr{P}_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

Note that, if for fixed positive scalars $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ and ε_4, the LMI (4.24) *is feasible and gives a solution $(\mathscr{P}_1, P_2, \hat{K}, \hat{L}, \varepsilon_2)$, then for the same values of $\varepsilon_i, i \in \{1,3,4\}$, fixed a priori, the solutions $\mathscr{P}_{11} = \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_{12} = 0, \mathscr{P}_{22} = P_2, \mathscr{G}_1 = \mathscr{P}_1, G_2 = P_2, \hat{K}, \hat{L}$, and ε_2 satisfy the LMI* (4.9)*. Indeed, in Section 4.6 we will present examples for which, with the same values of $\varepsilon_i, i \in \{1,3,4\}$, the LMI* (4.9) *provides solutions, while the LMI* (4.24) *fails. This shows the importance of the introduction of the matrix G.*

4.4 Observer-based control by using the Euler approximate model

Based on the results of the previous sections, hereafter we focus our study on the observer-based stabilization of discrete-time systems obtained by applying the Euler approximation to the same kind of plants we have considered in the previous section. Mainly, we will generalize the approach proposed in [21] and provide a less conservative LMI condition as compared with [21]. In line with [21], let us consider the linear continuous-time system with uncertain parameters as follows :

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + Bu \tag{4.26a}$$
$$y = (C + \Delta C(t))x \tag{4.26b}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ is the output vector, and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector. The matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ are known. We assume that $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\Delta C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ satisfy conditions equivalent to (4.2) and (4.3). The pairs (A,B) and (A,C)

are stabilizable and detectable, respectively. The observer-based controller is described by the following equations

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y) \tag{4.27a}$$
$$u = K\hat{x} \tag{4.27b}$$

where $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ is the estimate of $x(t)$ at time t, $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is the control gain, and $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ is the observer gain. Thus, we obtain

$$\dot{x} = (A + BK + \Delta A(t))\,x + BK\varepsilon \tag{4.28a}$$
$$\dot{\varepsilon} = -(\Delta A(t) + L\Delta C(t))\,x + (A + LC)\,\varepsilon \tag{4.28b}$$

where $\varepsilon(t) := \hat{x}(t) - x(t)$ is the estimation error of the system. The Euler discretization of the continuous-time uncertain system (4.26) leads to the following :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= (I + \delta(A + \Delta A))\,x_k + \delta B u_k \\ y_k &= (C + \Delta C)x_k \end{cases} \tag{4.29}$$

where $k = 0, 1, \ldots$. From now on, we use the notations $\Delta A := \Delta A(k\delta)$ and $\Delta C := \Delta C(k\delta)$. The goal consists in designing a controller $u_k := u_\delta(\hat{x}(k\delta))$ parameterized by δ. The Euler discretization of the observer (4.27) is given by

$$\hat{x}_{k+1} = (I + \delta A)\,\hat{x}_k + \delta B u_k + \delta L\,(C(\hat{x}_k - x_k) - \Delta C x_k) \tag{4.30}$$

Hence, we have

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I + \delta(A + \Delta A) + \delta BK & \delta BK \\ -\delta(\Delta A + L\Delta C) & I + \delta A + \delta LC \end{bmatrix}}_{\Pi(\delta)} \begin{bmatrix} x_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

where $z_k^T := (x_k^T, \varepsilon_k^T)$. Let $V_k := V(z_k) = z_k^T P z_k$ with $P > 0$ the Lyapunov function candidate. Since

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k = z_k^T \left(\Pi(\delta)^T P \Pi(\delta) - P \right) z_k\,,$$

the augmented system (4.31) is asymptotically stable if

$$\Pi(\delta)^T P \Pi(\delta) - P < 0. \tag{4.32}$$

It is straightforward to verify that, if (4.32) is satisfied for some $\bar{\delta}$, then it still holds for any $\delta \le \bar{\delta}$. Let us denote by $\delta_{\max}$ the maximum value of the sampling period δ for which (4.32) holds. Applying the same reasoning as in the proof of Theorem 4.3.1 to the augmented system (4.31), we obtain new sufficient conditions for the asymptotic stability of both (4.28) and (4.31), as summarized in the following theorem.

Theorem 4.4.1. *If there exist two positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ and $\mathscr{G}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, and a positive scalar ε_2 such that the condition*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathscr{T}_{11} & \mathscr{T}_{12} \\ \star & -\mathscr{P} \end{bmatrix} & \mathscr{T}_2 & \mathscr{T}_3 & \mathscr{T}_4 & \mathscr{T}_5 \\ (\star) & \mathbb{D}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & [-\varepsilon_2 I] & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{22} & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{D}_{33} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.33}$$

where $\mathscr{P}, \mathbb{D}_{11}, \mathbb{D}_{22}, \mathbb{D}_{33}$ *are defined in* (4.10) *and*

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathscr{P}_{11} - 2\mathscr{G}_1 + \varepsilon_2 M_A M_A^T & \mathscr{P}_{12} \\ (\star) & \mathscr{P}_{22} - (G_2 + G_2^T) \end{bmatrix}, \\
\mathscr{T}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 + \bar{\delta} A \mathscr{G}_1 + \bar{\delta} B \hat{K} & 0 \\ (\star) & G_2^T + \bar{\delta} G_2^T A + \bar{\delta} \hat{L} C \end{bmatrix}, \\
\mathscr{T}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{\delta} \hat{K}^T B^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T, \\
\mathscr{T}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\delta} N_A \mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
\mathscr{T}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\delta} M_A^T G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_A \mathscr{G}_1 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
\mathscr{T}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & \bar{\delta} M_C^T \hat{L}^T & 0 & \\ 0 & 0 & N_C \mathscr{G}_1 & 0 \quad 0 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

is feasible for some positive constants $\bar{\delta}, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4$*, then* (4.28) *and* (4.31) *with* $K = \hat{K}\mathscr{G}_1$ *and* $L = \hat{L}(G_2^T)^{-1}$ *are asymptotically stable for any sampling period* $\delta < \bar{\delta}$*.*

Proof : The proof follows likewise in Theorem 4.3.1, hence it is omitted. □

Remarque 4.4.1. *In the LMI* (4.33)*, the parameter* $\bar{\delta}$ *must be chosen a priori. Otherwise, in [21, p.290, Theorem 2] the sampling period* δ *is considered as a variable, but the authors need to have* $\delta = \beta/\alpha < \delta_{\max}$*, which means that their LMI conditions depend on* $\delta_{\max}$*. Such a condition in the proposed design method is not required because of the "a priori" choice of* $\bar{\delta}$*.*

Remarque 4.4.2. *If in particular we choose* $G_1 = G_2 = \alpha I$ *in Theorem 4.3.1, we obtain the LMI (C3) given in [21, p. 290, Theorem 2]. In this case, the separation done in* (5.27) *is no longer necessary, since the parameter* α *(or the matrix* $G_1 = \alpha I$*) is everywhere related to the variable* K*. Hence, a change of variable is possible. Also, the step of congruence principle* (4.12) *is omitted since, with this particular form of* G*, we have* $G_1 KB = KG_1 B$*. This leads to possible change of variables. Indeed, for* $G_1 = G_2 = \alpha I$*,* (4.12) *can be rewritten as follows :*

$$\Theta = \begin{bmatrix} P - \begin{bmatrix} 2\alpha I & 0 \\ 0 & 2\alpha I \end{bmatrix} & \Theta_{12} \\ (\star) & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{4.35}$$

where

$$\Theta_{12} = \begin{bmatrix} \alpha(I + \bar{\delta}(A + BK + \Delta A)) & \alpha \bar{\delta} BK \\ -\alpha \bar{\delta}(\Delta A + L \Delta C) & \alpha(I + \bar{\delta}(A + LC)) \end{bmatrix}$$

or equivalently

$$\widetilde{\Theta} = \begin{bmatrix} -P & \Theta_{12}^T \\ (\star) & P - \begin{bmatrix} 2\alpha I & 0 \\ (\star) & 2\alpha I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0. \tag{4.36}$$

Now, we linearize (4.36) *with respect to the uncertainties and rewrite (4.36) as in* (5.30)*, i.e.,* $\widetilde{\Theta} = \overline{\Theta} + \Theta_\Delta$ *(see also [21]), where* $\widetilde{\Theta}_\Delta$ *corresponds to the matrix containing all the uncertainties. Using the Young inequality, for any* $\varepsilon_1 > 0$*,* $\varepsilon_2 > 0$*,* $\varepsilon_3 > 0$ *we have*

$$\widetilde{\Theta} \leq \overline{\Theta} + \varepsilon_1 Z_1 Z_1^T + \frac{1}{\varepsilon_1} Z_2 Z_2^T + \varepsilon_2 Z_3 Z_3^T + \frac{1}{\varepsilon_2} Z_2 Z_2^T + \varepsilon_3 Z_4 Z_4^T + \frac{1}{\varepsilon_3} Z_5 Z_5^T,$$

where $Z_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_A^T & 0 \end{bmatrix}$, $Z_2^T = \begin{bmatrix} \bar{\delta}\alpha N_A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Z_3^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M_A^T \end{bmatrix}$, $Z_4^T = \begin{bmatrix} N_C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Z_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{\delta}\alpha M_C^T L^T \end{bmatrix}$. *From the Schur lemma, we deduce that* (4.36) *holds if the LMI*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{W}_{11} & -P_{12} & \mathbb{B}_{11} & 0 & \bar{\delta}\alpha N_A^T & \bar{\delta}\alpha N_A^T & 0 \\ (\star) & -P_{22} & \bar{\delta}\alpha(BK)^T & \mathbb{B}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & \mathbb{W}_{22} & -P_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & \mathbb{W}_{33} & 0 & 0 & \alpha\bar{\delta}LM_C \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.37}$$

is feasible, where $\mathbb{W}_{11} = -P_{11} + \varepsilon_3 N_C^T N_C$, $\mathbb{B}_{11} = \alpha(I + \bar{\delta}A^T + \bar{\delta}K^T B^T)$, $\mathbb{B}_{22} = \alpha(I + \bar{\delta}A^T + \bar{\delta}C^T L^T)$, $\mathbb{W}_{22} = P_{11} - 2\alpha I + \varepsilon_1 M_A M_A^T$, $\mathbb{W}_{33} = P_{22} - 2\alpha I + \varepsilon_2 M_A M_A^T$. *Using the notations* $\beta = \alpha\bar{\delta}$, $\tilde{K} = \beta K$, *and* $\tilde{L} = \beta L$, *it follows that* (4.37) *corresponds to condition (C3) in [21, p. 290, Theorem 2], which shows that our design method provides a more general LMI condition as compared with [21].*

4.5 Conservatism lies in approaches with equality constraint

In what follows, we present the discrete version of [5, Theorem 2] by sketching the proof of the theorem with the essential steps needed to achieve the stability conditions. We also demonstrate that an additional condition on the state matrix A for a particular class of systems is required to apply such a result.

Theorem 4.5.1. *System* (5.1) *is asymptotically stabilizable by the observer-controller cascade given by* (4.4) *and* (4.5) *with* $K = \hat{K}\hat{P}^{-1}$ *and* $L = \hat{L}R^{-1}$ *if there exist some positive constants* ε_1, ε_2, ε_3, *two positive definite matrices* $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *and* $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *matrices* $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\hat{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *such that the condition*

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{Q} & \begin{bmatrix} A^T P - \hat{K}^T B^T & 0 \\ \hat{K}^T B^T & A^T R - C^T \hat{L}^T \end{bmatrix} \\ (\star) & -Q \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ PM_A \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ RM_A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{L}M_C \end{bmatrix} \\ (\star) & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.38}$$

with

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} P - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) N_A^T N_A - \varepsilon_3 N_C^T N_C & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

subject to the constraint equality

$$PB = B\hat{P} \tag{4.39}$$

is feasible.

Proof : We apply the approach by [5] to study the asymptotic stability of the augmented system (4.6) with the same Lyapunov function proposed therein, i.e., $V(z_k) = z_k^T Q z_k$, where $Q = \mathrm{diag}(P, R)$. A sufficient and necessary condition for the asymptotic stability of the augmented system (4.6) is

$$\begin{bmatrix} -Q & \Pi^T Q \\ (\star) & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{4.40}$$

or equivalently

$$\begin{bmatrix} -Q & \begin{bmatrix} A^T P - K^T B^T P + (\Delta A)^T P & (\Delta A)^T R - (\Delta C)^T L^T R \\ K^T B^T P & A^T R - C^T L^T R \end{bmatrix} \\ (\star) & -Q \end{bmatrix} < 0. \tag{4.41}$$

Following the approach by [5], we have to impose $PB = B\hat{P}$, $\hat{K} = \hat{P}K$, $\hat{L} = RL$, and we obtain the following inequality :

$$\begin{bmatrix} -Q & \begin{bmatrix} A^T P - \hat{K}^T B^T & 0 \\ \hat{K}^T B^T & A^T R - C^T \hat{L}^T \end{bmatrix} \\ (\star) & -Q \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

$$+ \begin{bmatrix} N_A^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_A^T P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ PM_A \\ 0 \end{bmatrix} F_A \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} N_A^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_A^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M_A^T R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ RM_A \end{bmatrix} F_A \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} N_C^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_C^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & M_C^T \hat{L}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{L}M_C \end{bmatrix} F_C \begin{bmatrix} N_C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{4.43}$$

Using Young's inequality and Schur Lemma, we deduce that the inequality (4.42) holds if the LMI condition (4.38) under the constraint equality (4.39) is feasible. □

Notice that if we consider a class of systems of the following form :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

the equality constraint $PB = B\hat{P}$ leads to $P_{12} = B^{\perp}PB = 0$ with $B^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$, which means that the Lyapunov matrix P is diagonal. On the other hand, the LMI (4.38) yields

$$-P + \Big(A - BK\Big)^T P \Big(A - BK\Big) = \begin{bmatrix} \mathbf{(1.1)} & \mathbf{(1.2)} \\ \mathbf{(1.2)}^T & \mathbf{(2.2)} \end{bmatrix} < 0$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{(1.1)} &= -P_{11} + (A_{11} - B_1 K_1)^T P_{11} (A_{11} - B_1 K_1) + A_{21}^T P_{22} A_{21}, \\ \mathbf{(1.2)} &= (A_{11} - B_1 K_1)^T P_{11} (A_{12} - B_1 K_2) + A_{21}^T P_{22} A_{22}, \\ \mathbf{(2.2)} &= -P_{22} + A_{22}^T P_{22} A_{22}. \end{aligned}$$

Hence, A_{22} must be Schur stable to guarantee

$$-P_{22} + A_{22}^T P_{22} A_{22} < 0. \tag{4.45}$$

We conclude that for the particular class of systems (4.44), the Schur stability condition (4.45) is necessary to ensure the feasibility of (4.38), which is a stronger condition than the pure stabilizability as required by our approach.

4.6 Numerical examples and comparisons

This section is devoted to numerical evaluation of the conservatism of the proposed design methodology as compared with some existing methods in the literature. The results of Section 4.6.1 show that our approach tolerates larger bounds of the uncertainties than those in [3,46]. Section 4.6.2 illustrates that our design method is less conservative than that by [21] for Euler approximate models. In Section 4.6.3, the feasibility conservatism of our method, as compared with [22] and [5], is evaluated via a Monte Carlo simulation campaign in the uncertainty-free case.

