

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et d'Informatique  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude  
de MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : Commande des systèmes

*Présenté par*  
**MALKI Karima**  
**MILOUDI Nassiba**

Mémoire dirigé par **Mme NAIT ABDESSELAM Aldjia**

Thème

**Estimation d'état par étoile de Kleene dans  
l'algèbre max-plus application à un atelier  
d'assemblage**

*Mémoire soutenu publiquement le 25 septembre 2014 devant le jury composé de :*

**M Aldjia NAIT ABDESSELAM**

Maitre assistante classe A, UMMTO, Rapporteur

**M Ahmed MAIDI**

Maitre de conférences classe A, UMMTO, Président

**M Redouane KARA**

Maitre de conférences classe A, UMMTO, Examineur

**M Karima TEBANI**

Attachée de recherche, CDTA , Examineur

## *Remerciements*

Au terme de ce travail nous tenons à témoigner notre profonde gratitude à M<sup>me</sup> A. NAIT ABDESSELAM, notre promotrice, pour sa patience et gentillesse, ainsi de nous avoir aidé tout au long de notre travail, prodigué ces conseils et ses encouragements.

Nous vifs remerciements vont également aux membres de jury qui nous feront l'honneur de juger notre travail particulièrement, M<sup>r</sup> R. KARA pour sa patience, ses conseils et remarques pertinentes, et pour son guide tout au long de notre travail, ainsi que M<sup>elle</sup> K. TEBANI pour son aide, ses encouragements et sa disponibilité.

On tien ainsi a remercier notre chef de département Mr O. BENSIDHOUM pour son soutien durant les diverses impasses et tout les enseignants de départent Automatique.

Pour tous ceux qui nous ont porté de l'aide de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

## *Dédicaces*

On dédie ce travail a :

- ❖ Mes chers parents, sans leurs sacrifices je n'en serais jamais arrivée là ;
- ❖ Mes chers frères *Mohand* et *Fateh* ;
- ❖ Ma chère sœur *Fatiha* ;
- ❖ Mon petit *Yacine* et ma petite *Rania* ;
- ❖ Mes chères grands mères ;
- ❖ Mes chers(es) oncles et tentes en particulier *Hacène*, *Boualem* et *Nacéra*;
- ❖ Touts(es) mes amis (es) en particulier *Lamia.Z* et *Meziane*;
- ❖ Ma chère *Radia et sa famille* ;
- ❖ Ma chère copine *Nassiba*.

*Karima.*

- ❖ Mes chers parents ;
- ❖ Mes chers frères ;
- ❖ Mes chères sœurs ;
- ❖ Ma chère nièce *Yesma* ;
- ❖ Mes chers neveux *Elyas* et *Soso* ;
- ❖ Ma chère copine *karima* ;
- ❖ Touts(es) mes amis(es).

*Nassiba.*

*A tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin en particulier Samir.H*

$\oplus$  : Addition dans un dioïde.

$\otimes$  : Multiplication dans un dioïde.

$\varepsilon$  : Élément neutre pour la loi  $\oplus$ .

$e$  : Élément neutre pour la loi  $\otimes$ .

$\oslash$  : Soustraction à gauche dans un dioïde.

$\oslash$  : Soustraction à droite dans un dioïde.

$\top$  : Plus grande élément dans un dioïde.

$A^*$  : Etoile de Kleene de la matrice  $A$  ( $A^* = E \quad A \quad A^2 \quad \dots$ ).

$a^*$  : Etoile de Kleene d'un scalaire ( $a^* = e \quad a \quad a^2 \quad \dots$ ).

$a^+$  : Dérivée de l'étoile de Kleene ( $a^+ = a \quad a^2 \quad \dots$ ).

$D$  : Dioïde.

$D^{n \times n}$  : Dioïde matriciel.

$\wedge$  : Borne supérieur dans un dioïde.

$\vee$  : Borne supérieur dans un dioïde

$\mathbb{R}_{max}$  : Dioïde complet  $(\mathbb{R} \quad \{-\infty, +\infty\}, max, +)$ , appelé aussi algèbre  $(max, +)$ .

$\mathbb{R}_{min}$  : Dioïde complet  $(\mathbb{R} \quad \{-\infty, +\infty\}, min, +)$ , appelé aussi algèbre  $(min, +)$ .

$L_a$  : Produit a gauche par a ,  $L_a(x) = a \quad x$ .

$R_a$  : Produit a droite par a ,  $R_a(x) = x \quad a$ .

$L_a^\#$  : Résidué de l'application  $L_a$ .

$R_a^\#$  : Résidué de l'application  $R_a$ .

$a \oslash b$  : Notion utilisée pour représenter  $L_a^\#(b)$ .

$b \oslash a$  : Notion utilisée pour représenter  $R_a^\#(b)$ .

$P$  : Ensemble des places  $P = \{p_1, p_2, p_3 \dots\}$ .

$T$  : Ensemble des transitions  $T = \{t_1, t_2, t_3 \dots\}$ .

## Notations

---

$W$ : Fonction poids associée aux arcs  $W(P \times T) \quad (T \times P)$ .

$P_{ij}$ : La place qui relie la transition  $t_j$  à  $t_i$ .

$\tau_{ij}$ : la temporisation de la place  $p_{ij}$ .

$m_{ij}$ : Le marquage de la place  $p_{ij}$ .

$m^{max}$ : Le plus grand marquage initial des places du graphe d'évènement considéré  
( $m^{max} = \max\{m_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}$ ).

$\tau^{max}$ : La plus grande temporisation d'un graphe d'évènement considéré ( $\tau^{max} = \max\{\tau_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}$ ).

# Table des figures

---

<b>Figure 1.1</b> Graphe orienté et valué .....	11
<b>Figure 2.1</b> Exemple d'un RDP marqué .....	22
<b>Figure 2.2</b> Evolution du marquage d'un réseau de Petri .....	23
<b>Figure 2.3</b> Exemple de graphe des marquages accessibles .....	24
<b>Figure 2.4</b> Franchissement d'une transition source .....	25
<b>Figure 2.5</b> Le franchissement d'une transition puits .....	25
<b>Figure 2.6</b> Réseau de Petri borné à 3 .....	26
<b>Figure 2.7</b> Réseau de Petri vivant .....	26
<b>Figure 2.8</b> Graphe d'état .....	27
<b>Figure 2.9</b> Graphe d'événement .....	27
<b>Figure 2.10</b> Conflit et sans conflit .....	28
<b>Figure 2.11</b> RDP pas à choix libre .....	28
<b>Figure 2.12</b> RDP pas simple .....	29
<b>Figure 2.13</b> RDP pur et impur .....	29
<b>Figure 2.14</b> Concurrence et synchronisation dans les Rdp .....	30
<b>Figure 2.15</b> Exemple d'un graphe d'événements temporisés .....	32
<b>Figure 2.16</b> Graphe d'événements P- temporisés .....	37
<b>Figure 2.17</b> Graphe d'événements temporisés étendu .....	39
<b>Figure 2.18</b> Graphe d'événements temporisés étendu .....	42
<b>Figure 3.1</b> Reconstruction d'état à partir de l'entrée et la sortie .....	44
<b>Figure 3.2</b> Exemple d'atelier d'assemblage .....	51

# Sommaire

---

## Sommaire

### Table des figures

### Introduction générale ..... 1

### CHAPITRE 1 : Outils algébriques

Introduction .....	3
1. Structures ordonnées et treillis .....	3
1.1 Relation d'ordre et structures ordonnées.....	3
1.2 Demi -treillis et treillis .....	4
2. Eléments de la théorie des dioïdes .....	5
2.1 Notions de base sur les dioïdes .....	5
2.2 Relation d'ordre dans un dioïde.....	6
2.3 Dioïdes et treillis .....	6
2.4 Applications définies sur des dioïdes .....	7
3. Calcul matricielle dans les dioïdes .....	9
3.1 Somme de matrices .....	9
3.2 Produit de matrices.....	9
3.3 Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde .....	10
4. Résolution d'équation dans un dioïde .....	12
4.1 Théorie de la résiduation .....	13
4.2 Résolution d'équation $ax = b$ et $xa = b$ .....	13
4.3 Résiduation dans le cas matricielle $AX = B$ et $XA' = B'$ .....	14
4.4 Résolution d'équation par étoile de Kleene .....	15
Conclusion .....	18

# Sommaire

---

## CHAPITRE 2: Modélisation des Graphes d'Événements temporisés dans les dioïdes

Introduction .....	19
1. Systèmes à événements discrets .....	20
2. Les Réseaux de Petri (RDP).....	20
2.1 Les atouts des Réseaux de Petri .....	21
2.2 Rappels et notions de base des Réseaux de Petri .....	21
2.3 Marquage d'un RDP .....	22
2.4 Tir des transitions .....	22
2.5 Ensemble des marquages accessibles.....	24
2.6 Transitions source et puits.....	25
2.7 Quelques propriétés des RDPs .....	25
2.7.1 Réseau de pétri borné .....	26
2.7.2 Réseau de Petri vivant.....	26
2.8 Classes de Réseaux de Petri .....	27
3. Les Graphes d'événements temporisés .....	29
3.1 Synchronisations et concurrences .....	29
3.2 Propriétés des graphes d'événements .....	30
3.2.1 Introduction du temps dans les graphes d'événements(GET).....	31
3.2.2 Présentation des (GET) dans l'algèbre des dioïdes.....	32
4. Modèle linéaire des Graphes d'événements temporisés .....	33
4.1 Fonctions compteurs, domaine temporel .....	33
4.2 Fonctions dateurs, domaine événementiel .....	36
5. Exemple.....	37
Conclusion .....	43

# Sommaire

---

## CHAPITRE 3 : Estimation d'états par étoile de Kleene

Introduction .....	44
1. Rappels sur les observateurs .....	45
1.1 Observateurs en continu .....	45
1.2 Observateur dans l'algèbre max-plus .....	46
1.2.1 Observabilité des graphes d'événements temporisés .....	46
2. Estimation d'état par étoile de Kleene .....	46
2.1 Principe de la méthode d'estimation par étoile de Kleene .....	46
3. Développement de la méthode de résolution par étoile de Kleene .....	48
3.1 Formulation du système d'inéquation .....	48
3.2 Construction d'un système d'inéquations particulières en introduisant les CBDs .....	48
3.3 Résolution du système par étoile de Kleene .....	50
4. Exemple d'application d'un atelier d'assemblage .....	50
Conclusion .....	59
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>60</b>
Annexe .....	61

## Résumé

Les systèmes à événements discrets mettent en jeu des phénomènes de synchronisation, nous avons étudié une de ces systèmes qui s'appelle Graphes d'événements temporisés. Ces systèmes peuvent être modélisés par des équations linéaires dans l'algèbre de type  $(\max,+)$ . Cette propriété a motivé l'élaboration de ce qu'on appelle communément la théorie des systèmes linéaire dans les dioïdes.

Dans ce mémoire, nous avons abordé dans un premier temps le problème de l'estimation des variables d'états, cette approche se base sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant l'étoile de Kleene, afin de résoudre le problème d'estimation par l'étoile de Kleene, il est important de reformuler le modèle d'état sous forme d'un problème du type point fixe. La résolution nous a conduit à introduire un estimateur optimal en un temps fini et sur un horizon fini permettant d'estimer le plus grand état sous la condition de l'observabilité structurelle.

Ensuite, pour mettre en œuvre cette synthèse, nous avons appliqué l'approche sur un atelier d'assemblage.

**Mots-clés :** Graphes d'événements temporisés, algèbre  $(\max,+)$ , dioïde, étoile de Kleene, estimation d'état, observabilité structurelle, systèmes d'assemblage.

# Introduction générale

### Introduction générale

L'automatique classique considère des systèmes dynamiques où le changement d'état dépend du temps. Le comportement des systèmes dynamiques en automatique classique est souvent modélisé par des équations, différentielles ou aux différences. En revanche, les Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SDED) correspondent à des processus dont l'état change à l'occurrence d'un événement. Cela recouvre un grand nombre de processus comme les ateliers flexibles [14], [15], les réseaux de transport, les systèmes informatiques [27], les systèmes multimédia, etc.

Parmi les différents formalismes de modélisation, les réseaux de Petri [11], [21] jouent un rôle important, présentant la caractéristique d'être un outil à la fois graphique et mathématique de modélisation. L'emploi de ces graphes pour spécifier et analyser ces systèmes, s'est généralisé ces dernières années, car ils permettent de décrire des phénomènes d'assemblage, de synchronisation, de cumul, de partage de ressource. Parmi la multitude des modèles développés, deux types de réseaux de Petri se dégagent indiscutablement : les graphes d'états et les graphes d'événements. Pour cette deuxième catégorie, la classe des graphes d'événements temporisés joue un rôle important en raison de son comportement déterministe, moyennant certaines hypothèses car elle intègre explicitement le temps. L'évolution du système est alors décrite par des équations définies dans un dioïde, c'est à dire un semi-anneau idempotent, avec un nouveau type de linéarité par rapport à cette algèbre.

La théorie des dioïdes [5] a fait l'objet d'un certain nombre de contributions depuis les années 50 et ses premières ébauches de formalisation datent de la fin des années 70. Depuis l'introduction de cette théorie, de nombreux efforts ont été entrepris afin de transposer ou d'adapter dans cette structure les concepts et résultats de la théorie des systèmes linéaires. L'interprétation de chaque variable est par exemple, pour les dateurs dans l'algèbre  $(max, +)$  que chaque variable  $x_i(k)$  représente la date du  $k^{eme}$  tir de la transition  $x_i$ ,  $\oplus$  correspond à l'opération maximum tandis que l'addition usuelle joue le rôle de la multiplication qui est notée  $\otimes$ .

En dehors du cadre des systèmes linéaires, peu de résultats sont connus pour l'estimation des variables d'états dans un système à événements discrets. Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche  $(max, +)$ , ont été développés en Mars 2004 par Laurent Hardouin et Carlos Maia [22], il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'observation des systèmes à événements discrets dans les dioïdes. La conception d'un tel observateur nécessite la connaissance du modèle et les conditions initiales qui permettent de caractériser le vecteur d'état par une itération directe de l'équation d'état [17]. L'objectif de notre mémoire est d'appliquer cette approche basée sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant non la théorie de la résiduation mais l'étoile de Kleene, sur un atelier d'assemblage.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans un premier chapitre, nous donnons les rappels nécessaires qui concernent les propriétés des demi-anneaux idempotents, ou dioïdes. Il s'agira donc tout d'abord de présenter la théorie des treillis, aboutissant à la notion de structure ordonnée, sur laquelle sont basées les dioïdes. Nous mentionnons également les méthodes pour résoudre des équations à valeurs dans un dioïde, qui nous permettront d'obtenir des modèles de systèmes sous forme canonique.

Le chapitre 2 qui a pour objectif de présenter la modélisation graphique et analytique de systèmes à événements discrets et, plus précisément, de systèmes de production. La dynamique de ces systèmes est capturée par le décompte ou la datation d'événements ayant lieu dans le système. Sous forme de réseau de Pétri, cette considération consiste en des applications compteur ou dateur liées aux différentes transitions de ce graphe et qui permettront de définir les états du système modélisé. Nous insistons particulièrement sur le formalisme des graphes d'événements temporisés, qui est le seul à fournir un cadre déterministe pour une représentation analytique linéaire d'un système dans un dioïde.

Chapitre 3 qui a pour objectif de trouver la borne maximale de  $x(k)$  pour  $k$  allant de  $k_0$  à  $k_f$  sachant que la commande  $u(k)$ , la sortie et le modèle sont supposés connus sur le même horizon d'observation. Nous avons proposé d'appliquer sur un atelier de production cette approche d'estimation qui permet d'obtenir cette borne de l'état en un temps fini.

Une annexe présente le script Scilab utilisé pour le calcul de résultats pour l'exemple de l'atelier d'assemblage proposé au long du dernier chapitre. Il s'agit de script utilisant le Toolbox *Maxplus*.

Enfin, nous clôturons notre mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives.

**CHAPITRE 1 :**

# Outils algébriques

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue la théorie de base des dioïdes[2], [3], [6], [8]. Les notations, les outils algébriques et les principaux concepts qui seront utilisés dans ce manuscrit seront précisés. Dans un premier temps, nous introduirons les notions de base relatives aux structures ordonnées et aux treillis[7], [9]. Ensuite, nous présenterons les dioïdes qui sont des structures algébriques que l'on peut munir d'un ordre naturel à partir de leur loi additive, et de ce fait, ils peuvent être vus comme des treillis. Enfin, nous présentons les techniques propres aux dioïdes permettant de résoudre des équations. La première, est la théorie de résiduation[1] qui est une alternative au problème d'inversion d'application isotones définis sur les dioïdes et qui permet sous des hypothèses de continuité de caractériser la plus grande solution de l'inéquation  $ax \leq b$  ou la plus petite solution de l'inéquation  $ax \geq b$ . La seconde, est l'étoile de Kleene qui concerne les équations au point fixe et qui nous intéresse dans la suite de notre travail.

### 1. Structures ordonnées et treillis

L'association d'une relation d'ordre avec un ensemble (ou sous ensemble) définit un ensemble ordonné qui à son tour introduit un treillis. Nous rappelons brièvement dans cette partie un ensemble de notions, de définitions et de propriétés sur les ensembles ordonnés et les treillis.

#### 1.1. Relation d'ordre et structures ordonnées

On peut définir sur l'ensemble des entiers naturels les deux relations binaires suivantes :

$x \leq y$  : la relation d'ordre habituelle.

$x \text{ div } y$  :  $x$  divise  $y$  (ou  $y$  est un multiple de  $x$ ).

Ces deux relations possèdent des propriétés communes. Elles sont à la fois :

- Réflexive (tout élément  $x$  de  $\mathbb{N}$  est en relation avec lui-même)

$$\forall x \in \mathbb{N} : x \leq x$$

$$x \text{ div } x.$$

- Antisymétrique  $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \leq y \text{ et } y \leq x \implies x = y$

$$x \text{ div } y \text{ et } y \text{ div } x \implies x = y.$$

- Transitive  $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : x \leq y \text{ et } y \leq z \implies x \leq z$

$$x \text{ div } y \text{ et } y \text{ div } z \implies x \text{ div } z.$$

On dit alors que se sont des relations d'ordres.

**Définition 1.1 (Ensemble ordonné).** Un ensemble  $S$  est ordonné, s'il est muni d'une relation d'ordre notée  $\leq$ . On le notera  $(S, \leq)$

**Définition 1.2 (Ordre partiel).** Soit un ensemble ordonné  $(S, \leq)$ . S'il existe deux éléments  $x, y \in S$ , tels que  $x$  et  $y$  sont incomparables (c-à-d  $x, y \in S$   $x \not\leq y$  et  $y \not\leq x$  et seront notés  $x \parallel y$ ), alors la relation d'ordre  $\leq$  est partielle. On dit aussi que  $(S, \leq)$  est partiellement ordonné.

**Exemple 1.** Soit l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . La relation d'ordre  $\leq$  est définie comme suit :  $x \leq y$  si et seulement si,  $x$  divise  $y$ .

Il est clair alors que  $(S, \leq)$  est partiel ( $3 \not\leq 5$  car 3 n'est pas divisible par 5 dans  $\mathbb{N}$  et inversement).

