



Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie Electrique et d'Informatique

Département d'Automatique

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : Automatique des Systèmes Continus et Productive

Présenté par :

Mme CHEBALLAH Fatima. Ep. BOUARABA

Ingénieur d'état en Automatique

Thème:

Commande des systèmes fractionnaires:

approche dans l'espace d'état

Devant le jury d'examen composé de:

Président :	Saïd DJENNOUNE	Professeur,	UMM-TO
Rapporteur :	Salah HADDAD	Professeur,	UMM-TO
Examineur :	Moussa DIAF	Professeur,	UMM-TO
Examineur :	Rachid MANSOURI	Maître de Conférence 'A',	UMM-TO
Examineur :	Ahmed MAÏDI	Maître de Conférence 'B',	UMM-TO

Remerciements

Le travail réalisé dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO).

Je suis heureuse d'exprimer à Monsieur HADDAD Salah, professeur à l'UMMTO, ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie d'avoir accepté la direction de ce travail.

Je tiens à remercier tout particulièrement et très chaleureusement Monsieur MANSOURI Rachid maître de conférences à l'UMMTO. Il a fait preuve d'une grande disponibilité tout au long de mon mémoire, m'a fourni un soutien constant et une aide précieuse. Il a toujours su me conseiller durant mon travail, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande reconnaissance à Monsieur DJENNOUNE Said professeur à l'UMMTO, et d'avoir accepté d'être président du jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur DIAF Moussa professeur à l'UMMTO, d'avoir accepté de participer à mon jury et d'avoir examiné mon travail.

Je remercie également Monsieur MAÏDI Ahmed maître de conférences à l'UMMTO, d'avoir accepté de participer à mon jury et d'avoir examiné mon travail.

Pour finir, mes remerciements les plus profonds vont aux membres de ma famille. Je remercie du fond du cœur mon époux Farid sans qui je ne serai jamais devenue l'étudiante que je fus, qui a su m'assagir et me soutenir tous les jours. Je le remercie particulièrement pour sa patience durant ces trois longues années.

Je dédie finalement ce travail à mes deux anges Meriem et Nesrine.

Table des matières

Introduction générale

Notations

Chapitre I : Généralités sur les systèmes non entiers

Introduction.....	1
I. Intégration d'ordre non entier.....	2
II. Dérivation d'ordre non entier.....	2
II.1 Définition de Riemann-Liouville.....	3
II.2 Définition de Caputo.....	4
II.3 Définition de Grünwald-Letnikov.....	5
III. Systèmes non entiers.....	7
III.1. Equation différentielle d'ordre non entier.....	7
III.2. Représentation transfert des systèmes non entiers	8
III.3. Représentation d'état des systèmes non entiers	9
III.4. De la représentation transfert à la représentation d'état.....	10
III.4.1 Cas des systèmes commensurables.....	10
III.4.2 Cas des systèmes généralisés.....	11
IV. Le dérivateur généralisé.....	13
IV. 1. Approximation du dérivateur généralisé	15
IV.1.1. Dérivateur généralisé borné en fréquence.....	16
V. Approximation du dérivateur borné en fréquence	17
V.1. Méthode d'approximation d'Oustaloup.....	17
V.2. Approximation des systèmes non entiers en représentation d'état.....	21
Conclusion.....	25

Chapitre II : Synthèse H_∞ par l'approche standard

Introduction	26
I. Principe de la synthèse H_∞	27

I.1 Formalisation du problème de synthèse H_∞	28
I.1.1 Modélisation du système à commander.....	28
I.1.2 Modèle du système en boucle fermée.....	29
II. Synthèse H_∞ par approche standard.....	31
II.1 Méthode de résolution.....	32
II.2 Algorithme de calcul.....	34
II.3 Exemple d'application	35
Conclusion.....	41

Chapitre III : Synthèse de loi de commande par l'approche H_∞ pondérée

Introduction.....	42
I. Transfert en boucle fermée et synthèse du problème H_∞ standard.....	42
II. Propriété asymptotique des fonctions de transfert.....	44
III. Mise en œuvre de la synthèse par l'introduction de fonction de pondération.....	47
III.1. Mise sous forme standard du système pondéré.....	50
III.2. Choix des fonctions de pondération.....	52
III.2.1. Choix de fonctions de pondération entières.....	52
III.2.2 Exemple d'application.....	55
III.2.3. Choix de fonctions de pondérations non entières.....	59
Conclusion.....	69

Chapitre IV : Application à la commande en vitesse d'une machine asynchrone

Introduction	70
I. Modélisation dynamique de la machine asynchrone.....	71
I.1. Mise en équations de la machine asynchrone.....	71
I.2. Principe de la commande vectorielle.....	72
II. Application à la commande en vitesse de la machine asynchrone.....	76

II.1. Correcteur H_∞ entier basé sur des fonctions de pondération entières.....	76
II.1.1 Présentation du problème.....	76
II.1.2 le choix des fonctions de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$	77
II.2. Correcteur H_∞ , en utilisant des fonctions de pondérations non entières.....	79
II.2.1 Correcteur H_∞ utilisant des fonctions de pondération ayant la forme	
$\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$	80
II.2.2. Correcteur H_∞ non entier utilisant d'intégrateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$	82
II.3. Teste de robustesse.....	84
II.3.1. Suivi de consigne.....	85
II.3.2. Rejet de perturbation.....	87
II.3.3. robustesse vis-à-vis des bruits de mesure.....	92
II.3.4. robustesse vis-à-vis de variation de paramètres.....	92
Conclusion.....	97
Conclusion générale	98
Bibliographie	101
Annexes	105

Notations

$\ \cdot \ _{\infty}$: la norme H_{∞}
$\ \cdot \ _2$: la norme H_2
L_2	: espace des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}
$\bar{\sigma}(A)$: valeur singulière maximale de A
$\underline{\sigma}(A)$: valeur singulière minimale de A
ω	: pulsation (rad/s)
s, r	: indices respectifs du stator et du rotor
$v_{ds}(t), v_{qs}(t)$: tensions statoriques selon les axes d et q
$i_{ds}(t), i_{qs}(t)$: courants statoriques selon les axes d et q
L_s, L_r	: inductances statoriques et rotoriques
L_m	: inductance mutuelle entre stator et rotor
R_s, R_r	: résistance statorique et rotorique
$T_s = \frac{L_s}{R_s}$: constante de temps statorique
$T_r = \frac{L_r}{R_r}$: constante de temps rotorique
$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$: coefficient de dispersion
p	: nombre de paires de pôles
J	: moment d'inertie des parties tournantes
f	: coefficient de frottement visqueux
$\varphi_{dr}(t), \varphi_{qr}(t)$: flux rotoriques dans les axes d et q
$C_{em}(t)$: couple électromagnétique
$C_r(t)$: couple résistant
$\omega_s(t), \omega_r(t)$: pulsations électriques des courants statoriques et rotoriques
$\omega(t), \Omega(t)$: vitesse électrique et mécanique ($\omega(t) = p\Omega(t)$)

Introduction générale

L'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dx}$ est maintenant très familier, la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction $f(x)$ notée $D^n f(x)$ est bien définie à condition que n soit un nombre entier positif. Dans une lettre adressé à Leibniz en 1695, L'Hôpital posa la question, « quel sens donner à $D^n f(x)$, si n est une fraction ? » [33]. Depuis le calcul fractionnaire a séduit de nombreux mathématiciens, on cite en particulier : Euler (1730), Laplace (1812), Fourier (1822), Liouville (1832-1873), Riemann (1847), Grünwald (1867-1872), Letnikov (1868-1872), Laurent (1884), Heaviside (1892-1912), Hardy et Littlewood (1917-1928), Weyle (1917), Lévy (1932), Kober (1940), Riesz (1949) [35]. La théorie est alors étendue pour inclure l'opérateur D^α où α peut être un nombre positif ou négatif, réel ou complexe, rationnel ou irrationnel. Mais il a fallu attendre 1974, pour voir s'organiser une première conférence internationale sur le calcul fractionnaire à New Haven sous l'égide de B. Ross [46]. Mais l'interprétation de cette théorie n'a été introduite qu'en 2002 par Podlubny [43]. Ainsi une nouvelle catégorie de régulateurs est apparue, basée essentiellement sur la notion de la dérivation/intégration d'ordre non entier, dont l'intérêt est bien établi puisqu'il est utilisé dans de nombreux domaines de la science et de la technologie :

En électricité, Le Méhauté et Crepy [31] ont introduit un élément électrique, appelé fractance, doté d'une impédance d'ordre fractionnaire. Ceci a permis de définir le circuit diviseur de tension de Westerlund. En viscoélasticité, Scott Blair, Caputo et Mainardi [8] ont proposé des lois de déformation d'ordre fractionnaire pour modéliser le comportement viscoélastique de matériaux, en se basant sur des modèles fractionnaires. En électrochimie, Oldham et Spanier [36] ont introduit le calcul fractionnaire dans leur approche à la solution des problèmes électrochimiques qui traitent des phénomènes de diffusion.

Dans le domaine de la commande des systèmes, l'ordre de dérivation introduit par ce concept constitue un degré de liberté supplémentaire permettant d'améliorer les régulateurs classiques utilisant la dérivation entière. En effet, le régulateur $PI^\square D^\square$ utilisant les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires [42] ainsi que le régulateur CRONE (Commande

Robuste d'Ordre Non Entier) basé sur l'intégrateur fractionnaire développé par Oustaloup [37, 40] se sont avérés plus efficaces et plus robustes que les régulateurs PID classiques. Bien que ces régulateurs soient robustes vis à vis des paramètres du système, notamment le gain statique, ils posent un problème lorsque le système est soumis à une perturbation, c'est ce qui est montré dans [29,2] lorsque ces régulateurs ont été utilisés pour contrôler la vitesse de la machine asynchrone. En effet, les auteurs ont montré que quelque soit la structure du régulateur fractionnaire utilisé, le couple résistant appliqué à la machine n'était pas rejeté, contrairement aux régulateurs entiers classiques.

Le dimensionnement des régulateurs en utilisant la synthèse H_∞ peut constituer une solution pour le dimensionnement des régulateurs fractionnaires. Cela conduit à développer des lois de commande robustes utilisant d'un côté les avantages de la dérivation non entière et d'un autre côté les avantages des structures de commande robuste classique H_∞ . La commande H_∞ est une approche des problèmes de commande apparue au début des années 80[7,13, 24], dans laquelle la norme H_∞ est utilisée pour définir des critères de performance et de robustesse. Moyennant le passage à une forme standard, un problème d'asservissement peut alors être conçu comme l'optimisation de la norme H_∞ d'une matrice de transfert, celle qui intervient entre les signaux appliqués et des signaux de sorties judicieusement choisis.

En effet, en utilisant cette méthode on tient compte, non seulement des perturbations successibles d'affecter le système à commander mais aussi des bruits de mesure inévitables lorsqu'on utilise des capteurs [16,27]. La synthèse H_∞ pondérée basée sur l'introduction des fonctions de pondération placées aux différents points du schéma d'asservissement est le moyen utilisé pour introduire l'ordre non entier dans le régulateur à calculer. En effet, ces fonctions de pondération traduisent le cahier des charges sous forme de gabarits fréquentiels, que doivent satisfaire les transferts en boucle fermée. Il apparait donc un lien direct entre le choix des pondérations et les spécifications du cahier des charges, ils ont une interprétation physique qui est liée au comportement désiré de la boucle fermée.

Le travail présenté dans ce mémoire consiste à synthétiser des lois de commandes par la synthèse H_∞ simple et H_∞ pondéré par des fonctions de pondération entière et non entière. De fait que la synthèse utilise l'algorithme de Glover-Doyle [18] basé sur la représentation d'état et comme on ne sait pas comment faire dans le cas fractionnaire, on utilise l'approximation des modèles fractionnaires par des modèles d'état d'ordre entier.

La synthèse passe par l'approximation et la programmation de l'opérateur de dérivation d'ordre non entier en représentation d'état [29,14]. La méthode ainsi adoptée est ensuite utilisée pour la synthèse des régulateurs H_∞ non entiers qui sont ensuite appliqués pour la commande en vitesse d'un moteur asynchrone.

Le présent mémoire est structuré en quatre chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre on présente des généralités sur la notion de dérivation /Intégration non entière, les outils de calcul non entiers, ainsi que les méthodes d'approximation de l'opérateur de dérivation non entière par le dérivateur borné en fréquence à l'aide de transferts d'ordre entier. En présentera en particulier la méthode d'approximation d'Oustaloup en représentation transfert et en représentation d'état. A la fin de chapitre un exemple sera traité.

Le deuxième chapitre est consacré à la technique de synthèse H_∞ par l'approche standard, ainsi que sa résolution par la méthode de Glover-Doyle, qui introduit les équations de Riccati. On illustrera cette approche par un exemple académique.

Dans le chapitre trois on s'intéresse à la commande H_∞ pondérée qui est basée sur l'introduction des fonctions de pondérations placées aux différents points du schéma d'asservissement en boucle fermée. Un rappel des éléments essentiels de la synthèse H_∞ est présenté ainsi que la technique du choix des filtres de pondération dans le cas entier ainsi que dans le cas non entier, qui reste le point important de cette synthèse H_∞ . Dans cette partie, on traite trois principales approches pour cette commande :

- La première concerne la commande H_∞ pondérée par des fonctions de pondération entières.

- La deuxième repose sur la même technique que la première mais avec des fonctions de pondération non entière, en remplaçant l'opérateur de Laplace s par s^α .
- Le principe de la troisième approche est de prendre directement une fonction de pondération non entière sous forme d'intégrateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$.

Des résultats de simulation de la commande d'un système du premier ordre à l'aide d'un régulateur H_∞ obtenu en utilisant ces trois fonctions de pondération seront également présentés à la fin de ce chapitre.

Dans le dernier chapitre on applique les régulateurs décrits au chapitre trois, pour la commande en vitesse du moteur asynchrone. On vérifie ensuite par simulation numérique la robustesse de ces lois de commande vis à vis des perturbations (couple résistant), du suivi de consigne, des bruits de mesure ainsi que les variations des paramètres mécaniques de la machine. Plusieurs courbes de simulation y seront présentées pour illustrer les différents résultats qui sont obtenus.

On termine notre travail par une conclusion générale, et quelques perspectives.

Chapitre I

Généralités sur les systèmes non entiers

Introduction

On présente dans ce chapitre les notions de base de la dérivation non entière ainsi que les systèmes non entiers, la présentation commence par la définition classique de Riemann-Liouville [21] de l'opérateur d'intégration non entier, puis deux autres définitions de l'opérateur de dérivation non entière sont également établies: la définition de Caputo [21], ainsi que la définition de Grünwald-Letnikov [38], cette dernière est la plus adaptée au calcul numérique. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des systèmes d'ordre non entier. On commence par la définition de l'équation différentielle d'ordre non entier, ainsi que la représentation des systèmes non entiers, aussi bien dans l'approche transfert (représentation externe entrée/sortie) que dans l'approche d'état (représentation interne). Le passage de la représentation transfert à la représentation d'état des modèles non entiers y est également présenté.