4.6.1 Example 1 : evaluation of maximum admissible uncertainty

Consider the example given in [3], i.e., an uncertain discrete-time linear system as follows :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.4 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ -0.3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

With these parameters, the proposed design methodology performs successfully, as we solved the LMI (4.9) of Theorem 4.3.1 for $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_3 = 0.9590$, $\varepsilon_4 = 1.2731$ by finding the gains

$$K = \begin{bmatrix} -1.1146 & -0.5936 & 0.3172 \\ 1.4692 & 0.8312 & 1.3206 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.3784 & -0.1419 \\ 1.1040 & -0.4140 \\ 0.5036 & -0.1889 \end{bmatrix}.$$

Even with the use of additional constraints according to Remark 4.3.3, the LMI (4.21) was found feasible for $\varepsilon_1 = 1$. In addition, with a diagonal Lyapunov matrix, the approach by [46] (i.e., using (4.24)) provides solutions for the same values of ε_i, $i \in \{1,3,4\}$.
To show the superiority of the proposed design methodology as compared with [3, 46], we considered uncertainty matrices that scale with the parameters γ_1 and γ_2 as follows :

$$M_A = \gamma_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_C = \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

We searched for the maximum values of γ_1 and γ_2 that satisfy the above described LMI conditions. The results are summarized in Table 4.1 : the proposed design method (i.e., using the LMI (4.9) of Theorem 4.3.1) provides solutions for larger values of the bounds of the uncertainties $\gamma_i, i = 1, 2$. Indeed, those results are obtained by the implementation of the LMI (4.21) for ε_1 chosen as $\varepsilon_1 = j/(1-j)$, where, $j \in (0,1)$. For this, we divided the interval $(0,1)$ into subintervals of length $\Delta = 0.1$, and we solved LMI (4.21). In Table 4.1, LMI (4.21) was found feasible for

$j = 0.7$ with $\gamma_{1_{max}} = 3.85$, $\gamma_{2_{max}} = 10^{13}$. After that, we replace ε_3 and ε_4 by $(\alpha_3/\beta_3)^2$ and $(\alpha_4/\beta_4)^2$ returned from the solutions of the feasible LMI (4.21). Finally, we retrieve LMI (4.9) feasible for a slightly larger value of $\gamma_{1_{max}}$ that is $\gamma_{1_{max}} = 4.64$.

LMIs	**LMI (10)-(12)** in [3]	**LMI** (4.21)	**LMI** (4.24)	**LMI** (4.9)
		$\varepsilon_1 = 2.33$	$\varepsilon_1 = 2.33$, $\varepsilon_3 = 1.42$, $\varepsilon_4 = 0.08$	
$\gamma_{1\max}$	2.89	3.85	4.41	4.64
$\gamma_{2\max}$	10^{12}	10^{13}	10^{12}	10^{13}

TABLE 4.1 – Comparison between different LMI design methods.

We can see that the LMI (4.21) performs better than the methodology by [3] even if some additional constraints are used to linearize with respect to some ε_i according to Remark 4.3.3. Indeed, the gridding method provides the best solution of the LMI (4.9).

4.6.2 Example 2 : Euler approximate model

Consider the system given in [21], but with the uncertainty bounds γ_1 and γ_2 in the matrices N_A and N_C, respectively. The system, in the continuous-time form, is described by the following matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, N_A = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad N_C = \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, the example becomes the same of [21]. Using Euler approximate models as in [21], the proposed LMI design (4.9) of Theorem 4.3.1 was found feasible for $\varepsilon_1 = 0.1018$, $\varepsilon_3 = 0.6790$, $\varepsilon_4 = 6.5$, with the same sampling period $\bar{\delta} = 0.009$. We obtained the controller and observer gains

$$K = \begin{bmatrix} -2.7853 & -8.5682 & 0.2943 \\ -1.6040 & 1.5256 & -11.2021 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 53.3904 & -88.2970 \\ -34.1434 & 50.2537 \\ 63.5022 & -99.9796 \end{bmatrix}.$$

Choosing $\bar{\delta} = 0.005$ as in Example 1, we found the results reported in Table 4.2, which shows the superiority of our design methodology as compared with [21]. Indeed, the maximum values of $\gamma_i, i = 1,2$ for which the LMI (4.9) is feasible are larger than those obtained by solving the LMIs in [21, see (C1)-(C3)]. Those values are found by using the gridding technique for the three scalars $\varepsilon_1 = 0.1111, \varepsilon_3 = 0.1111$ and $\varepsilon_4 = 2.5$ obtained as follows : $j = 0.1, \varepsilon_1 = j/(1-j)$; $k = 0.1, \varepsilon_3 = k/(1-k)$; $i = 0.6, \varepsilon_4 = i/(1-i)$.

Methods	LMI (C1)-(C3) in [21]	LMI (4.9) $\varepsilon_1 = 0.1111$ $\varepsilon_3 = 0.1111$ $\varepsilon_4 = 1.5$
$\gamma_{1\max}$	1.1	2.4
$\gamma_{2\max}$	1	1.01

TABLE 4.2 – Comparison between [21, LMIs (C1)-(C3)] and LMI (4.9).

4.6.3 Conservatism evaluation in the uncertainty-free case

To evaluate the conservatism of the proposed design methodology as compared with [21] and [22], and the approach in [5] adapted to the discret-time case (Theorem 4.5.1 in the Appendix), we randomly generated 1000 stabilizable and detectable systems of dimensions $n = 3$, $m = 2$, and $p = 1$ in the uncertainty-free case (i.e., when $\Delta A = \Delta C = 0$) and computed the percentage of feasible LMIs for each method. The results are summarized in Table 4.3, which shows the feasibility percentage of the LMIs (9)-(13) in [22] and feasibility percentage of the LMI (4.38) derived from the technique in [5] as compared with our LMI (4.9).

LMIs (9)-(13) in [22]	LMIs (9)-(10) in [22]	LMI (4.38)-(4.39) [5]	LMI (4.9) $\varepsilon_1 = 10$
36.8 %	74.5 %	18.3%	100 %

TABLE 4.3 – Percentage of feasible LMIs.

4.6.4 Application to a one-link robot manipulator

In order to test our design methodology on a real example, we chose the model of flexible link robot. Indeed, this example is well-suited to illustrating the issues of the approach by [5] due to the need of additional equality constraints. The dynamic model of the flexible link robot is nonlinear but we treat the inherent nonlinearity as structured uncertainty. The dynamic of the system is described by the following differential equations :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m = \omega_m \\ \dot{\omega}_m = \frac{\tau}{J_m}(\theta_l - \theta_m) - \frac{b}{J_m}\omega_m + \frac{K_\tau}{J_m}u \\ \dot{\theta}_l = \omega_l \\ \dot{\omega}_l = -\frac{\tau}{J_l}(\theta_l - \theta_m) - \frac{Mgh}{J_l}\sin(\theta_l) \end{cases} \tag{4.48}$$

where $\theta_m, \omega_m, \theta_l$, and ω_l are the motor and link positions and velocities, respectively ; J_m and J_l are the motor and link inertia, respectively ; $2h$ and M are the length and mass of the link, respectively ; b is the viscous friction ; K_τ is the amplifier gain. The measurements are the position and velocity of the motor.

From the mean value theorem, there exists $\eta \in (0,1)$ such that the nonlinearity $\sin(\theta_l)$ can be rewritten as follows : $\sin(\theta_l) = \cos(\eta\theta_l)\theta_l$. Therefore, considering such a nonlinearity as uncertainty and defining $x = \begin{bmatrix}\theta_m & \omega_m & \theta_l & \omega_l\end{bmatrix}^T$, the state equation (4.48) can be rewritten as an uncertain time-varying continuous-time linear system where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{J_m} & -\frac{b}{J_m} & \frac{\tau}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\tau}{J_l} & 0 & -\frac{\tau}{J_l} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_\tau}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mgh}{J_l}\cos(\eta\theta_l) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and thus with

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\eta\theta_l) \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Mgh}{J_l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_2(t) = 1, \;\; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \;\; M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Euler discretization is applied to such a system to obtain a discrete-time model with sample period equal to $\delta = 0.05$. Using Theorem 4.5.1 (see Appendix), we need to solve the LMIs (4.38)-(4.39) with system matrices $\tilde{A} = I + \delta A$, $\tilde{B} = \delta B$, $\tilde{M}_A = \delta M_A$, $\tilde{M}_C = \delta M_C$ instead of A, B, M_A, M_C. We show through this example that the technique proposed by [5] cannot provide solutions. Indeed, as shown in the Appendix (equation (4.45)), if the LMI (4.38) under the equality constraint (4.39) is feasible, then the matrix block of $\tilde{A}$ given by

$$\tilde{A}_{22} = I + \delta \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -1.9355 & 0 \end{bmatrix}$$

must be Schur stable. That is there exists

$$P_{22} = P_{22}^T = \begin{bmatrix} P_{22}^{11} & P_{22}^{12} \\ P_{22}^{12} & P_{22}^{22} \end{bmatrix} > 0$$

such that

$$-P_{22} + \tilde{A}_{22}^T P_{22} \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 3.7462\delta^2 P_{22}^{22} - 3.871\delta P_{22}^{12} & \delta P_{22}^{11} - 1.9355\delta^2 P_{22}^{12} - 1.9355\delta P_{22}^{22} \\ (\star) & \delta^2 P_{22}^{11} + 2\delta P_{22}^{12} \end{bmatrix} < 0.$$

This, if satisfied, leads to to

$$P_{22}^{12} > (0.9678)\delta P_{22}^{22} > 0$$

and hence

$$P_{22}^{12} < -\frac{\delta}{2} P_{22}^{11} < 0,$$

which is contradictory. In brief, the LMIs (4.38)-(4.39) fail to solve the stabilization problem for this example. By contrast, applying our design methodology, the solution of the LMI (4.33) with $\varepsilon_1 = 0.6667$ and $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.1111$ provides the following gains :

$$K = \begin{bmatrix} -3.1513 & -0.5802 & -22.9998 & -12.4086 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -18.8023 & -1.0000 \\ 46.6796 & -61.4633 \\ -1.2347 & -27.3824 \\ -10.7946 & -194.7991 \end{bmatrix}.$$

The simulation results with the time behaviors of the state variables in closed loop are given in Figure 6.2.

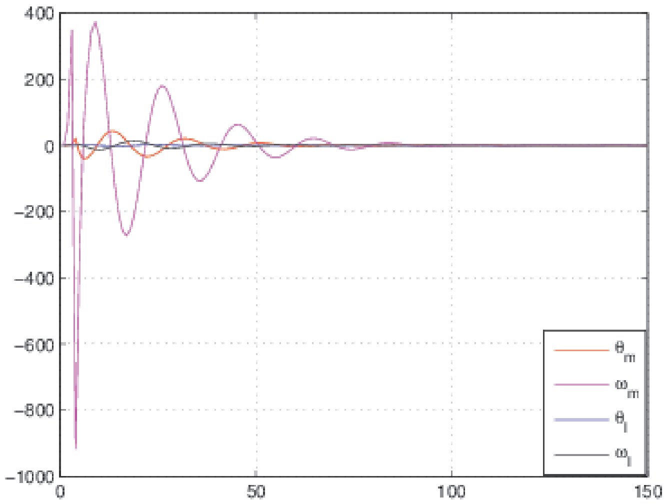


FIGURE 4.1 – State variables of the one-link robot manipulator

4.7 Conclusion

In this part, new sufficient conditions to construct observer-based controllers for uncertain linear discrete-time systems are proposed. The main advantage of our design methodology lies in the simultaneous selection of observer-based controller gains via the fulfillment of a single BMI condition that becomes an LMI by freezing some scalars. Such an advantage of turning a BMI into an LMI entails the computational difficulty of the "a priori" choice of such scalars, and in the increased conservatism led by some additional constraints. However, various simulation results have shown that the proposed approach performs quite well as compared with all the main alternatives available in the literature.

CHAPITRE 5

Robust $\mathscr{H}_\infty$ Observer-Based Stabilization for discrete-time Systems with Uncertain Parameters and Lipschitz Nonlinearities

Sommaire

5.1 Introduction 83
5.2 LPV reformulation to Lipschitz nonlinearities 84
5.3 Robust observer-based controller design 86
5.4 Comments and comparisons 91
5.5 Numerical examples and comparisons 93
5.6 Conclusion 96

5.1 Introduction

The contributions of this chapter, inspired from [26, 29, 80] can be viewed as a detailed version of the preliminary results established in [86], which deals with the problem of designing robust observer-based controllers for nonlinear Lipschitzian discrete-time systems with parameter uncertainties. First, a reformulation of the Lipschitz property is considered to take into account all properties of the nonlinearities of the system and leads to an LPV approach for the general class of Lipschitzian systems [29]. Second, using the Lyapunov function approach combined with the slack variable techniques [60, 69, 72, 87] and some judicious algebraic transformation [26, 80], we obtain conditions, in LMIs setting, that allow to compute simultaneously the observer and controller gains. As one of the main contribution of this chapter, we obtain less conservative LMI-based sufficient conditions without any equality constraint [42], nor assumptions on the singularity of state matrices [8], and nor additional assumptions on the Lipschitz condition [88], [4]. In addition, we show that our approach includes, as a particular solution, the elegant results established in [26, 88]. Finally, numerical examples and comparisons are given to show the validity and superiority of the proposed method.

5.2 LPV reformulation to Lipschitz nonlinearities

Consider the following class of nonlinear discrete-time uncertain systems :

$$x_{k+1} = \Big(A + \Delta A(k)\Big)x_k + Bu_k + \phi(x_k) + D\omega_k \tag{5.1a}$$

$$y_k = \Big(C + \Delta C(k)\Big)x_k + \psi(x_k) + E\omega_k \tag{5.1b}$$

where $x_k \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y_k \in \mathbb{R}^p$ is the output measurement, $u_k \in \mathbb{R}^m$ is the control input vector, A, B, C, D and E are constant matrices of adequate dimensions, the vector $\omega \in l_2^s$ is an unknown exogenous disturbance, the functions Φ and Ψ contain nonlinearities of second order or higher, and $\Delta A(k)$ and $\Delta C(k)$ are unknown matrices representing time-varying parameter uncertainties and

$$\Delta A(k) = M_A F_A(k) N_A,\ \Delta C(k) = M_C F_C(k) N_C \tag{5.2}$$

where the unknown matrices $F_A(k)$ and $F_C(k)$ satisfy the condition

$$F_A^T(k) F_A(k) \leq I,\ \ F_C^T(k) F_C(k) \leq I. \tag{5.3}$$

We assume that the nonlinear functions ϕ and ψ in (5.1) are globally Lipschitzian with Lipschitz constant γ_ϕ and γ_ψ respectively. Without loss of generality we assume that $\phi(0) = 0$.
Our main goal consists in designing an observer of the form

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + \phi(\hat{x}_k) + L\Big(y_k - C\hat{x}_k - \psi(\hat{x}_k)\Big) \tag{5.4}$$

so that the system (5.1) under the linear feedback $u_k = -K\hat{x}_k$ is globally $\mathscr{H}_\infty$ robustly asymptotically stable. Our problem is then reduced to find simultaneously the observer gain L and the state feedback gain K so that the closed loop system is stable and satisfies $\mathscr{H}_\infty$ performance. Let $\varepsilon_k = x_k - \hat{x}_k$ and $z_k^T = \begin{bmatrix} x_k^T & \varepsilon_k^T \end{bmatrix}$. Under the feedback $u_k = -K\hat{x}_k$, the closed-loop system has the form

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} A - BK + \Delta A(k) & BK \\ \Delta A(k) - L\Delta C(k) & A - LC \end{bmatrix} z_k + \begin{bmatrix} \phi(x_k) \\ \Delta\phi(k) - L\Delta\psi(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ D - LE \end{bmatrix} \omega_k \tag{5.5}$$

where

$$\Delta\phi(k) = \phi(x_k) - \phi(\hat{x}_k) \tag{5.6a}$$

$$\Delta\psi(k) = \psi(x_k) - \psi(\hat{x}_k). \tag{5.6b}$$

According to Lemma 1.4.13, the Lipschitz property on ϕ and ψ leads to the existence of bounded functions $\phi_{ij} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\psi_{ij} : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ and constants $\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}$, $\bar{\gamma}_{\phi_{ij}}$, for $i, j = 1, \ldots, n$, $\bar{\gamma}_{\psi_{ij}}$ and $\underline{\gamma}_{\psi_{ij}}$, for $i = 1, \ldots, p$ and $j = 1, \ldots, n$, so that

$$\underline{\gamma}_{\phi_{ij}} \leq \phi_{ij} \leq \bar{\gamma}_{\phi_{ij}},\ \ \underline{\gamma}_{\psi_{ij}} \leq \psi_{ij} \leq \bar{\gamma}_{\psi_{ij}} \tag{5.7}$$

$$\Delta\phi(k) = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x, \hat{x}) H_{ij}^{n}\right] (x_k - \hat{x}_k) \tag{5.8a}$$

$$\Delta\psi(k) = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x, \hat{x}) H_{ij}^{p,n}\right] (x_k - \hat{x}_k) \tag{5.8b}$$

$$\phi(x_k) = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x, 0) H_{ij}^{n}\right] x_k \tag{5.8c}$$

where $H_{ij}^{p,n} = e_p(i)e_n^T(j)$. To simplify the presentation, let us introduce the following notations :

$$\Theta := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x,0)H_{ij}^{n},\ \Upsilon := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x,\hat{x})H_{ij}^{n},\ \Xi := \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x,\hat{x})H_{ij}^{p,n}$$

and

$$\mathscr{A}(\Theta) := A + \Theta = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x,0)H_{ij}^{n}$$

$$\mathscr{A}(\Upsilon) := A + \Upsilon = A + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(x,\hat{x})H_{ij}^{n}$$

$$\mathscr{C}(\Xi) := C + \Xi = C + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}H_{ij}^{p,n}.$$

