MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.
FACULTÉ : DES SCIENCES
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master II
Spécialité
MATHÉMATIQUES
Option
Modélisation Mathématique

Sujet :

Sur la topologie de Skorohod

Réalisé par :

Arib Nissa

Dirigé par :

M^{me} **Smaali Mannal**

Devant le jury d'examen composé de :

Bedouhene Fazia	Prof.	UMMTO	Président
Smaali Mannal	M.C.A.	UMMTO	Rapporteur
Mellah Omar	M.C.B.	UMMTO	Examineur
Challali Nordine	M.C.B.	UMMTO	Examineur

Soutenu le 23 / 09 / 2018

Remerciements :

Je remercie vivement les membres de jury pour l'honneur qu'il me font en acceptant de juger ce travail.

Il m'est particulièrement agréable de remercier mon aimable promotrice Smaali Manal, pour m'avoir proposé ce thème, pour ses orientations et sa disponibilité qui m'ont permis de mener mon travail à bien.

Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces :

Je dédie ce travail à mes très chers parents qui se sont donnés tant de peines et
sacrifices pour moi ,
mes soeurs et mes frères
mes nièces et mes neveux.
à tous ceux et celles qui m'ont apportés leur soutien et tous ceux que j'aime et qui me
sont chers.

Table des matières

Introduction générale	4
1 L'espace des fonctions continues	6
1.1 La complétude de l'espace C	6
1.2 La compacité dans l'espace C	7
1.3 La séparabilité de l'espace C	10
2 Topologie de Skorohod sur l'espace $D(\mathbb{R})$	12
2.1 L'espace de Skorohod $D([0, 1], \mathbb{R})$	12
2.1.1 Définitions et propriétés élémentaires	12
2.1.2 La topologie de Skorohod	15
2.1.3 La complétude de l'espace D	23
2.1.4 Séparabilité de l'espace D	25
2.1.5 Compacité dans l'espace D	26
2.2 L'espace $D[0, \infty, \mathbb{R}[$	27
2.2.1 Les propriétés du d_∞^c	28
3 Topologie de Skorohod sur l'espace $D(E)$	29
3.1 Topologie de skorohod sur $D([0, 1], E)$	30
3.2 Topologie de skorohod sur $D(\mathbb{R}^+, E)$	38
4 annexe	40
4.1 Définitions	40
Conclusion générale	43
Bibliographie	44

Introduction générale

Plusieurs phénomènes physiques se modélisent par des processus stochastiques ayant des discontinuités de premier espèce. L'espace de Skorohod D des fonctions continues à droite avec une limite finie à gauche (fonctions càdlàg) s'avère être le mieux approprié pour l'étude d'une large classe de processus. Motivé par le besoin d'établir des résultats de convergence des mesures de probabilité et des critères de tension sur D , cette espace a suscité un grand intérêt des probabilistes et ce depuis les années cinquante avec les travaux de N. A. Kolmogorov [7], Y. Prohorov [10] et A. Skorohod [11].

Dans son travail fondamental de 1956, Skorohod considère l'espace $D([0, 1], E)$ des fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans un espace métrique complet et séparable E . Il le muni de plusieurs topologies, parmi ces dernières, la topologie J_1 qui s'avère la plus intéressante. Kolmogorov montre que l'espace $(D([0, 1], E), J_1)$ est un espace métrisable séparable et complet ; et Prohorov exhibe une métrique. En 1968 P. Billingsley [2] introduit une autre métrique plus maniable.

En 1963, C. Stone [12] étend la topologie de Skorohod J_1 à l'espace $D([0, +\infty[, E)$ des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans E , W. Whitt [13](1971) et T. Lindvall [8](1973) viennent compléter son étude.

Une nouvelle extension est faite par I. Mitoma en 1983, ce dernier introduit et étudie la topologie de Skorohod sur l'espace $D([0, 1], E)$, lorsque E est un espace complètement régulier. En 1986 A. Jakubowski [6] explore la structure topologique de $D([0, 1], E)$ et donne une généralisation à l'espace $D([0, +\infty[, E)$. Dans ce mémoire nous développons une partie de l'article de Jakubowski [6], sur la topologie de Skorohod. La compréhension du travail de Jakubowski, a nécessité le développement de la structure topologique de l'espace de Skorohod lorsque E est un espace métrique.

Le document est organisé en trois chapitre et une annexe :

Le premier chapitre introductif est dédié à la structure topologique de l'espace C des fonction continue sur un compact.

Le deuxième chapitre concerne l'espace de Skorohod des fonctions à valeurs dans un

espace métrique séparable et complet.

Le chapitre trois traite l'espace de Skorohod des fonctions à valeurs dans un espace un espace complètement régulier.

Chapitre 1

L'espace des fonctions continues

1.1 La complétude de l'espace C

Dans ce chapitre, nous exposons la structure topologique de l'espace C des fonctions continues sur un espace métrique compact, à valeurs dans un espace métrique complet. Complétude, séparabilité et caractérisation des parties compactes seront présentées avec démonstrations. Chose qui permettra au lecteur de faire le parallèle avec les résultats du chapitre 2. Considérons l'espace des fonctions continues $C(K, E)$ où K est un espace métrique compact et E est un espace de Banach séparable.

Théorème 1.1. Soit K un espace métrique compact et $\mathbb{K} = E$. Notons par :

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K}; \text{ continue}\} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Alors l'espace $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $C(K, \mathbb{R})$.

Fixons $x \in K$ pour tous p, q appartenant à K . On a :

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty.$$

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. On note par $f(x)$ sa limite, on définit ainsi une application f de K dans $\mathbb{R}$.

On a à prouver que (f_n) converge vers f dans $C(K, \mathbb{R})$. Pour cela, soit $\epsilon > 0$, il existe un entier $N > 0$ tel que pour tous $p, q > N$ on a : $\|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon$. on fait tendre p vers $+\infty$ on a donc :

$$\|f - f_q\| \leq \epsilon.$$

ceci est vrai pour tout $p \geq N$ et donc (f_p) converge vers f .

Il nous reste à vérifier que $f \in C(K, \mathbb{R})$.

Soit a fixé. Soit $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall x \in K$, $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon/3$.

(f_{n_0}) est continue en a , il existe alors $\delta > 0$ t.q. $\forall x \in K$, $d(x, a) < \delta$ implique que

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leq \epsilon/3.$$

Donc pour tout $x \in K$ tel que, $d(x, a) < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\ &\leq \epsilon/3. \end{aligned}$$

Remarque 1.1. Le théorème 1.1 reste vrai si $\mathbb{K}$ est un espace métrique complet.

8*33

Exemple 1.1. $K = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1]$ la suite $(f_n(x))$ converge, et f_n converge vers f simplement où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

Alors on voit bien que f n'appartient pas à $C([0, 1])$. Donc pas de convergence uniforme.

L'exemple suivant montre que si on change de norme sur $C(K)$, $C(K)$ peut ne pas être complet.

Exemple 1.2. L'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ n'est pas complet. Il s'injecte dans $L^1([0, 1], \mathbb{R})$ (deux fonctions continues qui coïncident presque partout sont égales), et l'image de cette injection est dense. Comme $L^1([0, 1], \mathbb{R})$ est complet, c'est un complété.

1.2 La compacité dans l'espace C

Pour parler de compacité, on a besoin de définir la notion d'équicontinuité.

Définition 1.1. Equicontinuité

Soit (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et H une partie de $C(E, F)$.

On dira que H est équicontinue en x_0 si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E$, tel que $d(x, x_0) \leq \delta$ on a $d'(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon, \forall f \in H$.

En d'autres termes

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \text{ tel que } d(x, x_0) \leq \delta \text{ on a } \sup_{f \in H} d'(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

Le point important est que ici δ ne dépend pas de f . On dira que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E .

Exemple 1.3. S'il existe $c > 0, \alpha > 0$ tels que

$$d'(f(x), f(y)) \leq c(d(x, y))^\alpha \quad \forall x, y \in E, \forall f \in H$$

Alors H est équicontinue.

Exemple 1.4. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $H = \{f \in C^1([0, 1]); \|f'\|_\infty \leq 1\}$. Alors H est équicontinue.

Remarque 1.2. Tout ensemble fini de fonctions continues en un point x_0 (resp dans E) est équicontinue en x_0 (resp.équicontinu).

Le théorème suivant nous donne une caractérisation de la compacité dans $C(X, E)$

Théorème 1.2. (Ascoli). Soient (X, d) un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach.

On considère une partie A de $C(X, E)$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :

i) La partie H est équicontinue ie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, x') \in X^2, d(x, x') < \alpha \implies \forall f \in H, \|f(x) - f(x')\|_E < \epsilon \quad (1.1)$$

ii) pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x), f \in H\}$ est relativement compact dans E .

Alors H est relativement compact dans $C(X, E)$.

Preuve. Comme $C(X, E)$ est complet pour démontrer ce théorème, on montre qu'on peut recouvrir H par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ϵ , tel que ϵ un réel strictement positif.

