

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou



**Faculté des Sciences
Département des Mathématiques**

Mémoire de MASTER II

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

Perturbations singulières et problèmes aux limites

Réalisé par :

TAOUCI Sylia

Dirigé par :

M^{me} **RAHMANI Leila**

Devant le jury d'examen composé de :

<i>M^r</i> MORSLI Mohammed	Professeur	UMMTO	Président
<i>M^{me}</i> RAHMANI Leila	Professeur	UMMTO	Rapporteur
<i>M^{me}</i> TALEB Lynda	MCB	UMMTO	Examinatrice
<i>M^r</i> MENGUELTI Ali	MAA	UMMTO	Examineur

Promotion : 2017 - 2018

Remerciements

Je remercie vivement M^r. M.MORSLI d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie également M^{me}. L.TALEB et M^r. A. MENGUELTI d'avoir accepté d'examiner ce travail.

*Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre chère promotrice, Madame **Rahmani. L** qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail, sa gentillesse et ses précieux conseils furent d'un apport considérable.*

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, particulièrement à M^{elle} Hanifa MOKHTARI dont l'aide a été précieuse.

Merci infiniment à tous.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents.
Mon mari.

Syha

Table des matières

Introduction générale	1
1 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle	3
1.1 Espaces de sobolev	3
1.2 Inégalités de Poincaré	4
1.3 Formule de Green (formule d'integration par partie)	4
1.4 Inégalité de Korn	4
1.5 Traces	5
1.6 Convergence faible	5
1.7 Convergence forte	5
1.8 Lax-Milgram	5
2 Introduction aux problèmes de perturbation singulière	7
2.1 Exemple d'une perturbation par un petit paramètre	7
2.2 Traitement de la perturbation singulière	8
3 Analyse mathématique du comportement de deux objets collés par un adhésif	12
3.1 Position du problème	12
3.2 Existence et unicité de la solution du problème	13
3.2.1 Changement d'échelle	15
3.2.2 Développement asymptotique	18
3.3 Existence et unicité de la solution du problème P_0	19
3.4 Simplification du problème P_0	20
3.5 Convergences	24
3.5.1 Convergence faible	24
3.5.2 Convergence forte	26
Bibliographie	28

Introduction

Les modèles mathématiques utilisés en physique ou en mécanique conduisent souvent à des difficultés lors de la résolution numérique, lorsque un petit paramètre intervient dans leurs expressions. Ce petit paramètre noté ε , peut affecter les différents termes de l'équation et représenter une caractéristique physique (viscosité, rigidité, \dots) ou être lié à la géométrie du problème (Couche mince, revêtement mince \dots etc). Souvent, le petit paramètre bien que petit, a une très grande influence sur la solution et le fait de le négliger peut conduire à des équations plus simples mais dont la solution n'est pas très proche de la solution exacte. Parfois, il y a aussi perte de conditions aux limites. On parle alors de phénomène de perturbation singulière.

Pour contourner toutes ces difficultés, nous faisons appel aux méthodes asymptotiques qui consistent en l'étude du comportement de la solution et de l'influence du petit paramètre sur celle-ci.

Dans ce travail, après un rappel d'analyse fonctionnelle et une introduction aux perturbations singulières, nous étudions le comportement asymptotique d'un assemblage collé par une fine couche d'adhésif. L'objectif est d'obtenir un modèle ne faisant pas intervenir le domaine de la colle, mais qui rend compte de l'effet de celle-ci. Cette étude est celle réalisée par Geymonat-Krasucki et Lenci dans l'article :

G.Geymonat, F.Krasucki et S.Lenci. Mathematical Analysis of a bonded joint with a soft thin Adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4 : 201-225, 1999.

Chapitre 1

Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Nous allons rappeler quelques notions de bases sur les espaces de Sobolev et quelques une de ces propriétés. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$.

1.1 Espaces de sobolev

Définition 1.1. (L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \quad \text{tel que} \quad u_{,i} \in L^p(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n \right\},$$

où $u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ sont les dérivées au sens des distributions.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|u_{,i}\|_{L^p},$$

et du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \langle u_{,i}, v_{,i} \rangle_{L^2}.$$

Pour $p = 2$, $H^1 = W^{1,2}(\Omega)$.

Définition 1.2. (Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$). Soit $m \geq 2$ un entier.

L'espace $W^{m,p}$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), u_{,i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\},$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{i=0}^m \|u_{,i}\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 2$ on a : $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, on le munit du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} uv + \sum_1^n \int_{\Omega} u_{,i}v_{,i}, \quad \forall u, v \in H^m.$$

Théorème 1.1. (Rellich-Kondrachov). On suppose Ω borné de classe C^1 . On a :

1. Si $p < N$ alors : $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.
2. Si $p = N$ alors : $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
3. Si $p > N$ alors : $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\partial\Omega)$,

avec injections compactes.

En particulier pour $p = 2$ et $q = 2$ on a $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, ce qui donne :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration. voir [1].

□

1.2 Inégalités de Poincaré

Supposons que Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante $C > 0$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|u_{,i}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

1.3 Formule de Green (formule d'integration par partie)

Théorème 1.2. Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . Supposons u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, tel que :

$$\int_{\Omega} uv_{,i} dx = - \int_{\Omega} vu_{,i} dx + \int_{\Omega} uv\eta_i ds,$$

où

$$\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq N},$$

est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

1.4 Inégalité de Korn

Il existe une constante positive C (dépendant seulement du diamètre de Ω) telle que :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

1.5 Traces

Théorème 1.3. (*Trace*). Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . L'application de trace γ_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\overline{\Omega}) \cap C(\overline{\Omega}) \\ v &\longrightarrow \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

qui peut se prolonger par continuité en une application linéaire de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a :

$$\|v\|_{L^2(\overline{\Omega})} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

1.6 Convergence faible

Proposition 1.1. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. On dit que x_n converge faiblement dans E s'il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$\forall f \in E', \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

.

avec E' est le dual de E .

On note $x_n \rightharpoonup x$ la convergence faible de x_n vers x .

– Si $x_n \rightharpoonup x$ dans E , alors la suite $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

1.7 Convergence forte

Définition 1.3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H , et $x \in H$. On dit que (x_n) converge fortement vers x et l'on note $x_n \rightarrow x$ si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_H = 0,$$

où $\|\cdot\|_H$ étant la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

1.8 Lax-Milgram

Théorème 1.4. Soit V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$. Soit (P) le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que :} \\ a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

On suppose qu'on a ceci :

1. l est une forme linéaire continue sur $V \implies l(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} et il existe $C > 0$ tel que :

$$|l(v)| \leq C \|v\|, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

2. a est une forme bilinéaire sur V .

3. a est continue, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

4. a est coercive (ou elliptique) c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V,$$

d'où l'existence et l'unicité de la solution $u \in V$ du problème (P).

Chapitre 2

Introduction aux problèmes de perturbation singulière

L'introduction d'un petit paramètre ε dans les problèmes aux limites peut avoir une influence sur les solutions du problème, ce qui entraîne un phénomène de perturbation singulière. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

2.1 Exemple d'une perturbation par un petit paramètre

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon f''(x) + f'(x) = a, \\ f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \\ a \neq 1, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. On va étudier l'influence de ε sur la famille des solutions de ce problème.

Résolution directe :

1. Supposons que $\varepsilon > 0$. La solution générale de l'équation du problème (2.1) est sous la forme :

$$f = f_0 + f_p.$$

La solution particulière est donné par : $f_p = cx$.

Ainsi, $f_p = ax$.

