

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier « Dieu » Le Tout Puissant qui veille sur nous et nous protège de tous malheurs. Il est notre source de courage et de réussite.

Mes plus sincères remerciements à mes très chers parents pour leur amour, leur présence et surtout leur encouragement.

*Mes plus vifs et chaleureux remerciements à la personne qui mérite tout le respect pour ces conseils et sur tout sa disponibilité et sa grande patience le long de ce travail « P^r. **Nouredine Bourahla**, ».*

*Je tiens à exprimer ma vive gratitude au Dr. **Abdelkrim Khelif**, Maître de recherche à l'Institut FEMTO-ST CNRS, Besançon pour son extrême gentillesse et qui n'a pas hésité à me fournir les informations nécessaires pour mener à terme ce travail.*

*Je tiens à remercier Dr. **Abdelkader Hassein-Bey** directeur du laboratoire FUNDAPL à l'Université Saad Dahleb, Blida ainsi que toute l'équipe de « MEMS & SENSORS » du DMN/CDTA (Baba Hassene), de leur précieuse aide pour finaliser cette recherche.*

Je remercie également l'ensemble des enseignants de la post-graduation de l'université MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU qui ont contribué à ma formation. Mes remerciements également au président de jury Pr.Y. BOUAFIA et aux membres : Pr. A. ABED et Pr. M.HAMIZI.

Une pensée spéciale pour tous les thésards avec lesquels j'ai eu l'occasion de partager mes états d'âme et autres questionnements existentiels : Bougressi Ali, Hiba Meddah, Walid Yahiaoui, Farah Kahlouche, Rouaz Idriss : souhaitons leur bonne chance dans la recherche. Mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

*Je terminerai en remerciant de tout mon cœur **Mr Hocine Doufene** pour son aide, son soutien ses encouragements tant d'un point de vue professionnel que personnel. Je le remercie d'autant plus.*

Résumé

L'axe de recherche sur la propagation des ondes dans les milieux périodiques a connu une période faste vers la fin du XIXe siècle et le début du XXe. Plusieurs théorèmes ont été avancés. Les ondes optiques avec Rayleigh, la cristallographie avec Bragg, la diffraction des ondes optiques par les ondes élastiques avec Brillouin notamment, ou encore les travaux de Bloch sur les fonctions d'ondes.

Les cristaux phononiques sont définis comme étant des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale dans une ou plusieurs directions de l'espace (1D, 2D et 3D). En tant que tels, ils sont capables de bloquer la propagation acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de la réflexion de Bragg lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de la périodicité.

A partir de l'an 2000, un nouveau rebondissement touche la classe des cristaux phononiques avec l'apparition d'une nouvelle catégorie de milieux dotés de comportements physiques inhabituels. En effet, la composition et la configuration de ces structures phononiques leur confère la capacité de bloquer la propagation des ondes ayant des longueurs d'ondes largement supérieures à la périodicité de la structure. L'origine de cette manifestation réside dans le fait que la structure est dotée de résonateurs qui peuvent vibrer localement à de très basses fréquences. Le mécanisme moteur de ces comportements est ainsi appelé *résonance locale*, d'où le nom de *cristaux phononiques à résonance locale*. Le potentiel de ce mécanisme a attiré les chercheurs à transposer ces fondements théoriques à la conception de structures périodiques permettant de bloquer ou d'atténuer les ondes sismiques dans les ouvrages de génie civil.

Dans le cadre de ce mémoire nous nous sommes intéressés à concevoir des réseaux périodiques à l'échelle des ouvrages de génie civil permettant d'inhiber la propagation des ondes dans le domaine des très basses fréquences (0.1-30Hz).

Les fondements théoriques utilisés pour l'étude des cristaux phononiques ainsi que les différentes applications dans l'isolation sismique des ouvrages de génie civil sont d'abord présentés. Ensuite, deux structures périodiques à l'échelle des ouvrages de génie civil ont été conçues. La première est constituée d'une matrice en béton dans laquelle sont disposés périodiquement dans les deux directions du plan [X, Y] deux noyaux lourds enrobés d'élastomère. La seconde structure est constituée d'un arrangement périodique unidimensionnel de couches successives de béton et d'élastomère. L'efficacité de ces structures à bloquer la propagation des ondes sismiques a été évaluée en termes des positions et largeurs des bandes interdites.

Mots-Clés: Cristaux phononiques, Réseaux périodiques, Bandes de fréquences interdites, Réflexions de Bragg, Résonance locale, Isolation sismique, Ondes sismiques.

Abstract

Research work on wave propagation in periodic media has experienced a boom in the late nineteenth and early twentieth century's. Several theorems have been proposed. Optical waves with Rayleigh, crystallography with Bragg, the diffraction of light waves by elastic waves with Brillouin, or also the work of Bloch on wave functions.

Phononic crystals are macroscopic composite materials that have a spatial periodicity in one or several directions (1D, 2D and 3D). They are able, through the Bragg reflection, to block the acoustic propagation in certain directions and frequency ranges, when the wavelength is comparable to the structural periodicity.

Since 2000, a new category of media with unusual physical behavior affecting the class of phononic crystals has emerged. The composition and configuration of these phononic structures make them capable to block the propagation of waves with wavelengths much larger than the structural periodicity. The origin of this phenomena is attributed to locally vibrating resonators at low frequencies. The mechanism responsible for this behavior is called *Local Resonance*, hence the name of *Locally Resonant Phononic Crystal*. The potential of this mechanism has attracted researchers to use these theoretical bases in the design of periodic structures for blocking or mitigating seismic waves in civil engineering structures.

In this paper, we worked on designing periodic media at the scale of civil engineering structures allowing the inhibition of very low frequency waves (0.1-30Hz).

First, an outline of the theoretical bases of phononic crystals are presented together with the various applications in seismic isolation of civil engineering structures. Two periodic structures are designed. The first consists of a concrete matrix in which two heavy cores with rubber coating are periodically arranged in both directions of the [x,y] plane. The second structure consists of a one-dimensional periodic arrangement of layers of concrete and rubber. The seismic isolation efficiency of these structures has been assessed in terms of the band gaps range and position.

Keywords: Phononic Crystals, Periodic media, Frequency Band gap, Bragg reflections, Local resonance, Seismic isolation, Seismic waves.

Table des matières

Introduction générale.....	8
Chapitre 1 Généralités sur la propagation des ondes élastiques dans les réseaux périodiques et tendances actuelles	10
1.1. Introduction	11
1.2. Ondes élastiques	11
1.3. Propagation d'ondes élastiques dans un solide homogène	12
1.3.1. Quelques bases d'élasticité	12
1.4. Différents types d'ondes.....	15
1.4.1. Onde de volume	16
1.4.2. Onde de surface.....	17
1.5. Ondes élastiques en milieu périodique : les cristaux phononiques (CP).....	19
1.5.1. Cristaux phononiques.....	19
1.6. Conclusion.....	28
Chapitre 2 Application du concept des réseaux périodiques dans le domaine du génie sismique	29
2.1. Introduction	30
2.2. Les ondes sismiques	30
2.2.1. Ondes de volume.....	30
2.2.2. Ondes de surface	31
2.3. Application du concept des réseaux périodiques dans l'isolation sismique.....	32
2.3.1. Isolation sismique d'un site [31].....	34
2.3.2. Fondations périodiques [13].....	34
2.3.3. Systèmes de bandes interdites phononiques dans les structures de génie civil [32]	
40	
2.4. Conclusion.....	46
Chapitre 3 Etude théorique et numérique de deux structures périodiques élaborées pour l'isolation sismique des ouvrages de génie civil.	47
3.1. Introduction	48
3.2. Application de la MEF en phononique.....	48
3.2.1. Application de la méthode FEM pour le calcul des structures de bandes et champs de déplacement.....	49
3.2.2. Convergence.....	49

3.2.3. Condition aux limites périodiques	50
3.3. Structures de bandes étudiées	50
3.3.1. Configuration des structures étudiées	51
3.3.2. Choix des matériaux.....	51
3.3.3. Modèle numérique	52
3.3.4. Conditions aux limites	52
3.3.5. Maillage et convergence	54
3.3.6. Calcul de la structure de bandes.....	54
3.4. Structure à bandes pour le modèle 1 (cristal phononique à résonance locale).....	55
3.4.1. Variation de la fraction de remplissage.....	56
3.4.2. Variation de la masse volumique	59
3.4.3. Variation du module d'élasticité de l'élastomère	61
3.4.4. Variation du module d'élasticité de la matrice en béton.....	62
3.5. Structures à bandes pour le modèle 2 (cristal phononique 1D).....	63
3.5.1. Influence de la variation des épaisseurs e_1 et e_2 des deux matériaux.	64
3.5.2. Influence de la variation des modules d'élasticité E_1 et E_2 des deux matériaux	65
3.5.3. Influence de la variation des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 des deux matériaux ...	66
3.6. Conclusion.....	67
Conclusion générale	68
Références bibliographiques	70
ANNEXE A	73
RESEAU RECIPROQUE ET ZONE DE BRILLOUIN IRREDUCTIBLE	73
ANNEXE B	77
MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS	77

Liste des figures

Figure 1.1 : Domaines fréquentiels des ondes élastiques.....	11
Figure 1.2 : Solide de volume V : (a) en l'absence de force extérieure, (b) en cisaillement pure sous l'action de forces extérieures et sans variation de volume, (c) en compression sous l'action de forces extérieures et associé à une variation de volume ΔV	12
Figure 1.3 : Schématisation des axes x_i par rapport à la surface libre d'un solide semi-infini placée en $x_2=0$	17
Figure 1.4 : Schématisation du déplacement d'une onde de Rayleigh.	18
Figure 1.5 : Schématisation des axes x_i par rapport aux deux surfaces libres d'une plaque d'épaisseur $2h$	19
Figure 1.6 : Schéma d'un cristal phononique a) 1D, b) 2D, c) 3D.	20
Figure 1.7 : Structure de bandes pour un cristal phononique parfait consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [22].	21
Figure 1.8 : Sculpture d'Eusébio Sempere : cylindres d'acier de 2.9 cm de diamètre, espacés périodiquement de 10 cm suivant un réseau carré, et présentant des bandes interdites pour les ondes sonores (ex : forte atténuation du signal entre 1.7 et 2.4 KHz).	23
Figure 1.9 : Exemple de calcul de structure de bandes aux axes principaux de symétrie de la première zone de Brillouin pour un CP à ondes de Lamb [15].	25
Figure 1.10 : (A) Résonateur sphérique constitué d'un cœur en plomb enrobé par un élastomère très mou. (B) Cristal phononique tridimensionnel à résonance locale [17].	26
Figure 1.11: Coefficient de transmission (A) mesuré dans le CP de la figure 1.10 ainsi que la structure de bandes calculée (B) [17].	27
Figure 2.1 : Représentation schématique des ondes P [37].	31
Figure 2.2 : Représentation schématique des ondes S [37].	31
Figure 2.3 : Représentation schématique des ondes L [35].	32
Figure 2.4 : Représentation schématique des ondes LR [35].	32
Figure 2.5: Fondations périodiques pour isolation sismique [13].	34
Figure 2.6.a: Configuration de la cellule élémentaire des fondations périodiques [13].	35
Figure 2.6.b: Courbe de dispersion [13].	35
Figure 2.7 : Influence de la masse volumique du noyau (a) et du module d'élasticité de l'élastomère (b) sur la bande interdite [13].	36
Figure 2.8 : Influence de la fraction de remplissage (a) et du paramètre β (b) sur la bande interdite [13].	37
Figure 2.9 : Influence du module d'élasticité de la matrice sur la bande interdite [13].	38
Figure 2.10: Différents types d'isolation pour une structure autostable [13].	38

Figure 2.11 : Déplacements des nœuds 1 et 6 de la structure dans la direction x [13].	39
Figure 2.12 : Déplacement relatif des 4eme et 6eme planchers dans la direction x [13].	39
Figure 2.13 : Pont de Volga (a), (b) déformations de flexion de la plate-forme du pont, (c) modèle numérique simplifié, (d) structure 3D de guide d'ondes [32].	40
Figure 2.14: Cellule élémentaire 2D avec système de résonateurs. (a) le 1er mode propre, (b) modèle en treillis utilisé pour l'estimation analytique des fréquences propres.	41
Figure 2.15 : Courbes de dispersion et les modes propres correspondant au guide d'onde structuré 2D (simulation éléments finis COMSOL). (a) Structure initiale. (b) structure modifiée.	42
Figure 2.16 : Quatre premiers modes d'ondes stationnaires dans la structure résonante. La plate-forme du pont est fixe.	44
Figure 2.17 : Structure modifiée: les vibrations de flexion de la plate-forme sont supprimées. Le mouvement est repris par les résonateurs.	44
Figure 2.18: Modes propres d'un bâtiment multi-étages encastré à la base.	45
Figure 3.1 : (a) modèle 1 : réseau périodique 2D, (b) modèle 2 : réseau périodique 1D.	51
Figure 3.2 : Maillage et conditions aux limites périodiques de la structure périodique 2D.	53
Figure 3.3 : Maillage et conditions aux limites périodiques de la structure périodique 1D.	54
Figure 3.4 : Première zone de Brillouin irréductible pour une structure périodique carrée.	55
Figure 3.5 : Structure de bandes interdites du modèle 1 (périodicité 2D).	55
Figure 3.6 : Influence de la variation du paramètre β_1 pour $\beta_2=1$ et $f=75.43\%$.	57
Figure 3.7 : Influence de la variation du paramètre β_2 pour $\beta_1=1.9$ et $f=75.43\%$.	58
Figure 3.8: Influence de la variation de la fraction de remplissage f sur la bande interdite.	59
Figure 3.9 : Influence de la variation de la masse volumique des noyaux sur la bande interdite.	60
Figure 3.10: Influence de la variation du module d'élasticité de l'élastomère sur la bande interdite.	61
Figure 3.11: Influence de la variation du module d'élasticité du béton sur la bande interdite.	63
Figure 3.12 : Structure de bandes interdites du modèle 2 (périodicité 1D).	64
Figure 3.13 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des épaisseurs e_1/e_2 .	65
Figure 3.14 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des modules de YOUNG du béton sur l'élastomère.	66
Figure 3.15 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des masses volumiques du béton sur l'élastomère.	67

Introduction générale

L'environnement tout entier de l'Homme regorge de systèmes et phénomènes périodiques dont il profite ou subit l'influence. Ceux-ci peuvent être matériels ou non, et incarnent l'ordre dans la nature. Si la plupart d'entre eux sont naturels, d'autres sont par contre l'œuvre pure du génie et de l'imagination de l'Homme. En effet, fasciné par tout ce qui est périodique autour de lui, et mû par le désir de l'exploiter à ses fins, l'Homme a toujours mené des études pour en cerner le comportement et pouvoir ainsi orienter en conséquence son intervention.

Parmi les sujets qui ont tant suscité la convoitise et l'intérêt des scientifiques, on cite la propagation des ondes dans les milieux périodiques. Cet axe de recherche se trouve au confluent de plusieurs disciplines de la physique et dont la fin du XIX^e siècle et le début du XX^e constitue une période faste où plusieurs théorèmes ont été avancés.

Les ondes optiques avec Rayleigh, la cristallographie avec Bragg, la diffraction des ondes optiques par les ondes élastiques avec Brillouin notamment, ou encore les travaux de Bloch sur les fonctions d'ondes ne dressent même qu'un tableau partiel de l'intérêt porté aux phénomènes liés à la périodicité. Ces structures périodiques ont pour dénominateur commun leur capacité à inhiber la propagation des ondes en leur sein dans une certaine gamme de longueurs d'ondes (ou, plus rigoureusement de vecteurs d'ondes).

Seul la physique de l'état solide a su, initialement, tirer pleinement profit de ces bandes interdites dans les cristaux, qui deviendront un élément clef dans l'étude et la conception des matériaux semi-conducteurs. Les possibilités qu'offraient ces matériaux sur le contrôle des ondes électroniques se devaient de susciter quelques idées quant à l'application d'un principe similaire à des ondes propagatives de différentes natures.

Partant des résultats de la physique de l'état du solide, la fin des années 80 a connu l'émergence des cristaux photoniques. Ces derniers sont constitués d'un arrangement périodique de matériaux ayant des propriétés diélectriques différentes constituant un milieu dispersif aux ondes électromagnétiques. Ces matériaux mettent en évidence une gamme de fréquence appelée bande interdite, où les ondes électromagnétiques ne peuvent se propager.

Par ailleurs, il a fallu moins de 10 ans pour assister à la transposition de ces mêmes phénomènes à l'acoustique, où les scientifiques ont pu élaborer ce qu'on appelle aujourd'hui les cristaux phononiques. Mentionnés la première fois en 1993 [1,2], ils exhibent en effet un potentiel tout aussi prometteur. Ils consistent également à mettre à profit les phénomènes de diffusion se produisant dans un matériau composite périodique pour inhiber la propagation des ondes acoustiques dans toutes les directions de l'espace : le réseau fait donc office de réflecteur parfait, n'absorbant qu'une partie infime de l'onde incidente. Les conditions de périodicité permettant l'annulation de la propagation des ondes sont bien spécifiques, et mettent en jeu la forme des inclusions, leurs dimensions, la symétrie du réseau mais aussi l'anisotropie du substrat.

En revanche, l'un des avantages de l'acoustique par rapport aux deux autres domaines évoqués, ceux des ondes optiques et électroniques, réside en la possibilité d'observer ces effets de bandes interdites élastiques sur de vastes gammes de fréquences, autorisant la fabrication, aisée, de dispositifs macroscopiques, et élargissant leur champ d'application. Celui-ci s'étend en effet de l'atténuation des ondes sismiques au filtrage radio-fréquence, en passant par l'isolation phonique ou les interactions acousto-optiques. Il n'en reste pas moins que, à l'heure actuelle, les réalisations expérimentales sont restées pour la plupart limitées à la mise en évidence du phénomène d'une part à basse fréquence, c'est-à-dire pour des structures de dimensions millimétriques, voire supérieures ; et d'autre part pour des ondes élastiques dites de volume, c'est-à-dire se propageant indifféremment dans tout le substrat.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif de transposer le principe des réseaux acoustiques à bandes interdites à la protection sismique des ouvrages de génie civil et d'élaborer des réseaux périodiques permettant d'inhiber la propagation des ondes dans le domaine des très basses fréquences (0.1-30 Hz).

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux rappels de quelques notions de base des ondes élastiques et acoustiques, ainsi que leur propagation dans les solides homogènes. Un aperçu et un bref historique sur les cristaux phononiques sont ensuite exposés dans la seconde partie de ce chapitre. La conséquence de la propagation des ondes au sein de ces structures est l'apparition de bandes interdites dont leurs origines ont été détaillées à travers les deux mécanismes de diffusion de Bragg et de résonance locale.

Dans le second chapitre, un bref descriptif des différents types d'ondes sismiques ainsi que leurs caractéristiques est suivi par la présentation des différents travaux de recherche sur l'application des réseaux périodiques dans l'isolation sismique des ouvrages de génie civil. Ces derniers, vu leur rareté se résument aux travaux de : fondations périodiques [13], isolation du pont de Volga et des bâtiments de grande hauteur [32] et l'isolation sismique d'un site [31].

Pour le troisième chapitre qui constitue le vif de notre sujet, deux structures périodiques ont été proposées pour mettre en valeur leur potentiel à bloquer la propagation des ondes dans la gamme de fréquences du génie sismique. La première structure est constituée d'une matrice en béton dans laquelle sont disposés périodiquement dans les deux directions du plan [X, Y] deux noyaux lourds enrobés d'élastomère. La seconde structure est constituée d'un arrangement périodique unidimensionnel de couches successives de béton et d'élastomère. L'axe principal de cette étude est basé sur le calcul des différents diagrammes de bandes pour ces deux structures. Les résultats obtenus ainsi que les paramètres influençant l'ouverture des bandes interdites sont présentés et discutés.

Le travail présente une conclusion générale et certaines perspectives et recommandations pour les futurs travaux.

Chapitre 1

Généralités sur la propagation des ondes élastiques dans les réseaux périodiques et tendances actuelles

1.1. Introduction

La propagation des ondes acoustiques/ élastiques dans les milieux hétérogènes dotés d'une structure périodique fait l'objet d'un grand intérêt depuis quelques décennies. Un grand nombre de structures périodiques a été étudié et des approches théoriques variées ont été employées. Toutes ces méthodes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques telles que la présence de bandes interdites (*Gap*) correspondant à une forte atténuation et des bandes passantes d'atténuation plus faible.

Ainsi dans ce chapitre, une présentation préliminaire sur les caractéristiques principales des différents types d'ondes élastiques est suivie par une description des cristaux phononiques et leurs comportements dispersifs aux ondes acoustiques.

1.2. Ondes élastiques

Les ondes élastiques font partie de notre expérience quotidienne et de notre environnement le plus immédiat, elles sont utilisées dans des domaines aussi variés que l'imagerie échographique du corps humain, la détection et la localisation d'objets sous-marins (le sonar), la propagation du son dans l'atmosphère, l'étude des séismes et des mouvements de l'écorce terrestre et dans la téléphonie mobile (figure 1.1).



Figure 1.1 : Domaines fréquentiels des ondes élastiques.

La propagation d'une onde acoustique se traduit par une variation temporelle d'une série de déformations dans le milieu support de la propagation. Ce comportement vibratoire est dû aux forces d'inertie et celles de rappel élastique qui concourent entre elles en agissant sur les particules du milieu. Ainsi, les caractéristiques d'une onde acoustique dépendent des propriétés élastiques et de la densité du support matériel dans lequel elle se propage.

Sachant qu'un matériau adopte un comportement élastique spécifique suivant la direction des déformations qu'il subit par rapport à son orientation et sa structure cristallographique, les propriétés de l'onde seront déterminées par sa direction de propagation et sa polarisation.

Dans un milieu homogène isotrope par exemple, si l'onde élastique se propage sans rencontrer d'obstacle, elle garde ses propriétés physiques tout au long de son parcours. Autrement dit, si les dimensions de ce milieu sont supposées infinies dans toutes les directions de l'espace, comparées aux distances parcourues par le déplacement de l'onde, celle-ci pourra alors se propager dans le volume du milieu. Ses propriétés physiques ne dépendront que de sa polarisation quelle que soit la direction de propagation. On parle alors d'une onde de volume.

Dans le cas des milieux solides isotropes, la vitesse des ondes à polarisation longitudinale est supérieure à celle des ondes à polarisation transverse.

1.3. Propagation d'ondes élastiques dans un solide homogène

1.3.1. Quelques bases d'élasticité

La théorie de l'élasticité a pour objectif d'étudier les phénomènes mécaniques mis en jeu lors de l'application d'une force à un corps donné. Ces forces affectent la forme comme le volume du corps étudié. Chaque point du corps subit donc un changement de position mesuré par un vecteur déplacement $\mathbf{u}$. La connaissance du vecteur de déplacement fournit un moyen de remonter aux déformations $\mathbf{S}$ subies par le solide.

Un solide élastique retrouve son état initial lorsque les forces extérieures qui lui sont appliquées sont annulées. Cet effet met en jeu des contraintes internes $\mathbf{T}$ qui, au repos, s'annulent avec les déformations.

1.3.1.1. Tenseur de contrainte

Le tenseur de contraintes permet de représenter l'ensemble des forces surfaciques susceptibles d'intervenir pour déformer le milieu. C'est un tenseur de rang 2, avec $3^2=9$ composantes, et est noté T_{ij} ($i,j=1,2,3$), où par définition T_{ij} est la i^{eme} composante de la force agissant sur un petit élément de surface du solide normale à l'axe j .

Dans le cas des phénomènes étudiés, le tenseur des contraintes est symétrique ($T_{ij}=T_{ji}$), les termes diagonaux, T_{ii} sont associés à la compression pure et les termes non diagonaux, T_{ij} ($i \neq j$), au cisaillement (voir figure 1.2).

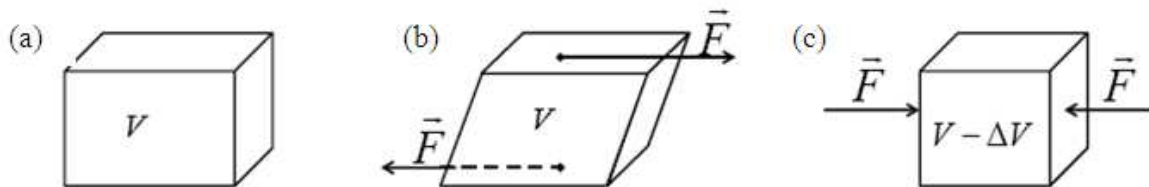


Figure 1.2 : Solide de volume V : (a) en l'absence de force extérieure, (b) en cisaillement pure sous l'action de forces extérieures et sans variation de volume, (c) en compression sous l'action de forces extérieures et associé à une variation de volume ΔV .

1.3.1.2. Tenseur des déformations

Soient deux points matériels A et B, d'un solide donné, initialement positionnés en x_j et x_j+dx_j , se déplaçant l'un par rapport à l'autre et auxquels sont respectivement associés les déplacements $u_i(x_j)$ et $u_i(x_j+dx_j)$ ($i,j=1,2,3$). Pour de petits déplacements, depuis une position donnée, il est alors possible de décrire la relation suivante (en omettant les termes non linéaires) :

$$u_i(x_j + dx_j) \approx u_i(x_j) + \frac{du_i}{dx_j} dx_j \quad (1.1)$$

D'après l'équation 1.1, il est possible d'établir un gradient de déplacement tel que :

$$\frac{du_i}{dx_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} - \frac{du_j}{dx_i} \right) = S_{ij} + \Omega_{ij} \quad (1.2)$$

Dans cette équation le terme symétrique est associé à la déformation, et le terme antisymétrique à la rotation locale. Néanmoins, dans la propagation des ondes élastiques seule la déformation entre en compte.

Le tenseur des déformations, symétrique par construction, est un tenseur de rang 2, et s'exprime donc comme :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) \quad (1.2')$$

1.3.1.3. Loi de Hooke

Pour un solide déformé sous l'action de contraintes dues à des forces extérieures, la loi de Hooke (équation 1.3) traduit la réponse du solide, en terme de déformations, à une sollicitation extérieures. Cette relation permet de relier tenseur des contraintes et tenseur des déformations :

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} = C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \quad (1.3)$$

Où **C** est appelé tenseur des rigidités élastiques. Ce dernier est un tenseur de rang 4, dont les composantes C_{ijkl} sont des constantes élastiques du solide. Il possède donc à priori $3^4=81$ composantes indépendantes, toutes liées aux propriétés intrinsèques du milieu de propagation. Néanmoins, la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformation le rend invariant par permutation des indices ij et kl et permet de définir un nouveau système d'indices :

$$\alpha \Leftrightarrow (ij) \quad \text{et} \quad \beta \Leftrightarrow (kl) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \dots, 6 \quad \beta = 1, \dots, 6. \quad (1.4)$$

Ce système de notation permet de réécrire le tenseur d'élasticité sous la forme d'une matrice 6x6. Le tenseur d'élasticité peut alors se réduire à une matrice de 21 composantes indépendantes, telles que :

$$C_{ijkl} = C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha} \quad (1.5)$$

Les tenseurs de contraintes et de déformations pouvant être également réécrits en fonction de α et β , la loi de Hooke devient :

$$T_{\alpha} = C_{\alpha\beta} S_{\beta} \quad (1.6)$$

Où :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Pour un solide isotrope le tenseur des rigidités élastiques présente une invariance vis-à-vis des axes de référence du système. Cependant, les propriétés élastiques du solide sont les mêmes quelle que soit la direction de l'espace considérée. Dans ce cas, deux paramètres suffisent à caractériser la relation liant les contraintes aux déformations, ils s'agissent des coefficients de Lamé tel que :

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} &= C_{13} = C_{23} = \lambda \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \mu = (C_{11} - C_{12}) / 2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ainsi, le tenseur des rigidités élastiques s'écrit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Les constantes élastiques sont exprimées comme suit :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.10)$$

Pour les contraintes normales ($i=j$):

$$T_{ii} = C_{ijkl} S_{kl} = (\lambda \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{il}) S_{kl} \quad (1.11)$$

Pour les contraintes tangentielles ($i \neq j$) :

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) S_{kl} \quad (1.12)$$

D'où :

$$T_{ij} = 2\mu S_{ij}, \quad i \neq j$$

La combinaison des équations (1.11) et (1.12) permet de réécrire l'équation (1.3) sous la forme suivante :

$$T_{ij} = \lambda S \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} \quad (1.13)$$

Avec δ est le symbole de Kronecker.