D'après l'hypothèse (1.1), $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in X^2, d(x, x') < \alpha \implies \forall f \in H, \|f(x) - f(x')\|_E < \epsilon/3. \quad (1.2)$$

Comme X est un compact alors $\exists \{x_j\}_{1 \leq j \leq N}$ une suite finie d'éléments de X tel que

$$X = \bigcup_{j=1}^N B(x_j, \alpha) \quad (1.3)$$

Posons $H_j = \{f(x_j), f \in H\}$. Par hypothèse ii), $\overline{H_j}$ est un compact de E , ce qui implique que le produit $\overline{H_1} \times \dots \times \overline{H_N}$ est compact dans l'espace de Banach E^N muni de la norme

$$\|(y_j)_{1 \leq j \leq N}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} \|y_j\|_E$$

Donc le produit $H_1 \times \dots \times H_N$ est relativement compact dans l'espace E^N . Comme le sous ensemble A_N de E_N défini par :

$$A = \{(f(x_1), \dots, f(x_N)), f \in H\}$$

est inclus dans $H_1 \times \dots \times H_N$ et est donc d'adhérence compacte lui aussi. Donc il va exister une suite finie $(f_k)_{1 \leq k \leq M}$ d'éléments de H telle que les boules de centres $(f_k(x_j)_{1 \leq j \leq N})$ et de rayon $\epsilon/3$ qui recouvre A ce qui signifie que

$$\forall f \in H, \exists k \in \{1, \dots, M\} / \forall j \in 1, \dots, N, \|f(x_j) - f_k(x_j)\|_E < \epsilon/3$$

Nous allons démontrer que les boules (dans $(C(X, E))$) de centres f_k et de rayon ϵ recouvre H . Pour ce faire, considérons un élément f de H . Il existe un indice k de $\{1, \dots, M\}$ tel que

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \|f(x_j) - f_k(x_j)\|_E < \epsilon/3.$$

Soit x un point quelconque de X . Il existe un indice j de $\{1, \dots, N\}$ tel que $d(x, x_j) < \alpha$. On a alors

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_k(x)\|_E &\leq \|f(x) - f(x_j)\|_E + \|f(x_j) - f_k(x_j)\|_E + \|f_k(x_j) - f_k(x)\|_E \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

D'où le théorème.

Corollaire 1.1. *Soit K un espace métrique compact et H une partie de $C(K, \mathbb{R})$. Alors H est relativement compacte dans $C(K, \mathbb{R})$ si et seulement si*

i) H est uniformément équicontinue

ii) $\forall x \in K, H(x) = \{f(x); f \in H\}$ est borné.

Définition 1.2. Pour toute fonction continue f sur K , on introduit le module de continuité de f noté par ω_f , définie pour tout $\delta > 0$ par

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in K, d(s, t) \leq \delta\}$$

on a alors la propriété suivante :

f est uniformément continue sur K ssi $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$.

Remarque 1.3. Le résultat du corollaire 1.1, peut s'écrire comme suit : H est relativement compact dans $C(K)$ ssi

i) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in A} \omega_f(\delta) = 0$.

ii) $\forall x \in K, \sup_{f \in A} |f(x)| < +\infty$.

1.3 La séparabilité de l'espace C

Théorème 1.3. Soit K est un métrique compact. L'espace de Banach $C(K, \mathbb{R})$ est séparable.

Preuve. Soit (K, d) un espace métrique. Fixons $\delta > 0$ et considérons un recouvrement fini de K par des boules ouvertes $(B(s_j, \delta))_{j=1, \dots, N}$.

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ une partition de l'unité associée au recouvrement de K par les ouverts $\omega_j = B(s_j, \delta)$; soit F_δ le sous-espace de dimension finie de $C(K)$ engendré par $\varphi_1, \dots, \varphi_N$.

Pour toute fonction continue f sur K , on a

$$d(f, F_\delta) \leq \omega_f(\delta).$$

En effet, on pose

$$g = \sum_{j=1}^N f(s_j) \varphi_j \in F_\delta;$$

on voit que pour tout $s \in K$

$$f(s) - g(s) = \sum_{j=1}^{j=N} \varphi_j(s) (f(s) - f(s_j)).$$

Si $\varphi_j(s)(f(s) - f(s_j)) \neq 0$ pour certain indice j , on a $\varphi_j(s) \neq 0$, donc $s \in B(s_j, \delta)$, donc $|f(s) - f(s_j)| \leq \omega_f(\delta)$, donc por tout $j = 1, \dots, N$ on a

$$\varphi_j(s) |f(s) - f(s_j)| \leq \omega_f(\delta) \varphi_j(s);$$

en sommant sur j on obtient l'inégalité $|f(s) - g(s)| \leq \omega_f(\delta)$ pour tout $s \in K$, c'est à dire

$$d(f, F_\delta) \leq \omega_f(\delta)$$

si on prend $\delta = 2^{-n}$ pour $n = 0, 1, \dots$ et si (F_n) sont des sous espaces de dimension finie correspondants, on aura pour toute fonction continue f

$$d(f, F_n) \leq \omega_f(2^{-n}) \longrightarrow 0.$$

Il en résulte que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est dense dans $C(K)$, donc $C(K)$ est séparable.

Chapitre 2

Topologie de Skorohod sur l'espace $D(\mathbb{R})$

Dans la suite nous nous intéresserons à l'espace $(D[0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui sont continues à droite avec une limite à gauche. Sur cet espace, on définit une métrique d qui génère la topologie de Skorohod. L'espace $((D[0, 1], \mathbb{R}), d)$ n'est pas complet, mais une deuxième distance d^0 équivalente à d , nous assure la complétude de l'espace $(D[0, 1], \mathbb{R})$. Une étude de la structure topologique de l'espace $(D[0, 1], \mathbb{R})$ sera présentée. On introduira aussi l'espace $(D[0, +\infty[, \mathbb{R})$. La distance d_∞^c définie sur cet espace sera construite à partir des distances d_m^c associées aux espaces $(D[0, m], \mathbb{R})$. L'espace $(D[0, +\infty[, \mathbb{R})$ héritera des propriétés de l'espace $(D[0, 1], \mathbb{R})$.

2.1 L'espace de Skorohod $D([0, 1], \mathbb{R})$

2.1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Une fonction càdlàg (continue à droite, avec une limite à gauche) est une fonction qui est continue à droite et qui admet une limite à gauche en tout point de son domaine de définition. Les fonctions càdlàg sont importantes dans l'étude des processus stochastiques qui sont des processus à sauts. L'ensemble des fonctions càdlàg sur l'intervalle $[0, 1]$ est appelé espace de Skorohod sur $[0, 1]$ et est noté $D([0, 1], \mathbb{R})$ ou tout simplement $D([0, 1])$.

Définition 2.1. Soit $D = D[0, 1]$ l'espace des fonctions réelles x sur $[0, 1]$ qui sont continues à droite, et qui admettent une limite à gauche en tout point de $[0, 1]$, c-à-d :

- pour tout $t \in [0, 1[$, $\lim_{s \rightarrow t^+} x(s) = x(t^+)$ existe et $x(t^+) = x(t)$.
- pour tout $t \in]0, 1]$, $\lim_{s \rightarrow t^-} x(s) = x(t^-)$ existe .

En d'autres termes, les fonctions de l'espace $D([0, 1])$ sont des fonctions qui admettent des discontinuités de premier ordre.

Définition 2.2. Soit $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction càdlàg. On appelle module de continuité à droite de x , ou encore module càdlàg de x la quantité $\tilde{\omega}(x, \delta)$ défini par :

$$\tilde{\omega}(x, \delta) = \inf_{\Delta_\delta} \left\{ \max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \right\}$$

où Δ_δ est l'ensemble des subdivisions de $[0, 1]$ dont le pas est supérieur à δ , c.à.d de la forme

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1 \text{ avec } |t_i - t_{i-1}| > \delta.$$

Théorème 2.1. Une fonction $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est càdlàg ssi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(x, \delta) = 0$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. On pose

$$J_\epsilon = \{T > 0 : \max_{i \leq p} \sup_{[t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon, p \geq 0, 0 = t_0 < \dots < t_{p+1} = T\}.$$

On remarque que $J_\epsilon \neq \emptyset$, en effet x est continue à droite en 0, donc, $\forall \epsilon > 0$, $\exists T_1$, tel que $\forall s, t \in [0, 1]$, avec $t, s < T_1$ on a $|x(t) - x(0)| \leq \epsilon/2$ et $|x(s) - x(0)| \leq \epsilon/2$. D'où

$$\begin{aligned} |x(t) - x(s)| &\leq |x(t) - x(0)| + |x(0) - x(s)| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Et d'après la définition de J_ϵ , on aura $T_1 \in J_\epsilon$. Posons $\tau = \sup J_\epsilon$ c-à-d

$\tau = \sup_{T \in J_\epsilon} T$, si $\tau < 1$ alors par continuité à droite de x , pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\tau' > \tau$ tel que :

$$\forall s, t \in [0, 1], t, s \in [\tau, \tau'[, \text{ on a : } |x(t) - x(s)| \leq \epsilon$$

ce qui montre que $\tau' \in J_\epsilon$ ce qui est absurde, donc $\tau = \sup J_\epsilon = 1$. Par conséquent $\forall \epsilon > 0, \sup\{T > 0, \max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon\} = 1$.

D'où $\exists \{t_i\}$ partition de $[0, 1]$ telle que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon \text{ tel que } |\delta| < \epsilon, \forall \delta > 0, \exists \Delta_\delta \text{ avec } \max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon$$

par suite $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha_\epsilon$ tel que $\forall \delta > 0, |\delta| < \alpha_\epsilon$ implique que

$$\inf_{\Delta_\delta} \{ \max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon$$

c-à-d

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \{ \max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \} = 0.$$

Finalemnt $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(x, \delta) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(x, \delta) = 0$ et montrons que x est càdlàg.

Soit $\epsilon > 0, \exists \Delta = \{t_i\}_{i \leq p}$ une subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$\max_{t_i \in \Delta_\delta} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon$$

alors, $\forall i \leq p, \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| \leq \epsilon$, en particulier

$$\sup_{u, v \in [t_{i'}, t_{i'+1}[} |x(u) - x(v)| \leq \epsilon$$

telque $i' = \max\{i, t_i \leq t\}$, alors $\forall s \in [t, t_{i'+1}[\subset [t_{i'}, t_{i'+1}[$, donc

$$|x(t) - x(s)| \leq \sup_{u, v \in [t_i, t_{i+1}[} |x(u) - x(v)| \leq \epsilon.$$

Donc x est continue à droite en tout point $t \in [0, 1]$.