Après la résolution de l'équation homogène du problème, on trouve :

$$f_0 = Ae^{\frac{-x}{\varepsilon}} + B.$$

En utilisant les conditions aux limites on aboutit à la solution unique de l'équation du problème donné par :

$$f(x) = (1 - a) \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + ax.$$

2. Si $\varepsilon = 0$, l'équation du problème (2.1) devient une équation d'ordre 1, c'est-à-dire que :
 $f'(x) = a$, d'où :

$$f(x) = ax + c.$$

On remarque que si $a \neq 1$. L'utilisation des conditions aux limites ne conduisent pas à la détermination, de la constante c . Pour cela il y'aura perte d'une condition aux limite. Généralement si on a une équation différentielle avec un petit paramètre ε devant la dérivée la plus haute, la reduction de cette dernière en une équation d'ordre 1 entraîne une élimination de certaines conditions aux limites, donc on est en présence d'une perturbation singulière.

2.2 Traitement de la perturbation singulière

Les difficultés rencontrées lors de la résolution des problèmes de perturbations nous amènent à chercher des méthodes pour les contourner. Il s'agit de simplifier ces problèmes en cherchant des modèles approchés. L'une de ces méthodes est la méthode des développements asymptotiques raccordés proposée par Van Dyke en 1975.

Étudions le problème (2.1) en utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés. On remarque que pour $\varepsilon = 0$ on n'a plus une équation différentielle d'ordre 2; c'est à dire le problème s'est réduit à une équation différentielle d'ordre 1. De plus, on constate que la seule condition conservée est $f(1) = 1$ tandis que la condition $f(0) = 0$ est perdue.

Pour cela on cherche une solution du problème (2.1) qui sera approchée par un développement asymptotique extérieur $f(x, \varepsilon)$, donné sous la forme :

$$f(x, \varepsilon) = f^0(x) + v^1(\varepsilon) f^1(x) + \dots \quad \text{avec } \varepsilon > 0 \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v^1(\varepsilon) = 0. \quad (2.2)$$

En injectant (2.2) dans l'équation du problème (2.1) on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d^2 f^0}{dx^2} + \frac{df^0}{dx} + \varepsilon v^1(\varepsilon) \frac{d^2 f^1}{dx^2} + v^1(\varepsilon) \frac{df^1}{dx} + \dots = a, \\ f^0(0) + v^1(\varepsilon) f^1(0) = 0, \\ f^0(1) + v^1(\varepsilon) f^1(1) = 1, \\ a \neq 1. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En tenant compte des différents ordres de grandeur et en regroupant, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df^0}{dx} = a, \\ f^0(1) = 1, \\ a \neq 1. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Ceci donne alors $f^0 = ax + b$ avec b constante à déterminer. On a vu qu'avec la condition $a \neq 1$ et les conditions aux limites on n'as pas pu déterminer la constante b ; on avait perdu la condition $f(0) = 0$. La première approximation de la solution extérieure est obtenue par la condition $f(1) = 1$ qui est :

$$f(x, \varepsilon) = f^0(x) = ax + (1 - a), \quad (2.5)$$

où (2.5) est appelée le développement extérieur de la solution du problème.

Plus ε est petit plus on se rapproche mieux de la solution exacte.

On va étudier la solution au voisinage du point singulier en effectuant un changement d'échelle.

On pose alors :

$$y = \frac{x}{\delta(\varepsilon)} \quad \text{où} \quad \delta(\varepsilon) \ll 1 \quad \text{ce qui donne} \quad x = y\delta(\varepsilon).$$

Soient Ω^{int} le domaine intérieur du domaine Ω^ε obtenu par le changement de variable précédent.

Pour différencier la solution dans la région extérieur et celle de région de couche limite (zone très proche du point singulier). Au voisinage du point singulier, on écrit un développement asymptotique intérieur :

$$g(y, \varepsilon) = \eta^0(\varepsilon)g^0(y) + \eta^1(\varepsilon)g^1(y) + \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta^1(\varepsilon)}{\eta^0(\varepsilon)} = 0, \varepsilon > 0. \quad (2.6)$$

En utilisant la variable dilatée on aura le problème intérieur suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2g}{dy^2} + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{dg}{dy} = a, \\ g(0) = 0, \\ a \neq 1. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

On introduisant (2.6) dans (2.7) on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^0 \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2g^0}{dy^2} + \eta^0 \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{dg^0}{dy} = a, \\ g^0(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Le choix de $\delta(\varepsilon)$ est justifié par le principe de moindre dégénérescence c'est à dire de façon a garantir la conservation du maximum de termes dans l'équation notamment le terme $\varepsilon \frac{d^2f}{dx^2}$.

On pose $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$ ce qui donne $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Alors le problème (2.8) devient :

$$\begin{cases} \frac{d^2 g^0}{dy^2} + \frac{dg^0}{dy} = 0, \\ g^0(0) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

On aura donc $g^0 = \alpha(1 - \exp(-y))$ l'étape suivante est utile pour la détermination de la constante α .

Le raccord : cette étape permet de faire le lien entre le développement intérieur et extérieur de la solution ce qui impose de trouver une zone intermédiaire où les deux développements se raccordent.

Posons :

$$x = \varepsilon^\beta z \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0, \quad 0 \ll \beta \ll 1.$$

avec z une variable intermédiaire. La solution intérieure et extérieure peuvent se réécrire de la

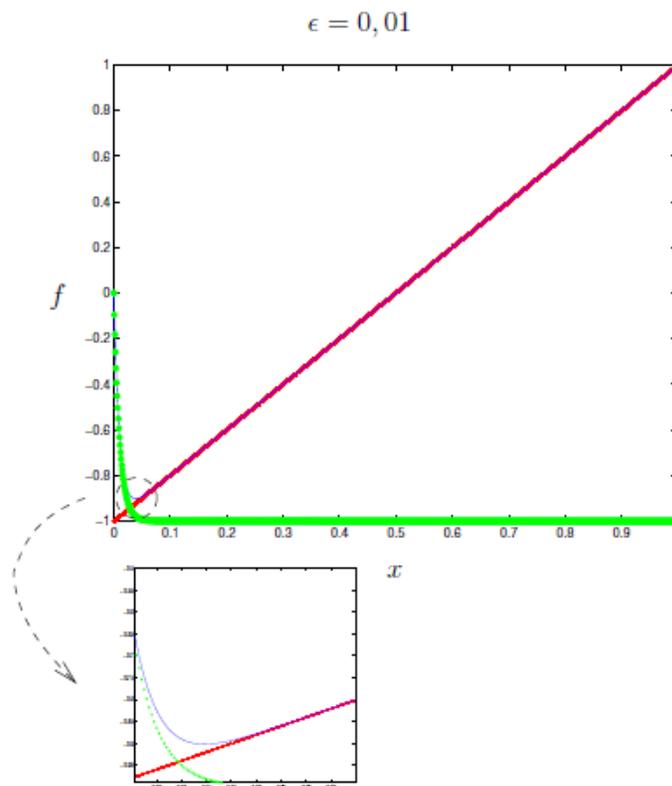


FIG. 2.1 – Representation de la solution exacte,extérieure et intérieure pour $\varepsilon = 0,01$

façon suivante :

$$\begin{cases} f^0(z) = a\varepsilon^\beta z + (1 - a), \\ g^0(z) = \alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{z}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)\right). \end{cases} \quad (2.10)$$

Par passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ on aura :

$$\begin{aligned}f^0(z) &\sim (1 - a), \\ \eta_0 g^0(z) &\sim \eta^0 \alpha.\end{aligned}$$

ainsi :

$$\alpha = 1 - a.$$

Cette valeur peut être obtenue en écrivant :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (g^0(y)) = \lim_{x \rightarrow 0} (f^0(x)).$$

Chapitre 3

Analyse mathématique du comportement de deux objets collés par un adhésif

3.1 Position du problème

Soient Ω^+ et Ω^- deux ouverts bornés de \mathbb{R}^3 , de bords respectifs $\partial\Omega^+$ et $\partial\Omega^-$ qui sont supposés réguliers de classe C^2 .