Dans la dernière partie de ce chapitre on introduit l'élément principal nécessaire à l'analyse et la simulation des systèmes d'ordre non entier: son approximation par des modèles entiers. Celle-ci étant basée sur l'approximation de l'opérateur de dérivation ou d'intégration d'ordre non entier. Plusieurs méthodes sont alors proposées, elles se distinguent principalement selon que le modèle entier obtenu est continu ou discret, utilisant la représentation d'état ou la représentation transfert.

Dans notre cas, nous optons pour la méthode développée par Oustaloup [38], communément appelée la méthode CRONE, qui est utilisée pour développer les méthodes d'approximation des systèmes non entiers en représentation d'état [29].

I. Intégration d'ordre non entier

Soit une fonction réelle, de la variable t , continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$ notée $I^k f(t)$, s'exprime par la formule de Cauchy [21] :

$$\int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 = I^k f(t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{k-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.1})$$

Avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour généraliser la formule (I.1) à un nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, Riemann en 1947 a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma [annexe 1] qui est sa généralisation aux nombres réels. On obtient alors la fonction d'intégration non entière :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I.2})$$

L'équation (I.2) est appelée l'intégrale de Riemann Liouville car Liouville a proposé la même définition que Riemann mais en remplaçant la borne inférieure d'intégration par $-\infty$.

II. Dérivation d'ordre non entier

La généralisation de la fonction de dérivation entière à des ordres non entiers peut être obtenue à partir de la formule d'intégration non entière (I.2), donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo. Une autre méthode a été proposée par Grünwald-letnikov, qui est basée sur la définition usuelle de la dérivation entière classique [21]. Pour exprimer le principe des deux premières méthodes, considérons le schéma de la figure (I-1), celui-ci montre que la dérivée de la fonction $f(t)$ à l'ordre non entier α ($\alpha = 2.3$) compris entre $r-1$ et r (r étant un nombre entier positif, ici ($r = 3$), peut être déduite en utilisant la définition de l'intégration non entière (I.2) et la fonction de dérivation entière usuelle.

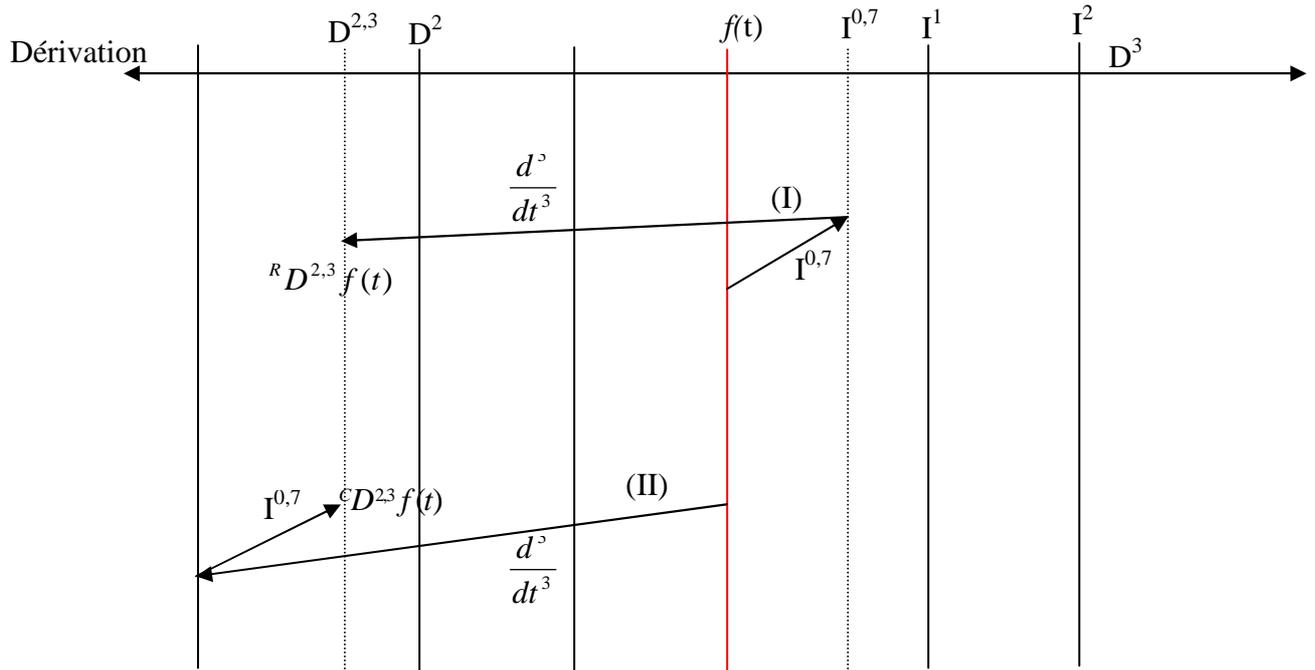


Fig. I.1: Dérivation à l’ordre 2.3 selon la définition de Riemann-Liouville (chemin I) et selon la définition de Caputo (chemin II).

II.1 Définition de Riemann-Liouville

La méthode de Riemann-Liouville est obtenue en deux étapes (chemin I) :

- Intégrer d’abord la fonction $f(t)$ à l’ordre non entier $r-\alpha$.
- Dériver le résultat ainsi obtenu à l’ordre entier r .

L’expression mathématique de la méthode est donnée par [48] :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d^r}{dt^r} \left\{ \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} \tag{I.3}$$

Le symbole ${}^R D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée d’ordre non entier α de la fonction $f(t)$ par rapport à t entre t_0 et t selon la définition de Riemann-Liouville.

II.2 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre définition de la dérivation non entière, elle est aussi obtenue en deux étapes (chemin 2)[7] :

- Dériver la fonction $f(t)$ à l'ordre r
- Intégrer le résultat ainsi obtenu à l'ordre non entier $\alpha-r+1$

L'expression mathématique de cette définition est :

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (\text{I.4})$$

${}^c D_t^\alpha f(t)$ Désigne la dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Caputo

Remarque

- la transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α , par rapport à t , de la fonction causale selon la définition de Riemann-Liouville (I.3) est donnée par :

$$L[{}^R D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{r-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (\text{I.5})$$

- la transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α , par rapport à t , de la fonction causale selon la définition de Caputo (I.4) est donnée par :

$$L[{}^C D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{r-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t) \Big|_{t=0} \quad (\text{I.6})$$

Le calcul de la transformée de Laplace de l'opérateur ${}^R D_t^\alpha$ nécessite de connaître la valeur des dérivées d'ordre non entier de la fonction $f(t)$ à l'instant $t = 0$, ce qui n'est pas le cas lorsque il s'agit de l'opérateur ${}^C D_t^\alpha$. La définition de Caputo requière donc que la fonction $f(t)$ ainsi que ses dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville qui exige la seule causalité de $f(t)$. De plus, dans la résolution des équations différentielles d'ordre non entier, la solution obtenue en utilisant la définition de Riemann-Liouville, s'exprime en fonction de valeur initiale d'ordre non entier $(y_0, \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(0), \dots)$, alors que l'utilisation de la définition de Caputo exprime la solution

en fonction des valeurs initiales entières $(y_0, \frac{d}{dt} y_0, \dots)$ dans ce cas la définition de Caputo semble plus adaptée.

- La dérivée à l'ordre non entier d'une constante selon la définition de Riemann-Liouville est une fonction non nulle dépendant de la variable t , alors que selon la définition de Caputo est nulle ;

$${}^R D_t^\alpha c = \frac{c(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad {}^C D_t^\alpha c = 0 \quad (\text{I.7})$$

L'analogie avec la dérivation entière introduit plutôt à adapter la définition de Caputo particulièrement pour la modélisation de phénomènes physiques pour lesquels il est facile de donner un sens aux conditions initiales. Alors que la définition de Riemann-Liouville est couramment utilisée en mathématique en raison de son caractère plus général.

II.3 Définition de Grünwald-Letnikov

La définition proposée par Grünwald-Letnikov s'appuie sur la définition usuelle de la dérivation d'ordre entier. Elle est plus adéquate au calcul numérique de la dérivation non entière [38].

Par définition, la dérivée première d'une fonction $f(t)$ est donné par :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{I.8})$$

h étant la période d'échantillonnage. La dérivée seconde est :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (\text{I.9})$$

Une généralisation à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ donne :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j f(t-jh) \quad (\text{I.10})$$

n étant un nombre entier, l'expression $\binom{n}{j}$ est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{I.11})$$

L'extension de l'équation (I.10) à des valeurs non entières $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de l'ordre de dérivation est :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left[(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \right] \quad (\text{I.12})$$

La notation $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \quad (\text{I.13})$$

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la somme de l'équation (I.12) est limitée à $n+1$ termes. La valeur de la dérivée à un instant t est alors une combinaison linéaire des $n+1$ valeurs de la fonction $f(t-jh)$, $j=0 \dots, n$.

La dérivation entière donne ainsi une caractérisation locale de la fonction. Par contre, pour des ordres de dérivation non entière, les coefficients $\left[(-1)^j \binom{\alpha}{j} \right]$ ne s'annulent pas.

La valeur de la dérivée à un instant donné est alors une combinaison linéaire de toutes les valeurs de fonction $f(t-jh)$, $j=0 \dots, \infty$. Cela signifie que la dérivation non entière donne une caractérisation globale de la fonction.

Algorithme de calcul

La définition de Grünwald-Letnikov est très adaptée au développement algorithmique, qui permet le calcul numérique de l'intégration /dérivation à un ordre α réel ou complexe d'une fonction causale.

Dans ce qui suit, la présentation de l'algorithme est dans le cas des ordres de dérivation réels.

Pour $f(t)$ causale, en posant $t = kh$ ce qui donne :

$f((k-j)h) = 0$ Pour $k-j < 0$, soit $k < j$. Ainsi dans l'équation (I.12), la somme étendue de $j = 0$ à $j = \infty$ se réduit à la somme étendue de $j = 0$ à $j = k$.

Soit :

$$C(j) = \frac{1}{h^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (\text{I.14})$$

La loi de récurrence entre $C(j)$ et $C(j-1)$ est donnée par :

$$\begin{cases} C(0) = \frac{1}{h^\alpha} \\ C(j) = C(j-1) \frac{j-\alpha-1}{j} \end{cases} \quad j = 1, \dots, k \quad (\text{I.15})$$

L'équation (I.12) s'écrit alors :

$$D^\alpha f(kh) = \sum_{j=0}^k C(j) f((k-j)h) \quad (\text{I.16})$$

Calculons les valeurs de la dérivée d'ordre α d'une fonction $f(t)$ pour les quatre premières valeurs de t échantillonné au pas h . Elles sont donnée par :

$$\begin{cases} D^\alpha f(0) = C(0)f(0) \\ D^\alpha f(h) = C(1)f(0) + C(0)f(1) \\ D^\alpha f(2h) = C(2)f(0) + C(1)f(1) + C(0)f(2) \\ D^\alpha f(3h) = C(3)f(0) + C(2)f(1) + C(1)f(2) + C(0)f(3) \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

La relation (I.17) montre, qu'à chaque itération le calcul de dérivée non entière de $f(t)$ ne se fait pas seulement au moyen de la valeur présente de la fonction mais aussi de toutes ses valeurs passées. Cet algorithme nécessite donc un temps de calcul très important.

On trouve dans [2] le détail de l'algorithme pour des ordres de dérivation réels ou complexes.

III. Systèmes non entiers

Les systèmes dont la dynamique est modélisée par une équation différentielle utilisant la dérivation d'ordre non entier, sont appelés les systèmes d'ordre non entier ou simplement les systèmes non entiers [51].

III.1. Equation différentielle d'ordre non entier

Un système d'ordre non entier monovariante linéaire à temps invariant est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) + a_0 y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) + b_0 u(t) \quad (\text{I.18})$$

$$a_i, b_j \in \mathbb{R}, \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}_+, n \text{ et } m \in \mathbb{N}$$

D^α étant l'opérateur de dérivation d'ordre α , $u(t)$ l'entrée et $y(t)$ la sortie.

Soit :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \text{ et } 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (I.18) est donnée sous la forme :

$$\Delta_{ne}(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{\alpha_i} + a_0 = 0 \quad (\text{I.19})$$

Définition 1 : le système non entier décrit par l'équation différentielle (I.18) est strictement propre lorsque $\beta_m < \alpha_n$. Lorsque $\beta_m = \alpha_n$ le système est juste propre.

Définition 2 : un système non entier est dit d'ordre commensurable α lorsque tous les ordres de dérivation de son équation différentielle sont multiples du même nombre non entier α ; dans ce cas, l'équation différentielle généralisée de l'équation (I.18) devient :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{i\alpha} y(t) + a_0 y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{j\beta} u(t) + b_0 u(t) \quad (\text{I.20})$$

Lorsque α est un nombre rationnel, le système est alors appelé système fractionnaire.

III.2. Représentation transfert des systèmes non entiers

En calculant la transformation de Laplace de l'équation différentielle généralisée (I.18), on obtient:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j} + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} + a_0} \quad (\text{I.21})$$

$Y(s)$ et $U(s)$ étant les transformations de Laplace respectives de $y(t)$ et $u(t)$.

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable α , cette fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j s^{j\beta} + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha} + a_0} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j (s^\beta)^j + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i (s^\alpha)^i + a_0} \quad (\text{I.22})$$

III.3. Représentation d'état des systèmes non entiers

Le modèle d'état d'un système d'ordre non entier continu invariant est défini comme dans le cas entier, par deux équations [30, 38]:

1. une équation dans laquelle chaque variable $x_i(t)$ est dérivée à un ordre non entier α_i , le modèle est dans ce cas appelé modèle généralisé. Dans le cas des

systèmes commensurables, tous les états $x_i(t)$ sont dérivés à un même ordre non entier α .

2. une équation de sortie qui est une combinaison linéaire des états, comme dans le cas entier.