De la même manière, on peut reprendre le calcul à gauche de t , mais cette fois ci t non inclus, ce qui montre que x admet une limite à gauche en t .

Corollaire 2.1. *Une fonction càdlàg sur $[0, 1]$ est bornée, c'est à dire*

$$\|x\|_\infty = \sup_t |x(t)| < \infty \tag{2.1}$$

et a un nombre dénombrable de discontinuités.

Preuve. Soit $x \in D$. On pose

$$I_k = \{t \in [0, 1] : |x(t) - x(t-)| > 1/k\}.$$

Notons par $D(x)$ l'ensemble des points de discontinuité de x : il est clair que $D(x) = \bigcup_k I_k$. D'après le théorème précédent on a $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(x, \delta) = 0$, c-à-d $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon$ t.q. $\tilde{\omega}(x, \delta_\epsilon) < \epsilon$. En particulier soit δ_k tel que $\tilde{\omega}(x, \delta_k) < 1/k$. Il existe donc par la définition de $\tilde{\omega}(x, \delta)$ une subdivision $0 = t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$ telle que

$$\sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |x(t) - x(s)| < 1/k$$

pour tout $i \leq p$: alors les points de I_k sont des points de la subdivision c-à-d $I_k \subset \{t_i\}_{1 \leq i \leq p}$. Donc I_k est un ensemble fini, et $D(x)$ est bien dénombrable.

Remarque 2.1. Au cours de la démonstration précédente, on a en particulier montré que l'ensemble des sauts de x d'amplitude supérieure ou égale à un $\delta > 0$ fixé est un ensemble fini.

Remarque 2.2. D'après le corollaire précédent, si x est càdlàg, $\{x(t), t \in [0, 1]\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. C-à-d que $\{x(t), t \in [0, 1]\}$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1. Soient f, g deux fonctions càdlàg. Alors,

$$\tilde{\omega}(f, \delta) \leq 2\|f - g\|_\infty + \tilde{\omega}(g, \delta).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour une subdivision $0 = t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = 1$ de pas supérieur à δ . Alors, pour tout $i \leq p$ on a

$$\begin{aligned} \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |f(t) - f(s)| &\leq \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} (|f(t) - g(t)| + |f(s) - g(s)| + |g(t) - g(s)|) \\ &\leq 2\|f - g\|_\infty + \sup_{t, s \in [t_i, t_{i+1}[} |g(t) - g(s)|. \end{aligned}$$

2.1.2 La topologie de Skorohod

Notons par Λ l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ qui sont continues, et telle que strictement croissantes. Si $\lambda \in \Lambda$ alors $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$. Pour x et y dans D , définissons $d(x, y)$ comme étant l'infimum des ϵ positifs pour lesquels il existe dans Λ un λ satisfaisant :

$$\|\lambda - I\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda(t) - t| = \sup_{t \in [0, 1]} |t - \lambda^{-1}(t)| < \epsilon. \quad (2.2)$$

Et

$$\|x - y(\lambda)\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(\lambda(t))| = \sup_{t \in [0,1]} |x(\lambda^{-1}(t)) - y(t)| < \epsilon. \quad (2.3)$$

En d'autres termes :

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee \|x - y(\lambda)\|_\infty \}$$

Proposition 2.2. *La fonction d définie sur D par*

$$d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee \|x - y(\lambda)\|_\infty \} \quad (2.4)$$

est une distance sur D .

Preuve. Montrons que d est une métrique :

- on voit d'après (2.1) que $d(x, y)$ est fini, de plus $d(x, y) \geq 0$. Par conséquent $d : D \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$, en effet, si $d(x, y) = 0$ alors soit $x(t) = y(t)$ ou bien $x(t) = y(t-)$ pour chaque t , ce qui implique à son tour que $x = y$. Réciproquement, si $x = y$, on a pour $\lambda = I$,

$$\|\lambda - I\|_\infty = \|x - y(\lambda)\|_\infty = 0,$$

d'où $d(x, y) = 0$.

- Comme λ se trouve dans Λ , de même que λ^{-1} , $d(x, y) = d(y, x)$ découle des inégalités (2.2) et (2.3).
- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, alors $\lambda_1 \lambda_2 \in \Lambda$, l'inégalité triangulaire résulte du fait que

$$\|\lambda_1 \lambda_2 - I\|_\infty \leq \|\lambda_1 - I\|_\infty + \|\lambda_2 - I\|_\infty$$

et

$$\|x - z\lambda_1 \lambda_2\|_\infty \leq \|x - y\lambda_1\|_\infty + \|y - z\lambda_2\|_\infty.$$

Remarque 2.3. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ converge vers x dans la topologie de Skorohod si et ssi $\exists \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ t.q.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n(\lambda_n) - x\|_\infty = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n - I\|_\infty = 0$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$, alors $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x par rapport à d . (Il suffit de prendre $\lambda_n = I, \forall n \in \mathbb{N}$)

Donnons un exemple de calcul de la distance d entre deux fonctions càdlàg :

Exemple 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons par f l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/2]$ et par g l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/4]$ C-à-d :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } x \in]1/2, 1], \end{cases}$$

et

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/4], \\ 0 & \text{si } x \in]1/4, 1]. \end{cases}$$

Calculons $d(f, g)$. On a :

$$d(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_{\infty} \vee \|f - g(\lambda)\|_{\infty} \}.$$

Soit $\lambda \in \Lambda$,

– Si $\lambda(1/2) = 1/4$, et λ est linéaire sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, on a d'une part

$$\|\lambda - I\|_{\infty} = 1/4,$$

et d'autre part :

$$g(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(t) \in [0, 1/4], \\ 0 & \text{si } \lambda(t) \in]1/4, 1]. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in [0, 1/2]$, $\lambda(t) \in [0, 1/4]$, on aura $g(\lambda(t)) = 1, \forall t \in [0, 1/2]$, et pour tout $t \in [1/2, 1]$, $\lambda(t) \in]1/4, 1]$, on aura $g(\lambda(t)) = 0, \forall t \in [1/2, 1]$. Donc

$$g(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

Et

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

On voit que $g(\lambda) = f$, c-à-d

$$\|g(\lambda) - f\|_{\infty} = 0.$$

d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_{\infty} \vee \|\lambda - I\|_{\infty} = 1/4$$

– Si $\lambda(1/2) = 1/4$, dans le cas général, $\|\lambda - I\|_{\infty} \geq |\lambda(1/2) - 1/2| = 1/4$, d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_{\infty} \vee \|\lambda - I\|_{\infty} \geq 1/4.$$

– Si $\lambda(1/2) \neq 1/4$, on aura

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty = 1,$$

d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty \vee \|\lambda - I\|_\infty = 1.$$

Finalement,

$$d(f, g) = \inf(1/4, 1) = 1/4.$$

Remarque 2.4. 1. Si $d(x_n, x) \rightarrow 0$ alors $x_n(t) \rightarrow x(t)$ en tout point de continuité de x , en effet :

Si $d(x_n, x) \rightarrow 0$, $\exists \{\lambda_n\} \subset \Lambda$ t.q. $\|x_n - x(\lambda_n)\|_\infty \rightarrow 0$ et $\|\lambda - I\|_\infty \rightarrow 0$. Soit t un point de continuité de x alors, comme $\lambda_n(t) \rightarrow t$, $x(\lambda_n(t)) \rightarrow x(t)$ on a,

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| + |x(\lambda_n(t)) - x(t)| \\ &\leq \|x_n - x(\lambda_n)\|_\infty + |x(\lambda_n(t)) - x(t)| \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

2. $\forall x, y \in D$, $d(x, y) \leq \|x_y\|_\infty$ (il suffit de prendre $\lambda = I$ dans la définition de d).
D'où si $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$, alors $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

3. La topologie de Skorohod coïncide avec la topologie uniforme sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, plus précisément si $x_n, n \geq 0$ et x sont continues, alors $d(x_n, x) \rightarrow 0$ implique que $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$. En effet :

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_\infty &\leq \|x_n - x(\lambda_n)\|_\infty + \|x(\lambda_n) - x\|_\infty \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(\lambda_n(t))| + \sup_{t \in [0, 1]} |x(\lambda_n(t)) - x(t)| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Remarque 2.5. L'espace D n'est pas complet sous la métrique d , comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons par x_n l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/2^n]$. C-à-d :

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^n], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^n, 1]. \end{cases}$$

Et

$$x_{n+1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^{n+1}], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^{n+1}, 1]. \end{cases}$$

La suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy par rapport à d . En effet : calculons $d(x_n, x_{n+1})$. On a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee \|x_n - x_{n+1}(\lambda)\|_\infty \}.$$

Soit $\lambda \in \Lambda$,

- Si $\lambda(1/2^n) = 1/2^{n+1}$, et λ linéaire sur $[0, 1/2^n]$ et sur $[1/2^n, 1]$ on a d'une part

$$\|\lambda - I\|_\infty = 1/2^{n+1}$$

et d'autre part on a :

$$x_{n+1}(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(t) \in [0, < 1/2^{n+1}], \\ 0 & \text{si } \lambda(t) \in]1/2^{n+1}, 1]. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in [0, 1/2^n]$, $\lambda(t) \in [0, 1/2^{n+1}]$, on aura $x_{n+1}(\lambda(t)) = 1 \forall t \in [0, 1/2^n]$, et pour tout $t \in [1/2^n, 1]$, $\lambda(t) \in]1/2^{n+1}, 1]$, on aura $x_{n+1}(\lambda(t)) = 0, \forall t \in [1/2^n, 1]$. Donc

$$x_{n+1}(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^n], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^n, 1], \end{cases}$$

et

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^n], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^n, 1], \end{cases}$$

on voit que $x_{n+1}(\lambda) = x_n$, c-à-d

$$\|x_{n+1}\lambda - x_n\|_\infty = 0$$

d'où

$$\|x_{n+1}(\lambda) - x_n\|_\infty \vee \|\lambda - I\|_\infty = 1/2^{n+1}$$

- Si $\lambda(1/2^n) = 1/2^{n+1}$, dans le cas général, $\|\lambda - I\|_\infty \geq 1/2^{n+1}$ d'où

$$\|x_{n+1}(\lambda) - x_n\|_\infty \vee \|\lambda - I\|_\infty \geq 1/2^{n+1}$$

- Si $\lambda(1/2^n) \neq 1/2^{n+1}$, on aura

$$\|x_{n+1}\lambda - x_n\|_\infty = 1$$

d'où

$$\|x_{n+1}(\lambda) - x_n\|_\infty \vee \|\lambda - I\|_\infty = 1.$$

Finalement $d(x_n, x_{n+1}) = 1/2^{n+1}$ et par suite, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $d(x_n, x_{n+m}) \leq 1/2^n$, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}^*} d(x_n, x_{n+m}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^n = 0$$

donc, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de cauchy.