**Définition 1.3 (Ordre total).** Soit  $(S, \leq)$ , si  $\forall x, y \in S$  tels que  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ . On dit que l'on a un ordre total et  $S$  est appelé un ensemble totalement ordonné ( $x$  et  $y$  sont comparable).

**Exemple 2.**  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}, \leq)$  et  $(\mathbb{Q}, \leq)$  où  $\leq$  est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.

**Définition 1.4 (Majorant, minorant).** Soit  $S$  un ensemble muni d'une relation d'ordre  $\leq$  et  $U$  un sous ensemble de  $S$ . On appelle minorant de  $U$  tout élément  $m$  de  $S$  tel que  $m \leq x \forall x \in U$ ,  $m \leq x$ . De même, on appelle majorant de  $U$  tout élément  $M$  de  $S$  tel que  $x \leq M \forall x \in U$ ,  $x \leq M$ .

**Définition 1.5 (Bornes d'un ensemble).** Un sous ensemble  $U \subseteq S$  est dit borné s'il admet à la fois un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de  $U$  a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé borne supérieure de  $U$  et il est noté  $\sup(U)$  ou  $\bigvee U$ . De même, lorsque l'ensemble des minorants de  $U$  a un plus grand élément, on l'appelle borne inférieure de  $U$  et il est noté  $\inf(U)$  ou  $\bigwedge U$ .

## 1.2. Demi treillis et treillis[2], [5]

**Définition 1.6 (Demi-treillis).** Un *sup-demi-treillis* est un ensemble  $S$  ordonné, dans lequel tout couple d'éléments  $(x, x')$  (ou toute famille finie) admet une *borne supérieure* (le plus petit majorant) notée  $\sup(x, x')$  ou  $x \vee x'$ . De même, un *inf-demi-treillis* est un ensemble  $S$  ordonné, dans lequel tout couple d'éléments  $(x, x')$  admet une borne inférieure notée  $\inf(x, x')$  ou  $x \wedge x'$ .

**Définition 1.7 (Treillis).** Un treillis est un ensemble ordonné  $(S, \leq)$  qui est à la fois un *sup-demi-treillis* et un *inf-demi-treillis* ; autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

**Exemple 3.** L'ensemble des intervalles de  $\mathbb{R}$  ordonné par l'inclusion a une structure de treillis, ou la borne supérieure (respectivement inférieure) est donnée par  $A \vee B = A \cup B$  (respectivement  $A \wedge B = A \cap B$  avec l'ensemble vide comme plus petit sous-ensemble).

**Définition 1.8 (Treillis complet).** Un *sup-demi-treillis* (respectivement un *inf-demi-treillis*) est dit *sup* complet (resp. *inf* complet) si tout sous-ensemble, fini ou infinis de  $S$  admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans  $S$ . Un treillis est dit complet s'il est à la fois *inf*-complet et *sup*-complet.

## 2. Éléments de la théorie des dioïdes

Dans cette partie, nous rappelons les fondements concernant les demi-anneaux idempotents ou dioïdes, et nous montrons aussi le lien qui existe entre ces derniers et les structures ordonnées. Les dioïdes apparaissent ainsi comme des demi-treillis. De plus, un dioïde complet a la structure d'un treillis complet.

### 2.1. Notions de base sur les dioïdes

**Définition 1.9 (Monoïde).** Un monoïde noté  $(D, \oplus)$  est une structure algébrique basée sur un ensemble, l'ensemble  $D$  et muni d'une loi de composition interne notée  $\oplus$  telle que :

- La loi  $\oplus$  est associative :  $\forall a, b, c \in D, (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ .
- $D$  possède un élément neutre  $\varepsilon$  tel que,  $\forall a \in D, a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a$ .

Le monoïde est dit commutatif si la loi  $\oplus$  est commutative c-à-d :  $\forall a, b \in D, a \oplus b = b \oplus a$ .

**Exemple 4.** L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  muni de l'addition est un monoïde. Il s'agit d'un monoïde commutatif :  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$ . L'élément neutre de  $\mathbb{N}$  est 0.

**Définition 1.10 (Demi-anneau).** Un demi-anneau  $(D, \oplus, \otimes)$  est une structure algébrique basée sur l'ensemble  $D$ , munie de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$ , tel que :

- $(D, \oplus)$  est un monoïde commutatif dont l'élément neutre  $\varepsilon$  est appelé élément nul.
- $(D, \otimes)$  est un monoïde ayant pour élément neutre  $e$  est appelé unité.
- Le produit  $\otimes$  est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive  $\oplus$ , c'est-à-dire

$$\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$\text{et } (b \oplus c) \otimes a = (b \otimes a) \oplus (c \otimes a).$$

- L'élément neutre  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  c'est-à-dire :  $(\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon)$ .

**Définition 1.11 (Dioïde).** Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est un demi anneau pour lequel la loi  $\oplus$  est idempotente ( $\forall a \in D, a \oplus a = a$ ), alors  $(D, \oplus, \otimes)$  est un demi-anneau idempotent ou dioïde.

On présente les exemples exploités dans ce travail.

**Exemple 5.**  $(\mathbb{R}, \{-, +\}, max, +)$  est un dioïde commutatif pour lequel  $\varepsilon = -$  et  $e = 0$ . Ce dioïde est noté  $\mathbb{R}_{max}$ , et traditionnellement appelé "algèbre  $(max, +)$ ". Dans ce dioïde, la loi  $\oplus$  correspond à l'application  $max$  et la loi  $\otimes$  est la somme usuelle.

Notons toutefois que :  $\varepsilon \otimes (+) = (-) + (+) = \varepsilon = (-)$  dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$ .

**Exemple 6.**  $(\mathbb{R}, \{-, +\}, min, +)$  est un dioïde commutatif pour lequel  $\varepsilon = +$  ; et  $e = 0$ . Ce dioïde est noté  $\mathbb{R}_{min}$ , et traditionnellement appelé "algèbre  $(min, +)$ ". Dans ce dioïde la loi  $\oplus$  correspond à l'application  $min$  et la loi  $\otimes$  est la somme usuelle.

On note que  $\varepsilon \otimes (-\infty) = (+\infty) + (-\infty) = \varepsilon = (+\infty)$  dans le dioïde  $\mathbb{R}_{min}$ .

**Remarque :** Dans les équations définies sur les dioïdes, le symbole  $\otimes$  du produit est supprimé ou remplacé par un point ( $a \otimes b = ab = a.b$ ).

## 2.2. Relation d'ordre dans un dioïde

Dans un dioïde  $D$  donné, la propriété d'idempotence de la loi additive  $\oplus$  induit une relation d'ordre, notée  $\preceq$ , définie par:  $(a, b) \in D^2, a \preceq b \iff a \oplus b = b$ . De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de  $D$ , c'est-à-dire :

$$(a, b, c) \in D^3, a \preceq b \implies a \oplus c \preceq b \oplus c,$$

$$a \preceq b \implies a \otimes c \preceq b \otimes c.$$

**Remarque :** L'ordre  $\preceq$  défini dans  $\mathbb{R}_{max}$  est total et coïncide avec l'ordre usuel  $\leq$ .

En revanche, l'ordre total  $\preceq$  défini dans  $\mathbb{R}_{min}$  est l'inverse de l'ordre usuel.

**Exemple 7.** La relation  $\preceq$ , associée à l'application  $max$  est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel  $\leq, a \preceq b \iff b = max(a, b) \iff a \leq b$ .

$$(1 \preceq 3) \iff 3 = max(1, 3) \iff 1 \leq 3.$$

La relation  $\preceq$ , associée à l'application  $min$  est une relation d'ordre qui correspond à l'inverse de l'ordre usuel  $\leq, a \preceq b \iff b = min(a, b) \iff a \geq b$ .

$$(3 \preceq 1) \iff 1 = min(1, 3) \iff 3 \geq 1.$$

## 2.3. Dioïdes et treillis [1], [7]

L'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de *sup-demi-treillis*, pour lequel la borne supérieure, notée  $\vee$ , correspond à la loi additive  $\oplus$  du dioïde, ( $(a \oplus b)$  est le plus petit majorant de  $a$  et  $b$ ).

De même, en considérant la définition algébrique d'un *sup-demi-treillis*, on peut noter que la loi d'un *sup-demi-treillis* est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que possède les mêmes axiomes que la loi additive  $\oplus$  d'un dioïde. De plus, on sait qu'un dioïde possède un élément minimum  $\varepsilon$  (le plus petit que tous les autres éléments du dioïde), ce qui confère au dioïde une structure de treillis.

**Définition 1.12 (Dioïde complet).** Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si le produit est distributif (à gauche et à droite) sur les sommes infinies. Autrement dit, pour tout  $d \in D$  et tout sous ensemble  $A \subseteq D$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$d \otimes \left( \sum_{a \in A} a \right) = \sum_{a \in A} (d \otimes a),$$

$$\left( \sum_{a \in A} a \right) \otimes d = \sum_{a \in A} (a \otimes d).$$

Puisqu'un dioïde  $D$  a une structure de treillis  $(D, \leq)$ , s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera  $\top$  ce plus grand élément. L'élément  $\top$  correspond à la somme de tous les éléments de  $D$ ,  $\top = \sum_{x \in D} x$ .

L'élément  $\top$  est absorbant pour la loi additive  $\forall a, \top \oplus a = \top$ , Rappelons néanmoins que, Puisque  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  on a :  $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$ .

**Définition 1.13. (Sous-dioïdes).** Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde et  $C$  Le sous ensemble de  $D$ ,  $(C, \oplus, \otimes)$  est dit sous-dioïde de  $D$  si et seulement si :

- Les éléments neutre de  $D$  qui sont  $(\varepsilon$  et  $e)$  appartiennent au sous ensemble  $C$ .
- $C$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ .

## 2.4. Applications définies sur des dioïdes[1], [7]

**Définition 1.14 (Isotonie, antitonie)**

Soit  $f$  une application définie d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$ ,

$f$  est dite isotone si :

$$a, b \in D, a \leq b \implies f(a) \leq f(b).$$

$f$  est dite antitone si :

$$a, b \in D, a \leq b \implies f(a) \geq f(b).$$

**Remarque :** Une application  $f$  est dite **monotone** si elle est **isotone ou antitone**. L'isotonie et l'antitonie sont des notions utilisées pour caractériser les applications respectivement croissantes et décroissantes, définies sur des ensembles ordonnés.

**Définition 1.15 (Application injective, surjective et bijective).** Soit  $f$  une application définie d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$ ,

- $f$  est injective si  $a, b \in D, f(a) = f(b) \implies a = b$ .
- $f$  est surjective si  $b \in C, \exists a \in D, f(a) = b$ .
- $f$  est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

**Définition 1.16 (Homomorphisme).** Une application  $f$  définie d'un dioïde  $D$  vers un dioïde  $C$  est un homomorphisme si :

$$\forall a, b \in D: f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon, \quad (1.1)$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e. \quad (1.2)$$

Notons que chaque application qui vérifie la propriété (1.1) sera appelée  $\oplus$ -morphisme.

Aussi, une application qui ne vérifie que la propriété (1.2) sera appelée  $\otimes$ -morphisme. Un homomorphisme est donc  $\oplus$ -morphisme et  $\otimes$ -morphisme.

**Définition 1.17 (Isomorphisme).** Une application  $f$  est dite isomorphisme si est seulement si : l'application  $f$  est un **homomorphisme** et  $f$  est **bijective**

**Définition 1.18 (Continuité).** Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux dioïdes complets. Une application  $f$  de  $D$  dans  $C$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i), si, pour tout sous-ensemble  $B \subset D$ ,

$$f(\bigvee_{x \in B} x) = \bigvee_{x \in B} f(x)$$

et semi-continue supérieurement (s.c.s.), si :

$$f(\bigwedge_{x \in B} x) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

**Remarque :** Une application **s.c.s** ou **s.c.i** est nécessairement isotone puisque

$$a \geq b \implies \begin{matrix} a = a \oplus b & f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) & f(a) \geq f(b) \\ b = a \otimes b & f(b) = f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) & f(b) \leq f(a) \end{matrix}$$

**Définition 1.19 (Linéarité).** Une application  $f$  d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$  est dite linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha \in D, f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad (\text{additivité})$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) \quad (\text{homogénéité})$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de superposition, soit :

$$\forall a, b \in D, \forall \alpha, \beta \in D, f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b).$$

**Remarque :** En toute rigueur, on devrait plutôt parler de  $(\oplus, \otimes)$ -linéarité du fait de la structure algébrique particulière d'un dioïde. Dans l'algèbre  $(\max, +)$  on parlera de  $(\max, +)$ -linéarité.

**Exemple 8.** La multiplication par  $A \in D^{n \times n}$ , définie par :

$$L_A : D^{n \times n} \rightarrow D^{n \times n} \\ x \mapsto Ax$$

est une application linéaire.

### 3. Calcul matricielle dans les dioïdes [3], [4], [8]

#### 3.1. Somme de matrices

Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde. On note  $D^{p \times n}$ , avec  $p, n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des matrices de dimension  $(p \times n)$  à coefficients dans  $D$ . La somme matricielle de deux matrices  $A, B \in D^{p \times n}$ , est une matrice notée  $A \oplus B$ , avec des coefficients qui sont donnés par l'expression suivante :  $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ .

#### 3.2. Produit de matrices

Étant donnés les matrices  $A \in D^{p \times n}, B \in D^{n \times q}$ , avec  $p, n, q \in \mathbb{N}$ . Le produit matriciel de ces deux matrices est une matrice notée  $A \otimes B$  ou  $AB$ , avec des coefficients qui sont donnés comme suit:  $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes B_{kj})$ .

L'ensemble  $D^{n \times n}$  muni des opérations  $\oplus$  et  $\otimes$  est un dioïde. L'élément nul est la matrice composée exclusivement de  $\varepsilon$ . L'élément unité, noté  $I_n$ , est la matrice dont les termes valent  $e$  sur la diagonale et  $\varepsilon$  ailleurs.

**Exemple 9.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices dans l'algèbre  $(\max, +)$

tel que :  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} e & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

On a

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} \max(2, e) & \max(5, 8) \\ \max(3, 1) & \max(7, 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$$

et

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \max(3 + e, 5 + 1) & \max(2 + 8, 5 + 3) \\ \max(3 + e, 7 + 1) & \max(3 + 8, 7 + 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}.$$

### 3.3. Propriétés spectrales des matrices définies dans un dioïde [1], [6]

Les matrices carrées à coefficients dans un dioïde présentent certaines propriétés spectrales intéressantes qui permettent notamment d'étudier le comportement asymptotique de certains systèmes dynamiques. Plus particulièrement, pour chaque matrice carrée, on peut lui associer un graphe valué orienté, appelé graphe de précédence. Si un graphe de précédence est fortement connexe, alors la matrice qui lui correspond est dite irréductible.

**Définition 1.20 (Graphe valué orienté).** Un graphe orienté est défini par un ensemble de nœuds interconnectés par des arcs orientés. Un graphe est dit valué, si des poids positifs sont associés aux arcs qui reliant les nœuds  $j$  et les nœuds  $i$ . Ces poids correspondent aux termes notés  $A_{ij}$ , de la matrice  $A$ .

**Définition 1.21 (Graphe de précédence).** On appelle graphe de précédence d'une matrice  $A \in D^{n \times n}$  noté  $G(A)$ , le graphe qui est composé de  $n$  nœuds et des arcs, notés  $(j, i)$ , qui sont pondérés par le coefficient  $A_{ij}$ . Si  $A_{ij} = \varepsilon$ , alors il existe un arc qui relie le nœud  $j$  au nœud  $i$ , sinon l'arc  $(j, i)$ , n'existe pas. Dualement, pour tous graphes orientés valués composés de  $n$  nœud, on peut associer une matrice carrée de dimension  $n \times n$ , telle que les coefficients de cette matrice correspondent aux poids des arcs du graphe.

**Définition 1.22 (Graphe fortement connexe).** Un graphe  $G(A)$ , est dit fortement connexe si pour toute paire de nœuds  $(i, j) \in G(A)$ , il existe un chemin orienté allant du nœud  $i$  au nœud  $j$ .

**Définition 1.23 (Matrice irréductible).** Une matrice  $A \in D^{n \times n}$  est dite irréductible si pour toute paire de nœuds  $(j, i)$ , il existe un entier  $k$  tel que  $(A^k)_{ij} \neq \varepsilon$ . Cette matrice admet une unique valeur propre notée  $\lambda \in D$ , et donnée par :  $\lambda = \sqrt[k]{\frac{1}{n} \text{trace}(A^k)}$ .

Avec :

$$\text{trace } A^k = \sum_{i=1}^n (A^k)_{ii} \text{ et } n \text{ désigne l'ordre de la matrice } A.$$

Dans l'algèbre usuelle, l'expression de la valeur propre  $\lambda$  s'écrit comme suit :

$$\lambda = \max_{k=1}^n \left[ \frac{1}{k} (\max_{i=1}^n (A^k)_{ii}) \right].$$

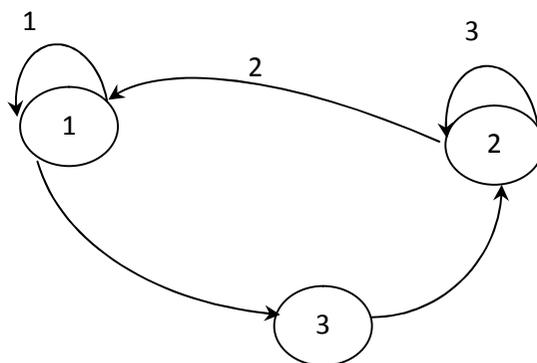
Cette valeur propre correspond au maximum des poids moyens des circuits élémentaires du graphe de précédence  $G(A)$ .

Le graphe de précédence associé à une matrice réductible n'est pas fortement connexe. Il est décomposable, dans ce cas, en plusieurs sous graphes fortement connexe. Cette matrice réductible, peut avoir plusieurs valeurs propres, en la décomposant en blocs irréductibles.

La détermination des vecteurs propres d'une matrice  $A$  définie sur un dioïde, revient à résoudre l'équation suivante :  $Au = \lambda u$ .

On appelle  $u$  le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ . Le vecteur propre associé à cette unique valeur propre, ne contient pas de  $\varepsilon$ . Si une composante du vecteur  $u$  est égale à  $\varepsilon$ , il faut que la matrice  $A$  contiennent au moins une ligne avec des  $\varepsilon$ , ce qui correspondra à un graphe  $G(A)$  non fortement connexe.