Le modèle d'état s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}(x) = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.23})$$

où

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\alpha_1}x_1 \quad D^{\alpha_2}x_2 \quad \dots \quad D^{\alpha_n}x_n]^T \quad (\text{I.24})$$

avec

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^q, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times 1}.$$

dans le cas des systèmes commensurables le modèle d'état (I.23) s'écrit :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

avec :

$$D^\alpha x = D^\alpha [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (\text{I.26})$$

Le modèle transfert $G(s)$ peut être facilement calculé, en utilisant la transformation de Laplace et en considérant les conditions initiales nulles ; on obtient :

$$G(s) = C[(s^{(\alpha)}I_n - A)^{-1}]B + D \quad (\text{I.27})$$

où :

$$s^{(\alpha)}I_n = \text{diag}[s^{\alpha_1} \quad s^{\alpha_2} \quad \dots \quad s^{\alpha_n}] \quad (\text{I.28})$$

Lorsque les matrices A, B, C possèdent des formes canoniques commandables, des modèles d'état entier donnés sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad C_{n-1} \quad C_n]$$

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \alpha_n]$$

Le modèle transfert est donné par [14]:

$$G(s) = \frac{C_1 s^{\beta_1} + C_2 s^{\beta_2} + \dots + C_i s^{\beta_i} + \dots + C_n s^{\beta_n}}{s^{\tilde{\alpha}_n} + a_1 s^{\tilde{\alpha}_{n-1}} + \dots + a_i s^{\tilde{\alpha}_{n-i}} + \dots + a_{n-2} s^{\tilde{\alpha}_2} + a_{n-1} s^{\tilde{\alpha}_1} + a_n} \quad (\text{I.30})$$

avec

$$\begin{cases} \beta_1 = 0, & \beta_2 = \alpha_1, & \beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j, & \beta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \\ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1, & \tilde{\alpha}_2 = \alpha_1 + \alpha_2, & \tilde{\alpha}_{n-i} = \sum_{j=1}^{n-i} \alpha_j, & \tilde{\alpha}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \end{cases} \quad (\text{I.31})$$

III.4. De la représentation transfert à la représentation d'état

Le calcul du modèle d'état des systèmes non entiers ne se fait pas de la même façon que pour les systèmes entiers classiques [13], en particulier dans le cas des systèmes non entiers généralisés et multivariables.

Dans le cas des systèmes commensurables, à l'aide du changement de variable ($p = s^\alpha$), on retrouve les méthodes utilisées dans la théorie des systèmes linéaires d'ordre entier.

III.4.1 Cas des systèmes commensurables

Soit le système commensurable monovariante linéaire invariant représenté par son modèle transfert $G(s)$ tel que :

$$G(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + b_{m-1} s^{(m-1)\alpha} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{s^{n\alpha} + a_1 s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_{n-1} s^\alpha + a_n} \quad (\text{I.32})$$

Pour calculer son modèle d'état correspondant, on procède en trois étapes :

Etape 1 : A l'aide du changement de variable ($p = s^\alpha$), on transforme le modèle non entier $G(s)$ en un modèle entier $G(p)$ qui s'écrit sous la forme :

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{(m-1)} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_1 p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (\text{I.33})$$

Etape 2 : Calculer le modèle d'état correspondant à $G(p)$.

On peut obtenir toutes les formes particulières dans la théorie des systèmes entiers (forme commandable, observable, Jordan,...). On obtient le modèle d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

Etape 3 : Remplacer dans le modèle d'état (I.34) la dérivée entière d'ordre 1 par la dérivée non entière d'ordre α pour obtenir le modèle d'état correspondant au modèle transfert commensurable (I.33) donné par :

$$\begin{cases} D^\alpha x = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

III.4.2 Cas des systèmes généralisés

La fonction de transfert $G(s)$, supposée propre s'écrit sous la forme [16] :

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0}{s^{\alpha_n} + a_1 s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_{n-1} s^{\alpha_1} + a_n} = \frac{y(s)}{u(s)} \quad (\text{I.36})$$

Avec :

$$\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_2 > \alpha_1 \quad \text{et} \quad \beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_2 > \beta_1.$$

On présente une méthode générale qui permet de calculer une représentation d'état ayant la forme (I.29) à partir du modèle transfert (I.36).

Soit le nombre $\tilde{\alpha}$ le vecteur de la concaténation des nombre non entiers α_i et β_i :

$$\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_{n+m} \quad \tilde{\alpha}_{n+m-1} \quad \tilde{\alpha}_{n+m-2} \quad \cdots \quad \tilde{\alpha}_3 \quad \tilde{\alpha}_2 \quad \tilde{\alpha}_1] \quad (\text{I.37})$$

Tel que: $\tilde{\alpha}_{n+m} > \tilde{\alpha}_{n+m-1} > \cdots > \tilde{\alpha}_2 > \tilde{\alpha}_1$.

le modèle d'état est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(\alpha)}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_{n+m} & -\tilde{a}_{n+m-1} & -\tilde{a}_{n+m-2} & \cdots & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [\tilde{c}_1 \quad \tilde{c}_2 \quad \tilde{c}_3 \quad \cdots \quad \tilde{c}_{n+m-1} \quad \tilde{c}_{n+m}] x \end{array} \right. \quad (\text{I.38})$$

Avec :

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\tilde{\alpha}_1} x_1 \quad D^{(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)} x_2 \quad \cdots \quad D^{(\tilde{\alpha}_{n+m} - \tilde{\alpha}_{n+m-1})} x_{n+m}]^T \quad (\text{I.39})$$

Dont le modèle transfert $H(s)$:

$$H(s) = \frac{\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 s^{\tilde{\alpha}_1} + \tilde{c}_3 s^{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2} \cdots + \tilde{c}_{n+m} s^{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+m-1}}}{s^{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \cdots + \tilde{\alpha}_{n+m}} + \cdots + \tilde{a}_{n+m-2} s^{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2} + \tilde{a}_{n+m-1} s^{\tilde{\alpha}_1} + \tilde{a}_{n+m}} \quad (\text{I.40})$$

Puisque le numérateur de $H(s)$ contient $n+m$ termes. Il suffit alors de les trier de sorte à faire ressortir m termes pour lesquels les ordres non entiers correspondent à ceux du numérateur de $G(s)$ et n pour lesquels les ordres non entiers correspondent à ceux du dénominateur de $G(s)$.

La sélection des termes \tilde{c}_i et \tilde{a}_i est résumée dans l'équation (I.41).

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_{n+m} = a_n \quad \tilde{c}_1 = b_0 \\ \text{si } \tilde{\alpha}_i = \beta_j \quad \text{alors } \tilde{c}_{i+1} = b_j \text{ et } \tilde{a}_{n+m-i} = 0 \quad i = 1, \dots, n+m-1 \\ \text{si } \tilde{\alpha}_i = \alpha_j \quad \text{alors } \tilde{c}_{i+1} = 0 \text{ et } \tilde{a}_{n+m-i} = a_{n-j} \quad i = 1, \dots, n+m-1 \end{array} \right. \quad (\text{I.41})$$

Exemple :

Soit le modèle transfert non entier donné par :

$$G(s) = \frac{4s^{0.7} + 6s^{0.5} + 10}{s^2 + 2s^{0.8} + 3s^{0.3} + 5} \quad (\text{I.42})$$

Tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = 0.7, \quad b_2 = 4; \quad \beta_1 = 0.5, \quad b_1 = 6; \quad b_0 = 10 \\ \alpha_3 = 2; \quad \alpha_2 = 0.8, \quad a_1 = 2; \quad \alpha_1 = 0.3; \quad a_2 = 3; \quad a_3 = 5 \end{array} \right.$$

Le vecteur $\tilde{\alpha}$ est :

$$\tilde{\alpha} = [2 \quad 0.8 \quad 0.7 \quad 0.5 \quad 0.3]$$

En appliquant l'équation (I.41), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_5 = a_3 \quad \tilde{c}_1 = b_0 = 10 \\ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \Rightarrow \tilde{c}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_4 = a_4 = 3 \\ \tilde{\alpha}_2 = \beta_1 \Rightarrow \tilde{c}_3 = b_1 = 6 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_3 = 0 \\ \tilde{\alpha}_3 = \beta_2 \Rightarrow \tilde{c}_4 = b_2 = 4 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_2 = 0 \\ \tilde{\alpha}_4 = \alpha_2 \Rightarrow \tilde{c}_5 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{a}_1 = a_1 = 2 \end{array} \right.$$

Le vecteur d'état $x(t)$ est donné par :

$$x = [y \quad D^{0.3}y \quad D^{0.5}y \quad D^{0.7}y \quad D^{0.8}y]^T$$

La dérivée d'ordre non entier du vecteur d'état $x(t)$ est :

$$D^{(\tilde{\alpha})}(x) = [D^{0.3}x_1 \quad D^{0.2}x_2 \quad D^{0.2}x_3 \quad D^{0.1}x_4 \quad D^{1.2}x_5]^T$$

Le modèle d'état correspondant au modèle transfert (I.38) est finalement donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^{(\tilde{\alpha})}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [10 \quad 0 \quad 6 \quad 4 \quad 0]x \end{array} \right.$$

Remarque : Contrairement au cas des systèmes entiers, dont le nombre de variables de leur modèle d'état est égal à la dimension de leur équation caractéristique, le nombre de variable du modèle d'état d'un système non entier est égal à la somme de la dimension du polynôme numérateur et celle du polynôme dénominateur de sa fonction de transfert [29].

IV. Le dérivateur généralisé

Un dérivateur d'ordre α quelconque $D(s)$, appelé dérivateur généralisé, tel que sa grandeur de sortie $s(t)$ est proportionnelle à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de sa grandeur d'entrée $e(t)$ [38,51], soit :

$$s(t) = \tau^\alpha e^{(\alpha)}(t) = \tau^\alpha D^\alpha e(t) \quad (\text{I.43})$$

Où

$D = \frac{d}{dt}$ est l'opérateur de dérivation et α est un nombre entier ou non entier, réel ou complexe. La constante de temps τ est introduite à la puissance α afin de simplifier la forme canonique de la transmittance correspondante. La transformée de Laplace de l'équation (I.43) est donnée par :

$$S(s) = \tau^\alpha s^\alpha E(s) \quad (\text{I.44})$$

D'où on déduit la transmittance :

$$D(s) = (\tau s)^\alpha \quad (\text{I.45})$$

Le dérivateur généralisé $D(s)$ admet la fréquentielle suivante :

- Caractérisation fréquentielle :

La réponse en fréquence correspondant à la transmittance $D(s)$ est de la forme :

$$D(j\omega) = (j\tau\omega)^\alpha \quad (\text{I.46})$$

Soit

$$D(j\omega) = \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha \quad (\text{I.47})$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$, appelée fréquence au gain unité ou fréquence de transition.

Le gain et la phase sont donnés par les relations :

$$\begin{cases} |D(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^\alpha \\ \arg(D(j\omega)) = \alpha \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Le gain croît à raison d'un multiple de 20α dB par décade. La phase, indépendante de la fréquence, est un multiple de $\frac{\pi}{2} \times \alpha$. Prenant par exemple $n = \frac{1}{2}$, le gain croît à raison de 10dB/décade et la phase à $\frac{\pi}{4}$. La figure I.2 illustre le diagramme de Bode des dérivateurs généralisés d'ordre 0.5 et -0.5.

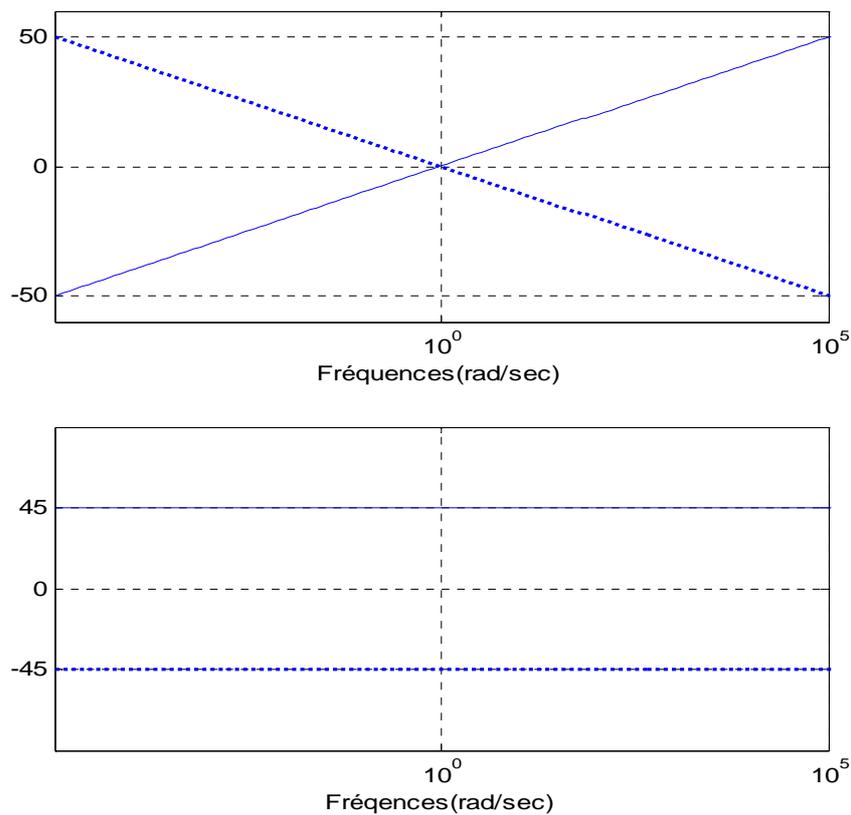


Fig. I.2 Diagramme de Bode d'un dérivateur généralisé pour $\alpha = 0.5$ (trait continu) et $\alpha = -0.5$ (trait discontinu).

IV. 1. Approximation du dérivateur généralisé

Le dérivateur généralisé étant le constituant principal des modèles d'ordre non entier, c'est naturellement que l'approximation des systèmes non entiers passe nécessairement par celle du dérivateur généralisé. Celle-ci consiste alors à approximer, dans une première étape le dérivateur généralisé par un dérivateur borné en fréquences. Puis dans une seconde étape, approximer ce dernier par un modèle rationnel dont les pôles et zéros sont particulièrement distribués dans la même bande de fréquences. Le dérivateur généralisé étant ainsi remplacé par un transfert entier, il suffit alors de le remplacer dans le modèle du système non entier par le modèle entier qui l'approxime.

IV. 1. 1. Dérivateur généralisé borné en fréquence

Le dérivateur généralisé borné en fréquence, noté $D_{\text{borné}}(s)$ représente le dérivateur généralisé s^α sur un intervalle de fréquences limité $[\omega_b \ \omega_h]$ (ω_b est la limite aux basses fréquences et ω_h celle aux hautes fréquences), il est décrit par la fonction de transfert [39]:

$$D_{\text{borné}}(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^\alpha \quad (\text{I.49})$$

Pour que s^α et $D_{\text{borné}}(s)$ aient le même gain (égal à 1 pour le dérivateur entier) à la pulsation $\omega = 1$, lorsque ω_b et ω_h sont symétriques par rapport à $\omega = 1$ il faut choisir D_0 égal à :

$$D_0 = \left(\frac{\omega_b}{\omega_h} \right)^\alpha = \left(\frac{1}{\omega_h} \right)^\alpha = (\omega_b)^\alpha \quad (\text{I.50})$$

Lorsque $\omega_b \rightarrow 0$ et $\omega_h \rightarrow \infty$ on retrouve le dérivateur généralisé, en effet le transfert (I.49) devient :

$$D_{\text{borné}}(s) = (\omega_b)^\alpha \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^\alpha = (\omega_b)^\alpha (s^\alpha) \left(\frac{1}{\omega_h} \right)^\alpha \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^\alpha = s^\alpha \quad (\text{I.51})$$

La figure (I.3) illustre le comportement fréquentiel du dérivateur généralisé (courbe I) et du dérivateur borné en fréquence (courbe II) pour $\alpha > 0$.