Par contre $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas par rapport à d , en effet : on a d'une part,
 $\forall t > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 0.$$

Or que

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee \|x_n\|_\infty \} \\ &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_\infty \vee 1 \} \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0) = 1$, c-à-d $\{x_n\}$ ne converge pas vers 0.

On définit sur D , une autre distance d° équivalente à d et qui rend l'espace D complet. Pour tout élément λ de Λ , posons

$$\|\lambda\|^\circ = \sup_{s < t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \quad (2.5)$$

soit $d^\circ(x, y)$, l'infimum de ϵ positifs pour lesquels il existe un $\lambda \in \Lambda$ telsque

$$\|\lambda\|^\circ < \epsilon$$

et

$$\|x - \lambda y\|_\infty = \sup_t |x(t) - y(\lambda t)| = \sup_t |x(\lambda^{-1}t) - y(t)| < \epsilon.$$

En d'autre terme :

$$d^\circ(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|^\circ \vee \|x - y\lambda\|_\infty \} \quad (2.6)$$

Avant de vérifier que d° est une métrique sur D , on a besoin d'énoncer le lemme suivant qui établie un lien entre d et d° .

Lemme 2.1. *Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ et $x \in D$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} d^\circ(x_n, x) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.*

Preuve. $\forall x, y \in D$, ona

$$d(x, y) \leq e^{d^\circ(x, y)} - 1, \quad (2.7)$$

en effet, puisque pour tout $u > 0$, on a $|u - 1| \leq e^{|log u|} - 1$,

$$\begin{aligned} \|\lambda - I\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda(t) - t| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda(t) - \lambda(0) - t| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{0 \leq t \leq 1} t \left| \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t - 0} - 1 \right| \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t - 0} - 1 \right| \\
&\leq e^{\|\lambda\|^\circ} - 1.
\end{aligned}$$

et puisque $v \leq e^v - 1$ pour tout v positif, on obtien l'inégalité (2.7). Et par conséquent : $d^\circ(x_n, x) \longrightarrow 0$ implique $d(x_n, x) \longrightarrow 0$.

Proposition 2.3. d° est une métrique sur D .

Preuve. • La symétrie et l'inégalité triangulaire pour d° découlent du fait que

$$\|\lambda^{-1}\|^\circ = \|\lambda\|^\circ$$

et de l'inégalité

$$\|\lambda_1 \lambda_2\|^\circ \leq \|\lambda_1\|^\circ + \|\lambda_2\|^\circ. \quad (2.8)$$

• Si $d^\circ(x, y) = 0$ on aura d'après l'inégalité (2.7), $d(x, y) = 0$, d'où $x = y$ car d est une métrique. Par conséquent : d° est une métrique.

Reprenons maintenant les fonctions de l'exemple 2.1 et calculons la distance d° entre elles :

Exemple 2.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons par f l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/2]$ et par g l'indicatrice de l'intervalle $[0, 1/4]$ C-à-d : Soit

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } x \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

et

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/4], \\ 0 & \text{si } x \in]1/4, 1]. \end{cases}$$

Calculons $d^\circ(f, g)$ on a :

$$d^\circ(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|_\infty^\circ \vee \|f - g(\lambda)\|_\infty \}.$$

Soit $\lambda \in \Lambda$,

– Si $\lambda(1/2) = 1/4$, et λ est linéaire sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$, on a d'une par

$$\|\lambda\|_\infty^\circ = \sup_{s < t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \log \frac{\lambda(1/2) - \lambda(0)}{1/2 - 0} \right| \\
&= |\log 1/2| \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$g(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(t) \in [0, 1/4], \\ 0 & \text{si } \lambda(t) \in]1/4, 1]. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in [0, 1/2]$, $\lambda(t) \in [0, 1/4]$, on aura $g(\lambda(t)) = 1, \forall t \in [0, 1/2]$, et pour tout $t \in [1/2, 1]$, $\lambda(t) \in]1/4, 1]$, on aura $g(\lambda(t)) = 0, \forall t \in [1/2, 1]$. Donc

$$g(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2, 1], \end{cases}$$

et

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2, 1]. \end{cases}$$

On voit que $g(\lambda) = f$, c-à-d

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty = 0.$$

d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty \vee \|\lambda\|_\infty^\circ = \log 2$$

– Si $\lambda(1/2) = 1/4$, dans le cas général, $\|\lambda\|_\infty^\circ \geq \log 2$, d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty \vee \|\lambda\|_\infty^\circ \geq \log 2$$

– Si $\lambda(1/2) \neq 1/4$, on aura

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty = 1$$

d'où

$$\|g(\lambda) - f\|_\infty \vee \|\lambda\|_\infty^\circ = 1.$$

Finalement $d^\circ(f, g) = \inf(\log 2, 1) = \log 2$.

Lemme 2.2. (voir [2]) Soit $x, y \in D$ et $\delta > 0$.

Si $d(x, y) < \delta^2$ et $\delta < 1/2$, alors $d^\circ(x, y) \leq 4\delta + \tilde{\omega}(a, \delta)$.

Théorème 2.2. Les métriques d et d° sont équivalentes, c-à-d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d^\circ(x_n, x) = 0.$$

Preuve. L'implication $\lim_{n \rightarrow \infty} d^\circ(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ est garantie par le lemme 2.1. L'implication inverse est conséquence directe du lemme 2.2 et du théorème 2.1.

2.1.3 La complétude de l'espace D

Théorème 2.3. *L'espace D est complet sous la métrique d° .*

Preuve. Il suffit de montrer que chaque suite de cauchy contient une sous suite convergente. Soit $\{x_k\}_{k>1}$ une suite de cauchy pour d° , $\exists\{y_n\} = \{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$ tel que $d^\circ(y_n, y_{n+1}) < 1/2^n$. Alors Λ contient un μ_n pour lequel

$$\|\mu_n\|^\circ < 1/2^n \text{ c'est à dire } \sup_t \left| \log \frac{\mu_n(t) - \mu_n(s)}{t - s} \right| < 1/2^n \quad (2.9)$$

et

$$\sup_t |y_n(t) - y_{n+1}(\mu_n t)| = \sup_t |y_n(\mu_n^{-1} t) - y_{n+1}(t)| < 1/2^n. \quad (2.10)$$

Le problème est de trouver une fonction y dans D et des fonctions λ_n dans Λ pour lesquelles $\|\lambda_n\|_\infty^\circ \rightarrow 0$ et $\|y_n(\lambda_n^{-1} - y)\|_\infty \rightarrow 0$.

Puisque pour tout $0 \leq u \leq 1/2$ on a $e^u - 1 \leq 2u$, et en notons

$$\lambda_{n,m}(t) = (\mu_{n+m}) \dots \mu_{n+1} \mu_n(t)$$

il s'ensuit des inégalités $\|\lambda - I\|_\infty \leq e^{\|\lambda\|^\circ} - 1$ et (2.9) que :

$$\begin{aligned} \|\lambda_{n,m+1} - \lambda_{n,m}\| &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda_{n,m+1}(t) - \lambda_{n,m}(t)| \\ &< 1/2^{n+m}. \end{aligned}$$

c est à dire

$$\begin{aligned} \sup_t |\mu_{n+m+1} \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n t - \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n t| &= \sup_s |\mu_{n+m+1} s - s| \\ &\leq 2 \|\mu_{n+m+1}\|^\circ \\ &\leq 1/2^{n+m}. \end{aligned}$$

Cela signifie que, pour n fixé, les fonctions $\lambda_{n,m}$ sont uniformément de cauchy par rapport à m . Par conséquent, la suite converge uniformément vers une limite

$$\lambda_n t = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n t. \quad (2.11)$$

La fonction λ_n est continue et strictement croissante et vérifie $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$.

Par (2.8) et (2.9),

$$\left| \log \frac{\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n t - \mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n s}{t - s} \right| \leq \|\mu_{n+m} \dots \mu_{n+1} \mu_n\|^\circ$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\mu_{n+m}\|^\circ + \dots + \|\mu_{n+1}\|^\circ + \|\mu_n\|^\circ \\ &\leq 1/2^{n-1}. \end{aligned}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ Si pour le premier membre de cette inégalité on aura $\|\lambda_n\|^\circ \leq 1/2^{n-1}$, d'où $\|\lambda_{-n}\|^\circ \rightarrow 0$. De (2.11) on a $\lambda_n = \lambda_{n+1}\mu_n$, c-à-d que $\lambda_{n+1}^{-1} = \mu_n\lambda_n^{-1}$ par conséquent, d'après (2.10)

$$\begin{aligned} \|y_n\lambda_n^{-1} - y_{n+1}\lambda_{n+1}\|_\infty &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |y_n(\lambda_n^{-1}t) - y_{n+1}(\lambda_{n+1})| \\ &= \sup_s |y_n(s) - y_{n+1}(\mu_n s)| \\ &< 1/2^n. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite de fonctions $y_n\{\lambda_n^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D$, est uniformément de Cauchy et donc converge uniformément vers une fonction limite $y \in D$. Puisque $\|\lambda_n\|^\circ \rightarrow 0$, $\{y_n\}$ converge vers y sous la métrique d° .