On note par $S = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ la partie commune des deux ouverts. Nous définissons $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup S$.

Nous voulons insérer un adhésif d'épaisseur εd et occupant un domaine $\Omega_\varepsilon^m \subset \mathbb{R}^3$, entre les deux corps. Pour cela, Ω^+ se déplacera dans la direction de x_3 , d'une distance égale à l'épaisseur de la colle. (c'est à dire εd). On notera alors :

$$\begin{aligned}\Omega_\varepsilon^+ &= \left\{ x + \varepsilon dx_3 \ / \ x \in \Omega^+ \right\}, \\ \Omega_\varepsilon^m &= \left\{ x + \varepsilon x_3 \ / \ 0 < z < d, \ x \in S \right\}, \\ S^\varepsilon &= \left\{ x + \varepsilon dx_3 \ / \ x \in S \right\},\end{aligned}$$

et on posera $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega_\varepsilon^m \cup \Omega^- \cup S \cup S^\varepsilon$ le domaine occupé par l'assemblage collé.

Supposons que chaque corps est un milieu élastique linéaire anisotrope et non homogène.

Les tenseurs élastiques A^+ , A_ε^m et A^- sont d'ordre 4 symétrique et positive.

Aussi supposons que $A_\varepsilon^m = \varepsilon A^m$, où A^m , A^+ et A^- sont indépendants de ε .

L'assemblage est fixé sur la partie ${}^u\Gamma_\varepsilon$ de son bord, tandis que la contrainte est donnée sur la partie complémentaire ${}^g\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \setminus {}^u\Gamma_\varepsilon$. On suppose aussi que ${}^u\Gamma^- = {}^u\Gamma_\varepsilon \cap \partial\Omega^-$.

De plus, le bord de la colle est donné par ${}^g\Gamma_\varepsilon^m = \partial S \times [0, \varepsilon d]$.

Le problème représenté par la figure est reformulé sous le modèle variationnel suivant tel qu'on cherche $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^3$ pour lequel on a :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V_\varepsilon, \\ a_\varepsilon^+(u_\varepsilon, v) + a^-(u_\varepsilon, v) + \varepsilon a_\varepsilon^m(u_\varepsilon, v) = L_\varepsilon(v), \quad \forall v \in V_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.1)$$

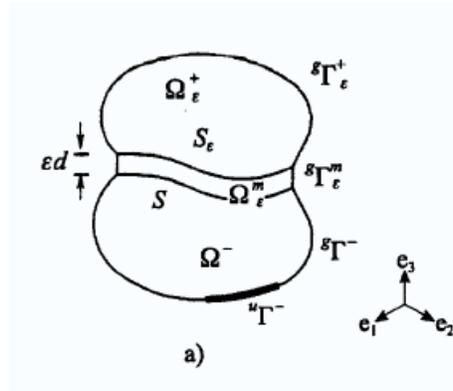


FIG. 3.1 – Representation du problème initial

avec :

$$\begin{aligned}
 a_{\varepsilon}^{+}(w, v) &= \int_{\Omega_{\varepsilon}^{+}} A_{ijkl}^{+} \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v) d\Omega, \\
 a_{\varepsilon}^{-}(w, v) &= \int_{\Omega^{-}} A_{ijkl}^{-} \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v) d\Omega, \\
 a_{\varepsilon}^{m}(w, v) &= \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S A_{ijkl}^{m} \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v) dS \right] dx_3, \\
 L_{\varepsilon}(v) &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} f_i v_i d\Omega + \int_{g\Gamma_{\varepsilon}} g_i v_i d\Gamma,
 \end{aligned}$$

où

$$\gamma_{ij}(v) = \frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} / f_i \in L^2(\Omega_{\varepsilon}) \text{ et } L^2(g\Gamma_{\varepsilon})$$

et

$$V_{\varepsilon} = \left\{ v \in H^1(\Omega_{\varepsilon}) / v = 0 \text{ sur } u\Gamma_{\varepsilon} \right\}.$$

3.2 Existence et unicité de la solution du problème

Grace à la théorie de Lax-Milgram, la solution du problème (3.1) existe et unique.

En effet :

1 Continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$:

Nous avons, pour tout w et v dans V_{ε} :

$$\begin{aligned}
 |a(w, v)| &= |a_{\varepsilon}^{+}(w, v) + a_{\varepsilon}^{-}(w, v) + \varepsilon a_{\varepsilon}^{m}(w, v)| \\
 &\leq |a_{\varepsilon}^{+}(w, v)| + |a_{\varepsilon}^{-}(w, v)| + |\varepsilon a_{\varepsilon}^{m}(w, v)| \\
 &\leq \int_{\Omega_{\varepsilon}^{+}} |A_{ijkl}^{+} \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v)| d\Omega + \int_{\Omega^{-}} |A_{ijkl}^{-} \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v)| d\Omega + \int_{\Omega_{\varepsilon}^m} |A_{ijkl}^m \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v)| d\Omega.
 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\gamma_{kl}(w) = \frac{w_{k,l} + w_{l,k}}{2}$ et la bornitude des coefficients A_{ijkl} , on obtient :

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &\leq C \sum_{k,l,i,j=1}^3 \left[\|w_{k,l}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^+)} \|v_{i,j}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon^+)} + \|w_{k,l}\|_{L^2(\Omega^-)} \|v_{j,i}\|_{L^2(\Omega^-)} + \|w_{k,l}\|_{L^2(\Omega^m)} \|v_{i,j}\|_{L^2(\Omega^m)} \right] \\ &\leq C \left[\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} + \|w\|_{H^1(\Omega^-)} \|v\|_{H^1(\Omega^-)} + \|w\|_{H^1(\Omega^m)} \|v\|_{H^1(\Omega^m)} \right] \\ &\leq C \left[\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} + \|w\|_{H^1(\Omega^-)} + \|w\|_{H^1(\Omega^m)} \right] \left[\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^+)} + \|v\|_{H^1(\Omega^-)} + \|v\|_{H^1(\Omega^m)} \right] \\ &= C \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(.,.)$.

1 Continuité de la forme linéaire $L_\varepsilon(\cdot)$:

Soit $v \in V_\varepsilon$. Nous avons :

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon(v)| &= \left| \int_{\Omega_\varepsilon} f_i v_i d\Omega + \int_{g\Gamma_\varepsilon} g_i v_i d\Gamma \right| \\ &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} |f_i| |v_i| d\Omega + \int_{g\Gamma_\varepsilon} |g_i| |v_i| d\Gamma \\ &\leq \|f_i\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|v_i\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|g_i\|_{L^2(g\Gamma_\varepsilon)} \|v_i\|_{L^2(g\Gamma_\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Par la continuité de l'opérateur de trace, on :

$$\|v_i\|_{L^2(g\Gamma_\varepsilon)} \leq C \|v_i\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

ce qui donne :

$$|L_\varepsilon(v)| \leq \left[\|f_i\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|g_i\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right] \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

1 Coercivité de $a(.,.)$:

Pour tout $u \in V_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, nous avons :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= a_\varepsilon^+(u, u) + a_\varepsilon^-(u, u) + \varepsilon a_\varepsilon^m(u, u) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u) \gamma_{ij}(u) d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- \gamma_{kl}(u) \gamma_{ij}(u) d\Omega + \varepsilon \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S A_{ijkl}^m \gamma_{kl}(u) \gamma_{ij}(u) dS \right] dx_3. \end{aligned}$$

Comme A^+ , A^- et A^m sont définis positifs, on obtient :

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq c \sum_{i,j,k,l=1}^3 \left(\int_{\Omega_\varepsilon^+} \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega^-} \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega + \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) dS \right] dx_{x_3} \right) \\ &= c \sum_{i,j,k,l=1}^3 \left(\int_{\Omega_\varepsilon^+} \left(\frac{v_{k,l} + v_{l,k}}{2} \right) \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega^-} \left(\frac{v_{k,l} + v_{l,k}}{2} \right) \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \right) d\Omega \right) \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S \left(\frac{v_{k,l} + v_{l,k}}{2} \right) \left(\frac{v_{i,j} + v_{j,i}}{2} \right) dS \right] dx_3.$$

En utilisant l'inégalité de Korn, il vient :

$$a(u, u) \geq C \sum_{i,j,k,l=1}^3 \|u_{k,l}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|u_{i,j}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \geq C \sum_{i,j,k,l=1}^3 \|u_{i,j}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2.$$

D'autre part, l'inégalité de Poincaré permet de conclure que :

$$a(u, u) \geq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2,$$

d'où la coercivité de $a(., .)$.