Celle-ci montre que le comportement fréquentiel du dérivateur généralisé et du dérivateur borné en fréquence sont très proches au centre de la bande de fréquence d'approximation ; par contre, ils deviennent complètement différents en dehors de cette bande, puisque le dérivateur borné en fréquence devient constant à cause de l'égalité de son numérateur et son dénominateur.

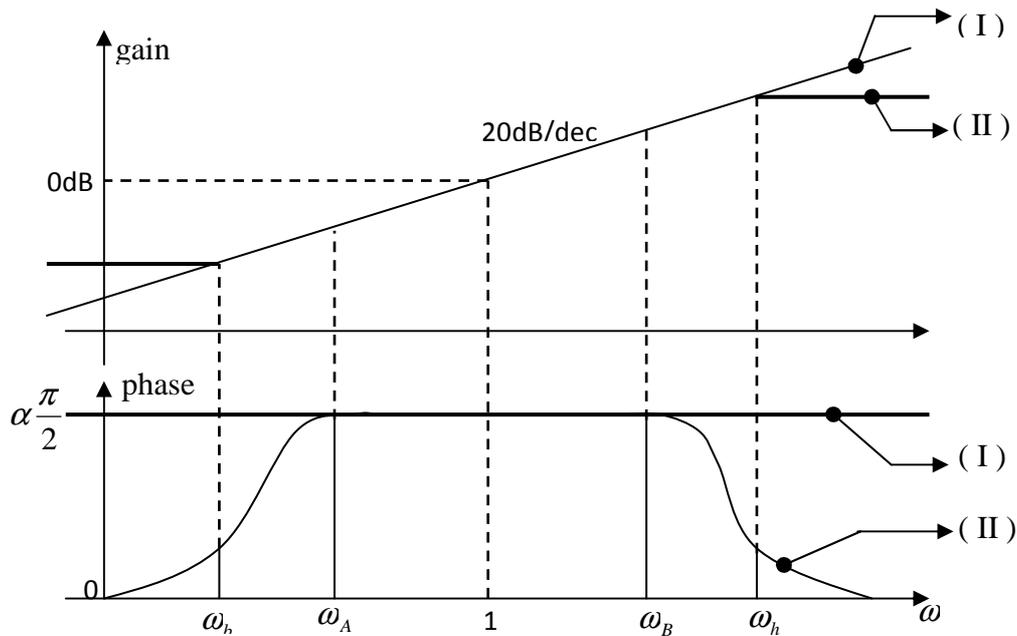


Fig. I.3: Diagramme de gain et de phase du dérivateur généralisé (courbe I) et du dérivateur borné en fréquence (courbe II) ($\alpha > 0$)

V. Approximation du dérivateur borné en fréquences

Après avoir expliqué comment passer du dérivateur généralisé au dérivateur borné en fréquences, on s'intéresse maintenant à l'approximation de ce dernier par la méthode d'Oustaloup.

V.1. Méthode d'approximation d'Oustaloup

Cette méthode d'approximation s'effectue essentiellement en deux étapes, la première à été présentée dans le paragraphe précédent. Elle consiste à réduire la bande d'approximation de l'opérateur de dérivation $\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha$, qui est infinie $[0 \ \infty[$ par un intervalle fini $[\omega_B \ \omega_A]$. Dans ce cas, l'opérateur de dérivation $\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\alpha$ est remplacé par le dérivateur borné en fréquences de dimension infinie donné par l'équation (I.49). Pour l'approximer à l'aide d'un transfert entier de dimension finie, Oustaloup a proposé la procédure suivante [37, 38, 41]: En mettant en série une infinité de filtres passe bande dont les singularités (pôles et zéros) sont correctement choisis et répartis dans la bande de fréquences d'approximation $[\omega_A \ \omega_B]$, on obtient un modèle d'ordre entier équivalent au dérivateur non

entier borné en fréquences. La figure (I.4) illustre ce principe. Une troncature à la fois du côté des basses et des hautes fréquences consiste à limiter sur l'intervalle fréquentiel $[\omega_A \ \omega_B]$, centré géométriquement sur ω_c . En fait la troncature sera réellement effectuée, pour plus de précision, sur l'intervalle de fréquences plus large $[\omega_b \ \omega_h]$ telle que

$$\omega_b \ll \omega_A \quad \text{et} \quad \omega_h \gg \omega_B \quad (\text{I.52})$$

La fonction de transfert non entière (I.49) s'écrit alors :

$$D_{\text{borné}}(s) = D_0 \prod_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{Z_i}}}{1 + \frac{s}{\omega_{P_i}}} \right) \quad (\text{I.53})$$

D_0 est un coefficient tel que le dérivateur borné en fréquence $D_{\text{borné}}(s)$ et le transfert entier équivalent aient le même gain pour $\omega = 1 \text{rd} / s$. $-\omega_{Z_i}$ et $-\omega_{P_i}$ sont respectivement les zéros et les pôles des filtres passe bande.

Comme ce transfert entier ne peut pas être réalisé à cause de sa dimension infinie, on l'approxime par un transfert de dimension finie en utilisant un nombre limité de cellules passe bande, on obtient alors une approximation bornée en fréquences de dimension finie.

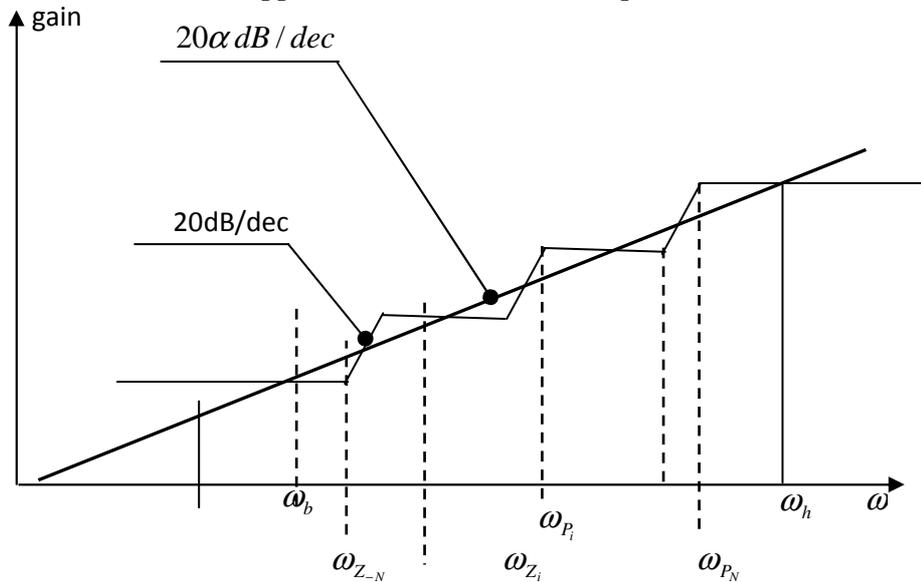


Fig. I.4: Principe de la méthode d'approximation d'Oustaloup

soit :

$$D_{\text{borné}}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (\text{I.54})$$

avec

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^\alpha \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z_i}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p_i}}} \quad (\text{I.55})$$

ω_{z_i} est le zéro de rang i et ω_{p_i} est un pôle de rang i . Ces singularités (paires zéro-pôle) au nombre totale $2N+1$ sont distribuées récursivement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\omega_{p_i}}{\omega_{z_i}} = \mu & , \quad \frac{\omega_{z_{i+1}}}{\omega_{p_i}} > 0 \\ \frac{\omega_{z_{i+1}}}{\omega_{z_i}} = \frac{\omega_{p_{i+1}}}{\omega_{p_i}} = \mu \eta > 1 \end{cases} \quad (\text{I.56})$$

Les rapports μ et η qui impliquent un rapport constant $\mu\eta$ entre deux zéros ou deux pôles sont appelés « facteurs récursifs ».

L'algorithme suivant résume les opérations à effectuer afin de réaliser l'approximation du dérivateur généralisé borné en fréquences en utilisant cette méthode d'Oustaloup [1]:

1- Pour ω_c et α donnés, calculer les fréquences ω_A , ω_B , ω_b et ω_h suivant la taille $\frac{\omega_B}{\omega_A}$, en décade, de l'intervalle d'approximation exact $[\omega_A, \omega_B]$ centré géométriquement en ω_c sur l'échelle logarithmique, soit :

$$\begin{cases} \omega_c^2 = \omega_A \omega_B = \omega_A^2 \frac{\omega_B}{\omega_A} \\ \omega_c^2 = \omega_A \omega_B = \omega_B^2 / \frac{\omega_B}{\omega_A} \end{cases} \quad (\text{I.57})$$

d'où

$$\begin{cases} \omega_A = \frac{\omega_c}{(\omega_B / \omega_A)^{1/2}} \\ \omega_B = \omega_c (\omega_B / \omega_A)^{1/2} \end{cases} \quad (\text{I.58})$$

Compte tenu des conditions sur ω_b et ω_h (relation (I.52)), ces fréquences se déterminent généralement par :

$$\omega_b = \omega_A / 10 \quad \text{et} \quad \omega_h = 10\omega_B$$

2- Fixer a priori la valeur du produit $\mu\eta$, Oustaloup propose de la fixer initialement à 5, pour calculer le nombre total des fréquences transitionnelles soit :

$$\begin{cases} (\mu\eta)_{initial} = 5 \\ 2N + 1 = \text{arrondi} \left[\frac{\log(\omega_h / \omega_b)}{\log((\alpha\eta)_{initial})} + 0.5 \right] \end{cases} \quad (\text{I.59})$$

3- Calculer les fréquences transitionnelles :

$$\begin{cases} \omega_{Z_i} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{i+N+\frac{1}{2}}{2N+1}} \omega_b \\ \omega_{P_i} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{i+N+\frac{1}{2}}{2N+1}} \omega_b \end{cases} \quad -N \leq i \leq N \quad (\text{I.60})$$

4- Calculer D_0 :

$$D_0 = \frac{\omega_b}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h}$$

5- Disposant des zéros, des pôles, de D_0 et de N ; construire l'approximation d'Oustaloup donnée par la relation (I.55), soit :

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{Z_i}}}{1 + \frac{s}{\omega_{P_i}}}$$

La méthode d'approximation d'Oustaloup du dérivateur non entier est la plus utilisée actuellement pour la simulation, la réalisation et l'analyse des caractéristiques dynamiques des systèmes non entiers. C'est cette méthode qui est utilisée dans ce qui suit pour développer la méthode d'approximations des systèmes non entiers généralisée dans l'espace d'état [3].

V.2. Approximation des systèmes non entiers en représentation d'état

Le principe de la méthode est basé sur le schéma de la figure (I.5) dans lequel l'intégrateur non entier $I^{(\alpha)}(x)$ est remplacé par son approximation entière. L'objectif est de développer un modèle d'état d'ordre entier qui approxime le modèle d'état d'ordre non entier (I.61), dont les conditions initiales sont nulles [29] :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}(x) = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

avec

$$D^{(\alpha)}(x) = [D^{\alpha_1}x_1 \dots D^{\alpha_n}x_n]^T$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^q, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}, D \in \mathbb{R}^{q \times 1}.$$

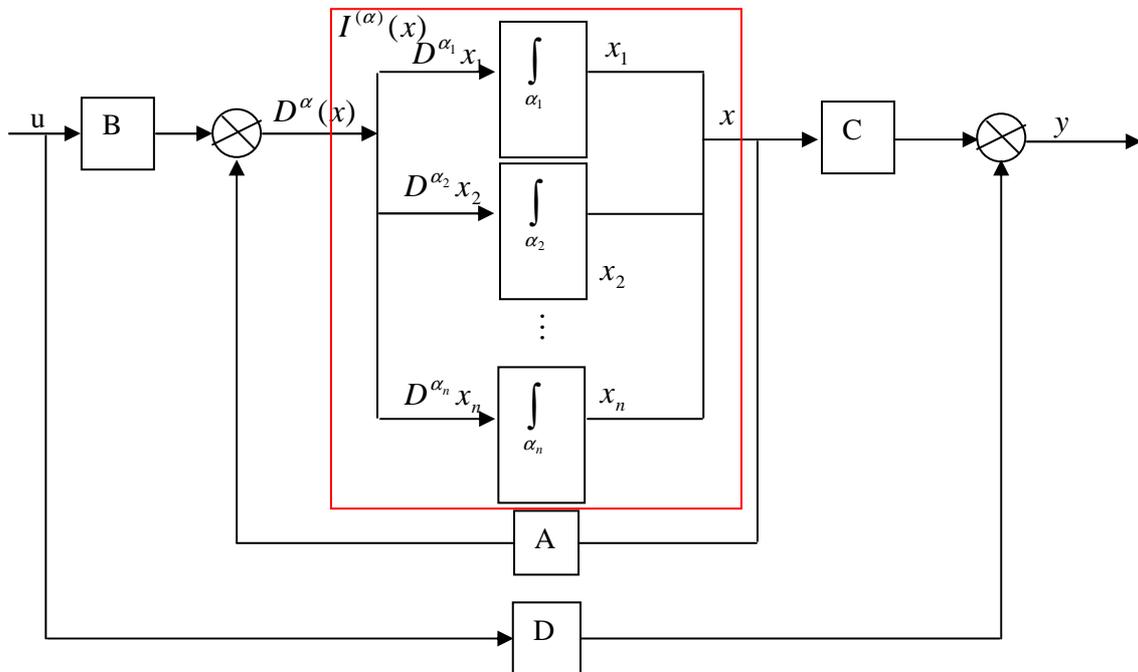


Fig. I.5: principe de l'approximation des systèmes non entiers en représentation d'état

L'opérateur de dérivation d'ordre non entier s^α est d'abord approximé par un transfert rationnel $D_\alpha(s)$ de dimension finie dont les pôles et zéros sont récursivement distribués dans la bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$. $D_\alpha(s)$, de dimension $(2N+1)$, est juste propre et caractérisé par un gain constant en dehors de la bande de validité de l'approximation.

Afin de l'utiliser pour approximer le modèle d'état de (I.61), on lui associe un modèle d'état figure (I.6) de la forme :

$$D_\alpha(s) : \begin{cases} \dot{z}_\alpha = A_\alpha z_\alpha + B_\alpha f & z_\alpha(0) = 0 \\ D^\alpha f \approx C_\alpha z_\alpha + D_\alpha f \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

$z_\alpha(0) = 0$ puisque le modèle d'état (I.62) est déduit à partir du modèle transfert de $D_\alpha(s)$.