Reprenons la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de l'exemple 2.2. On remarque que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas par rapport à d° . Mais contrairement à d , la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy pour d° . En effet : calculons $d^\circ(x_n, x_{n+1})$. On a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|_\infty^\circ \vee \|x_n - x_{n+1}(\lambda)\|_\infty \}.$$

Soit $\lambda \in \Lambda$,

- Si $\lambda(1/2^n) = 1/2^{n+1}$, on a d'une part

$$\|\lambda\|_\infty^\circ = \log 2$$

et d'autre part on a :

$$x_{n+1}(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(t) \in [0, < 1/2^{n+1}], \\ 0 & \text{si } \lambda(t) \in]1/2^{n+1}, 1]. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in [0, 1/2^n]$, $\lambda(t) \in [0, 1/2^{n+1}]$, on aura $x_{n+1}(\lambda(t)) = 1 \forall t \in [0, 1/2^n]$, et pour tout $t \in [1/2^n, 1]$, $\lambda(t) \in]1/2^{n+1}, 1]$, on aura $x_{n+1}(\lambda(t)) = 0, \forall t \in [1/2^n, 1]$. Donc

$$x_{n+1}(\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^n], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^n, 1], \end{cases}$$

et

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2^n], \\ 0 & \text{si } t \in]1/2^n, 1], \end{cases}$$

on voit que $x_{n+1}(\lambda) = x_n$, c-à-d

$$\|x_{n+1}\lambda - x_n\|_\infty = 0$$

d'où

$$\|x_{n+1}(\lambda) - x_n\|_\infty \vee \|\lambda\|_\infty = \log 2$$

– Si $\lambda(1/2^n) \neq 1/2^{n+1}$, on aura

$$\|x_{n+1}\lambda - x_n\|_\infty = 1$$

d'où

$$\|x_{n+1}(\lambda) - x_n\|_\infty \vee \|\lambda\|_\infty = 1.$$

Finalement $d(x_n, x_{n+1}) = \inf(\log 2, 1) = \log 2$ et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = \log 2$$

donc, $\{x_n\}$ n'est pas de cauchy.

2.1.4 Séparabilité de l'espace D

Pour énoncer le résultat sur la séparabilité de D , on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3. Soit $\sigma = \{S_p\}_{0 \leq p \leq k}$ une partition de l'intervalle sur $[0, 1]$ c-à-d :

$0 = S_0 < S_1 < \dots < S_k = 1$. On définit une application constante par morceau (A_σ) par

$$A_\sigma : D \longrightarrow D$$

$$x \longrightarrow A_\sigma(x)/$$

$$(A_\sigma(x))(t) = \begin{cases} x(s_{p-1}) & \text{si } t \in [s_{p-1}, s_p[, \forall 1 \leq p \leq k. \\ x(1) & \end{cases}$$

on a alors, $\forall \delta > 0$, si $\max_{1 \leq p \leq k} (S_p - S_{p-1}) \leq \delta$, alors $d(A_\sigma x, x) \leq \max_{1 \leq p \leq k} (\delta, \tilde{\omega}_x(\delta))$.

Théorème 2.4. L'espace D est séparable sous les métriques d et d° .

Preuve. Puisque d et d° sont équivalentes et la séparabilité est une propriété topologique, on peut travailler avec d .

Soit B_k l'ensemble des fonctions ayant une valeur rationnelle constante sur chaque intervalle de la forme $[(p-1)/k, p/k)$ et une valeur rationnelle à $t = 1$, plus précisément $x \in B_k$ ssi $\exists \{r_p\}_{1 \leq p \leq k} \subset \mathbb{Q}$ tel que :

$$(x)(t) = \begin{cases} r_p & \text{si } t \in [p-1/k, p/k[, \quad p = \overline{1, k} \\ r_k & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Alors $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$ est dénombrable. Vérifions que B est dense dans D , pour cela soit $x \in D$ et $\epsilon > 0$. Choisissons k tel que $1/k < \epsilon/2$ et $\tilde{\omega}_x(1/k) < \epsilon$. En utilisant le lemme précédent avec $\sigma = \{p/k\}_{1 \leq p \leq k}$: on aura $d(x, A_\sigma x) < \epsilon$. En effet d'après le lemme on a $d(A_\sigma x, x) \leq 1/k \vee \tilde{\omega}_x(1/k)$, et comme $1/k < \epsilon/2$ et $\tilde{\omega}_x(1/k) \leq \epsilon/2$ il vient que $d(A_\sigma x, x) \leq \epsilon$. D'autre part on peut toujours choisir $y \in B_k$ de sorte que $d(A_\sigma x, y) < \epsilon/2$. Finalement :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, A_\sigma x) + d(A_\sigma x, y) \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

En conclusion $\forall \epsilon > 0, \exists y \in B$ t.q $d(x, y) < \epsilon$.

2.1.5 Compacité dans l'espace D

Nous passons maintenant au problème de la caractérisation des ensembles compacts dans D . En utilisant le module de continuité $\tilde{\omega}_x(\delta)$ nous pouvons prouver un analogue du théorème d'Arzela-Ascoli dans l'espace C .

Théorème 2.5. *Soit A une partie de D . A est relativement compacte pour la topologie de Skorohod si et seulement si*

$$\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \tilde{\omega}_x(\delta) = 0.$$

Preuve. .Suffisance

Soit $\alpha = \sup_{x \in A} \|x\|$. Etant donné $\epsilon > 0$, choisissons un ϵ -réseau H de $[-\alpha, \alpha]$. Choisissons un $\delta > 0$ de sorte que $\delta < \epsilon$ et $\tilde{\omega}_x(\delta) < \epsilon$ pour tout x dans A . Appliquons maintenant le lemme 2.3 pour une partition $\sigma = \{S_p\}_{1 \leq p \leq k}$ satisfaisant $\max_{1 \leq p \leq k} (S_p - S_{p-1}) < \delta$:

on a $x \in A$ implique $d(x, A_\sigma x) < \epsilon$.

Soit B l'ensemble fini des fonctions y qui prennent sur chaque intervalle de la forme $[S_{p-1}, S_p[$ une valeur constante de H et satisfait $y(1) \in H$. Puisque B contient évidemment un y pour lequel $d(A_\sigma x, y) < \epsilon$, c'est un 2ϵ -réseau fini pour A au sens de d . Donc A est totalement borné par rapport à d .

Comme (D, d) est non complet on peut pas conclure, on a besoin de montrer que A est totalement borné par rapport à d° , puisque c'est la métrique sous laquelle D est complet. Pour cela soit $\epsilon > 0$, du fait que on peut choisir δ tel que $0 < \delta < 1/2$ et $4\delta + \tilde{\omega}_x(\delta) < \epsilon$ pour tout $x \in A$. Nous avons déjà vu que A est d -totalement borné, et donc il existe un ensemble fini B' qui est δ^2 -réseau pour A par rapport à d . Mais alors par le lemme 2.3, B est un ϵ -réseau pour A par rapport à d° .

Nécessité.

Si A est compact, alors il est borné sous la métrique d , et puisque

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t)| = \|x\|_\infty = d(x, 0).$$

est la distance d de x à la fonction 0, on aura donc $\sup_{x \in A} \|x\|_\infty < \infty$. Maintenant par le théorème 2.1 on sait que $\tilde{\omega}_x(\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0. Mais comme pour tout $\delta > 0$, la fonction $x \mapsto \tilde{\omega}_\delta(x)$ est semi-continue supérieurement (voir [2]) on aura la convergence uniforme du module de continuité $\tilde{\omega}_\delta(x)$ sur les compacts.

2.2 L'espace $D[0, \infty, \mathbb{R}]$

Nous allons présenter la topologie de Skorokhod dans l'espace $D_\infty = D[0, \infty[$ des fonctions càdlàg sur l'intervalle $[0, \infty[$, ainsi que la structure topologique de l'espace D muni de cette topologie. Considérons pour chaque $t > 0$ l'espace $D_t = D[0, t[$ des fonctions càdlàg sur $[0, t[$. Toutes les définitions de D_1 se généralisent à D_t : $\|x\|_t = \sup_{s \leq t} |x(s)|$, Λ_t , $\|\lambda\|_t^\circ$, d_t° , d_t . Les résultats de la section précédente restent valables aussi.

La métrique sur D_∞ sera définie en fonction des métriques $d_m^\circ(x, y)$ pour m entier, mais avant de restreindre x et y à $[0, m]$, nous les transformons de telle sorte qu'ils soient continues en m . Posons

$$g_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq m-1, \\ m-t & \text{si } m-1 \leq t \leq m, \\ 0 & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$

Pour $x \in D_\infty$, soit x^m un élément de D_∞ défini par

$$x^m(t) = g_m(t)x(t), \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Posons alors,

$$d_\infty^\circ(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} (1 \wedge d_m^\circ(x^m, y^m)). \quad (2.13)$$

Si $d_\infty^\circ(x, y) = 0$ c.à.d $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} (1 \wedge d_m^\circ(x^m, y^m)) = 0$, alors $d_m^\circ(x, y) = 0$ et $x^m = y^m$ pour tout m , cela implique $x = y$. On a aussi $d_m^\circ(x, y) = d_m^\circ(y, x)$ et l'inégalité triangulaire. Donc d_∞° est bien une distance sur D_∞ et définit la topologie de Skorohod sur cet espace. Si on remplace d_m° par d_m on obtient une métrique d_∞ équivalente à d_∞° .

2.2.1 Les propriétés du d_∞°

Soit maintenant Λ_∞ l'ensemble des fonctions continues, croissantes de $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$. On a alors la caractérisation suivante de la convergence des suites par rapport à d_∞° .