1.3.1.4. Equation de propagation

Soit un solide homogène infini, impliquant une densité de masse ρ et un tenseur C_{ijkl} qui sont donc invariants par translation dans l'espace. A partir de l'application du principe fondamental de la dynamique en tenant compte de la loi de Hooke et de la loi de conservation de la quantité de mouvement, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (1.14)$$

F_i représente les forces extérieures mises en jeu. Une reformulation de l'équation (1.14) en utilisant l'équation (1.3) permet d'obtenir l'équation de propagation, qui en absence des forces extérieures (F_i) se ramène à :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \quad (1.15)$$

En remplaçant les expressions (1.2') et les coefficients de Lamé dans l'équation (1.13), la loi de Hooke, peut s'exprimer comme suit :

$$T_{ij} = C_{12} S \delta_{ij} + 2C_{44} S_{ij} = (C_{11} - 2C_{44}) S \delta_{ij} + C_{44} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.16)$$

D'où l'équation de propagation s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(C_{11} - C_{44}) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] + C_{44} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.17)$$

1.4. Différents types d'ondes

Dans la section précédente, nous avons vu que la propagation des ondes élastiques résultait d'un équilibre entre les forces appliquées au solide faisant office de milieu de propagation et les forces élastiques internes de « rappel ».

Dans un volume, ces forces peuvent être des forces de compression ou de cisaillement, impliquant ainsi la propagation d'ondes du même type. Ces ondes peuvent se propager de façon découplée (milieu isotrope) ou non (solide anisotrope). Mais les milieux élastiques peuvent aussi, dans le cas où le substrat de propagation est de dimension finie, supporter d'autres types d'ondes, dont les propriétés de propagation sont liées aux conditions aux limites imposées. Nous donnons ici quelques notions générales sur la propagation des ondes élastiques dans différentes configurations.

1.4.1. Onde de volume

On considère ici le cas de la propagation d'une onde élastique dans un solide d'extension spatiale infinie. On cherche alors une solution de l'équation de propagation sous la forme d'une onde plane monochromatique progressive se propageant suivant une direction définie par un vecteur d'onde $\mathbf{k}$:

$$u_i = U_i \exp[j(\omega t - Kx)] \quad (1.18)$$

On peut récrire cette expression en employant le vecteur des lenteurs tel que $\mathbf{k} = \omega \mathbf{s}$, en lieu et place du vecteur d'onde :

$$u_i = U_i \exp[j\omega(t - sx)] \quad (1.19)$$

En substituant cette expression dans l'équation de propagation (1.15) et en définissant un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ tel que $n = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \frac{\mathbf{K}}{K}$, on obtient l'équation dite de Christoffel :

$$\rho v^2 u_i = C_{ijkl} n_j n_k u_l \quad (1.20)$$

Où v est la vitesse de propagation de l'onde élastique. En introduisant le tenseur du second ordre Γ , dit tenseur de Christoffel, tel que $\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k$, l'équation de Christoffel s'écrit :

$$\Gamma_{il} u_l = \rho v^2 u_i \quad (1.21)$$

Ainsi, déterminer les vitesses de phases et les polarisations d'ondes planes se propageant dans un cristal, de rigidité C_{ijkl} , selon $\mathbf{n}$, revient à déterminer les valeurs et les vecteurs propres du tenseur de Christoffel.

De manière générale, pour une direction donnée, la résolution de l'équation séculaire :

$$|\Gamma_{il} - \rho v^2 \delta_{il}| = 0 \quad (1.22)$$

Donne trois vitesses de phase. Dans un cristal de symétrie quelconque, trois ondes planes, une onde (quasi-) longitudinale ou de compression, et deux ondes (quasi-) transverses pour les milieux isotropes (anisotropes), de polarisations orthogonales deux à deux se propageant avec trois vitesses de phases différentes (notées $\mathbf{V}_L$ pour les ondes longitudinales, et $\mathbf{V}_{T1}$, $\mathbf{V}_{T2}$ pour les deux types d'ondes transverses). Les ondes longitudinales sont polarisées dans la direction de propagation ($\mathbf{U} // \mathbf{K}$). La polarisation des ondes transverses est perpendiculaire à cette même direction.

Dans un solide isotrope les vitesses des deux ondes transverses se confondent, et les vitesses des ondes de volume sont données par les relations :

$$V_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{(C_{11} - C_{12})}{2\rho}}, \quad V_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}. \quad (1.23)$$

Par ailleurs, dans tous les solides isotropes, le coefficient C_{12} étant positif, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$V_T < \frac{V_L}{\sqrt{2}}. \quad (1.24)$$

Notons également que ces vitesses sont indépendantes de la fréquence de l'onde élastique.

La propagation est donc non dispersive.

1.4.2. Onde de surface

En s'intéressant à l'influence des conditions aux limites pour le milieu solide homogène, contrairement à la propagation des ondes de volume, cette section a pour but la description de la propagation des ondes guidées par une et deux surfaces libres d'un solide.

1.4.2.1. Ondes de Rayleigh

Si l'on impose maintenant une limite physique au milieu de propagation, comme par exemple une surface libre homogène, les conditions aux limites mécaniques induites vont affecter les propriétés des ondes se propageant dans le milieu. Dans ce cas précis, il existe un type particulier d'ondes dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la profondeur et n'affecte donc le substrat que sur une épaisseur de l'ordre de la longueur d'onde du mode. Ces ondes de surface présentent en effet un vecteur déplacement dont la composante normale est évanescente.

Cette famille de modes est bien connue des géophysiciens. En particulier, les ondes dites de Rayleigh, découvertes par Lord John Rayleigh en 1885, ont fait l'objet de nombreuses études. Ces ondes se propagent à une vitesse V_R inférieure à celle des ondes de volume (V_T et V_L) et sont de polarisation elliptique ; leurs composantes longitudinale et transverse demeurant donc couplées et en quadrature de phase. De plus, les ondes de Rayleigh ne sont pas dispersives et présentent une atténuation quasi-nulle lors de leur propagation dans un substrat.

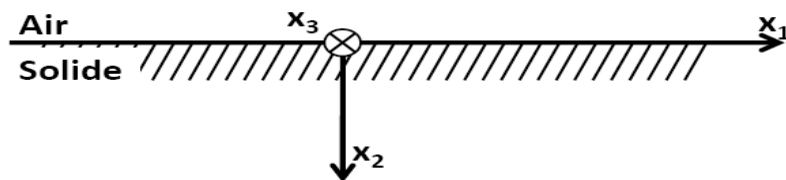


Figure 1.3 : Schématisation des axes x_i par rapport à la surface libre d'un solide semi-infini placée en $x_2=0$.

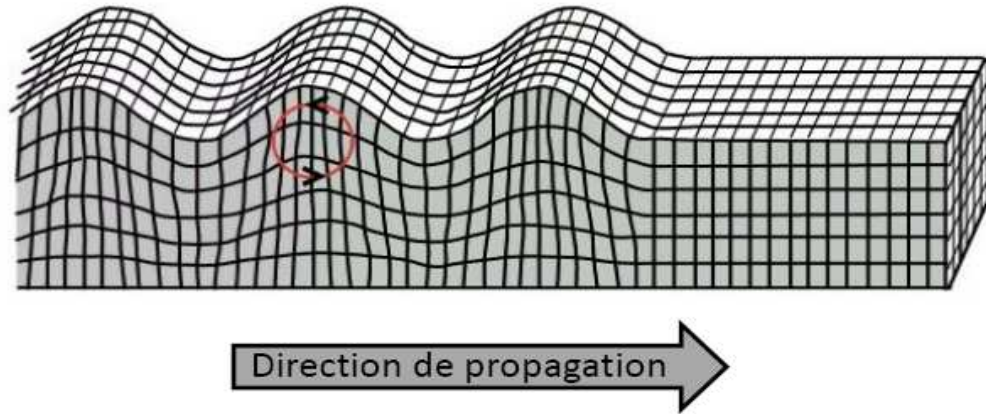


Figure 1.4 : Schématisation du déplacement d'une onde de Rayleigh.

Les axes x_i sont définis tels que la surface libre soit dans le plan (x_1, x_3) et pour $x_2=0$, le solide remplit la région $x_2 \geq 0$. La surface libre du solide considéré est placée en $x_2=0$ et impose alors les conditions aux limites mécaniques (dites traction libre) suivantes :

$$T_\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 2, 4, 6 \quad \text{et} \quad x_2 = 0 \quad (1.25)$$

L'application de ces conditions aux limites mécaniques et des propriétés élastiques (intrinsèques au milieu de propagation) à l'équation de propagation 1.15 permet de déterminer le déplacement et la vitesse des ondes de Rayleigh, notée V_R . On montre alors que cette vitesse est invariante par rapport à la fréquence de l'onde, et ne dépend que des propriétés élastiques du milieu solide (et donc de la direction de propagation dans le cas d'un solide anisotrope). Les ondes de Rayleigh sont donc non dispersives : $k = \omega/V_R$.

1.4.2.2. Ondes de Lamb

Lorsque la longueur d'onde de l'onde élastique devient comparable à l'épaisseur du substrat de propagation, celui-ci se comporte comme un guide d'onde. Si le milieu est limité par deux surfaces libres parallèles, on constate, entre autres, la formation d'ondes de Lamb (nommées ainsi en hommage à l'importante contribution d'Horace Lamb). On peut concevoir certains de ces modes de Lamb comme deux modes de Rayleigh se propageant chacune sur une des surfaces. La distance entre les deux surfaces étant de l'ordre de la longueur d'onde, on assiste à un couplage des ondes de surface donnant naissance à des déformations symétriques ou antisymétriques de la plaque : les ondes de Lamb. Ces ondes dispersives peuvent ainsi mettre en mouvement la totalité de la plaque.

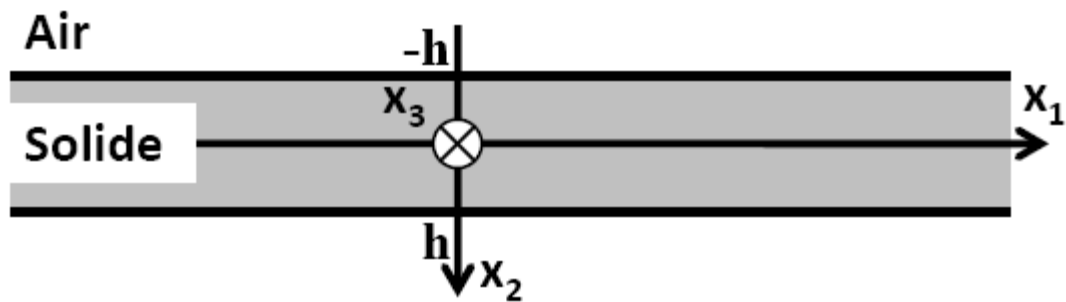


Figure 1.5 : Schématisation des axes x_i par rapport aux deux surfaces libres d'une plaque d'épaisseur $2h$.

1.4.2.3. Ondes de Love

Une plaque d'épaisseur de l'ordre de la longueur d'onde reposant sur une couche semi-infinie (cas, par exemple, d'une couche sur un substrat) autorise le guidage partiel de plusieurs modes qui sont évanescents dans le substrat. On parle alors d'ondes de Love, découvertes en 1911 par Augustus Love. La vitesse de propagation de cette onde est comprise entre les vitesses transverses des deux milieux. Les ondes de Love ne peuvent d'ailleurs exister sans pertes que si la vitesse transverse du substrat est supérieure à celle de la couche. La profondeur de pénétration de l'onde augmente avec l'ordre du mode à fréquence donnée et décroît avec la fréquence pour un mode fixé. On peut parler de conditions de rayonnement et de fréquences de coupure qui vont définir la zone de fonctionnement dans laquelle une onde peut être considérée comme guidée.

1.5. Ondes élastiques en milieu périodique : les cristaux phononiques (CP)

Lors du paragraphe précédent, nous avons vu la manière avec laquelle une onde élastique se propage dans un solide homogène. Que devient cette propagation dès lors que cette même onde élastique se propage dans un solide hétérogène organisé (périodique) ? Ce paragraphe mettra en évidence l'influence des cristaux phononiques sur la propagation des ondes élastiques.

1.5.1. Cristaux phononiques

Les cristaux phononiques sont des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale dans une ou plusieurs directions de l'espace figure (1.6). En tant que tels, ils sont capables de bloquer la propagation acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais des réflexions de Bragg. On parle alors de bande de fréquences interdites, que l'on abrège le plus souvent en "bande interdite".

Dans de tels milieux (*i.e.* milieux à inclusions), si les longueurs d'onde des ondes élastiques, λ s'y propageant sont très supérieures aux dimensions inter-inclusions, a , l'onde ne

peut être sensible à la présence individuelle de chaque inclusion et ne perçoit alors qu'un milieu global homogénéisable.

En revanche, les propriétés intéressantes induites par l'organisation périodique des inclusions composant les cristaux phononiques apparaissent dès lors que les longueurs d'onde des ondes élastiques qui s'y propagent sont comparables à la périodicité du milieu, soit $\lambda \approx a$. ces milieux sont donc hétérogènes vis-à-vis de la longueur d'onde. L'ensemble des diffusions multiples, induites par la présence des hétérogénéités, conduit pour certaines fréquences à l'ouverture de gap de transmission. La position et la nature des inclusions modifient la propagation des ondes par rapport à une propagation au sein du milieu matriciel (*i.e.* milieu homogène).

Les cristaux phononiques (quelque soit la nature de la matrice et des inclusions) sont donc assimilables, de par leur organisation spatiale, à des structures cristallines et agissent sur la propagation des phonons comme un potentiel périodique. Dans ce cadre, le théorème de Bloch et la théorie de Bragg généralisés sont applicables. Au lieu de fonction d'onde on parle de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et les réflexions de Bragg provoquent l'ouverture de gap en fréquence et non en énergie. Grace aux travaux de M.S.Kushwaha, en 1993, sur des structures périodiques à deux dimensions [1], le concept de cristal phononique et la bande interdite phononique apparaissent clairement. Avant cette date, l'ensemble des travaux sur les milieux composites périodiques concernent des structures à une dimension, appelés super-réseaux ou milieux stratifiés périodiquement [3, 4, 5].

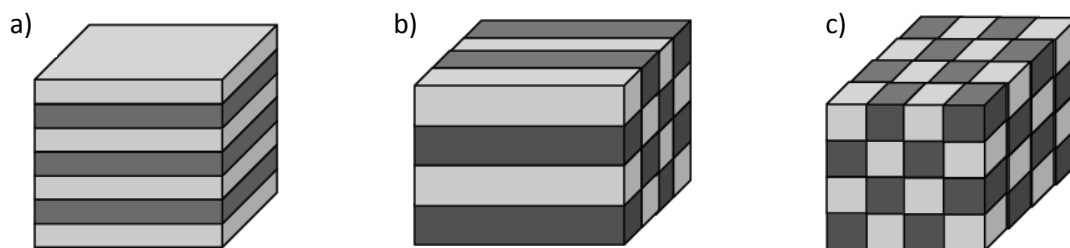


Figure 1.6 : Schéma d'un cristal phononique a) 1D, b) 2D, c) 3D.

1.5.1.1. Bref historique et contexte

En acoustique, l'intérêt pour les structures périodiques s'est manifesté à partir des années 1970 pour des raisons aussi fondamentales qu'appliquées. On peut citer par exemple les travaux de L. P. Solie sur les filtres à ondes de surface, ceux de J. D. Achenbach concernant le calcul des relations de dispersion de matériaux possédant des inclusions sphériques périodiques ou encore ceux de V. Narayanamurti relatifs à des filtres phononiques utilisant des super réseaux en AsGa [22].

Le renouveau du domaine, au début des années 1990, fait suite à l'intérêt manifesté par la communauté des opticiens pour des matériaux composites constitués d'arrangements périodiques de diffuseurs diélectriques, autrement appelés cristaux photoniques.

Initialement, les cristaux photoniques ont été conçus dans l'objectif d'interdire la désexcitation radiative d'un atome en empêchant la propagation des photons qu'il est susceptible d'émettre. En effet, l'émission spontanée des atomes est assujettie à la présence de modes électromagnétiques d'énergie égale à celle de la transition électronique. Piéger l'atome dans un milieu présentant une bande interdite photonique couvrant l'énergie de la transition devait alors garantir l'absence de désexcitation. Cette idée fut introduite par Eli Yablonovitch[30], ouvrant ainsi la voie aux premières réalisations expérimentales de cristaux photoniques. Ces dispositifs laissent entrevoir la possibilité de réaliser des composants optiques très efficaces.

Le point de départ de l'engouement pour les cristaux photoniques, postérieur à l'apparition des cristaux photoniques synthétiques, peut être fixé vers 1993. A cette date, M. S. Kushwaha publie un article présentant le calcul de la structure de bandes d'un matériau composite périodique constitué de cylindres de nickel dans une matrice d'aluminium. Il met ainsi en évidence, pour la première fois, un matériau composite présentant une bande interdite absolue pour les ondes transverses, c'est-à-dire capable de bloquer la propagation des ondes incidentes quelle que soit leur direction [22].

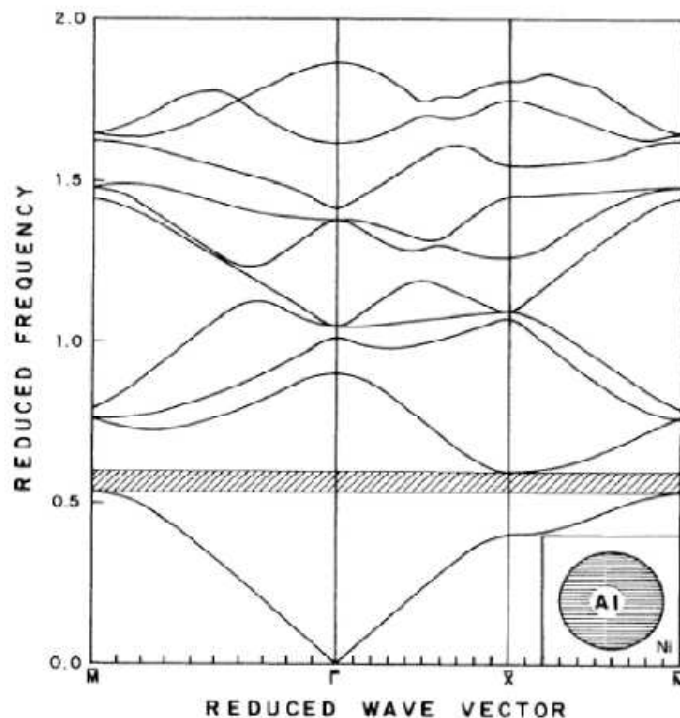


Figure 1.7 : Structure de bandes pour un cristal photonique parfait consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [22].

D'autres applications évidentes sont rapidement envisagées : systèmes d'isolation phonique, structures antisismiques, filtrage et traitement du signal acoustique, etc

On doit la généralisation de ces outils théoriques à Economou et Sigalas[2]. Si ces derniers ont restreint leurs travaux à un cas isotrope, un système tridimensionnel sans hypothèse préalable de découplage entre ondes longitudinales et transverses est étudié. Ils établissent avec Kushwaha et Halevi [1] quelques règles de base pour le dimensionnement de structures bidimensionnelles à bandes interdites complètes :

- a. la topologie de réseau la plus favorable à l'ouverture de bandes interdites complètes est donnée comme étant la topologie dite cermet (une contraction céramique-métal, en référence au matériau composite éponyme), dans laquelle chaque inclusion est isolée. La vitesse de l'onde dans le matériau constituant l'inclusion doit être inférieure à celle dans le matériau constituant la matrice.
- b. les structures de type diamant ou CFC sont préférables, la seconde se révélant encore plus concluante.
- c. le contraste de vitesses entre matrice et inclusion doit être élevé.
- d. le rapport entre les vitesses transverses et longitudinales pour les deux matériaux doit être le plus faible possible.

Du point de vue expérimental, les cristaux phononiques bénéficient en revanche d'un avantage considérable par rapport à leurs homologues optiques. Les ondes élastiques existent en effet sur une très large gamme de fréquence s'étendant du Hertz, dans le cas des ondes sismiques, au giga Hertz, comme dans les réseaux de télécommunication sans fil.

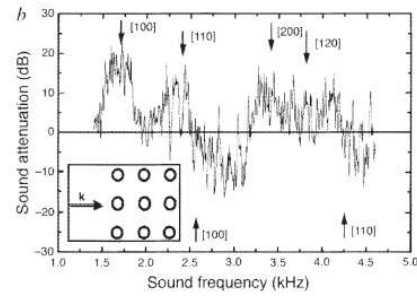
Les dimensions du cristal étant directement dépendantes de la longueur d'onde de travail, l'intégralité des effets de bandes interdites peut être démontrée sur des structures de dimensions macroscopiques et donc aisément réalisables. Les cristaux phononiques sont donc partiellement adaptés à la modélisation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents [23].

L'avantage des cristaux phononiques sur leurs homologues optiques apparaît tout d'abord à la fabrication : la structuration a lieu à des échelles macroscopiques, en rapport avec la longueur d'onde atténuée, donc aisément contrôlable.

Les premières mesures ont été réalisées sur une structure objectivement non prévue pour cela, puisqu'il s'agit d'une sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid. Cette sculpture (figure 1.8), constituée de cylindres d'acier de 2,9 cm de diamètre répartis selon un réseau carré simple de pas 10 cm, présente des atténuations marquées à 1,7 et 2,4 kHz, reliées à la diffraction sur les plans cristallographiques [22].



(a.)



(b.)

Figure 1.8 : Sculpture d'Eusébio Sempere : cylindres d'acier de 2.9 cm de diamètre, espacés périodiquement de 10 cm suivant un réseau carré, et présentant des bandes interdites pour les ondes sonores (ex : forte atténuation du signal entre 1.7 et 2.4 KHz).

1.5.1.2. Conséquence de la périodicité : Théorème de Bloch

a. Electron et cristal électronique

En 1928, dans sa thèse, Félix Bloch a expliqué de quelle manière le mouvement des électrons dans un cristal est affecté par la périodicité d'un milieu cristallin : « ... j'ai trouvé, à mon propre émerveillement, que l'onde des électrons différait des ondes planes des électrons libres seulement par une modulation périodique. Ceci était tellement simple que je ne pensais pas que ça pouvait être une découverte, mais quand je l'ai montré à Heisenberg, il a dit tout de suite : C'est ça ! » [6].

A une position quelconque, r , le potentiel $U(r)$ de même périodicité que le réseau Bravais donné est donc défini tel que :

$$U(r+R) = U(r), \quad (1.26)$$

Pour tout vecteur R du réseau de Bravais.

Pour un cristal électronique le **théorème de Bloch** peut être énoncé comme suit :

Les états propres de l'hamiltonien sont choisis de telle manière qu'à chaque ψ soit associé un vecteur d'onde $\mathbf{K}$ quelconque du réseau tel que :

$$\Psi(r+R) = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \psi(r) \quad (1.27)$$

Pour tout $\mathbf{R}$ appartenant au réseau de Bravais considéré [7].

Ainsi, le vecteur de propagation $\mathbf{K}$ qui apparaît dans le théorème de Bloch peut toujours être limité à la première zone de Brillouin (définie par le vecteur du réseau réciproque $\mathbf{G}$, tel que : $\mathbf{K} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{G}$, avec $\mathbf{n}$ un entier relatif), ainsi tout vecteur $\mathbf{K}'$ n'appartenant pas à la première zone de Brillouin peut s'écrire :

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{\text{red}} + \mathbf{K} \quad (1.28)$$

Où $\mathbf{K}$ est un vecteur du réseau réciproque et $\mathbf{K}_{\text{red}}$ le vecteur réduit dans la première zone de Brillouin. La première zone de Brillouin (voir même la demi-zone de Brillouin) contient l'intégralité de l'information relative à la propagation dans le cristal.

b. Phonons et cristal phononique

Le théorème de Bloch, initialement prévu dans le cadre de cristaux électroniques peut être généralisé à toute « particules » ou « quasi-particules », telles que les phonons, plongées dans un potentiel périodique, et dont l'échelle de la périodicité du réseau est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des ondes des particules ou des quasi-particules mises en jeu. Le déplacement associé à une onde élastique dans un cristal phononique, à une position $\mathbf{r}$ quelconque, peut se mettre sous la forme :

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r} + \mathbf{R}), \quad (1.29)$$

Pour tout vecteur $\mathbf{R}$ du réseau direct du cristal phononique.

1.5.1.3. Structures de bandes et bandes interdites phononiques

Dans les études qui traitent la propagation des ondes dans un milieu quelconque, l'objectif est de cerner le comportement de celles-ci en termes de relation entre la fréquence et le vecteur d'onde en fonction des autres paramètres liés au milieu de la propagation. Cette relation est appelée relation de dispersion. Dans un milieu élastique homogène, par exemple, cette relation peut être simple et linéaire : $\omega(k) = V \cdot k$, V représentant la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu, qui dépend directement des propriétés élastiques et de la densité de ce dernier; dans ce cas, nous ne sommes pas en présence de dispersion de l'onde. Cette dernière a lieu quand la relation entre la fréquence et le vecteur d'onde devient plus complexe, où la vitesse de phase et celle de groupe peuvent être distinguées.

Afin de comprendre les comportements des ondes élastiques/acoustiques dans les milieux périodiques, les chercheurs se sont depuis toujours intéressés à calculer les relations de dispersion, qu'ils représentent sous forme de courbes reliant la fréquence au vecteur d'onde suivant différentes directions de propagation. Cette forme de visualisation du comportement dispersif est appelée **structure de bandes phononiques**. En effet, en exploitant la périodicité élastique du CP, le théorème de Bloch précise que chaque onde solution qui se propage dans le CP, est le produit d'une onde plane et d'une fonction périodique. Le calcul de la structure de bande se limite donc à une zone réduite de l'espace des vecteurs d'onde : une cellule de périodicité appelée zone de Brillouin comme dans le cas des états d'énergies électroniques dans une structure cristalline périodique d'un matériau. Ainsi, la structure de bandes phononiques présente les différents modes de propagation possibles des ondes élastiques qui diffusent dans le CP.

La principale propriété remarquable qu'offrent les CP est la possibilité de création de bandes interdites au niveau de la structure de bande. Une bande interdite se présente dans ce cas sous forme d'un intervalle de fréquences où aucun lien n'est défini entre la fréquence et le vecteur d'onde. La figure (1.9) présente un exemple [15] de structure de bande phononique pour un CP bidimensionnel à ondes de Lamb constitué d'un arrangement carré périodique d'inclusions cylindriques en or dans une plaque d'époxy d'épaisseur $e = 0.25a$, a étant la périodicité de la structure. Cette structure de bande est calculée puis représentée suivant les

trois directions de propagation ΓX , XM et $M\Gamma$, axes principaux de symétrie de la première zone de Brillouin, déterminés par le vecteur d'onde $\vec{k}$

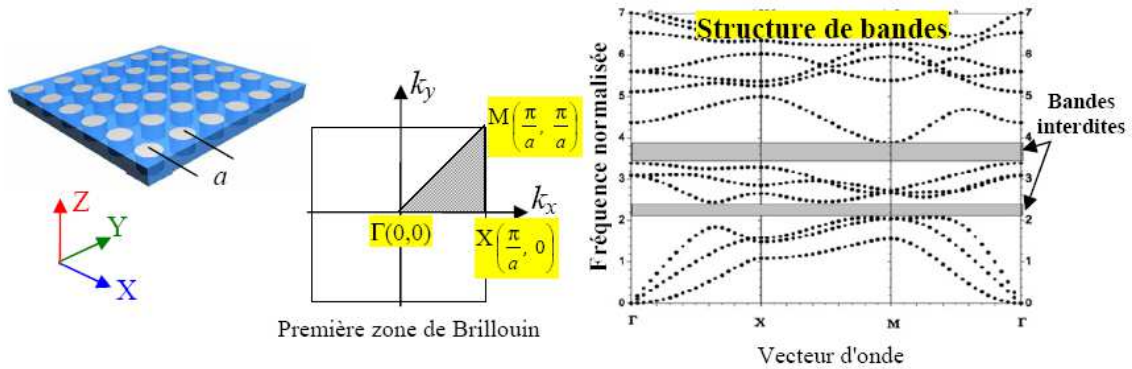


Figure 1.9 : Exemple de calcul de structure de bandes aux axes principaux de symétrie de la première zone de Brillouin pour un CP à ondes de Lamb [15].

a. Ouverture des bandes interdites par diffusion de Bragg

Les premières études menées sur les systèmes phononiques ont permis de mettre en évidence le mécanisme responsable de la création des bandes interdites, à savoir la diffusion de Bragg. Tamura *et al* [16] étaient parmi les premiers à étudier en détail le mécanisme de réflexion de Bragg dans un CP unidimensionnel. Ils ont ainsi montré la possibilité d'avoir un CP se comportant comme une barrière pour les modes longitudinaux et transverses dans des intervalles de fréquences bien déterminés dans toute la première zone irréductible de Brillouin.