**Exemple 10.** Nous considérons le graphe orienté et valué de la Figure 1.1 suivante:



**Figure 1.1.** Graphe orienté et valué

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$  est la matrice de précédence associée au graphe de la Figure 1.1

Le graphe de la Figure 1.1 est composé de trois nœuds et pour chaque paire de nœuds, il existe toujours un chemin orienté qui relie ses nœuds. Le graphe est donc fortement connexe, par conséquent sa matrice de précédence associée  $A$  est irréductible. La valeur propre de cette matrice est unique, elle est notée  $\lambda$  et est donnée par :  $\lambda = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^3 (\text{trace } A^k)}$

Dans l'algèbre  $(\max, +)$  on a :

$$A^2 = \begin{bmatrix} \max(1 + 1, 2 + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(1 + 2, 2 + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(1 + \varepsilon, 2 + e, \varepsilon + \varepsilon) \\ \max(\varepsilon + 1, 3 + \varepsilon, e + e) & \max(\varepsilon + 2, 3 + 3, e + \varepsilon) & \max(\varepsilon + \varepsilon, 3 + e, e + \varepsilon) \\ \max(e + 1, \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + e) & \max(e + 2, \varepsilon + 3, \varepsilon + \varepsilon) & \max(e + \varepsilon, \varepsilon + e, \varepsilon + \varepsilon) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \left( \sum_{i=1}^3 A_{ii} \right) \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 (A^2)_{ii} \right) \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 (A^3)_{ii} \right)$$

$$\lambda = (1 \quad 3 \quad \varepsilon) \frac{1}{2} (2 \quad 6 \quad \varepsilon) \frac{1}{3} (3 \quad 9 \quad 2) = (3 \quad \frac{6}{2} \quad \frac{9}{3}) = 3$$

Le vecteur propre, noté  $u$ , associé à la valeur propre  $\lambda$  vérifie l'équation suivante :

$Au = \lambda u$  le calcul du vecteur propre se fait comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \max(1 + u_1, 2 + u_2, \varepsilon + u_3) \\ \max(\varepsilon + u_1, 3 + u_2, 0 + u_3) \\ \max(\varepsilon + u_1, \varepsilon + u_2, 0 + u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + u_1 \\ 3 + u_2 \\ 3 + u_3 \end{pmatrix}$$

On trouve le vecteur propre suivant :  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Définition 1.24 (Chemin).** Un chemin est une suite de nœuds que l'on peut parcourir séquentiellement en empruntant les arcs de  $G(A)$ .

Un chemin est élémentaire si aucun nœud n'est rencontré deux fois. La *longueur* d'un chemin est égal à son nombre d'arcs.

**Définition 1.25 (Circuit).** Un est un chemin dont l'origine est confondue avec l'extrémité.

Un circuit est élémentaire si tout nœud n'est l'origine que d'un seul arc appartenant au circuit (on peut dans cette définition remplacer le mot "origine" par le mot "extrémité").

#### 4. Résolution d'équation dans un dioïde

Dans ce travail, nous serons amenés à résoudre principalement des équations de la forme :

$$f(x) = b,$$

qui sont définies sur un dioïde.

Les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  n'étant pas inversibles, en particulier les applications matricielles. Il n'est donc pas possible, en général d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde. La théorie de la résiduation permet cependant, sous certaines conditions, de définir des pseudo-inverses pour certaines de ces applications et, par conséquent, permet de déterminer des solutions extrêmes de l'équation précédente. C'est-à-dire la plus petite ou la plus grande solution.

Cette théorie concerne de façon générale les fonctions croissantes est souvent on parlera d'application isotones définies sur des ensembles ordonnés.

Mais il peut ne pas exister de solution à cette équation (quand  $f$  est non surjective) et/ou une telle solution peut ne pas être unique (quand  $f$  est non injective). C'est pourquoi nous étudierons plus précisément deux types d'inéquations de la forme  $f(x) \leq b$  ou  $f(x) \geq b$ , dont on cherchera respectivement la plus grande et la plus petite solution.

### 4.1 Théorie de la résiduation

**Définition 1.26 (Résiduation).** Soit  $f$  une application isotone d'un dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes)$  vers un dioïde complet  $(C, \oplus, \otimes)$ . L'application  $f$  est dite résiduable si pour tout  $b \in C$ , l'inéquation  $f(x) \leq b$  admet une plus grande solution dans  $D$ . Autrement dit, la borne supérieure du sous ensemble  $\{x \in D / f(x) \leq b\}$ , notée  $f^\#(b)$  existe et appartient à ce sous ensemble. L'application  $f^\#$  est appelée la résiduée de  $f$ .

$$f^\#(b) = \bigoplus_{x / f(x) \leq b} x.$$

### 4.2 Résolution d'inéquation $ax \leq b$ et $xa \leq b$

Soient  $L_a$  (produit à gauche) et  $R_a$  (produit à droite), les applications définies sur un dioïde  $D$  complet comme suit :

$$L_a: x \mapsto a \otimes x$$

$$R_a: x \mapsto x \otimes a$$

Le fait que le dioïde  $D$  soit complet implique que les applications  $L_a$  et  $R_a$  sont semi-continues inférieurement (distributivité de produit à gauche et à droite sur les sommes infinies). En outre, comme  $\varepsilon$  est absorbant pour le produit  $\otimes$ , alors  $L_a(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  et  $R_a(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ . Autrement dit,  $L_a$  et  $R_a$  sont isotones donc résiduable, et leurs applications résiduées sont notées :

$$L_a^\#: x \rightarrow a \oslash x$$

$$R_a^\#: x \rightarrow x \oslash a$$

et respectivement appelées quotient à gauche et quotient à droite. Ainsi,  $L_a^\#(b) = a \oslash b$  et

$R_a^\#(b) = b \oslash a$  sont les plus grandes solutions des inégalités  $ax \leq b$  et  $xa \leq b$ .

$$a \oslash b = \bigoplus \{x \mid ax \leq b\}$$

$$b \oslash a = \bigoplus \{x \mid xa \leq b\}$$

Donc

$$ax \leq b \Leftrightarrow x \leq a \oslash b$$

$$xa \leq b \Leftrightarrow x \leq b \oslash a$$

**Remarque :** lorsque  $D$  est un dioïde commutatif,  $L_a = R_a$  cela implique que  $L_a^\# = R_a^\#$ .

Les applications  $L_a$  et  $R_a$  possèdent les propriétés suivantes, qui sont vraies pour tout dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes)$ , avec  $a, b, x \in D$ .

$$\begin{aligned}
 a \otimes \top &= \top & \top \otimes a &= \top, \\
 a(a \otimes x) &\preceq x & (x \otimes a)a &\preceq x, \\
 a \otimes (ax) &\succeq x & (xa) \otimes a &\succeq x, \\
 a(a \otimes (ax)) &= ax & ((xa) \otimes a)a &= xa, \\
 a \otimes (a(a \otimes x)) &= a \otimes x & ((x \otimes a)a) \otimes a &= x \otimes a, \\
 a \otimes (x \wedge y) &= a \otimes x \wedge a \otimes y & (x \wedge y) \otimes a &= x \otimes a \wedge y \otimes a, \\
 a \otimes (x \oplus y) &\succeq (a \otimes x) \oplus (a \otimes y) & (x \oplus y) \otimes a &\succeq (x \otimes a) \oplus (y \otimes a), \\
 (a \wedge b) \otimes x &\succeq (a \otimes x) \oplus (b \otimes x) & x \otimes (a \wedge b) &\succeq (x \otimes a) \oplus (x \otimes b), \\
 (a \oplus b) \otimes x &= a \otimes x \wedge b \otimes x & x \otimes (a \oplus b) &= x \otimes a \wedge x \otimes b, \\
 (ab) \otimes x &= b \otimes (a \otimes x) & x \otimes (ba) &= (x \otimes a) \otimes b, \\
 (a \otimes x)b &\preceq a \otimes (xb) & b(x \otimes a) &\preceq (bx) \otimes a, \\
 b(a \otimes x) &\preceq (a \otimes b) \otimes x & (x \otimes a)b &\preceq x \otimes (b \otimes a),
 \end{aligned}$$

Les preuves de ces propriétés sont données dans [4] et [16].

### 4.3 Résiduation dans le cas matricielle $AX \leq B$ et $XA' \leq B'$

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche  $L_A: D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$  et produit à droite  $R_{A'}: D^{p \times n} \rightarrow D^{p \times m}$  sur les dioïdes de matrices à coefficients dans le dioïde complet  $D$ :

$$L_A: X \mapsto A \otimes X$$

$$R_{A'}: X \mapsto X \otimes A'$$

Dans ces applications,  $A \in D^{m \times n}$  et  $A' \in D^{n \times m}$ .

Les plus grandes solutions des inéquations  $AX \leq B$  et  $XA' \leq B'$  pour lesquelles  $B \in D^{m \times p}$  et  $B' \in D^{p \times m}$ , sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée  $L_A^\#(B) = A \otimes B$  et la

résiduée du produit à droite notée  $R_{A'}^\#(B') = B' \not\circlearrowright A'$ . Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$L_A^\#(B) = A \not\circlearrowleft B : (A \not\circlearrowleft B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m A_{ki} \not\circlearrowleft B_{kj}$$

$$R_{A'}^\#(B') = B' \not\circlearrowright A' : (B' \not\circlearrowright A')_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m B'_{ik} \not\circlearrowright A'_{jk}$$

En toute rigueur, seul le produit de matrices carrées constitue une application résiduable. Cependant, il est toujours possible de réécrire les applications  $L_A$  et  $R_{A'}$  dans le dioïde de matrices  $D^{q \times q}$  pour lequel  $q = \max(m, n, p)$ . Les lignes et les colonnes doivent alors être complétées par l'élément  $\varepsilon$ , ce qui peut compliquer les écritures.

#### 4.4 Résolution d'équation par étoile de Kleene

Les équations de type point fixe formulées dans les dioïde, de la forme

$f(x) = x$  où  $f(x) = ax \oplus b$ , sont d'importance, car on cherchera systématiquement à

représenter les systèmes étudiés sous des formes récurrentes explicites de type point fixe. Il a

notamment été mis en évidence que sous certaines hypothèses de continuité de l'application  $f$ , les ensembles de solutions de ces équations sont ordonnés, nous nous intéresserons plus particulièrement à leurs solutions minimales.

Nous allons voir la manière de résoudre une équation de type  $ax \oplus b$  par l'étoile de Kleene ainsi que les propriétés relatives à cette méthode qui nous intéresse essentiellement dans notre travail par la suite.

**Définition 1.27 (Etoile de Kleene) [8].** Soit  $*$  l'opérateur définie sur un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  par

$$a^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k, \text{ avec } a^0 = e.$$

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre  $\preceq$  par l'implication suivante :

$$a, b \in D, \text{ si } a \preceq b, \text{ alors } a^* \preceq b^*$$

De la même façon que pour un dioïde de scalaires, l'étoile de Kleene d'une matrice carrée  $A \in D^{n \times n}$ , notée  $A^*$ , est définie par :

$$A^* = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A^k, \text{ avec } A^0 = I_n.$$

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes sont données comme suit,  $A, B \in D^{n \times n}$

$$(A) = A \quad (1)$$

$$A A = A A \quad (2)$$

$$A(B A) = (AB) A \quad (3)$$

$$(A B) = e \oplus A(A \oplus B) \quad (4)$$

$$(A \oplus B) = (A B) A = A (BA) = (A B) \quad (5)$$

$$(A \oplus B) = (A \oplus B) = (A \oplus B) = (A \oplus B) \quad (6)$$

Il existe une autre notation qui est donnée par l'équation:  $a^+ = \sum_{i \geq 1} a^i$ ,  $a_{ij}^+$  représente le poids maximal des chemins de n'importe quelle longueur allant de  $j$  à  $i$ .

On a:  $a^+ \preceq a$ ,  $(a^+)^+ = a^+$ ,

$$(a^+)^+ = a^+, (ab)^+ = a(a \oplus b).$$

**Exemple 11.** Soit dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$ ,  $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A_0^* &= \sum_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_4 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 \\ &= \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & 1 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous rencontrerons fréquemment des systèmes carrés d'équations linéaires du type  $x = Ax \oplus B$ , où  $x$  est un scalaire ou un vecteur dans un dioïde donné, qui désigne l'inconnue de l'équation,  $B$  et  $A$  sont respectivement un vecteur et une matrice carrée dont les coefficients appartiennent aux dioïdes considérés. Comme nous l'avons signalé précédemment, résoudre cette équation revient à rechercher la plus petite solution de l'inéquation  $x \preceq Ax \oplus B$  ou la plus grande solution de l'inéquation  $x \succeq Ax \oplus B$ .

**Théorème :** [4], [6] Dans un dioïde complet, la quantité  $A B$  est la plus petite solution de l'équation  $x = Ax \oplus B$  et de l'inéquation  $x \leq Ax \oplus B$ .

**Démonstration :** Nous montrons que  $A B$  est la plus petite solution de l'inéquation donnée dans le théorème. En effet pour toute solution  $x$  de l'inéquation  $x \leq Ax \oplus B$ , nous avons :

$$x \leq Ax \oplus B \leq A.(Ax \oplus B) \oplus B \leq A^k . x \oplus \left( \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i . B \right), \quad k \geq 0$$

en outre  $A^k . x \oplus \left( \bigoplus_{i=0}^{k-1} A^i . B \right) \leq A^k . x \oplus A B$

D'où  $x \leq A^k . x \oplus A B$

On déduit donc que :  $x \leq A B$

**Remarque :** Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$ , la quantité  $(A B)$  est la plus petite solution de l'inéquation  $x \leq Ax \oplus B$ , par contre  $(A B)$  correspond à la plus petite solution au sens usuel et à la plus grande solution de l'inéquation  $x \leq Ax \oplus B$  au sens inverse de l'ordre usuel dans  $\mathbb{R}_{min}$ .

**Exemple 12.** Soit le système :

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le calcul de  $a$  donne :

$$a = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & 3 \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

Ce donne la solution suivante :

$$x = a b = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 7 & e & 3 \\ 4 & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

**Conclusion**

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les outils mathématiques utilisés dans ce travail. Après un bref rappel sur les ensembles ordonnés et treillis, leurs relation avec la structure algébrique des dioïdes, nous avons donné les applications définies sur les dioïdes. Ensuite, plusieurs types de fonctions définies sur les dioïdes sont considérés, fonctions qui généralement ne sont pas inversibles. Cependant, grâce à la théorie de la résiduation, il est possible de considérer les pseudo-inverses d'application isotone, ainsi que la résolution des équations de type point fixes qui nécessitent la définition de l'application étoile de Kleene qui joue un rôle clé dans le problème d'estimation qui fera l'objet de dernier chapitre.

La théorie des dioïdes est intéressante, car elle permet de représenter de manière linéaire les phénomènes de synchronisation, très présents dans les systèmes de production, le chapitre suivant décrit comment appliquer cette théorie à l'étude de systèmes dynamiques à événements discrets. En particulier, nous chercherons à représenter des systèmes sous forme graphique, basés sur le formalisme des réseaux de Petri. Ensuite, nous verrons comment ces graphes peuvent être représentés dans des dioïdes.

## CHAPITRE 2 :

# Modélisation des Graphes d'Événements temporisés dans les diïdes

## Introduction

Avant de donner une définition formelle des systèmes à événements discrets, il convient de mieux situer ces systèmes par rapport aux systèmes continus et discrets. L'automatique s'est intéressée dès ses origines à des systèmes physiques généralement décrits par les équations différentielles ou aux différences auxquelles obéissent les phénomènes physiques correspondants. L'avènement des ordinateurs conduit à décrire parfois l'évolution de ces systèmes par des équations dynamiques en temps discret, c'est ainsi que la théorie des systèmes à événements discrets a vu le jour.

De façon formelle, les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dont la dynamique est gouvernée par des occurrences d'événements, et dont l'espace d'état, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs qui peuvent prendre les variables du système, est un ensemble discret. A la différence des systèmes continus, l'évolution du temps entre les occurrences d'événements n'a pas d'effet perceptible sur le système. En effet, alors que les systèmes continus mettent en jeu des phénomènes essentiellement naturels (descriptible par les lois de la physique), la dynamique des systèmes à événements discrets est régie par des phénomènes artificiels qui sont la synchronisation et la concurrence. Ce type de système recouvre plusieurs domaines d'applications tels que les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [14], [15] les réseaux de communication (réseaux informatiques) [27] et les systèmes de transport (routier, ferroviaire ou aérien).

L'importance prise par ces systèmes à conduit de nombreux chercheurs à proposer des modèles mathématiques permettant de décrire leur comportement afin d'en évaluer les performances. La diversité de ces systèmes conduit naturellement à différents modèles, citons la théorie des langages et des automates qui permet d'obtenir des modèles adaptés pour la description et la commande des systèmes uniquement concernés par les phénomènes de concurrence. Les systèmes qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation, peuvent quant à eux être appréhendés à travers la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Les Réseaux de Petri proposent un formalisme qui permet de décrire des systèmes qui comportent à la fois des phénomènes de concurrence et de synchronisation.

La plupart de notions de cette partie sont issues de [2], [3], [8], [10], [11], [12].

### 1. Systèmes à événements discrets

Un système à événements discrets est un système dont l'espace d'état est discret. Les transitions d'état sont provoquées par l'occurrence d'événements. L'ensemble des événements est également discret. Un événement est validé si l'ensemble des conditions nécessaires à son occurrence sont vérifiées.

Pour prendre en compte le temps, des temporisations peuvent être associées aux événements, une temporisation est un laps de temps qui doit être écoulé avant qu'un événement validé puisse survenir.

Au moins deux niveaux d'abstraction peuvent être considérés pour un système à événements discrets :

- on peut s'intéresser exclusivement à l'ordre d'occurrence des événements, c'est-à-dire au comportement logique du système ;
- en plus de l'ordre, on peut étudier les instants d'occurrence des événements, c'est-à-dire le comportement temporisé du système.

Plusieurs objets mathématiques ont été proposés pour modéliser les systèmes à événements discrets. Les réseaux de Petri constituent un de ces formalismes.

### 2. Les Réseaux de Petri (RDP)

Les Réseaux de Petri (RDP) sont un langage graphique permettant de décrire et d'évaluer des comportements des systèmes à événements discrets. C'est un outil de modélisation introduit par Carl Adam Petri (1962), utilisé généralement en phase préliminaire de conception de système pour leur spécification fonctionnelle, modélisation et évaluation. Les principaux utilisateurs de ces réseaux sont les informaticiens et les automaticiens. Cependant c'est un outil assez général pour modéliser des phénomènes très variés. Il permet notamment :

- la modélisation des systèmes informatiques,
- l'évaluation des performances des systèmes discrets, des interfaces homme-machine,
- la commande des ateliers de fabrication,
- la conception de systèmes temps réel,
- la modélisation des protocoles de communication,
- la modélisation des chaînes de production (de fabrication),

En fait, tout système dans lequel circule objets et information.

## 2.1 Les atouts des Réseaux de Petri

- Ils permettent de décrire de manière précise la structure d'un système,
- Ils offrent un support graphique de conception,
- Ils permettent de décrire un système étape par étape, en décomposant en éléments plus simples les éléments constitutifs initiaux du système,
- Ils permettent de décrire à l'aide d'un même support de base, à la fois la structure et la dynamique d'un système,
- Ils permettent de passer d'une description graphique d'un système à une description formelle permettant l'analyse mathématique du système (cohérence).

## 2.2 Rappels et notions de base des Réseaux de Petri

**Définition 2.1 (Réseau de Petri).** Un réseau de Petri (RDP) est un quadruplet

$$R = (P, T, Pré, Post) \text{ où :}$$

- $P$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places,
- $T$  est un ensemble non vide et fini d'éléments appelés transitions,
- $Pré: P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  est une application d'incidence avant:  $Pré(p, t)$  contient la valeur entière associée à l'arc allant de  $p$  à  $t$ ,
- $Post: P \times T \rightarrow \mathbb{N}$  est une application d'incidence arrière :  $Post(p, t)$  contient la valeur entière associée à l'arc allant de  $t$  à  $p$ .