3.2.1 Changement d'échelle

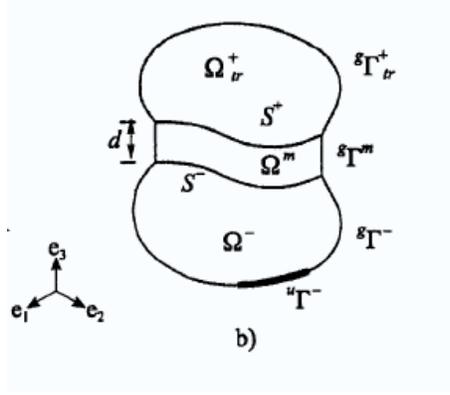


FIG. 3.2 – Représentation du problème après translation

Afin de mener une analyse asymptotique de la solution de notre problème, il convient de transformer le domaine Ω_ε en un domaine indépendant du paramètre ε . Pour cela, on effectue une dilatation de rapport ε^{-1} dans Ω_ε^m .

Changement d'échelle dans Ω_ε^m

Dans le domaine Ω_ε^m , occupé par l'adhésif, on effectue une dilatation de rapport ε^{-1} dans la direction e_3 . On pose alors :

$$y_3 = \frac{x_3}{\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Ce changement d'échelle transforme Ω_ε^m en un domaine Ω^m indépendant de ε :

$$\Omega_\varepsilon^m = \left\{ y + ze_3 \ / \ 0 < z < d, \ y \in S \right\}.$$

D'autre part, la dérivée selon x_3 s'exprime dans les nouvelles coordonnées par :

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y_3}.$$

Changement d'échelle dans Ω_ε^+

Dans Ω_ε^m , on considère le changement d'échelle :

$$y_3 = x_3 + (1 - \varepsilon) d. \quad (3.3)$$

L'ouvert Ω_ε^+ se transforme alors en Ω_{tr}^+ qui s'écrit :

$$\Omega_{tr}^+ = \Omega_\varepsilon^+ + (1 - \varepsilon) de_3.$$

Dans Ω_{tr}^+ , nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial y_3}.$$

On posera alors :

$$\begin{aligned} S^+ &= \partial\Omega_{tr}^+ \cap \partial\Omega^m, \\ S^- &= \partial\Omega^- \cap \partial\Omega^m = S, \\ \Omega_{tr} &= \Omega_{tr}^+ \cup \Omega^m \cup \Omega^- \cup S^+ \cup S^-. \end{aligned}$$

Notons que l'image de u^ε par ce changement d'échelle est désignée par $u(\varepsilon)$. Nous allons maintenant réécrire notre problème variationnel dans les nouvelles coordonnées.

Nous avons :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^m(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S A_{ijkl}^m u_{i,3}^\varepsilon v_{i,3}^\varepsilon dS \right] dx_3 + \int_0^\varepsilon \left[\int_S A_{ijkl}^m (u_{i,3}^\varepsilon v_{j,\alpha}^\varepsilon + u_{j,\alpha}^\varepsilon v_{i,3}^\varepsilon) dS \right] dx_3 \\ &\quad + \int_0^{\varepsilon d} \left[\int_S A_{i\alpha j\beta}^m u_{i,\alpha}^\varepsilon v_{j,\beta}^\varepsilon dS \right] dx_3 \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad \text{et } \alpha, \beta = 1, 2. \end{aligned}$$

On introduit le changement d'échelle on aura :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^m(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_0^d \left[\int_S A_{ijkl}^m \frac{1}{\varepsilon} u_{i,\alpha}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} v_{i,3}(\varepsilon) dS \right] dy_3 + \int_0^d \varepsilon \left[\int_S A_{ijkl}^m \frac{1}{\varepsilon} u(\varepsilon) v_{j,\alpha}(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + u_{j,\alpha}(\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} v_{i,3}(\varepsilon) dS \right] dy_3 + \varepsilon \int \left[\int_S A_{i\alpha j\beta}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,\beta}(\varepsilon) dS \right] dy_3 \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^d \left[\int_S A_{ijkl}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon) dS \right] dy_3 + \int_0^d \left[\int_S A_{ijkl}^m (u_{i,3}(\varepsilon) v_{j,\alpha}(\varepsilon) + u_{j,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon)) dS \right] dy_3. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a_\varepsilon^m(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^d \int_S A_{ijkl}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon) dS dy_3 + \varepsilon \int_0^d \int_S A_{i\alpha k\beta}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,\beta}(\varepsilon) dS dy_3 \\ &\quad + \int_0^d \int_S A_{ijkl}^m (u_{i,3}(\varepsilon) v_{j,\alpha}(\varepsilon) + u_{j,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon)) dS dy_3. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} a^+(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u^\varepsilon) \gamma_{ij}(v^\varepsilon) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u(\varepsilon)) \gamma_{ij}(v(\varepsilon)) d\Omega, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u(\varepsilon), v(\varepsilon)) &= \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u(\varepsilon)) \gamma_{ij}(v(\varepsilon)) d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- \gamma_{kl}(u(\varepsilon)) \gamma_{ij}(v(\varepsilon)) d\Omega \\ &+ \varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_0^d \int_S A_{ijkl}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon) dS dy_3 + \varepsilon \int_0^d \int_S A_{i\alpha k\beta}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{i,\beta}(\varepsilon) dS dy_3 \right. \\ &\left. + \int_0^d \int_S A_{ijkl}^m (u_{i,3}(\varepsilon) v_{j,\alpha}(\varepsilon) + u_{j,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon)) dS dy_3 \right], \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned} a(u(\varepsilon), v(\varepsilon)) &= \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u(\varepsilon)) \gamma_{ij}(v(\varepsilon)) d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- \gamma_{kl}(u(\varepsilon)) \gamma_{ij}(v(\varepsilon)) d\Omega \\ &+ \int_S \left[\int_0^d A_{i3j3}^m u_{i,3}(\varepsilon) v_{j,3}(\varepsilon) dy_3 \right] dS + \int_S \left[\int_0^d A_{i3j\alpha}^m u_{i,3}(\varepsilon) v_{j,\alpha}(\varepsilon) + u_{j,\alpha}(\varepsilon) v_{i,3}(\varepsilon) dy_3 \right] dS \\ &+ \int_S \left[\int_0^d A_{i\alpha j\beta}^m u_{i,\alpha}(\varepsilon) v_{j,\beta}(\varepsilon) dy_3 \right] dS. \end{aligned}$$