De plus, ils ont mis en évidence une forte atténuation des ondes à ces intervalles lors de leur transmission dans le CP. Par la suite, d'innombrables travaux se sont attelés à étudier l'ouverture de bandes interdites par le mécanisme de Bragg dans différents systèmes phononiques, tout en explorant l'influence des paramètres géométriques et physiques sur le comportement de ces bandes prohibant toute propagation. Ainsi, et de manière générale, il est bien établi que ce type de bandes interdites dépend fortement de la périodicité et de la symétrie du CP. En outre, les ondes ayant leur fréquence dans la bande interdite ont une longueur d'onde de l'ordre de la périodicité de la structure phononique. Enfin, le CP adopte le même comportement dispersif indépendamment de sa périodicité, et les fréquences d'ouverture des bandes interdites sont inversement proportionnelles à la périodicité de la structure phononique [14].

Cependant, et dans certains CP spécifiques, la création de la bande interdite peut être causée par un tout autre mécanisme qui a été mis en évidence par Liu *et al* [17] en 2000, à savoir le mécanisme de la résonance locale. Ces systèmes périodiques sont dans ce cas appelés cristaux phononiques à résonance locale (CPRL). La deuxième partie de ce chapitre y sera consacrée.

b. Ouverture des bandes interdites par résonance locale

Dans le CP conçu par Liu *et al*[17], les éléments de périodicité sont constitués de résonateurs ayant des modes de résonance propres qui se situent à de très basses fréquences en raison de l'utilisation d'un matériau très mou. Chaque résonateur est constitué d'un cœur massif en plomb enrobé par un élastomère élastiquement très mou, comparé aux autres matériaux constituant le CP. Ces résonateurs sont arrangés périodiquement suivant une structure cubique simple dans une matrice en époxy (figure 1.10).

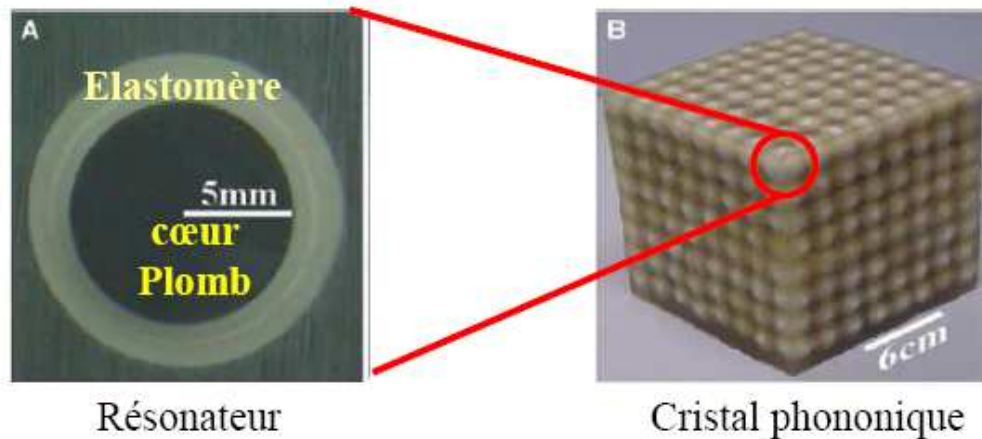


Figure 1.10 : (A) Résonateur sphérique constitué d'un cœur en plomb enrobé par un élastomère très mou. (B) Cristal phononique tridimensionnel à résonance locale [17].

L'ensemble élastomère-plomb se comporte comme un système de ressort lié à une masse, formant ainsi un résonateur ayant des modes de résonance propres à de très basses fréquences. Le principe d'ouverture des bandes interdites dans ce type de structures repose sur le couplage entre les modes de résonance des résonateurs (modes localisés) et les modes de volume qui se propagent dans le CP. Lorsqu'une onde élastique se propage dans le milieu phononique avec une fréquence qui correspond à la fréquence de résonateurs, ces derniers entrent en interaction avec elle. Sous certaines conditions, ce couplage entraîne l'atténuation de l'onde. Ce mécanisme de résonance permet ainsi la création de bandes interdites localisées en très basses fréquences, là où les longueurs d'ondes dans l'époxy (la matrice) dépassent de loin la périodicité du CP. Dans la structure de la figure 1.10, Liu *et al* [17] ont pu mesurer la transmission sonore dans le cristal en utilisant une source émettrice de sons et des microphones détecteurs placés sur le cristal. Des atténuations de l'onde acoustique ont pu être détectées au niveau des bandes interdites à environ 380 et 1350Hz où la longueur d'onde des ondes longitudinales dans l'époxy compte 300 fois la périodicité de la structure (Figure 1.11).

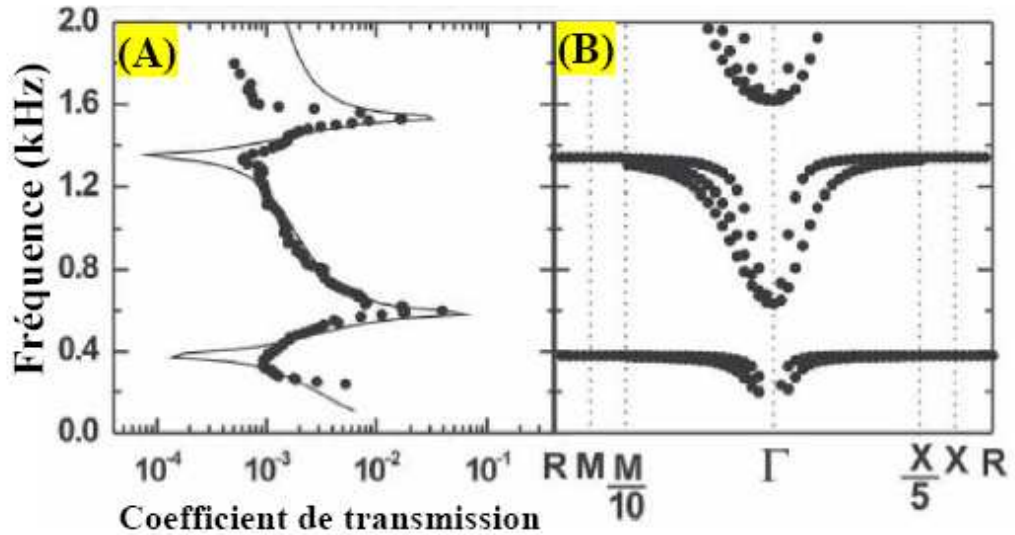


Figure 1.11: Coefficient de transmission (A) mesuré dans le CP de la figure 1.10 ainsi que la structure de bandes calculée (B) [17].

D'autres travaux, essentiellement théoriques, ont porté ensuite sur les CPRL en élaborant d'autres structures tridimensionnelles. De même, des systèmes bidimensionnels à base d'inclusions de cylindres ont fait l'objet de plusieurs études pour la RL [18], sans oublier les CPRL sous forme de plaques pour les ondes de Lamb [19, 20]. L'ouverture de la bande interdite par RL a même été mise en évidence dans une structure unidimensionnelle simple par Wang *et al* [21].

1.5.1.4. Propriétés des CPRL

Depuis la mise en évidence de la possibilité d'ouverture des bandes interdites par le mécanisme de la résonance locale, les travaux sur ces structures à RL se sont multipliés, mettant en valeur leurs propriétés particulières et permettant de mieux comprendre leurs comportements vibratoires. Ainsi, d'autres travaux théoriques ont vu le jour concernant de nouveaux CPRL constitués d'arrangements de résonateurs en configuration cubique simple ou cubique à faces centrée. La condition d'ouverture de la bande interdite dans ce cas repose essentiellement sur un choix judicieux des matériaux constituant les résonateurs. En effet, ces derniers doivent contenir un matériau élastiquement très mou, comparé aux autres matériaux de la structure. Ainsi, dans une autre étude, Liu *et al* [24] comparent deux CP, le premier constitué de résonateurs à base de plomb enrobés d'un élastomère très mou et incorporés dans une matrice en silicium, et le deuxième à résonateurs en plomb enrobés d'un matériau aux propriétés élastiques très proches et incorporés dans la même matrice en silicium. Ils ont montré qu'avec le premier système, ils obtiennent des modes de vibration très localisés au niveau des résonateurs, ce qui génère des bandes interdites complètes aux fréquences de résonance qui sont très basses. Quant au deuxième CP, où les comportements élastiques des matériaux sont très proches, aucune résonance n'y est localisée, et la bande interdite créée est

due au mécanisme de la diffusion de Bragg. De ce fait, les bandes interdites créées par le mécanisme de RL dépendent essentiellement des modes de résonance très localisés des résonateurs. Cet effet est très visible au niveau de la structure de bande des CPRL où nous pouvons remarquer la présence de modes plats (figure 1.11. (B)) dans lesquels la fréquence ne dépend pratiquement pas du vecteur d'onde. Ceci implique une vitesse de groupe nulle pour ces modes, qui caractérise leur aspect ondulatoire très localisé dans le CP.

Par ailleurs, ce type de bandes interdites ne dépend ni de la périodicité ni de la symétrie du CP. En effet, et à titre d'exemple, nous pouvons citer les travaux de P. Sheng *et al* [25]. Ces derniers ont étudié une structure à RL où les résonateurs, constitués d'un cœur en plomb enrobé par un élastomère, sont arrangés de manière à ne pas respecter une quelconque périodicité. Ils ont montré que leur structure présente une atténuation d'ondes à environ 400Hz. Ce résultat a été obtenu aussi avec un CPRL semblable, mais avec un arrangement périodique en cubique simple des résonateurs. Cette indépendance de la bande interdite de la symétrie et de la périodicité est valable sous condition que les résonateurs soient suffisamment espacés entre eux pour que leurs modes de résonance n'entrent pas en interaction et éviter ainsi tout couplage en eux.

Finalement, les CPRL adoptent un comportement qui a tant attiré et attire encore les chercheurs puisqu'ils peuvent se comporter sous certaines configurations et conditions comme des milieux ayant une constante élastique et/ou une densité effectives négatives, qu'on notera respectivement k_{eff} et ρ_{eff} . Ce comportement a été souligné par Liu *et al* [26] dans leur structure présentée dans la figure (1.10), qui s'intègre donc dans la classe des méta-matériaux acoustiques.

1.6. Conclusion

La principale propriété des CP, qui a tant passionné les chercheurs, est leur capacité dispersive remarquable pour les ondes acoustiques/élastiques, pouvant donner lieu à des bandes interdites phononiques. Ces intervalles de fréquences où le CP adopte un comportement de « barrière » pour les ondes, offrent des solutions très convoitées en matière d'applications. Ces dernières concernent essentiellement deux axes :

- Les applications hautes fréquences, par le biais de la conception de dispositifs phononiques miniaturisés pour des fins d'utilisation dans le domaine des nano et microstructures: filtrage, guidage, capteurs... etc. Les bandes interdites utilisées dans ce cas peuvent être de différentes origines.
- Les applications basses fréquences pour l'isolation sonore, isolation sismique, invisibilité acoustique etc. Ce genre d'applications nécessite donc la présence des cristaux phononiques à résonance locale acoustiques qui offrent la possibilité d'atténuation de l'onde par le mécanisme de résonance locale.

Chapitre 2

Application du concept des réseaux périodiques dans le domaine du génie sismique

2.1. Introduction

Les tremblements de terre représentent des sources très énergétiques (un gros séisme libère une énergie qui peut être de l'ordre de grandeur au-delà de celle des plus importantes explosions nucléaires) et les mouvements associés aux ondes élastiques peuvent être mesurés à la surface. Les plus gros tremblements de Terre excitent un spectre très large de vibrations allant de $3 \cdot 10^{-4}$ à 20 Hz. Dans cette gamme de fréquence, on distingue classiquement les ondes longue période de fréquence inférieure à 0,1 Hz et les ondes courte période de fréquence supérieure à 1 Hz. Ce domaine fréquentiel coïncide avec celui des ouvrages de génie civil et rend les ondes sismiques l'un des risques naturels causant le plus de dégâts.

Ainsi, ce chapitre a pour but, en premier lieu de mettre en évidence le caractère vibratoire de l'événement sismique dans le contexte du phénomène des bandes interdites (réseaux périodiques), et en second lieu de donner un aperçu sur les travaux de recherche ayant traité l'application du concept des réseaux périodiques dans l'isolation sismique.

2.2. Les ondes sismiques

Les **ondes sismiques** sont des ondes élastiques qui peuvent traverser un milieu en le modifiant selon la magnitude du séisme. L'impulsion de départ provoque un déplacement minime de chaque particule minérale qui oscille autour de sa position d'équilibre avant de transmettre l'énergie (mouvement) de proche en proche à la particule voisine sur de très longues distances.

Les vibrations lors d'un séisme se propagent dans toutes les directions. On distingue deux types d'ondes, les ondes de volume qui traversent la terre et les ondes de surface qui se propagent à sa surface. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques traversées [35].

2.2.1. Ondes de volume

Elles se propagent dans la masse terrestre depuis la source. Lorsqu'elles arrivent à la surface elles provoquent les déformations des constructions sous l'effet des forces d'inertie. Leur vitesse de propagation dépend du matériau traversé et, d'une manière générale, cette dernière augmente avec la profondeur car le matériau traversé devient plus dense.

En 1899 les ondes P et S sont identifiées comme des ondes de compression/dilatation et de cisaillement par R.D Oldham et W. Wiechert.

- Les ondes P (Primaires) appelées aussi ondes de compression ou ondes longitudinales. Le déplacement du sol qui accompagne leur passage se fait par des dilatations et des compressions successives. Ces déplacements du sol sont parallèles à la direction de propagation de l'onde. Ce sont les plus rapides ($6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ près de la surface) et donc les premières à être enregistrées sur les sismogrammes. Elles sont responsables du

grondement sourd que l'on peut entendre au début d'un tremblement de terre[36].

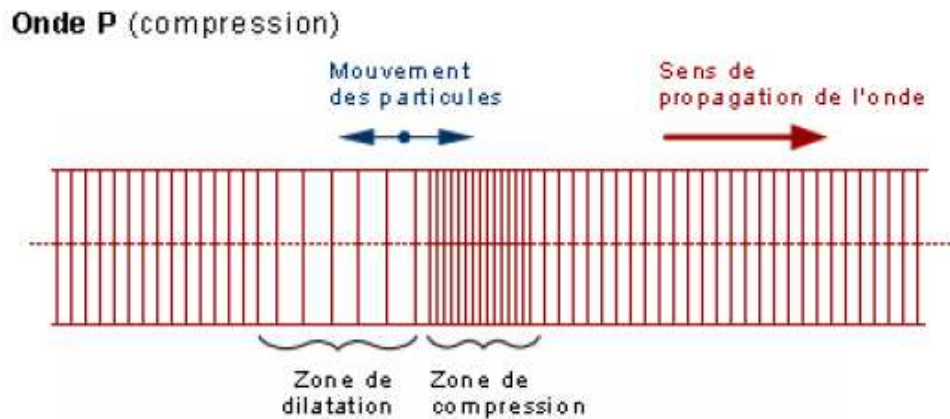


Figure 2.1 : Représentation schématique des ondes P [37].

- Les ondes S (Secondaires) qui progressent en cisillant le sol perpendiculairement à leur sens de cheminement. Elles secouent les bâtiments horizontalement dans tous les sens. Ces ondes ne se propagent pas dans les milieux liquides, leur vitesse est de 4,06 km/s. Elles apparaissent en second sur les sismogrammes.

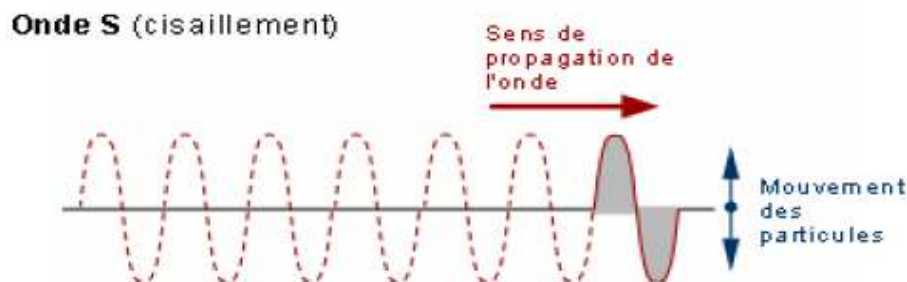


Figure 2.2 : Représentation schématique des ondes S [37].

2.2.2. Ondes de surface

Ce sont des ondes guidées par la surface de la terre. Leur effet est comparable aux rides formées à la surface d'un lac. Elles sont moins rapides que les ondes de volume mais leur amplitude est généralement plus forte. Ces ondes sont dispersives.

On peut distinguer :

2.2.2.1. L'onde de Love L ou L_Q :

Elles déplacent le sol d'un côté à l'autre dans un plan horizontal perpendiculairement à sa direction de propagation. Le déplacement est essentiellement le même que celui des ondes S sans mouvement vertical. On les enregistre uniquement sur les composantes horizontales du sismomètre.

Les ondes de Love provoquent un ébranlement horizontal qui est la cause de nombreux dégâts aux fondations des édifices.

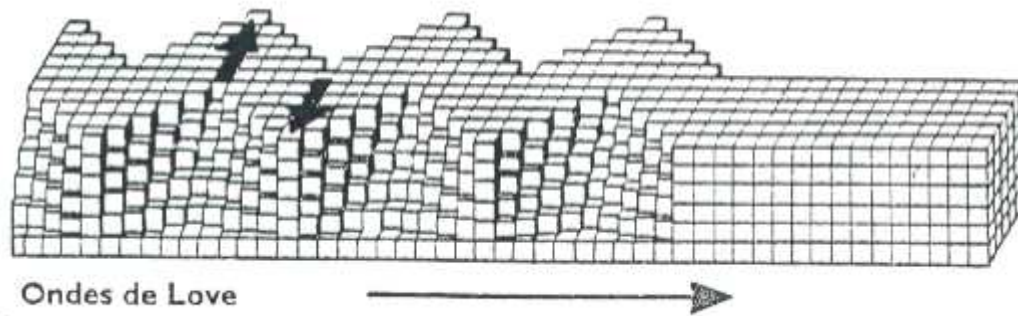


Figure 2.3 : Représentation schématique des ondes L [35].

2.2.2.2. L'onde de Rayleigh ou L_R :

Le déplacement est complexe, assez semblable à celui d'une poussière portée par une vague, un mouvement elliptique à la fois horizontal et vertical. Les vibrations engendrées par cette onde durent plusieurs minutes. Cette onde est enregistrée sur les trois composantes du sismomètre.

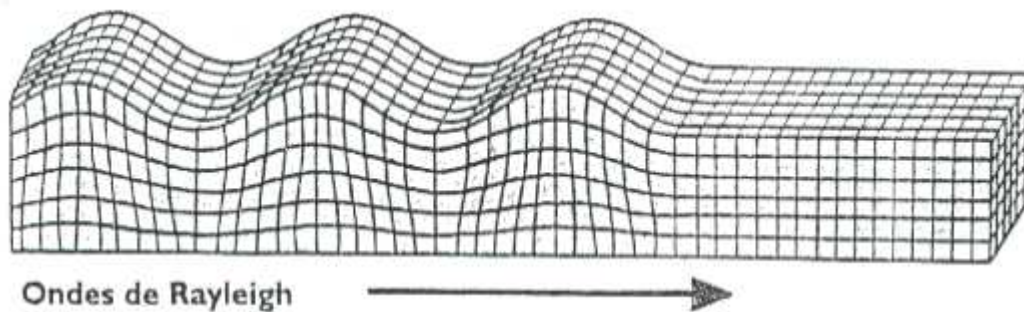


Figure 2.4 : Représentation schématique des ondes LR [35].

2.3. Application du concept des réseaux périodiques dans l'isolation sismique

Le concept de cristal phononique, c'est-à-dire de matériau composite périodique bi- ou tridimensionnel permettant l'ouverture de bandes interdites pour les ondes élastiques, a été introduit de façon quasiment simultanée par Kushwaha et al [1] d'une part, et Economou et Sigalas [33] d'autre part en 1993. Pour ces auteurs, si la seule mise en évidence des propriétés liées à la périodicité du matériau présente un intérêt certain d'un point de vue purement fondamental, les possibilités d'applications des cristaux phononiques justifient plus encore leur étude : structures anti-vibratoires ou encore transducteurs figurent parmi les premiers systèmes évoqués.

D'autres applications évidentes sont rapidement envisagées : systèmes d'isolation phonique [34, 38], structures anti-sismiques[39], filtrage et traitement du signal acoustique, etc.

Contrairement aux autres applications, la protection sismique par le concept des réseaux périodiques nécessite de travailler dans le domaine des basses fréquences [0.1-20Hz] (Chopra 2005). Les ondes sismiques étant caractérisées par de grandes longueurs d'onde, leur atténuation par la diffusion de Bragg mènera à des dispositifs de dimensions très grandes de l'ordre du kilomètre comme mentionné pour la première fois par B. Baykant ALAGÖZ et Serkan ALAGÖZ en 2009 [31]. Ces derniers ont conçu un cristal phononique où des trous sont disposés de manière périodique dans le sol afin d'atténuer la propagation des ondes de surface. Ce concept permet de considérer le cristal comme bouclier antisismique capable de dévier, au moins en partie, des ondes dans une certaine gamme de fréquence. Il peut alors les guider de manière à ce qu'elles contournent un bâtiment, les réfléchir ou les contraindre à se focaliser sur une zone déserte.

Un test grandeur nature a pu être réalisé en fin d'année 2012 dans un chantier dans la région de Grenoble en France, où une vingtaine de trous cylindriques d'environ deux mètres de large pour quatre mètres de profondeur ont été forés de manière à former un cristal antisismique. Dans un même temps, un réseau de capteurs a été installé pour pouvoir observer les modifications de la propagation des ondes dans le sol. Enfin, pour simuler un tremblement de terre, une grue permet de lâcher une masse de 17 tonnes à proximité de la réalisation. Résultat du test, la propagation des ondes a été modifiée, et celles-ci ont été atténuées.

Dans le but de ramener les dispositifs de protection sismique à l'échelle des structures de génie civil, des études se sont basées sur des cristaux phononiques à résonance locale (CPRL). Ce concept qui repose sur la présence de diffuseurs résonants au sein d'une structure périodique permet au matériau de présenter des constantes élastiques effectives négatives dans certaines gammes de fréquences. Les CPRL permettent d'atténuer des fréquences dont la longueur d'onde est supérieure à la périodicité de la structure.

Jia Gaoffeng et Shi Zhifei en 2010 ont conçu un cristal appelé « Fondations périodique (FP) » constitué d'un arrangement périodique de diffuseurs dans une matrice de béton [13]. Ces diffuseurs constitués d'un cylindre métallique dense enrobé d'un matériau mou (élastomère). Ce dispositif, assimilé à un résonateur masse-ressort $[M, K]$, permet d'obtenir une bande interdite complète entre 6.03 et 8.73 Hz (figure 2.6.b).

En 2012, Les chercheurs [M.Brun, A.B.Movchan, I.S.Jones] ont proposé des méthodes mathématiques et des méthodes de conception appropriées pour éliminer les vibrations latérales dans les structures minces, telles qu'un pont ou un bâtiment de grande hauteur [32]. Au lieu de s'intéresser aux modes de résonance d'un corps fini mince tel qu'un pont ou bâtiment de grande hauteur (BGH), ces chercheurs [32] se sont intéressés à un guide d'onde périodique sur lequel une analyse des propriétés de dispersion des ondes de Floquet-Bloch a été effectuée.

Ces travaux mettant en évidence les avantages des cristaux phononiques dans l'isolation sismique sont cités en détail ci-dessous.

2.3.1. Isolation sismique d'un site [31]

B. Baykant ALAGÖZ et Serkan ALAGÖZ en 2009 [31] ont conçu pour la première fois un réseau de trous cylindriques vides disposés périodiquement dans une matrice de sol suivant plusieurs configurations. Ce concept permet d'atténuer ou de dévier, au moins en partie, les ondes longitudinales dans une gamme de fréquence bien précise. Leur propagation dans le sol se traduit par une série de dilatations et des compressions successives.

Une simulation « Finite Difference Time Domain » (FDTD) est introduite pour une plaque carrée de 40 km de côté constituée de sol, elle est soumise à un signal de champs de pression contenant des composantes multi-fréquentielles.

$$P_s(n) = \sin(\pi \times n) + \sin(2\pi \times n) + \sin(4\pi \times n) + \sin(6\pi \times n) + \sin(8\pi \times n) + \sin(10\pi \times n) + \sin(20\pi \times n)$$

Les graphes de pression obtenus par ces chercheurs ont permis d'apprécier l'atténuation de l'onde sismique par le système d'isolation proposé. Par contre, lorsque la longueur d'onde est très grande par rapport à la périodicité, l'onde peut se propager à l'intérieur du Crystal comme si elle se propageait dans un solide homogène.

2.3.2. Fondations périodiques [13]

Gaoffeng et Zhifei (2010) ont conçu un nouveau système d'isolation 2D appelé « fondations périodiques », il contient un arrangement périodique d'inclusions dans une matrice de béton (figure 2.5).

Les fondations périodiques 2D permettent de bloquer la propagation des ondes sismiques dans une certaine gamme de fréquence. Le modèle est supposé infini dans la direction Z, d'où l'hypothèse de l'analyse en déformations planes. Dans ce cas, seuls les modes dans le plan sont considérés, et la première bande interdite est calculée de telle manière qu'elle devienne l'objectif principal dans l'isolation sismique.

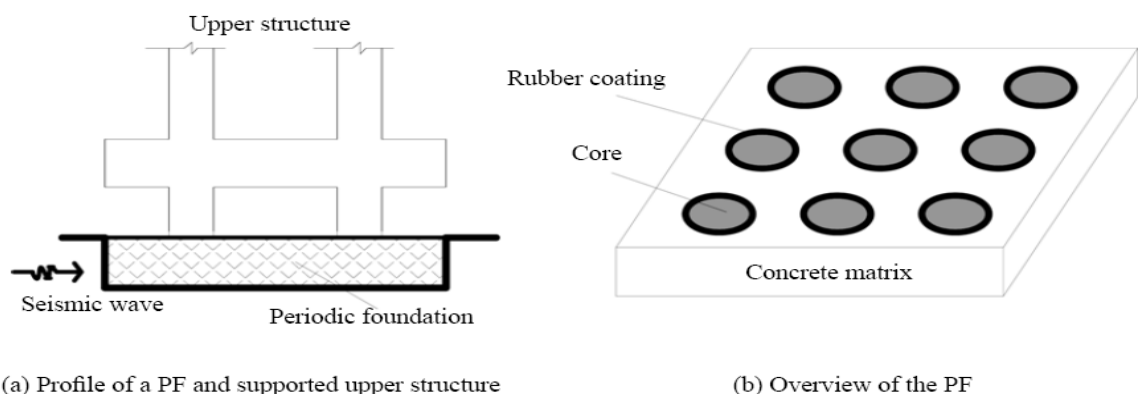


Figure 2.5: Fondations périodiques pour isolation sismique [13].

Le mode fondamental d'une structure de génie civil dont la fréquence varie habituellement entre 0.1 et 20Hz (Chopra2005), contribue largement dans la réponse de la structure proportionnellement à sa participation massique. Il devient alors évident de dimensionner la fondation de telle sorte à obtenir une bande de fréquence interdite qui couvre la fréquence de la structure afin d'éviter la résonance au cours d'un séisme.

La cellule élémentaire étudiée est constituée d'une matrice de béton de 1m de largeur contenant un cylindre en acier ($r=0.245\text{m}$) enrobé d'un élastomère d'une épaisseur de 0.245m (figure 2.6.a). La résolution aux fréquences propres du système pour les dimensions précédentes à différentes valeurs du vecteur d'onde K [K_x , K_y], permet d'obtenir une bande interdite complète entre 6.03 et 8.73 Hz, (figure 2.6.b).

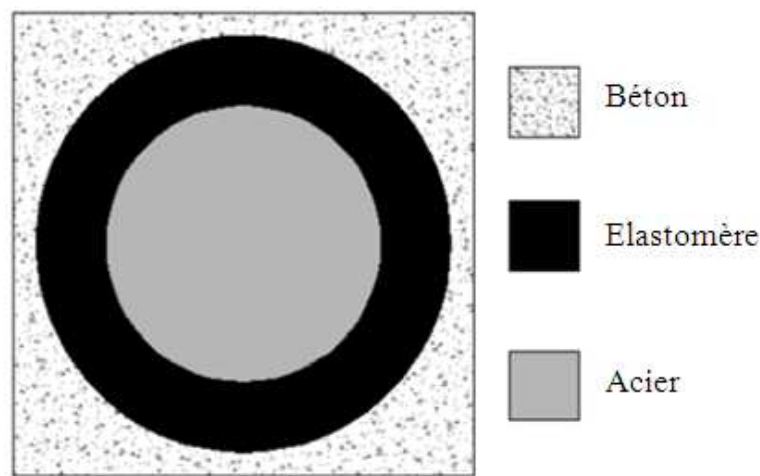


Figure 2.6.a: Configuration de la cellule élémentaire des fondations périodiques [13].