Théorème 2.6. Une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour d_∞° dans D_∞ si et seulement s'il existe une suite $\{\lambda_n\}$ de Λ_∞ telle que

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |\lambda_n t - t| \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

et pour chaque m ,

$$\sup_{0 \leq t \leq m} |x_n(\lambda_n t) - x(t)| \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Une seconde caractérisation de la convergence sur D_∞ est donné par :

Théorème 2.7. Il ya convergence $d_\infty^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ sur D_∞ si et seulement si $d_m^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ pour chaque point de continuité t de x .

Conservant la structure topologique de d_∞° , on a les résultats suivants :

Théorème 2.8. L'espace D_∞ est séparable et complet.

Théorème 2.9. Soit $A \subset D_\infty$, A est relativement compact si et seulement si, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$i) \sup_{x \in A} \|x\|_m < \infty$$

$$ii) \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} \tilde{\omega}_m(x, \delta) = 0$$

Chapitre 3

Topologie de Skorohod sur l'espace $D(E)$

Dans ce chapitre, il s'agira de l'espace $(D[0, 1], E)$, où E est un espace complètement régulier généré par une famille de pseudométriques $\{d_i\}_{i \in I}$. Dans ce cas l'espace $(D[0, 1], E)$ est un espace complètement régulier. ses caractéristiques topologiques dépendront de celles de E . Nous présentons aussi l'espace $(D[0, \infty[, E)$. Nous verrons que son étude se ramène en réalité à l'étude de $(D[0, 1], E)$.

Commençons par constater que :

Soit (E, τ) un espace topologique séparé. Notons par $D(E, \tau) = D([0, 1] : (E, \tau))$ l'espace des fonctions $x : [0, 1] \rightarrow E$ qui sont continues à droite et admettent une limite à gauche pour $t > 0$.

Proposition 3.1. Soit $x \in D(E, \tau)$. Alors $\overline{\{x(t)|t \in [0, 1]\}}$ est relativement compact en (E, τ) et coïncide avec

$$\{x(t)/t \in [0, 1]\} \cup \{x(t-)/t \in [0, 1]\}$$

c'est à dire

$$\overline{\{x(t)|t \in [0, 1]\}} = \{x(t)|t \in [0, 1]\} \cup \{x(t-)|t \in [0, 1]\}$$

.

Si (E, τ) est un espace métrisable. Alors $x \in D(E, \tau)$ a un nombre dénombrable de discontinuité, ce n'est pas vrai dans le cas général, c'est à dire si (E, τ) n'est pas métrisable on a pas forcément ce résultat :

Exemple 1. Soit $E = (R^1)^{[0,1]}$ avec la topologie du produit τ_π considérons l'application :

$$t \in [0, 1] \rightarrow (x(t, \cdot) : [0, 1] \rightarrow R^1) \in E$$

$$x(t, u) = I_{[u,1]}(t)$$

C'est clair que $x \in D(E, \tau_\pi)$ et il est facile de voir que l'ensemble des sauts des éléments V est non dénombrable :

$$\{t' \in [0, 1] / x(t) \neq x(t-)\} = (0, 1]$$

par définition $x(0-) = x(0)$.

3.1 Topologie de skorohod sur $D([0, 1], E)$

Soit (E, τ) est un espace topologique complètement régulier. Alors il existe une famille $\{d_i\}_{i \in I}$ de pseudométriques sur E telles que

$$\forall a, b \in E, \exists i \in I, d_i(a, b) > 0. \quad (3.1)$$

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I, \max(d_i, d_j) \leq d_k. \quad (3.2)$$

et les boules ouvertes pour les pseudométriques d_i , $i \in I$ forment une base pour la topologie τ . (voir [1]). D'après le travail de I. Mitoma [9], on peut définir sur $D(E, \tau)$ une topologie complètement régulière en considérant les pseudométriques $\tilde{d}_i$ définies pour tout $i \in I$ et tout $x, y \in D(E, \tau)$ par :

$$\tilde{d}_i(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) \}, \quad (3.3)$$

où Λ est l'ensemble des fonctions continues et strictement croissantes, définies sur $[0, 1]$ dans lui même telle que $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$. La famille des pseudométriques $\{\tilde{d}_i\}_{i \in I}$ vérifie les conditions (3.1) et (3.2). En effet :

- Soit $x, y \in D$. Soit $t = 0$, et $\lambda \in \Lambda$, $\exists i$ tel que

$$d_i(x(\lambda(0)), y(0)) = d_i(x(0), y(0)) > 0$$

posons $d_i(x(0), y(0)) = \alpha > 0$, alors

$$\sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \geq d_i(x(\lambda(t)), y(t)), \forall t \in [0, 1]$$

en particulier,

$$\sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \geq d_i(x(0), y(0)) = \alpha$$

donc, $\forall \lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} \max(\|\lambda - I\|_\infty, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) &\geq \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Finalement, $\forall \lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i(x, y) = \tilde{d}_i(x, y) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\|\lambda - I\|_\infty, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) \} \\ &\geq \alpha \\ &> 0. \end{aligned}$$

- Soit $i, j \in I$, on sait qu'il existe k tel que $d_i < d_k$ et $d_j < d_k$.

On a alors; pour tous $x, y \in D$,

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i(x, y) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) \} \\ \tilde{d}_j(x, y) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_j(x(\lambda(t)), y(t))) \} \text{ et} \\ \tilde{d}_k(x, y) &= \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))) \}. \end{aligned}$$

comme $d_i < d_k$ et $d_j < d_k$

$\forall \lambda \in \Lambda, \forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1]$,

$$d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \leq d_k(x(\lambda(t)), y(t))$$

ce qui implique que

$$\sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))$$

et par suite

$$\max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) \leq \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t)))$$

d'où

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t))) \} \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))) \}$$

par suite, $\forall x, y \in D$,

$$\tilde{d}_i(x, y) \leq \tilde{d}_k(x, y)$$

c-à-d

$$\tilde{d}_i \leq \tilde{d}_k.$$

De même,

$\forall \lambda \in \Lambda, \forall x, y \in D, \forall t \in [0, 1]$

$$d_j(x(\lambda(t)), y(t)) \leq d_k(x(\lambda(t)), y(t))$$

ce qui implique

$$\sup_{t \in [0,1]} d_j(x(\lambda(t)), y(t)) \leq \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))$$

et par suite

$$\max\left(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_j(x(\lambda(t)), y(t))\right) \leq \max\left(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))\right)$$

d'où

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \max\left(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_j(x(\lambda(t)), y(t))\right) \right\} \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\left(\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0,1]} d_k(x(\lambda(t)), y(t))\right)$$

par suite, $\forall x, y \in D$,

$$\tilde{d}_j(x, y) \leq \tilde{d}_k(x, y)$$

c-à-d

$$\tilde{d}_j \leq \tilde{d}_k.$$

Et donc

$$\max(\tilde{d}_i, \tilde{d}_j) \leq \tilde{d}_k,$$

Les boules ouvertes pour les pseudométriques $\{\tilde{d}_i\}_{i \in I}$ forme une base pour une topologie complètement régulière sur $D(E, \tau)$, appelée topologie de skorohod sur $D(E, \tau)$. Le théorème suivant nous montre que cette topologie ne dépend pas du choix de la famille $\{d_i\}_{i \in I}$.

Théorème 3.1. Soit une famille $\{d_i\}_{i \in I}$ de pseudométriques sur E vérifiant les hypothèses (3.1) et (3.2). Soit τ la topologie sur E générée par la famille $\{d_i\}_{i \in I}$.

Alors la topologie de Skorohod sur $D(E, \tau)$ définie par les pseudométrique $\{\tilde{d}_i\}_{i \in I}$ ne dépend que de la topologie τ sur E .

La preuve de ce théorème est répartie en les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. Soit $p_n = \{0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{k_n}} = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de partitions de l'intervalle $[0,1]$. Supposons que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est normale c-à-d

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |p_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} |t_{n_k} - t_{n_{k-1}}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

et soit l'application

$$\begin{aligned} T_n = T(p_n) : D(E, \tau) &\rightarrow D(E, \tau) \\ x &\longrightarrow T_n(x). \end{aligned}$$

définie par :

$$T_n(x)(t) = \begin{cases} x(t_{n_k}) & \text{si } t \in [t_{n_k}, t_{n_{k+1}}[, \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1 \\ x(1) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Alors :

i) Pour tout $x \in D(E, \tau)$ et tout $i \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_i(T_n(x), x) = 0$$

c-à-d la suite $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie complètement régulière sur $D(E, \tau)$ généré par la famille $\{\tilde{d}_i\}_{i \in I}$.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$T_n(D(E, \tau)) \subset D(E, \tau)$$

et de plus $T_n(D(E, \tau))$ est homeomorphe à E^{k_n+1} muni de la topologie produit.

iii) L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(D(E, \tau))$ est séquentiellement dense dans $D(E, \tau)$.

Preuve. i) Montrons que $\forall \epsilon > 0$, soit $i \in I$ et $x \in D$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, on a $\tilde{d}_i(x_n, x) \leq \epsilon$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n| = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, t.q $\forall k = \overline{1, k_n}$, $|t_{n_k} - t_{n_{k-1}}| \leq \epsilon$.

D'après le lemme 2.3 appliquée à $\tilde{d}_i$, on a : $\tilde{d}_i(T_n(x), x) \leq \epsilon$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\{p_n\} = \{0 = t_{n_0} < t_{n_1} < \dots < t_{n_{k_n}} = 1\}$ une partition de $[0, 1]$. Considérons l'application

$$T : T_n(D(E, \tau)) \longrightarrow E^{k_n+1}$$

$$T_n(x) \longrightarrow (x(t_{n_0}), \dots, x(t_{n_{k_n}})).$$

Alors T est un homeomorphisme, en effet • D'après la définition de $T_n : D \rightarrow D$, T est bijective.