Le problème ainsi obtenu est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u(\varepsilon) \in V, \\ a(u(\varepsilon), v) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u(\varepsilon), v) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u(\varepsilon), v) = L(v) + \varepsilon L^m(v), \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.4)$$

tel que $a(w, v) = a^+(w, v) + a^-(w, v) + a_{33}^m(w, v)$ avec

$$\begin{aligned} a^+(w, v) &= \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(w) \gamma_{ij}(v) d\Omega, \\ a_{33}^m(w, v) &= \int_S \left[\int_0^d A_{i3k3}^m w_{i,3} v_{j,3} dy_3 \right] dS, \\ a_{3\alpha}^m(w, v) &= \int_S \left[\int_0^d A_{i3j\alpha}^m (w_{i,3} v_{j,\alpha} + w_{j,\alpha} v_{i,3}) dy_3 \right] dS, \\ a_{\alpha\beta}^m(w, v) &= \int_S \left[\int_0^d A_{i\alpha j\beta}^m w_{i,\alpha} v_{j,\beta} dy_3 \right] dS, \\ L(v) &= \int_{\Omega_{tr}^+ \cup \Omega^-} f_i v_i d\Omega + \int_{\mathcal{G}\Gamma_{tr}^+ \cup \mathcal{G}\Gamma^-} g_i v_i d\Gamma, \\ L^m(v) &= \int_{\Omega^m} f_i v_i d\Omega, \\ V &= \left\{ v \in H^1(\Omega_{tr}) \mid v = 0 \text{ sur } {}^u\Gamma_{tr} \right\}. \end{aligned}$$

3.2.2 Développement asymptotique

Soit le développement asymptotique de $u(\varepsilon, y)$ suivant

$$u(\varepsilon, y) = u_0(y) + \varepsilon u_1(y) + \varepsilon^2 u_2(y) + \varepsilon^3(y) + \dots \quad (3.5)$$

On injecte (3.5) l'équation du problème (3.4), on obtient alors :

$$a\left[u_0(y) + \varepsilon u_1(y) + \varepsilon^2 u_2(y) + \dots, v\right] + \varepsilon a_{3\alpha}^m\left[u_0(y) + \varepsilon u_1(y) + \varepsilon^2 u_2(y) + \dots + \varepsilon^n u_n(y) + \dots, v\right] + \varepsilon^2 a_{\alpha, \beta}^m\left[u_0(y) + \varepsilon u_1(y) + \varepsilon^2 u_2(y) + \dots + \varepsilon^n u_n(y) + \dots, v\right] = L(v) + \varepsilon L^m(v),$$

ce qui donne

$$a(u_0(y), v) + \varepsilon a(u_1(y), v) + \varepsilon^2 a(u_2(y), v) + \dots + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0(y), v) + \varepsilon^2 a_{3\alpha}^m(u_0(y), v) + \dots + \varepsilon^{n+1} a(u_n(y), v) + \dots + \varepsilon^2 a_{\alpha, \beta}^m(u_0(y), v) + \dots + \varepsilon^{n+2} a(u_n(y), v) + \dots = L(v) + \varepsilon L^m(v).$$

En regroupant les puissances successives de ε , on aura :

$$a(u_0, v) + \varepsilon \left[a(u_1(y)) + a_{3\alpha}^m(u_0(y), v) \right] + \varepsilon^2 \left[a(u_2(y), v) + a_{3\alpha}^m(u_0(y), v) + a_{\alpha, \beta}^m(u_0(y), v) \right] + \varepsilon^3 \left[a(u_3(y), v) + a(u_2(y), v) + a_{\alpha, \beta}^m(u_0(y), v) \right] + \dots = L(v) + \varepsilon L^m(v),$$

par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a(u_0, v) = L(v), \\ a(u_1, v) + a_{3\alpha}^m(u_0, v) = L^m(v), \\ a(u_i, v) = -a_{3\alpha}^m(u_{i-1}, v) - a_{\alpha\beta}^m(u_{i-2}, v), \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Notons alors :

$$\begin{aligned} P_0 &: a(u_0, v) = L(v), \\ P_1 &: a(u_1, v) = L^m(v) - a_{3\alpha}^m(u_0, v), \\ P_i &: a(u_i, v) = -a_{3\alpha}^m(u_{i-1}, v) - a_{\alpha\beta}^m(u_{i-2}, v), \quad i \geq 2. \end{aligned}$$

Le problème P_0 qui n'est rien d'autre que le problème limite (quand $\varepsilon \rightarrow 0$), représente une première approximation de la solution exacte u^ε . Cependant, nous ne pouvons pas assurer l'existence et l'unicité de la solution u_0 dans l'espace V car la forme $a(\cdot, \cdot)$ n'est pas coercive. Pour contourner cette difficulté, nous allons chercher la solution dans un autre espace plus large. Introduisons V_0 :

$$V_0 = \left\{ v \in L^2(\Omega_{tr}) \mid v^+ \in H^1(\Omega_{tr}^+), v^- \in H^1(\Omega^-), v_3^m \in L^2(\Omega^m), v = 0|_{\Gamma_{tr}}, v^+ = v^m|_{S^+}, v^- = v^m|_{S^-} \right\},$$

où v^+ , v^- et v^m sont respectivement les restrictions de v à Ω_{tr}^+ , Ω^- et Ω^m .

Cet espace est muni de la norme :

$$|v|_{V_0}^2 = |v^+|_{H^1(\Omega_{tr}^+)}^2 + |v^-|_{H^1(\Omega^-)}^2 + |v^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 + |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2.$$

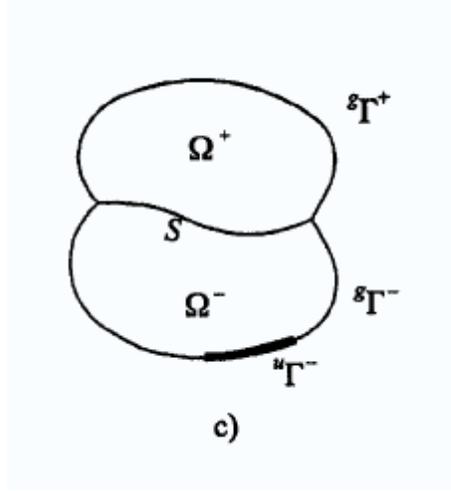


FIG. 3.3 – Representation du problème limite

3.3 Existence et unicité de la solution du problème P_0

Considérons maintenant le problème résolu par le premier terme u_0 :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in V_0, \\ a(u_0, v) = L(v), \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

La théorie de Lax-Milgram permet de démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

1. Continuité de $a(.,.)$:

Pour u_0 et v dans V_0 , nous avons :

$$\begin{aligned} |a(u_0, v)| &\leq |a^+(u_0, v)| + |a^-(u_0, v)| + |a_{33}^m(u_0, v)| \\ &\leq \int_{\Omega_{tr}^+} |A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(u_0) \gamma_{ij}(v)| d\Omega + \int_{\Omega^-} |A_{ijkl}^- \gamma_{kl}(u_0) \gamma_{ij}(v)| d\Omega + \int_S \int_0^d |A_{i3j3}^m u_{0i,3} v_{j,3}| dy_3 dS, \end{aligned}$$

comme pour le problème initial, en tenant compte de la bornitude des A_{ijkl} , nous pouvons écrire :

$$|a(u_0, v)| \leq C \|u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

d'où la continuité de $a(.,.)$.