Hence, system (5.5) can be rewritten under the form

$$z_{k+1} = \Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)z_k + \Pi_2\omega_k \tag{5.9}$$

where

$$\Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \left(\mathscr{A}(\Theta) - BK + \Delta A\right) & BK \\ \left(\Delta A - L\Delta C\right) & \left(\mathscr{A}(\Upsilon) - L\mathscr{C}(\Xi)\right) \end{bmatrix},\ \Pi_2 = \begin{bmatrix} D \\ D - LE \end{bmatrix}.$$

Notice that in view of Lemma 1.4.13, the parameters Θ and Υ belong to bounded convex set $\mathscr{H}_n$ for which the set of vertices is defined by :

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} = \left\{\Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}, \Phi_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{\phi_{ij}}, \bar{\gamma}_{\phi_{ij}}\}\right\}.$$

Similarly, the parameter Ξ belongs to a bounded convex set $\mathscr{H}_p$ for which the set of vertices is defined by :

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}p} = \left\{\Psi \in \mathbb{R}^{p\times n}, \Psi_{ij} \in \{\underline{\gamma}_{\psi_{ij}}, \bar{\gamma}_{\psi_{ij}}\}\right\}.$$

Our objective consists in finding matrices K and L so that

1. the closed-loop system (5.9) with $\omega_k = 0$ is asymptotically stable ;
2. the effect of ω_k on the performance signal

$$Z_k = Hz_k \tag{5.10}$$

is attenuated in the $\mathscr{H}_\infty$ sense, where $H \in \mathbb{R}^{t\times 2n}$ is a known matrix. More precisely, it is required that

$$\|Z\|_{l_2^t} \leq \mu\|\omega\|_{l_2^s} \tag{5.11}$$

where $\mu > 0$ is the disturbance attenuation level to be minimized.

We say that the $\mathscr{H}_\infty$ performance criterion is achieved if the previous aforementioned two requirements hold.

The problem of solving the $\mathscr{H}_\infty$ asymptotic convergence inequality (5.11) consists in finding a Lyapunov function

$$V_k := V(z_k) = z_k^TPz_k \tag{5.12}$$

with $P = P^T > 0$ so that

$$\|Z_k\|^2 - \mu^2\|\omega_k\|^2 + \Delta V_k < 0, \forall k \geq 0. \tag{5.13}$$

where $\Delta V_k := V_{k+1} - V_k$. We refer the reader to [42] and [26] for more details on (5.13). Using (5.9), ΔV_k can be expressed in the detailed form :

$$\Delta V_k = \Big(\Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)z_k + \Pi_2\omega_k\Big)^T P\Big(\Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)z_k + \Pi_2\omega_k\Big) - z_k^T P z_k. \tag{5.14}$$

Consequently, we have for all $k \geq 0$

$$\|Z_k\|^2 - \mu^2\|\omega_k\|^2 + \Delta V(k) = \begin{bmatrix} z_k \\ \omega_k \end{bmatrix}^T \Sigma(\Theta,\Upsilon,\Xi) \begin{bmatrix} z_k \\ \omega_k \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

where

$$\Sigma(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)^T P\Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi) - P + H^T H & \Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi)^T P\Pi_2 \\ (\star) & \Pi_2^T P\Pi_2 - \mu^2 I \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

Therefore, condition (5.13) holds if and only if $\Sigma(\Theta,\Upsilon,\Xi) < 0$, for all $\Theta,\Upsilon \in \mathscr{H}_n$ and $\Xi \in \mathscr{H}_p$, which is equivalent, by the Schur Lemma, to

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi) & \Pi_2 \\ (\star) & -P + H^T H & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \ \forall(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p. \tag{5.17}$$

The main difficulty of the design in (5.17), in LMI setting, stems from some bilinear terms resulting from the uncertainties and the presence of the Lyapunov matrix and its inverse. To our knowledge, there is no congruence transformation turning it directly into a linear matrix inequality. This problem is still rather unsolved. In such a context, several research activities have been developed in the literature to handle these bilinearities [42], [25], [4], [14], [88]. For instance, in [88] the author has proposed an elegant manner to overcome the obstacle of the presence of P and P^{-1} in (5.17), but the result remains conservative. In the next section, we propose a method to overcome this obstacle via a new LMI design condition. Thanks to the introduction of a slack variable combined with a judicious use of Young relation, we get less conservative sufficient conditions ensuring the $\mathscr{H}_\infty$ criterion (5.13).

5.3 Robust observer-based controller design

In this section, we propose new LMI conditions that provide simultaneously the controller and observer gains. The main advantage of the proposed LMI-based design is that no additional equality constraint is required as in [42] and [4]. We present a novel way to handle the bilinearities in (5.17) to obtain less conservative sufficient LMI conditions. Our design methodology allows to use a non diagonal Lyapunov matrix, which leads to reduce the conservatism of the existing methods. In the following theorem, we provide new and less conservative LMI conditions ensuring the robust $\mathscr{H}_\infty$ asymptotic stabilization of the closed loop system (5.9) in the sense of (5.13).

Theorem 5.3.1. *System* (5.9) *is globally $\mathscr{H}_\infty$ asymptotically stable with a minimum attenuation level μ, if there exist a positive scalar ε_2, two symmetric positive definite matrices $\mathscr{P} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ and $\mathscr{G}_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, and $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ such that the following convex optimization problem* (5.18) *holds for some positive constants ε_1, ε_3, ε_4.*

$$\min(\mu) \text{ subject to } \Omega(\Phi,\Lambda,\Psi) < 0, \forall(\Phi,\Lambda,\Psi) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}p} \tag{5.18}$$

where inequality $\Omega(\Phi,\Lambda,\Psi) < 0$ is defined in the following detailed form (5.19) *:*

$$\Omega(\Phi,\Lambda,\Psi) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}(\Phi,\Lambda,\Psi) & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0_n \\ 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n \\ 0_{(t,n)} & 0_{(t,n)} \\ 0_{(s,n)} & 0_{(s,n)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{(n,h)} \\ 0_{(n,h)} \\ \mathscr{G}_1 N_A^T \\ 0_{(n,h)} \\ 0_{(t,h)} \\ 0_{(s,h)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} \\ G_2^T M_A & 0_{(n,h)} \\ 0_{(n,r)} & \mathscr{G}_1 N_A^T \\ 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} \\ 0_{(t,r)} & 0_{(t,h)} \\ 0_{(s,r)} & 0_{(s,h)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} \\ \hat{L} M_C & 0_{(n,q)} \\ 0_{(n,l)} & \mathscr{G}_1 N_C^T \\ 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} \\ 0_{(t,l)} & 0_{(t,q)} \\ 0_{(s,l)} & 0_{(s,q)} \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \mathscr{G}_1 & 0_n \\ 0_n & -\varepsilon_1^{-1} \mathscr{G}_1 \end{bmatrix} & 0_{(2n,h)} & 0_{(2n,r+h)} & 0_{(2n,l+q)} \\ (\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I_h & 0_{(h,r+h)} & 0_{(h,l+q)} \\ (\star) & (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_3 I_r & 0_{(r,h)} \\ 0_{(h,r)} & -\frac{1}{\varepsilon_3} I_h \end{bmatrix} & 0_{(r+h,l+q)} \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_4 I_l & 0_{(l,q)} \\ 0_{(q,l)} & -\frac{1}{\varepsilon_4} I_q \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.19}$$

with

$$\Omega_{11}(\Phi,\Lambda,\Psi) = \begin{bmatrix} \mathscr{M}_{11} & \mathscr{M}_{12}(\Phi,\Lambda,\Psi) & 0_{(2n,t)} & \mathscr{M}_{13} \\ (\star) & -\mathscr{P} & \tilde{H} & 0_{(2n,s)} \\ (\star) & (\star) & -I_t & 0_{(t,s)} \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I_s \end{bmatrix}, \mathscr{M}_{11} = \mathscr{P} + \begin{bmatrix} -2\mathscr{G}_1 + \varepsilon_2 M_A M_A^T & 0_n \\ 0_n & -G_2 - G_2^T \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{M}_{12}(\Phi,\Lambda,\Psi) = \begin{bmatrix} \mathscr{A}(\Phi)\mathscr{G}_1 - B\hat{K} & 0_n \\ (\star) & G_2^T \mathscr{A}(\Lambda) - \hat{L}\mathscr{C}(\Psi) \end{bmatrix}, \mathscr{M}_{13} = \begin{bmatrix} D \\ G_2^T D - \hat{L}E \end{bmatrix}, \tilde{H} = \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} H^T.$$

Then, the observer-based controller gains are given by $K = \hat{K}\mathscr{G}_1^{-1}$ and $L = (G_2^T)^{-1}\hat{L}$. The Lyapunov matrix related to these gains is computed as $P = \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \mathscr{P} \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$.

Proof : In line with approach by [60], we linearize the BMI (5.17) by introducing an additional matrix of appropriate dimension that can be regarded as a slack variable and is denoted by G. Indeed, using [60, Theorem 1], the inequalities (5.17) turn out to be equivalent to the following one :

$$\begin{bmatrix} P - G - G^T & G^T \Pi_1(\Theta,\Upsilon,\Xi) & G^T \Pi_2 \\ (\star) & -P + H^T H & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \forall(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p. \tag{5.20}$$

By choosing $G = \mathrm{diag}(G_1, G_2)$, we deduce that inequalities (5.20) hold if the following inequalities are fulfilled :

$$\begin{bmatrix} \aleph_{11} & \aleph_{12}(\Theta,\Upsilon,\Xi) & \aleph_{13} \\ (\star) & -P + H^T H & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \ \forall\ (\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p \tag{5.21}$$

where

$$\aleph_{11} = P - \begin{bmatrix} G_1 + G_1^T & 0 \\ 0 & G_2 + G_2^T \end{bmatrix}, \ \aleph_{13} = \begin{bmatrix} D^T G_1 & (D - LE)^T G_2 \end{bmatrix}^T,$$

$$\aleph_{12}(\Theta, \Upsilon, \Xi) = \begin{bmatrix} G_1^T \Big(\mathscr{A}(\Theta) - BK + \Delta A\Big) & G_1^T BK \\ G_2^T (\Delta A - L\Delta C) & G_2^T \Big(\mathscr{A}(\Upsilon) - L\mathscr{C}(\Xi)\Big) \end{bmatrix}.$$

Now, inequality (5.21) is a BMI because of the presence of the coupling term $G_1^T BK$. To linearize this BMI, first, we pre- and post-multiply the left hand side of inequality (5.21) by $\mathrm{diag}(G_1^{-1}, I, G_1^{-1}, I, I, I)$. For $G_1 = G_1^T$, then inequalities (5.21) are equivalent to the following one :

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12}(\Theta, \Upsilon, \Xi) & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T (D - LE) \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} (-P + H^T H) \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{5.22}$$
$$\forall (\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p,$$

where

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} G_1^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2G_1^{-1} & 0 \\ 0 & G_2 + G_2^T \end{bmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\Sigma_{12}(\Theta, \Upsilon, \Xi) = \begin{bmatrix} (\mathscr{A}(\Theta) + \Delta A) G_1^{-1} - BKG_1^{-1} & BK \\ G_2^T (\Delta A - L\Delta C) G_1^{-1} & G_2^T (\mathscr{A}(\Upsilon) - L\mathscr{C}(\Xi)) \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

To avoid some bilinear terms related to the coupling between P and G_1^{-1} in (5.22), we make the following change of variables :

$$\mathscr{G}_1 := G_1^{-1}, \ \mathscr{P} := \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 P_{11} \mathscr{G}_1 & \mathscr{G}_1 P_{12} \\ (\star) & P_{22} \end{bmatrix},$$
$$\hat{K} := KG_1^{-1}, \hat{L} := G_2^T L, \ \tilde{H} = \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} H^T \tag{5.25}$$

By Schur lemma, inequality (5.22) is equivalent to the following one

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12}(\Theta, \Upsilon, \Xi) & 0 & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T (D - LE) \end{bmatrix} \\ (\star) & -\mathscr{P} & \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{5.26}$$
$$\forall (\Theta, \Upsilon, \Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p,$$

In the goal to linearize inequality (5.27) with respect to K, we use the following decomposition :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \bar{\Sigma}_{12}(\Theta,\Upsilon,\Xi) & 0 & \Sigma_{13} \\ (\star) & -\mathscr{P} & \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix}}^{\bar{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi)} + \overbrace{\begin{bmatrix} BK \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{X^T} \overbrace{\begin{bmatrix} 0\,0\,0\,I\,0\,0 \end{bmatrix}}^{Y} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{Y^T} \overbrace{\begin{bmatrix} (BK)^T\; 0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}}^{X} < 0 \qquad (5.27)$$

$$\forall(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p,$$

where $\bar{\Sigma}_{12}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} (\mathscr{A}(\Theta)+\Delta A)\mathscr{G}_1 - B\hat{K} & 0 \\ G_2^T(\Delta A - L\Delta C)\mathscr{G}_1 & G_2^T(\mathscr{A}(\Upsilon) - L\mathscr{C}(\Xi)) \end{bmatrix}$.