• En utilisant la propriété (3.1) on vérifie que T est bicontinue de $T_n(D(E, \tau), \{\tilde{d}_i\}_{i \in I})$ dans E^{k_n+1} muni de la topologie produit.

iii) Soit $x \in D$, il faut trouver une suite d'éléments $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'ensemble $T_n(D(E, \tau))$ t.q. $\forall i \in I$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_i(x_n, x) = 0$$

or d'après i) on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_i(T_n(x), x) = 0$. Donc il suffit de poser $x_n = T_n(x)$.

Lemme 3.2. Soient $\{d_i\}_{i \in I}$ et $\{\gamma_j\}_{j \in J}$ deux familles de pseudométriques sur E satisfaisant (3.1) et (3.2). Soient τ et σ les deux topologies générées par les familles $\{\tilde{d}_i\}_{i \in I}$ et $\{\tilde{\gamma}_j\}_{j \in J}$ respectivement. Supposons que la topologie σ est plus fine que la topologie τ . Alors évidemment : $D(E, \tau) \supset D(E, \sigma)$, et la topologie sur $D(E, \sigma)$ générée par la famille $\{\tilde{\gamma}_j\}_{j \in J}$ est plus fine que celle de la topologie induite par $D((E, \tau), \{\tilde{d}_i\}_{i \in I})$

Preuve. On a pour chaque partition p_n :

$$T(p_n)(D(E, \tau)) = T(p_n)(D(E, \sigma)) \subset D(E, \tau) \cap D(E, \sigma).$$

Par la propriété iii) du lemme 3.1 et la propriété (3.2) pour les pseudométriques $(\tilde{d}_i)_{i \in I}$, il suffit de vérifier que pour chaque $x_0 \in D$ de la forme :

$$x_0(t) = \begin{cases} a_{t_k} & \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ a_1 & \text{pour } t = 1. \end{cases}$$

Où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ est une partition de $[0, 1]$, et pour chaque $i \in I$ et $\epsilon > 0$ la boule ouverte pour $\tilde{d}_i$:

$$B_\tau(x_0, \epsilon) = \{y \in D(E, \tau) / \tilde{d}_i(x_0, y) < \epsilon\}$$

contient une certaine boule ouverte pour la topologie σ .

Soit pour $k = \overline{0, N}$, $j_k \in J$ tel que pour un certain $\eta_k > 0$, $\eta_k < \epsilon$,

$$\{a \in E / d_i(a_{t_k}, a) < \epsilon\} \supset \{a \in E / \gamma_{j_k}(a_{j_k}, a) < \eta_k\}$$

Soit $\eta = \min_{1 \leq k \leq N} \eta_k$ et j tel que $\gamma_j \geq \max_{0 \leq k \leq N} \gamma_{j_k}$

Si

$$z \in B_\sigma(x_0, \eta) = \{z \in D(E, \sigma) / \tilde{\gamma}_j(x_0, z) < \eta\},$$

alors il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\sup_{t \in [0,1]} |\lambda(t) - t| < \eta < \epsilon$ et

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,1]} \gamma_j(z(\lambda(t)), x_0(t)) &= \max\left\{ \max_{0 \leq k \leq N-1} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}[} \gamma_j(z(\lambda(t)), a_{t_k}) \right), \gamma_j(z(1), a_1) \right\} \\ &< \eta \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}[} d_i(z(\lambda(t)), a_{t_k}) < \epsilon, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \text{ et } d_i(z(1), a_1) < \epsilon.$$

D'où

$$B_\sigma(x_0, \eta) \subset B_\tau(x_0, \epsilon).$$

Proposition 3.2. i) Le sous espace $C([0, 1] : (E, \tau))$ des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow E$ est fermé dans $D(E, \tau)$ et la topologie de Skorokhod sur $C([0, 1] : (E, \tau))$ coïncide avec la topologie uniforme sur $C([0, 1] : (E, \tau))$.

ii) Si (E, τ) est séparable alors $D(E, \tau)$ est séparable.

iii) Si (E, τ) est métrisable alors $D(E, \tau)$ est métrisable.

iv) Si $(F, \tau \cap F)$ désigne un sous espace $F \subset E$ avec la topologie $\tau \cap F$ induite par (E, τ) , alors la topologie de Skorokhod sur $D(F, \tau \cap F)$ coïncide avec la topologie induite sur $D(F, \tau \cap F)$ par la topologie de Skorokhod sur $D(E, \tau)$.

v) Si G est un sous-ensemble ouvert de (E, τ) , alors $D(G, \tau \cap G)$ est un sous ensemble ouvert de $D(E, \tau)$. Même chose si F est un sous ensemble fermé de (E, τ) alors $D(F, \tau \cap F)$ est un sous ensemble fermé de $D(E, \tau)$.

vi) Si $H \subset D(E, \tau)$ est un compact, alors il existe un sous ensemble compact $K \subset (E, \tau)$ telque $H \subset D(K, \tau \cap K)$.

vii) Tous les sous ensembles compacts de $D(E, \tau)$ sont métrisables si (E, τ) a cette propriété.

Preuve. i) La topologie uniforme sur $C([0, 1], (E, \tau))$ est simplement la topologie complètement régulière induite par des pseudométriques uniformes

$$\tilde{d}_i(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} d_i(x(t), y(t)) \in I \quad (3.4)$$

ou $\{d_i\}_{i \in I}$ est une famille arbitraire de pseudométriques sur (E, τ) générant la topologie τ . Des arguments tout a fait semblables du cas métrique montrent que

les pseudométriques $\tilde{d}_i$ et $\tilde{d}_i$ sont équivalentes quand elle sont restreintes à $C(0, 1] : (E, \tau)$

- ii) D'après iii) du lemme 3.1, (E, τ) est séparable, alors, $\exists A \subset E$ une partie dénombrable et dense dans E . Soit B_k l'ensemble des fonctions ayant une valeur constante dans A sur chaque intervalle de la forme $[(p-1)/k, p/k)$ et une valeur constante à $t = 1$, plus précisément $x \in B_k$ ssi $\exists \{a_p\}_{1 \leq p \leq k} \subset A$ tel que :

$$(x)(t) = \begin{cases} a_p & \text{si } t \in [p-1/k, p/k[, \quad p = \overline{1, k} \\ a_k & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Alors $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$ est dénombrable, et avec des arguments semblables au cas métrique (voir la preuve du théorème 2.4), on vérifie que B est dense dans $D(E, \tau)$ c-à-d $\forall \epsilon > 0, \forall i \in I, \forall x \in D(E, \tau), \exists y \in B$ t.q. $d_i(x, y) \leq \epsilon$.

- iii) , iii) et iv) sont conséquences directes du 3.1
- v) Soit G un ouvert dans (E, τ) , et soit $x_0 \in D(G, \tau \cap G)$. Notons par $\bar{x}_0$ la fermeture de l'ensemble $\{x_0(t), t \in [0, 1]\}$. Par la proposition 3.1 l'ensemble $\bar{x}_0$ est compact dans $(G, \tau \cap G)$. Puisque G est un ouvert et $\bar{x}_0$ est un compact, il existe d_i pseudométrique et un $\epsilon > 0$ tels que

$$\{a \in E \mid d_i(a, \bar{x}_0) < \epsilon\} \subset G.$$

Où

$$\begin{aligned} d_i(a, \bar{x}_0) &= \inf_{z \in \bar{x}_0} d_i(a, z) \\ &= \min_{z \in \bar{x}_0} d_i(a, z) \end{aligned}$$

Donc on aura

$$B_{\tilde{d}_i}(x_0, \epsilon) \subset D(G, \tau \cap G).$$

En effet, soit $x \in B_{\tilde{d}_i}(x_0, \epsilon)$, alors $\tilde{d}_i(x, x_0) < \epsilon$, plus précisément,

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \max \|\lambda - I\|_\infty, \sup_{t \in [0, 1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) \} < \epsilon$$

d'où $\exists \lambda \in \Lambda$ t.q.

$$\|\lambda - I\|_\infty < \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [0, 1]} d_i(x(\lambda(t)), y(t)) < \epsilon.$$

Soit alors $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} d_i(x(t), \bar{x}_0) &< d_i(x(t), x_0(\lambda(t))) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

on déduit donc que

$$\forall t \in [0, 1], x(t) \in A \subset G$$

c-à-d que $x \in D(G, \tau \cap G)$.

De la même manière et en utilisant le fait que si F est fermé F^c est un ouvert on montre que $D(F, \tau \cap E)$ est un sous ensemble fermé de $D(E, \tau)$.

vi) Soit H un compact dans $D(E, \tau)$. Pour tout $x \in H$ notons par $\bar{x}$ la fermeture de l'ensemble $\{x(t), t \in [0, 1]\}$. Soit $K = \bigcup_{x \in H} \bar{x}$. Comme $\forall x \in H, \forall t \in [0, 1], x(t) \in \bar{x} \subset K$; on déduit que

$$H \subset D(K, \tau \cap K).$$

Montrons que K est un compact de E . Pour cela considérons un recouvrement de K par une famille d'ouverts $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ c-à-d telle que $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

Par la proposition 3.1, on sait que pour tout $x \in H$, l'ensemble $\bar{x}$ est compact dans E , on peut alors extraire de la famille $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sous recouvrement fini $\{G_{\alpha_i}(x)\}_{1 \leq i \leq m}$ tel que $\bar{x} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} G_{\alpha_i}(x)$. Considérons maintenant la famille d'ouverts de la forme $G_{A_0} = \bigcup_{x \in A_0} G_\alpha$ ou A_0 est un sous ensemble fini de A . On a

$$H \subset \bigcup_{A_0 \in A, A_0 \text{ fini}} D(G_{A_0}, \tau \cap G_{A_0}).$$

Comme pour tout $A_0 \subset A$, G_{A_0} est un ouvert de (E, τ) (réunion finie d'ouverts de E), d'après v) pour tout $A_0 \subset A$, l'ensemble $D(G_{A_0}, \tau \cap G_{A_0})$ est un ouvert de $D(E, \tau)$. En exploitant le fait que H est compact, on peut trouver une suite finie $A_1, A_2, \dots, A_n$ de sous ensemble fini de A telle que

$$H \subset \bigcup_{j=1}^n D(G_{A_j}, \tau \cap G_{A_j})$$

Mais cela implique que

$$K = \bigcup_{x \in H} \bar{x}$$

$$\begin{aligned} & \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} G_{A_j} \\ & = \bigcup_{\alpha \in A_j} G_\alpha. \end{aligned}$$

Finalement, on vient d'extraire du recouvrement ouvert $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement fini de K . Par conséquent K est compact.

vii), vii) découle de i), ii) et vi).