2. Coercivité de $a(.,.)$:

Pour tout $v \in V_0$, nous avons :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega + \int_S \left[\int_0^d A_{i3j3}^m v_{i,3} v_{j,3} dy_3 \right] dS \\ &\geq C \sum_{i,j,k,l=1}^3 \left[\int_{\Omega_{tr}^+} \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega + \int_{\Omega^-} \gamma_{kl}(v) \gamma_{ij}(v) d\Omega \right] + \sum_{i,j=1}^3 \int_S \left[\int_0^d v_{i,3} v_{j,3} dy_3 \right] dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq C \left\{ |\gamma(v^+)|_{L^2(\Omega_{tr}^+)}^2 + |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}^2 + |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 \right\} \\ &= C \|v\|_{V_0}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité de Korn entraîne :

$$\sum_{i,j=1}^3 |v_{j,i}|_{L^2(\Omega^-)}^2 \leq C \sum_{i,j=1}^3 |v_{j,i} + v_{i,j}|_{L^2(\Omega^-)}^2,$$

ce qui donne, en combinant avec l'inégalité de Poincaré :

$$|v^-|_{H^1(\Omega^-)} \leq C |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}.$$

Par ailleurs, la continuité de l'application trace implique :

$$|v^-|_{L^2(S^-)} \leq C |v^-|_{H^1(\Omega^-)},$$

ce qui permet d'avoir :

$$|v^-|_{L^2(S^-)}^2 \leq C |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}^2.$$

De même, on montre aussi que :

$$\left\{ \begin{array}{l} |v^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 \leq c \left\{ |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 + |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}^2 \right\}, \\ |v^m|_{L^2(S^+)}^2 \leq c \left\{ |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 + |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}^2 \right\}, \\ |v^+|_{H^1(\Omega_{tr}^+)}^2 \leq c \left\{ |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 + |\gamma(v^-)|_{L^2(\Omega^-)}^2 + |\gamma(v^+)|_{L^2(\Omega_{tr}^+)}^2 \right\}. \end{array} \right.$$

En tenant compte des inégalités ci-dessus, on obtient :

$$a(v, v) \geq C \left[|v^+|_{H^1(\Omega_{tr}^+)}^2 + |v^-|_{H^1(\Omega^-)}^2 + |v^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 + |v_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 \right] = C \|v\|_{V_0}^2,$$

d'où la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$.

La forme $L(\cdot)$ étant continue, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution du problème P_0 .

3.4 Simplification du problème P_0

En examinant la structure de $a_{33}^m(u_0, v)$ qui ne contient que des dérivées dans la direction de y_3 , nous pouvons réécrire le problème P_0 sous une forme plus simple. En effet, prenons dans (3.6) une fonction test régulière $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega^m)$. On aura alors, $\varphi = 0$ sur $\Omega_{tr}^+ \cup \Omega^-$, d'où :

$$a^+(u_0, \varphi) = 0,$$

$$\begin{aligned} a^-(u_0, \varphi) &= 0, \\ L(\varphi) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne $a_{33}^m(u_0, \varphi) = 0$, donc

$$\int_S \left[\int_0^d A_{i3j3}^m u_{0,i,3}^m \cdot \varphi_{j,3} dy_3 \right] dS = 0.$$

Si on pose : $A_{i3j3}^m = B$, on aura :

$$\int_S \left[\int_0^d B u_{0,i,3}^m \cdot \varphi_{j,3} dy_3 \right] dS = 0,$$

où \cdot est le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 . On note $z = B u_{0,3}^m$, $a_{33}^m(u_0, v)$ s'écrit alors :

$$a_{33}^m(u_0, v) = \int_S z v^m dS = 0.$$

Donc, étant donné que $v^+ = v^m$ sur S^+ et $v^- = v^m$ sur S^- :

$$a_{33}^m(u_0, v) = \int_{S^+} z \cdot v^+ dS - \int_{S^-} z \cdot v^- dS, \quad \forall v \in V_0. \quad (3.7)$$

On remarque que $u_{0,3}^m = B^{-1} B u_{0,3}^m$ d'où $u_{0,3}^m = B^{-1} z$. Nous avons :

$$\int_0^d u_{0,3}^m dy_3 = \int_0^d B^{-1} z dy_3,$$

ce qui donne :

$$u_0^m(\cdot, d) - u_0^m(\cdot, 0) = \int_0^d B^{-1} z dy_3.$$

Comme z ne dépend pas de y_3 , on obtient :

$$u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-} = \left[\int_0^d B^{-1} dy_3 \right] z.$$

Nous avons alors

$$z = \frac{1}{d} K [u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-}], \quad (3.8)$$

avec

$$K = d \left[\int_0^d (B)^{-1} dy_3 \right]^{-1}.$$

D'où

$$[u_0^m(y_3)] = u_0^m|_{S^-} + \frac{1}{d} \left[\int_0^{y_3} (B)^{-1} dy_3 \right] k [u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-}]. \quad (3.9)$$

La formule (3.9) traduit la déformation de la couche d'adhésif, quand son épaisseur tend vers zéro. Elle représente le déplacement limite. Cette modélisation peut aussi être obtenue, en utilisant la loi de comportement $\sigma_\varepsilon^m(x) = A_\varepsilon^m[\gamma^m(u_\varepsilon^m(x))]$ (σ désigne le tenseur des contraintes), reliant déplacements et contraintes. Il suffit d'effectuer les mêmes étapes de changement d'échelle et de développement asymptotique dans celle-ci, avec :

$$\sigma_{ij}^m = A_{ijk3}^m u_{k,3}^m(\varepsilon, y) + \varepsilon A_{ijk\alpha}^m(\varepsilon, y). \quad (3.10)$$

Le développement asymptotique (3.5) implique que nous cherchons également les contraintes sous la forme :

$$\sigma(\varepsilon, y) = \sigma_0(y) + \varepsilon\sigma_1(y) + \varepsilon^2\sigma_2(y) + \varepsilon^3\sigma_3(y) + \dots. \quad (3.11)$$

De (3.5), (3.10) et (3.11) on trouve le premier terme σ_0^m tel que :

$$(\sigma_0^m)_{ij} = A_{ijk3}^m (u_0^m)_{k,3}. \quad (3.12)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{k,3}^m(\varepsilon, y) &= u_{0k,3}^m(y) + \varepsilon u_{1k,3}^m(y) + \varepsilon^2 u_{2k,3}^m(y) + \dots, \\ u_{k,\alpha}^m(\varepsilon, y) &= u_{0k,\alpha}^m(y) + \varepsilon u_{1k,\alpha}^m(y) + \varepsilon^2 u_{2k,\alpha}^m(y) + \dots, \\ \sigma_{ij}^m &= \sigma_{0ij}^m(y) + \varepsilon\sigma_{1ij}^m(y) + \varepsilon^2\sigma_{2ij}^m(y) + \dots. \end{aligned}$$

On les introduit dans (3.10) on aura :

$$\begin{aligned} \sigma_{0ij}^m(y) + \varepsilon\sigma_{1ij}^m(y) + \varepsilon^2\sigma_{2ij}^m(y) + \dots &= A_{ijk3}^m \left(u_{0k,3}^m(y) + \varepsilon u_{1k,3}^m(y) + \varepsilon^2 u_{2k,3}^m(y) + \dots \right) \\ &+ \varepsilon A_{ijk\alpha}^m \left(u_{0k,\alpha}^m(y) + \varepsilon u_{1k,\alpha}^m(y) + \varepsilon^2 u_{2k,\alpha}^m(y) + \dots \right) \\ &= A_{ijk3}^m u_{0k,3}^m(\varepsilon, y) + \varepsilon \left[A_{ijk3}^m(\varepsilon, y) + A_{ijk\alpha}^m u_{0k,\alpha}^m(\varepsilon, y) \right] + \varepsilon^2 \left[A_{ijk3}^m u_{2k,3}^m(\varepsilon, y) \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 A_{ijk\alpha}^m u_{1k,\alpha}^m(\varepsilon, y) \right] + \varepsilon^3 \left[A_{ijk\alpha}^m u_{2k,\alpha}^m(\varepsilon, y) \right], \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$(\sigma_0^m)_{ij} = A_{ijk3}^m (u_0^m)_{k,3}$$

suitant le même raisonnement on aura :

$$(\sigma_0^\pm)_{ij} = A_{ijkl}^\pm (u_0^\pm)_{k,l}. \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} u_{k,l}^\pm(\varepsilon, y) &= u_{0k,l}^\pm(y) + \varepsilon u_{1k,l}^\pm(y) + \varepsilon^2 u_{2k,l}^\pm(y) + \dots, \\ u_{k,\alpha}^\pm(\varepsilon, y) &= u_{0k,\alpha}^\pm(y) + \varepsilon u_{1k,\alpha}^\pm(y) + \varepsilon^2 u_{2k,\alpha}^\pm(y) + \dots, \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}^{\pm} = \sigma_{0ij}^{\pm} + \varepsilon \sigma_{1ij}^{\pm}(y) + \varepsilon^2 \sigma_{2ij}^{\pm}(y) + \dots$$