Using Young relation, we deduce that inequalities (5.27) are satisfied if the following

$$\bar{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) + \varepsilon_1 X^T S X + \frac{1}{\varepsilon_1} Y^T S^{-1} Y = \bar{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) - \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 S & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1} S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} SX \\ Y \end{bmatrix} < 0, \qquad (5.28)$$

$$\forall(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p$$

hold for some $\varepsilon_1 > 0$. Hence, we retrieve the variable $\hat{K} = K\mathscr{G}_1$ and eliminate the isolated variable K by using (5.28) with $S = \mathscr{G}_1$. Moreover, thanks to the Schur Lemma, inequalities (5.28) hold if and only if :

$$\tilde{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \bar{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0,\ \forall(\Theta,\Upsilon,\Xi) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_p.$$

Now, we linearize the last inequality with respect to the uncertainties. We write $\tilde{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi)$ as a sum of matrices containing the uncertainties ΔA and ΔC, and a matrix without uncertainties. Indeed, we have

$$\tilde{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \Lambda(\Theta,\Upsilon,\Xi) + (Z_1 Z_2^T + Z_2 Z_1^T) + (Z_3 Z_2^T + Z_2 Z_3^T) + (Z_4 Z_5^T + Z_5 Z_4^T)$$

where

$$\Lambda(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12}(\Theta,\Upsilon,\Xi) & 0 & \begin{bmatrix} D \\ G_2^T D - \hat{L}E \end{bmatrix} \\ (\star) & -\mathscr{P} & \tilde{H} & 0 \\ (\star) & (\star) & -I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1^{-1}\mathscr{G}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad (5.29)$$

with

$$\Lambda_{11} \;=\; \Sigma_{11}\ \big(\text{see Formula (5.23)}\big), \Lambda_{12}(\Theta,\Upsilon,\Xi) = \begin{bmatrix} \mathscr{A}(\Theta)\mathscr{G}_1 - B\hat{K} & 0 \\ 0 & G_2^T \mathscr{A}(\Upsilon) - \hat{L}\mathscr{C}(\Xi) \end{bmatrix}$$

and the matrices Z_i are given by :

$$\begin{aligned}
&Z_1^T = \begin{bmatrix} M_A^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_A\mathcal{G}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
&Z_3^T = \begin{bmatrix} 0 & M_A^T G_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Z_4^T = \begin{bmatrix} 0 & M_C^T \hat{L}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
&Z_5^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{G}_1 N_C^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Using Young formula and the assumption (5.3), we obtain

$$\bar{\Sigma}(\Theta,\Upsilon,\Xi) \leq \Lambda(\Theta,\Upsilon,\Xi) + \varepsilon_2 Z_1 Z_1^T + \frac{1}{\varepsilon_2} Z_2 Z_2^T + \varepsilon_3 Z_3 Z_3^T + \frac{1}{\varepsilon_3} Z_2 Z_2^T + \varepsilon_4 Z_4 Z_4^T + \frac{1}{\varepsilon_4} Z_5 Z_5^T \tag{5.30}$$

for any positive scalars $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ and ε_4. Applying Schur Lemma on (5.30), we deduce from the convexity principle that the $\mathcal{H}_\infty$ criterion (5.13) holds if the LMI condition (5.19) is feasible for all $(\Phi,\Lambda,\Psi) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}n} \times \mathcal{V}_{\mathcal{H}p}$. This ends the proof. □

Remarque 5.3.1. *to dominate the terms $(-\varepsilon_3 I)$, $(-\varepsilon_4 I)$ and their inverses $(-\varepsilon_3^{-1} I)$, $(-\varepsilon_4^{-1} I)$, we proceed as in Remark 4.3.3. From* (4.20)*, we have :*

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2} I \leq \beta^2 I - 2\alpha I, \; -\frac{\beta^2}{\alpha^2} I \leq \alpha^2 I - 2\beta I. \tag{5.31}$$

To avoid the use of huge matrices, we notice the left hand side of (5.19) *by $\mathcal{F}(\varepsilon_3, \frac{1}{\varepsilon_3}, \varepsilon_4, \frac{1}{\varepsilon_4})$. Hence, from* (5.31)*, we deduce that*

$$\mathcal{F}\left(\varepsilon_3, \frac{1}{\varepsilon_3}, \varepsilon_4, \frac{1}{\varepsilon_4}\right) \leq \mathcal{F}\left(\beta_3^2 - 2\alpha_3, \alpha_3^2 - 2\beta_3, \beta_4^2 - 2\alpha_4, \alpha_4^2 - 2\beta_4\right). \tag{5.32}$$

Therefore, inequality (5.19) *is fulfilled if the following one holds :*

$$\mathcal{F}\left(\beta_3^2 - 2\alpha_3, \alpha_3^2 - 2\beta_3, \beta_4^2 - 2\alpha_4, \alpha_4^2 - 2\beta_4\right) < 0. \tag{5.33}$$

Finally, from Schur lemma, inequality (5.33) *is equivalent to :*

$$\begin{bmatrix}
\Omega_{11}(\Phi,\Lambda,\Psi) & \begin{bmatrix} B\hat{K} & 0_n \\ 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n \\ 0_{(t,n)} & 0_{(t,n)} \\ 0_{(s,n)} & 0_{(s,n)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{(n,h)} \\ 0_{(n,h)} \\ \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0_{(n,h)} \\ 0_{(t,h)} \\ 0_{(s,h)} \end{bmatrix} & \mathcal{T}_{14} & \mathcal{T}_{15} \\
(\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \mathcal{G}_1 & 0_n \\ 0_n & -\varepsilon_1^{-1}\mathcal{G}_1 \end{bmatrix} & 0_{(2n,h)} & 0_{(2n,2(r+h))} & 0_{(2n,2(l+q))} \\
(\star) & (\star) & -\varepsilon_2 I_h & 0_{(h,2(r+h))} & 0_{(h,2(l+q))} \\
(\star) & (\star) & (\star) & \mathcal{T}_{44} & 0_{(2(r+h),2(l+q))} \\
(\star) & (\star) & (\star) & (\star) & \mathcal{T}_{55}
\end{bmatrix} < 0 \tag{5.34}$$

where $\Omega_{11}(\Phi,\Lambda,\Psi)$ as defined in (5.19)*, and*

$$\mathcal{T}_{14} = \begin{bmatrix} 0_{(n,r)} & 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} & 0_{(n,h)} \\ G_2^T M_A & 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} & 0_{(n,h)} \\ 0_{(n,r)} & 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} & \mathcal{G}_1 N_A^T \\ 0_{(n,r)} & 0_{(n,r)} & 0_{(n,h)} & 0_{(n,h)} \\ 0_{(t,r)} & 0_{(t,r)} & 0_{(t,h)} & 0_{(t,h)} \\ 0_{(s,r)} & 0_{(s,r)} & 0_{(s,h)} & 0_{(s,h)} \end{bmatrix}, \; \mathcal{T}_{44} = \begin{bmatrix} -2\beta_3 I_r & \alpha_3 I_r & 0_{(r,h)} & 0_{(r,h)} \\ \alpha_3 I_r & -I_r & 0_{(r,h)} & 0_{(r,h)} \\ 0_{(h,r)} & 0_{(h,r)} & -2\alpha_3 I_h & \beta_3 I_h \\ 0_{(h,r)} & 0_{(h,r)} & \beta_3 I_h & -I_h \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{T}_{15} = \begin{bmatrix} 0_{(n,l)} & 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} & 0_{(n,q)} \\ \hat{L}M_C & 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} & 0_{(n,q)} \\ 0_{(n,l)} & 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} & \mathscr{G}_1 N_C^T \\ 0_{(n,l)} & 0_{(n,l)} & 0_{(n,q)} & 0_{(n,q)} \\ 0_{(t,l)} & 0_{(t,l)} & 0_{(t,q)} & 0_{(t,q)} \\ 0_{(s,l)} & 0_{(s,l)} & 0_{(s,q)} & 0_{(s,q)} \end{bmatrix}, \ \mathscr{T}_{55} = \begin{bmatrix} -2\beta_4 I_l & \alpha_4 I_l & 0_{(l,q)} & 0_{(l,q)} \\ \alpha_4 I_l & -I_l & 0_{(l,q)} & 0_{(l,q)} \\ 0_{(q,l)} & 0_{(q,l)} & -2\alpha_4 I_q & \beta_4 I_q \\ 0_{(q,l)} & 0_{(q,l)} & \beta_4 I_q & -I_q \end{bmatrix}.$$

$\mathscr{M}_{11}$ and $\mathscr{M}_{12}(\Phi,\Lambda,\Psi)$ are defined in (5.19)*, which is linear with respect to the variables α_3, α_4, β_3, and β_4. Still, we have to deal with the variable ε_1 related to the matrix $\mathscr{G}_1$ with the gridding technique. Of course, the additional constraints* (5.31) *breed some conservatism, but, when the resulting LMI* (5.34) *is feasible, the computational effort is reduced.*

5.4 Comments and comparisons

This section is devoted to clarify the novel contribution given by Theorem 5.3.1 as compared with the results available in the current literature. In particular, we briefly comment the approaches proposed in [26] and [88].

Comments on the result in [26]

Recently in [26], the problem of $\mathscr{H}_\infty$ observer based stabilization of a class of nonlinear discrete time systems is addressed. It has been claimed by the authors [26, Remark 3] that if a non diagonal Lyapunov matrix P is used in their approach, there will be a lot of coupling between the observer and controller gains and the non diagonal Lyapunov matrix, which leads to many unavoidable bilinearities. Here, we will see that our approach can be applied to improve their approach. Indeed, thanks to the slack variable G, our design methodology can be viewed as an extension of [26], which provides a more general LMI condition. To be convinced, following the notations in [26], the most crucial step in the work by [26] is the linearization of the Lyapunov inequality $\Pi < 0$, in [26, page 7, Formula (3.12)] with respect to the variables $P > 0$, F, L and K_i, $i = 1,\ldots,q$. By using the Schur Lemma, this later can be reformulated as follows :

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & \begin{bmatrix} \Psi & \Omega & \Psi_w \end{bmatrix} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -P+\widetilde{C}^T\widetilde{C} & \Delta & 0 \\ (\star) & -\Phi & +\Theta D_w \\ (\star) & (\star) & -\mu I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.35}$$

where

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_x - A_u F & LC \\ 0 & A_x - LC \end{bmatrix}; \Psi_w = \begin{bmatrix} LD_w \\ E_w - LD_w \end{bmatrix}.$$

At this stage, inequality (5.35) is of the same kind as (5.17). In order to linearize it, we proceed as in the proof of Theorem 5.3.1. Applying the Oliveira's technique [60] with the slack variable G, leads to the following equivalent reformulation of (5.35) :

$$\begin{bmatrix} P - G^T - G & G^T\Psi & G^T\Omega & G^T\Psi_w \\ (\star) & -P+\widetilde{C}^T\widetilde{C} & \Delta & 0 \\ (\star) & (\star) & -\Phi & \Theta D_w \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu I \end{bmatrix} < 0. \tag{5.36}$$

By using the Schur Lemma and by pre- and post-multiplying (5.36) with $\mathrm{diag}(G_1^{-1}, I, G_1^{-1}, I, I, I, I, I)$, we obtain, after using the change of variables (5.25), the following equivalent inequality (5.37) :

$$\begin{bmatrix} \mathscr{P} - \begin{bmatrix} 2\mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & 2G_2 \end{bmatrix} & \widetilde{\Gamma}_{12} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}\Omega & \begin{bmatrix} LD_w \\ G_2E_w - G_2LD_w \end{bmatrix} & 0 \\ (\star) & -\mathscr{P} & \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Delta & 0 & \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\widetilde{C}^T \\ (\star) & (\star) & -\Phi & \Theta D_w & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{5.37}$$

where

$$\widetilde{\Gamma}_{12} = \begin{bmatrix} A_xG_1^{-1} - A_uFG_1^{-1} & LC \\ 0 & G_2^TA_x - G_2^TLC \end{bmatrix}.$$

Now, Young relation, applied on (5.37) as in Theorem 5.3.1, leads to the following sufficient LMI condition (5.38) :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{D}_{11} & \mathbb{D}_{12} \\ (\star) & \begin{bmatrix} -\varepsilon^{-1}G_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon G_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.38}$$

with

$$\mathbb{D}_{11} = \begin{bmatrix} \mathscr{P} - 2\begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} & \mathsf{F} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}\Omega & \begin{bmatrix} 0 \\ G_2E_w - R_2D_w \end{bmatrix} & 0 \\ (\star) & -\mathscr{P} & \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Delta & 0 & \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\widetilde{C}^T \\ (\star) & (\star) & -\Phi & \Theta D_w & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & -\mu I & 0 \\ (\star) & (\star) & (\star) & (\star) & -I \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} A_x\mathscr{G}_1 - A_uR_1 & 0 \\ 0 & G_2A_x - R_2C \end{bmatrix}, \ \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1K_1 & \cdots & \Delta_qK_q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathscr{G}_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\Delta_iK_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathscr{G}_1H_i' & 0 \\ (K_iC)' & (H_i - K_iC)' \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1H_i' & 0 \\ (K_iC)' & (H_i - K_iC)' \end{bmatrix}}_{s_i \text{ times}}$$

$$\mathbb{D}_{12}^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_2C & 0 & R_2D_w & 0 \end{bmatrix}.$$

Notice that particularly, for $\mathscr{P}_{12} = 0, \mathscr{G}_1 = \mathscr{P}_{11}$ and $G_2 = P_{22}$, we can easily see that inequalities (5.37) and [26, (3.19), page 9] are equivalent. Hence, since the LMIs (5.38) and [26, (3.2) – (3.7), page 6] are equivalent, we conclude that our approach is analytically more general than that in [26]. In Section 5.5, it is shown that the non diagonal Lyapunov matrix, particularly the off diagonal block P_{12}, is not useless.

Comments on the result in [88]

Here, we provide a comparison study with the result in [88] and prove that it is a particular case of our approach. We will demonstrate that if we take $G_1 = G_2 = \alpha I$ in the proof of Theorem 5.3.1, we will find the LMI (35) of [88, Theorem 3]. Notice that, in this case, the separation done in inequality (5.27) is not necessary, since a change of variable is possible. In addition, the congruence transformation to have (5.22) from (5.21) is omitted, because with this particular

form of the matrix G, we can write $G_1KB = KG_1B$. This leads to an eventual change of variables. Also, the step of linearization of uncertainties is omitted since $\Delta A = \Delta C = 0$.
All these considerations lead to the following synthesis conditions, which correspond exactly to those obtained in [88].

Theorem 5.4.1. *If there exist a symmetric and positive definite matrix $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, two gain matrices $\tilde{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ and a positive scalar α so that the following convex optimization problem is solvable :*

$$\begin{bmatrix} -P+H^TH & 0 & \mathscr{B}(\Phi,\Lambda) & 0 \\ (\star) & -\mu^2 I & \alpha\mathscr{D}^T & 0 \\ (\star) & (\star) & -2\alpha I & P \\ (\star) & (\star) & (\star) & -P \end{bmatrix} < 0,\ \forall\ (\Phi,\Lambda) \in \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \times \mathscr{V}_{\mathscr{H}n} \tag{5.39}$$

where

$$\mathscr{B}(\Phi,\Lambda) = \begin{bmatrix} \alpha\mathscr{A}(\Phi) - B\tilde{K} & B\tilde{K} \\ 0 & \alpha\mathscr{A}(\Lambda) - \tilde{L}C \end{bmatrix}^T,$$

then system (5.5) is $\mathscr{H}_\infty$ globally asymptotically stable with $u_k = -K\hat{x}_k$. The stabilizing observer-based control gains are given by $K = \tilde{K}/\alpha$ and $L = \tilde{L}/\alpha$.

Proof : Since $\Delta A = \Delta C = 0$, we use directly inequality (5.20). By putting $\mathscr{D} = \begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}$, (5.20) is equivalent to

$$\begin{bmatrix} P-2\alpha I & \mathscr{B}(\Theta,\Upsilon)^T & \alpha\mathscr{D} \\ (\star) & -P+H^TH & 0 \\ (\star) & (\star) & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0,\ \forall\ (\Theta,\Upsilon) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n.$$

By Schur Lemma, the last inequality can be written as :

$$\begin{bmatrix} -P+H^TH & 0 & \mathscr{B}(\Theta,\Upsilon) \\ (\star) & -\mu^2 I & \alpha\mathscr{D}^T \\ (\star) & (\star) & P-2\alpha I \end{bmatrix} < 0,\ \forall\ (\Theta,\Upsilon) \in \mathscr{H}_n \times \mathscr{H}_n$$

which is implied by LMI (5.39) from the convexity principle. This ends the proof. □

5.5 Numerical examples and comparisons

In this section, we give two numerical examples in order to illustrate the usefulness of the achieved results. The first one serves to demonstrate the validity of our approach and its superiority compared to the approach in [26]. The second one is especially related with the comparative study in Subsection 5.4. Since the comparisons concern the approaches in [26] and Subsection 5.4 where there are not nonlinearities in the output, we will take examples with $\psi(x_k) = 0$, but this is not a restriction. Contrarily, from theoretical point of view, our design method is more adapted to consider nonlinearities in the output measurement.