Un RDP peut être représenté par un graphe biparti orienté et valué dont les sommets sont soit des places issues de l'ensemble  $P$ , soit des transitions issues de l'ensemble  $T$ . Un arc relie une place  $p$  à une transition  $t$  si et seulement si  $Pré(p, t) > 0$ . De même, un arc relie une transition  $t$  à une place  $p$  si et seulement si  $Post(p, t) > 0$ . Les valeurs non nulles des applications  $Pré$  et  $Post$  sont associées aux arcs comme pondérations (sans indication contraire sur les arcs du graphe, la valeur par défaut est 1).

Généralement, les places sont représentées par des cercles et les transitions sont représentées par des traits ou des rectangles. Les places et les transitions sont reliées par des arcs orientés. Les places sont marquées par des jetons. La règle de circulation des jetons pour un RDP ordinaire est qu'une transition devienne franchissable, chaque place en amont de cette transition doit contenir au moins un jeton. Le franchissement de cette transition a pour effet de prélever un jeton dans chaque place en amont et de rajouter un jeton dans chaque place située en aval.

### 2.3 Marquage d'un RDP

**Définition 2.2 (Marquage).** le marquage  $M$  d'un réseau de Petri est une application

$$M: P \rightarrow \mathbb{N}$$

La quantité  $M(p)$  détermine le marquage de la place  $p$ . Un réseau de Petri marqué est déterminé par le couple  $(R, M_0)$  formé d'un réseau de Petri  $R$  et d'un marquage initial  $M_0$ .

Un marquage d'un réseau de Petri se caractérise de manière graphique par la présence de  $M(p)$  jetons en chaque place  $p$ .

**Exemple 1.** Un exemple de réseau de Petri marqué sous forme graphique est donné par la figure 2.1.

Les ensembles des places représentées et les transitions sur le RDP de la figure 2.1 sont respectivement :

$P = \{p_1, p_2, p_3\}$  et  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  On a par ailleurs :

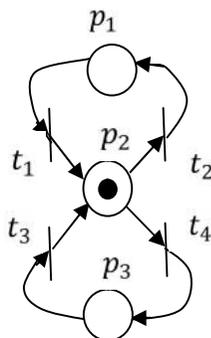
$$Pré(p_1, t_1) = 1 ; Post(p_1, t_2) = 1$$

$$Pré(p_2, t_2) = 1 ; Post(p_2, t_1) = 1$$

$$Pré(p_3, t_3) = 1 ; Post(p_3, t_4) = 1$$

$$Pré(p_2, t_4) = 1 ; Post(p_2, t_3) = 1$$

Le marquage  $M$  représenté ici est  $M(p_2) = 1, M(p_1) = M(p_3) = 0$



**Figure 2.1** Exemple d'un RDP marqué

### 2.4 Tir des transitions

La dynamique d'un RDP est liée aux tirs de ses transitions. Ces tirs consomment et génèrent des jetons. L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri définit son comportement dynamique.

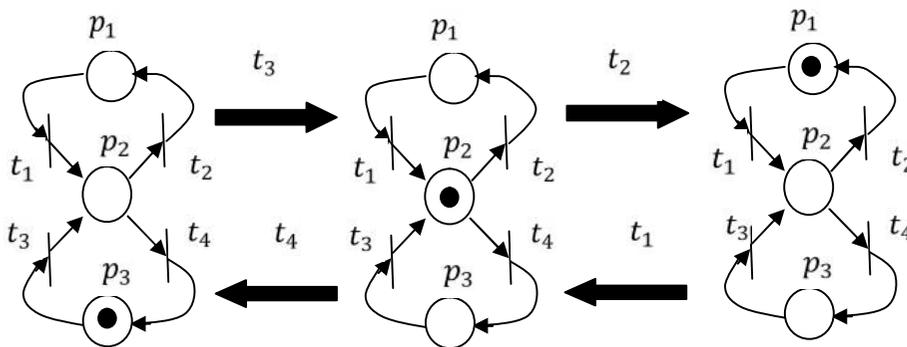
**Définition 2.3 (Transition franchissable).** Étant donné un réseau de Petri  $R$  et un marquage  $M$ , on dit que la transition  $t \in T$  est franchissable pour  $M$  si l'on a :

$$\forall p \in P, M(p) \geq \text{pré}(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (on dit aussi « le tir ») de la transition  $t$  conduit à un nouveau marquage  $M'$  défini,  $\forall p \in P$ , par :

$$M'(p) = M(p) - \text{pré}(p, t) + \text{post}(p, t).$$

Ainsi par exemple, en reprenant le cas du réseau de la figure 2.1 et en partant du marquage  $M_0 = (0,1,0)$  (c'est-à-dire  $M(p_1) = M(p_3) = 0$  et  $M(p_2) = 1$ ), on atteint par tir de la transition  $t_2$  le marquage  $M_1 = (1,0,0)$  ; puis à partir de  $M_1$ , par tir de la transition  $t_1$ , on obtient le marquage  $M_2 = (0,1,0)$  et ainsi de suite. Concrètement, l'activation d'une transition provoque le retrait d'un jeton dans chaque place amont de cette transition et un jeton est placé dans chacune de ses places aval. Sur la figure 2.2, on peut voir les évolutions possibles du marquage de réseau de Petri.



**Figure 2.2** évolution du marquage d'un réseau de Petri

On peut donc considérer ce RDP comme un système, par exemple industriel, où deux tâches  $a$  et  $b$  utilisent une même ressource. Un jeton dans la place  $p_2$  signifie que la ressource est disponible. Un jeton dans la place  $p_1$  (respectivement  $p_3$ ) signifie que la tâche  $a$  (resp.  $b$ ) dispose de la ressource commune.

Le tir de la transition  $t_2$  est l'événement correspondant à la réservation de la ressource par la tâche  $a$ . De même, la transition  $t_4$  correspond à la réservation de la ressource par la tâche  $b$ . Les événements associés aux transitions  $t_1$  et  $t_3$  concernent la restitution de la ressource, par l'une ou l'autre des tâches.

Plus généralement,  $p \in P, t \in T$ , en introduisant la matrice d'incidence avant

$W^- = \text{Pré}(p, t)$ , la matrice d'incidence arrière  $W^+ = \text{Post}(p, t)$  et la matrice d'incidence  $W = W^+ - W^-$ , tout en considérant une séquence  $S$  de franchissement réalisable à partir d'un marquage  $M$ , il est possible de donner l'équation fondamentale suivante :

$$M' = M + W \cdot \vec{S} \quad (2.1)$$

Où  $\vec{S}$  est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement  $S$ , c'est-à-dire un vecteur dont la dimension est égale au nombre de transitions du réseau de Pétri et dont la composante numérotée  $j$  correspond au nombre de franchissements de la transition  $t_j$  dans cette séquence. Ainsi, en reprenant le RDP de l'exemple précédent, si l'on tire les transitions  $t_4$  puis  $t_3$ , le vecteur caractéristique  $\vec{S}$  est égal à  $(0, 0, 1, 1)$ .

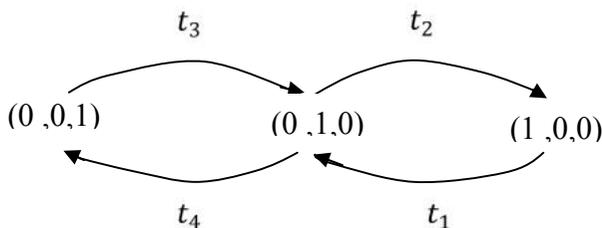
**Remarque :** L'équation fondamentale (2.1) traduit la dynamique de fonctionnement du réseau de Petri.

### 2.5. Ensemble des marquages accessibles

Soit  $(R, M_0)$  un RDP marqué. L'ensemble des marquages accessibles notés  $M_a$ , est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial  $M_0$  par une séquence de franchissement  $S$ . On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux différents marquages accessibles de  $M_a$ . Un arc orienté relie deux sommets  $M_i$  et  $M_j$  s'il existe une transition  $t$  franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre, ce qui se note  $M_i \xrightarrow{t} M_j$ . Ainsi, on peut noter plus formellement l'ensemble  $M_a$  de la manière suivante :

$$M_a = \{M_i \mid M_0 \xrightarrow{S} M_i\}.$$

La figure 2.3 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Pétri de la figure 2.1 avec un marquage initial,  $M_0 = (0, 1, 0)$ . On peut noter la ressemblance entre cette figure et la présentation des marquages possibles de la figure 2.2.

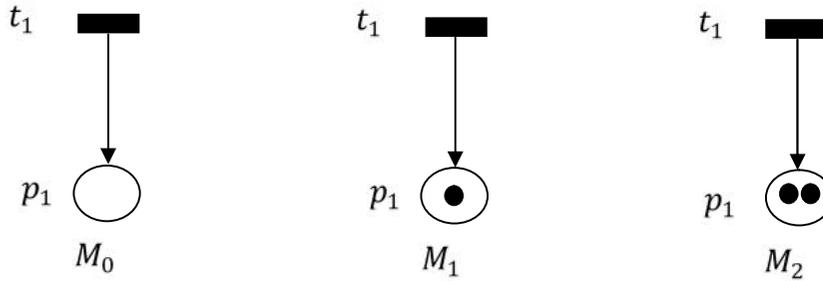


**Figure 2.3** .Exemple de graphe des marquages accessibles

## 2.6 Transitions source et puits

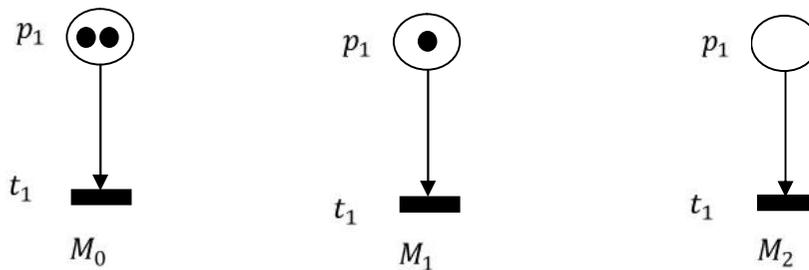
**Définition 2.5 (Transitions source et puits).** Une transition sans place amont est dite transition source et une transition sans place aval est dite transition puits.

**Propriété 2.1** Le franchissement d'une transition source consiste à rajouter un jeton à chacune de ces places de sortie. (Voir figure 2.4).



**Figure 2.4** Franchissement d'une transition source

**Propriété 2.2** Le franchissement d'une transition puits consiste à retirer un jeton de chacune de ses places d'entrée. (Voir figure 2.5)



**Figure 2.5** Le franchissement d'une transition puits

## 2.7 Quelques propriétés des RDPs [11], [21].

Les réseaux de Petri possèdent un certain nombre de propriétés. Quand ces propriétés sont interprétées dans le contexte du système modélisé, elles permettent d'identifier la présence ou l'absence des propriétés fonctionnelles spécifiques au domaine d'application du système. Les propriétés définies dans cette section sont la bornitude et la vivacité. Ces propriétés dépendent du marquage initial du Réseau de Petri.

### 2.7.1 Réseau de pétri borné

Un réseau de Pétri est dit  $k$  -borné si le nombre de marque dans chaque place ne dépasse pas un nombre fini  $k$  pour tout marquage accessible à partir du marquage initial  $M_0$ .

Formellement,  $M(p_i) \leq k$  pour chaque place  $p_i$  et chaque marquage  $M \in R(M_0)$ . Un réseau de Petri est dit  $k$ -borné sauf s'il est 1-borné.

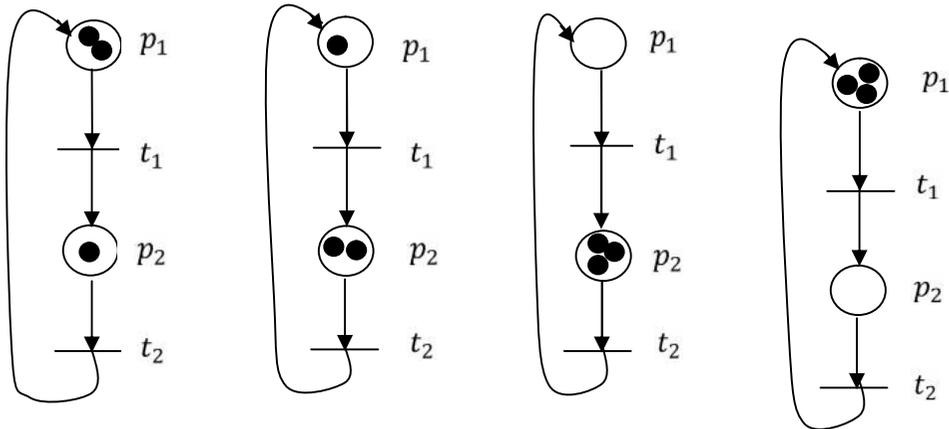


Figure 2.6 Réseau de Petri borné à 3

### 2.7.2 Réseau de Petri vivant

Un RDP est dit vivant si, quelque soit le marquage atteint à partir de  $M_0$ , il est possible de franchir toute transition du réseau en progressant à travers une certaine séquence de franchissement. Un réseau de Petri vivant est un réseau de Petri sans blocage. Un blocage est un marquage tel qu'aucune transition n'est validée.

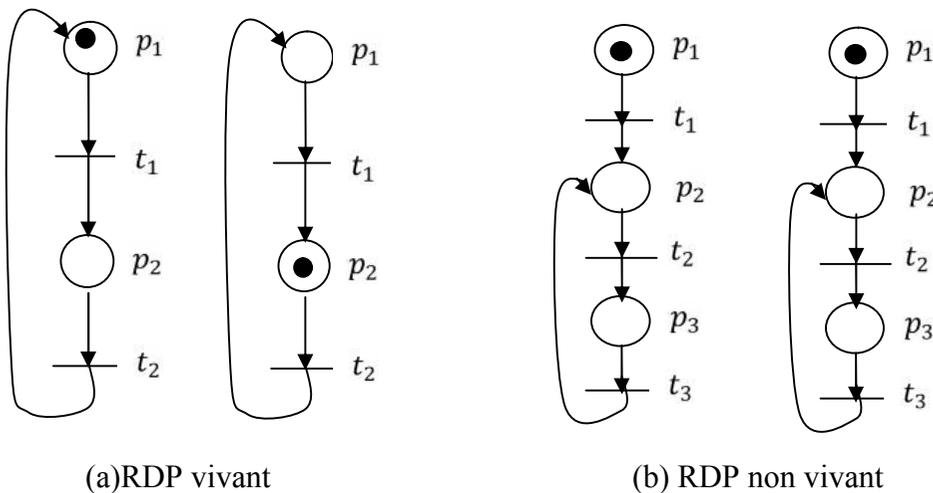
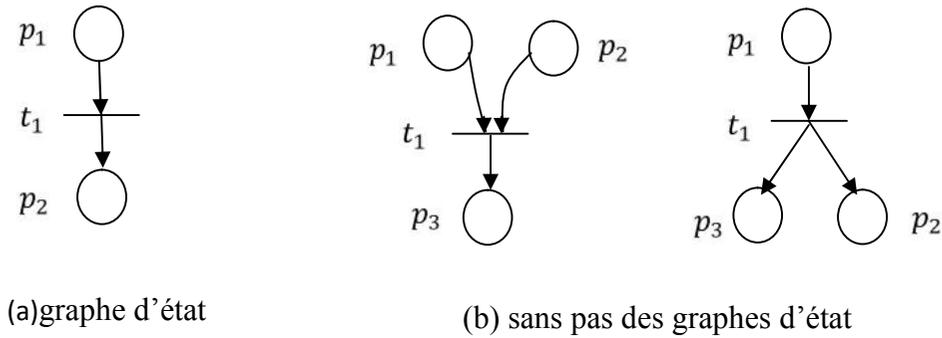


Figure 2.7 Réseau de Petri vivant

## 2.8 Classes de Réseaux de Petri [21]

### 2.8.1 Graphe d'état

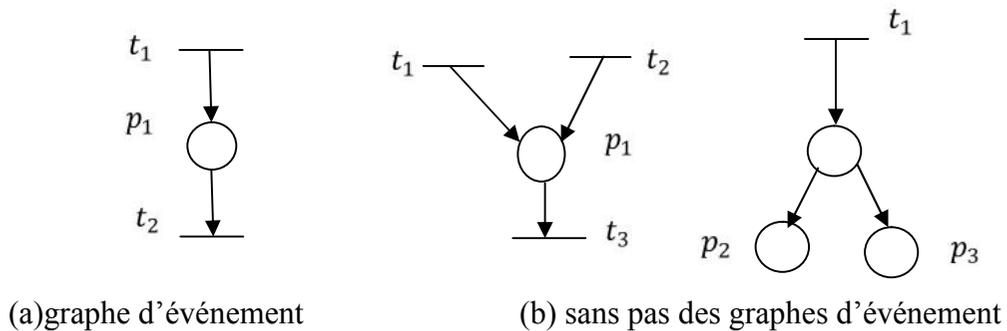
Un RDP non marqué est un graphe d'état si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie (voir figure 2.8).



**Figure 2.8** Graphe d'état

### 2.8.2 Graphe d'événement

Un RDP est un graphe d'événement si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Un graphe d'événement est donc dual d'un graphe d'état.



**Figure 2.9** Graphe d'événement

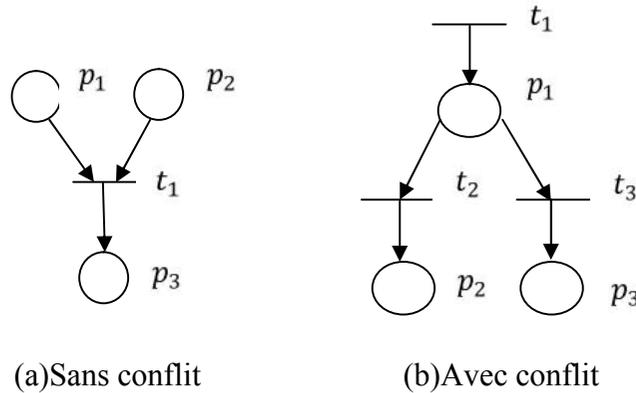
**Remarque :**

- Un graphe d'événement est parfois appelé graphe de transition ou graphe marqué (cette dernière expression, marked graph en anglais, peut donner lieu à confusion avec RDP marqué).
- Dans un graphe d'état il peut y avoir des conflits, mais il n'y a pas de synchronisation. Dans un graphe d'événements il peut y avoir des synchronisations mais il n'y a pas de conflit.

### 2.8.3 Réseau de Petri sans conflit

C'est un RDP dans lequel toute place a au plus une transition de sortie. Un conflit (ou conflit structurel) correspond donc à l'existence d'une place  $p_i$  qui a au moins deux transitions de sortie,  $t_j, t_k$ , etc. Notation  $\langle p_i\{t_j, t_k, \dots\} \rangle$ .

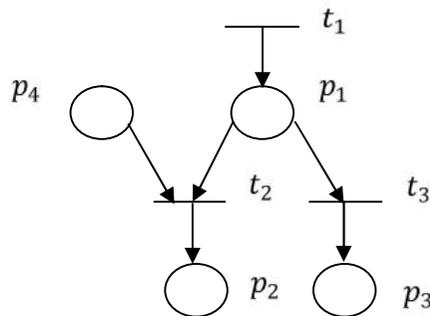
Le RDP de la figure 2.10 (b) a le conflit  $\langle p_1\{t_2, t_3\} \rangle$



**Figure 2.10** Conflit et sans conflit

### 2.8.4 Réseau de Petri à choix libre

Un réseau de Petri est dit à choix libre est un RDP dans le quelle pour tout conflit  $\langle p_1\{t_2, t_3\} \rangle$  aucune des transitions  $t_2, t_3$  ne possède une autre place d'entrée que (voir figure (b) 2.10).