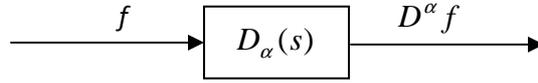


Fig. I.6: modèle transfert de $D_\alpha(s)$

L'entrée du modèle (I.62) est la fonction à dériver $f(t)$ et la sortie, l'approximation de sa dérivée à l'ordre α . $z_\alpha(t)$ est un vecteur d'état de dimension $(2N+1)$. Le coefficient D_α ne dépend pas du nombre de cellules utilisées pour l'approximation, mais dépend uniquement des bornes de la bande de fréquences de validité de l'approximation et de l'ordre non entier α . Les matrices A_α , B_α et C_α sont de dimension :

$$A_\alpha \in \mathbb{R}^{(2N+1) \times (2N+1)}, \quad B_\alpha \in \mathbb{R}^{(2N+1) \times 1} \quad \text{et} \quad C_\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times (2N+1)}.$$

La dérivée de chaque variable d'état x_i du modèle non entier (I.61) peut alors être approximée en utilisant le modèle d'état (I.62) qui s'écrit dans ce cas

$$D_{\alpha i}(s) : \begin{cases} \dot{z}_{\alpha i} = A_\alpha z_{\alpha i} + B_\alpha x_i & z_{\alpha i}(0) = 0 \\ D^{\alpha i} x_i \approx C_{\alpha i} z_{\alpha i} + D_{\alpha i} x_i & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (\text{I.63})$$

L'approximation de toutes les variables d'état du modèle non entier (I.61) peut être réalisée en mettant en parallèle n modèles du type (I.62). Le modèle d'état global correspondant à cette mise en parallèle est alors donné par :

$$D_{(\alpha)}(s) : \begin{cases} \dot{Z} = A_d Z + B_d x & Z(0) = 0 \\ D^{(\alpha)}(x) \approx C_d Z + D_d x \end{cases} \quad (\text{I.64})$$

Avec

$$Z = \begin{bmatrix} z_{\alpha_1}^T & z_{\alpha_2}^T & \dots & z_{\alpha_n}^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{I.65})$$

$A_d \in \mathbb{R}^{(2N+1)n \times (2N+1)n}$, $B_d \in \mathbb{R}^{(2N+1)n \times n}$, $C_d \in \mathbb{R}^{n \times (2N+1)n}$, $D_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices diagonales par bloc données par :

$$A_d = \begin{bmatrix} [A_{\alpha_1}] & & & \\ & [A_{\alpha_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [A_{\alpha_n}] \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} [B_{\alpha_1}] & & & \\ & [B_{\alpha_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [B_{\alpha_n}] \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} [C_{\alpha_1}] & & & \\ & [C_{\alpha_2}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [C_{\alpha_n}] \end{bmatrix}, \quad D_d = \begin{bmatrix} D_{\alpha_1} & & & \\ & D_{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_{\alpha_n} \end{bmatrix}$$

En égalisant l'équation de sortie du modèle (I.64), qui approxime la dérivée non entière du vecteur d'état $x(t)$, et l'équation dynamique du modèle non entier (I.61), on obtient

$$Ax + Bu \approx C_d Z + D_d x \quad (\text{I.66})$$

Le vecteur d'état x est alors donné par la relation

$$x \approx -(D_d - A)^{-1} C_d Z + (D_d - A)^{-1} Bu \quad (\text{I.67})$$

En substituant ensuite la relation (I.67) respectivement dans l'équation dynamique du modèle (I.64) et l'équation de sortie de modèle (I.61) on abouti au modèle entier qui approxime le modèle non entier (I.61) donné par

$$\begin{cases} \dot{Z} = [A_d - B_d (D_d - A)^{-1} C_d] Z + [B_d (D_d - A)^{-1} B] u \\ y = [C (D_d - A)^{-1} C_d]^+ Z + [C (D_d - A)^{-1} B + D] u \end{cases} \quad (\text{I.68})$$

Le modèle d'état (1.68) dépend ainsi des matrices (A , B , C et D) du modèle non entier (I.61) et des matrices (A_d , B_d , C_d et D_d) des différents modèles d'état qui approximent les opérateurs de dérivation d'ordre non entier. Il faut noter que ce modèle est juste propre ($[C(D_d - A)^{-1}B + D] \neq 0$) même lorsque le modèle non entier (I.61) est strictement propre. Il faut noter également que ce modèle nécessite l'inversion de la matrice $(D_d - A)$ et que la dimension de la matrice $[A_d - B_d(D_d - A)^{-1}C_d]$ est très grande $((2N + 1).n \times (2N + 1).n)$.

Exemple

Soit le système d'ordre non entier monovariante dont le modèle d'état est donné par :

$$\begin{cases} D^{(1.2175)}(x) = [-330]x + [10^4]u \\ y = [1]x \end{cases} \quad (\text{I.69})$$

Le modèle de transfert correspondant est donné par :

$$G(s) = \frac{10^4}{s^{1.2175} + 330} \quad (\text{I.70})$$

On utilise les deux méthodes d'approximation des systèmes non entiers précédentes, celle d'Oustaloup (représentation transfert) et l'approximation des systèmes non entiers en représentation d'état utilisant l'opérateur de dérivation ;

la bande de fréquences choisie est : $[10^{-5} , 10^5]$ et $N = 20$.

la figure (I.7) montre que le modèle entier approxime correctement le modèle non entier (1.70) dans la bande de fréquences choisie, comparé a son tracé exacte.

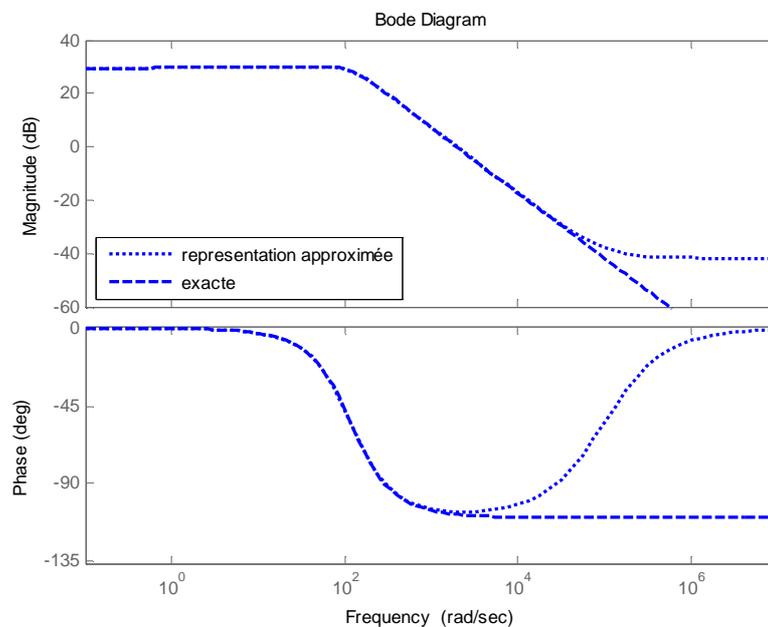


Fig. I.7: Diagramme de Bode des différents modèles d'approximation

Conclusion

On a exposé dans ce chapitre quelques généralités sur les systèmes d'ordre non entier, et les différentes définitions de la dérivation et l'intégration non entière.

La lourdeur des expressions analytiques des systèmes non entiers, conduit à une simulation très difficile. C'est pourquoi leur approximation par des modèles entiers est nécessaire.

L'analyse et la simulation des systèmes non entiers nécessitent d'approximer l'opérateur de dérivation/intégration (dérivateur généralisé) par un modèle d'ordre entier. On a étudié dans la dernière partie de ce chapitre deux méthodes d'approximations des systèmes non entiers. La première méthode est l'approximation d'Oustaloup qui utilise la représentation transfert ; elle est la plus utilisée actuellement pour la simulation, la réalisation et l'analyse des caractéristiques dynamiques des systèmes non entiers.

La deuxième méthode développe la méthode d'Oustaloup dans l'espace d'état, on utilise l'opérateur de dérivation, son principe est de remplacer l'intégrateur non entier par son approximation entière. Ces deux méthodes mènent au même modèle.

Il s'agit pour nous d'utiliser ces méthodes d'approximations dans les chapitres suivants pour la synthèse des régulateurs non entiers à l'aide de la méthode H_∞ .

Chapitre II

Synthèse H_∞ par l'approche standard

Introduction

De nombreux processus sont caractérisés par : des variations rapides des paramètres, faible amortissement, instabilité, non linéarité...etc. Le contrôle de tels systèmes est aujourd'hui un problème donnant lieu à de nombreuses études. La démarche habituelle utilise des correcteurs classiques type (PI, PID...) [16,50]. L'introduction de ces correcteurs permet de résoudre certains problèmes de type: annuler l'erreur statique, atténuer les effets des modes résonants, rendre le système instable stable. Cependant, si le procédé à commander présente des dynamiques non modélisées ou de fortes variations des paramètres, les structures de contrôle à base de correcteurs classiques (PI, PID..) n'assurent plus la robustesse. Ainsi, cette approche n'offre aucune garantie, ni sur les performances, ni sur la robustesse.

Les techniques de synthèse dites robustes, notamment du type H_∞ , sont une voie particulièrement efficace pour obtenir un correcteur dynamique répondant à un cahier des charges contenant des spécificités de robustesse vis-à-vis des bruits de mesure, des perturbations extérieures et des variations des paramètres.

Initiée par Zames au début des années 80 [23, 27, 44] et développée (en particulier) par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis, la synthèse H_∞ a connu des applications multiples dans des domaines très variés [1, 44, 22]. Zames a considéré l'optimisation de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité d'un système bouclé monovarié. Le travail est fait avec quelques questions de base de la théorie classique de commande et a eu immédiatement beaucoup d'attention. Il a ensuite été étendu à beaucoup de problèmes généraux, puisque il est reconnu que l'approche H_∞ permet la quantification avec la recherche de la robustesse plus directe que les méthodes d'optimisation classiques. Le nom H_∞ représente un nombre dans

l'espace introduit par le mathématicien Hardy. Il est l'espace de fonctions dans le plan complexe qui sont analytiques et bornées par la moitié droite du plan [27].

Dans ce chapitre, on s'intéresse exclusivement à la mise en œuvre des techniques H_∞ , pour synthétiser un correcteur H_∞ pour la commande d'un procédé d'ordre entier linéaire monovarié. On présente tout d'abord la forme standard utilisée par l'approche H_∞ , puis on expose le problème H_∞ correspondant, ainsi que sa résolution par la méthode de Doyle qui introduit les équations de Riccati. Cette méthode est la mieux adaptée numériquement à la résolution de problèmes de grande taille. On termine ce chapitre par un exemple académique qui illustre le principe de la méthode utilisée.

I. Principe de la synthèse H_∞

Le principe de synthèse H_∞ utilise le schéma de commande de la figure (II.1) où les signaux d'entrée $r(s)$, $b(s)$, $v(s)$ sont respectivement la consigne, la perturbation et le bruit de mesure. Les signaux de sortie sont: $y(s)$ la sortie du système bouclé, $u(s)$ la grandeur de commande et $\varepsilon(s)$ l'erreur de suivi de référence, définie par $\varepsilon(s) = r(s) - y(s)$.

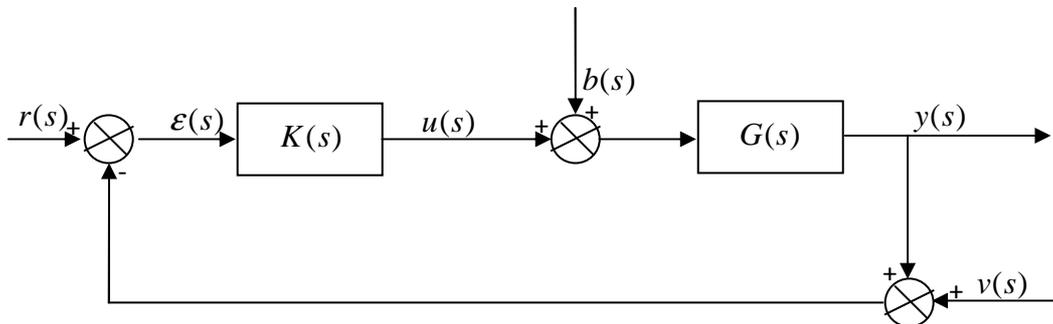


Fig. II.1 : schéma de principe de la synthèse H_∞ .

Le contrôleur $K(s)$ est alors calculé pour imposer à la boucle fermée les spécifications suivantes :

- ✓ Suivi de trajectoire de référence: l'objectif est de rendre l'erreur statique nulle et d'améliorer éventuellement le régime transitoire du système en boucle fermée.
- ✓ Rejet/atténuation de signaux de perturbation: il s'agit de minimiser l'influence du signal de perturbation $b(s)$ sur le signal d'erreur $\varepsilon(s)$ et sur la commande $u(s)$.

- ✓ Atténuation des bruits de mesure: il s'agit de minimiser l'influence des signaux de bruit $v(s)$ sur le signal de commande $u(s)$ et sur le signal de sortie $y(s)$.
- ✓ Commande modérée: on désire limiter la puissance de commande nécessaire au suivi de référence.

Une autre spécification qui est absolument nécessaire à prendre en compte est que la stabilité du système bouclé doit être assurée.

I.1 Formalisation du problème de synthèse H_∞

La commande H_∞ utilise des concepts fréquentiels pour le calcul d'un correcteur. Elle permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, de marge de stabilité et de modelage de plusieurs transferts [44], reliant les différentes entrées/sorties existantes dans le système à commander.

Même si cette technique peut être appliquée aux systèmes multivariables [26], on l'illustre dans ce qui suit, dans un système linéaire monovarié basé sur la forme standard. Le problème H_∞ standard (figure. II.3) consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé, ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système augmenté (figure II.2), ce dernier est composé du système lui-même et des filtres de pondération.

L'intérêt principal de la forme standard est avant tout méthodologique. Elle apporte en effet une certaine clarté de formulation en permettant de représenter à la fois le système à contrôler et le cahier des charges associé [18].

I.1.1 Modélisation du système à commander

De manière générale, le système à commander doit être modélisé de sorte à faire apparaître comme grandeurs d'entrées :

$u(s)$ est la commande du système,

$w(s)$ sont les entrées exogènes qui peuvent être les consignes ou les perturbations,

et comme grandeurs de sortie :

$y(s)$ sont les sorties de mesures utilisées pour calculer la loi de commande $u(s)$,

$e(s)$ sont les sorties à contrôler.

Le modèle ainsi obtenu (figure. II.2), noté $P(s)$, est multivariable puisqu'il est constitué de quatre transferts. On l'appelle également le modèle augmenté.

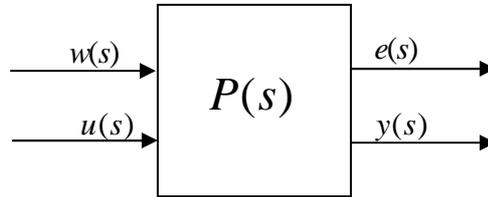


Fig. II.2. Modèle augmenté

Classiquement, on décompose $P(s)$ en quatre transferts de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} e(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{we}(s) & P_{ue}(s) \\ P_{wy}(s) & P_{uy}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

I.1.2 Modèle du système en boucle fermée

On retrouve dans la synthèse H_∞ , le problème de commande classique utilisant les grandeurs mesurées $y(s)$ pour calculer la grandeur de commande $u(s)$. Mais on voit apparaître des transferts supplémentaires entre les grandeurs de consigne $w(s)$ et la grandeur à commander $e(s)$ qui vont permettre de traduire le cahier des charges. L'utilisation d'un tel formalisme peut se faire dans deux cas de figure. Soit dans un problème d'analyse où le contrôleur $K(s) = \frac{u(s)}{y(s)}$ est connu. Cette formulation permet alors (entre autres) de calculer les normes associées. Soit dans un problème de synthèse, dans ce cas le contrôleur $K(s)$ est à déterminer à partir de la donnée de $P(s)$ et du cahier des charges à faire atteindre à la boucle fermée.