On remplace dans (3.10) on aura :

$$\begin{aligned} \sigma_{0ij}^{\pm}(y) + \varepsilon \sigma_{1ij}^{\pm}(y) + \varepsilon^2 \sigma_{2ij}^{\pm}(y) + \dots &= A_{ijk3}^{\pm} \left(u_{0k,l}^{\pm}(y) + \varepsilon u_{1k,l}^{\pm}(y) + \varepsilon^2 u_{2k,l}^{\pm}(y) + \dots \right) \\ &+ \varepsilon A_{ijk\alpha}^{\pm} \left(u_{0k,\alpha}^{\pm}(y) + \varepsilon u_{1k,\alpha}^{\pm}(y) + \varepsilon^2 u_{2k,\alpha}^{\pm}(y) + \dots \right) \sigma_{0ij}^{\pm}(y) + \varepsilon \sigma_{1ij}^{\pm}(y) + \varepsilon^2 \sigma_{2ij}^{\pm}(y) + \dots \\ &= A_{ijk3}^{\pm} u_{0k,l}^{\pm}(\varepsilon, y) + \varepsilon \left[A_{ijk3}^{\pm}(\varepsilon, y) + A_{ijk\alpha}^{\pm} u_{0k,\alpha}^{\pm}(\varepsilon, y) \right] + \varepsilon^2 \left[A_{ijk3}^{\pm} u_{2k,l}^{\pm}(\varepsilon, y) \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 A_{ijk\alpha}^m u_{1k,\alpha}^{\pm}(\varepsilon, y) \right] + \varepsilon^3 \left[A_{ijk\alpha}^{\pm} u_{2k,\alpha}^{\pm}(\varepsilon, y) \right]. \end{aligned}$$

On prend $k_{ij} = A_{i3j3}^m$ dans le cas où l'adhésif est homogène, donc, u_0^m est affine en y_3 , et le tenseur de contrainte σ_0^m est constant le long de y_3 . De plus, quand l'adhésif est isotrope, on a :

$$K = \frac{E}{2(1+v)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{1-v}{1-2v} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$(\sigma_0^m)_{11} = (\sigma_0^m)_{22} = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \frac{u_3^+ - u_3^-}{d},$$

$$(\sigma_0^m)_{33} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \frac{u_3^+ - u_3^-}{d},$$

$$(\sigma_0^m)_{12} = 0,$$

$$(\sigma_0^m)_{13} = \frac{E}{2(1+v)} \frac{u_1^+ - u_1^-}{d}, \quad (3.15)$$

$$(\sigma_0^m)_{23} = \frac{E}{2(1+v)} \frac{u_2^+ - u_2^-}{d}, \quad (3.16)$$

où εE est le coefficient de Young et v le coefficient de Poisson de l'adhésif.

À la limite, nous pouvons identifier S^+ et S^- avec S et en utilisant (3.7) et (3.8), on aura :

$$\begin{aligned} a_{33}^m(u_0, v) &= \int_{S^+} \frac{1}{d} K [u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-}] v^+ dS - \int_{S^-} \frac{1}{d} K [u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-}] v^- dS \\ &= \frac{1}{d} \left(\int_{S^+ \cup S^-} K [u_0^m|_{S^+} - u_0^m|_{S^-}] [v^+ - v^-] \right) dS \\ &= \frac{1}{d} \left(\int_S K (u^+ - u^-) (v^+ - v^-) \right) dS. \end{aligned}$$

On obtient alors le problème \tilde{P} :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u}_0 \in W \text{ telle que :} \\ a^+(\tilde{u}_0, v) + a^-(\tilde{u}_0, v) + a_S(\tilde{u}_0, v) = L(v), \end{cases} \quad (3.17)$$

avec

$$a_S(u, v) = \frac{1}{d} \int_S k (u^+ - u^-) \cdot (v^+ - v^-) dS, \quad (3.18)$$

et

$$W = \left\{ v \in L^2(\Omega) / v^+ \in H^1(\Omega^+), v^- \in H^1(\Omega^-), v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}.$$

Notons que $H^1(\Omega) \subset W$.

Le problème limite obtenu est défini sur Ω (voir la figure 2c) qui est seulement le domaine occupé par les adhérents.

L'adhésif disparaît d'un point de vue géométrique. Son effet se traduit par la forme $a_S(u, u)$ qui représente l'énergie de sa déformation.

3.5 Convergences

3.5.1 Convergence faible

On étudie la convergence des déplacements $u(\varepsilon)$ et les contraintes $\sigma(\varepsilon)$

Théorème 3.1. $u(\varepsilon)$ converge vers u_0 faiblement dans V_0 et $\varepsilon u_{,\alpha}(\varepsilon)$ converge vers 0 faiblement dans $L^2(\Omega^m)$.

Démonstration. Prenons $u(\varepsilon)$ comme fonction test dans (3.1), on aura :

$$a(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) = L(u(\varepsilon)) + \varepsilon L^m(u(\varepsilon)) \quad \forall u \in V.$$

Par la coercivité de $a(u(\varepsilon), u(\varepsilon))$, on obtient :

$$a(u(\varepsilon), u(\varepsilon)) \geq C \left\{ |u(\varepsilon)|_{V_0}^2 + \varepsilon^2 \left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)}^2 \right\},$$

de plus par la continuité de $L(\cdot)$, on aura :

$$L(u(\varepsilon)) + \varepsilon L^m(u(\varepsilon)) \leq C |u(\varepsilon)|_{V_0},$$

où C est une constante positive.

D'où

$$C \left\{ |u(\varepsilon)|_{V_0}^2 + \varepsilon^2 \left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)}^2 \right\} \leq C |u(\varepsilon)|_{V_0},$$

alors

$$|u(\varepsilon)|_{V_0} \leq C, \tag{3.19}$$

$$\varepsilon \left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)} \leq C. \tag{3.20}$$

Puisqu'on a V_0 est de Hilbert, d'après l'inégalité (3.19) il existe une sous suite telle que : $u(\varepsilon) \rightharpoonup u_0^*$ dans V_0 et $\varepsilon u_{,\alpha}(\varepsilon) \rightharpoonup z_\alpha$ faiblement dans $L^2(\Omega^m)$.

Soit l'identité :

$$\varepsilon \int_{\Omega^m} u(\varepsilon)^m \cdot v_{,\alpha} d\Omega = - \int_{\Omega^m} \left[\varepsilon u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right] \cdot v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^m). \tag{3.21}$$

Par définition de la convergence faible et pour $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^m} u(\varepsilon)^m \cdot v_{,\alpha} d\Omega &\rightharpoonup \int_{\Omega^m} u_0^* \cdot v_{,\alpha} d\Omega, \\ \int_{\Omega^m} [\varepsilon u(\varepsilon)_{,\alpha}^m] \cdot v d\Omega &\rightharpoonup \int_{\Omega^m} z_\alpha \cdot v d\Omega. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Un passage à la limite dans (3.21) entraîne

$$\int_{\Omega^m} z_\alpha \cdot v d\Omega = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^m),$$

puisque $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ alors $z_\alpha = 0$ et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^+(u(\varepsilon), v) = a^+(u_0^*, v), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^-(u(\varepsilon), v) = a^-(u_0^*, v), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{33}^m(u(\varepsilon), v) = a_{33}^m(u_0^*, v), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon a_{3\alpha}^m(u(\varepsilon), v) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u(\varepsilon), v) = 0. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

En prenant la limite en (3.1), on obtient :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u(\varepsilon), v) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u(\varepsilon), v) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u(\varepsilon), v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(v) + \varepsilon L^m(v), \quad \forall v \in V,$$

ce qui donne :

$$a(u_0^*, v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Ceci implique l'unicité de la solution $u_0^* = u_0$ dans V_0 . On a alors la convergence de $u(\varepsilon)$ vers u_0 , pour toute la suite $u(\varepsilon)$. \square

Théorème 3.2. $\sigma(\varepsilon) \rightharpoonup \sigma_0$ dans $L^2(\Omega_{tr})$.