Example 1

In order to validate the approach proposed in Theorem 5.3.1, we test the feasibility of the LMI (5.19) on the system described by the following parameters :

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.6 & 1 & 0.5 \\ -0.3 & 0 & 0.3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & -0.4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \phi(x) = \begin{bmatrix} 0.1\sin(x_2) \\ 0.2\sin(x_3) \\ 0.3\sin(x_1) \end{bmatrix},$$

$$M_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, N_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, M_C = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

According to Lemma 1.4.13, we have

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \pm 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 0.2 \\ \pm 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

The LMI (5.19) of Theorem 5.3.1 with $H = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \end{bmatrix}$ was found feasible for $\varepsilon_1 = 0.4925$, $\varepsilon_3 = 1.3697$ and $\varepsilon_4 = 0.7458$. We obtained the controller and observer gains :

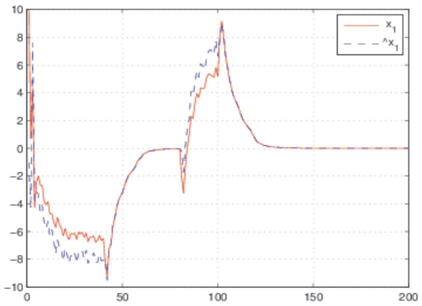
$$K = \begin{bmatrix} -0.0626 & -0.0378 & -0.0000 \\ 0.2028 & 0.1821 & 0.3699 \end{bmatrix}, \quad L^T = \begin{bmatrix} 0.5818 & 1.0266 & 0.4333 \\ -0.1276 & 0.0786 & -0.2391 \end{bmatrix}$$

and $\varepsilon_2 = 4.0686$. These solutions correspond to an optimal value of the disturbance attenuation level $\mu_{\min} = 2.3794$. As compared to [26], for the same values of ε_i, $i \in \{1,3,4\}$, the optimal value of the disturbance attenuation level $\mu_{\min}$ for which the LMI resulting from the application of the approach in [26] is feasible is $\mu_{\min} = 2.6777$, which is slightly greater than that provided by the proposed design methodology. We should point out that one of the objectives of Example 1 consists to show that the non diagonal Lyapunov matrix is not useless. This means that our proposed method is numerically less conservative than that in [26], since Example 1 shows that the set of ε_i for which the LMI in [26] is feasible is strictly included in the set of ε_i for which LMI (5.19) is feasible.

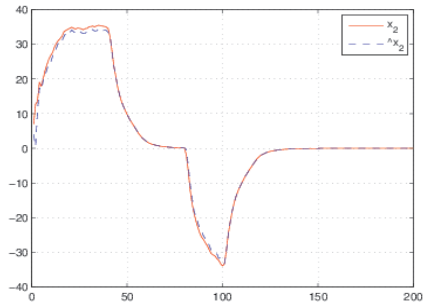
Note that our solutions are obtained by the implementation of the LMI (5.34) by using the gridding method on $\varepsilon_1 = j/(1-j)$, where, $j \in (0,1)$. For this, we divided the interval $(0,1)$ into subintervals of length $h = 0.01$. LMI (5.34) was found feasible for $j = 0.33$ with $\mu = 2.7933$. After that, we replace ε_3 and ε_4 by $(\alpha_3/\beta_3)^2$ and $(\alpha_4/\beta_4)^2$ returned by LMI (5.34). Finally, we retrieve LMI (5.19) feasible for a slightly smaller value of μ ; that is $\mu = 2.3794$. The closed loop system including the observer-based controller is simulated using Matlab and the results are presented in Figure 5.1-5.2. These simulations are performed for an horizon $T = 200$, with $x_0^T = \begin{bmatrix} 10 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ and $\hat{x}_0^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1.5 \end{bmatrix}$, $F_A(k) = \sin(k^4)$, and $F_C(k) = -\exp(-k)$. We assume that the system is affected by the noise

$$\omega_k = \begin{cases} 2 & \text{if } k \in [0,40[, \\ -2 & \text{if } k \in [80,100[, \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{5.40}$$

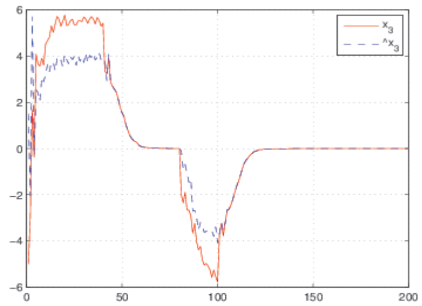
The $\mathscr{H}_\infty$ stability of the system is clearly shown in Figure 5.1. Indeed, asymptotical stability is achieved in the disturbance free case. Whereas, in the presence of disturbances, the controlled output signal is bounded. Since the controlled output Z_k is the estimation error, due to the particular form of the matrix H, we end up with a steady state estimation error as shown in Figure 1. The magnitude of the estimation error depends on how the matrices E and D affect the system dynamics and the output measurements. Of course, we chose a disturbance under the form (5.40), which appears only in a bounded interval, in the goal to show the effectiveness of the proposed design method in the free-noisy case and in the presence of disturbances. We can see in Figure 5.1 that when the disturbance vanishes, the state of the system approaches the origin. Indeed, the proposed observer-based controller is robust and $\mathscr{H}_\infty$ perforate.



(a) Behavior of x_1 and $\hat{x}_1$



(b) Behavior of x_2 and $\hat{x}_2$



(c) Behavior of x_3 and $\hat{x}_3$

FIGURE 5.1 – Example 1 : The simulated states and their estimates

Example 2

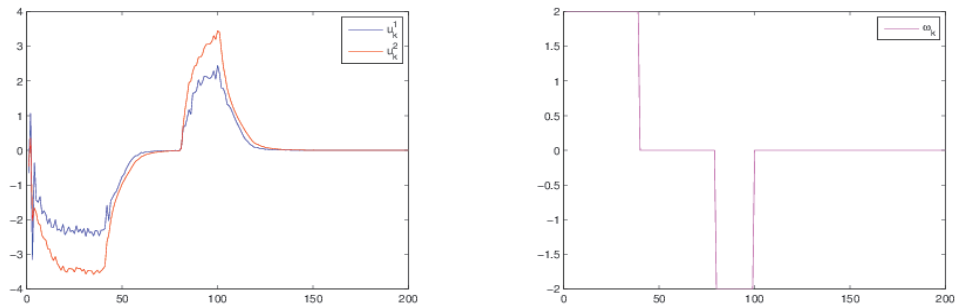
As compared with the approach in [88], we will see that our approach in the uncertainty-free case, using (5.19) provides solutions for a wide class of systems. We reconsider the example given in [88]. That is a discrete-time Lipschitz nonlinear system for which there are no nonlinearities, nor disturbances in the output, i,e, $\psi(x_k) = 0$, $E = 0$. First, we assume that the nonlinearities in the state dynamics are weighted by a constant γ and we look for the maximum margin $\gamma_{\max}$ of the Lipschitz constant and the minimum value $\mu_{\min}$ of the disturbance attenuation level tolerated by these two approaches. Second, we fix the nonlinearities and instead of the state matrices A, B, C and D, we randomly generate 1000 stabilizable and detectable systems. Then, we will evaluate the percentage of feasible LMIs with minimal values of μ. The system has the following parameters :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} C & 0_{(2,3)} \end{bmatrix},$$

$$\phi_\gamma(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{7}\frac{x_k^{(1)}}{1+x_k^{(1)2}} & 0 \end{bmatrix}^T, \gamma > 0, D = 0.1. \tag{5.41}$$

For $\gamma = 1$, the example becomes the same than that of [88]. We can easily see that

$$\mathscr{V}_{\mathscr{H}n} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\gamma}{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$



(a) Behavior of u_1 and u_2 (b) Behavior of ω

FIGURE 5.2 – Example 1 : The simulated controller and the disturbance

We look for the maximum values γ and the minimum value of μ, which satisfy LMI conditions (35) in [88] and LMI (5.19). The results are summarized in Table 5.1. The proposed design method (i.e., using LMI (5.19)) provides solutions for optimal values of γ and μ. Notice that the solutions given by LMI (5.19) may be improved if we use the gridding method on ε_1. But, with $\varepsilon_1 = 20$, the results are already very interesting compared to [88].

	LMI (5.19) with $\varepsilon_1 = 20$	**LMI (35) in [88]**
$\gamma_{\max}$	30	5
$\mu_{\min}$	1.06	20.13

TABLE 5.1 – Optimal values of γ and μ tolerated by LMI (5.19) and [88, LMI (35)]

Now, to evaluate the conservatism of the proposed design methodology as compared with [88], we take the nonlinearity in (5.41) with $\gamma = 1$, we randomly generate 1000 stabilizable and detectable systems of dimensions $n = 3$, $m = 2$, and $p = 2$ via a Monte Carlo simulation, and compute the percentage of feasible LMIs for each method. The results are summarized in Table 5.2, which shows the percentage of feasible LMIs for [88, LMI (35)] compared to LMI (5.19). We should mention that for the 139 LMIs feasible by the approach in [88], all the returned values of μ are upper than those returned by LMI (5.19). We should also point out that for the 1000 randomly generated systems, it is not required to solve 1000 LMIs with the same value of ε_1. Indeed, using the gridding method, for each system we look for the value of ε_1 for which LMI (5.19) holds.

Methodology	**LMI** (5.19)	**LMI (35) in [88]**
Percentage of feasible LMIs	100%	13.9%

TABLE 5.2 – More applicability of our approach

5.6 Conclusion

In this chapter, we developed new sufficient linear matrix inequality conditions for the problem of stabilization of discrete-time Lipschitz nonlinear systems with parameter uncertainties. We have shown that the reformulation of Lipschitz property jointly with a judicious use of Young relation lead to a less restrictive LMI condition. Analytical and numerical comparisons have been provided to shown the advantage of the proposed design methodology compared to the existing one in the literature.

CHAPITRE

6

Stabilization of Switched linear systems with unknown switching mode

Sommaire

6.1 Introduction **99**
6.2 Output feedback control in a noise-free setting **100**
6.3 Output feedback control in the presence of disturbances **103**
6.4 Numerical Examples **107**
6.4.1 Example 1 107
6.4.2 Example 2 108
6.5 Conclusion **109**

6.1 Introduction

In this part, we address the problem of constructing a new observer-based controller for switching discrete-time linear systems by using the Luenberger observer proposed in [38], where the problem of the design of such an observer for switching discrete-time linear systems is investigated with unknown switching mode, which is regarded as discrete state. Sufficient conditions based on observability arguments are presented in [38] that ensure the asymptotic convergence of the observer by means of LMIs under some additional constraints. Such conditions point out that a delay with respect to the current available information is required to accomplish a correct evaluation of the system mode (see also [89]). Indeed, here we consider the case with no delay permitted in generating the control and propose to perform the estimation of the mode with a mode observer based on a one-step ahead prediction strategy. The possible error of such an estimate is compensated by resorting to a suitable selection of the gains of both Luenberger observer and controller.
To design the proposed output feedback control scheme, a novel design method is presented to select the observer and controller gains simultaneously by solving a set of LMIs. This is obtained by using a switched quadratic Lyapunov function and a linearization technique inspired

from [9]. The switching law to select the gains does not rely on the knowledge of the switching mode, contrarily to some recent results concerning similar classes of systems (see [20], where the observer and controller gains are computed by using two dependent set of LMIs).
Among the various paradigms proposed in the literature, quadratic boundedness is well-suited to dealing with stability of the estimation error in the presence of bounded disturbances [39,40]. Based on the results of [40], here we study the stability of the proposed observer-based control scheme under the effect of bounded system and measurement noises. Likewise in the noise-free setting, the resulting stability conditions can expressed by means of LMIs.
The rest of this chapter is organized as follows. Section 6.2 describes the problem in a noise-free setting and the proposed observer-based scheme together with the LMI design methodology. In Section 6.3, an extension of the approach under the same system assumptions but in the presence of bounded disturbances is presented that is based on quadratic boundedness. In Section 6.4, numerical results are given to illustrate effectiveness of the proposed design methodology. Finally, conclusions are drawn in Section 6.5.

6.2 Output feedback control in a noise-free setting

Let us consider a class of switching discrete-time linear systems described by

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= A(\lambda_t)x_t + B(\lambda_t)u_t \\ \lambda_{t+1} &= F(t,\lambda_t,x_t) \\ y_t &= C(\lambda_t)x_t \end{aligned} \tag{6.1}$$

where $t = 0,1,\ldots$ is the time instant, $x_t \in \Re^n$ is the continuous state vector, $y_t \in \Re^m$ is the measurement vector, $u_t \in \Re^p$ is the input vector, and $\lambda_t \in \Lambda = \{1,2,\ldots,M\}$ is the discrete state. $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, and $C(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, are $n \times n$, $n \times p$ and $m \times n$ real matrices, respectively. The mapping $F : \mathbb{N}_{\geq 0} \times \Lambda \times \Re^n \to \Lambda$ represents the dynamics of the discrete state. Such a mapping and the matrices $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, and $C(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$ are known but, at each t, both x_t and λ_t are not directly measurable, as the available information is given only by the measures y_i, $i = 0,1,\ldots,t$.

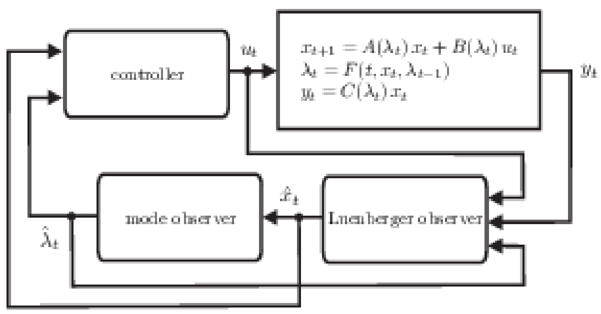


FIGURE 6.1 – Output feedback observer-based control scheme.

We rely on an output feedback control scheme based on the certainty equivalence principle. Such a scheme needs suitable estimates of both λ_t and x_t. The estimate of x_t is denoted by $\hat{x}_t$, and is provided by a Luenberger observer, which is adopted to perform estimation by using only the measurements, as depicted in Fig. 6.1. The Luenberger observer is fed by the estimate of λ_t, denoted by $\hat{\lambda}_t$ and given by a mode observer. The mode observer in turn relies on $\hat{x}_t$. To sum up, the proposed control scheme is composed of three blocks, i.e., Luenberger observer, mode observer, and controller, which have to be carefully designed in such a way to ensure closed-loop asymptotic stability. Note that a difficulty arises from the fact that the mode dynamics depends on the full-state vector x_t, which is not at our disposal in general. Further difficulty is concerned if the system is affected by process and measurement disturbances. In such a case, the stabilization of the system with the proposed control scheme will be addressed in Section 6.3.

As to the Luenberger observer, we refer to the approach presented in [38]. The estimate of the state is thus obtained as follows :

$$\hat{x}_{t+1} = A(\hat{\lambda}_t)\,\hat{x}_t + B(\hat{\lambda}_t)\,u_t + L(\hat{\lambda}_t)\,\left(y_t - C(\hat{\lambda}_t)\,\hat{x}_t\right) \tag{6.2}$$

where $\hat{\lambda}_t \in \Lambda$ is an estimate of λ_t and the observer gains $L(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, are $n \times p$ gain matrices to be chosen. Following [38], a possible strategy to compute $\hat{\lambda}_t$ is that of detecting the discrete state λ_t on the basis of the observations vector $y_{t-\alpha}^{t+\omega}$ with α and ω nonnegative integers that account for the mode observability issues (see also [89]). Of course, this would cause a delay in generating the control action. Instead, we will exploit the knowledge of the discrete state dynamics by using a mode observer that simply predicts the mode one-step ahead by using the current state estimate, i.e.,

$$\hat{\lambda}_{t+1} = F(t, \hat{\lambda}_t, \hat{x}_t)\,. \tag{6.3}$$

Under the state feedback with the certainty equivalence principle, the control action is thus generated as follows :

$$u_t = -K(\hat{\lambda}_t)\,\hat{x}_t \tag{6.4}$$

with the $p \times n$ real matrices $K(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

The stability of the closed-loop system under the feedback obtained by combining (6.2), (6.3), and (6.4) is studied by referring to the augmented state vector $z_t = \mathrm{col}\,(x_t, e_t)$, where $e_t = x_t - \hat{x}_t$ is the estimation error. Toward this end, let $\Delta A(\lambda_1, \lambda_2) = A(\lambda_1) - A(\lambda_2)$, $\Delta B(\lambda_1, \lambda_2) = B(\lambda_1) - B(\hat{\lambda}_2)$, and $\Delta C(\lambda_1, \lambda_2) = C(\lambda_1) - C(\lambda_2)$. The dynamics of the augmented state is given by the discrete-time equation :

$$z_{t+1} = \Pi(\lambda_t, \hat{\lambda}_t)\,z_t \tag{6.5}$$

where

$$\Pi(\lambda_t, \hat{\lambda}_t) = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

with $W_{11} = A\,(\lambda_t) - B(\lambda_t)\,K(\hat{\lambda}_t)$, $W_{12} = B(\lambda_t)\,K(\hat{\lambda}_t)$, $W_{21} = \Delta A(\lambda_t, \hat{\lambda}_t) - \Delta B(\lambda_t, \hat{\lambda}_t)\,K(\hat{\lambda}_t) - L(\hat{\lambda}_t)\Delta C(\lambda_t, \hat{\lambda}_t)$, and $W_{22} = A(\hat{\lambda}_t) + \Delta B(\lambda_t, \hat{\lambda}_t)\,K(\hat{\lambda}_t) - L(\hat{\lambda}_t)C(\hat{\lambda}_t)$. If we consider the Lyapunov function

$$V_t(z_t, \lambda_t) = z_t^\top P(\lambda_t)\,z_t \tag{6.7}$$

we have

$$V_{t+1} = z_t^\top\,\Pi(\lambda_t, \lambda_t)^\top\,P(\lambda_{t+1})\,\Pi(\lambda_t, \hat{\lambda}_t)\,z_t \tag{6.8}$$

and hence stability will be inferred by proving that V_t is strictly decreasing under suitable conditions. Toward this end, the lemma 1.4.10 is needed (see [9] for the proof).