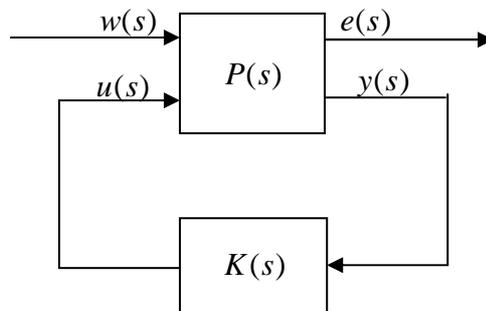


Fig. II.3. Forme standard de la synthèse H_∞ .

Lorsqu'on applique la loi de commande $u(s) = K(s)y(s)$ au système on obtient l'expression suivante du transfert entre les entrées exogènes $w(s)$ et les sorties régulées $e(s)$, qui est appelée Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT) inférieure [18]. Elle est donnée par:

$$e(s) = F_1[P(s), K(s)]w(s) \quad (\text{II.2})$$

où

$$F_1[P(s), K(s)] = P_{we}(s) + P_{ue}(s)K(s)[I - P_{uy}(s)K(s)]^{-1}P_{wy}(s) \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas monovarié, en utilisant le schéma de commande de la figure(II.1) et afin de formaliser ces quatre spécifications par des équations mathématiques à résoudre, il faut calculer les différentes fonctions de transfert qui relient les signaux d'entrée $r(s)$, $b(s)$ et $v(s)$ aux différentes sorties $\varepsilon(s)$, $u(s)$. Celles-ci sont données par [12] :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = T_{BF}(s) \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \\ v(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{r\varepsilon}(s) & T_{b\varepsilon}(s) & T_{v\varepsilon}(s) \\ T_{ru}(s) & T_{bu}(s) & T_{vu}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \\ v(s) \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Où

$$T_{r\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{II.5})$$

$T_{r\varepsilon}(s)$ est souvent notée $S(s)$, on l'appelle la fonction de sensibilité.

$$T_{ry}(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{II.6})$$

$T_{ry}(s)$ notée $T(s)$, appelée fonction de sensibilité complémentaire car

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (\text{II.7})$$

Les autres fonctions de transfert sont données par

$$T_{b\varepsilon}(s) = G(s)S(s) \quad (\text{II.8})$$

$$T_{ru}(s) = K(s)S(s) \quad (\text{II.9})$$

$$T_{vu}(s) = -K(s)S(s) \quad (\text{II.10})$$

$$T_{v\varepsilon}(s) = T(s) \quad (\text{II.11})$$

Pour atteindre les spécifications du cahier des charges, dont l'objectif est de minimiser l'influence des grandeurs $r(s)$, $b(s)$ et $v(s)$ sur les grandeurs d'erreur $\varepsilon(s)$ et de commande $u(s)$, on doit résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{K(s)} \|T_{BF}(s)\|_\infty \quad (\text{II.12})$$

Où $\|\cdot\|$ représente la norme H_∞ .

Rappel sur la norme H_∞ : Pour un transfert asymptotiquement stable représenté par la fonction de transfert $G(s)$, la norme H_∞ est donnée par[9] :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathfrak{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{u(s) \neq 0 \in L_2} \frac{\|y(s)\|_2}{\|u(s)\|_2} \quad (\text{II.13})$$

$\bar{\sigma}(G(j\omega))$ est la valeur singulière de $G(j\omega)$, elle constitue une généralisation aux systèmes multivariables de la notion de gain. Les détails de calcul des valeurs singulières ainsi que de la norme H_2 sont donnés en annexe B.

$\|G(s)\|_\infty$ est la valeur la plus élevée du gain du système sur l'ensemble des pulsations. Pour un système monovarié, c'est la valeur la plus élevée de module $|G(j\omega)|$.

II. Synthèse H_∞ par approche standard

La synthèse H_∞ par approche standard constitue une méthode de construction de correcteurs utilisant des outils fréquentiels [1] tel que les valeurs singulières et la norme H_∞ .

De ce qui précède, le problème H_∞ est en général un problème de stabilisation du système et de rejet des perturbations. On cherche dans le principe à minimiser l'impact d'une perturbation sur le système. On représente pour cela les perturbations par w et l'impact par e . On mesure alors l'impact à travers l'énergie caractérisée par la norme L_2 (Voire Annexe B).

Pour cela, on s'intéresse donc au ratio $\frac{\|e\|_2}{\|w\|_2}$ et afin de palier au pire des cas, on cherche à minimiser la valeur maximale de l'énergie de la sortie sur une entrée d'énergie finie; c'est à dire la norme H_∞ .

Le problème H_∞ dit optimal consiste à synthétiser une loi de commande $u(s) = K(s).y(s)$, parmi l'ensemble des correcteurs $K(s)$ stabilisant le système de manière interne; qui minimise la norme H_∞ du transfert $\|F_l(P, K)\|_\infty$ entre les entrées exogènes et les sorties régulées. Finalement, la formulation de la synthèse H_∞ d'un correcteur peut être énoncée comme suit :

Etant donné $\gamma > 0$, déterminer un correcteur $K(s)$ qui stabilise le système bouclé de la figure (II.3) et assure :

$$\begin{aligned}
& \text{(i) } F_l(P, K) \text{ soit stable} \\
& \text{(ii) } \|F_l(P, K)\|_\infty \leq \gamma
\end{aligned} \tag{II.14}$$

II. 1 Méthode de résolution

La méthode de calcul du correcteur H_∞ standard, proposé par Doyle [18] (plus connue sous l'algorithme de Glover-Doyle), est rappelée ci-après. Cette méthode est basée sur l'approche par équation de Riccati et l'approche par l'Inégalité Matricielle affines (LMI)[52]. Ces deux méthodes reposent sur la forme standard d'état de la matrice d'interconnexion $P(s)$, écrite sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{we} & D_{ue} \\ C_y & D_{wy} & D_{uy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{II.15}$$

Avec $x \in R^n$, $w \in R^{n_w}$, $u \in R^{n_u}$, $e \in R^{n_e}$, $y \in R^{n_y}$

Tel que : n, n_w, n_u, n_e et n_y sont respectivement les dimensions des vecteurs x, w, u, e et y .

La méthode de résolution du problème H_∞ standard en utilisant les équations de Riccati, également connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle [18,52], est très utilisée puisqu'elle est la mieux adaptée à la résolution numérique du problème de synthèse H_∞ notamment dans le cas des systèmes de grande dimension.

La mise en œuvre de cette méthode nécessite néanmoins la vérification au préalable des quatre hypothèses suivantes :

$$H_1) (A, B_u) \text{ est stabilisable et } (C_y, A) \text{ est détectable.} \tag{II.16}$$

$$H_2) \text{ rang } (D_{eu}) = n_u \text{ et rang } (D_{yw}) = n_y . \tag{II.17}$$

$$H_3) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{ue} \end{bmatrix} = n + n_u. \quad (\text{II.18})$$

$$H_4) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + n_y. \quad (\text{II.19})$$

L'hypothèse H_1 est classique puisqu'elle doit être vérifiée dans toutes les méthodes de synthèse utilisant la représentation d'état. Cela garantit l'existence d'une loi de commande qui stabilise le système en boucle fermé.

L'hypothèse H_2 est une condition suffisante pour assurer que la loi de commande soit propre. Remarquons que le fait d'avoir D_{ue} de rang plein signifie que toutes les commandes interviennent dans les variables régulées e . Par ailleurs, cette hypothèse suppose implicitement que $n_e \geq n_u$ et $n_w \geq n_y$.

L'hypothèse H_3 entraîne que le transfert $P_{ue}(s)$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire (la réciproque n'est pas vraie). Il en est de même pour l'hypothèse H_4 et le transfert $P_{wy}(s)$.

Ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. De plus, pour obtenir des expressions plus simples, on introduit les conditions supplémentaires suivantes :

$$\begin{cases} D_{we} = 0 & D_{ue}^T (C_e \quad D_{ue}) = (0 \quad I_{n_u}) \\ D_{iy} = 0 & \begin{pmatrix} B_w \\ D_{wy} \end{pmatrix} D_{wy}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Sous toutes ces conditions, il existe un correcteur $K(s)$ solution du problème H_∞ standard si et seulement si :

- 1- la matrice hamiltonienne $H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2}B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe une matrice symétrique X_∞ définie positive solution de l'équation de Riccati suivante :

$$X_\infty = Ric(H_\infty) \quad (II.21)$$

- 2- La matrice hamiltonienne $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ telle que

$$Y_\infty = Ric(J_\infty) \quad (II.22)$$

- 3- $\rho(X_\infty Y_\infty) \leq \gamma^2$ où ρ désigne le module de la plus grande valeur propre.

L'ensemble des correcteurs $K(s)$ répondant au problème est donné par :

$$K(s) = F(K_a(s), \Phi(s))$$

Où $\Phi(s) \in RH_\infty$ est une matrice de transfert de dimensions $n_u \times n_y$ arbitraire vérifiant $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$, et $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{n_u} \\ -C_y & I_{n_y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} \quad (II.23)$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2}B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C \quad (II.24)$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (II.25)$$

En particulier, le correcteur correspondant à $\Phi(s) \equiv 0$, appelé correcteur central, admet la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

II. 2 Algorithme de calcul

Etant donnée la matrice de fonction de transfert $P(s)$ représentant le système à commander :

Etape 1

Ecrire le modèle du système et mettre le problème sous la forme standard donnée par l'équation (II.15).

Etape 2

Vérifier des hypothèses H_1, H_2, H_3 et H_4 .

Etape 3

- Vérifier que les matrices Hamiltoniennes H_∞ et J_∞ n'ont pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.
- Calculer les matrices X_∞ et Y_∞ solutions des équations II.21 et II.22, respectivement. Puis vérifier qu'elles sont symétriques définies positives.
- Calculer les valeurs propres des matrices X_∞ et Y_∞ , puis vérifier que le module de la plus grande valeur propre du produit des deux matrices ($X_\infty Y_\infty$) est inférieur à γ^2 . (γ étant préalablement choisi).

Etape 4

Le modèle d'état du correcteur central est finalement donné par le modèle (II.26) où les matrices A_∞ et Z_∞ sont respectivement déterminées par les relations II.24 et II.25.

II. 3 Exemple d'application

Considérons le système représenté par la figure (II.4) dans lequel :

Les grandeurs d'entrées $r(s)$, $b(s)$ et $v(s)$ sont respectivement la référence, la perturbation et le bruit de mesure. Les grandeurs de sorties sont $z(s)$ la sortie du système à commander et $u(s)$ la commande, avec $G_0 = 4$ et $T = \frac{1}{2}$.

Le problème consiste à calculer le contrôleur $K(s)$ qui permet d'atteindre en boucle fermée les objectifs suivants :

- le système en boucle fermée soit stable
- suivi de consigne avec erreur statique inférieure à 0.1%
- erreur statique due à b inférieure à 1%.
- Commande modérée (amplitude de la commande raisonnable)
- Atténuation des bruits $v(s)$ sur la sortie.

Pour faire apparaître la forme standard, on considère comme vecteur d'entrée $w = \begin{pmatrix} b & v \end{pmatrix}^T$, et comme vecteur de sortie $e = \begin{pmatrix} z & u \end{pmatrix}^T$.

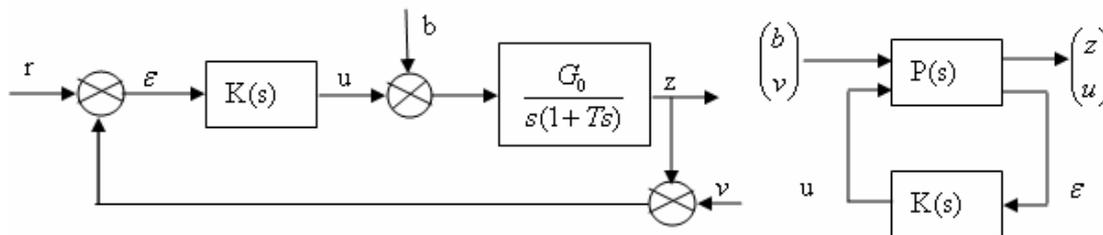


Fig. II.4. Exemple d'application, et forme standard correspondante

Étape 1 : dans la première étape, le problème est mis sous la forme standard. La représentation de la matrice $P(s)$ du problème standard correspondant s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ e = C_e x + D_{we} w + D_{ue} u \\ y = C_y x + D_{wy} w + D_{uy} u \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_y = [1 \ 0], \quad (\text{II.28})$$

$$D_{we} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{ue} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_{wy} = [0 \ 1], D_{uy} = 0$$

et $n = 2, n_w = 2, n_u = 1, n_y = 1, n_e = 1$.

Etape 2 : vérification des hypothèses de l'algorithme de Glover-Doyle.

1) La paire (A, B_u) est stabilisable et la paire (C_y, A) est détectable.

$$(B_u \ AB_u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ est de rang 2, donc le système est commandable.}$$

$$\begin{pmatrix} C_y \\ C_y A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est de rang 2, donc le système est détectable}$$

2) $\text{rang}(D_{ue}) = n_u$ et $\text{rang}(D_{wy}) = n_y$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 = n_u \text{ et } \text{rang}(0 \ 1) = 1 = n_y.$$

$$3) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{pmatrix} -j\omega & 1 & 0 \\ 1 & -2 - j\omega & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = n + n_u.$$

$$4) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{pmatrix} -j\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - j\omega & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = n + n_y.$$

Les quatre conditions sont donc vérifiées, l'algorithme peut alors être appliqué.

Etape 3 : testons l'existence d'un correcteur $K(s)$

1- la matrice hamiltonienne $H_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \gamma^{-2} - 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ne doit pas avoir de valeur propre sur l'axe imaginaire.

2- la matrice hamiltonienne $J_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma^{-2} - 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne doit pas avoir de valeur sur l'axe imaginaire.