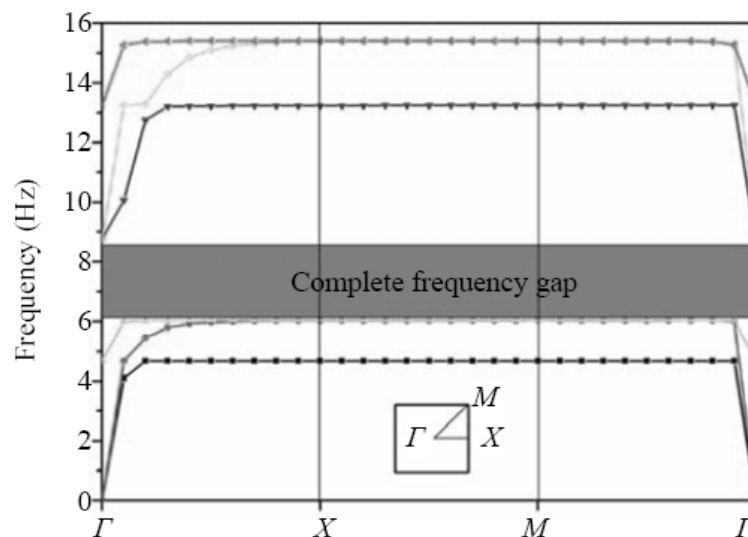


Figure 2.6.b: Courbe de dispersion [13].

Dans l'étude paramétrique de Gaoffeng et Zhifei [13], la variation de la largeur et de la position de la bande interdite est étudiée en fonction des paramètres physiques, tels que la masse volumique et le module d'élasticité, et géométriques comme la fraction de remplissage.

Lors de l'étude paramétrique la bande interdite est exprimée à travers les graphes par les caractéristiques suivantes :

- La limite inférieure de la bande interdite (LEF)
- La limite supérieure de la bande interdite (UEF)
- Largeur de la bande interdite (FGW)

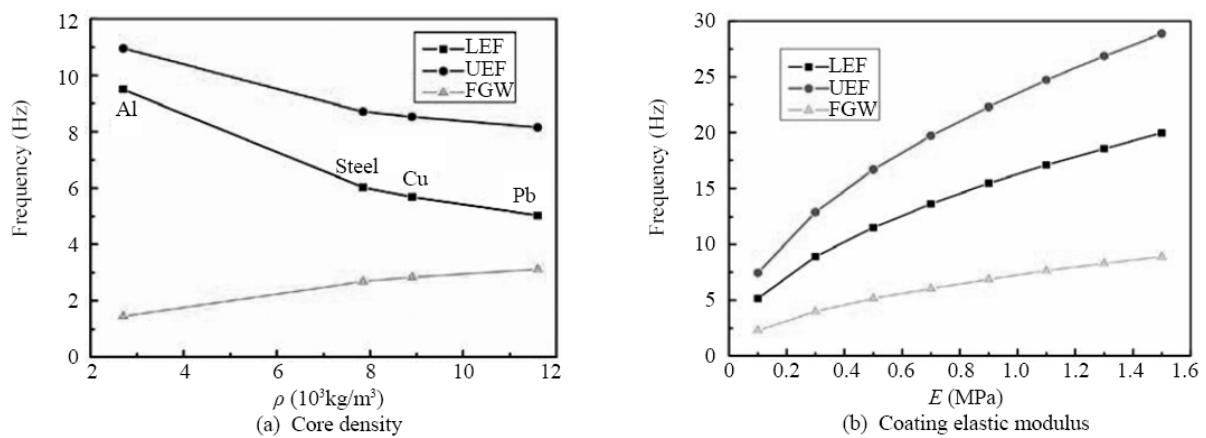
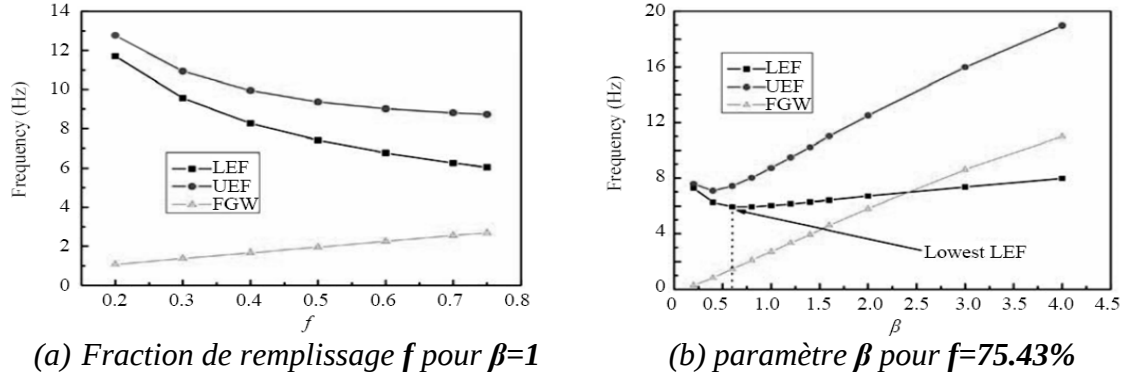


Figure 2.7 : Influence de la masse volumique du noyau (a) et du module d'élasticité de l'élastomère (b) sur la bande interdite [13].

La figure (2.7.b) montre que l'augmentation du module d'élasticité de l'élastomère engendre l'augmentation de toutes les caractéristiques de la bande interdite. Tandis que la figure (2.7.a) révèle que cette dernière est très sensible à la variation de la masse volumique du noyau. Par conséquent, les limites de la bande interdite diminuent avec l'augmentation de la masse volumique du noyau. Ainsi, pour $\rho=11600 \text{ Kg/m}^3$ « LEF » atteint 5.03 Hz.

Il est également important de noter que l'augmentation de la largeur de la bande interdite est proportionnelle à l'augmentation de la masse volumique. Cependant, lorsque le module d'élasticité de l'élastomère augmente, les caractéristiques de la bande interdite prennent des valeurs plus grandes en termes de fréquences.

Selon une étude menée par Xiao et al (2006), les modes de vibration correspondant aux fréquences LEF et UEF sont similaires à ceux d'un oscillateur masse-ressort. Dans le cas des fondations périodiques l'élastomère joue le rôle du ressort (K) et le noyau le rôle d'une masse (M). L'augmentation des fréquences LEF et UEF peut être exprimée par la relation $\omega = \sqrt{K/M}$ ce qui révèle que la variation du module de Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant le noyau a une faible influence sur les caractéristiques de la bande interdite.



(a) Fraction de remplissage f pour $\beta=1$ (b) paramètre β pour $f=75.43\%$
Figure 2.8 : Influence de la fraction de remplissage (a) et du paramètre β (b) sur la bande interdite [13].

D'un autre côté, la figure 2.8 permet de résumer les résultats de l'étude paramétrique traitant l'influence des paramètres géométriques tels que la fraction de remplissage f et le paramètre β sur les caractéristiques de la bande interdite.

La fraction de remplissage est définie comme $f = \frac{\pi \cdot R_{ext}^2}{a^2}$ et $R_{ext} = R_{noyau} + d$

Où :

R_{noyau} : le rayon du noyau

d : épaisseur de l'élastomère.

Le paramètre $\beta = R_{noyau}/d$ est défini pour étudier l'influence de la variation simultanée de la masse du noyau et de la rigidité de l'élastomère sur la bande interdite pour la même fraction de remplissage f .

A partir de la figure 2.8.a, l'augmentation de la fraction de remplissage f a une influence directe sur les caractéristiques de la bande interdite. Ainsi, les limites (LEF, UEF) diminuent, tandis que la largeur de la bande interdite augmente. Ce comportement peut être interprété par l'équation de la fréquence d'un système masse-ressort $\omega = \sqrt{K/M}$, où l'augmentation de la masse réduit la fréquence du système.

La figure 2.8.b illustre qu'en tenant tous les autres paramètres constants la valeur minimale que peut prendre la limite inférieure LEF correspond à β_{min} . Les deux bornes de la bande interdite diminuent avec l'augmentation de β jusqu'à atteindre la valeur β_{min} , au-delà de cette valeur elles augmentent. Il a été constaté à travers le calcul que β_{min} augmente simultanément avec la densité du matériau du noyau, à titre d'exemple : $\beta_{min} = 0.6$ pour l'acier, $\beta_{min} = 0.8$ pour le plomb.

Il est aussi important de noter qu'en dessous d'une valeur de $\beta=0.1$ la bande interdite se referme et le phénomène de résonance locale disparaît, dans ce cas, l'apparition d'une bande interdite se fera par le mécanisme de diffusion de Bragg dans un domaine fréquentiel plus élevé.

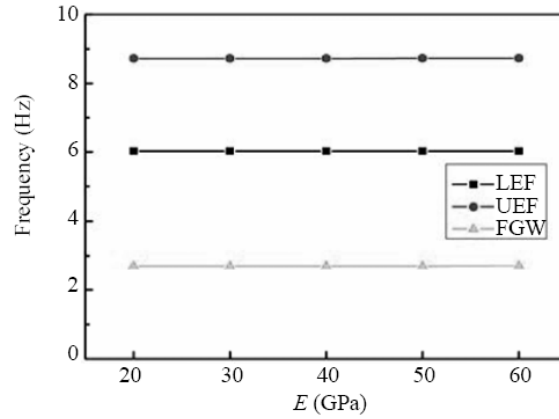


Figure 2.9 : Influence du module d'élasticité de la matrice sur la bande interdite [13].

Un autre paramètre très important ressort de la figure (2.9), la variation du module d'élasticité de la matrice n'a pratiquement aucune incidence sur la bande interdite. Par conséquent, la variation du module d'élasticité du béton entre 20 et 60 GPa recouvre pratiquement tous les types de béton.

Afin de s'assurer de l'efficacité de leur système d'isolation à la base, Gaoffeng et Zhifei [13] ont mené une étude comparative sur une structure en R+5 (Longueur : $L=4\text{m}$, Largeur : $B=4\text{m}$ et Hauteur d'étage : $H=3\text{m}$), composée essentiellement de poteaux ($60\times60\text{cm}^2$), de poutres de ($40\times60\text{ cm}^2$) et de planchers de 10 cm d'épaisseur. La fréquence fondamentale de la structure non isolée est de 2.86Hz.

La figure (2.10) illustre les trois configurations de la structure : (a) structure non isolée, (b) structure isolée par des appuis parasismiques et (c) structure isolée par des fondations périodiques.

En se basant sur les résultats de l'étude paramétrique, un modèle optimisé a été utilisé pour la protection sismique de la structure illustrée dans La figure (2.10.c). Pour ce modèle, une bande de fréquence de 2.49 à 3.72 Hz est obtenue pour une fondation périodique dont les dimensions de la cellule élémentaire sont : $a=2\text{m}$, $f=75.43\%$, $\beta=0.8$ et pour un noyau en plomb.

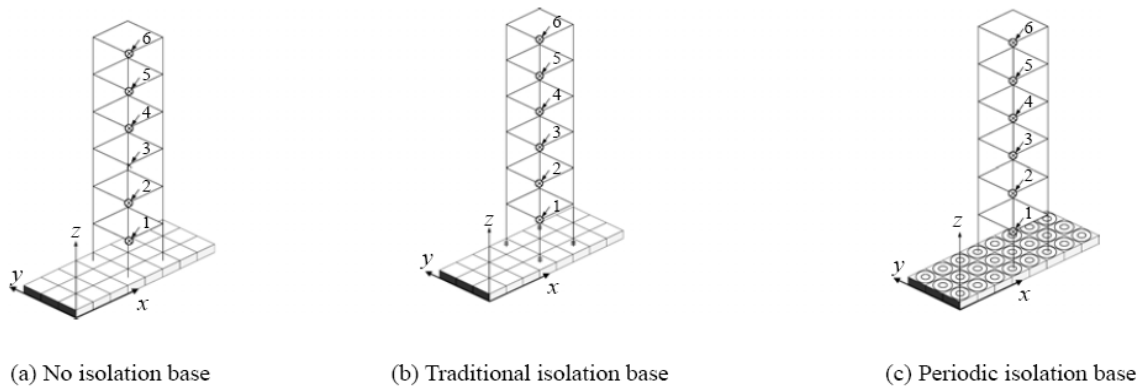


Figure 2.10: Différents types d'isolation pour une structure autostable [13].

Il a été prouvé que la fréquence fondamentale de la structure non isolée est comprise à l'intérieure de la bande interdite (2.49-3.72Hz) obtenue pour la fondation périodique 2D ci-dessus. Cependant, le modèle (c) de la figure (2.10) permet de bloquer la propagation des ondes sismiques dans l'intervalle de fréquence contenant la fréquence fondamentale de la structure, par conséquent, la résonance de cette dernière est évitée.

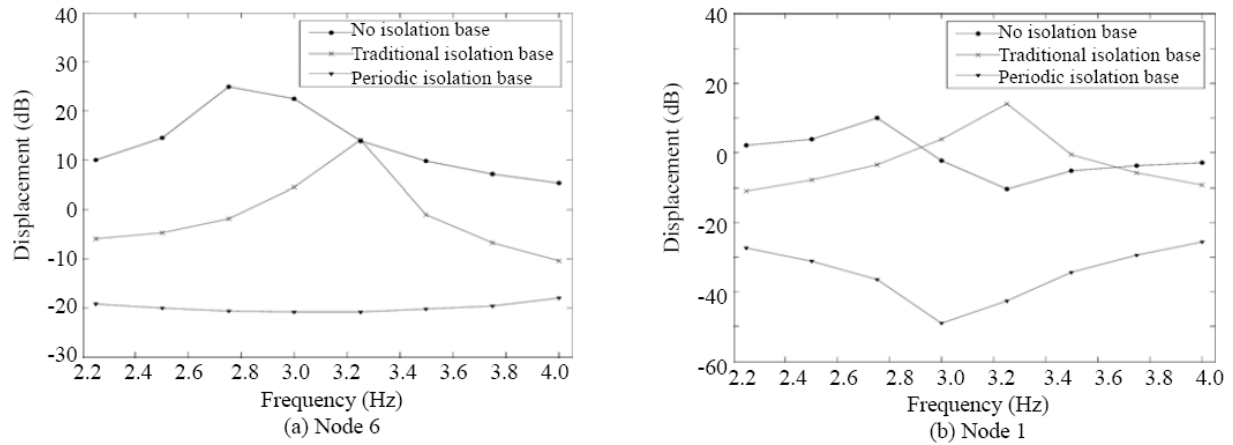


Figure 2.11 : Déplacements des nœuds 1 et 6 de la structure dans la direction x [13].

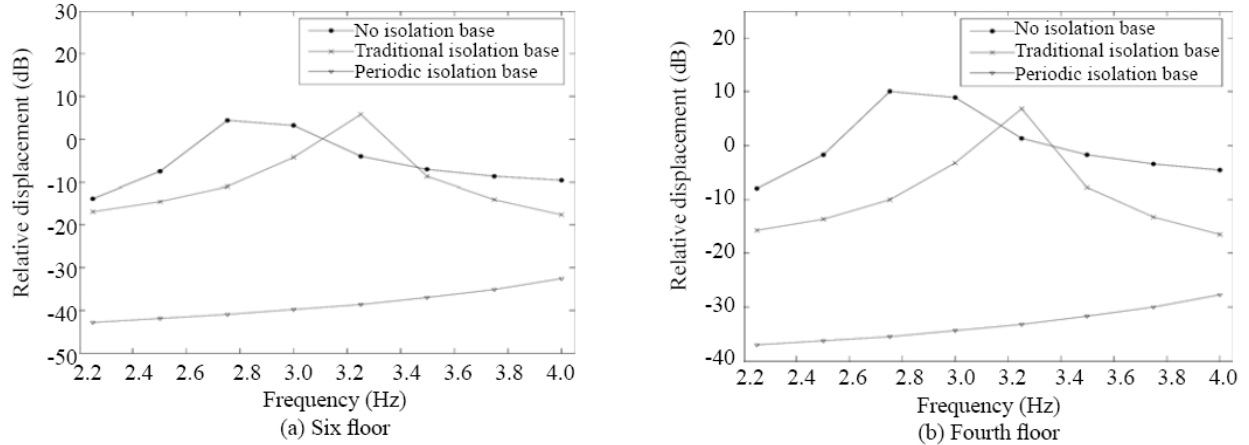


Figure 2.12 : Déplacement relatif des 4eme et 6eme planchers dans la direction x [13].

L'efficacité de ce système d'isolation apparait lorsque les nœuds de la structure à $x=0$ sont sollicités par déplacement unitaire pour différentes fréquences. La réponse dynamique de la structure en termes de déplacement u et de déplacement relatif Δu ($20\log(u)$ et $20\log(\Delta u)$) est donnée par les figures (2.11) et (2.12). Ces deux figures permettent de constater que les fondations périodiques réduisent mieux les déplacements u et Δu que le système d'isolation traditionnel.

2.3.3. Systèmes de bandes interdites phononiques dans les structures de génie civil [32]

Le pont de Volga à Volgograd inauguré en mai 2009 (figure 2.13.a), a subi des déformations importantes de flexion en Mai 2010 dues à des vibrations de résonance provoquées par des forces extérieures relativement petites (figure 2.13.b).

Dans ce contexte, des chercheurs comme M.Brun, A.B.Movchan et I.S.Jones ont proposé des méthodes mathématiques et des méthodes de conception appropriées pour éliminer les vibrations latérales dans les structures minces, comme un long pont ou un BGH.

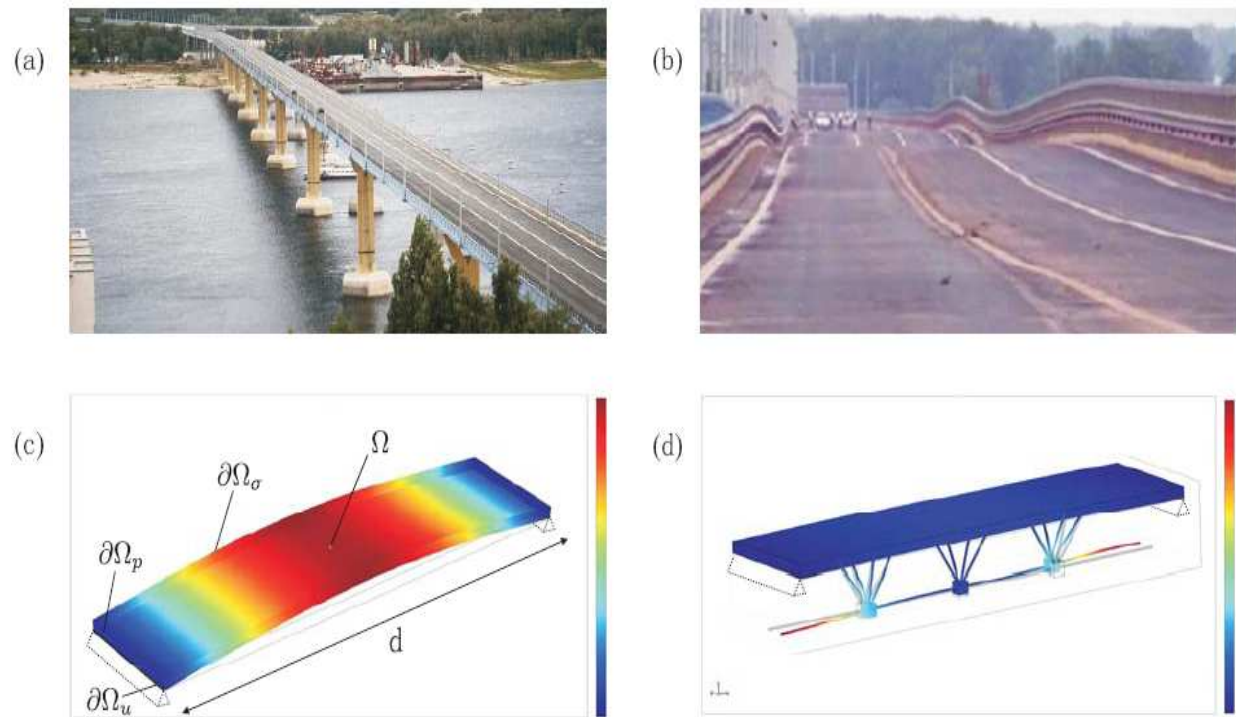


Figure 2.13 : Pont de Volga (a), (b) déformations de flexion de la plate-forme du pont, (c) modèle numérique simplifié, (d) structure 3D de guide d'ondes [32].

Dans un premier lieu, les chercheurs [M.Brun, A.B.Movchan, I.S.Jones] ont traité un guide d'onde bidimensionnel analogue au modèle de la plate-forme supérieure de la figure(2.13.c).

Cette dernière est proposée sous forme de solide élastique de faible épaisseur périodiquement appuyé, qui peut être approché dans la gamme des basses fréquences à une poutre élastique.

L'exemple illustratif simple de la figure (2.14) montre que les modes de flexion peuvent être supprimés par l'ajout d'un système de résonateurs légers périodiques. L'analyse des propriétés de dispersion des ondes élastiques permet d'optimiser le modèle et de choisir la bonne conception.

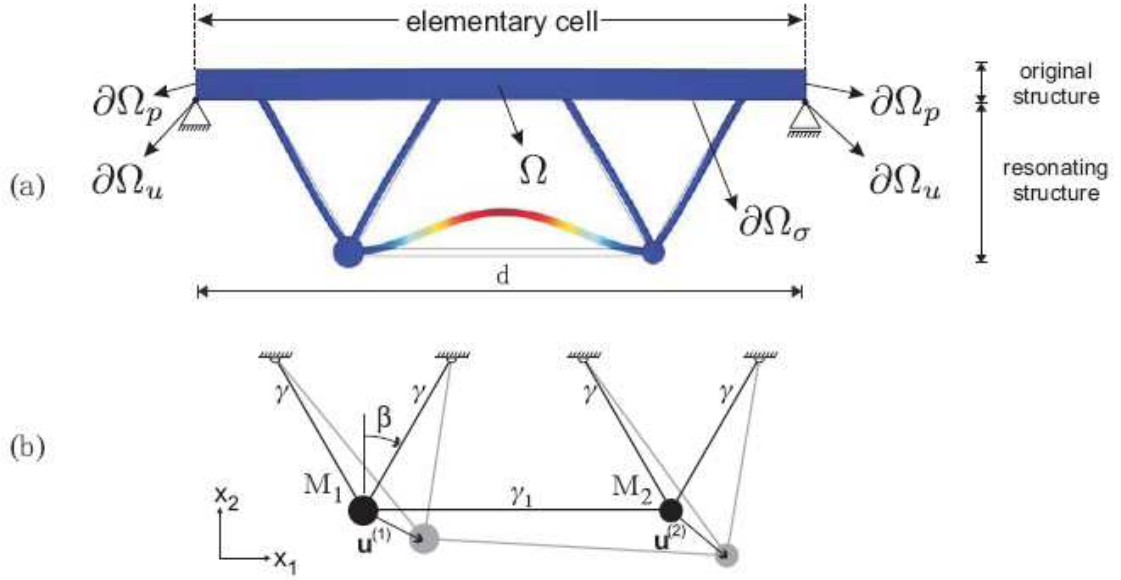


Figure 2.14: Cellule élémentaire 2D avec système de résonateurs. (a) le 1er mode propre, (b) modèle en treillis utilisé pour l'estimation analytique des fréquences propres

La courbe de dispersion du modèle représente la fréquence normalisée $F=f.d/v$ en fonction de $k.d$ tel que montré dans la figure (2.15). Où $f=\omega/2\pi$ est la fréquence du système, d : la périodicité et v est la vitesse de l'onde de cisaillement dans la plate-forme du pont.

Le mode de flexion, qui est similaire à celui représenté sur la Figure (2.13.c), correspond à $F=0,0358$. L'objectif de l'étude est d'utiliser les données du diagramme de dispersion pour optimiser le système élastique de sorte que le mode de flexion ci-dessus soit supprimé.

L'introduction des masses des résonateurs sur la structure initiale peut modifier les vibrations des ondes de flexion. De telles modifications n'entraînent aucune altération majeure sur la structure comme un changement des conditions aux limites aux bords de la plaque ou la variation de la rigidité de plate de forme.

La configuration 2D illustrée dans la figure (2.14) est composée d'un système de résonateurs fixés à la plate-forme du pont. Les masses (M_1, M_2) ainsi que les rigidités des barres élastiques (γ, γ_1) sont relativement plus faibles que ceux de la plate-forme du pont. Un choix judicieux de ces deux derniers paramètres permettra de placer la fréquence propre du système de résonateurs suffisamment proche de la fréquence fondamentale de la structure origine. Par conséquent, la résonance de cette dernière sera évitée.

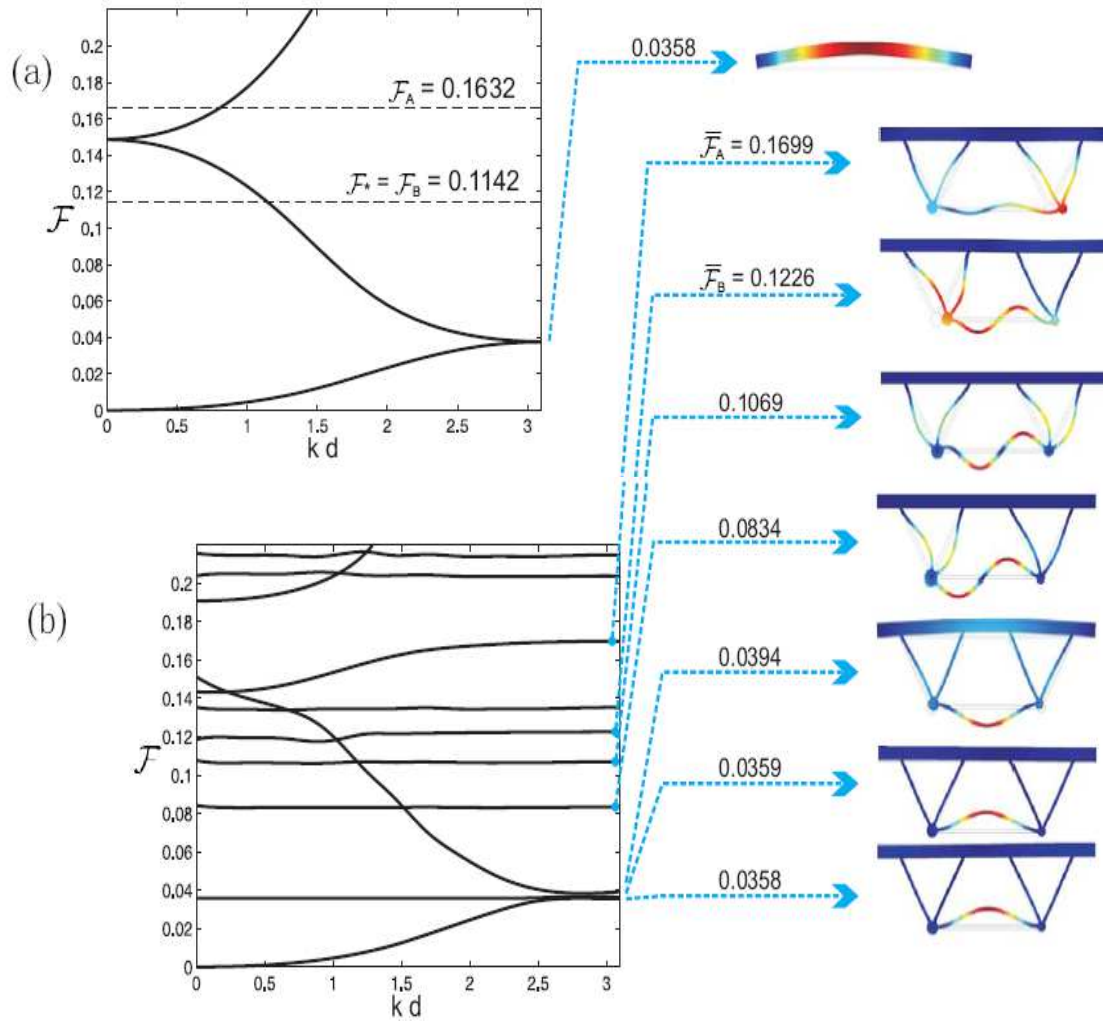


Figure 2.15 : Courbes de dispersion et les modes propres correspondant au guide d'onde structuré 2D (simulation en éléments finis COMSOL).
(a) Structure initiale. (b) structure modifiée.

L'ensemble des courbes de dispersion montrées dans la Figure (2.15.b), contient des bandes interdites où aucune propagation d'ondes élastiques n'existe. Il est à noter qu'une bande interdite autour de la fréquence normalisée $F=0.0359$ et une autre plus large à des fréquences normalisées autour de $F=0.1699$ apparaissent pour la structure modifiée.