The sufficient condition (1.42) given in lemma 1.4.10 for which (1.43) holds can be regarded as a linearization of (1.43), which is well-suited to being treated via LMIs.

For the sake of brevity, we denote any matrix M depending on λ_t or $\hat{\lambda}_t$ by M_i and M_j, respectively ; similarly, N_{ij} is a matrix that depends on both λ_t and $\hat{\lambda}_t$. For example, $P(\hat{\lambda}_t)$ and $A\,(\lambda_t) - B(\lambda_t)\,K(\hat{\lambda}_t)$ will be referred to as P_j and $A_i - B_i K_j$, respectively. Similarly, we will adopt the index k to refer to $\hat{\lambda}_{t+1}$, i.e., for example, by writing P_k for $P(\hat{\lambda}_{t+1})$.

Theorem 6.2.1. *Assume that there exist matrices $S_i = S_i^\top > 0$, scalars $\alpha_j > 0$ and gain matrices $\widetilde{K}_j$, $\widetilde{L}_j$, for $, i, j = 1, \dots, M$ solutions of the LMIs*

$$\begin{pmatrix} S_k & \mathbb{T}_{ij} & 0 \\ (*) & 2\alpha_j I & S_i \\ (*) & (*) & S_i \end{pmatrix} > 0, \quad \textit{for all} \;\; i, j, k \in \Lambda \tag{6.9}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{ij} &= \begin{bmatrix} \alpha_j A_i - B_i \widetilde{K}_j & B_i \widetilde{K}_j \\ \mathbb{T}_{ij}^{21} & \mathbb{T}_{ij}^{22} \end{bmatrix} \\ \mathbb{T}_{ij}^{21} &= \alpha_j \Delta A_{ij} - \Delta B_{ij} \widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j \Delta C_{ij} \\ \mathbb{T}_{ij}^{22} &= \alpha_j A_j + \Delta B_{ij} \widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j C_j \,. \end{aligned}$$

Then, (6.5) *is asymptotically stable with the gains $K_j = \frac{1}{\alpha_j}\widetilde{K}_j$ and $L_j = \frac{1}{\alpha_j}\widetilde{L}_j$, $j \in \Lambda$.*

Proof. The stability of (6.5) is proved by verifying that the Lyapunov function is strictly decreasing out of the origin. Since

$$V_{t+1} - V_t = z_t^\top \left(\Pi_{ij}^\top P_k \Pi_{ij} - P_j \right) z_t < 0 \,, \forall i, j, k \in \Lambda$$

for all $z_t \neq 0$, V_t is decreasing if the following inequalities are satisfied

$$P_j - \Pi_{ij}^\top P_k \Pi_{ij} > 0 \,, \forall i, j, k \in \Lambda \tag{6.10}$$

where

$$\Pi_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ \Pi_{ij}^{21} & \Pi_{ij}^{22} \end{pmatrix}$$

with $\Pi_{ij}^{21} = \Delta A_{ij} - \Delta B_{ij} K_j - L_j \Delta C_{ij}$ and $\Pi_{ij}^{22} = A_j + \Delta B_{ij} K_j - L_j C_j$. Using the notation $S_i = P_i^{-1}$ for short, the Schur lemma allows one to establish the equivalence between (6.10) and the following :

$$\begin{pmatrix} S_k & \Pi_{ij} \\ (*) & S_j^{-1} \end{pmatrix} > 0 \,, \forall i, j, k \in \Lambda \,. \tag{6.11}$$

Notice that (6.11) is not an LMI because of the presence of both S_k and S_k^{-1} for all $k \in \Lambda$. However, using [9][Lemma 1, p. 1786], we obtain that (6.11) holds if there exist positive real scalars α_j such that

$$\begin{pmatrix} S_k & \alpha_j \Pi_{ij} & 0 \\ (*) & 2\alpha_j I & S_j \\ (*) & (*) & S_j \end{pmatrix} > 0 \,, \forall i, j, k \in \Lambda \,.$$

Using the change of variables $\widetilde{K}_j = \alpha_j K_j$ and $\widetilde{L}_j = \alpha_j L_j$, we get the LMIs (6.9), thus concluding the proof.

If the instantaneous value of the switching mode is known in real time, we have to deal with simpler LMI conditions that are given by (6.9) with $i = j$.

The observer-based controller gains are synthesized simultaneously, contrarily to recent achievements proposed for a similar class of systems [20], where, in order to avoid bilinear matrix inequalities, the authors propose an algorithm with two steps. In the first step, a set of LMIs accounts for the gains of the observer, which is designed by following an input-to-state stability formulation. In the second step, the controller gains are deduced by solving other LMI conditions.

6.3 Output feedback control in the presence of disturbances

Consider the system (6.1) under the effect of additive noises :

$$\begin{array}{rcl} x_{t+1} & = & A(\lambda_t)\,x_t + B(\lambda_t)\,u_t + D(\lambda_t)\,\omega_t \\ y_t & = & C(\lambda_t)\,x_t + E(\lambda_t)\,\omega_t \end{array} \tag{6.12}$$

where $t = 0,1,\dots$ is the time instant, $x_t \in \Re^n$ is the continuous state vector, $y_t \in \Re^m$ is the measurement vector, $u_t \in \Re^p$ is the input vector, ω_t is the vector of the noises, and $\lambda_t \in \Lambda = \{1,2,\dots,M\}$ is the discrete state. $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, and $C(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, are $n\times n$, $n\times p$ and $m\times n$ real matrices, respectively. $D(\lambda_t), E(\lambda_t)$ are two vectors of n rows.
Based on the certainty equivalence principle, we may apply the control scheme presented in the previous section, i.e., using (6.2), (6.3), and (6.4) in (6.12) and study the stability of the augmented system under the presence of the disturbances. The augmented system is is now as follows :

$$z_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}}_{\tilde{A}_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t}} z_t + \underbrace{\begin{pmatrix} D(\lambda_t) \\ D(\lambda_t) - L(\hat{\lambda}_t)E(\hat{\lambda}_t) \end{pmatrix}}_{G_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t}} \omega_t \tag{6.13}$$

where W_{11}, W_{12}, W_{21}, and W_{22} are defined as in (6.6). Likewise in Section 6.2, the indexes i, j, and k in any matrix correspond to dependence on λ_t, $\hat{\lambda}_t$, and $\hat{\lambda}_{t+1}$, respectively.

Définition 6.3.1. *System* (6.13) *is quadratically bounded with Lyapunov matrix P if*
– *P is a symmetric positive-definite matrix ;*
– *$z^T P z \geq 1$ implies that $(\tilde{A}z + G\omega)^T P(\tilde{A}z + G\omega) \leq z^T P z, \forall \omega \in \Omega$. If in addition, also the following condition holds :*
– *$z^T P z \geq 1$ implies that $(\tilde{A}z + G\omega)^T P(\tilde{A}z + G\omega) < z^T P z, \forall \omega \in \Omega$*
then system (6.13) *is said to be "strictly" bounded with Lyapunov matrix P.*

Indeed, quadratic boundedness concerns the decrease of Lyapunov function. More specially, consider $V(z) \triangleq z^T P z$: if system (6.13) is strictly quadratically bounded, the function $V(z_t)$ decrease,i,e., $V(z_{t+1}) < V(z_t)$), for any possible value of the system noise when $V(z_t)$ is greater than 1.
Since the stability analysis depend on the choice of suitable Lyapunov functions, we consider two cases with and without common Lyapunov matrices to derive sufficient conditions that ensure exponentially boundedness of the augmented system (6.13) in both cases, i.e, in the sense of the following definition.

Définition 6.3.2. *[40] A sequence of vector ζ_t is said to be exponentially bounded with constants $\beta \in (0,1)$, $k_1 \geq 0$, and $k_2 > -k_1$ if*

$$\|\zeta_t\|^2 \leq k_1 + k_2\,(1-\beta)^t\,,\ t = 0,1,\dots \tag{6.14}$$

Such a notion is well-suited to dealing with the design as well, as it will shown in the following. First, let us focus on the stabilty result based on the of a common Lyapunov functions.

Theorem 6.3.1. *Suppose there exist positive scalars γ_j, $\alpha \in (0,1)$ and matrices $\widetilde{K}_j$, $\widetilde{L}_j$, for $, j = 1,\dots,M$, a positive definite matrix P solutions of the LMIs*

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & 0 & \mathbb{T}_{i,j}^T & 0 \\ (*) & (\alpha-1)P & \mathscr{G}^T & 0 \\ (*) & (*) & -2\gamma_j I & P \\ (*) & (*) & (*) & -P \end{pmatrix} < 0, \quad \textit{for all } \ i,j \in \Lambda \tag{6.15}$$

with

$$\mathbb{T}_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_j A_i - B_i \widetilde{K}_j & B_i \widetilde{K}_j \\ \mathbb{T}_{ij}^{21} & \mathbb{T}_{ij}^{22} \end{bmatrix}, \tag{6.16}$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{21} = \gamma_j (\Delta A_{ij}) - (\Delta B_{ij})\widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j (\Delta C_{ij}),$$

$$\mathbb{T}_{ij}^{22} = \gamma_j A_j + (\Delta B_{ij})\widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j C_j.$$

$$\mathscr{G} = \begin{bmatrix} \gamma_j D_i \\ \gamma_j D_i - \widetilde{L}_j E_j \end{bmatrix}$$

Then, for any $x_0, \hat{x}_0 \in \Re^n$, z_t is exponentially bounded with constants

$$\beta = \alpha,\ k_2 = (\bar{\delta}(P)\|z_0\|^2 - 1)/\underline{\delta}(P),\ k_1 = 1/\underline{\delta}(P)$$

The stabilizing gains are given by $K_j = \dfrac{1}{\gamma_j}\widetilde{K}_j$ and $L_j = \dfrac{1}{\gamma_j}\widetilde{L}_j$, $j \in \Lambda$.

Proof. Indeed, according to Corollary 1 in [40], if the following inequality holds

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T P \tilde{A}_{ij} - P + \alpha P & \tilde{A}_{ij}^T P G_{ij} \\ G_{ij}^T P \tilde{A}_{ij} & G_{ij}^T P G_{ij} - \alpha Q \end{bmatrix} < 0 \tag{6.17}$$

where $\alpha \in (0,1)$ and $Q > 0$, then

$$V(z_t) \leq \xi(\alpha),\ t = 0,1,\ldots,$$

where the sequence $\xi(\alpha)$ is defined as

$$\xi(\alpha) = (1-\alpha)^t z_0^T P z_0 + 1 - (1-\alpha)^t.$$

Since

$$\underline{\delta}(P)\|z_t\|^2 < V(z_t) < \bar{\delta}(P)\|z_t\|^2$$

we can write

$$\|z_t\|^2 \leq ((1-\alpha)^t(\bar{\delta}(P)\|z_0\|^2 - 1) + 1)/\underline{\delta}(P)$$

and hence z_t is exponentially bounded with constants

$$\beta = \alpha,\ k_2 = (\bar{\delta}(P)\|z_0\|^2 - 1)/\underline{\delta}(P),\ k_1 = 1/\underline{\delta}(P).$$

Using the Schur lemma, we obtain that (6.17) is equivalent to the following

$$\begin{bmatrix} (\alpha-1)P & 0 & \tilde{A}_{ij}^T \\ 0 & -\alpha Q & G_{ij}^T \\ \tilde{A}_{ij} & G_{ij} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{6.18}$$

or

$$\begin{bmatrix} -\alpha Q & 0 & \tilde{A}_{ij}^T \\ 0 & (\alpha-1)P & G_{ij}^T \\ \tilde{A}_{ij} & G_{ij} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{6.19}$$

To linearize (6.19), we use [9][Lemma 1, p. 1786] and deduce that (6.19) hold if there exist positive real scalars $(\gamma_j)_{j\in\Lambda}$ so that

$$\begin{bmatrix} -\alpha Q & 0 & \gamma_j \tilde{A}_{i,j}^T & 0 \\ (*) & (\alpha-1)P & \gamma_j G^T & 0 \\ (*) & (*) & -2\gamma_j I & P \\ (*) & (*) & (*) & -P \end{bmatrix} < 0, \quad \text{for all } i,j\in\Lambda.$$

Using the change of variables $\widetilde{K}_j = \gamma_j K_j$ and $\widetilde{L}_j = \gamma_j L_j$, we obtain (6.15).
Now we will use a noncommon Lyapunov function to give sufficient conditions that ensure the exponentially boundedness of the augmented system (6.13). For this purpose, we first introduce the definition of quadratic boundedness.

Définition 6.3.3. *System* (6.13) *is strictly quadratically bounded with noncommon Lyapunov matrices* $P(\hat{\lambda}_t) \triangleq P_j$, $j\in\Lambda=\{1,2,\dots,M\}$ *for all allowable* $w_t\in\Xi_Q\subset\Re^q$ *(where* $\Xi_Q \triangleq \{\zeta : \zeta^T Q\zeta \le 1\}$*) if* $z^T P_j z > 1$, $\forall j\in\Lambda$, *implies*

$$\left(\tilde{A}_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t} z_t + G_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t}\omega_t\right)^T P_k \left(\tilde{A}_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t} z_t + G_{\lambda_t,\hat{\lambda}_t}\omega_t\right) < z^T P_j z,$$

$\forall i,j,k\in\Lambda$.

Based on the aforesaid, we can prove the following.

Theorem 6.3.2. *The switching system* (6.13) *is strictly quadratically bounded in the sense of Definition 6.3.3 if there exist scalars* $\alpha_j>0$, $j\in\Lambda$ *such that*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} - P_j + \alpha_j P_j & \tilde{A}_{ij}^T P_k G_{ij} \\ G_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} & G_{ij}^T P_k G_{ij} - \alpha_j Q \end{bmatrix} < 0, \tag{6.20}$$
$$\forall i,j,k\in\Lambda.$$

Proof. We need the following result, which is just [40][Theorem 1, p. 498] : system (6.13) is quadratically bounded if and only if $w_t' Q w_t \le z_t' P_j z_t$ for all j implies $V(z_{t+1}) - V(z_t) \le 0$, or equivalently

$$\begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_j & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix} \le 0$$

for all $j\in\Lambda$ implies

$$\begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} - P_j & \tilde{A}_{ij}^T P_k G_{ij} \\ G_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} & G_{ij}^T P_k G_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ w_t \end{bmatrix} < 0 \tag{6.21}$$

for all $i,j,k\in\Lambda$. Using such a result and the S-procedure, we obtain that (6.21) holds if there exist $\alpha_j>0, j\in\Lambda$ such that

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} - P_j + \alpha_j P_j & \tilde{A}_{ij}^T P_k G_{ij} \\ G_{ij}^T P_k \tilde{A}_{ij} & G_{ij}^T P_k G_{ij} - \alpha_j Q \end{bmatrix} < 0$$

for all $i,j,k\in\Lambda$ and thus we conclude.
Thus, the objective is to find the gains K_j and L_j, $j\in\Lambda$ such that (6.13) is exponentially bounded for any x_0 and $\hat{x}_0\in\Re^n$, $w_t\in\Xi_Q$, and all $i,j\in\Lambda$. Toward this end, we can state the following.