Pour que les matrices H_∞ et J_∞ n'aient pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire il faut que : $\gamma > 1$

Les équations de Riccati s'écrivent :

$$X_\infty \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X_\infty + X_\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - \gamma^{-2} \end{bmatrix} X_\infty + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

$$Y_\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} Y_\infty + Y_\infty \begin{bmatrix} 1 - \gamma^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Y_\infty + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

La résolution des équations de Riccati sous MATLAB nous donne le correcteur suivant :

$$K(s) = \frac{102.7s + 207.7}{s^2 + 69.92s + 181.3} \quad (\text{II.31})$$

Avec $\gamma = 1.5273$

Pour résoudre analytiquement les équations de Riccati, on remplace la valeur de $\gamma = 1.5273$ dans les équations (II.29) et (II.30) on trouve

$$X_\infty = \begin{bmatrix} 3.9694 & 1.7504 \\ 1.7504 & 0.8203 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y_\infty = \begin{bmatrix} 0.8203 & 0.1098 \\ 0.1098 & 0.2490 \end{bmatrix}$$

Les matrices A_∞ et Z_∞ sont respectivement déterminées par les relations II.24 et II.25 sont :

$$A_\infty = \begin{bmatrix} 1.1734 & 1 \\ -0.6040 & -2.4686 \end{bmatrix}$$

$$Z_\infty = \begin{bmatrix} -1.2940 & -1.0198 \\ -0.5826 & 0.7456 \end{bmatrix}$$

La représentation d'état du correcteur ainsi calculé est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 1.1734 & 1 \\ -0.6040 & -2.4686 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 1.1734 \\ 0.3960 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [-1.7504 \quad -0.8203] x_c(t) \end{cases}$$

Pour vérifier si le contrôleur $K(s)$ ainsi calculé atteint les objectifs du cahier des charges, on a simulé sous MATLAB Simulink le schéma de commande de la figure II.4, dans laquelle on a fixé :

- La référence $r(t)$ sous forme d'un échelon d'amplitude 100
- Le signal de bruit $v(t)$, d'amplitude 0.1.
- Le signal de perturbation $b(t)$ d'amplitude (1.8) appliqué à l'instant ($t = 5s$)

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures (II.5 à II.11)

La figure II.5 illustre le lieu de Nyquist de la boucle fermée corrigée, on remarque que le système en boucle fermée est stable.

La figure II.6 représente la réponse indicielle de la boucle fermée corrigée et de la boucle non corrigée. On constate que le dépassement est réduit de 23% et que le temps de réponse est également amélioré puisqu'il ne vaut que $t_{r_{bf}} = 1.58 s$ alors que celui du système non corrigé vaut $t_{r_{\square}} = 3.87 s$.

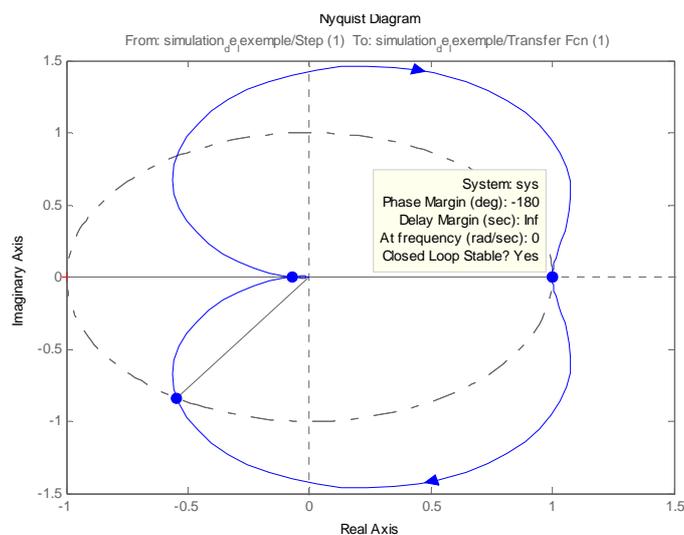


Fig. II.5.: lieu de Nyquist de la boucle fermée corrigée

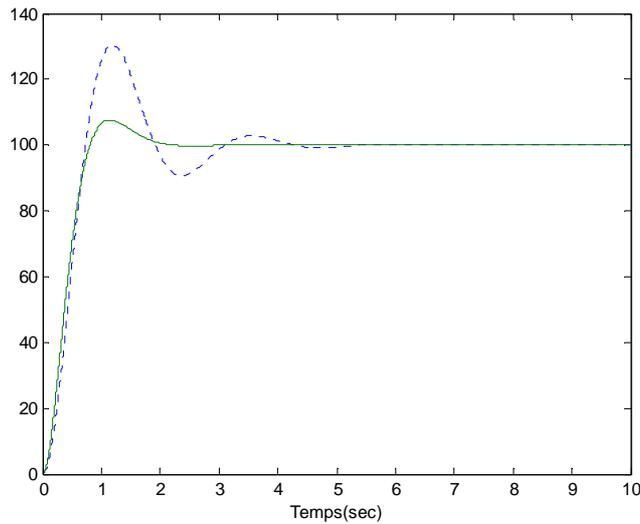


Fig. II.6 : réponse indicielle de la boucle corrigée (trait continu) et de la boucle non corrigée (trait discontinu).

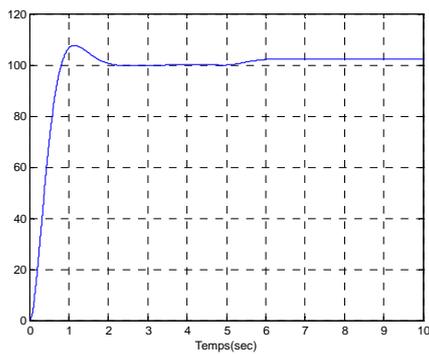


Fig. II.7. Réponses indicielles, application d'une perturbation à $t = 5$ s.

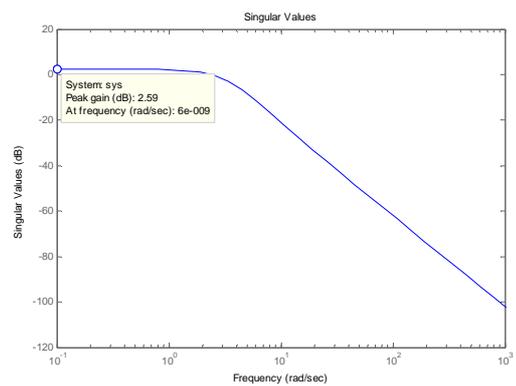


Fig. II.8. Module du transfert $T_{bE}(s)$

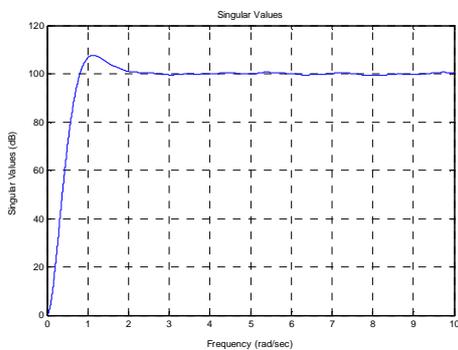


Fig. II.9. Réponses indicielles application d'un bruit blanc

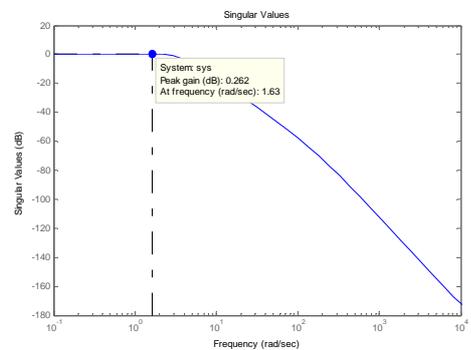


Fig. II.10. Module du transfert $T_{vE}(s)$

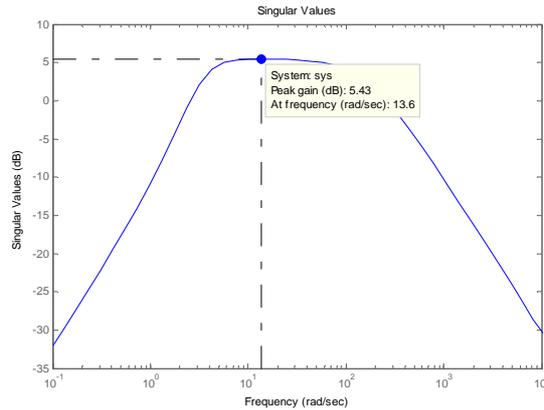


Fig. II.11. Module du transfert $T_{ru}(s)$ et $T_{vu}(s)$

La figure (II.7) représente la réponse indicielle de la boucle fermée corrigée, perturbée à l'instant $t = 5s$. On constate que l'erreur statique due à cette perturbation est égale à 0.024, elle est supérieure à celle demandée dans le cahier des charges. La figure (II.8) traduit cet effet puisque le module du transfert $t_{be}(s)$ qui relie la perturbation à l'erreur est égal à 2.59 dB qui est supérieur à γ .

La figure (II.9) nous donne la réponse indicielle de la boucle fermée corrigée, avec l'application d'un bruit blanc. On remarque que la commande appliquée atténue l'effet des bruits de mesure sur la sortie. La figure (II.10) reflète cette constatation, le module du transfert $t_{v\epsilon}(s)$ est égal à 0.262 dB, inférieur à γ .

La figure (II.11) représente le module des transferts ($t_{vu}(s) = KS(s)$) qui relie la référence $r(s)$ à la commande $u(s)$. $|t_{ru}| = 5.43dB$ qui est supérieur à γ , dans ce cas la loi de commande calculée n'évite pas l'influence du bruit de mesure sur la commande.

Remarque : la synthèse H_∞ d'un correcteur par l'approche standard, doit vérifier que tous les modules des transferts en boucle fermée (II.4) doivent être majorés par la même valeur γ . Cette condition étant trop rigide, il arrive que seuls certains transferts vérifient cette condition, cela est illustré dans l'exemple numérique du paragraphe II.3 où les modules des transferts $T_{vu}(s)$ et $T_{be}(s)$ sont supérieurs à la valeur 1.52 de γ considéré. Pour résoudre ce problème, on ajoute plusieurs gabarits fréquentiels permettant de modéliser indépendamment les uns des autres les transferts de la matrice $T_{BF}(s)$ de l'équation (II.12), rendant ainsi la

condition de minimisation moins rigide, puisque les transferts de $T_{BF}(s)$ sont majorés par des coefficients différents. Cela fait l'objet du problème H_∞ pondéré. le choix de ces fonctions de pondération et la résolution de ce problème sera l'objet du prochain chapitre.

Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre le principe de base de problème H_∞ , celui-ci consiste à imposer de mettre le système augmenté sous une forme dite «standard». Cette dernière nous donne une démarche très simple à suivre, pour appliquer la méthode basée sur les équations de Riccati, qui n'est possible que sous quatre hypothèses, qui doivent être impérativement vérifiées.

La synthèse H_∞ par approche standard constitue une méthode de construction de correcteurs utilisant des outils fréquentiels. Le système en boucle fermée, décrit également par des incertitudes, doit satisfaire des exigences formulées en termes d'objectifs de commande. Celles-ci sont alors réalisées grâce à l'étude des marges de stabilités et au modelage des transferts entrée/sortie du modèle de synthèse de façon à ce que le système commandé possède de bonnes propriétés de stabilité.

Le modelage de ces transferts se fait en ajoutant des filtres de pondérations aux différents points du schéma de synthèse. Ceci fera l'objet du prochain chapitre où nous introduisons dans une première étape des fonctions de pondération d'ordre entier, puis dans une seconde étape nous nous intéresseront à des fonctions de pondération d'ordre non entier.

Chapitre III

Synthèse de lois de commande par l'approche H_∞ pondérée

Introduction

On rappelle dans la première partie de ce chapitre, les différents transferts en boucle fermée (fonction de sensibilité, fonction de sensibilité complémentaire,...). Puis on expose la synthèse H_∞ pondérée qui est basée sur l'introduction des fonctions de pondérations, placées aux différents points du schéma d'asservissement. Ces fonctions de pondération traduisent le cahier des charges sous forme de gabarits fréquentiels, que doivent satisfaire les transferts en boucle fermée. Il apparait donc un lien direct entre le choix des pondérations et les spécifications du cahier des charges, ils ont une interprétation physique qui est liée au comportement désiré de la boucle fermée.

Plusieurs types de fonctions de pondération sont alors proposées, en premier point, on choisit des fonctions de pondération entières dans le même esprit que [19], dans le but d'exprimer la traduction des spécifications du cahier des charges. Dans la deuxième étape et pour atteindre le plus possible les objectifs du cahier des charges, on propose de rendre ces fonctions de pondération non entières. Nous illustrons ce problème de synthèse H_∞ pondérée sur un système de premier ordre.

I. Transferts en boucle fermée et synthèse du problème H_∞ standard

Considérons la boucle fermée représentée par la figure (III.1), où $G(s)$ représente le modèle du système à asservir et $K(s)$ le correcteur à déterminer [18]. La sortie à contrôler est $y(t)$, l'entrée de référence est $r(t)$ et le signal $b(t)$ est la perturbation.

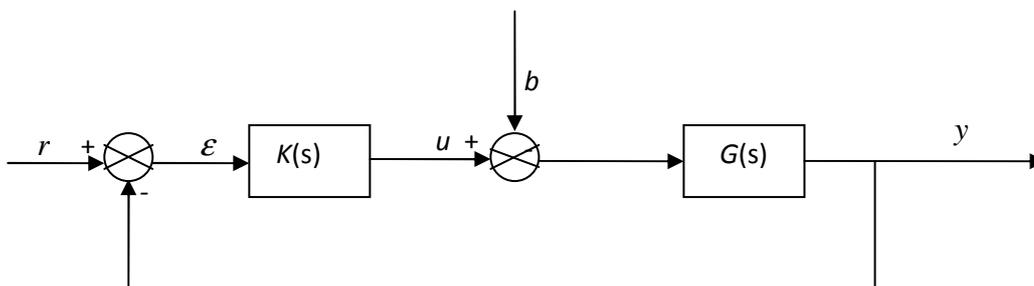


Fig.III.1: Structure de commande en boucle fermée

Rappelons que, dans le cas monovarié, la boucle fermée est complètement définie par quatre fonctions de transfert que l'on désigne respectivement par $S(s)$, $T(s)$, $K(s)S(s)$, et $G(s)S(s)$. Ces transferts s'expriment en fonction de la fonction de transfert du régulateur $K(s)$ et la fonction de transfert du système à commander $G(s)$ de la façon suivante :

$$S(s) = \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{III.1})$$

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{III.2})$$

$$K(s)S(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{III.3})$$

$$G(s)S(s) = \frac{\varepsilon(s)}{b(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{III.4})$$

On constate que $S(s)+T(s)=1$, où $S(s)$ est communément appelée fonction de sensibilité, car elle caractérise l'erreur d'asservissement en fonction de l'entrée de référence. Cette fonction de sensibilité est importante car elle est significative de la réponse de la boucle fermée mais aussi de la marge de module de $|1 + GK|$ sur tout le domaine fréquentiel (la marge de module est donnée en annexe [B])[10, 27]. $T(s)$ est appelée fonction de sensibilité complémentaire car $S(s)+T(s) = 1$.

La synthèse H_∞ standard permet de résoudre le problème de commande qui tient compte de deux signaux d'entrée, appliqués à deux endroits différents de l'asservissement, et surveille l'évolution de l'erreur, mais aussi de la commande ; on veut que l'erreur reste faible, mais au pris d'une commande raisonnable.