3.2 Topologie de skorohod sur $D(\mathbb{R}^+, E)$

Soit l'espace $D(\mathbb{R}^+ : E)$ ou $D(E)$ est tout simplement l'espace des fonctions càdlàg $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow E$ (qui sont continues à droites et ont des limites à gauche) pour tout $t > 0$.

Soit d une pseudométrie sur E . Notons par $\tilde{d}_s$ la pseudométrie sur $D([0, s] : E)$ définie par

$$\tilde{d}_s(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max\left(\sup_{t \in [0, s]} |\lambda(t) - t|, \sup_{t \in [0, s]} d(x(\lambda(t)), y(t))\right).$$

Soit l'application $q_s : D(\mathbb{R}^+ : E) \rightarrow D([0, s+1] : E)$ définie par :

$$q_s(x)(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0, s] \\ x(s) & \text{si } t \in [s, s+1] \end{cases} \quad (3.5)$$

Fixons $x \in D(E)$ et $y \in D(E)$ et considérons la fonction $\gamma^d(x, y) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\gamma^d(x, y)(s) = \tilde{d}_{s+1}(q_s(x), q_s(y)) = \gamma_s^d(x, y). \quad (3.6)$$

Il est clair que cette fonction est un élément de $D(\mathbb{R}^+ : \mathbb{R}^+)$, donc Borel mesurable. On définit alors :

$$\gamma^d(x, y) = \int_0^\infty e^{-s} \min(1, \gamma_s^d(x, y)) d_s. \quad (3.7)$$

γ^d est une pseudométrie sur $D(E)$ et la proposition suivante nous donne une caractérisation de la convergence des suites dans γ^d c'est bien " la convergence de Skorohod".

Proposition 3.3. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D(E)$.

Soit γ_d définie par (3.7). Alors pour un certains $x \in D(E)$ la convergence de x_n vers x pour la métrique γ_d aura lieu ssi il existe une suite

$$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda_\infty = \{\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \lambda \text{ est croissante, continue, } \lambda(0) = 0, \lambda(t) \rightarrow +\infty \text{ si } t \rightarrow +\infty\}$$

telle que pour chaque $t \in \mathbb{R}^+$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |\lambda_n(s) - s| \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} d(x_n(\lambda_n(s)), x(s)) \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

Théorème 3.2. La topologie Skorohod sur $D(\mathbb{R}^+, E)$ ne dépend pas du choix particulier de la famille $\{d_i\}_{i \in I}$.

Chapitre 4

annexe

4.1 Définitions

- *Espace régulier*

Proposition 4.1. Dans un espace topologique X , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) L'ensemble des voisinages fermés d'un point quelconque de X est un système fondamental de voisinages de ce point.
- (2) Pour toute partie fermée F de X et tout point x n'appartient pas à F , il existe un voisinage de x et un voisinage de F qui sont disjoints.

Définition 4.1. On dit qu'un espace topologique est régulier s'il est séparé et vérifie l'axiome (1); sa topologie est alors dite régulière.

Exemple 4.1. Les espaces suivants sont réguliers : ★ Les espaces métriques.

★ Les espaces localement compacts.

• *Espace complètement régulier* En mathématique, un espace complètement régulier (ou Tikhonov) est un espace topologique vérifiant une propriété de séparation plus forte que la séparation usuelle et même que la propriété d'être régulier.

Définition 4.2. Un espace topologique est dit complètement régulier s'il est uniformisable et séparé. Tout espace complètement régulier est régulier, car un espace X est uniformisable si et seulement si :

- (3). pour tout point x de X et tout fermé F de X ne contenant pas x . Il existe une fonction continue de X dans le segment $[0, 1]$ valant 0 en x et 1 sur F .

Exemple 4.2. Les espaces suivants sont complètement régulier : $\star$ Tout groupe topologique séparé

$\star$ Les espaces normaux

$\star$ Les espaces localement compacts.

• *Caractérisation de la compacité pour un espace métrique*

Définition 4.3. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est un espace métrique compact si toute suite d'éléments de (E, d) admet une suite extraite convergeant vers un point de E . Une partie A de E est dite compacte si le sous espace métrique (A, d) est compact.

En d'autres termes, (E, d) est un espace métrique compact si toutes ses suites admettent au moins une valeur d'adhérence dans E .

Corollaire 4.1. Soient (E, d) un espace métrique et K un compact de E . Alors l'espace métrique (K, d) est complet (même si E ne l'est pas).

Lemme 4.1. Tout espace métrique compact est complet.

Théorème 4.1. Un espace métrique est compact si et seulement si il est à la fois complet et totalement borné.

• *Equivalence des distances et des normes*

Définition 4.4. Soit (E, d) un espace métrique. Soient d et d' deux distances sur un même espace E . On dit qu'elles sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie.

Définition 4.5. On se fixe sur E deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Les deux normes sont dites équivalentes si elle vérifient l'une des deux propriétés (équivalentes) suivantes :

1. L'application identité I de $(E, \|\cdot\|_1)$ dans $(E, \|\cdot\|_2)$ est un homéomorphisme (linéaire).
2. IL existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout x dans E ,

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$$

• *Homéomorphismes*

En topologie, un homéomorphisme est une applications bejective continue, d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

Théorème 4.2. Soient X et Y des espaces topologiques, f une application bijective de X sur Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) f et f^{-1} sont continues ;
- ii) pour qu'une partie de X soit ouverte, il faut et il suffit que son image dans Y soit ouverte ;
- iii) pour qu'une partie de X soit fermée, il faut et il suffit que son image dans Y soit fermée.

Définition 4.6. Une application f de X dans Y qui vérifie les conditions du théorème 4.2 s'appelle une application bicontinue de X sur Y , ou un homéomorphisme de X sur Y . (D'après 4.2 (ii), c'est la notion naturelle d'isomorphisme pour la structure d'espace topologique).

- *La topologie produit*

Définition 4.7. En mathématiques, plus précisément en topologie, la topologie produit est une topologie définie sur un produit d'espaces topologiques. C'est de manière générale la topologie initiale associée aux projections de l'espace produit vers chacun de ses facteurs, autrement dit c'est la topologie la moins fine rendant continues les projections.

- *Total bornitude*

Définition 4.8. Un espace métrique est dit totalement borné si quel que soit $\epsilon > 0$ il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayons au plus égal à ϵ .

Lemme 4.2. Tout espace métrique compact est totalement borné.

Conclusion générale

L'étude de la structure topologique de l'espace D est un exercice assez difficile et nécessite une bonne maîtrise des outils de l'analyse fonctionnelle. L'idée ingénieuse de Skorohod, a permis de donner à cet espace une structure d'espace métrique complet et séparable (lorsque les fonctions sont à valeurs dans un espace métrique complet séparable).

Dans ce mémoire nous avons étudié dans un premier lieu la topologie de Skorohod sur les espaces $D([0, 1], \mathbb{R})$ et $D([0, \infty), \mathbb{R})$ des fonctions càdlàg. Les résultats énoncés restent valables lorsque E est un espace métrique complet et séparable. Puis, nous avons présenté l'étude structurale faite par A. Jakubowski dans son article de l'extension de cette topologie dans un cadre plus général lorsque E est un complètement régulier.

Bibliographie

- [1] *N. Bourbaki, Topologie générale, Hermann, Paris.*
- [2] *P. Billingsley, Convergence of probability measures, Second Edition.*
- [3] *Cours, chapitre n°1, Introduction-Université*
- [4] *Chapitre 2 espace des fonctions continues sur un compact, math.univ-tille1.fr/mbekhta/files/ens/A.F. Chapitre 2, (cours en ligne).*
- [5] *Jean-Yves Chemin, Base d'analyse fonctionnelle, laboratoire J-L. Lions, case 187, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. Copernicus University, ul. Chopina 12/18, 87-100 Torun Poland.*
- [6] *Adam. Jakubowski, Institute of Mathematics, Nicolas*
- [7] *N. A. Kolmogorov, On Skorohod convergence, Theor. Probability Appl. 1, 215-222.*
- [8] *T. Lindvall, Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D[0, \infty]$. J. Appl. Probab, 10, 1973, p 109-121.*
- [9] *I. Mitoma, Tightness of probabilities on $C([0, 1]; \varphi')$ and $D([0, 1]; \varphi')$. Ann. Probab, t. 11, n°4, 1983, p. 989-999.*
- [10] *Y. Prohorov, Convergence of random processes and limite theorems in probability theory, Theor. Probability Appl.1, 157-214.*
- [11] *A.V. Skorokhod, Limit theorems for stochastic processes. Theory probab. Appl.,t. 1, 1956, p. 261-290.*
- [12] *C. Stone, Weak convergence of stochastic processes defined on a semifinite time interval. Proc. Amer. Math. Soc., 14, 694,696.*
- [13] *W. Whitt, Weak convergence of probability mesures on the function space $D([0, +\infty[)$, Technical report, Yale university.*