Démonstration. $\sigma(\varepsilon)$ s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^+ = A_{ijkl}^+ u_{k,l}^+, \\ \sigma_{ij}^- = A_{ijkl}^- u_{k,l}^-, \\ \sigma_{ij}^m = A_{ijk3}^m u_{k,3}^m + \varepsilon A_{ijk\alpha}^m u_{k,\alpha}^m, \end{array} \right. \quad (3.24)$$

alors, par (3.19), on a :

$$|\sigma(\varepsilon)|_{L^2(\Omega_{tr})} < C,$$

où

$$|\sigma|_{L^2(\Omega_{tr})} = \left[\int_{\Omega_{tr}} \left(\sum_{i,j=1}^3 (\sigma_{ij})^2 \right) d\Omega \right]^{1/2}.$$

Donc, il existe une sous-suite telle que :

$$\sigma(\varepsilon) \longrightarrow \sigma_0^* \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega_{tr}).$$

Pour tout $T \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_{tr})$, nous considérons l'identité suivante :

$$\int_{\Omega_{tr}} [\sigma(\varepsilon) \cdot T] d\Omega = \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ u_{k,l}^+ T_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^m} A_{ijk3}^m u_{k,3}^m T_{ij} d\Omega + \varepsilon \int_{\Omega^m} A_{ijk\alpha}^m u_{k,\alpha}^m T_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- u_{k,l}^- T_{ij} d\Omega, \quad (3.25)$$

où le symbole \cdot représente le produit scalaire tensoriel.

De la convergence faible, nous avons pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, $\forall T \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_{tr})$:

$$\int_{\Omega_{tr}} [\sigma_0^* \cdot T] d\Omega = \int_{\Omega_{tr}^+} A_{ijkl}^+ (u_0^+)_{k,l} T_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^m} A_{ijk3}^m (u_0^m)_{k,3} T_{ij} d\Omega + \int_{\Omega^-} A_{ijkl}^- (u_0^-)_{k,l} T_{ij} d\Omega, \quad (3.26)$$

ce qui implique que :

$$(\sigma_0^*)_{ij}^\pm = A_{ijkl}^\pm (u_0^\pm)_{k,l} \quad \text{et} \quad (\sigma_0^*)_{ij}^m = A_{ijk3}^m (u_0^m)_{k,3},$$

□

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Rellich-Kondrachov, nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u(\varepsilon) - u_0|_{L^2(\Omega_{tr}^+)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |u(\varepsilon) - u_0|_{L^2(\Omega^-)} &= 0. \end{aligned}$$

et que l'on ait :

$$|u_0| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u(\varepsilon)|_{V_0}.$$

3.5.2 Convergence forte

Pour améliorer la convergence faible obtenue auparavant et démontrer la convergence forte, on doit imposer la condition de régularité suivante sur $U_{0,\alpha}^m$:

$$u_{0,\alpha}^m \in L^2(\Omega^m), \quad (3.27)$$

Théorème 3.3. *Supposons que u_0 vérifie l'hypothèse (3.27). Alors, $u(\varepsilon)$ converge vers u_0 fortement dans V_0 . De plus :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)} = 0.$$

Démonstration. En utilisant u_0 comme une fonction de test dans (3.4), et en considérant $w = u(\varepsilon) - u_0$, on obtient :

$$a(w, w) + \varepsilon a_{3\alpha}^m + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(w, w) = L(w) + \varepsilon L^m(w) - \varepsilon L^m(u_0) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0, u_0) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u_0, u_0). \quad (3.28)$$

Par coercivité, nous avons :

$$a(w, w) + \varepsilon a_{3\alpha}^m + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(w, w) \geq |w|_{V_0}^2 + \varepsilon^2 |w_{,\alpha}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2.$$

D'autre part, w tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui implique que :

$$L(w) + \varepsilon L^m(w) - \varepsilon L^m(u_0) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0, u_0) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u_0, u_0) \rightarrow 0. \quad (3.29)$$

□

Théorème 3.4. *Supposons que u_0 vérifie l'hypothèse (3.27). Alors :*

$$\sigma(\varepsilon) \text{ converge vers } \sigma_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega_{tr}).$$

Démonstration. De (3.12), (3.13) et (3.24), nous avons :

$$|\sigma(\varepsilon) - \sigma_0|_{L^2(\Omega_{tr})} \leq C \left\{ |u(\varepsilon) - u_0|_{V_0} + \varepsilon \left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)} \right\}, \quad (3.30)$$

donc, le résultat est une conséquence du théorème (3.3). □

Proposition 3.1. *Supposons que :*

$$\left| u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \right|_{L^2(\Omega^m)} \leq C. \text{ Alors } u_0 \in V \text{ et } |u(\varepsilon) - u_0|_{V_0} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Démonstration. Par l'hypothèse, il existe une sous-suite de $u(\varepsilon)_{,\alpha}^m$ qui converge faiblement vers z_α .

Considérons l'identité :

$$\int_{\Omega^m} u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \cdot v_{,\alpha} d\Omega = - \int_{\Omega^m} u(\varepsilon)_{,\alpha}^m \cdot v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^m). \quad (3.31)$$

En prenant la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega^m} u_{0,\alpha}^* \cdot v_{,\alpha} d\Omega = - \int_{\Omega^m} z_\alpha \cdot v d\Omega, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^m), \quad (3.32)$$

à savoir que : $z_\alpha = u_{0,\alpha}^m$. Nous avons :

$$L(w) + \varepsilon L^m(w) - \varepsilon L^m(u_0) + \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0, u_0) + \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u_0, u_0) = \varepsilon L^m(w) - \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0, w) - \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u_0, w),$$

et on a :

$$\left| \varepsilon L^m(w) - \varepsilon a_{3\alpha}^m(u_0, w) - \varepsilon^2 a_{\alpha\beta}^m(u_0, w) \right| \leq C \left\{ \varepsilon |w^m|_{L^2(\Omega^m)} + \varepsilon |w_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)} + \varepsilon |w_{,\alpha}^m|_{L^2(\Omega^m)} \right\},$$

par continuité. Ce qui donne :

$$|w|_{V_0}^2 + \varepsilon^2 |w_{,\alpha}^m|_{L^2(\Omega^m)}^2 \leq C \left\{ \varepsilon |w^m|_{L^2(\Omega^m)} + \varepsilon |w_{,3}^m|_{L^2(\Omega^m)} + \varepsilon |w_{,\alpha}^m|_{L^2(\Omega^m)} \right\}. \quad (3.33)$$

□

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [2] NGUYEN Dang Huy, *Thèse de doctorat de l'université de Toulouse*, 23 octobre 2009.
- [3] G.GEYMONAT, F.KRASUCKI and S.LENCI. *Mathematical Analysis of a Bonded Joint with a Soft Thin Adhesive*, *Mathematics and mechanics of solids*, 4 : 201-225, 1999.
- [4] J.Sanchez-Hubert et E.Sanchez-Palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, 1992
- [5] P.G.Ciarlet. *Mathematical elasticity : Theory of plates*. North-Holland. 1988.