Pour l'optimisation de la structure résonante, les chercheurs [M.Brun, A.B.Movchan, I.S.Jones] ont utilisé un modèle simplifié (figure 2.14.b) accompagné d'une simulation en éléments finis de la cellule élémentaire, dans laquelle un calcul des modes propres est établi et un diagramme de dispersion est fourni.

En supposant que la plate-forme supérieure est fixée, la plus basse fréquence propre de vibration correspondant à un mouvement de translation des masses M_1 et M_2 est donnée sous la forme analytique simple :

$$f_{A,B}^2 = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \left[\gamma_1 + 2\gamma \sin^2 \beta \pm \sqrt{\gamma_1 + 4 \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \gamma \sin^2 \beta (\gamma_1 + \gamma \sin^2 \beta)} \right]$$

Où les notations sont expliquées dans la figure (2.14.b).

Les fréquences $f_{A,B}$ ($f_A > f_B$) correspondent aux modes de translation horizontale des masses interconnectées M_1 et M_2 , tandis que f_C et f_D représentent leur mouvement vertical. La notation $f^* = \text{Min}\{f_B, f_C, f_D\}$ représente la limite supérieure de la fréquence d'un groupe d'ondes stationnaires associées à un mouvement de rotation des résonateurs et des vibrations de flexion des barres de liaison.

Certaines de ces ondes stationnaires sont représentées pour correspondre à des bandes plates sur la courbe de dispersion donnée dans la figure (2.15.b). Dans le cas de cette étude, $f^* = f_B$. Il est important aussi de noter que f_A donne une estimation précise de la position de la seconde bande interdite montrée dans la figure (2.15.b).

L'analyse comparative des diagrammes de dispersion des figures 2.15.a et 2.15.b permet de mettre en évidence la formation de bandes interdites et un groupe d'ondes stationnaires pour la structure contenant les résonateurs légers. Il semble que certaines ondes de vitesse de groupe suffisamment faible, illustrée dans la figure 2.15b, correspondent à des vibrations de basse fréquence à proximité des limites des bandes interdites.

Le changement à contraste élevé des propriétés d'inertie et de rigidité de la structure à résonateurs légers modifierait la position des bandes interdites et peut donc être utilisée comme moyen de contrôle de la propagation d'ondes à l'intérieur du système périodique élastique.

En outre un réglage fin du système peut entraîner une légère modification de la rigidité γ_1 de la barre horizontale. Cela conduirait à une superposition précise d'une bande de fréquence avec la fréquence de vibration de la plate-forme supérieure du pont. Dans la conception proposée, des vibrations de la plate-forme supérieure du pont deviennent négligeables par rapport aux vibrations de la structure de résonateurs supplémentaires, comme le montre la Figure (2.14.a), et cela a été réalisé sans aucune modification des conditions d'appuis entre le tablier et les piles de pont ou de tout changement de la rigidité de la plate-forme principale.

En utilisant les mêmes principes que pour le modelé 2D, une simulation 3D des deux structures (2.13.c) et (2.13.d) est établie pour confirmer l'efficacité de ce système.

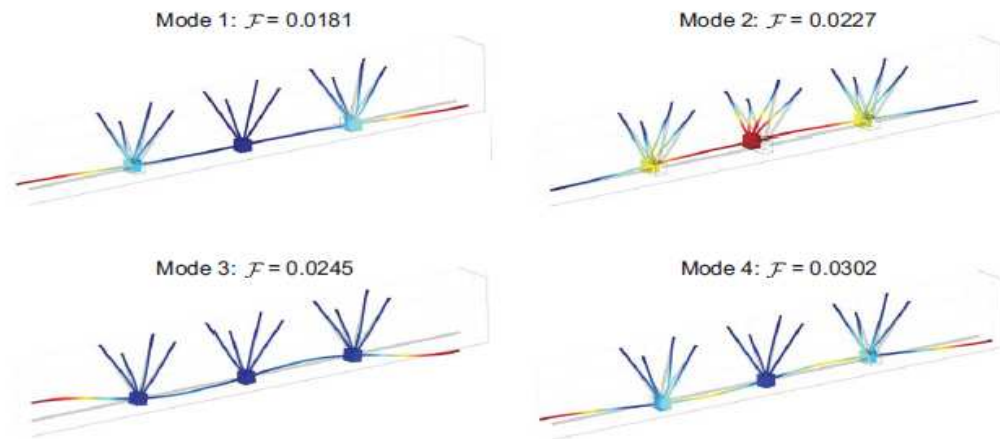


Figure 2.16 : Quatre premiers modes d'ondes stationnaires dans la structure résonante. La plate-forme du pont est fixe.

Les paramètres physiques des résonateurs sont choisis de telle manière à superposer l'une des fréquences des résonateurs seuls (figure 2.16) avec la fréquence fondamentale $F=0.0182$ de la plate-forme avant modification.

A travers la simulation 3D, le mode de flexion fondamental correspond aux vibrations de flexion de la plate-forme supérieure du pont à une basse fréquence normalisée $F = 0.0182$. Après l'ajout des résonateurs au modèle initial, les fréquences propres en question ont été légèrement décalées et les modes propres de vibration nettement changés.

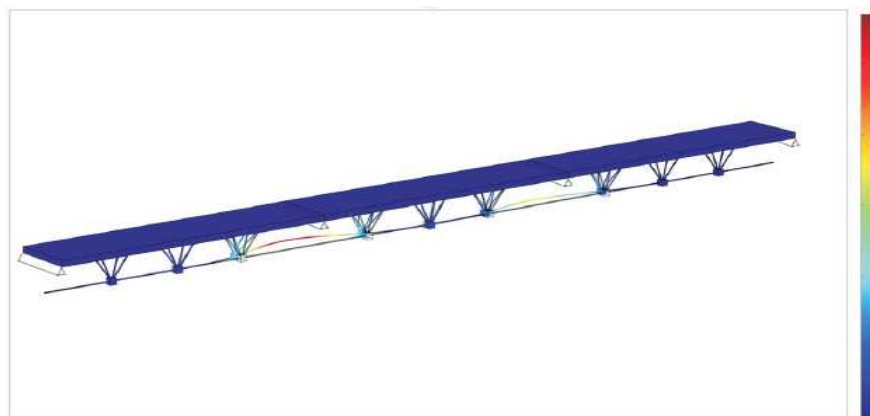


Figure 2.17 : Structure modifiée: les vibrations de flexion de la plate-forme sont supprimées. Le mouvement est repris par les résonateurs.

La figure (2.17) représente une section suffisamment grande du pont modifié, où les conditions d'appuis du modèle aux deux extrémités sont simplement appuyées. Après analyse du modèle 3D, il a été confirmé que le mouvement de la plate-forme principale du pont est devenu négligeable comparé au mouvement du système de résonateurs.

Ce qui permet d'obtenir la conception désirée, celle qui élimine la vibration de flexion de la plate de forme du pont sans tout changement principal de la structure en termes de masse, rigidité ou de conditions aux frontières.

Les méthodes basées sur l'analyse des ondes dans les guides d'ondes périodiques peuvent être appliquées pour les structures élancées telles qu'un bâtiment de grande hauteur composé d'une série de cellules élémentaires (figure (2. 18)).

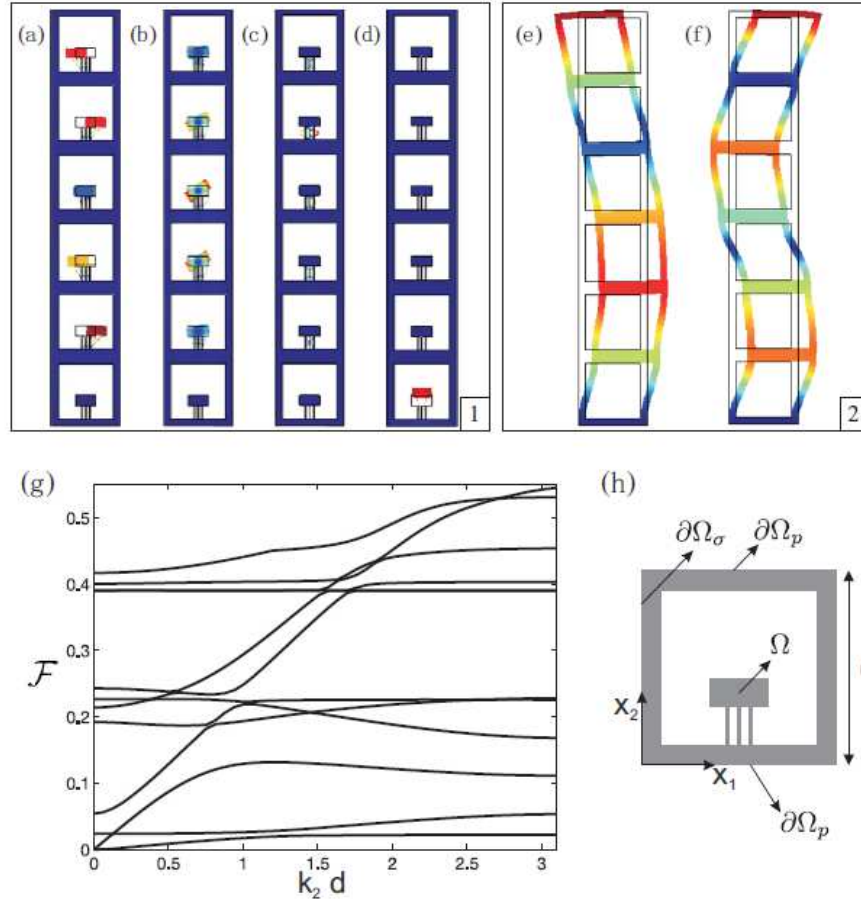


Figure 2.18: Modes propres d'un bâtiment multi-étages encastré à la base.

Dans le but de modifier les modes de la structure initiale qui dans une gamme de fréquence, des résonateurs sont introduits à chaque niveau pour réduire la réponse de la structure. Ils sont composés d'une masse connectée au plancher par un ensemble de barres de rigidité latérale suffisamment faible. Ses masses jouent le rôle d'un pendule inverse et permettent d'absorber une partie de l'énergie générée par un séisme.

Ces résonateurs sont dimensionnés de telle manière que leurs plus basses fréquences de translation ou de rotation coïncident avec la fréquence du mode de la structure à modifier (figure (2. 18) fenêtre 2). Le diagramme de dispersion figure (2. 18.g) obtenu après analyse de la cellule élémentaire figure (2.18.h) comprend un ensemble de bandes plates

correspondant à des ondes stationnaires liées aux vibrations des résonateurs dans la structure périodique.

Cet exemple traite la localisation d'énergie dans un guide d'onde périodique (dans ce cas, le BGH). La structure munie de résonateurs crée une bande interdite empêchant la propagation des ondes de certaines fréquences le long d'un tel guide d'onde. Dans l'ensemble de ces calculs, l'amplitude de vibration des éléments de la structure est très faible par rapport à celle des résonateurs. Par conséquent, si le solide est soumis à un impact extérieur, ces modes de résonance peuvent être initiés, et l'énergie peut être absorbée par les résonateurs.

2.4. Conclusion

L'application du concept de réseaux périodiques dans l'isolation sismique constitue un domaine de recherche très jeune, où les chercheurs ont essayé d'exploiter les principes fondateurs liés à la propagation des ondes élastiques dans les milieux périodiques. Les ondes sismiques caractérisées par des longueurs d'onde très importantes, ont poussé les chercheurs à concevoir des systèmes à résonance locale, où l'atténuation de la propagation se fait par absorption d'énergie. Dans ce cas, les résonateurs jouent leur rôle de dissipateurs, et doivent, par conséquent, être caractérisés par une faible rigidité par rapport à celle de la structure.

Par ailleurs, les différentes études citées dans ce chapitre sont basées sur des hypothèses simplificatrices du fait qu'elles sont considérées comme les premières tentatives dans le domaine du génie sismique.

Chapitre 3

Etude théorique et numérique de deux structures périodiques élaborées pour l'isolation sismique des ouvrages de génie civil.

3.1. Introduction

Depuis l'émergence des cristaux phononiques (CP), d'innombrables travaux s'y sont intéressés, en particulier au mécanisme de la diffusion de Bragg permettant l'ouverture de bandes interdites pour la propagation des ondes élastiques. Ces travaux ont montré que les longueurs d'ondes interdites par le CP sont de l'ordre de grandeur de sa périodicité.

L'intérêt de la communauté scientifique pour les CP dans le domaine des très basses fréquences a vu le jour après les résultats obtenus par Liu *et al* [17] en 2000 pour des CP à résonance locale, où ils ont pu s'affranchir de la contrainte de la longueur d'onde qui empêchait de concevoir des structures périodiques de dimensions rationnelles.

A partir du potentiel des cristaux phononiques à résonance locale, des chercheurs ont essayé d'utiliser les mêmes fondements théoriques des domaines des micro et nanostructures à l'échelle des ouvrages de génie civil où la longueur d'onde sismique est de l'ordre du kilomètre.

Dans ce chapitre, en se basant sur les premiers résultats obtenus par Gaofeng et Zhifei [13], nous avons conçu deux structures capables de bloquer la propagation des ondes dans la gamme de fréquence de 0.1 à 30Hz. La méthode des éléments finis ainsi que les techniques de modélisations sur le logiciel COMSOL 3.4 sont décrites en premier lieu avant de mettre en évidence les différents résultats obtenus.

3.2. Application de la MEF en phononique

La méthode des éléments finis est largement utilisée dans la simulation numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles, décrivant les phénomènes physiques. Historiquement, ses premières et larges utilisations concernent les problèmes liés aux structures mécaniques nécessitant la recherche des solutions de contraintes et de déformations dans les milieux élastiques. Tel est aussi le cas de l'étude de propagation des ondes acoustiques/élastiques dans les milieux phononiques. En effet, la méthode s'apprête facilement à l'application dans l'élaboration des problèmes en valeurs propres permettant le calcul des structures de bandes. Parmi ses applications en phononique, on peut citer les travaux de Khelif *et al* [27] qui l'ont utilisé pour calculer les courbes de dispersion d'un CP bidimensionnel constitué d'inclusions cylindriques dans une plaque. L'ouverture de bandes interdites ainsi que le guidage des ondes élastiques dans ces structures phononiques à inclusions ont été aussi étudiés par Djafari-Rouhani *et al* [28] en utilisant la méthode des éléments finis. T. Chen et T-T. Wu [29] se sont intéressés aussi aux structures de bandes et au guidage des ondes élastiques, mais dans un nouveau type de CP constitué de cylindres déposés périodiquement sur une plaque d'aluminium. Dans toutes ces études, la FEM a montré son efficacité en termes de convergence et de temps de calcul.

3.2.1. Application de la méthode FEM pour le calcul des structures de bandes et champs de déplacement

Partant du système d'équations (3.1) sur un domaine périodique, et en appliquant le théorème de Bloch, le problème se présente sous forme de système d'équations différentielles paramétrées par le vecteur d'onde $\vec{K}$. Le problème matriciel final donné par la FEM est de la forme :

$$K(\vec{k})U = \omega^2 MU$$

Ainsi, comme dans le cas de la PWE, pour chaque valeur de $\vec{K}$, on calcule les modes propres du problème matriciel. La structure de bandes est ainsi déterminée pour un CP. En ce qui concerne le champ de déplacement, pour chaque vecteur d'onde et pour chaque mode, la solution est interpolée en calculant ses valeurs aux nœuds du maillage dans tout le domaine de résolution.

Ainsi, comme dans le cas de la PWE, pour chaque valeur de $\vec{K}$, on calcule les modes propres du problème matriciel. La structure de bandes est ainsi déterminée pour un CP. En ce qui concerne le champ de déplacement, pour chaque vecteur d'onde et pour chaque mode, la solution est interpolée en calculant ses valeurs aux nœuds du maillage dans tout le domaine de résolution.

3.2.2. Convergence

Comme mentionné auparavant, la convergence de la solution dépend de la construction de l'espace d'approximation V_N . Plus la dimension N de ce dernier est grande, plus l'espace de décomposition est grand, et meilleure est l'interpolation de la solution qui se rapproche de la solution recherchée sur V . Au niveau du maillage, l'augmentation des éléments de la base de l'espace V implique un plus grand nombre de nœuds, et donc des sous domaines du maillage car, au moins une fonction de forme (élément de base de V_N) est associée à chaque nœud. En somme, plus le maillage est fin et bien distribué dans le domaine, mieux la solution est approchée.

Par ailleurs, le maillage est d'une importance capitale dans la méthode des éléments finis. En effet, le choix de la forme des sous-domaines du maillage ainsi que les fonctions de forme sont déterminants dans le degré d'approximation souhaité pour la solution recherchée. Aussi, il est très utile de prédire la forme et les variations de la fonction solution afin de déterminer le maillage le plus adapté pour mieux l'approcher. D'un autre côté, plus le nombre d'éléments du maillage est grand, plus le temps nécessaire au calcul de la solution est long, du fait de l'augmentation du nombre de fonctions de forme, et par conséquent des matrices de rigidité et de masse. Malgré cela, cette méthode reste, dans beaucoup de configurations, plus efficace et rapide comparée à d'autres méthodes.

3.2.3. Condition aux limites périodiques

Les conditions aux limites périodiques ont été élaborées afin de modéliser des systèmes périodiques très larges, supposés infinis. Le principe consiste à réduire le domaine de résolution à un élément de périodicité constituant *une cellule unité* qui sera le nouveau domaine d'étude. Les conditions aux limites périodiques sont introduites sur les frontières de cette cellule suivant les directions de périodicité afin d'exprimer le fait que les propriétés de l'onde acoustique à l'entrée sont les mêmes à la sortie de la cellule, avec un déphasage bien déterminé.

Le système simulé est ainsi théoriquement infini. En termes d'équations, une formulation donnée par le théorème de Bloch-Floquet permet d'exprimer ce comportement périodique sur le champ de déplacements et contraintes, s'agissant des problèmes traitant de la propagation des ondes. Ainsi, pour un domaine périodique infini, l'étude se fait sur une cellule unité en écrivant les conditions périodiques suivantes :

$$u_I(\vec{X} + \vec{a}) = u_I(\vec{X}) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}} \text{ et } T_J(\vec{X} + \vec{a}) = T_J(\vec{X}) \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}}$$

Où u_I et T_J sont respectivement le champ de déplacement et les contraintes, $\vec{a}$ le vecteur de périodicité de la structure étudiée, $\vec{k}$ le vecteur d'onde et $\vec{X} = (x, y, z)$ le vecteur coordonnées dans le repère cartésien.

3.3. Structures de bandes étudiées

En se basant sur les principaux résultats des réseaux périodiques liés à la création de bandes interdites phononiques par résonance locale ou par diffusion de Bragg, nous avons élaboré deux modèles ayant un potentiel de bloquer la propagation des ondes élastiques dans la gamme des très basses fréquences correspondant aux ondes sismiques.

Le premier modèle est basé sur le principe des fondations périodiques. Sa cellule élémentaire est constituée d'une matrice de béton de forme carrée dans laquelle deux résonateurs de formes cylindriques sont disposés comme l'indique la figure (3.1.a). Cette structure basée sur le mécanisme de résonance locale définit une périodicité 2D dans le plan horizontal.

Le second modèle qui est constitué d'une succession de couches de béton et de matériau mou, représente un réseau périodique 1D basé sur un couplage des deux mécanismes, à savoir la diffusion de Bragg et la résonance locale. Cette structure peut être appliquée dans l'isolation sismique en tant que fondation d'une structure de génie civil permettant de bloquer la transmission verticale des ondes vers la structure figure (3.1.b).

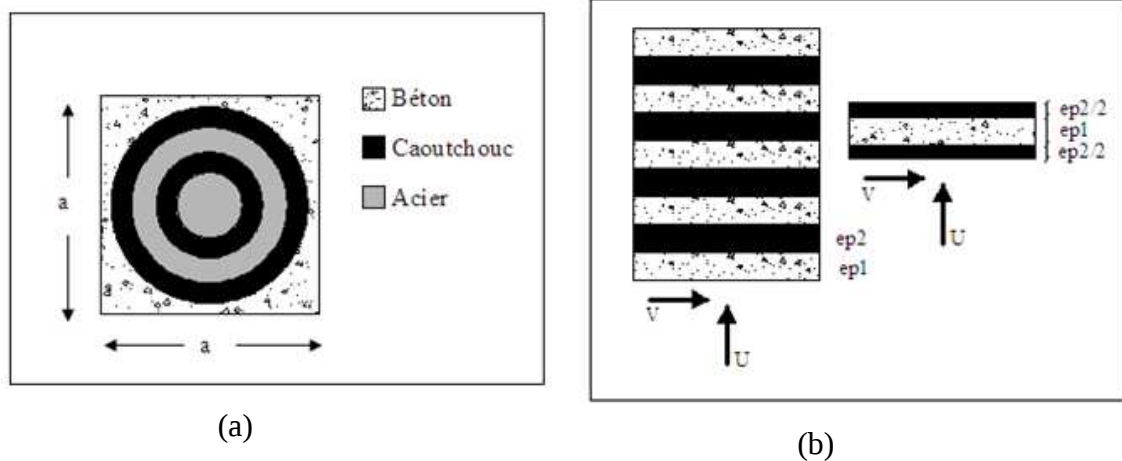


Figure 3.1 : (a) modèle 1 : réseau périodique 2D, (b) modèle 2 : réseau périodique 1D.

3.3.1. Configuration des structures étudiées

3.3.1.1. Structure de bande 2D

Cette structure correspondant au modèle 1 est constituée d'une matrice carré en béton de dimensions "axa" correspondant à la périodicité du système. Deux résonateurs, constitués d'une succession de cylindres et de tubes en élastomère et acier comme illustré dans la figure (3.1.a), sont disposés à l'intérieur de cette matrice afin de générer un couplage entre les modes de résonance et les ondes se propageant dans le milieu. Chacune de ces couches sera gérée géométriquement dans le modèle en éléments finis par un rayon R_i .

Il est à noter aussi que les modes de RL apparaissent plats dans la structure de bande car ils sont bien localisés au niveau des résonateurs et leur vitesse de groupe est donc nulle

3.3.1.2. Structure de bande 1D

Cette structure correspondant au modèle 2 est constituée d'une succession de couches de béton et d'élastomère d'épaisseurs $e1$ et $e2$ respectivement. La topologie de ce réseau est favorable à l'ouverture de bandes dues au mécanisme de Bragg où un contraste élevé entre les vitesses des deux matériaux est assuré. En plus du mécanisme de Bragg qui permet l'ouverture de bandes interdites pour les ondes ayant une longueur d'onde de l'ordre de la périodicité du système, la résonance locale est sollicitée pour ce modèle pour baisser les fréquences au domaine du génie sismique.

3.3.2. Choix des matériaux

Dans les CPRL, les résonateurs contiennent un matériau élastiquement très mou, comparé aux autres matériaux constituant la structure, pouvant donner lieu à des modes vibratoires très confinés et donc localisés. Le critère de choix est la vitesse de propagation des ondes qui doit être plus faible dans les résonateurs. Dans l'étude menée par Jia Gaofeng et Shi Zhifei [13], les structures sont constituées d'un cylindre en acier ou plomb enrobé par un élastomère très

mou. Dans ce cas précis, l'effet du noyau de plomb et de la couche d'élastomère (ressort), confèrent au résonateur un comportement de résonance bien localisé à très basses fréquences. Nous aurons l'occasion par la suite de mettre en évidence séparément l'effet de la masse et celui de la raideur des résonateurs sur leurs modes de résonance.

Tableau 3.1 : caractéristiques des matériaux utilisés (masse volumique ρ , module d'élasticité E et le coefficient de poisson ν).

Matériau	ρ (Kg/m ³)	E (GPa)	ν
Béton	2500	32.1	0.3
Caoutchouc	1300	1.37×10^{-4}	0.463
acier	7850	210	0.3
Plomb	11600	16.46	0.4

Dans notre étude, tous les milieux choisis sont considérés comme isotropes et les caractéristiques des matériaux utilisés sont résumées dans le tableau 3.1.

3.3.3. Modèle numérique

La méthode des éléments finis (FEM) est adoptée pour le calcul des structures de bandes dans le logiciel Comsol Multiphysics 3.4. La modélisation se fait à travers le module de déformations planes où l'ensemble des structures étudiées sont considérées dans leurs plans [X,Y]. Le domaine de résolution est d'abord déterminé en se limitant à une cellule élémentaire du CP par le théorème de Bloch. Les équations de mouvement sont ensuite transformées afin qu'elles puissent être implémentées dans le logiciel. Enfin, les structures de bandes sont calculées en utilisant l'analyse en fréquences propres proposée dans le modèle utilisé.

Les domaines de résolution choisis pour le calcul des structures de bandes sont les cellules élémentaires représentées dans les figures 3.1.a et 3.1.b, auxquelles sont ajoutées les conditions de Bloch. Ainsi, le CPRL du modèle 1 est théoriquement supposé infini dans les deux directions de l'espace tandis que le second modèle n'est infini que dans une seule direction. Le domaine de calcul est divisé en sous domaines suivant la nature élastique des matériaux le constituant. La cellule élémentaire de la figure 3.1.a est donc constituée de trois sous domaines : la matrice en béton, le cylindre en acier et la couche d'enrobage en élastomère, alors que la cellule représentée dans la figure 3.1.b présente deux sous domaines : une couche de béton suivie d'une autre couche d'élastomère.

3.3.4. Conditions aux limites

Après avoir défini le domaine de résolution ainsi que les équations de mouvement, les conditions aux limites sont ajoutées afin de contraindre les solutions recherchées. Au niveau du domaine, les conditions de Bloch sont introduites sur les surfaces latérales des cellules élémentaires.

Pour le modèle 1 l'application de ces conditions aux limites exprime la périodicité de la structure phononique suivant les deux directions du plan, tandis que pour le modèle 2 une seule périodicité est représentée.

Puisque notre intérêt se porte sur la propagation des ondes dont les directions sont dans le plan (O,X,Y), c'est-à-dire $\vec{k} = (K_x, K_y)$, ces équations se développent comme suit :

- **Modèle 1 :**

$$u_3 = u_1 \cdot e^{i.k_x.a}$$

$$v_3 = v_1 \cdot e^{i.k_x.a}$$

$$u_4 = u_2 \cdot e^{i.k_y.a}$$

$$v_4 = v_2 \cdot e^{i.k_y.a}$$

- **Modèle 2 :**

$$u_2 = u_1 \cdot e^{i.k_y.a}$$

- $v_2 = v_1 \cdot e^{i.k_y.a}$

En repérant les surfaces mentionnées dans la figure 3.2 et 3.3.

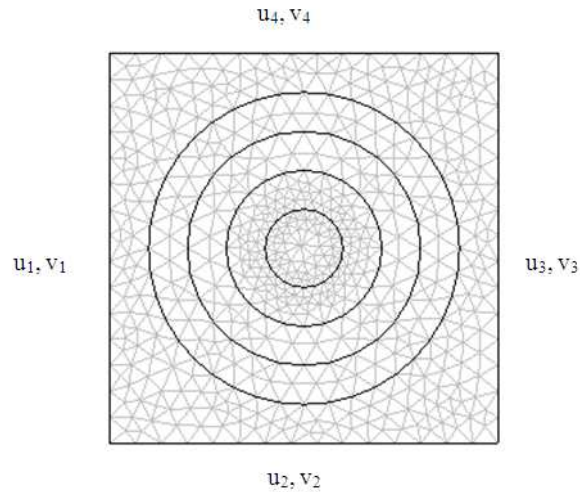


Figure 3.2 : Maillage et conditions aux limites périodiques de la structure périodique 2D.

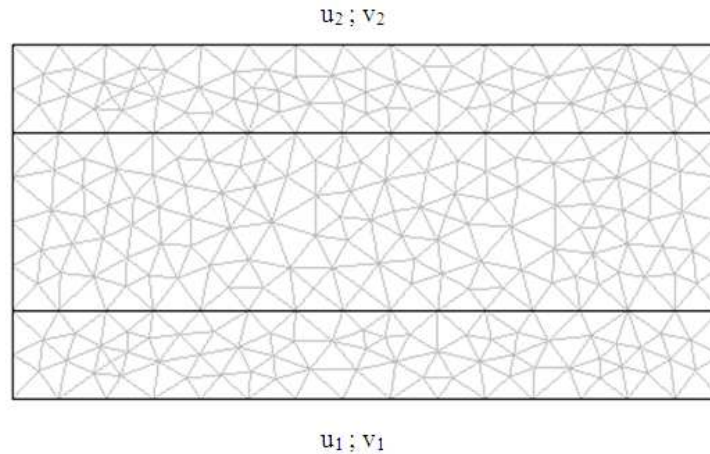


Figure 3.3 : Maillage et conditions aux limites périodiques de la structure périodique 1D.