Proposition 6.3.4. *If* (6.20) *holds, then* (6.13) *is exponentially bounded with constants*

$$\beta = \min_j (\alpha_j), \tag{6.22a}$$

$$k_2 = \max_j (\bar{\delta}(P_j)\|z_0\|^2 - 1)/\min_j \underline{\delta}(P_j), \tag{6.22b}$$

$$k_1 = 1/\min_j \underline{\delta}(P_j). \tag{6.22c}$$

Proof. If there exist scalars $\alpha_j > 0$, $j \in \Lambda$ such that (6.20) hold for all $i,j,k \in \Lambda$, or equivalently

$$V(z_{t+1}) - V(z_t) \leq \alpha_j \left[w_t^T Q w_t - V(z_t) \right] \tag{6.23}$$

for all $z_t \in \Re^{2n}$ and $w_t \in \Re^q$. If $w_t^T Q w_t \leq 1$, it can easily seen that $V(z_{t+1}) \leq \alpha_j + (1-\alpha_j)V(z_t)$. By induction, the latter inequality implies $V(z_t) \leq \xi_t(\alpha_j), \ \forall j \in \Lambda$ with $\xi_t(\alpha_j)$ such that

$$\xi_t(\alpha_j) = (1-\alpha_j)^t z_0^T P_j z_0 + 1 - (1-\alpha_j)^t \ t = 0,1,... \tag{6.24}$$

From (6.23) and (6.24) we obtain

$$V(z_t) \leq \xi_t(\alpha_j), \ j \in \Lambda, \ t = 0,1,\ldots,$$

since $\underline{\delta}(P_j)\|z_t\|^2 \leq V(z_t) \leq \bar{\delta}(P_j)\|z_t\|^2$ for all $j \in \Lambda$ and $t = 0,1,\ldots$, we deduce

$$\begin{aligned} \|z_t\|^2 &\leq \frac{1}{\underline{\delta}(P_j)} \left\{ (1-\alpha_j)^t \left[(\bar{\delta}(P_j)\|z_0\|^2) - 1 \right] + 1 \right\} \\ &\leq \left\{ k_1 + (1-\beta)^t k_2 \right\} \end{aligned}$$

with β, k_2, and k_1 as in (6.22) and thus conclude the proof.
Next theorem allows one to attain more favorable design conditions to ensure exponential boundedness.

Theorem 6.3.3. *Suppose there positive scalars γ_j, $\alpha_j \in (0,1)$ and matrices $\widetilde{K}_j$, $\widetilde{L}_j$, positive definite matrices P_j for $j = 1,\ldots,M$, solutions of the LMIs*

$$\begin{pmatrix} (\alpha_j - 1)P_j & 0 & \mathbb{T}_{i,j}^T \\ (*) & -\alpha_j Q & \mathscr{G}^T \\ (*) & (*) & P_k - 2\mathscr{X}_j \end{pmatrix} < 0, \ \forall \ i,j,k \in \Lambda \tag{6.25}$$

with

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{ij} &= \begin{bmatrix} \gamma_j A_i - B_i \widetilde{K}_j & B_i \widetilde{K}_j \\ \mathbb{T}_{ij}^{21} & \mathbb{T}_{ij}^{22} \end{bmatrix} \\ \mathbb{T}_{ij}^{21} &= \gamma_j (\Delta A_{ij}) - (\Delta B_{ij})\widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j (\Delta C_{ij}) \\ \mathbb{T}_{ij}^{22} &= \gamma_j A_j + (\Delta B_{ij})\widetilde{K}_j - \widetilde{L}_j C_j \\ \mathscr{G} &= \begin{bmatrix} \gamma_j D_i \\ \gamma_j D_i - \widetilde{L}_j E_j \end{bmatrix} \\ \mathscr{X}_j &= \begin{bmatrix} \gamma_j I & 0 \\ 0 & \gamma_j I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Then, for any $x_0, \hat{x}_0 \in \Re^n$, the vector $z_t = (x_t; e_t)$ is exponentially bounded with constants $\beta = \min_j(\alpha_j)$, $k_2 = \max_j(\bar{\delta}(P_j)\|z_0\|^2 - 1)/\min_j \underline{\delta}(P_j)$,, and $k_1 = 1/\min_j \underline{\delta}(P_j)$ and the stabilizing observer-based control gains are given by $K_j = \dfrac{1}{\gamma_j}\widetilde{K}_j$ and $L_j = \dfrac{1}{\gamma_j}\widetilde{L}_j$, $j \in \Lambda$.

Proof. The proof is based on the linearization of (6.20). Using the Schur lemma, (6.20) tunes out to be equivalent to the following :

$$\begin{bmatrix} (\alpha_j-1)P_j & 0 & \tilde{A}_{ij}^T \\ 0 & -\alpha_j Q & G_{ij}^T \\ \tilde{A}_{ij} & G_{ij} & -P_k^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i,j,k \in \Lambda \tag{6.26}$$

Now, we must eliminate the variable P_k^{-1} since it must not exist simultaneously with the variable P_j. To do this, we pre and post multiply (6.26) by diag(I, I, X_j), thus obtaining the following inequality :

$$\begin{bmatrix} (\alpha_j-1)P_j & 0 & \tilde{A}_{ij}^T X_j \\ 0 & -\alpha_j Q & G_{ij}^T X_j \\ X_j^T \tilde{A}_{ij} & X_j^T G_{ij} & -X_j^T P_k^{-1} X_j \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i,j,k \in \Lambda \tag{6.27}$$

we use the bound

$$-X_j^T P_k^{-1} X_j < P_k - 2X_j$$

a sufficient condition for inequality (6.27) to hold is the set of the following LMIs

$$\begin{bmatrix} (\alpha_j-1)P_j & 0 & \tilde{A}_{ij}^T X_j \\ 0 & -\alpha_j Q & G_{ij}^T X_j \\ X_j^T \tilde{A}_{ij} & X_j^T G_{ij} & P_k - 2X_j \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i,j,k \in \Lambda \tag{6.28}$$

Choosing $X_j = \gamma_j I$, and putting $\widetilde{K}_j = \gamma_j K_j$ and $\widetilde{L}_j = \gamma_j L_j$, we obtain (6.25).

6.4 Numerical Examples

We considered two numerical examples to show the effectiveness of the proposed method in a noisy-free setting (Example 1) and in the presence of disturbances (Example 2).

6.4.1 Example 1

Consider a third-order system with state vector $x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 & x_k^2 & x_k^3 \end{bmatrix}^T$ and

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.25 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

The three regions associated with the mode 1, 2, and 3 are denoted by R_1, R_2, and R_3, respectively :

$$R_1 = \{x_k \in \Re^3 : x_k^1 < -1\},$$

$$R_2 = \{x_k \in \Re^3 : -1 \leq x_k^1 < 5\},$$

and

$$R_3 = \{x_k \in \Re^3 : x_k^1 \geq 5\}.$$

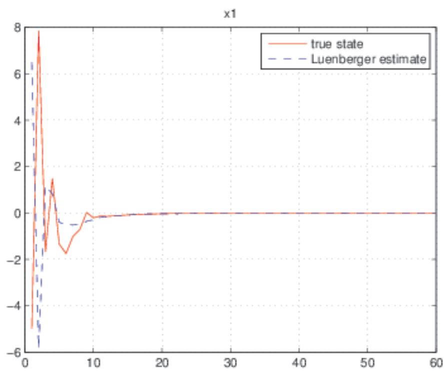
By solving the set of LMIs (6.9) of Section 6.2 , we obtained the gains

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.0191 & 0.0421 & 0.2984 \end{bmatrix}$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.1281 & -0.0028 & 0.1933 \end{bmatrix}$$
$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.0922 & 0.0593 & 0.2379 \end{bmatrix}$$

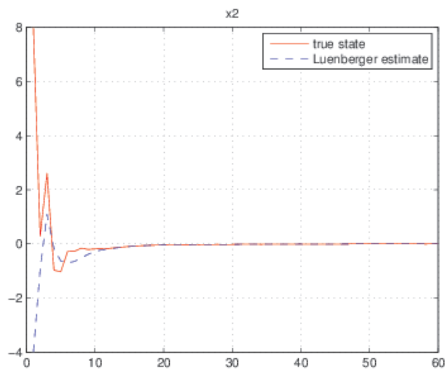
for the controller and

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0301 \\ -0.0405 \\ 0.2098 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0.0228 \\ -0.0005 \\ 0.2115 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0.0827 \\ -0.0195 \\ 0.1995 \end{bmatrix}$$

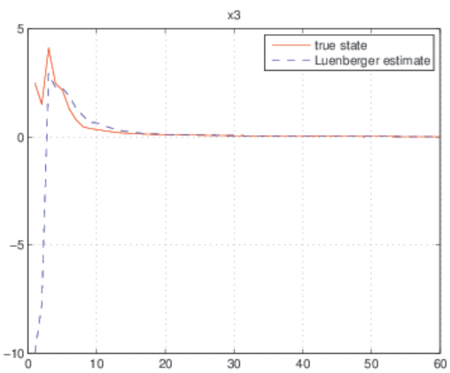
for the observer. The result of the simulations with $x_0 = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 2.5 \end{bmatrix} \in R_1$ and $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} 6.5 & -4 & -10 \end{bmatrix} \in R_2$ are given in Figure 6.2. The mode is correctly estimated over the simulation horizon $T = 60$ with a percentage of about 90%.



(a) Behavior of x_1 and $\hat{x}_1$



(b) Behavior of x_2 and $\hat{x}_2$



(c) Behavior of x_3 and $\hat{x}_3$

FIGURE 6.2 – Example 1 : states variables and their estimates.

6.4.2 Example 2

In the second example we deal with a system in presence of disturbances and follow the approach based on quadratic boundedness of Section 6.3. To this end, we consider a third-order system with two modes, $x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 & x_k^2 & x_k^3 \end{bmatrix}^T$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ -1.12 & 0.4 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 1 \\ -1 & 0.4 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = 1,\ E_2 = 0.$$

The switching regions are

$$R_1 = \{x_k \in \Re^3 : x_k^1 < 6\},$$
$$R_2 = \{x_k \in \Re^3 : x_k^1 \geq 6\}.$$

After solving (6.25) for $\alpha_1 = \alpha_2 = 10^{-11}$, we get the the following gain matrices

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.2751 & 0.2127 & 0.6925 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.2842 & 0.2167 & 0.6862 \end{bmatrix}$$

for the controller and

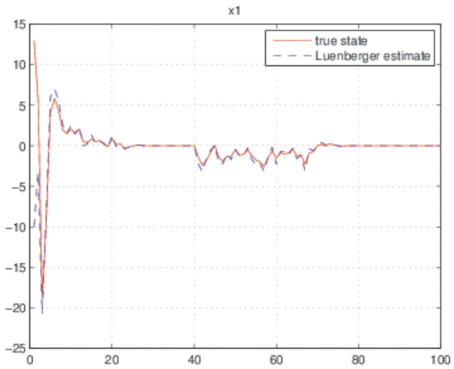
$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.5984 \\ 0.1107 \\ 0.7950 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.6114 \\ 0.1408 \\ 0.7937 \end{bmatrix}$$

for the observer. In Figure 6.3, the simulation in a noise-free setting shows the exponential convergence of the system to zero with initial state and estimate state values belonging to the two different regions, i.e., $x_0 = \begin{bmatrix} 13 & 25 & -5 \end{bmatrix} \in R_2$ and $\hat{x}_0 = \begin{bmatrix} -10 & 14 & 0.5 \end{bmatrix} \in R_1$. In such a simulation run, the mode is correctly estimated with a percentage of about 98%.

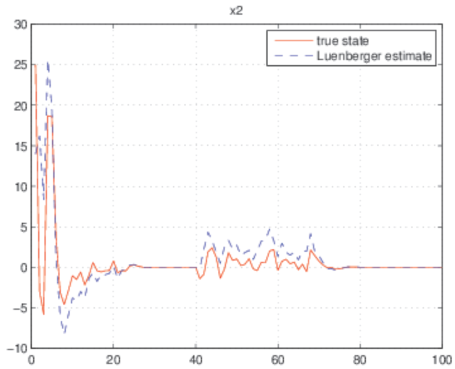
6.5 Conclusion

We have attacked the problem of the design of observer-based controllers for switching linear discrete-time systems with known switching rule but unknown switching mode by providing a systematic LMI methodology to solve it numerically. Such a topic is quite new and still difficult, as, to our knowledge, only few results are reported in the literature.

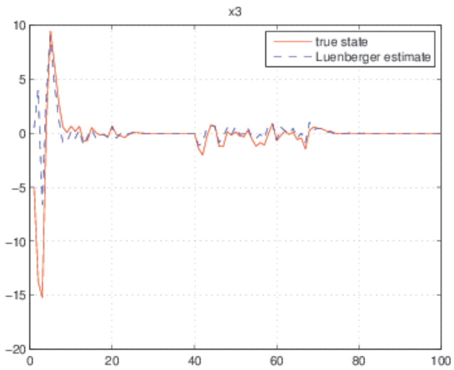
The main contribution of this work concerns the stability conditions we have established for the proposed output feedback control scheme by relying on standard Lyapunov stability results in case of noise-free setting. Moreover, we have fruitfully exploited the notion of exponential boundedness to account for possible additive bounded disturbances.



(a) Behavior of x_1 and $\hat{x}_1$



(b) Behavior of x_2 and $\hat{x}_2$



(c) Behavior of x_3 and $\hat{x}_3$

FIGURE 6.3 – Example 2 : states variables and their estimates

Conclusion générale et quelques perspectives de recherche

Par ce travail, nous estimons avoir contribué à l'étude du problème de la commande basée sur un observateur pour les systèmes dynamiques incertains. La synthèse de lois de commande pour les systèmes linéaires/non linéaires à paramètres incertains est un sujet difficile quand il s'agit d'un retour par un observateur. En effet, la présence des paramètres incertains rend le problème de la stabilisation complexe. La littérature est abondante et différentes méthodes et techniques ont été proposées. Néanmoins, le problème est loin d'être résolu dans sa totalité ; il reste beaucoup de pistes à explorer pour améliorer les méthodes actuelles. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes focalisés sur le problème de la stabilisation en utilisant les approches basées sur des LMIs. Celles-ci ont l'avantage de fournir des solutions par des algorithmes de programmation convexe. Par conséquent, naturellement les résultats obtenus dans cette thèse se focalisent autour de cette approche et les efforts se sont concentrés sur l'établissement de nouvelles conditions LMI moins contraignantes vu le conservatisme des méthodes LMI actuelles qui obéissent à des contraintes fortes difficiles à vérifier (contraintes égalités).

En guise de conclusion, le but de cette thèse était de développer des méthodes de synthèse LMI nouvelles dans le contexte de la stabilisation des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires incertains. Différentes conditions de synthèse sous forme LMI ont été obtenues grâce à l'utilisation de la technique de congruence et de la fameuse inégalité de Young d'une manière judicieuse. Ces dernières s'avèrent moins contraignantes comparées aux méthodes LMI existantes dans la littérature. Une application directe au cas des systèmes à commutation a été présentée en combinant l'approche LMI pour la stabilisation et l'estimation et la prédiction du mode de commutation supposé inconnu.