**Figure 2.11** RDP pas à choix libre

### 2.8.5 Réseau de Petri simple

Un RDP est dit simple si et seulement si toutes ses transitions n'interviennent que dans un seul conflit au maximum. Le RDP représenté dans la figure 2.11 est simple et celui représenté figure 2.12 n'est pas simple car  $t_2$  intervient dans les deux conflits  $\langle p_1\{t_2, t_3\} \rangle$  et  $\langle p_4\{t_2, t_5\} \rangle$ .

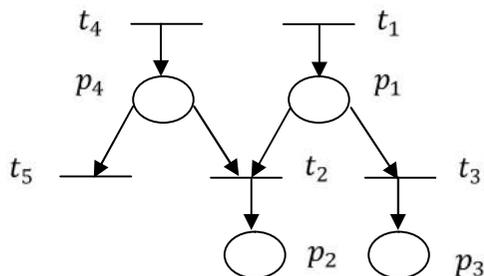


Figure 2.12 RDP pas simple

### 2.8.6 Réseau de Petri pur

Un RDP pur est RDP dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit également place de sortie de cette transition.

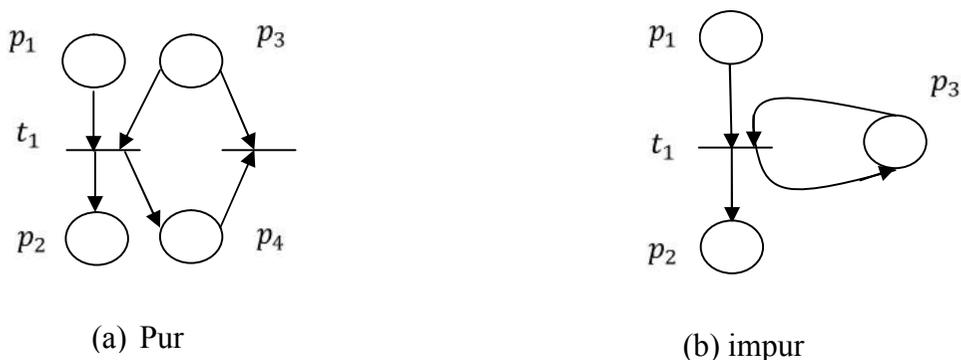


Figure 2.13 RDP pur et impur

## 3. Les Graphes d'événements temporisés

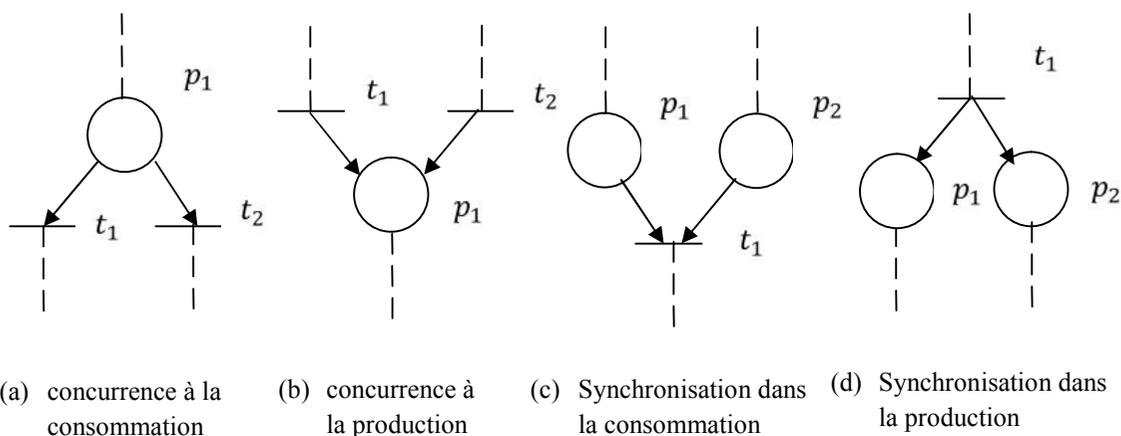
Dans notre travail, nous allons s'intéresser à l'une de ces structures qui est les graphes d'événements temporisés, dont nous présentons dans la section suivante quelques propriétés correspondantes.

### 3.1 Synchronisations et concurrences [2], [8]

Le formalisme des réseaux de Pétri est suffisamment puissant pour permettre de représenter, de façon fine et précise, une grande variété de comportements de systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation.

Sur la figure 2.14, nous avons représenté quatre motifs de réseaux de Petri permettant de les décrire tel que :

- La figure 2.14 (a) représente une structure nécessitant un choix. La place  $p_1$  a deux transitions aval, notées  $t_1$  et  $t_2$ . Formellement, cette situation arrive si la proposition suivante est vraie :  $p \in P, Pré(p, t_1) \times Pré(p, t_2) \neq 0$ . Le tir de  $t_1$  ou de  $t_2$  consomme le jeton de la place  $p_1$  et exclue donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de concurrence à la consommation, comme par exemple le partage d'un processeur entre des tâches concurrentes dans un système informatique ;
- la configuration de la figure 2.14 (b) permet quant à elle de modéliser une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici  $p_1$  ;
- le motif de la figure 2.14 (c) représente un phénomène de rendez-vous. La transition  $t_1$  n'est franchissable que lorsque les places  $p_1$  et  $p_2$  contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.14 (d), l'apport de jetons dans les places  $p_1$  et  $p_2$  est synchronisé par le tir de la transition  $t_1$  et permet, par exemple, de modéliser l'initialisation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.



**Figure 2.14** Concurrency et synchronisation dans les RdP

### 3.2 Propriétés des graphes d'événements

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements à travers des propositions suivantes.

**Proposition 2.1 [3]** Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.

**Démonstration:** Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin élémentaire qui commence et se termine au même sommet. Alors, si une transition franchissable appartenant à un circuit élémentaire est franchie, son franchissement prend un jeton dans une des places amont du circuit pour le remettre immédiatement dans une autre place aval du circuit. L'opération de franchissement d'une transition d'un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons du circuit.

**Proposition 2.2 [3]** Soit  $R$  un graphe d'événements et  $M_0$  son marquage initial, alors  $(R, M_0)$  est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient au moins une place initialement marquée.

**Démonstration:** Supposons qu'un circuit élémentaire d'un graphe d'événements ne soit pas initialement marqué. En référence à la proposition 2.1, ce circuit ne contiendra jamais de jeton et donc toutes ses transitions sont en permanence non franchissables : le graphe d'événements n'est donc pas vivant. Inversement, dans un graphe d'événements non vivant, une transition morte (qui n'est jamais tirée) possède obligatoirement en amont une transition également morte. En remontant ainsi d'une transition morte à une autre située en amont, on aboutit inéluctablement à une transition appartenant à un circuit, circuit qui est donc nécessairement sans jeton.

### 3.2.1 Introduction du temps dans les graphes d'événements temporisés(GET) [6]

Les modèles de systèmes à événements discrets étudiés par la suite sont temporisés.

Un RDP temporisé est un graphe d'événements auquel on associe des temporisations. Il permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Les RDPs temporisés sont utiles pour l'évaluation des performances d'un système. Soit les temporisations sont associées aux places (RDP P-temporisé) soit aux transitions (RDP T-temporisé).

Dans notre travail nous allons s'intéresser aux réseaux de Petri P-temporisés.

**Définition 2.5 (Réseaux de Petri P-temporisés).** On associe pour chaque couple de transition  $t_i, t_j \in T$ , on note  $P_{ij}$  la place qui relie la transition  $t_j$  à  $t_i$ . Si cette place  $P_{ij}$  existe, la temporisation (en valeur rationnelle positive) correspondante est notée  $\tau_{ij}$  et son marquage noté  $m_{ij}$ .

La plus grande temporisation du graphe d'évènement considéré est notée  $\tau^{max}$ , définie par :

$$\tau^{max} = \max\{\tau_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}.$$

Le plus grand marquage initial des places du graphe d'évènement considéré est noté  $m^{max}$ ,

$$\text{défini par : } m^{max} = \max\{m_{ij}\}_{ij/p_{ij} \in P}.$$

**Principe de fonctionnement :** lorsqu'une marque arrive dans une place temporisée, on dit qu'elle est indisponible pendant un temps  $\tau_{ij}$ . Quand le temps est écoulé, la marque devient disponible.

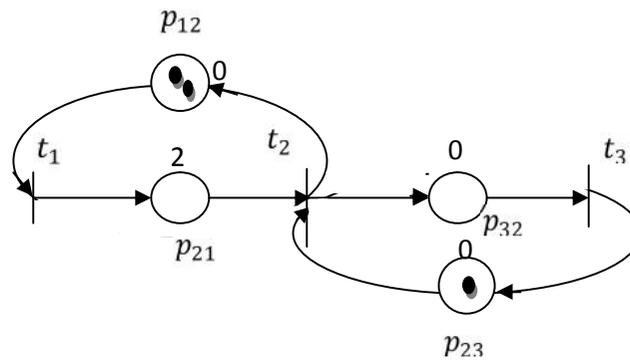


Figure 2.15 Exemple d'un graphe d'événements temporisés

Dans ce graphe d'évènement temporisée il existe deux circuits élémentaire qui sont :

$$\gamma_1 = (t_1, p_{21}, t_2, p_{12}, t_1), \quad \gamma_2 = (t_2, p_{32}, t_3, p_{23}, t_2).$$

### 3.2.2 Présentation des (GET) dans l'algèbre des dioïdes

Plusieurs modèles ont été proposés pour étudier spécifiquement les systèmes à évènements discrets. Les études présentées dans cette section font appel à des modèles reposant sur la structure algébrique de semi-anneau idempotent, encore appelée dioïde. Partons du constat qu'une partie des phénomènes survenant dans ces systèmes peuvent être d'écrits par des équations linéaires dans un dioïde de nombreux travaux ont contribué à construire une véritable théorie des systèmes sur ces derniers.

#### 4. Modèle linéaire des Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements temporisés (GET) sont une classe des réseaux de Petri ordinaires, dont chaque place a exactement une seule transition en amont et une seule transition en aval. Ce type de graphe peut représenter des systèmes soumis à des phénomènes de synchronisation, mais il ne permet pas de modéliser les phénomènes de conflit.

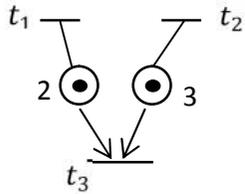
Dans le cadre de la modélisation des systèmes à événements discrets, il est nécessaire de déterminer comment les jetons sont exploités par les différentes transitions. Il est possible d'obtenir une représentation formelle dans un dioïde en précisant les conditions de fonctionnement d'un GET. L'activation d'une transition dans un graphe d'événements provoque la consommation d'un jeton dans chacune de ces places amont. Elle peut être répétée jusqu'à ce que l'une des places soit vide, c'est-à-dire un nombre de fois égal au minimum des quantités des jetons contenus dans les places amont correspondantes. Inversement, la date d'activation d'une transition est dictée par la date de disponibilité la plus tardive, donc maximale, des jetons dans les places amont. Ainsi, par exemple, dans un atelier de production, la fabrication de biens est limitée par la ressource en plus faible quantité, et la date de réalisation d'un objet ne peut être inférieure au plus long des temps de mise à disposition de ses constituants.

##### 4.1 Fonctions compteurs, domaine temporel

La mise en équation de GET peut se faire dans le domaine temporel, où le système est écrit par des fonctions dépendant du temps  $t$ . Dans ce cas, on ne s'intéresse plus aux dates d'activation des transitions mais au nombre d'activation de ces dernières jusqu'à l'instant considéré. En effet, cette représentation consiste à associer à chaque transition un vecteur  $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$  que l'on appellera compteur. Le comportement d'un graphe d'événements temporisé, si on s'intéresse à l'évolution au plus tôt, est représenté par l'équation dans  $\mathbb{R}_{min}^n$ .

On associe à chaque transition  $t_i$  une fonction appelée compteur  $\theta(t) \in \mathbb{R}_{min}^n$  qui désigne le nombre de tirs de transition  $t_i$  cumulés à l'instant  $t$ .

Les compteurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur  $u(t) \in \mathbb{R}_{min}^m$ .

**Exemple 3.**


$$\theta_3(t) = \min(1 + \theta_1(t - 2), 1 + \theta_2(t - 3)).$$

Plus généralement, le comportement d'un graphe d'événements temporisé est représenté par l'inéquation suivante :

$$\theta(t) \oplus_{\tau=0}^{\tau^{\max}} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)).$$

où  $A_{\tau} \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times n}$  est la matrice dont le terme  $A_{\tau,ij}$  est égal à  $m_{ij}$ , qui correspond au nombre de jetons initiaux dans la place  $p_{ij}$  si cette place existe et  $\varepsilon$  sinon. Les termes des matrices  $B_{\tau}(k) \in \mathbb{R}_{\min}^{n \times m}$  correspondent aux marquages initiaux des places de sortie des transitions sources. En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est-à-dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution maximale de l'inéquation précédente dans  $\mathbb{R}_{\min}$ . Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(t) = \oplus_{\tau=0}^{\tau^{\max}} (A_{\tau} \cdot \theta(t - \tau) \oplus B_{\tau} \cdot u(t - \tau)). \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est implicite en général. Elle est souvent remplacée par la solution explicite (forme ARMA).

**Définition 2.6 (forme ARMA).** Appelée aussi forme **explicite**, définit l'ensemble de franchissement des transitions au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir d'un vecteur de commande  $u(t)$  et des états précédents, l'équation (2.3) permet de déterminer toutes les valeurs du vecteur d'état. ARMA signifie (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (Auto Regressive-Moving Average en anglais).

En fait, le passage à la forme explicite se fait par la résolution de la partie implicite, en sélectionnant la plus grande solution de l'équation implicite. Ceci correspond bien au fonctionnement « au plus tôt ». La forme ARMA est donné comme suit :

$$\theta(t) = \oplus_{\tau=1}^{\tau^{\max}} (A_0^* \cdot A_{\tau} \theta(t - \tau) \oplus A_0^* B_{\tau} u(t - \tau)) \quad (2.3)$$

Où :  $A_0^*$  est l'étoile de Kleene de la matrice  $A_0$ .

Du point de vue de la l'interprétation, la suppression de la partie implicite correspond dans le graphe d'événements à une transformation au cours de la quelle les places internes (entre deux transitions) sans temporisation sont supprimées.

### Equation d'état dans $\mathbb{R}_{min}$ .

Par analogie avec la théorie des systèmes linéaires classiques, l'équation explicite (2.3) peut être transformée en une forme d'état. Pour obtenir un modèle d'état, nous décomposons toutes les places dont la temporisation  $\tau > 1$  en  $\tau$  places temporisées à 1. Nous ajoutons donc  $(\tau-1)$  transitions intermédiaires. On associe des compteurs à ces transitions intermédiaires, au nombre de  $n'$  qui sont les composantes du vecteur  $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}_{min}^{n'}$ . Le vecteur d'état résultant, noté  $x(t)$ , appartient à  $\mathbb{R}_{min}^N$ , avec  $N = n + n'$ , et est défini par :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{pmatrix}.$$

Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(t) = \hat{A}_0 \cdot x(t) \quad \hat{A}_1 \cdot x(t-1) \quad \hat{B} \cdot u(t),$$

Qui peut s'écrire sous la forme explicite :

$$x(t) = A \cdot x(t-1) \quad B \cdot u(t), \tag{2.4}$$

avec  $A = \hat{A}_0 \cdot \hat{A}_1$  et  $B = \hat{A}_0 \cdot \hat{B}$

**Propriété 2.3 [6]** pour un graphe d'événements temporisé avec des temporisations commensurables, l'équation d'état (2.4) est équivalente à la formulation suivante :

$$x(t) = A^\tau \cdot x(t-\tau) \quad \left[ \sum_{k=0}^{\tau-1} A^k \cdot B \cdot u(t-k) \right], \tag{2.5}$$

Pour tout  $\tau$  entier tel que  $\tau \geq 1$ .

### Démonstration

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Etant donné un graphe d'événement temporisé dont le comportement est décrit par l'équation d'état (2.5). Il est claire que la propriété est vérifiée pour  $\tau = 1$ . Supposons qu'elle est aussi vérifiée pour  $\tau = K$ , c'est-à-dire :

$$x(t) = A^K \cdot x(t - K) \quad [ \sum_{k=0}^{K-1} A^k \cdot B \cdot u(t - k) ]. \quad (2.6)$$

Du fait que l'hypothèse que l'équation d'état est satisfaite, nous avons

$$x(t - K) = A \cdot x(t - K - 1) \quad B \cdot u(t - K).$$

En remplaçant  $x(t - k)$  par son expression dans (2.6), nous obtenons alors

$$x(t) = A^{K+1} \cdot x(t - (K + 1)) \quad [ \sum_{k=0}^K A^k \cdot B \cdot u(t - k) ].$$

Nous montrons que la propriété est satisfaite pour  $\tau = K + 1$ , donc elle est vraie pour tout  $\tau \geq 1$ .

## 4.2 Fonctions dateurs, domaine événementiel

Pour la représentation en dateurs, on s'intéresse aux dates d'activation des transitions du GET.

Dans ce cas, on associe à chaque transition une fonction  $\theta(k) \in \mathbb{R}_{max}^n$  cette fonction est appelée dateur. Les dateurs correspondants aux transitions source sont les composantes du vecteur  $u(k) \in \mathbb{R}_{max}^m$ .

La dynamique d'un graphe d'événements temporisé est représentée par l'inéquation suivante :

$$\theta(k) \oplus_{l=0}^{m_{max}} (A_l \cdot \theta(k - l) \oplus B_l \cdot u(k - l)).$$

où  $A_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  est la matrice dont le terme  $A_{l,ij}$  est égal à  $\tau_{ij}$ , qui correspond à la temporisation de la place  $p_{ij}$  marquée à  $l$ . Si cette place n'existe pas, le terme  $A_{l,ij}$  est égale à  $\varepsilon$ .

Les termes des matrices  $B_l \in \mathbb{R}_{max}^{n \times m}$  correspondent aux temporisations des places de sortie des transitions source.

En général, on s'intéresse à l'évolution au plus tôt des graphes d'événements temporisés, c'est à dire qu'une transition est franchie dès qu'elle est franchissable. Cette évolution correspond à la solution minimale dans  $\mathbb{R}_{max}$  de l'inéquation précédente. Cette solution satisfait l'équation linéaire suivante :

$$\theta(k) = \oplus_{l=0}^{m_{max}} (A_l \cdot \theta(k - l) \oplus B_l \cdot u(k - l)) \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est implicite en général. Elle est souvent remplacée par sa solution explicite suivante :

$$\theta(k) = \oplus_{l=1}^{m_{max}} (A_0^* \cdot A_l \theta(k - l) \oplus A_0^* B_l u(k - l)) \quad (2.8)$$

Où  $A_0^*$  est l'étoile de Kleene de la matrice  $A_0$ .

**Remarque :** la forme explicite dans  $\mathbb{R}_{max}$  définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système.