3.3.5. Maillage et convergence

En éléments finis, le maillage, qui est une subdivision du domaine de résolution, permet de déterminer les domaines de définition des fonctions de formes essentielles à l'approximation des fonctions solutions recherchées. Dans notre cas, les éléments du maillage sont de formes triangulaires. Ce sont, en effet, les valeurs par défaut proposées par Comsol.

Les figures 3.2 et 3.3 présentent les deux exemples de maillage adoptés pour nos de structures.

La convergence des calculs en éléments finis dépend du maillage de la structure étudiée, notamment du nombre d'éléments triangulaires ainsi que leur répartition dans le domaine. En effet, plus le maillage est fin, plus il y a des fonctions de formes définies, et donc meilleure est l'approximation de la fonction solution. Cependant, le temps de calcul augmente avec l'affinement du maillage et les limites de la machine de calcul peuvent rapidement être atteintes.

3.3.6. Calcul de la structure de bandes

Puisqu'on est en présence d'une structure phononique bidimensionnelle dans le modèle 1 avec un arrangement périodique carré, le calcul de la courbe de dispersion s'est limité aux axes principaux de symétrie de la première zone irréductible de Brillouin. Pour chaque valeur du vecteur d'ondes, les modes sont calculés en utilisant le modèle d'analyse fréquentielle proposé par Comsol. La figure 3.4 ci-dessous précise les valeurs du vecteur d'ondes prises avec la nomenclature classique des axes de symétrie de la première zone de Brillouin.

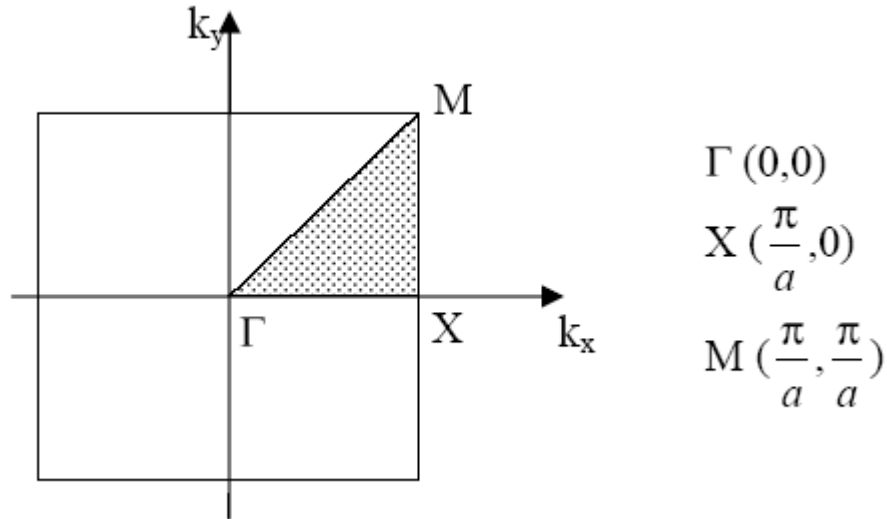


Figure 3.4 : Première zone de Brillouin irréductible pour une structure périodique carrée.

Pour le second modèle où la périodicité est unidimensionnelle le vecteur d'onde est pris suivant une seule direction et varie entre 0 et π/a .

3.4. Structure à bandes pour le modèle 1 (cristal phononique à résonance locale)

Cette première étude s'intéresse à la structure à résonance locale représentée dans la figure 3.1.a. Comme nous l'avons expliqué au début de la section 3.1, l'objectif est de créer des couplages entre les modes RL dans les résonateurs et les ondes se propageant dans le milieu. Afin de mettre en évidence ce couplage, la figure 3.5 présente la structure de bande pour une fondation périodique de dimensions : $a=1.0m$, $R1=0.49m$, $R2=0.39m$, $R3=0.29m$ et $R4=0.19m$.

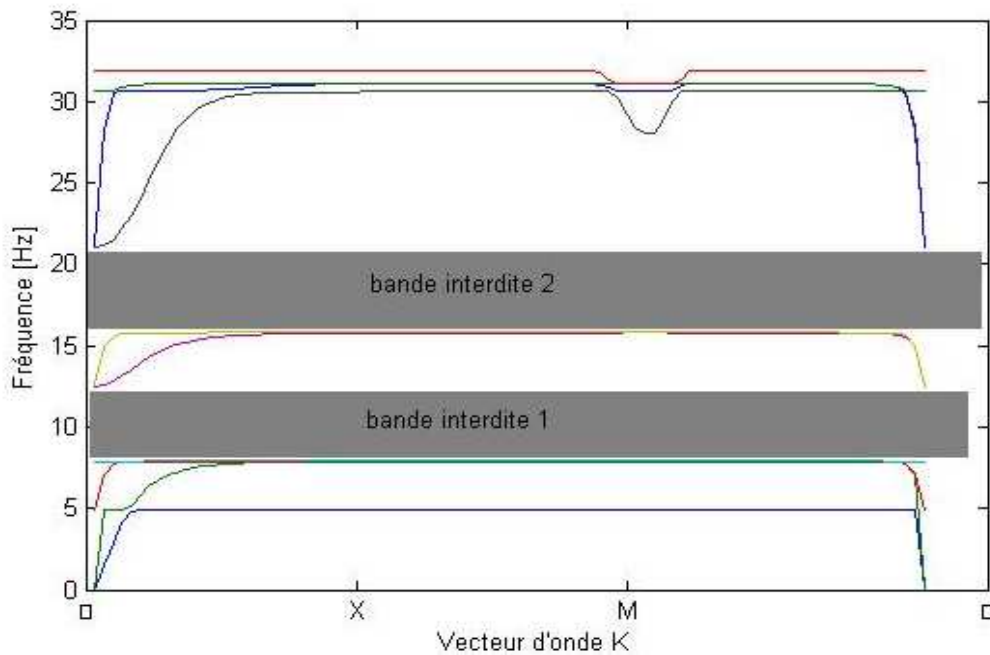


Figure 3.5 : Structure de bandes interdites du modèle 1 (périodicité 2D).

Le modèle 1 étudié, par le biais de la résonance locale, peut être utilisé pour bloquer la propagation des composantes P et S des ondes sismiques. Ainsi, au cours de la traversée du milieu périodique, si la fréquence de ces dernières coïncide avec la fréquence des résonateurs, ces derniers entrent en interaction avec elles et absorbent une partie de l'énergie véhiculée. Au delà d'un certain nombre de résonateurs sollicités, l'onde sismique est bloquée et la réponse dynamique de la structure isolée est réduite considérablement. Les deux bandes interdites mentionnées dans la courbe de dispersion de la figure 3.5 sont obtenues à partir d'un calcul itératif de détermination des fréquences propres du système étudié pour chaque valeur du vecteur d'onde K (K varie selon la figure 3.4).

En plus des modes transverses, symétriques et antisymétriques, de nombreux autres modes plats apparaissent dans la structure de bandes, correspondant à des modes de résonance locale. Ainsi, une bande interdite phononique apparaît, conséquence directe du couplage bien visible dans la structure de bandes entre les ondes se propageant dans le milieu et les modes localisés. La courbe de dispersion représentant la relation entre la fréquence et le vecteur d'onde met en évidence pour ce réseau 2D deux bandes interdites dont les fréquences [7.87-12.47] Hz et [15.82-21.01] HZ correspondent au domaine fréquentiel des ondes sismiques.

Dans le but de maîtriser les paramètres qui gèrent l'ouverture des bandes interdites pour un réseau périodique, une étude paramétrique permettant d'étudier la variation des limites supérieure et inférieure ainsi que la largeur de la bande interdite est élaborée pour les paramètres suivants :

- Variation de la fraction de remplissage.
- Variation de la masse volumique des noyaux.
- Variation du module d'élasticité de l'élastomère.
- Variation du module d'élasticité de la matrice en béton.

3.4.1. Variation de la fraction de remplissage

La fraction de remplissage est définie comme: $f = \pi R_4^2 / a^2$. Les rapports entre l'épaisseur du noyau et celle de l'élastomère pour les deux résonateurs sont :

$\beta_1 = \frac{R_4}{R_3 - R_4}$: Rapport des épaisseurs entre le noyau et l'élastomère du premier résonateur.

Et $\beta_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_1 - R_2}$: Rapport des épaisseurs entre le noyau et l'élastomère du second résonateur.

La limite inférieure de la bande interdite décroît avec l'augmentation de la valeur de β_1 jusqu'à atteindre une valeur de $\beta_{1min} = 1.85$ correspondant à la fréquence la plus basse pour laquelle une bande interdite peut s'ouvrir (figure 3.6). Au-delà de cette valeur, l'ouverture des bandes interdites se fait à des fréquences plus élevées. Nous constatons aussi que la première bande interdite tend à se refermer pour des valeurs de β_1 inférieures à 0.5 tandis que la deuxième bande interdite se referme avec l'augmentation de la valeur de β_1 .

La figure 3.7 illustre que pour une valeur de β_2 au voisinage de 1, les limites inférieures des deux bandes interdites prennent leurs valeurs les plus basses. Ces deux paramètres β_1 et β_2 permettent de définir la géométrie d'un cristal phononique d'une manière optimale.

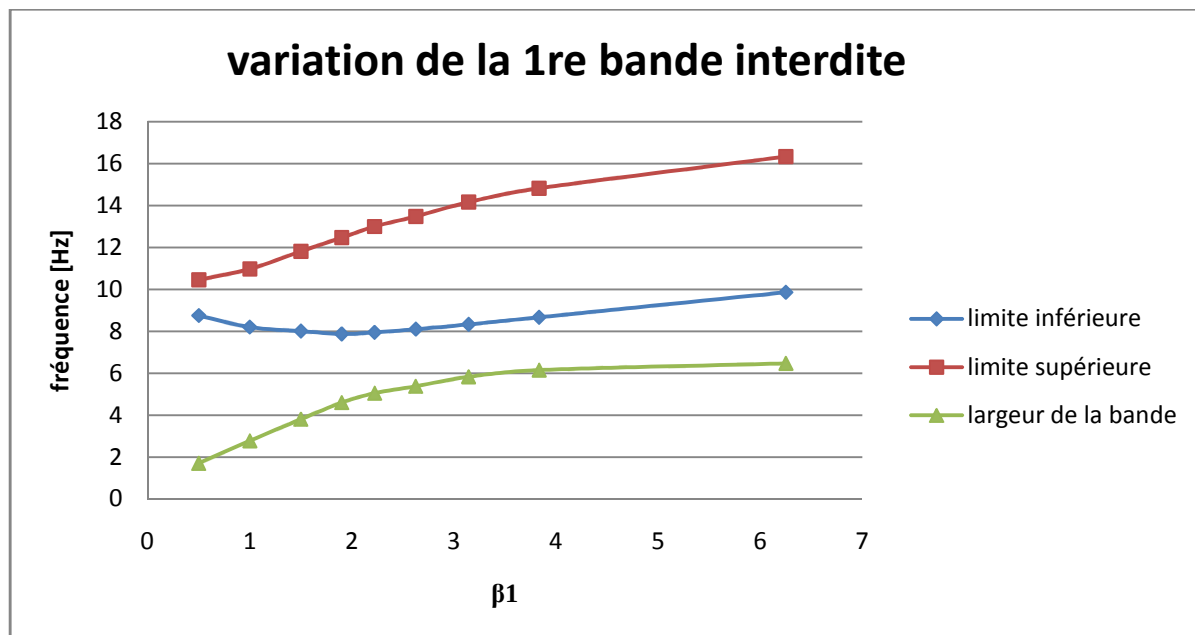


Figure 3.6.a : Influence de la variation du paramètre β_1 pour $\beta_2=1$ et $f=75.43\%$

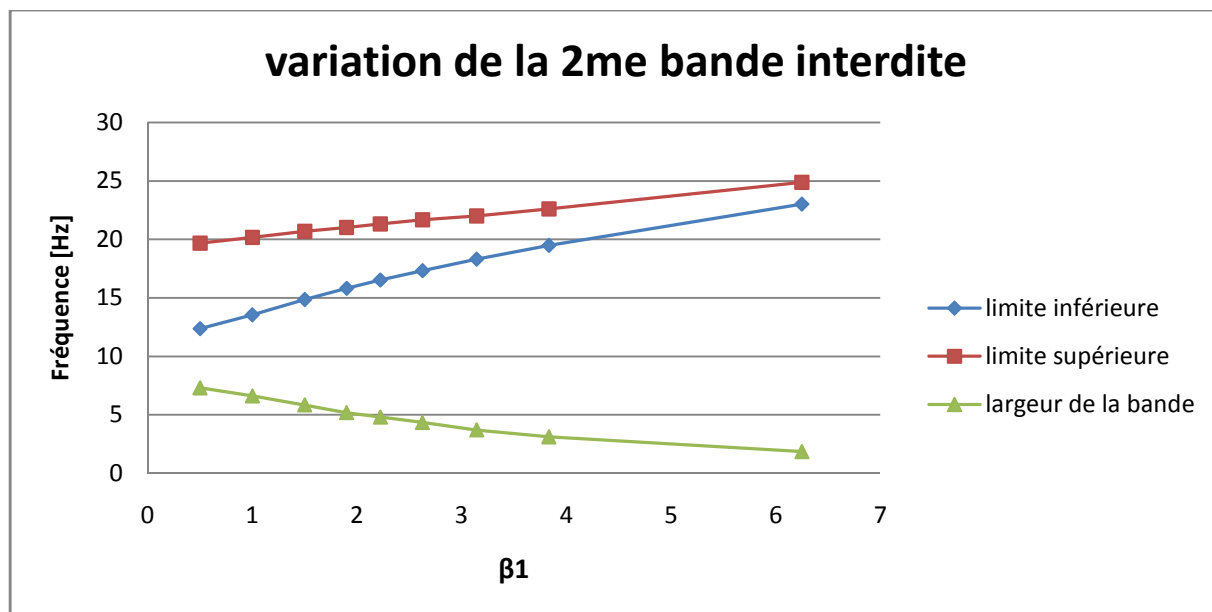


Figure 3.6.b : Influence de la variation du paramètre β_1 pour $\beta_2=1$ et $f=75.43\%$

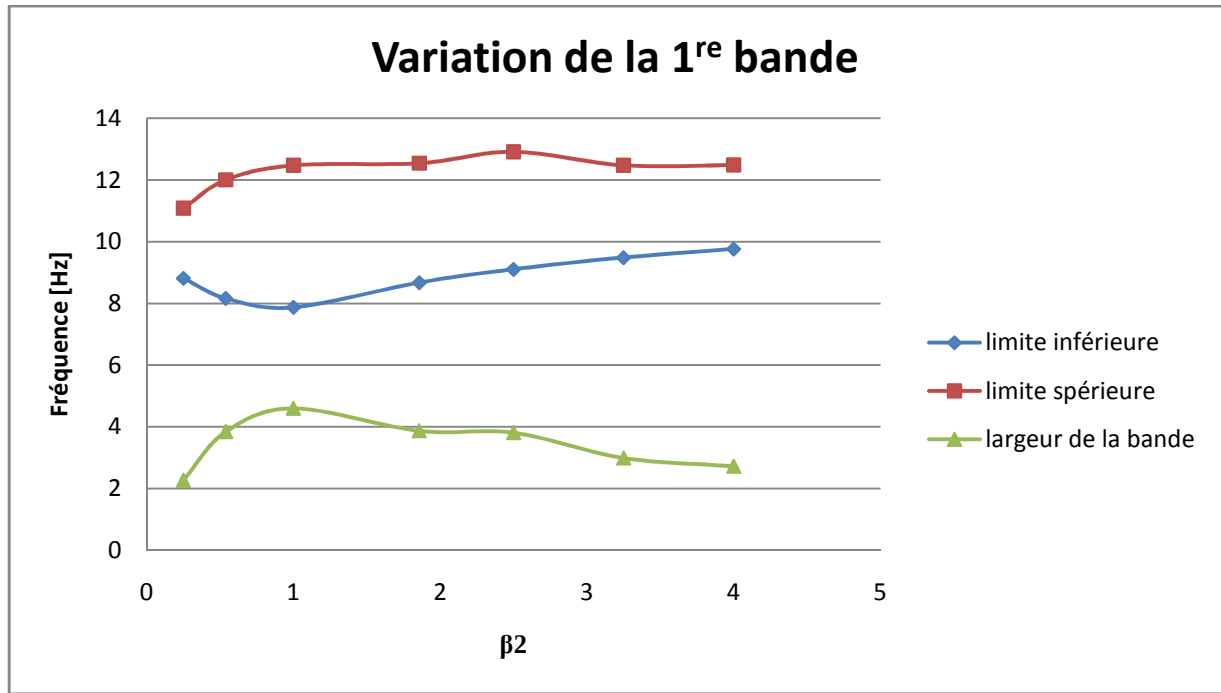


Figure 3.7.a : Influence de la variation du paramètre β_2 pour $\beta_1=1.9$ et $f=75.43\%$.

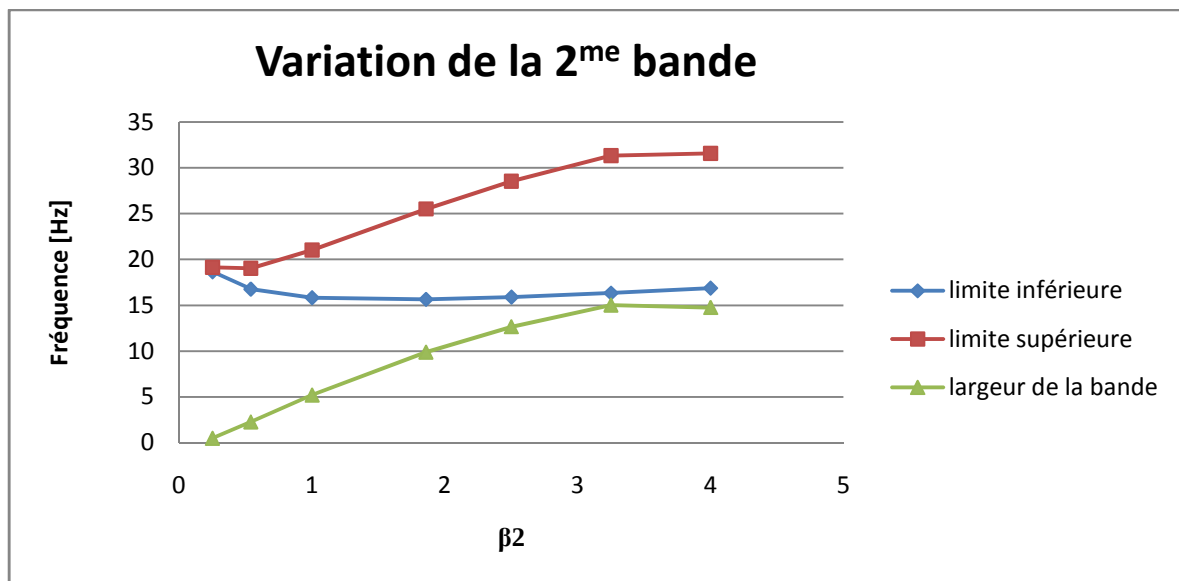


Figure 3.7.b : Influence de la variation du paramètre β_2 pour $\beta_1=1.9$ et $f=75.43\%$.

Lorsque la fraction de remplissage augmente dans la figure 3.8, les limites supérieures et inférieures de la bande interdite diminuent tandis que la largeur de la bande interdite augmente. Si on considère que cette structure périodique est équivalente à un résonateur de fréquence $f = \sqrt{\frac{K}{M}}$, cette augmentation de la fraction de remplissage se traduit par une augmentation de la masse, par conséquent, la fréquence diminue.

Pour la cellule carrée étudiée la fraction de remplissage maximale est égale à 75%.

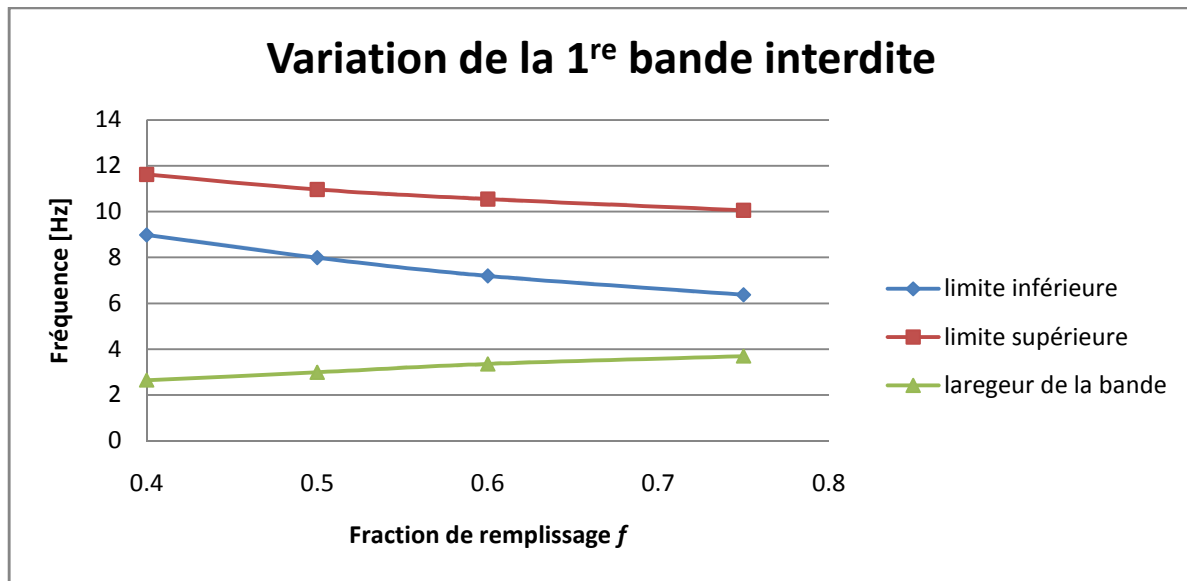


Figure 3.8.a: Influence de la variation de la fraction de remplissage f sur la bande interdite.

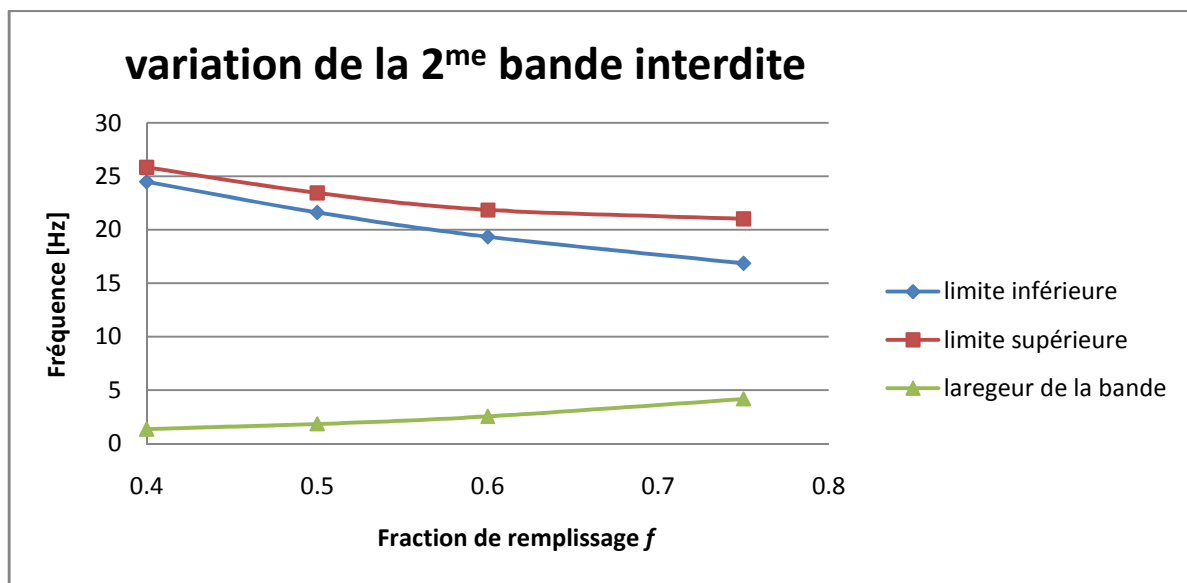


Figure 3.8.b : Influence de la variation de la fraction de remplissage f sur la bande interdite.

3.4.2. Variation de la masse volumique

Les résultats des deux graphes de la figure 3.9 illustre que les paramètres de la bande interdite (limite inférieure, supérieure et largeur de la bande) sont très sensibles à la variation de la masse volumique du matériau constituant le noyau. L'augmentation de la masse volumique permet de faire baisser les fréquences limites de la bande interdite. Le système considéré peut être assimilé à un résonateur masse-ressort pour lequel la fréquence s'écrit

$$\text{comme : } f = \sqrt{\frac{K}{M}}.$$

A travers cette formule, il est préférable d'utiliser des matériaux lourds pour les noyaux afin d'obtenir des fréquences basses, car tant que la masse du noyau augmente la fréquence du système diminue. L'un des matériaux usuels possédant une masse volumique élevée est le plomb ($\rho = 11600 \text{ Kg/m}^3$). Pour ce dernier les bandes interdites obtenues sont de l'ordre de 6.70 à 10.80 Hz et 13.60 à 20 Hz.

NB : Les dimensions du modèle analysé sont données comme suit : $a=1.0\text{m}$, $R1=0.49\text{m}$, $R2=0.39\text{m}$, $R3=0.29\text{m}$ et $R4=0.19\text{m}$. Les caractéristiques du béton et de l'élastomère sont données dans le tableau 3.1

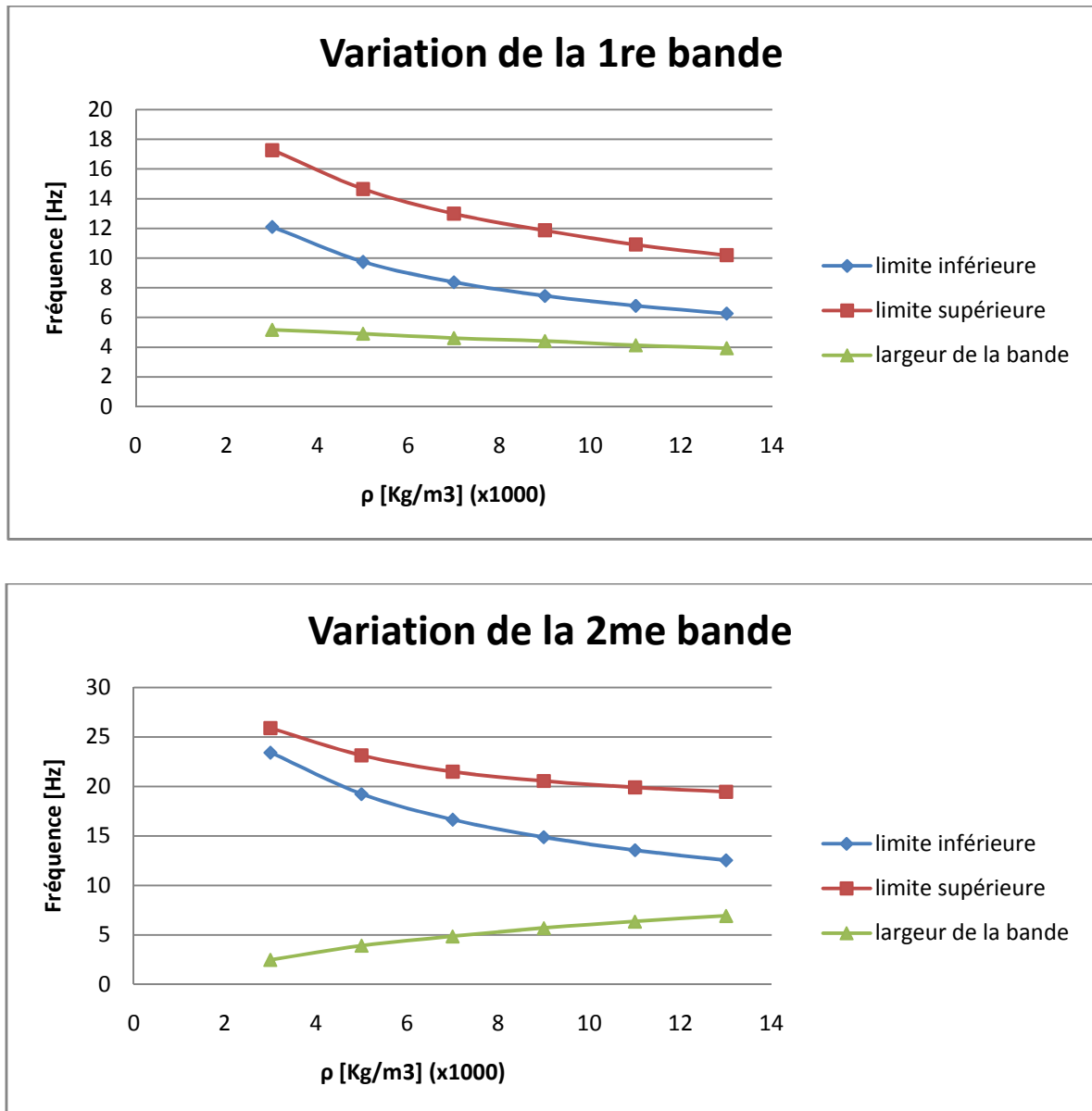


Figure 3.9 : Influence de la variation de la masse volumique des noyaux sur la bande interdite.