Perspectives

De nombreuses questions demeurent encore posées dans ce domaine. Comme futures perspectives de recherche sur les résultats présentés dans ce manuscrit, nous envisageons développer et améliorer les points suivant

- Contourner la difficulté de la dépendance de nos conditions LMIs des variables ε_i à fixer a priori.
- Dériver des conditions LMIs avec des matrices de Lyapunov non diagonales pour les systèmes à temps continu considérés dans le **chapitre 2**, et chercher de nouvelles fonctions de Lyapunov qui permettent en général d'obtenir des résultats moins conservatifs.
- Tester l'applicabilité de notre approche pour les mêmes classes de systèmes en considérant d'autres types d'observateurs.
- Faire une analyse de convergence de l'erreur d'estimation du mode de commutation dans le **chapitre 6**.
- Étendre l'applicabilité de notre approche à d'autres type de systèmes, tels que les systèmes à commutations à temps continu, les systèmes à commutations non linéaires lipschitziens, les systèmes à commutations sans connaissance a priori du mode et de la loi de commutation, et les systèmes interconnectés.
- Rechercher de nouvelles fonctions de Lyapunov aboutissant à des conditions de synthèse moins conservatives.

- Etude des systèmes stochastiques.

Nous souhaitons enfin que notre contribution puisse susciter un intérêt et donner lieu à d'autres études dans ce domaine où , nous le répétons, de nombreuses questions fondamentales restent encore ouvertes.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.

[2] Roberto Tempo Petersen, Ian R. Robust control of uncertain systems : classical results and recent developments. *Automatica*, pages 1315–1335, 2014.

[3] S. Ibrir and S. Diopt. Novel LMI conditions for observer-based stabilization of Lipschitzian nonlinear systems and uncertain linear systems in discrete-time. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2) :579–588, 2008.

[4] S. Ibrir, W.F. Xie, and C.Y. Su. Observer-based control of discrete-time Lipschitzian nonlinear systems : application to one-link flexible joint robot. *International Journal of Control*, 78(6) :385–395, 2005.

[5] C.H. Lien. Robust observer-based control of systems with state perturbations via LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control,*, 49(8) :1365–1370, 2004.

[6] Huijun Gao, Changhong Wang, and Lu Zhao. Comments on : "An LMI-based approach for robust stabilization of uncertain stochastic systems with time-varying delays". *IEEE Trans. Automat. Control*, 48(11) :2073–2074, 2003.

[7] G.I. Bara and M. Boutayeb. Static output feedback stabilization with $\mathscr{H}_\infty$ performance for linear discrete-time systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(2) :250–254, 2005.

[8] G. Garcia, B. Pradin, and F. Zeng. Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(12) :1954–1958, 2001.

[9] S. Ibrir. Static output feedback and guaranteed cost control of a class of discrete-time nonlinear systems with partial state measurements. *Nonlinear Analysis*, 68(7) :1784–1792, 2008.

[10] K. Kalsi, J. Lian, and S.H. Zak. Decentralized dynamic output feedback control of nonlinear interconnected systems. IEEE *Transactions on Automatic Control*, 55(8) :1964–1970, 2010.

[11] H.K.Khalil A.N. Atassi. Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs. *Systems and Control Letters*, 39 :183–191, 2000.

[12] M. Arcak and P. Kokotovic. Observer-based control of systems with slope-restricted nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7) :1146–1150, 2001.

[13] E. Hendricks and J.B. Luther. Model and observer based control of internal combustion engines. In *Proceedings of the International Workshop on Modeling, Emissions and Control in Automotive Engines (MECA), Fisciano, Italy*, pages 9–21, 2001.

[14] B. Song and J.K. Hedrick. Observer-based dynamic surface control for a class of nonlinear systems : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11) :1995–2001, 2004.

[15] I. Karafyllis and C. Kravaris. Robust output feedback stabilization and nonlinear observer design. *Systems & control letters*, 54(10) :925–938, 2005.

[16] P.R. Pagilla, E.O. King, L.H. Dreinhoefer, and S.S. Garimella. Robust observer-based control of an aluminum strip processing line. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 36(3) :865–870, 2000.

[17] R.E. Kalman et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960.

[18] David G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Automat. Control*, ac-16(6) :596–602, 1971.

[19] A. Trofino C. A. R. Crusius. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 44 :1053—1057, 1999.

[20] W.P.M.H. Heemels, J. Daafouz, and G. Millerioux. Observer-based control of discrete-time LPV systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control,*, 55(9) :2130–2135, 2010.

[21] S. Ibrir. Design of static and dynamic output feedback controllers through Euler approximate models : uncertain systems with norm-bounded uncertainties. *IMA J. Math. Control Inform.*, 25(3) :281–296, 2008.

[22] L. Jetto and V. Orsini. Efficient LMI-based quadratic stabilization of interval LPV systems with noisy parameter measures. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :993 –998, 2010.

[23] Z. Lin, X. Guan, Y. Liu, and P. Shi. Observer-based robust control for uncertain systems with time-varying delay. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 18(3) :439, 2001.

[24] F. Jabbari and W.E. Schmitendorf. Effects of using observers on stabilization of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2) :266 –271, 1993.

[25] M. Abbaszadeh and H.J. Marquez. Robust observer design for sampled-data Lipschitz nonlinear systems with exact and Euler approximate models. *Automatica*, 44(3) :799 – 806, 2008.

[26] B. Grandvallet, A. Zemouche, H. Souley-Ali, and M. Boutayeb. New LMI condition for observer-based $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of a class of nonlinear discrete-time systems. *SIAM J. Control Optim.*, 51(1) :784–800, 2013.

[27] B. Grandvallet, A. Zemouche, and M. Boutayeb. Observer-based stabilization of a class of nonlinear systems using LPV approach. *Journal of Nonlinear Systems and Applications*, 3(3) :64–72, 2012.

[28] S. Xu. Robust H_∞ filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with state delay. *Circuits and Systems I : IEEE Transactions on Fundamental Theory and Applications*, 49(12) :1853 – 1859, 2002.

[29] Ali Zemouche and Mohamed Boutayeb. On LMI conditions to design observers for Lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585 – 591, 2013.

[30] Youyi Wang, Lihua Xie, and Carlos E. de Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 19(2) :139 – 149, 1992.

[31] Z. Ji, L. Wang, and G. Xie. New results on the quadratic stabilization of switched linear systems. In *Proc. of the 42st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1657–1662, Maui, Hawaii, USA, 2003.

[32] J. Li and Y. Liu. Stabilization of a class of discrete-time switched systems via observer-based output feedback. *Journal of Control Theory and Applications*, 5(3) :307–311, 2007.

[33] Z. Song and J. Zhao. Observer-based robust H_∞ control for uncertain switched systems. *Journal of Control Theory and Applications*, 5(3) :278–284, 2007.

[34] F. Blanchini, S. Miani, and F. Mesquine. A separation principle for linear switching systems and parametrization of all stabilizing controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 54(2) :279–292, 2009.

[35] Z.G. Li, C.Y. Wen, and Y.C. Soh. Observer-based stabilization of switching linear systems. *Automatica*, 39(3) :517–524, 2003.

[36] M. Baglietto, G. Battistelli, and P. Tesi. Stabilization and tracking for switching linear systems under unknown switching sequences. *Systems & Control Letters*, 62(1) :11–21, 2013.

[37] G. Battistelli. On stabilization of switching linear systems. *Automatica*, 49(5) :1162–1173, 2013.

[38] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli. Luenberger observers for switching discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 80(12) :1931–1943, 2007.

[39] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli. On estimation error bounds for receding-horizon filters using quadratic boundedness. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(8) :1350–1355, 2004.

[40] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli. Design of state estimators for uncertain linear systems using quadratic boundedness. *Automatica*, 42(38) :497–502, 2006.

[41] Chang-Hua Lien. An efficient method to design robust observer-based control of uncertain linear systems. *Appl. Math. Comput.*, 158(1) :29–44, 2004.

[42] Masoud Abbaszadeh and Horacio J. Marquez. LMI optimization approach to robust $\mathscr{H}_\infty$ observer design and static output feedback stabilization for discrete-time nonlinear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19(3) :313–340, 2009.

[43] H. Lens. Fast robust stabilization by saturating output feedback of uncertain linear systems with inputs constraints. *48th IEEE conference on decision and control and 28th chinese control conference*, December 2009.

[44] E. Ostertag. An improved path-following method for mixed H_2 /H_∞ controller design. *IEEE Transactions onAutomatic Control*, 53(8) :1967–1971, 2008.

[45] O. Toker and H. Osbay. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilzation with static output feedback. *IEEE Americain Control Conference*, 1995.

[46] B. Grandvallet, A. Zemouche, H. Souley-Ali, and M. Boutayeb. New LMI condition for observer-based $\mathscr{H}_\infty$ stabilization of a class of nonlinear discrete-time systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(1) :784–800, 2013.

[47] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River NJ, 1996.

[48] S. Pettersson R. A. Decarlo, M. S. Branicky and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *In Proceedings of the IEEE : Special Issue Hybrid Systems*, page 1069–1082, 2000.

[49] A. Molchanov and Y. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems and Control Letters*, 13(1) :59–64, 1989.

[50] D. Liberzon and R. Tempo. Common Lyapunov functions and gradient algorithms. *IEEE Trans. Automat. Control*, 49(60) :990–994, 2004.

[51] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse. Stability of switched systems : a Lie-algebraic condition. *Systems & Control Letters*, 37 :117–122, 1999.

[52] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :751–760, 1999.

[53] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : a switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 47(11) :1883–1887, 2002.

[54] Hai. Lin Lei. Fang and Panos J. Antasklis. Stabilization and performance analysis for a class of switched systems. *In 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, page 3265–3270, 2004.

[55] J.M. Coron. Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. http ://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf.

[56] J.P Gautier and G. Bornard. observability for any $u(t)$ of a class of nonlinar systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-26(6), 1981.

[57] R. Hermann and A Krener. Nonlinear controlability and observability. *IEEE transaction on Automatic Control*, AC-22(5), 1977.

[58] E. Trélat. *Contrôle optimale : Théorie et applications*. Université d'Orléans, 2007.

[59] Yurii Nesterov and Arkadii Numerovskii. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13. 1993.

[60] M.C. de Oliveira, J. Bernussou, and J.C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4) :261 – 265, 1999.

[61] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel, and J. Bernussou. Extended $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9) :666–679, 2002.

[62] B. Ross Barmish and Alberto R. Galimidi. Robustness of Luenberger observers : linear systems stabilized via non linear control. *Automatica.*, 22(4) :413–423, 1986.

[63] W. Breinl and G. Leitnam. State feedback for uncertain dynamical systems. *Applied Mathematics And Computation*, pages 65–87, 1987.

[64] Ian R. Petersen and Roberto Tempo. Robust control of uncertain systems : Classical results and recent developments. *Automatica*, 50(5) :1315 – 1335, 2014.

[65] W.C. HO Daniel and Lu Guoping. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback : the unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2) :105–115, 2003.

[66] H. Souley Ali M. Zasadzinski and M. Darouach. Robust reduced order $\mathscr{H}_\infty$ control via an unbiased observer. *International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering*, 1, Special Issue, CSC :261–275, December 2007.

[67] Yong-Yan Cao, James Lam, and You-Xiam Sun. Static output feedback stabilization : An ILMI approach. *Automatica*, 34(12) :1641 – 1645, 1998.

[68] Atsushi Fijumori. Optimization of static output feedback using subsitutive LMI formulation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49(6) :995–999, 2004.

[69] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5) :355 – 359, 2001.

[70] J. Yu and A.Sideris. $\mathscr{H}_\infty$ control with parametric Lyapunov functions. *Systems and Control Letters*, 30 :57–69, 1997.

[71] F. Wu and K. Dong. Gain-scheduling control of LFT systems using parameter dependant Lyapunov functions. *Automatica*, 42 :39–50, 2006.

[72] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control,*, 41(3) :436–442, Mar 1996.

[73] Lihua Xie, Carlos E. De Souza, and Youyi Wang. Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems : An $\mathscr{H}_\infty$ approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4) :297–312, 1996.

[74] Y. Ohta and D.D Šiljak. Parametric quadratic stabilizability of uncertain non linear systems. *Systems and Control letters*, (22) :437–444, 1994.

[75] A.M. Pertew, H.J. Marquezz, and Q. Zhao. $\mathscr{H}_\infty$ observer design for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(7) :1211–1216, 2006.

[76] Salim Ibrir. Stability and robust stabilization of discrete-time switched systems with time-delays : LMI approach. *Appl. Math. Comput.*, 206(2) :570–578, 2008.

[77] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 45(9) :2338–2350, 1997.

[78] C. Aboky, G. Sallet, and J.-C. Vivalda. Observers for lipschitz non-linear systems. *International Journal of Control*, 75(3) :204–212, 2002.

[79] F. Bedouhene H. Kheloufi, A. Zemouche and M. Boutayeb. A new observer-based stabilization method for linear systems with uncertain parameters. European Control Conference (ECC), 2013.

[80] H. Kheloufi, A. Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb. On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties. *Automatica*, 49(12) :3700–3704, 2013.

[81] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., 1985.

[82] D.W.C. Ho and G. Lu. Robust stabilization for a class of discrete-time nonlinear systems via output feedback : The unified LMI approach. *International Journal of Control*, 76(2) :105–115, 2003.

[83] L. Xie. LMI approach to output feedback stabilization of 2-D discrete systems. *International Journal of Control*, 72(2) :97–106, 1999.

[84] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel, and J. Bernussou. Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure. *International Journal of Control*, 73(5) :371–381, 2000.

[85] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9) :2338–2350, 1997.

[86] H. Kheloufi, F. Bedouhene, A. Zemouche, and H. Souley-Ali. Robust $\mathscr{H}_\infty$ observer-based controller for Lipschitz nonlinear discrete-time systems with parameter uncertainties. In *Proc. 53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4336 – 4341, Los Angeles, California, USA, 2014.

[87] P. Apkarian E. Feron and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 1996.

[88] Salim Ibrir. Static output feedback and guaranteed cost control of a class of discrete-time nonlinear systems with partial state measurements. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 68(7) :1784 – 1792, 2008.

[89] A. Alessandri, M. Baglietto, and G. Battistelli. Receding-horizon estimation for switching discrete-time linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(11) :1736–1748, 2005.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer de nouvelles méthodes de synthèse des contrôleurs (robustes) basés sur des observateurs pour les systèmes incertains : systèmes linéaires et non linéaires à temps continu, systèmes linéaires et non linéaires à temps discret et les systèmes à commutations. De nouvelles méthodes sont établies grâce au maniement judicieux de l'inégalité de Young et quelques transformations algébriques. Les solutions proposées fournissent des conditions de synthèse exprimées sous forme d'inégalités bilinéaires matricielles (BMIs), qui deviennent des LMIs en fixant a priori certains scalaires. Des comparaisons analytiques avec quelques méthodes existantes dans la littérature ont été présentées. Nous avons prouvé que ces dernières sont des cas particuliers de nos conditions de stabilité. Des exemples et des évaluations numériques du conservatisme ont été donnés afin de démontrer l'efficacité et la supériorité des méthodologies proposées.

Mots-clés: Systèmes linéaires incertains, systèmes non linéaires Lipschitziens, systèmes à commutations, fonction de Lyapunov, Observateur de Luenberger, commande basée sur un observateur, stabilité asymptotique, inégalités matricielles linéaires.

Abstract

The objective of this dissertation is to develop (robust) observer-based controllers synthesis methods for uncertain systems. Different classes of systems have been treated : linear and Lipschitzian nonlinear continuous-time and discrete-time systems, and switching systems. New design methodologies are established thanks to a judicious use of some mathematical artifacts such as the well-known Young inequality and various matrix decompositions. The proposed methods allow one to compute simultaneously the observer and controller gains by solving a single bilinear matrix inequality (BMI) (a set of Bilinear Matrix Inequalities (BMIs) in the nonlinear case), which becomes a linear matrix inequality (LMI) by freezing some scalars. Furthermore, analytic comparisons related to some old methods have been addressed. We show that some existing and elegant results reported in the literature can be regarded as particular cases of the (robust) stability conditions presented in this thesis. Numerical examples are provided to show the validity and superiority of the proposed methods.