### Equation d'état dans $\mathbb{R}_{max}$ .

Pour obtenir un modèle d'état dans  $\mathbb{R}_{max}$  pour des GET, nous décomposons toutes les places dont le marquage  $m > 1$  en  $m$  places marquées à 1, et donc, nous ajoutons  $(m-1)$  transitions intermédiaires. On associe des dateurs à ces transitions intermédiaires au nombre de  $n''$  qui sont les composantes d'un vecteur  $\bar{\theta}(k) \in \mathbb{R}_{max}^{n''}$ . Le vecteur d'état résultant, noté  $x(k)$ , appartient à  $\mathbb{R}_{max}^N$ , avec  $N = n + n''$ , et est défini par :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \theta(k) \\ \bar{\theta}(k) \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, nous considérons des graphes d'événements dont le marquage des place qui ont des transirons source en amont est nul. Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisé étendu est décrit par une équation de la forme :

$$x(k) = \hat{A}_0 \cdot x(k) \quad \hat{A}_1 \cdot x(k - 1) \quad \hat{B} \cdot u(k),$$

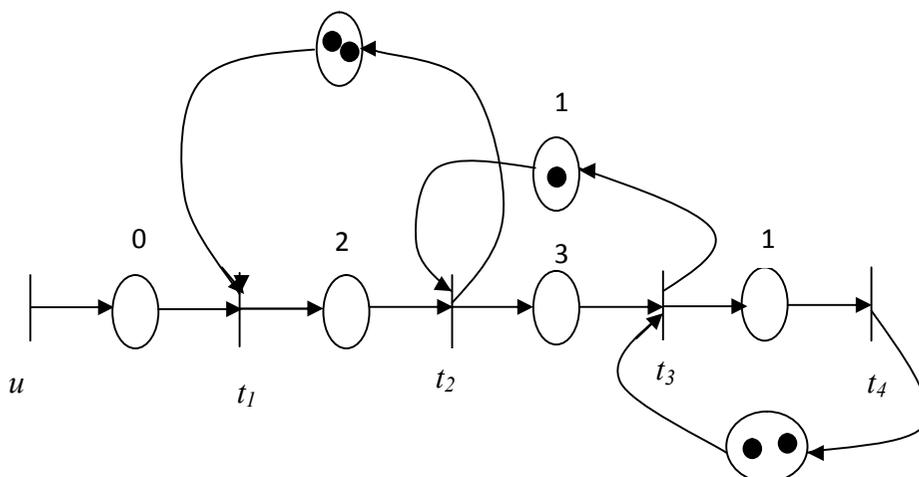
Qui peut s'écrire sous la forme explicite suivante :

$$x(k) = A \cdot x(k - 1) \quad B \cdot u(k), \tag{2.9}$$

Avec  $A = \hat{A}_0 \cdot \hat{A}_1$  et  $B = \hat{A}_0 \cdot \hat{B}$

### 5. Exemple

Nous considérons le graphe d'événements P-temporisé de la Figure2.13. Ce graphe comporte une transition source, nous avons aussi ,  $\tau^{max} = 3$  , et  $m^{max} = 2$ .



**Figure2.16** Graphe d'événements P-temporisés

➤ **Equations compteurs**

On considère un franchissement au plus tôt, c'est-à-dire que toute transition validée est immédiatement franchie. Les fonctions compteurs vérifient alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \min\{2 + \theta_2(t), u(t)\} \\ \theta_2(t) \leq \min\{\theta_1(t-2), 1 + \theta_3(t-1)\} \\ \theta_3(t) = \min\{\theta_2(t-3), 2 + \theta_4(t)\} \\ \theta_4(t) = \theta_3(t-1) \end{cases}$$

Dans l'algèbre  $(\min, +)$ , La solution au plus tôt de ces équations est comme suit :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = 2\theta_2(t) + u(t) \\ \theta_2(t) = \theta_1(t-2) + \theta_3(t-1) \\ \theta_3(t) = \theta_2(t-3) + 2\theta_4(t) \\ \theta_4(t) = \theta_3(t-1) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t) + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1) + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-2) + \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-3) + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t).$$

Cette équation est implicite et peut être remplacée par sa solution explicite.

Tout d'abord, on calcule  $A_0^*$ , tel que  $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

$$A_0^* = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} A_0^i = I_4 + A_0 + A_0^2 + A_0^3 + A_0^4$$

$$A_0^* = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Avec  $A_0^2 = A_0^3 = A_0^4 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

L'équation explicite est donnée par

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} e & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1)$$

$$\begin{pmatrix} e & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-2)$$

$$\begin{pmatrix} e & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-3) \quad \begin{pmatrix} e & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t)$$

On obtient  $\theta(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-1) \quad \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-2)$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \theta(t-3) \quad \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(t).$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événements temporisés initial pour avoir un nouveau graphe équivalent avec des temporisations égales à 1 ou à 0. Nous obtenons alors le graphe de la Figure 2.17.

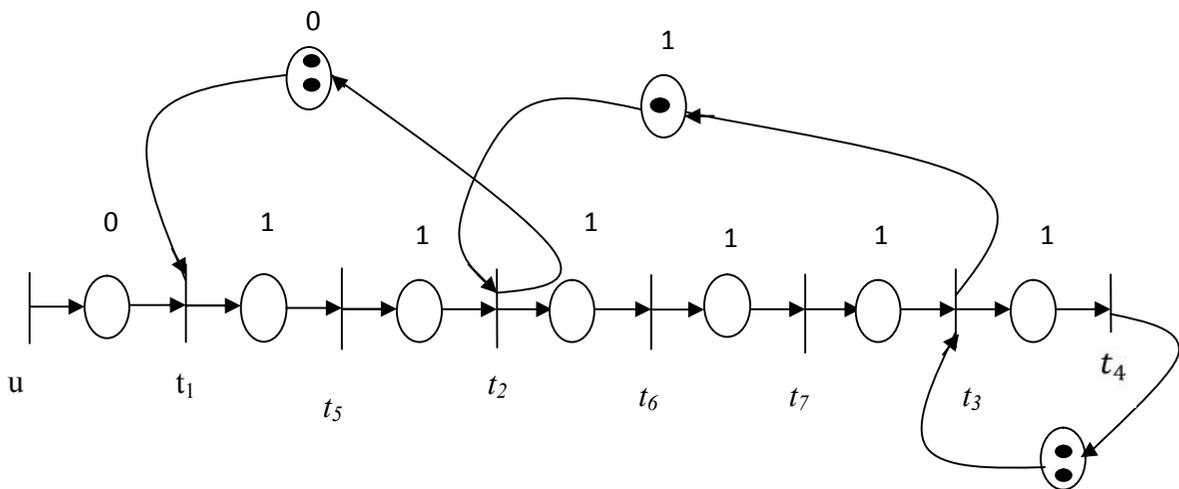


Figure 2.17 Graphe d'événements P-temporisés étendu

On calcule le modèle d'état :

$$\left( \begin{array}{l} \theta_1(t) = 2\theta_2(t) \quad u(t) \\ \theta_2(t) = \theta_5(t-1) \quad 1\theta_3(t-1) \\ \theta_3(t) = \theta_7(t-1) \quad 2\theta_4(t) \\ \theta_4(t) = \theta_3(t-1) \\ \vdots \\ \theta_5(t) = \theta_1(t-1) \\ \theta_6(t) = \theta_2(t-1) \\ \theta_7(t) = \theta_6(t-1) \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{l} \theta_1(t) = 2\theta_5(t-1) \quad 3\theta_3(t-1) \quad u(t) \\ \theta_2(t) = \theta_5(t-1) \quad 1\theta_3(t-1) \\ \theta_3(t) = \theta_7(t-1) \quad 2\theta_3(t-1) \\ \theta_4(t) = \theta_3(t-1) \\ \vdots \\ \theta_5(t) = \theta_1(t-1) \\ \theta_6(t) = \theta_2(t-1) \\ \theta_7(t) = \theta_6(t-1) \end{array} \right.$$

Le modèle d'état obtenu est donné par :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} x(t-1) \quad \begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(t)$$

➤ **Equations dateurs**

Pour le graphe d'événements de la Figure2.6, on associe une fonction dateur  $x_i(k)$  à chaque transition. Pour un franchissement au plus tôt, les fonctions dateurs vérifient les équations suivantes :

$$\left( \begin{array}{l} x_1(k) \quad \max\{(x_2(k-2), u(k))\} \\ x_2(k) \quad \max(2 + x_1(k), 1 + x_3(k-1)) \\ \vdots \\ x_3(k) \quad \max\{3 + x_2(k), x_4(k-2)\} \\ \left( \begin{array}{l} x_4(k) \quad 1 + x_3(k) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans l'algèbre  $(\max,+)$ , La solution au plus tôt de ces équations est comme suit :

$$\left( \begin{array}{l} x_1(k) = x_2(k-2) \quad u(k) \\ x_2(k) = 2x_1(k) \quad \boxplus 1x_3(k-1) \\ x_3(k) = 3x_2(k) \quad \boxplus x_4(k-2) \\ \left( \begin{array}{l} x_4(k) = 1x_3(k) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ce qui donne :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \\ + \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k).$$

Cette équation est implicite et peut être remplacée par sa solution explicite. Tout d'abord, on

calculé  $A_0^*$ , tel que  $A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

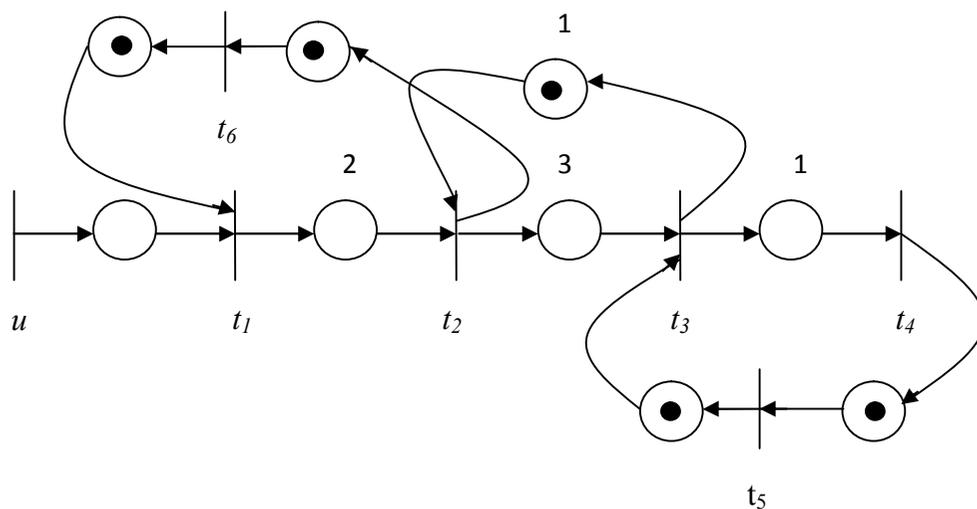
$$A_0^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_0^{i-4} = I_4 \quad A_0 \quad A_0^2 \quad A_0^3 \quad A_0^4$$

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & 1 & e \end{pmatrix}.$$

L'équation explicite est donnée par :

$$x(k) = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \\ + \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \\ + \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & e & \varepsilon & \varepsilon \\ 5 & 3 & e & \varepsilon \\ 6 & 4 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k). \\ x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & e \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} x(k-2) \quad \begin{pmatrix} e \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} u(k).$$

Pour avoir la forme d'état, nous avons étendu le graphe d'événements temporisés de la figure 2.13 pour cela nous décomposons chacune des deux places ayons deux jetons en deux places avec un seul jeton, et ajoutons aussi deux transitions intermédiaires. Nous obtenons un GET équivalent dans les marquages sont égaux à 1 ou 0. Nous obtenons alors le graphe de la figure 2.18.



**Figure 2.18** Graphe d'événements temporisés étendu

Le modèle d'état obtenu est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(k) = x_6(k-1) & u(k) \\ x_2(k) = 2x_1(k) \oplus 1x_3(k-1) \\ x_3(k) = 3x_2(k) \oplus x_5(k-1) \\ x_4(k) = 1x_3(k) \\ x_5(k) = x_4(k-1) \\ x_6(k) = x_2(k-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = x_6(k-1) & u(k) \\ x_2(k) = 2x_6(k-1) & 2u(k) & 1x_3(k-1) \\ x_3(k) = 5x_6(k-1) & 5u(k) & 4x_3(k-1) & x_5(k-1) \\ x_4(k) = 6x_6(k-1) & 6u(k) & 5x_3(k-1) & 1x_5(k-1) \\ & x_5(k) = x_4(k-1) \\ & x_6(k) = x_2(k-1) \end{cases}$$

L'écriture matricielle est :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & e & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & 1 & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \begin{bmatrix} e \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} u(k)$$

Où  $x_i(k)$  est la fonction dateur de la transition  $t_i$  pour  $i = 1$  à  $6$ , et  $u(k)$  correspond à la fonction dateur de la transition d'entrée  $u$ .

### Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation analytique des systèmes, après avoir présenté les définitions et notations essentielles concernant les réseaux de Petri. Le comportement des graphes d'événements temporisés est régi par des équations qui sont linéaires dans un dioïde. Les GET présentent le double avantage de mettre en évidence la structure profonde d'une situation donnée et de fournir une vision globale du système.

Les représentations d'état basées sur des dateurs et des compteurs d'événements nous ont permis de représenter les systèmes sous une forme récurrente explicite canonique.

## CHAPITRE 3 :

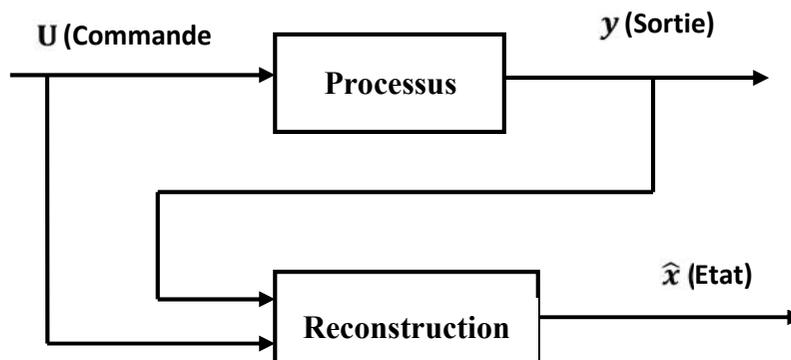
# Estimation d'états par étoile de Kleene

## Introduction

La théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes, concerne essentiellement les systèmes dynamiques à événements discrets qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation, l'idée directrice pour l'élaboration de cette théorie est d'adapter les concepts et résultats de la théorie conventionnelle des systèmes linéaires à la structure algébriques de dioïde. On peut mentionner que les problèmes de représentation (réponse impulsionnelle, description dans l'espace d'état) ont été abordés. Une transformée analogue à la transformée en  $z$ , permet en outre d'introduire la notion de matrice de transfert. Une analyse spectrale de la matrice d'état, qui fournit des éléments d'évaluation de performance. Les concepts de stabilité, de contrôlabilité structurelle ainsi que d'observabilité structurelle, ont été définis. Certains problèmes de commande ont pu être résolus pour les systèmes à événements discrets, on peut mentionner la commande en juste à temps [23], la commande avec modèle de référence[24] et la commande adaptative ont également été abordées.

En dehors du cadre des systèmes linéaires, peu de résultats sont connus pour l'estimation des variables d'états dans un système à événements discrets. Les premiers résultats concernant les problèmes d'observation des systèmes à événements discrets, obtenus par une approche  $(max, +)$ , ont été développés en Mars 2004 par Laurent Hardouin et Carlos Maia [22], il s'agit d'un résultat inspiré de Luenberger.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de l'estimation du vecteur d'état. Une approche sera d'utiliser la connaissance du modèle et des conditions initiales afin de caractériser le vecteur d'état à tout moment donné et d'avoir sa trajectoire d'état[17], [25]. La démarche adoptée correspond à la reconstruction de l'état  $x(k)$  du système à partir des données connues de l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  (voir la figure 3.1).



**Figure3.1** Reconstruction d'état à partir de l'entrée et la sortie

## 1. Rappels sur les observateurs

Un estimateur ou reconstituteur d'état est un système ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel, et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus (voir figure 3.1).

La réalisation de l'estimation dépend de la nature du modèle du système réel étudié : continu ou discret, déterministe ou stochastique. Notons que, dans le cas où le modèle du processus est déterministe le reconstituteur d'état sera appelé observateur tandis que dans le cas où le modèle est stochastique, le reconstituteur d'état sera appelé filtre.

Dans notre cas nous nous limiterons au cas déterministes.

Rappelons la philosophie de l'estimation dans les systèmes continus [26]. Le problème de l'observabilité prend origine dans le fait que l'on considère souvent des systèmes possédant  $n$  variables d'état et  $m$  sorties, dans lesquels le nombre de sorties est inférieur à celui des variables d'état ( $m < n$ ). La question se pose sur la possibilité de reconstruire l'état à un instant, à partir de l'observation de la sortie pendant un temps fini.

### 1.1 Observateurs en continu

Le modèle correspond aux classiques équations d'état et de mesure, définies dans l'algèbre habituelle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

La résolution du problème par Luenberger l'a conduit à l'observateur suivant, où la décroissance de fonctions exponentielles se traduira par la convergence asymptotique à zéro de l'erreur d'observation  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , avec comme point de départ  $\tilde{x} \approx x_0 - \hat{x}_0$ . La variable  $\hat{x}_0$  est une estimation de l'état initial.

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)], & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

L'estimation n'est alors correcte qu'après un certain temps de convergence, fixé par la dynamique de l'observateur. Ce sera le cas si la matrice  $\tilde{A} = A - K \cdot C$ , c'est-à-dire que les valeurs propres de  $\tilde{A}$  sont à partie réelle négative.

## 1.2 Observateur dans l'algèbre max-plus

Le point de départ de constitution d'un observateur dans l'algèbre  $(\max,+)$  est la structure de l'observateur de Luenberger mais avec les transformations suivantes : l'addition  $+$  du modèle et la soustraction  $-$  du comparateur, sont remplacées par le maximum noté  $\oplus$  ; la multiplication  $\times$  est remplacée par l'addition notée  $\otimes$ .

### 1.2.1 Observabilité des graphes d'événements temporisés

**Définition 3.1** Un graphe d'événements est structurellement observable si, à partir de chaque transition interne, il existe au moins un chemin qui mène à une transition de sortie.

Dans les réseaux de Petri, une autre définition est souvent utilisée : une transition est dite observable si les dates des tirs sont connues.

## 2. Estimation d'état par étoile de Kleene [17], [25]

Cette méthode consiste à trouver la borne maximale de  $x(k)$  pour  $k$  allant de  $k_0$  à  $k_f$  sachant que la commande  $u(k)$  et la sortie  $y(k)$  sont connues, par exemple le tir de la transition  $u_i$  dans le système de production signifie qu'un objet est donné au processus pour être transformé et le tir de la transition  $y_i$  signifie que la fabrication d'un objet vient d'être terminée, ainsi le modèle est supposé connu sur le même horizon d'observation. Ce problème d'estimation est différent de celui de la synthèse de commande où la commande et la sortie sont des données inconnues.

### 2.1 Principe de la méthode d'estimation par étoile de Kleene

A partir du graphe d'événements, on construit dans un premier temps un nouveau réseau de Petri tel que chaque place contenant  $n$  jetons avec  $n$  strictement supérieur à 1 soit développée sous forme d'une chaîne de  $n$  places contenant chacune un jeton. Ce nouveau graphe peut être décrit par les équations ci-dessous.