3.4.3. Variation du module d'élasticité de l'élastomère

Les trois paramètres de la bande interdite illustrés dans la figure 3.10 augmentent avec la valeur du module d'élasticité de l'élastomère. Comme mentionné plus haut, le système est assimilé à un résonateur masse-ressort, où les noyaux jouent le rôle de la masse et les couches d'élastomère le rôle du ressort. L'augmentation des fréquences limites et la largeur de la bande interdite est due à l'augmentation de la rigidité du résonateur, cette dernière est proportionnelle au module d'élasticité de l'élastomère.

A partir de ces résultats, nous constatons que pour obtenir un CPRL efficace dans le domaine des basses fréquences, le choix d'un matériau très mou pour le résonateur s'impose pour établir un couplage entre les ondes se propageant dans le milieu et les modes du résonateur.

NB : Les dimensions du modèle analysé sont données comme suit : $a=1.0\text{m}$, $R1=0.49\text{m}$, $R2=0.39\text{m}$, $R3=0.29\text{m}$ et $R4=0.19\text{m}$. Les caractéristiques du béton et de l'élastomère sont données dans le tableau 3.1

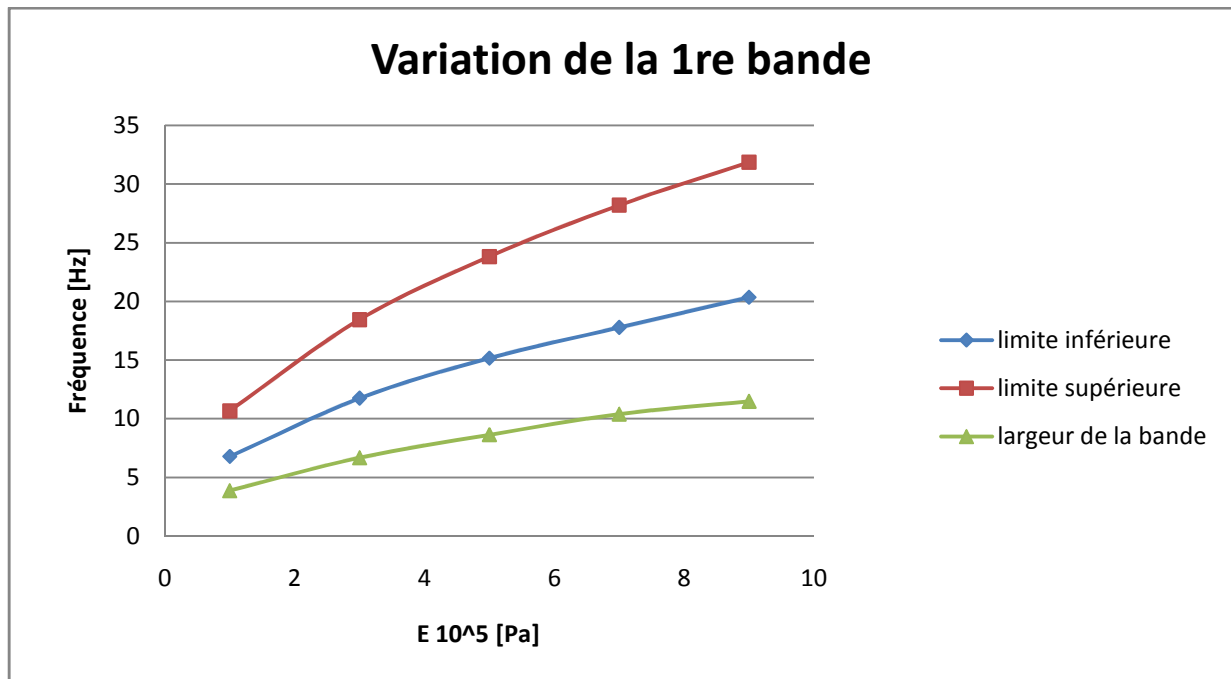


Figure 3.10.a : Influence de la variation du module d'élasticité de l'élastomère sur la bande interdite.

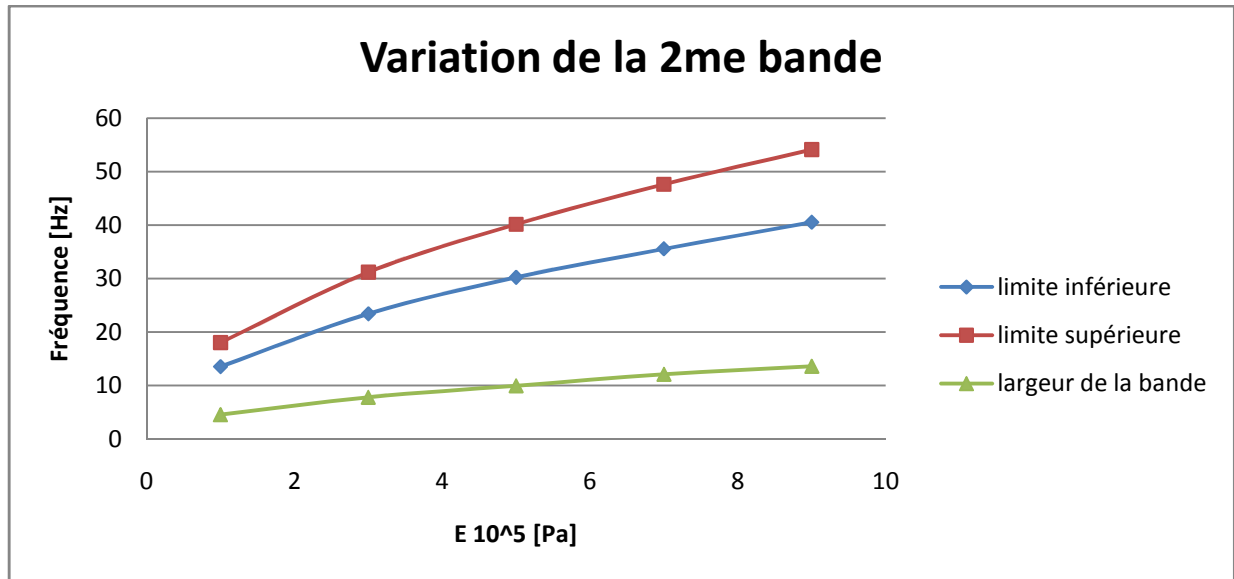


Figure 3.10.b : Influence de la variation du module d'élasticité de l'élastomère sur la bande interdite.

3.4.4. Variation du module d'élasticité de la matrice en béton

Un autre résultat important est tiré à partir de la figure 3.11. Il n'existe pratiquement aucune variation des paramètres de la bande interdite suite à l'augmentation du module d'élasticité du béton. Ce constat se traduit par le contraste élevé entre les valeurs du module d'élasticité du béton et celui de l'élastomère (de l'ordre de 10^5). Ainsi une faible variation du module d'élasticité du béton n'a aucune incidence sur la bande interdite.

Ce résultat permet de donner la possibilité d'utiliser une large gamme de classe de béton.

NB : Les dimensions du modèle analysé sont données comme suit : $a=1.0\text{m}$, $R1=0.49\text{m}$, $R2=0.39\text{m}$, $R3=0.29\text{m}$ et $R4=0.19\text{m}$. Les caractéristiques du béton et de l'élastomère sont données dans le tableau 3.1

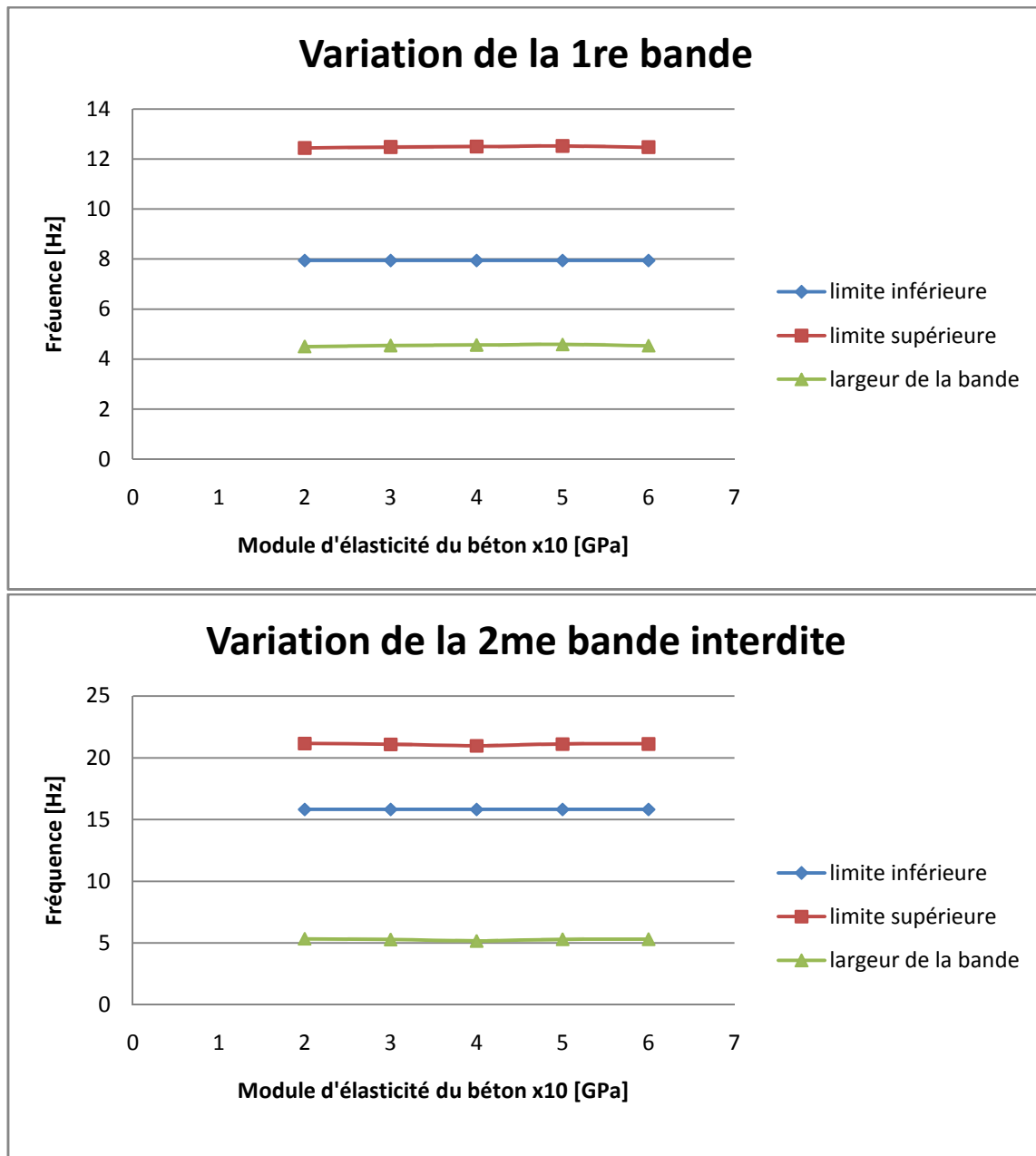


Figure 3.11: Influence de la variation du module d'élasticité du béton sur la bande interdite.

3.5. Structures à bandes pour le modèle 2 (cristal phononique 1D)

Le second modèle étudié décrit dans la section 3.3.1.2 est basé sur l'interaction des deux mécanismes de diffusion de Bragg et de la résonance locale. Ce modèle pour une structure de génie civil peut être assimilé à un radier constitué de couches successives de béton et d'élastomère. Les dimensions de la cellule élémentaire permettant l'obtention de la courbe de dispersion de la figure 3.12 sont données comme suit :

Largeur du radier $a=10\text{m}$.

Épaisseur de la couche de béton $e_1=0.20\text{m}$.

Épaisseur de la couche d'élastomère $e_2=0.20\text{m}$.

Les caractéristiques des deux matériaux béton et élastomère sont données dans le tableau 3.1.

En considérant un milieu infiniment périodique à travers l'application des conditions aux limites de Bloch, et suite à une analyse aux fréquences propres de la structure, la courbe de dispersion suivante est obtenue.

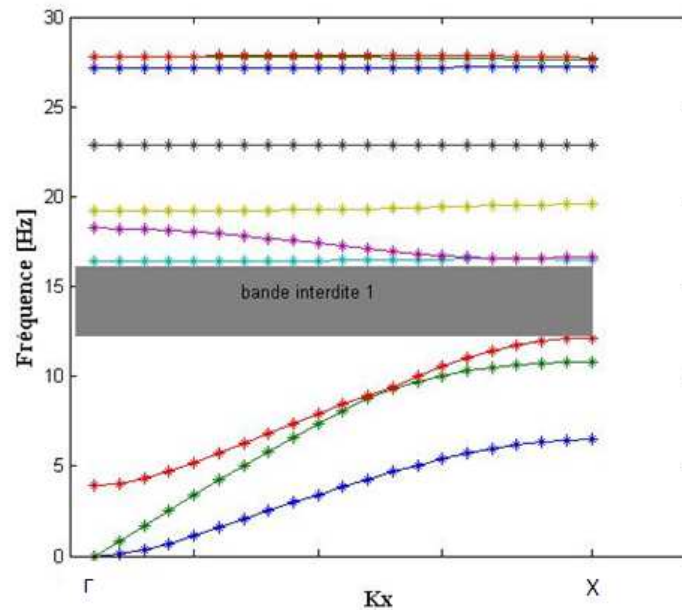


Figure 3.12 : Structure de bandes interdites du modèle 2 (périodicité 1D).

Le modèle 2 conçu pour bloquer la propagation des deux composantes longitudinale et transversale de l'onde (U et V) permet de créer une bande interdite dans la gamme de fréquence [12.4, 16.51] Hz (figure 3.12).

Dans le but de maîtriser les paramètres qui gèrent l'ouverture des bandes interdites pour un réseau périodique 1D, une étude paramétrique permettant d'étudier la variation des limites supérieure et inférieure ainsi que la largeur de la bande interdite est élaboré pour les paramètres suivants :

- Influence de la variation des épaisseurs e_1 et e_2 des deux matériaux.
- Influence de la variation des modules d'élasticité E_1 et E_2 des deux matériaux.
- Influence de la variation des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 des deux matériaux.

3.5.1. Influence de la variation des épaisseurs e_1 et e_2 des deux matériaux.

Pour étudier l'influence des épaisseurs des deux matériaux sur les paramètres de la bande interdite (limite inférieure, limite supérieure et largeur de la bande), nous avons considéré une variation de l'épaisseur de l'élastomère (e_2) pour une épaisseur constante du béton ($e_1=0.2m$). Ainsi un rapport e_1/e_2 est défini pour apprécier l'ordre de grandeur géométrique de la cellule élémentaire. Les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés pour ces modèles sont décrites dans le tableau 3.1.

La figure 3.13 illustre la variation des paramètres de la bande interdite en fonction de la variation du rapport e_1/e_2 . Nous constatons à partir de ces résultats que les limites et la

largeur de la bande interdite augmentent lorsque l'épaisseur de la couche d'élastomère diminue. Par conséquent si une large bande interdite est souhaitée l'épaisseur de l'élastomère doit être inférieure à celle du béton pour des fréquences assez élevées dans le domaine fréquentiel [0.1-30] Hz, tandis que, si une bande interdite à très basse fréquence est envisagée au détriment de sa largeur l'épaisseur de l'élastomère doit être supérieure à celle du béton.

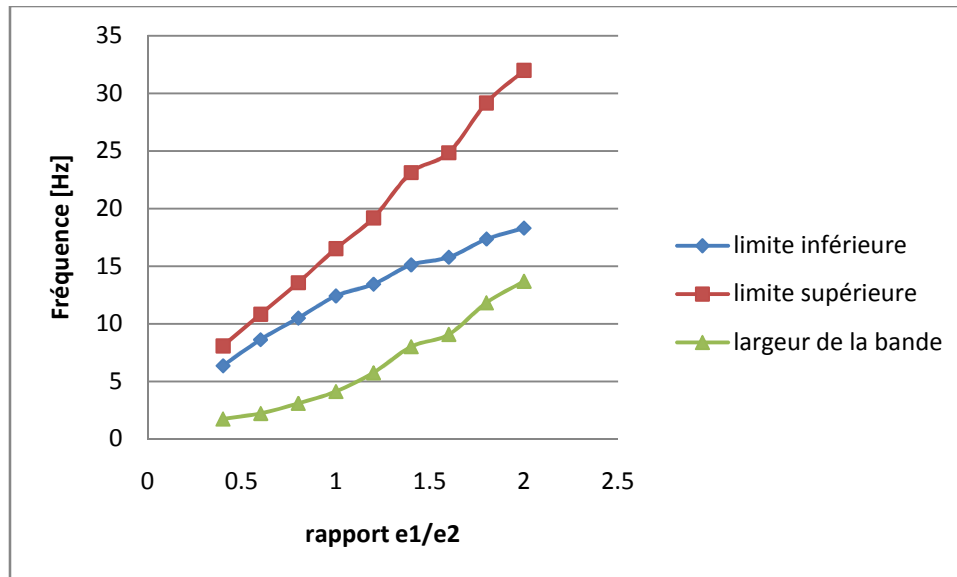


Figure 3.13 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des épaisseurs e_1/e_2 .

3.5.2. Influence de la variation des modules d'élasticité E_1 et E_2 des deux matériaux

Les dimensions du modèle élaboré pour mettre en valeur l'influence de la variation du module d'élasticité de l'élastomère sur les paramètres de la bande interdite sont les suivants :

- Largeur du radier $a=10\text{m}$.
- Épaisseur de la couche de béton $e_1=0.2\text{m}$.
- Épaisseur de la couche d'élastomère $e_2=0.20\text{m}$.

Un paramètre (E_1/E_2) représentant le rapport entre le module d'élasticité du béton et celui de l'élastomère est défini dans ce cas. Toutes les autres caractéristiques des matériaux restent inchangées.

Nous constatons à partir de la figure 3.14 que les paramètres de la bande interdite chutent avec la diminution du module d'élasticité de l'élastomère (augmentation du rapport E_1/E_2). Ce constat peut être expliqué par la fréquence d'un résonateur masse-ressort ($f = \sqrt{K/M}$), où lorsque la rigidité K (module d'élasticité E) diminue la fréquence du système chute.

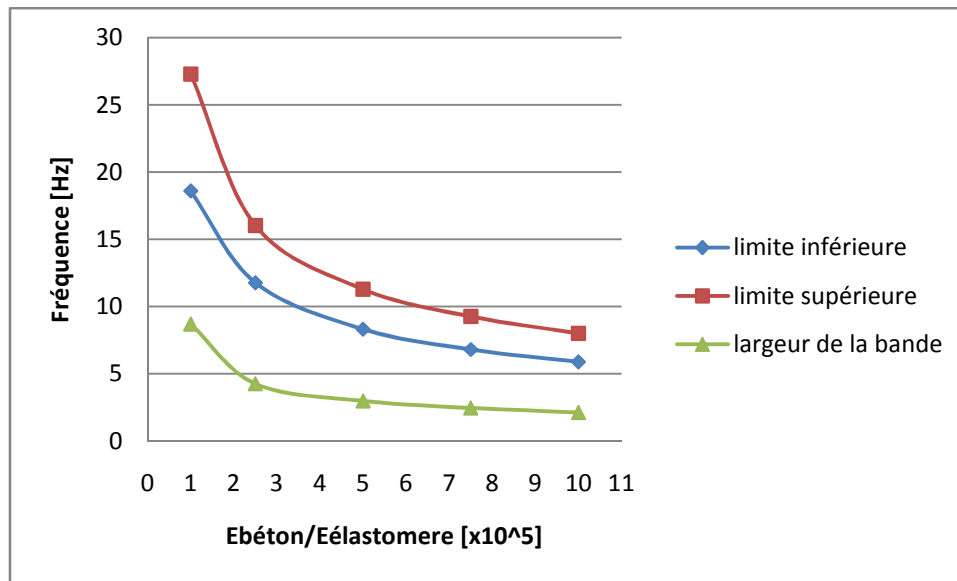


Figure 3.14 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des modules de YOUNG du béton sur l'élastomère.

3.5.3. Influence de la variation des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 des deux matériaux

Les dimensions du modèle élaboré pour mettre en valeur l'influence de la variation de la masse volumique de l'élastomère sur les paramètres de la bande interdite sont les suivants :

- Largeur du radier $a=10\text{m}$.
- Épaisseur de la couche de béton $e_1=0.2\text{m}$.
- Épaisseur de la couche d'élastomère $e_2=0.20\text{m}$.

De la même que dans la section 5.2 un paramètre (ρ_1 / ρ_2) représentant le rapport entre la masse volumique et celle de l'élastomère est défini. Les autres caractéristiques des matériaux restent inchangées.

Nous constatons à partir de la figure 3.15 que la bande interdite se referme pour des masses volumiques équivalentes des deux matériaux, ce qui peut s'expliquer par le fait que la topologie d'un réseau de Bragg est basée sur un contraste élevé des vitesses transverses et longitudinales dans les matériaux ($V_L = \sqrt{C_{11}/\rho}$ et $V_T = \sqrt{C_{44}/\rho}$).

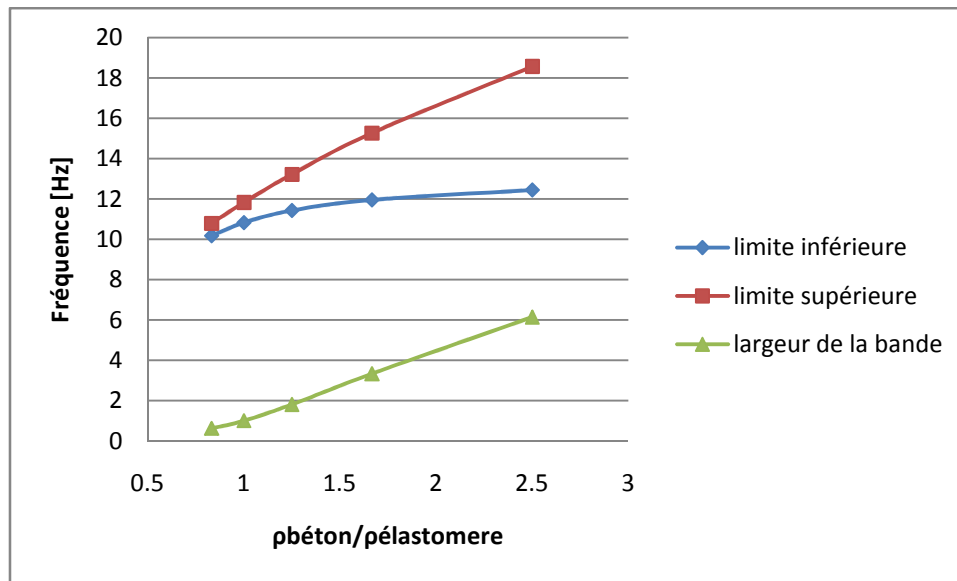


Figure 3.15 : Variation des paramètres de la bande interdite en fonction du rapport des masses volumiques du béton sur l'élastomère.

3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons eu l'occasion d'étudier la possibilité d'ouverture des bandes interdites dans le domaine fréquentiel des ondes sismiques [0.1-30] Hz, soit par le mécanisme de résonance locale, soit par le mécanisme de diffusion de Bragg. Nous nous sommes intéressés aux interactions des ondes se propageant dans les fondations périodiques (modèle 1) avec les modes localisés des résonateurs, à travers une étude paramétrique faisant varier les différents paramètres ayant une incidence sur la fréquence d'un résonateur simple masse-ressort tels que le module d'élasticité de l'élastomère, la masse volumique des noyaux ainsi que les paramètres géométriques.

Les différents calculs des bandes interdites pour le modèle 1 démontrent que pour obtenir une bande interdite à de très basses fréquences, là où les longueurs d'ondes sont largement plus grandes que la périodicité de la structure, nous avons besoin non seulement d'avoir des modes de résonance bien localisés, mais aussi de contrôler le couplage entre les modes localisés au niveau des résonateurs et les ondes se propageant dans le milieu, ceci au moyen d'un choix judicieux des matériaux et des paramètres géométriques de la cellule élémentaire. Les résultats obtenus pour le second modèle, défini par une périodicité unidirectionnelle, permettent d'obtenir des bandes interdites dues au couplage des deux mécanismes de Bragg et de résonance locale. Ainsi à partir de la section 5.3, nous avons conclu qu'un contraste élevé des vitesses des ondes transversales et longitudinales dans les deux matériaux est nécessaire pour l'ouverture de bandes interdites dues au mécanisme de Bragg. Par contre la résonance locale sera gérée par le module d'élasticité des deux matériaux comme indiqué dans la section 5.2.

Conclusion générale

L'intérêt des scientifiques pour la propagation des ondes élastiques dans les milieux périodiques remonte à la fin du XIX^e siècle où plusieurs théorèmes ont été avancés. Les ondes optiques avec Rayleigh, la cristallographie avec Bragg, la diffraction des ondes optiques par les ondes élastiques par Brillouin notamment, ou encore les travaux de Bloch sur les fonctions d'ondes ne dressent même qu'un tableau partiel de l'intérêt porté aux phénomènes liés à la périodicité.

Ces structures périodiques constituées de matériaux composites sont appelées cristaux phononiques (CP). Depuis plus de vingt ans, les scientifiques étudient et fabriquent ces structures pour leur capacité à prohiber la propagation des ondes acoustiques/élastiques dans des gammes de fréquences dites bandes interdites phononiques.

Le travail réalisé dans ce mémoire a pour objectif de transposer le principe des réseaux acoustiques à bandes interdites à la protection sismique des ouvrages de génie civil. Ainsi deux modèles de réseaux périodiques ont été élaboré pour inhiber la propagation des ondes dans le domaine des très basses fréquences (0.1-30 Hz).

Dans un premier temps, un résumé sur les principales caractéristiques de la propagation d'ondes dans les milieux homogènes ainsi qu'une définition des différents types d'ondes sont présentés dans le chapitre1. Le bref historique sur les cristaux phononiques donné dans la seconde partie de ce chapitre nous a permis de faire une revue des travaux majeurs concernant la découverte et la mise en évidence théorique et expérimentale de plusieurs comportements remarquables manifestés par ces cristaux. Les deux mécanismes responsables de l'ouverture des bandes interdites, à savoir le mécanisme de Bragg et la résonance locale, ont été définis et discutés pour mettre en évidence leur efficacité à bloquer la propagation des ondes dans une certaine gamme de fréquence bien définie.

Les quelques applications de ce concept de réseaux périodiques dans l'isolation sismique ont été revues, où il est vrai qu'il n'existe pas beaucoup de travaux dans ce sens vu que le potentiel de bloquer les ondes à de basses fréquences pour des structures de dimensions rationnelles n'a vu le jour que dans les années 2000. Les ondes sismiques définies par de très basses fréquences par rapport aux autres types d'ondes sont caractérisées par une longueur d'onde de l'ordre du kilomètre. Cette dernière a constituée une contrainte pour l'élaboration de structures à l'échelle des ouvrages de génie civil jusqu'à la découverte du mécanisme de résonance locale (Liu et al [17] en 2000).

La partie essentielle de ce mémoire est focalisée sur une étude théorique de deux structures périodiques permettant de bloquer la propagation des ondes sismiques. Le premier modèle représentant une fondation périodique 2D dont la cellule élémentaire est constituée d'une matrice carrée en béton dans laquelle sont disposés deux noyaux en acier enrobés d'élastomère, ces derniers jouent le rôle d'un résonateur. Le second modèle est une structure périodique unidimensionnelle constituée de couches successives de béton et d'élastomère. L'étude de ces deux structures a été menée à l'aide du logiciel d'éléments finis COMSOL 3.4 pour la détermination des valeurs propres de chaque système pour différentes valeurs du vecteur d'onde K . Les relations de dispersions obtenues pour les deux modèles ont mis en évidence la présence de bandes interdites permettant de bloquer les ondes sismiques.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude paramétrique permettant de localiser les paramètres influençant l'ouverture et la largeur de la bande interdite. A ce sujet l'influence de la variation de la masse volumique, le module d'élasticité et le facteur de remplissage permet d'assimiler le premier modèle à un résonateur simple masse-ressort. Le choix d'un matériau dense pour le noyau et d'un matériau très mou comme l'élastomère permet d'assurer un système où les fréquences de résonance sont très basses.