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \quad x(k) \quad A_1 x(k-1) \quad B \quad u(k) \\ y(k) &= C \quad x(k) \end{aligned}$$

L'élément  $[A_0]_{ij}$  (respectivement  $[A_1]_{ij}$ ) représente la temporisation de la place sans jeton (respectivement : avec un jeton) formant le lien entre la transition  $x_j$  et la transition  $x_i$ .

L'élément  $[B]_{ij}$  (respectivement :  $[C]_{ij}$ ) représente la temporisation de la place sans jeton formant le lien entre l'entrée  $u_j$  et la transition  $x_i$  (respectivement : entre la transition  $x_j$  et la sortie  $y_i$ ).

Sous la condition que le graphe d'événements ne présente pas de circuit sans jeton, le système peut se réduire à une forme d'état classique en utilisant l'étoile de  $A_0$ . On obtient

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0^* A_1 x(k-1) A_0^* Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Cette dernière forme n'étant pas indispensable, nous utiliserons la forme qui la précède et dont l'intérêt est que chaque composante  $[A_0]_{ij}$ ,  $[A_1]_{ij}$ ,  $[B]_{ij}$  ou  $[C]_{ij}$  représente exactement une temporisation du graphe et non une expression fonction de temporisations pour la forme d'état. Ce modèle est donc plus proche du graphe d'événement.

Nous adoptons ici une démarche itérative qui nous permettra de limiter le nombre de variables et d'équations à traiter simultanément. Ainsi, nous allons résoudre dans un premier temps le système précédent pour  $k = k_f$  ce qui va nous permettre de donner une borne supérieure pour  $x(k_f)$  et  $x(k_f - 1)$ .

Nous notons respectivement  $x^+(k_f)$  et  $x^+(k_f - 1)$  la borne supérieure de  $x(k_f)$  et  $x(k_f - 1)$  connaissant l'entrée et la sortie sur l'horizon  $[k, k_f]$ .

Au rang suivant  $k = k_f - 1$  on a :

$$\begin{aligned} x(k_f - 1) &= A_0 x(k_f - 1) \oplus A_1 x(k_f - 2) \oplus B u(k_f - 1) \\ y(k_f - 1) &= C x(k_f - 1) \end{aligned}$$

Comme il faut tenir compte des calculs précédents et en particulier de la borne supérieure de  $x(k_f - 1)$  déjà calculée, on doit donc ajouter l'inégalité suivante dans le système à résoudre  $(k_f - 1) \leq x^+(k_f - 1)$ .

On peut donc répéter la procédure de manière itérative et décroissante jusque  $k_0$ .

La démarche est donc la suivante :

- Transformer le système à résoudre en un ensemble d'inéquations de type contrainte bornant par-dessus, la valeur d'une seule variable (CBD) qui sera donnée dans la définition 3.2.

- Résoudre le système en calculant une borne supérieure pour  $x(k)$  et  $x(k - 1)$  par l'étoile de Kleene.
- Recommencer l'étape précédente en décrémentant  $k$  d'une unité et en intégrant le résultat précédent.

### 3. Développement de la méthode de résolution par étoile de Kleene

Considérons des SED modélisés par des GET, la technique d'estimation du vecteur d'état qui introduit un observateur dans l'algèbre  $(\max, +)$  sera développée dans la partie suivante .

#### 3.1 Formulation du système d'inéquation

Le comportement d'un graphe d'évènements temporisés peut être décrit par des équations linéaires dans l'algèbre Max-Plus ce qui nous ramène à une forme d'équation implicite écrite sous forme d'équations suivantes :

$$x(k) = A_0 \quad x(k) \quad A_1 \quad x(k - 1) \quad B \quad u(k)$$

$$y(k) = C \quad x(k)$$

Ces équations peuvent être réécrites de la manière suivante :

- Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  ( $n$  dimension de l'état,  $q$  de l'entrée),

$$x_i(k) = \max_{j=1}^n [A_0]_{i,j} \quad x_j(k) \quad \max_{j=1}^n [A_1]_{i,j} \quad x_j(k - 1) \quad \max_{j=1}^q B_{i,j} \quad u_j(k) \quad (3.1)$$

- Pour  $i$  allant de 1 à  $m$  ( $m$  dimension de la sortie) ,

$$y_i(k) = \max_{j=1}^n C_{i,j} \quad x_j(k) \quad (3.2)$$

A partir de ce système de  $n + m$  équations et  $n$  variables  $x_i(k)$ , ceci pour  $k$  donné, nous allons construire un système d'inégalités particulières que nous définissons dans la prochaine ci-dessous.

#### 3.2 Construction d'un système d'inéquations particulières en introduisant les CBDs

**Définition 3.2 [19]** Une contrainte bornant par dessus abrégée en CBD, présente la forme suivante  $x_{\tau(i)} \leq \max_{j=1}^n A_{ij} x_j$  ou  $\tau(i)$  est utilisé pour désigner la variable du terme gauche de cette  $i^{\text{ème}}$  inégalité et  $n$  nombre de variables.

**Remarque :** la variable  $x_{\tau(i)}$  peut être le termes gauche de plusieurs CBD et donc en peut avoir  $x_{\tau(i)} = x_{\tau(j)}$  avec  $i \neq j$ .

Considérons maintenant l'équation (3.1). Dans le problème posé, le terme  $\sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k)$  représente une constante. Pour ramener le système à une forme CBD, nous introduisons une nouvelle variable  $x_0$  qui représente l'élément neutre  $e$  pour l'opération et le zéro en notation usuelle. Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  ( $n$  est la dimension de l'état et  $q$  la dimension de l'entrée),

$$x_i(k) = \sum_{j=1}^n [A_0]_{i,j} x_j(k) + \sum_{j=1}^n [A_1]_{i,j} x_j(k-1) + \left( \sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k) \right) x_0$$

pour chaque  $j$  allant de 1 à  $n$ ,

$$[A_0]_{i,j} x_j(k) = x_i(k) \text{ ou } x_j(k) = [A_0]_{i,j}^{(-1)} x_i(k)$$

$$\text{et également } x_j(k-1) = [A_1]_{i,j}^{(-1)} x_i(k)$$

$$\text{Pour le dernier terme de droite, } \left( \sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k) \right) x_0 = x_i(k)$$

$$\text{ou } x_0 = \left( \sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k) \right)^{(-1)} \otimes x_i(k)$$

Considérons la seconde équation. Pour  $i$  allant de 1 à  $m$  ( $m$  est la dimension de la sortie), elle est équivalente à :

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j(k) \text{ et } \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j(k) = y_i(k).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous introduisons la variable  $x_0$  dans les inégalités.

$$y_i(k) = x_0 \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j(k) \text{ ou } x_0 y_i(k) = \left( \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j(k) \right).$$

$$\text{et pour chaque } j \text{ allant de 1 à } n, C_{i,j} x_j(k) = y_i(k) x_0$$

$$\text{ou } x_j(k) = C_{i,j}^{(-1)} y_i(k) x_0$$

En résumé, le système peut être ramené au système CBD suivant et équivalent si  $x_0 = e$  :

➤  $m(1+n)$  relations état /sortie

$$(i \in [1,m]), x_0 y_i(k) = \left( \sum_{j=1}^n C_{i,j} x_j(k) \right).$$

$$(i \in [1,m]) (j \in [1,n]), x_j(k) = C_{i,j}^{(-1)} y_i(k) x_0$$

➤  $2n(1+n)$  relation état entrée

$$(i \in [1,n]), x_i(k) = \sum_{j=1}^n [A_0]_{i,j} x_j(k) + \sum_{j=1}^n [A_1]_{i,j} x_j(k-1) + \left( \sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k) \right) x_0$$

$$(i \in [1,n]), x_0 \left( \sum_{j=1}^q B_{i,j} u_j(k) \right) = x_i(k)$$

$$(i \in [1,n]) (j \in [1,n]), x_j(k) = [A_0]_{i,j}^{(-1)} x_i(k) \text{ et } x_j(k-1) = [A_1]_{i,j}^{(-1)} x_i(k)$$

**Remarque :** On rappelle que dans la notation  $(\max; +)$ ,  $[A_1]_{ij}^{(-1)} = -[A]_{ij}$  avec le signe moins ordinaire et  $A$  est une matrice donnée dans l'algèbre  $(\max, +)$ .

### 3.3 Résolution du système par étoile de Kleene

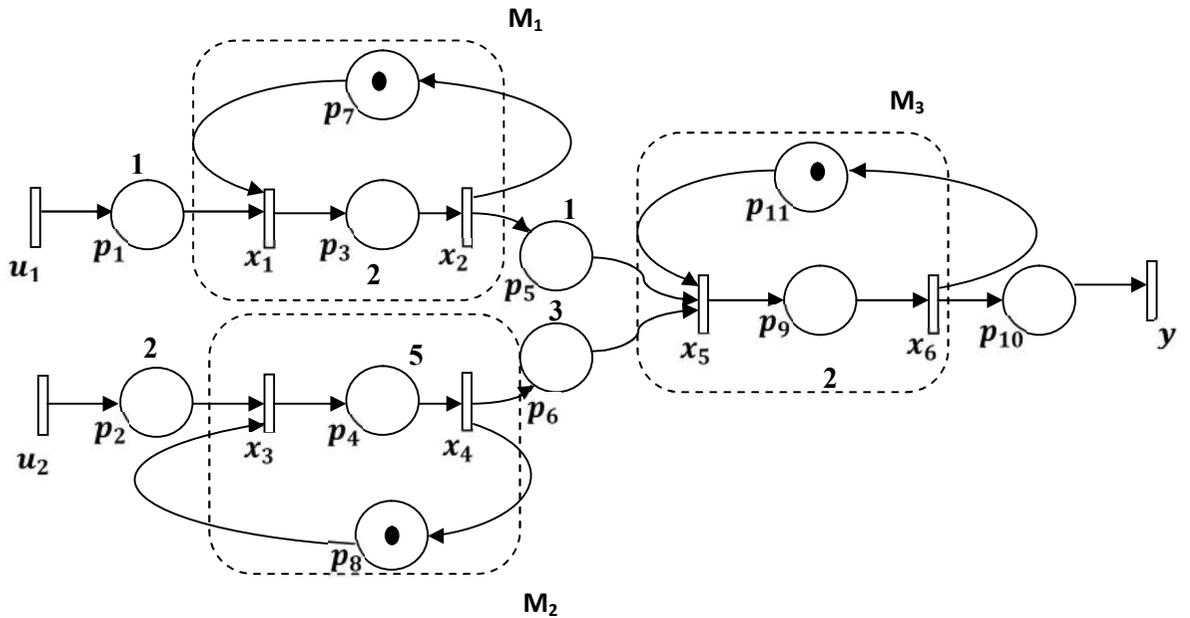
Exploitant l'étoile de Kleene, la technique de résolution de E. Walkup et G. Borriello [20] permet de calculer la plus grande solution des systèmes d'équations et d'inéquations pouvant se mettre sous la forme d'un ensemble d'inéquations du type CBD. Elle peut résoudre des équations  $(\max, +)$  linéaires de la forme  $x(k) \leq A x(k) + B$  et faire de l'optimisation de fonctions sous contraintes. Utilisant l'opérateur bien connu de l'étoile de Kleene présenté dans la section 4 du premier chapitre.

La solution trouvée devra également vérifier les inégalités de type CBD couplées avec la variable  $x_0$  afin que toutes les inégalités soient vérifiées.

## 4. Exemple d'application d'un modèle d'atelier d'assemblage

La figure 3.2 fournit un modèle simple d'atelier d'assemblage constitué de trois machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . Les pièces sont traitées en parallèle sur  $M_1$  et  $M_2$  puis assemblées par la machine  $M_3$ , ces pièces sont passées par le traitement thermique en  $p_1$  et  $p_2$  avant l'usinage dans les deux machines  $M_1$  et  $M_2$  et puis elles passent au refroidissement en  $p_5$  et  $p_6$  avant l'assemblage de deux pièces dans la machine  $M_3$ .

Les machines  $M_1$  et  $M_2$  ont clairement des temps de cycle différents : la première peut produire une pièce en deux (2) unités de temps tandis que la seconde traite une pièce en cinq (5) unités de temps. La machine  $M_3$  peut également assumer un taux de production d'une pièce toutes les deux (2) unités de temps. Par conséquent, en régime permanent, le système d'assemblage peut au mieux produire à la vitesse de la machine  $M_2$  (qui est la plus lente).



**Figure 3.2** Exemple d'atelier d'assemblage

On a appliqué l'algorithme qui déroule l'approche max-plus qui utilise l'opérateur étoile de Kleene, afin d'avoir le vecteur d'état maximal en disposant du modèle donné par la figure 3.2 et des valeurs de l'entrée et de la sortie sur l'horizon d'évènements  $k \in [1, 4]$  données dans le tableau 3.1.

En premier point, on écrit le modèle sous forme d'équations suivantes :

$$x(k) = A_0 \quad x(k) \quad A_1 \quad x(k-1) \quad B \quad u(k)$$

$$y(k) = C \quad x(k)$$

Et pour cela on écrit les équations dateurs suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max\{1 + u_1(k), x_2(k-1)\} \\ x_2 &= 2 + x_1(k) \\ x_3(k) &= \max\{2 + u_2(k), x_4(k-1)\} \\ x_4(k) &= 5 + x_3(k) \\ x_5(k) &= \max\{1 + x_2(k), 3 + x_4(k), x_6(k-1)\} \\ x_6(k) &= 2 + x_5(k) \\ y(k) &= x_6(k) \end{aligned}$$

Dans l'algèbre (max,+), ces équations sont écrites comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &\geq x_2(k-1) \quad 1u_1(k) \\
 x_2(k) &= 2x_1(k) \\
 x_3(k) &\geq x_4(k-1) \quad 2u_2(k) \\
 x_4(k) &= 5x_3(k) \\
 x_5(k) &= 1x_2(k) \vee 3x_4(k) \quad x_6(k-1) \\
 x_6(k) &= 2x_5(k) \\
 y(k) &= x_6(k)
 \end{aligned} \tag{\alpha}$$

La solution au plus tôt est la suivante :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= x_2(k-1) \quad 1u_1(k) \\
 x_2(k) &= 2x_1(k) \\
 x_3(k) &= x_4(k-1) \quad 2u_2(k) \\
 x_4(k) &= 5x_3(k) \\
 x_5(k) &= 1x_2(k) \vee 3x_4(k) \quad x_6(k-1) \\
 x_6(k) &= 2x_5(k) \\
 y(k) &= x_6(k)
 \end{aligned}$$

Matriciellement ces équations au plus tôt sont écrites comme suit :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k).$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e)x(k)$$

Pour pouvoir poursuivre la démarche de l'approche considérée, on doit ramener le système d'inéquations (α) à une forme CBD en introduisant une variable  $x_0$  pour les termes constant

On aura le système suivant :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= x_2(k-1) \quad 1u_1(k)x_0 \\
 x_2(k) &= 2x_1(k) \\
 x_3(k) &= x_4(k-1) \quad 2u_2(k)x_0 \\
 x_4(k) &= 5x_3(k) \\
 x_5(k) &= 1x_2(k) \vee 3x_4(k) \quad x_6(k-1) \\
 x_6(k) &= 2x_5(k) \\
 y(k)x_0 &= x_6(k) \quad x_0 \quad y(k) \quad (-1)x_6(k)
 \end{aligned}$$

Le système en forme CBD ci-dessus peut être écrit sous d'inéquations comme suit (tout en respectant les propriétés de calcul dans les dioïdes) :

$$\begin{array}{r}
 x_2(k-1) \quad x_1(k) \\
 u_1(k)x_0 \quad x_1(k) \\
 2x_1(k) \quad x_2(k) \\
 x_4(k-1) \quad x_3(k) \\
 2u_2(k)x_0 \quad x_3(k) \\
 5x_3(k) \quad x_4(k) \\
 1x_2(k) \quad x_5(k) \\
 3x_4(k) \quad x_5(k) \\
 x_6(k-1) \quad x_5(k) \\
 2x_5(k) \quad x_6(k) \\
 x_6(k) \quad y(k)x_0
 \end{array}$$

Arrivons à cette étape, on cherche à construire un système d'inéquations qu'on peut écrire sous forme de l'équation  $x(k) = Ax(k) + B$ .

Donc, depuis les inéquations précédentes, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_2(k-1) \quad x_1(k) \\
 x_0 \leq [1u_1(k)] \quad (-1)x_1(k) \\
 x_1(k) \quad (2) \quad (-1)x_2(k) \\
 x_4(k-1) \quad x_3(k) \\
 x_0 \quad [2u_2(k)] \quad (-1)x_3(k) \\
 x_3(k) \quad (5) \quad (-1)x_4(k) \\
 x_2(k) \quad (1) \quad (-1)x_5(k) \\
 x_4(k) \quad (3) \quad (-1)x_5(k) \\
 x_6(k-1) \quad x_5(k) \\
 x_5(k) \quad (2) \quad (-1)x_6(k) \\
 x_6(k) \quad y(k)x_0
 \end{array} \right.$$

Tirons le système suivant de celui qui le précède :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1(k) \quad (2) \quad (-1)x_2(k) \\
 x_2(k) \quad (1) \quad (-1)x_5(k) \\
 x_3(k) \quad (5) \quad (-1)x_4(k) \\
 x_4(k) \quad (3) \quad (-1)x_5(k) \\
 x_5(k) \quad (2) \quad (-1)x_6(k) \\
 x_6(k) \quad y(k)x_0
 \end{array} \right. \quad (\beta)$$

Et vérifiant, par la suite, à chaque itération le système suivant :

$$\begin{cases} x_0 \leq [1u_1(k)] \quad (-1)x_1(k) \\ \quad \quad \quad x_4(k-1) \quad x_3(k) \\ x_0 \quad [2u_2(k)] \quad (-1)x_3(k) \\ \quad \quad \quad x_6(k-1) \quad x_5(k) \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système ( $\beta$ ) est comme suit :

$$x(k) \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix} \quad ( \gamma )$$

L'inégalité ( $\gamma$ ) est sous forme de  $x(k) = Ax(k) + B$ , la plus grande solution de cette équation est  $x(k) = A^{-1} B$

Le calcul de  $A$

$$A = I_6 - A^1 - A^2 - A^3 - A^4 - A^5 - A^6$$

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon & \varepsilon & -3 & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -1 & -3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 & -3 & -10 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

La plus grande solution de l'inéquation ( $\gamma$ ) est :

$$x(k) = A^{-1} B = \begin{pmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon & \varepsilon & -3 & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -3 & -3 & -5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{matrix}$$

Les entrées  $u_1(k)$ ,  $u_2(k)$  et leur sortie  $y(k)$  correspondante pour  $k$  allant de 1 à 4, sont données par le tableau ci-dessous :

k	1	2	3	4
$u_1(k)$	6	11	16	21
$u_2(k)$	0	5	10	15
$y(k)$	12	17	22	27

**Tableau3.1** les valeurs des entées et leur sortie correspondante

L'écriture matricielle de la plus grande solution  $x(k)$  peut être écrite sous forme d'un système d'inéquation afin de remplacer les données du tableau 3.1

$$\begin{cases} x_1(k) = -5y(k) \\ x_2(k) = -3y(k) \\ x_3(k) = -10y(k) \\ x_4(k) = -5y(k) \\ x_5(k) = -2y(k) \\ x_6(k) = y(k) \end{cases}$$

La démarche itérative aura lieu en décrémentant  $k$  de  $k_f = 4$  à  $k_0 = 1$

❖ **Pour  $k = 4$  on a  $y(4) = 27$ , on aura :**

$$\begin{cases} x_1(4) = -5 & 27 \\ x_2(4) = -3 & 27 \\ x_3(4) = -10 & 27 \\ x_4(4) = -5 & 27 \\ x_5(4) = -2 & 27 \\ x_6(4) = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(4) = 22 \\ x_2(4) = 24 \\ x_3(4) = 17 \\ x_4(4) = 22 \\ x_5(4) = 25 \\ x_6(4) = 27 \end{cases}$$

Le vecteur d'état maximal pour  $k = 4$  est le suivant :

$$x^+(4) = \begin{pmatrix} 22 \\ 24 \\ 17 \\ 22 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix}$$

On vérifie les inéquations suivantes pour  $k \in [1,4]$

$$\begin{cases} x_2(k-1) < x_1(k) & (1) \\ x_4(k-1) < x_3(k) & (2) \\ x_6(k-1) < x_5(k) & (3) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(4-1) \quad x_1(4) \\ x_4(4-1) \quad x_3(4) \\ x_6(4-1) \quad x_5(4) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2(3) \quad 22 \\ x_4(3) \quad 17 \\ x_6(3) \quad 25 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Ces résultats seront pris en considération dans la} \\ \text{prochaine itération} \end{array}$$

❖ Pour  $k = 3$  on remplace  $y(3)=22$  on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(3) = -5 \quad 22 \\ x_2(3) = -3 \quad 22 \\ x_3(3) = -10 \quad 22 \\ x_4(3) = -5 \quad 22 \\ x_5(3) = -2 \quad 22 \\ x_6(3) = 22 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(3) = 17 \\ x_2(3) = 19 \\ x_3(3) = 12 \\ x_4(3) = 17 \\ x_5(3) = 20 \\ x_6(3) = 22 \end{array} \right.$$

Les inéquations 1, 2 et 3 sont vérifiées pour  $k = 4$

Tel que  $\left\{ \begin{array}{l} 19 < 22 \\ 17 = 17 \\ 22 < 25 \end{array} \right.$

Donc l'estimation du vecteur maximal d'état pour  $k = 3$  est :

$$x^+(3) = \begin{array}{c} 17 \\ | \quad 19 \\ | \quad 12 \\ | \quad 17 \\ | \\ 20 \\ \backslash 22 / \end{array}$$

On vérifié les mêmes inéquations 1,2 et 3 pour  $k = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(3-1) \quad x_1(3) \\ x_4(3-1) \quad x_3(3) \\ x_6(3-1) \quad x_5(3) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2(2) \quad 17 \\ x_4(2) \quad 12 \\ x_6(2) \quad 20 \end{array} \right.$$

❖ Pour  $k = 2$  on a  $y(2) = 17$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1(2) = -5 & 17 \\ x_2(2) = -3 & 17 \\ x_3(2) = -10 & 17 \\ x_4(2) = -5 & 17 \\ x_5(2) = -2 & 17 \\ x_6(2) = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(2) = 12 \\ x_2(2) = 14 \\ x_3(2) = 7 \\ x_4(2) = 12 \\ x_5(2) = 15 \\ x_6(2) = 17 \end{cases}$$

Les inéquations 1, 2 et 3 sont vérifiées pour  $k = 3$

Tel que  $\begin{cases} 14 < 17 \\ 12 = 12 \\ 17 < 20 \end{cases}$

Donc l'estimation du vecteur d'état pour  $k = 2$  est donné par :

$$x^+(2) = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 7 \\ 12 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Les inéquations 1, 2 et 3 pour  $k = 2$  sont :

$$\begin{cases} x_2(2-1) & x_1(2) \\ x_4(2-1) & x_3(2) \\ x_6(2-1) & x_5(2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(1) & 12 \\ x_4(1) & 7 \\ x_6(1) & 15 \end{cases}$$

❖ Pour  $k = 1$  on a  $y(1) = 12$

$$\begin{cases} x_1(1) = -5 & 12 \\ x_2(1) = -3 & 12 \\ x_3(1) = -10 & 12 \\ x_4(1) = -5 & 12 \\ x_5(1) = -2 & 12 \\ x_6(1) = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(1) = 7 \\ x_2(1) = 9 \\ x_3(1) = 2 \\ x_4(1) = 7 \\ x_5(1) = 10 \\ x_6(1) = 12 \end{cases}$$

Les inéquations 1, 2 et 3 sont vérifiées pour  $k = 2$

D'où l'estimation du vecteur d'état pour  $k = 1$  est donnée par :

$$x^+(1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Par ce dernier résultat, on arrive à avoir le vecteur d'état estimé sur l'horizon [1,4].

➤ **Interprétation des résultats :**

Dans un premier temps, nous calculons le vecteur d'état du système sur l'horizon [1,4], et qui vérifie le modèle algébrique donné par l'équation d'état correspondant au modèle de l'atelier d'assemblage suivante :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon & 8 & \varepsilon & e \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} x(k-1) + \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & 7 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} u(k)$$

Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$u_1(k)$	6	11	16	21
$u_2(k)$	0	5	10	15
$y(k)$	12	17	22	27
$x_1(k)$	7	12	17	22
$x_2(k)$	9	14	19	24
$x_3(k)$	2	7	12	17
$x_4(k)$	7	12	17	22
$x_5(k)$	10	15	20	25
$x_6(k)$	12	17	22	27

**Tableau3.2** les résultats de calcul du vecteur d'état sur l'horizon  $k \in [1,4]$

Dans un deuxième temps, les résultats relatifs au plus grand état estimé  $x^+ = \hat{x}$  sur le même horizon, sont regroupés dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4
$u_1(k)$	6	11	16	21
$u_2(k)$	0	5	10	15
$y(k)$	12	17	22	27
$\hat{x}_1(k)$	7	12	17	22
$\hat{x}_2(k)$	9	14	19	24
$\hat{x}_3(k)$	2	7	12	17
$\hat{x}_4(k)$	7	12	17	22
$\hat{x}_5(k)$	10	15	20	25
$\hat{x}_6(k)$	12	17	22	27

Le vecteur d'état réel  $x(k)$ , obtenu en appliquant les mêmes entrées sorties que celles connues pour l'estimation par étoile de Kleene, égale à  $x^+(k) = \hat{x}(k)$  trouvé par l'application de l'approche étudiée.

Alors on peut dire que cette méthode d'estimation des valeurs d'états peut caractériser le vecteur d'état maximal  $x^+(k)$  qui est le même que le vecteur d'état estimé  $\hat{x}(k)$ .

### Conclusion

Nous avons proposé d'appliquer une approche d'estimation basée sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant l'étoile de Kleene sur un atelier d'assemblage.

On conclut que cette approche permet de donner une borne estimée maximale du vecteur d'état en un temps fini.

# Conclusion générale

### Conclusion générale

La classe des systèmes à événements discrets que nous avons étudié dans ce mémoire est celle qui met en jeu des phénomènes de synchronisation, elle s'appelle Graphes d'événements temporisés. Pour un tel processus, on peut obtenir un modèle mathématique sous la forme d'équations de récurrence qui utilisent des opérateurs *min* ou *max* et qui sont non linéaires, mais une fois traduite dans une structure algébrique particulière, appelée dioïdes, cette représentation devient linéaire. L'algèbre des dioïdes est donc apparue comme la structure mathématique adéquate pour modéliser et étudier cette classe de systèmes.

Dans ce travail, nous avons abordé le problème d'observation des systèmes à événements discrets. Dans un premier temps, nous avons présenté la mise en équations des Graphes d'événements temporisés qui conduit à un modèle mathématique couramment utilisé par les automaticiens : la représentation d'état linéaire. Ensuite, nous avons abordé le problème de l'estimation des variables d'états, cette approche se base sur le calcul d'une borne supérieure de l'état en utilisant l'étoile de Kleene. Pour mettre en œuvre cette synthèse, nous avons appliqué l'approche sur un atelier d'assemblage.

Afin de résoudre le problème d'estimation par l'étoile de Kleene, il est important de reformuler le modèle d'état sous forme d'un problème du type point fixe. La résolution nous a conduit à introduire un estimateur optimal en un temps fini et sur un horizon fini permettant d'estimer le plus grand état sous la condition de l'observabilité structurelle.

Comme perspectives, il serait très intéressant d'appliquer cet estimateur sur un système de production dans l'objectif de détection de défaillances et la prédiction de la future évolution de la sortie et la commande du processus.

## ✓ Introduction au logiciel Scilab

Scilab est un logiciel de calcul numérique développé par l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) et distribué gratuitement sur presque tout type d'ordinateurs (PC Windows, Linux, Unix, MacIntosh). Pour plus d'information et pour télécharger ce logiciel, vous pouvez consulter le site Internet de l'INRIA :

<http://www.scilab.org>.

Scilab possède son propre langage de programmation (très proche de celui de Matlab), de nombreuses fonctions préprogrammées, et des possibilités étendues de visualisation graphique. Il est très simple, très convivial et s'impose de plus en plus comme un outil incontournable dans l'enseignement, la recherche et le développement. C'est un des logiciels utilisés pour l'épreuve d'analyse numérique de l'agrégation de mathématiques. Il permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Il sera donc utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes linéaires, non linéaires, etc.

## Quelques opérations sur Scilab

- ❖ Les crochets permettent de définir une matrice.
- ❖ Un espace ou une virgule permet de passer d'une colonne à la suivante et un point-virgule, d'une ligne à l'autre.

```
-->m=[1 2 3;4 5 6]
```

```
m =
```

```
1. 2. 3.
```

```
4. 5. 6.
```

Il est aussi possible de taper cette commande sous la forme: **m=[1,2,3;4,5,6]**

- ❖ Les parenthèses permettent d'accéder aux éléments ou de les modifier.

```
-->m(2,3)
```

```
ans =
```

```
6.
```

```
-->m(2,3)=23
```

```
m =
```

```
1. 2. 3.
```

```
4. 5. 23.
```

❖ L'opérateur « : » sert à désigner toutes les lignes ou toutes les colonnes d'une matrice.

Pour avoir la deuxième ligne de la matrice **m**, tapez:

```
-->m(2,:)
```

```
ans =
```

```
4. 5. 23.
```

## Operations « \* »

C'est une opération matricielle.

Pour faire des opérations élément par élément, on fera précéder le signe opératoire d'un point:

« .\* »

```
-->A=[1,2,3;4,5,6]
```

```
A =
```

```
1. 2. 3.
```

```
4. 5. 6.
```

```
-->B=[1;1;2]
```

```
B =
```

```
1.
```

```
1.
```

```
2.
```

```
-->A*B
```

```
ans =
```

```
9.          Multiplication matricielle
```

```
21.
```

```
-->A*A
```

```
!--error 10          Les dimensions ne sont pas bonnes
```

Multiplication incohérente.

```
-->A.*A
```

```
ans =
```

```
1. 4. 9.
```

```
16. 25. 36.          Multiplication élément par élément
```

-->2\*(A+2)

ans =

6. 8. 10.            L'opération se fait sur chaque élément car 2 est un nombre  
12. 14. 16.

## Dans le cas des vecteurs:

-->C=1:4

C =

1. 2. 3. 4.

-->C\*C

!--error 10            Les dimensions ne sont pas bonnes

Multiplication incohérente.

-->C.\*C

ans =

1. 4. 9. 16.

Il est aussi possible d'écrire  $C^2$  car, pour les vecteurs, l'écriture avec un exposant se traduit par une opération élément par élément.

Remarque : Ce n'est pas le cas pour les matrices.

-->1/C

ans =

0.0333333

0.0666667

0.1

0.1333333

Dans ce cas spécifique aux vecteurs, on trouve le vecteur X tel que  $C*X=1$ .

-->(1)./C

ans =

1. 0.5 0.3333333            Inverse élément par élément

0.25

Comme précédemment,  $C^{-1}$  aurait été possible.

N.B : Les parenthèses autour de 1 sont nécessaires pour que le point ne soit pas considéré comme une virgule faisant partie du nombre 1.

On peut aussi écrire  $1 ./C$  avec un espace entre 1 et « . »

## Résolutions de système

Pour résoudre le système linéaire  $AX = Y$ , où A est une matrice carrée, utilisez l'anti-slash « \ »  $X = A \setminus Y$ .

Attention, l'opération  $Y / A$  donnera (à condition que les dimensions soient bonnes) un autre résultat, soit la matrice Z telle que  $Z A = Y$ .

Pour résoudre le système:

```
-->A=[1 2 3;4 5 6];
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
-->X=A\Y
```

```
X =
```

```
- 0.5
```

```
0.
```

```
0.5
```

```
-->A*X
```

```
ans =
```

```
1.
```

```
1.
```

Deux boîtes à outils Scilab permettent de simuler les systèmes à événements discrets représentés dans les dioïdes (voir [www.maxplus.org](http://www.maxplus.org)). La première contient la librairie *Maxplus* qui est la contribution officielle de l'équipe (*max, +*) de l'INRIA, les systèmes sont représentés dans  $\mathbb{R}_{max}$ . La seconde contient la librairie *lminmaxgd* qui permet de se placer dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , elle reprend une partie des algorithmes développés dans la thèse de

Stéphane Gaubert [5], et ceux présentés dans Bertrand Cottenceau [16] et Mehdi Lhommeau [3].

Dans ce mémoire en s'est intéressé à la première librairie « *Maxplus* » dans laquelle en a effectué nos calculs.

```
////////////////////////////////////
```

```
//Exemple de Calcul dans Maxplus
```

```
////////////////////////////////////
```

```
//déclaration des matrices
```

```
A0=[%0 %0 %0 %0 %0 %0;  
    2 %0 %0 %0 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %0 %0 %0;  
    %0 %0 5 %0 %0 %0;  
    %0 1 %0 3 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %0 2 %0];
```

```
A1=[%0 %1 %0 %0 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %0 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %1 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %0 %0 %0;  
    %0 %0 %0 %0 %0 %1;  
    %0 %0 %0 %0 %0 %0];
```

Sachant que %0 correspond à  $\varepsilon$  et %1 correspond à  $e$  dans  $(max, +)$ .

```
//Calcul de l'étoile de Kleene :
```

```
AA0=star(A0)
```

```
AA1=AA0*A1
```

Les autres opérations comme la somme et le produit se font d'une manière usuelle

Après exécution le résultat sera affiché de la manière suivante :

# Annexe

---

AA0 =

!0 . . . . .!

!2 0 . . . . .!

!. . 0 . . . .!

!. . 5 0 . . .!

!3 1 8 3 0 . .!

!5 3 10 5 2 0 !

AA1 =

!. 0 . . . . .!

!. 2 . . . . .!

!. . . 0 . . .!

!. . . 5 . . .!

!. 3 . 8 . 0!

!. 5 . 10 . 2!

Ici le 0 correspond à  $e$  et le point (.) correspond à  $\varepsilon$ .

## Bibliographie

- [1] Laurent Houssin « *Contribution à la commande des systèmes (max, +) linéaires, Applications aux réseaux de transport* ». Thèse de doctorat, l'ISTIA - Université d'Angers décembre 2006.
- [2] Iteb Ouerghi « *Etude de systèmes (max, +)-linéaires soumis à des contraintes, application à la commande des graphes d'événements P-temporel* ». Thèse de doctorat, l'ISTIA - Université d'Angers. 2006
- [3] Mehdi Lhommeau « *Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max;+)* » - Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. - Synthèse de correcteurs en présence de perturbations. Thèse de doctorat, l'ISTIA - Université d'Angers. 2003
- [4] Baccelli F., G. Cohen, G. Olsder, and J. Quadrat, (1992) « *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems* ». , New York, 1992
- [5] Gaubert, S (1992) « *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes* ». Ecole des Mines de Paris.
- [6] Said Amari « *Commande des graphes d'événements temporisés sous contraintes temporelles* » Thèse de doctorat, Université de Nantes. 2005.
- [7] M.K. Didi-Alaoui « *Étude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande* ». Thèse de doctorat, ISTIA, Université d'Angers. Décembre 2005
- [8] Oulivier Boutin « *Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes* » Thèse de doctorat, Université de Nantes. 2009
- [9] Abdelhak Guezzi « *Modélisation, analyse de performances et commande des systèmes à événements discrets* ». Thèse de doctorat, Université de Nantes. 2010
- [10] Lahaye Sébastien « *Contributions à l'étude des systèmes à événements discrets à partir de modèles définis sur des semi-anneaux idempotents* » Université d'Angers. 2000
- [11] R. David and H. Alla « *Du Grafctet aux Réseaux de Petri* ». Hermès, Paris France. 1989
- [12] Laurent Hardouin « *Sur la Commande des Systèmes (max,+) Linéaires* ». DEA Automatique et Informatique Appliquée – Angers. 2004
- [13] Cohen « *Théorie algébrique des systèmes à événement discret* ». Polycopié de cours de l'École des Mines de Paris. 1995
- [14] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P and Viot, M « *Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes* ». Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France. 1983

# Bibliographie

---

- [15] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. « *A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing* ». IEEE Trans. on Automatic Control, 30(3):210–220. 1985
- [16] Cottenceau, B « *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets: synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes* ». Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers. 1999
- [17] Philippe Declerck, Mohamed Khalid Didi Alaoui, Marc Bourcerie « *Estimation d'état par l'étoile de Kleene* ». LISA EA-2168, ISTIA, Université d'Angers. 2002
- [18] Philippe Declerck « *Systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes et l'algèbre conventionnelle* ». Mémoire scientifique, Université d'Angers. 2011
- [19] Elizabeth A. Walkup « *Optimization of L linear Max-Plus Systems with Application to Timing Analysis* ». University of Washington. 1995
- [20] E. Walkup and G. Borriello. *A general linear max-plus solution technique*. Idempotency, Jeremy Gunawardena, 1998.
- [21] Scorletti. G et Binet.G « *Cours Réseaux de Petri* » Université de Caen/Basse-Normandie. U.F.R. Sciences CAEN. 2006
- [22] Laurent Hardouin, Carlos Andrey Maia, Bertrand Cottenceau, and Mehdi Lhommeau « *Observer Design for (max+) Linear Systems* ». IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 55, NO. 2, FEBRUARY 2010.
- [23] Houssin ,L. , Lahaye ,S and Biomond,J-L. « *Commande en juste-à-temps sous contrainte de système (max,+)-linéaire*. Journal Européen des systèmes automatisés, Actes de MSR 2005.
- [24] Cottenceau,B. , Hardouin , L. Boimond,J-L. ,and Ferrier,J-L. « *Modele reference contrôle for timed event graphis in dioide* ». Automatica ,37 :1451-1458. 2001
- [25] Philippe Declerck, Mohamed Khalid Didi Alaoui « *Constraint propagation for max-plus linear discrete event systems, application to the state estimation* ». 2003
- [26] Frédéric Rottella « *Observation* » Ecole nationale d'ingénieurs de Tarbes.
- [27] Le Boudec, J.-Y. and Thiran,P. (2001). « *Newtork Calculus* ». Springer- Verlag. [http://ica1www.epfl.ch/PS\\_files/NetCal.htm](http://ica1www.epfl.ch/PS_files/NetCal.htm).