Pour conclure ce mémoire, les recommandations et perspectives pour les futurs travaux sont :

- Une étude de transmission s'avère indispensable pour confirmer les bandes interdites obtenues ainsi que l'efficacité des deux structures étudiées.
- Des structures périodiques tridimensionnelles devraient être envisagées pour bloquer ou atténuer la propagation des ondes sismiques dans les trois directions de l'espace.
- Pour valider les résultats théoriques des structures périodiques permettant de bloquer la propagation des ondes sismiques dans les structures de génie civil, une étude expérimentale s'impose au niveau d'un laboratoire ou in-situ.

Références bibliographiques

- [1] M.S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, *Acoustic band structure of periodic elastic composites*, Phys. Rev. Lett. 71, 2022–2025 (1993).
- [2] E.N. Economou and M. M. Sigalas, *Classical wave propagation in periodic structures: Cermet versus network topology*, Phys. Rev. B 48, 13434–13438 (1993).
- [3] J. D. Achenbach. *Wave propagation in lamellar composite materials*. J. Acou. Soc. Am., 43:1451, 1968
- [4] B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, O. Hardouin Duparc, R. E. Camley, and A.A. Maradudin. *Sagittal elastic waves in infinite and semi-infinite superlattices*. Phys. Rev. B, 28:1711, 1983.
- [5] B. Djafari-Rouhani, A. A. Maradudin, and R. F. Wallis. *Rayleigh waves on a superlattice stratified normal to the surface*. Phys. Rev. B, 29: 6454, 1984.
- [6] M.P. Marder, *Condensed matter physics*. Edition Wiley 1960.
- [7] N. David Mermin Neil W. Aschcroft. *Physique des solides*. Edition EDP sciences 2002.
- [8] G.W. Stewart, *Acoustic wave filters*. Phys. Rev 20 :528, 1922.
- [9] J. Pierre, *ondes élastiques en milieu périodique et réfraction négative*, thèse de doctorat, université de paris VI (2011).
- [10] J. Vasseur, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and A-C. Hladky-Hennion. *Absolute forbidden bands and waveguiding in two-dimensional phononic crystal plates*. Phys. Rev. B, 77 (085415), 2008.
- [11] R. Martinez-Sala, J. Sancho, J. v Sanchez, V Gomez, J. Linares, and F. Meseguer. *Sound attenuation by sculpture*, Nature, 378 : 241, 1995
- [12] S. Mohammadi, A. Asghar Eftekhari, W. D. Hunt, and A. Adibi. *High-q micro-mechanical resonators in two-dimensional phononic crystal slab*. App. Phys. Lett., 94 : 051906, 2009
- [13] J. Gaofeng and S. Zhifei. *A new seismic isolation system and its feasibility study*. Earth Eng and Engineering vibration, 9: 75-82, 2010.
- [14] M. Oudich, *Contribution à l'étude des cristaux phononiques à résonance locale dans les régimes sonique et hypersonique : approches théorique et expérimentale*. Thèse de doctorat, université Henry Poincaré, Nancy I (2011).
- [15] Z. Hou, and B. M. Assouar, *Modeling of Lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method*, Phys. Lett. A 372, 2091 (2008).

- [16] S. Tamura, D. C. Hurley, and J. P. Wolfe, *Acoustic-phonon propagation in superlattices* Phys. Rev. B 38, 1427 (1988).
- [17] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng, *locally resonant sonic materials*, Science **289**, 1734 (2000).
- [18] A. Khelif, Y. Achou, S. Benchabane, V. Laude, B. Aoubiza. *Locally resonant surface acoustic wave band gaps in a two-dimensional phononic crystal of pillars on a surface*. Phys. Rev. B 81, 214303 (2010).
- [19] J.C. Hsu and T.T Wu. *Lamb waves in binary locally resonant phononic plates with two dimensional lattices*. Appl. Phys. Lett. **90**, 201904 (2007).
- [20] W. Xiao, G. W. Zeng and Y. S. Chen. *Flexural vibration band gaps in a thin plate containing a periodic array of hemmed discs*. Applied Acoustics **69**, 255 (2008).
- [21] G. Wang, D. Yu, J. Wen, Y. Liu, and X Wen. *One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures*. Physics Letters A 327, 512 (2004).
- [22] F. Van Der Biest, *Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés*, Thèse de doctorat, Université Paris 7 (2005).
- [23] S. Benchabane, *Guidage et filtrage des ondes dans les cristaux phononiques*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté (2006).
- [24] Z. Liu, C.T Chan, and P. Sheng. *Three-component elastic wave band-gap material*. Phy. Rev. B **65**, 165116 (2002).
- [25] P. Sheng, X. X. Zhang, Z. Liu, and C.T. Chan. *Locally resonant sonic materials*. Physica B **338**, 201 (2003).
- [26] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng. *Locally resonant sonic materials*. Science 289, 1734 (2000).
- [27] A Khelif, B. Aoubiza, S. Mohammadi, A. Adibi, and V. Laude. *Complete band gaps in two dimensional phononic crystal slabs*. Phys. Rev. E **74**, 046610 (2006).
- [28] B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, A. C. Hladky-Hennion, P. Deymier, F. Duval, B. Dubus, and Y. Pennec. *Absolute band gaps and waveguiding in free standing and supported phononic crystal slabs*. Photonics and Nanostructures. Fundamentals. And Applications. **6**, 32 (2008).
- [29] T-C. Wu, T-T. Wu, and J-C Hsu. *Waveguiding and frequency selection of lamb waves in plate with a periodic stubbed surface*. Phys. Rev. B 79, 104306 (2009).
- [30] E. Yablonovitch, *Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics*, Physical Review Letters, vol. 58, no. 20, pp. 2059–2062, 1987

- [31] B. Baykant ALAGÖZ, Serkan ALAGÖZ. *Seismic crystals and earthquake shield application*. CEJP-D-09-00056, Cornell university.
- [32] M. Brun, A.B. Movchan, I.S. Jones. *Phononic band gap systems in structural mechanics: slender elastic structures versus periodic waveguides*. J. Vib. Acous. In press (2012).
- [33] E. N. Economou et M. Sigalas, *Stop bands for elastic waves in periodic composite materials*. J. Acous. Soc. Am., 95, 1734 (1994).
- [34] C. Goffaux et J. P. Vigneron, *Theoretical study of a tunable phononic band gap system*. Phys. Rev. B, 64, 075118 (2001).
- [35] http://junon.u-3mrs.fr/ms01w004/sismo-des-ecoles/public-html/seisgram/ondes_sismiques.htm
- [36] http://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_sismique
- [37] P. Balandier, *cours de construction parasismique –volume1-*. DDE Martinique (2001).
- [38] R. Martínez-Sala, C. Rubio, L. M. García-Raffi, J. V. Sánchez-Pérez, E. A. Sánchez-Pérez et J. Llinares, *Control of noise by trees arranged like sonic crystals*. J. Sound Vib, 291,100 (2006).
- [39] F. Meseguer, M. Holgado, D. Caballero, N. Benaches, J. Sánchez-Dehesa, C. López et J. Llinares, *Rayleigh-wave attenuation by a semi-infinite two-dimensional elastic-band-gap crystal*. Phys. Rev. B, 59, 12169 (1999).

ANNEXE A

RESEAU RECIPROQUE ET ZONE DE BRILLOUIN IRREDUCTIBLE

Pour calculer les diagrammes de bandes il faut considérer pour chaque cristal, toutes les directions de propagation possibles. Comme en physique du solide, on montre que pour certaines symétries du cristal, on peut limiter l'étude aux vecteurs d'ondes k situés à l'intérieur d'une zone restreinte appelée zone de Brillouin irréductible. Le vecteur k varie le long des directions de hautes symétries de cette zone qui fait partie du réseau réciproque.

Nous allons définir dans la section suivante le réseau réciproque et la zone de Brillouin.

- **Réseau réciproque**

Considérons une structure périodique à deux dimensions représentée sur la figure A.1.

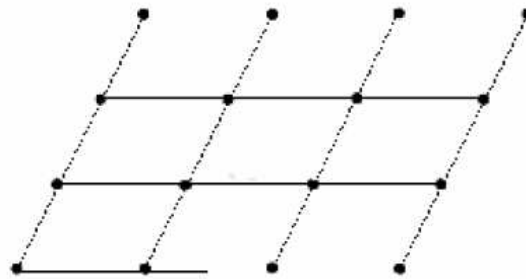


Figure A.1: réseau direct.

Sur cette figure apparaissent neuf mailles élémentaires, l'ensemble de ces mailles constitue un réseau direct. Nous pouvons obtenir une maille élémentaire de même surface de la manière suivante :

- on trace les lignes qui relient un nœud donné à tous ses voisins.
- on trace les médiatrices de ces segments.

Le plus petit volume enclos de cette façon est la maille élémentaire de Wigner-Seitz comme le montre la figure A.2.

De cette façon nous pouvons obtenir le réseau réciproque de n'importe quelle structure. Tout l'espace peut aussi être rempli par ces mailles.

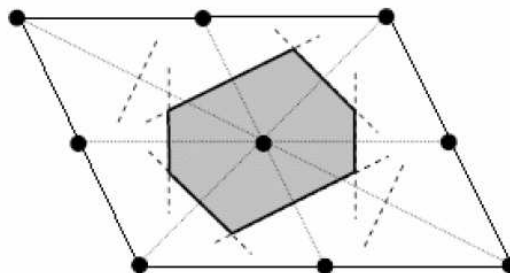


Figure A.2 : maille élémentaire de Wigner-seitz du réseau direct.

- **Zone de Brillouin irréductible**

La fréquence des ondes planes se propageant dans un milieu bidimensionnel forme une fonction périodique du vecteur $\vec{a}$, qui définit la direction de propagation, dans le réseau réciproque. La plus petite aire issue de ces vecteurs $\vec{a}$ est une zone fondamentale qui s'appelle : *la première zone de Brillouin*.

Pour construire cette zone, nous plaçons au centre de la cellule d'origine Γ du réseau réciproque pour tracer des vecteurs joignant l'origine aux nœuds voisins de ce même réseau. Nous construisons ensuite les médiatrices de ces vecteurs.

La plus petite aire interceptée par ces médiatrices est la zone de Brillouin irréductible (figure A.3). La zone de Brillouin irréductible contient l'ensemble des vecteurs d'ondes du photon qui permettent de décrire de façon complète le diagramme de bandes.

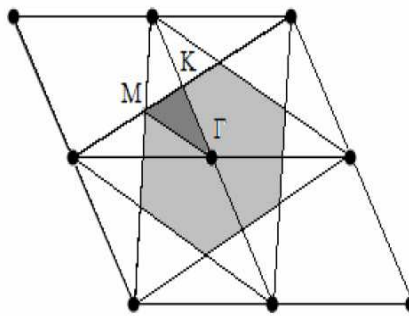


Figure A.3 : construction de la zone de Brillouin irréductible.

La zone de Brillouin irréductible (gris foncé) correspond à un triangle dont les sommets sont les points de haute symétrie de l'espace réciproque Γ , M et K. Pour définir la structure de bande du cristal photonique correspondant à ce réseau, on représentera la variation de fréquence des différents modes propres en fonction du module du vecteur d'onde le long des directions de haute symétrie ΓM , ΓK et ΓM .

Nous présentons sur la figure A.4, plusieurs types de réseaux : réseau carré, réseau triangulaire et réseau hexagonal.

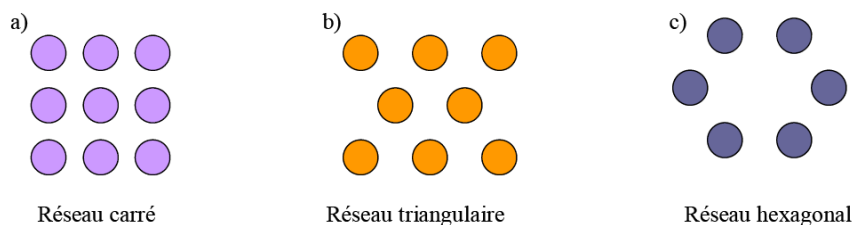


Figure A.4: différents réseaux.

- **Le réseau carré**

La maille primitive d'un réseau carré est formée d'un côté de longueur « a ». Sa zone de Brillouin irréductible est un triangle dont les points remarquables sont les points Γ , X et M (figure A.5.c). Pour obtenir les fréquences autorisées à se propager dans le cristal photonique,

nous faisons balayer au vecteur d'onde k , le contour défini par les points de symétrie de la zone de Brillouin.

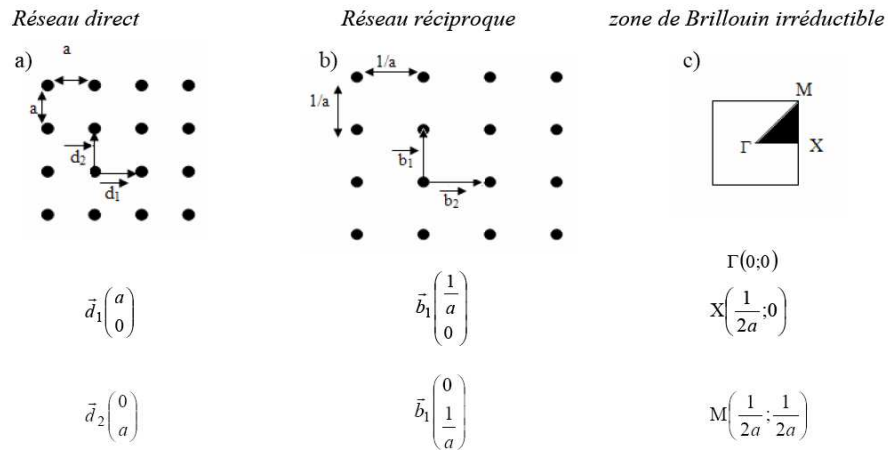


Figure A.5 : Représentation a) d'un réseau carré ; b) de son réseau réciproque ; c) de sa zone de Brillouin irréductible.

• Le réseau triangulaire

La maille primitive est un triangle équilatéral. Chaque nœud du réseau triangulaire est espacé de son proche voisin d'une même distance a (figure A.6). La zone de Brillouin irréductible est un hexagone. Ses points remarquables sont: Γ , P et Q.

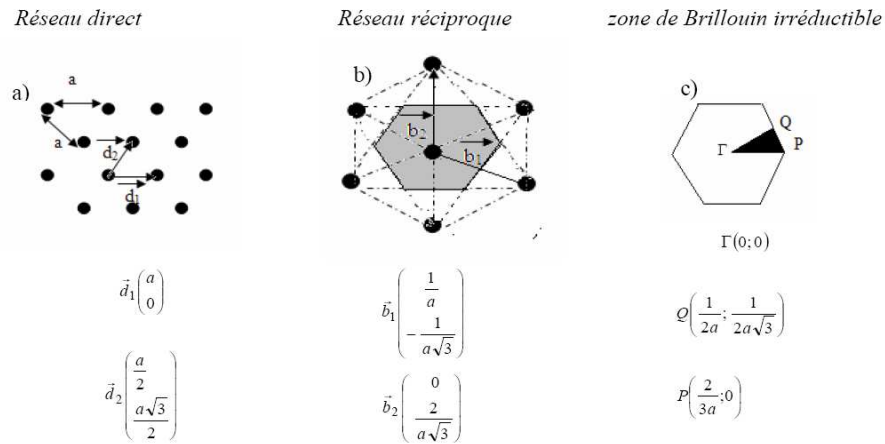


Figure A.6 : Représentation a) d'un réseau triangulaire; b) de son réseau réciproque ; c) de sa zone de Brillouin irréductible.

La structure triangulaire est en réalité un cas particulier d'une classe des structures hexagonales. Pour une même structure, la bande interdite du réseau carrée est nettement plus étroite que celle du réseau triangulaire. Ce type de réseau nécessite un contraste d'indice moins élevé pour créer une bande interdite que pour une structure carrée.

• Le réseau hexagonal

On peut obtenir un réseau hexagonal en ôtant quelques motifs au réseau triangulaire précédent. La figure A.7 en donne les principales caractéristiques.

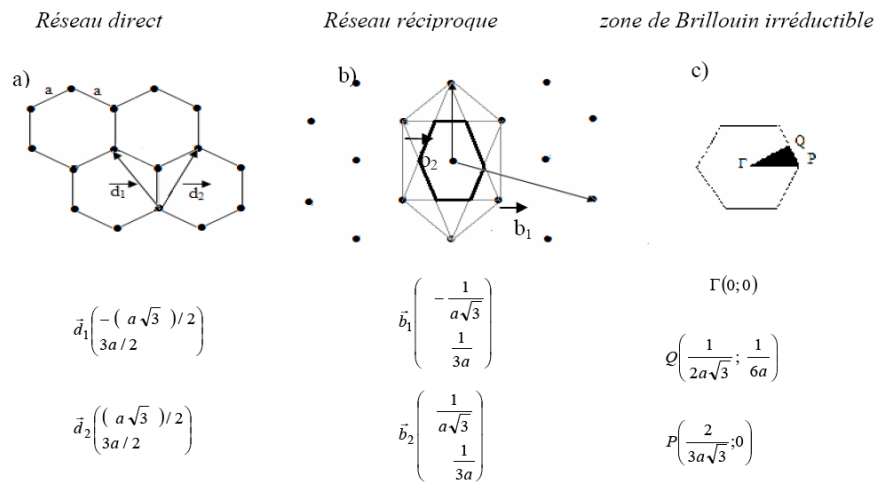


Figure A.7: Représentation a) d'un réseau hexagonal; b) de son réseau réciproque ; c) de sa zone de Brillouin irréductible.

ANNEXE B

MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS

Dans l'objectif de modéliser notre problème par éléments finis, COMSOL Multiphysics se montre en premier temps, adapté à ce domaine de travail vu sa performance dans le couplage de différents modules multi-physiques et la simplicité dans le post-traitement des données collectées. Il propose des solveurs performants qui peuvent résoudre numériquement des problèmes de très grande taille. Grâce à des modèles prédéfinis, on peut simuler des phénomènes physiques comme l'électrostatique, la mécanique des fluides, le transfert thermique ou la déformation des matériaux, et les coupler entre eux avec facilité grâce à une interface graphique ou avec d'autres algorithmes comme Matlab.

La principale raison justifiant le choix du logiciel d'éléments finis COMSOL Multiphysics 3.4 est la modification des paramètres du script sur Matlab, et ce à travers :

- La modification des propriétés physiques des différents matériaux du modèle.
- La création de boucles itératives sur le script Matlab afin de balayer l'ensemble des directions de propagation des ondes dans la première zone de Brillouin.
- Obtention des courbes de dispersion sur Matlab, en utilisant les résultats de l'analyse aux fréquences propres pour chaque valeur du vecteur d'onde K [K_x , K_y] dans la première zone de Brillouin.

• Etapes de modélisation

La résolution d'un problème à l'aide de COMSOL suit la succession logique des étapes suivantes (figure B.1):

1. Création de la géométrie ;
2. Définition des propriétés physiques intervenant dans les équations aux dérivées partielles ;
3. Définition des conditions aux limites ;
4. Choix du Maillage ;
5. Résolution numérique ;
6. Visualisation des résultats.

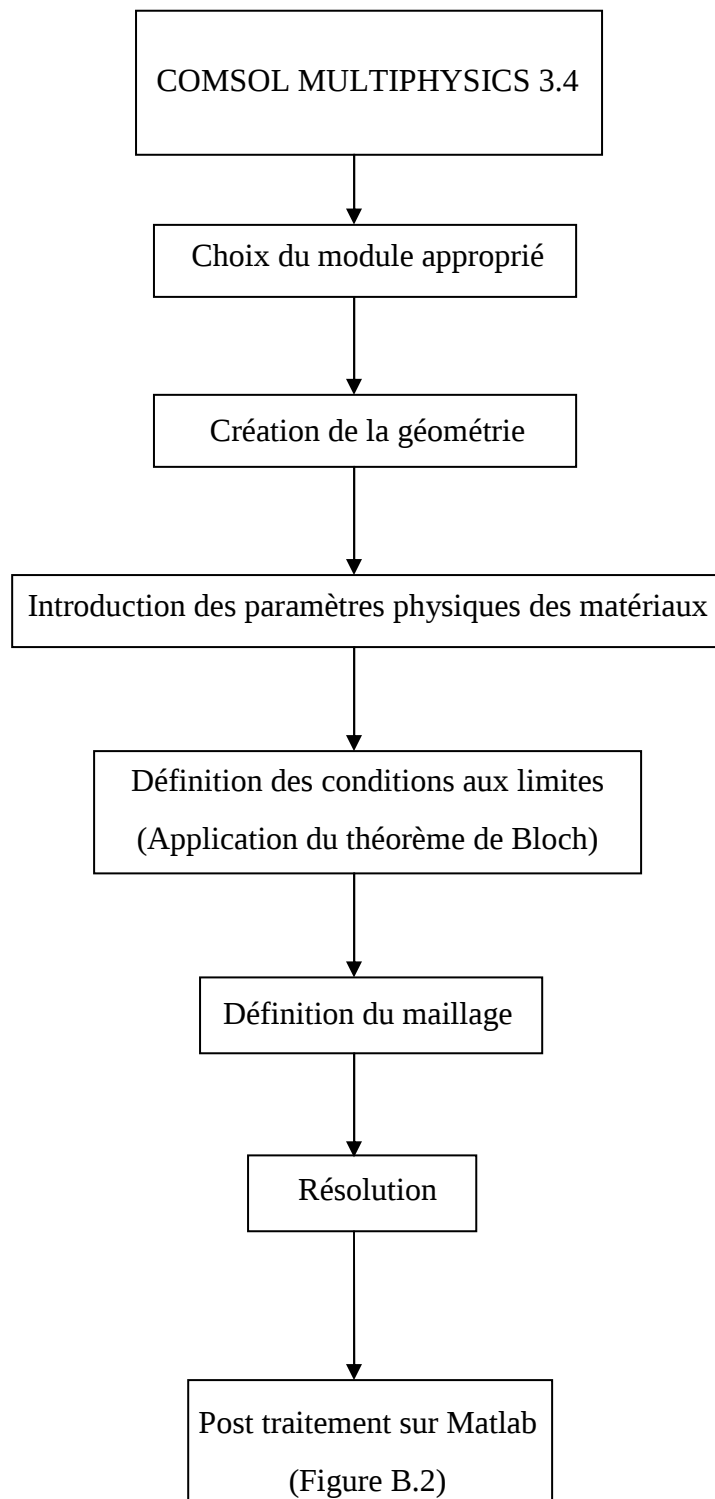


Figure B.1 : résolution d'un problème en éléments finis sur COMSOL.

```

% Geometry
a=1.0;
r1=0.490;
r2=0.443;
r3=0.290;
r4=0.19;
g1=square2(a,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g2=circ2(r1,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g3=geomcomp({g1,g2},'ns',{'g1','g2'},'sf','g1-g2','edge','none');
g4=circ2(r1,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g5=circ2(r2,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g6=geomcomp({g4,g5},'ns',{'g4','g5'},'sf','g4-g5','edge','none');
g7=circ2(r2,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g8=circ2(r3,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g9=geomcomp({g7,g8},'ns',{'g7','g8'},'sf','g7-g8','edge','none');
g10=circ2(r3,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g11=circ2(r4,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g12=geomcomp({g10,g11},'ns',{'g10','g11'},'sf','g10-g11','edge','none');
g13=circ2(r4,'base','center','pos',{0,0},'rot',0);
g14=geomcomp({g3,g6,g9,g12,g13},'ns',{'g3','g6','g9','g12','g13'},'sf','g3+

```

Figure B.2 : définition de la géométrie sur script Matlab.

```

%-----
% parametres des materiaux
fid=fopen('données matériauxD31.dat','r');
data=fscanf(fid,'%f');
%vecteur des coefficients de poisson
for ii=1:3
    Nu(ii)=data(ii);
end
%vecteur des masses volumiques des materiaux
for ii=1:3
    jj=ii+4;
    rho(ii)=data(jj);
end
% vecteur des modules de young
for ii=1:3
    jj=ii+8;
    E(ii)=data(jj);
end
equ.nu={Nu(1),Nu(2),Nu(3)};
equ.rho={rho(1),rho(2),rho(3)};
equ.E={E(1),E(2),E(3)};

```

Figure B.3 : définition des paramètres physiques des matériaux.

```

%Matrices d'elasticite des materiaux 2D
%Materiau 1 beton
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+13;
    D1(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(1)/((1+Nu(1))*(1-2*Nu(1)));
end
%Materiau 2 caoutchouc
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+29;
    D2(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(2)/((1+Nu(2))*(1-2*Nu(2)));
end
%Materiau 3 acier
for ii=1:4
    jj=4*(ii-1)+45;
    D3(ii,:)=data(jj:jj+3)*E(3)/((1+Nu(3))*(1-2*Nu(3)));
end

equ.D={D1(1,1),D1(1,2),D1(1,3),D1(1,4);...
        D1(2,1),D1(2,2),D1(2,3),D1(2,4);...
        D1(3,1),D1(3,2),D1(3,3),D1(3,4);...
        D1(4,1),D1(4,2),D1(4,3),D1(4,4)},...
        {D2(1,1),D2(1,2),D2(1,3),D2(1,4);...
        D2(2,1),D2(2,2),D2(2,3),D2(2,4);...
        D2(3,1),D2(3,2),D2(3,3),D2(3,4);...
        D2(4,1),D2(4,2),D2(4,3),D2(4,4)},...
        {D3(1,1),D3(1,2),D3(1,3),D3(1,4);...
        D3(2,1),D3(2,2),D3(2,3),D3(2,4);...
        D3(3,1),D3(3,2),D3(3,3),D3(3,4);...
        D3(4,1),D3(4,2),D3(4,3),D3(4,4)}};
%-----

```

Figure B.4 : définition des paramètres physiques des matériaux.

```

] for dom=1:3
    nbrepas=30;
    nvpropre=10;
] for jj=1:nbrepas+1
    %variation de Kxx
    if dom==1
        Kxx=jj*pi*(jj-1)/(nbrepas);
    elseif dom==2
        Kxx=jj*pi;
    elseif dom==3
        Kxx=jj*(pi-(pi*(jj-1)/(nbrepas)));
    end
    if Kxx==0.0
        Kxx=0.000001;
    end
    %variation de Kyy
    if dom==1
        Kyy=0;
    elseif dom==2
        Kyy=jj*pi*(jj-1)/(nbrepas);
    elseif dom==3
        Kyy=jj*(pi-(pi*(jj-1)/(nbrepas)));
    end
    if Kyy==0.0
        Kyy=0.000001;
    end
    fem.const={...
        'img'      sqrt(-1) ...
        'Kx'      Kxx, 'Ky'      Kyy};

```

Figure B.5 : Variation du vecteur d'onde K le long des trois directions de symétrie de la 1^{re} zone de Brillouin.

```

-----
elem.g = {'1'};
clear pnt
pnt.constr = {'pconstr1-(u*exp(Kx)*exp(Ky))','pconstr2-(v*exp(Kx)*exp(Ky))'};
pnt.cpoints = {'2','2'};
pnt.ind = {'20'};
clear bnd
bnd.constr = {'0','0','pconstr3-(u*exp(Ky))','pconstr4-(v*exp(Ky))', ...
    {'pconstr1-(u*exp(Kx))','pconstr2-(v*exp(Kx))','0','0'}};
bnd.cpoints = {'2','2','2','2','2','2','2','2'};
bnd.ind = {'3','4'};
elem.geomdim = {pnt,bnd,{} };

```

Figure B.6: définition des conditions aux limites et application du théorème de Bloch.

```

        if dom==1
fid= fopen('béta3.25GX1.dat','a');
for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur lambda
    GXMG(in,jj)=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
    GX(in,jj)=GXMG(in,jj);
    fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,GX(in,jj));
    jj,
    GX(in,jj),
end
end
        if dom==2
fid= fopen('béta 3.25XM1.dat','a');
for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur lambda
    GXMG(in,jj+nbrepas+1)=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
    XM(in,jj)=GXMG(in,jj+nbrepas+1);
    fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,XM(in,jj));
    jj,
    XM(in,jj),
end
end
        if dom==3
fid= fopen('béta 3.25MG1.dat','a');
for in=1:length(lambda) %length renvoi a la longueur du vecteur lambda
    GXMG(in,jj+2*nbrepas+2)=-1.0*imag(lambda(1,in))/(2*pi);
    MG(in,jj)= GXMG(in,jj+2*nbrepas+2);
    fprintf(fid,'%15.4f %15.15f\n',1.0*jj,MG(in,jj));
    jj,
    MG(in,jj),
end
end
end
end
plot(GXMG, '-');

```

Figure B.7 : post-traitement et visualisation des résultats.