La matrice de transfert entre les signaux d'entrée $r(s)$ et $b(s)$ d'une part, l'erreur d'asservissement $\varepsilon(s)$ et la commande $u(s)$ d'autre part est alors donnée par :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = M(s) \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \end{pmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Avec :

$$M(s) = \begin{pmatrix} S(s) & S(s)G(s) \\ K(s)S(s) & K(s)S(s)G(s) \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

En considérant le cadre standard introduit dans le chapitre II, le problème de synthèse H_∞ consiste à chercher un nombre $\gamma > 0$ et assurant :

$$\|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{III.7})$$

le problème ci-dessus se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires. Toute fois, cette formulation s'avère en pratique très rigide, car elle ne laisse aucun élément de choix à l'utilisateur. Pour contourner cet obstacle, on introduit des pondérations sur les différents signaux. Les étapes qui suivent montrent la démarche à suivre pour contourner cet obstacle.

II. Propriétés asymptotiques des fonctions de transfert

Les propriétés asymptotiques d'une fonction de transfert consistent à déterminer son comportement en basses et en hautes fréquences [19, 49].

Les liens entre la fonction de transfert en boucle ouverte $G(s)K(s)$ et les fonctions de transfert en boucle fermée ($S(s)$, $T(s)$, $K(s)S(s)$, et $G(s)S(s)$) sont résumés dans la figure (III.2). En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte dépend de façon linéaire du correcteur $K(s)$ alors que les fonctions de transfert en boucle fermée sont des fonctions non-linéaires de $K(s)$. Alors que des propriétés asymptotiques sont distinguées en hautes et basses fréquences qui sont définies par rapport à la pulsation de coupure ω_c .

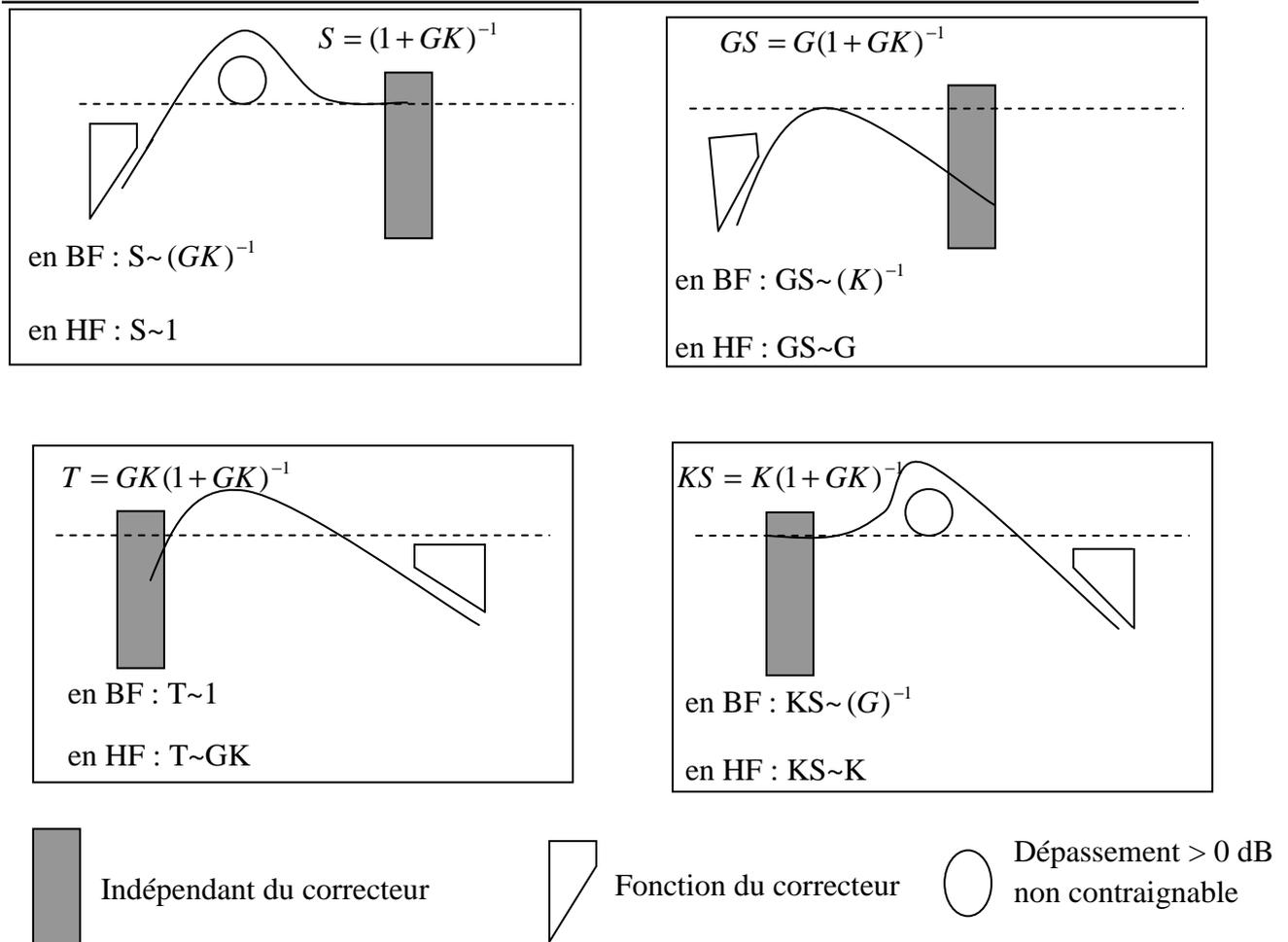


Fig.III.2: comportement asymptotique des fonctions de transferts de la boucle fermée

Le comportement des transferts $S(s)$, $T(s)$, $K(s)S(s)$, $G(s)S(s)$ et $G(s)K(s)$ caractérisant la boucle fermée, en basses et hautes fréquences est résumé dans le tableau 1.

Fonction	Basses fréquences	Hautes fréquences
GK	$\ll 1$	$\gg 1$
S	$\frac{1}{GK}$	1
GS	$\frac{1}{K}$	G
KS	$\frac{1}{G}$	K
T	1	GK

Tableau1: Comportement des fonctions de transfert en basses et hautes fréquences.

Nous allons indiquer de façon informelle les conséquences que ces comportements ont sur le choix des fonctions de pondération.

Définissons :

- Les basses fréquences correspondent à un domaine $[0 \quad f_{bf}]$ tel que $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$.
 $\underline{\sigma}(GK)$ étant la plus petite valeur singulière de la fonction $G(s)K(s)$.
- Les hautes fréquences correspondent à un domaine $[f_{hf} \quad \infty]$ tel que $\overline{\sigma}(GK) \ll 1$.
 $\overline{\sigma}(GK)$ étant la plus grande valeur singulière de la fonction $G(s)K(s)$.

Ainsi on peut déduire le comportement asymptotique des fonctions de transfert $M(s)$ en fonction du gain de la boucle ouverte comme suit :

a) lorsque le gain de la boucle ouverte est grand, c'est à dire $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$, la matrice fonction de transfert $M(s)$ se comporte comme suit :

$$M(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+G(j\omega)K(j\omega)} & \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \\ \frac{K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} & \frac{G(j\omega)K(j\omega)}{1+G(j\omega)K(j\omega)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{G(j\omega)K(j\omega)} & \frac{1}{K(j\omega)} \\ \frac{1}{G(j\omega)} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Cette relation montre que $K(s)$ agit sur le transfert reliant la référence $r(s)$ à l'erreur $\mathcal{E}(s)$, et le transfert reliant la perturbation $b(s)$ à l'erreur $\mathcal{E}(s)$. Par contre, il est sans effet sur le transfert reliant la référence $r(s)$ à la commande $u(s)$ et le transfert reliant la perturbation $b(s)$ à la commande $u(s)$.

Cette approximation doit intervenir notamment en basses fréquences. Par exemple, si $K(s)$ présente un pôle à l'origine, le gain de la boucle ouverte tend vers l'infini et les transferts $S(s)$ et $G(s)S(s)$ auront un zéro à l'origine, ce qui signifie l'absence d'erreur statique pour des signaux $r(s)$ et $b(s)$ constants.

b) Lorsque le gain de la boucle ouverte est faible, c'est à dire $|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$, la matrice fonction de transfert $M(s)$ se comporte comme suit :

$$M(j\omega) \approx \begin{bmatrix} 1 & G(j\omega) \\ K(j\omega) & K(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Dans ce cas, $K(s)$ agit sur les transferts de $r(s)$ vers $u(s)$ et de $b(s)$ vers $u(s)$, tandis qu'il est sans effet sur les transferts de $r(s)$ vers $\varepsilon(s)$ et de $b(s)$ vers $\varepsilon(s)$. Cette approximation doit intervenir en hautes fréquences, car le gain du système non corrigé a naturellement tendance à décroître avec la fréquence, et l'on cherche en général à synthétiser un correcteur qui atténue certains comportements du système en hautes fréquences afin d'éviter d'exciter inutilement la commande en dehors de la bande passante de l'asservissement.

On constate donc que le correcteur n'a aucune influence sur $K(s)S(s)$ et $T(s)$ en basses fréquences et sur $S(s)$ et $G(s)S(s)$ en hautes fréquences. Il est par conséquent impossible de pondérer ces transferts à l'aide du correcteur dans tout le domaine fréquentiel. Il est important de noter que cette analyse est utile dans le choix des pondérations dans le cadre de la synthèse H_∞ . En d'autres termes, quelle que soit la méthode utilisée, il est impossible d'agir, par exemple sur KS , en basses fréquences à l'aide du correcteur.

Par ailleurs, pour exiger des comportements aux transferts $S(s)$ et $G(s)S(s)$ en hautes fréquences et aux transferts $K(s)S(s)$, $T(s)$ en basses fréquences et garantir la robustesse de la stabilité vis-à-vis des dynamiques négligées, on introduit des gabarits fréquentiels que l'on appelle les fonctions de pondérations.

III. Mise en œuvre de la synthèse par l'introduction des fonctions de pondération

Reprenons le schéma de la figure (III.1), pour atteindre les objectifs du cahier des charges, on peut introduire des pondérations sur les différents signaux, qui prendront la forme des filtres, qui permettent de modeler les différents transferts, $S(s)$, $KS(s)$, $SG(s)$ et $KSG(s)$ et ainsi privilégier un domaine de fréquences particulier. Considérons à cette fin le schéma de la figure (III.3), dans lequel l'erreur $\varepsilon(s)$ est pondérée par le filtre $W_1(s)$, la commande $u(s)$ par $W_2(s)$, et l'entrée de perturbation $b(s)$ est la sortie d'un filtre $W_3(s)$ [17, 18, 32].

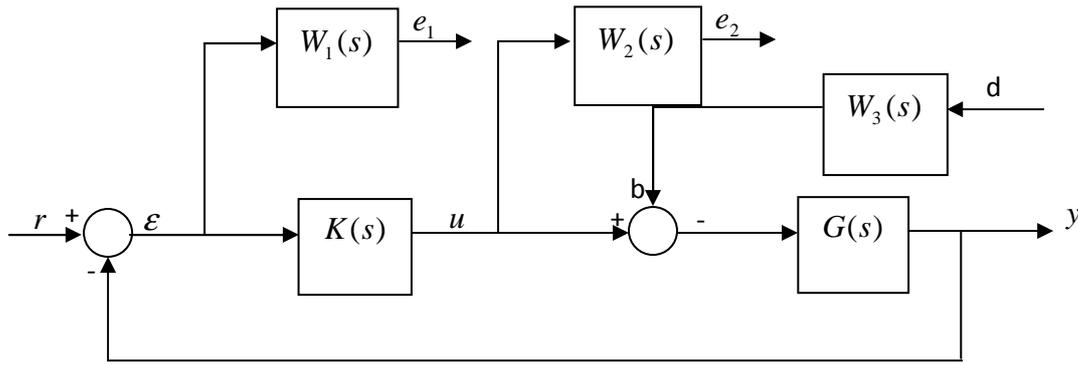


Fig. III.3: mise en place des fonctions pondérations

On considère $r(s)$ et $d(s)$ comme entrées et $e_1(s)$ et $e_2(s)$ comme signaux à surveiller.

Ce système est alors représenté par la relation [18] :

$$\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) & W_1(s)S(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) & W_2(s)K(s)S(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Pour résoudre Le problème H_∞ standard correspondant, on a recours à la méthode exposée dans la partie (II) de chapitre II. Le problème H_∞ standard ainsi découlé est :

On détermine un nombre $\gamma > 0$, et le correcteur $K(s)$ stabilisant le système bouclé et assurant:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1S & W_1SGW_3 \\ W_2KS & W_2KSGW_3 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{III.11})$$

L'avantage de considérer ce problème, plutôt que le problème plus simple (III.7) est que les filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ permettent de modeler les différents transferts $S(s)$, $KS(s)$, $SG(s)$ et $KSG(s)$.

D'après la propriété de la norme H_∞ , on a :

$$\|W_1S\|_\infty \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in R \quad |S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad (\text{III.12})$$

$$\|W_1GSW_3\| \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in R \quad |GS(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_1W_2(j\omega)|} \quad (\text{III.13})$$

$$\|W_2KS\| \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in R \quad |KS(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad (\text{III.14})$$

$$\|W_2KSGW_3\| \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \forall \omega \in R \quad |KSG(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_2W_3(j\omega)|} \quad (\text{III.15})$$

D'après ces relations il est clair que la réponse fréquentielle des fonctions $S(s)$, $KS(s)$, $SG(s)$ et $KSG(s)$ est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ choisis. La figure (III.4) montre l'allure typique que l'on choisit pour les différents gabarits.

- a. Le gabarit sur $S(s)$ est fixé à une valeur k_1 faible en basses fréquences, pour assurer les objectifs de précision. La pulsation ω_1 pour laquelle le gabarit coupe l'axe 0_{dB} peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée pour l'asservissement. La valeur k_2 du gabarit, en hautes fréquences limite le maximum de la réponse fréquentielle de $S(s)$, ce qui impose une marge de module au moins égale à $1/k_2$. Enfin aucune contrainte n'est imposée à $S(s)$ en hautes fréquences.
- b. La valeur k_3 du gabarit sur $KS(s)$ ne lui impose aucune contrainte en basses fréquences, tandis que la valeur k_4 impose une contrainte en hautes fréquences, au-delà de la bande passante choisie pour l'asservissement, plus ou moins sévère suivant la valeur choisie pour ω_2 .
- c. Le gabarit sur $SG(s)$ dépend des deux filtres $W_1(s)$ et $W_3(s)$. Dans certain cas, il suffit de prendre $W_3(s)$ constant, ce qui permet de régler l'atténuation en basses fréquences. Mais $W_3(s)$ permet également de modifier le comportement de SG en moyennes fréquences, ce qui s'avère utile pour obtenir un comportement transitoire correct en réponse à une perturbation.
- d. Enfin le gabarit sur $KSG(s)$, si les filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ ont été choisis d'après les considérations précédentes, sont évidemment déterminés. Mais dans certains cas, on peut préférer ajuster par $W_3(s)$ le gabarit sur $KSG(s)$ plutôt que le gabarit sur $SG(s)$, afin par exemple de satisfaire un gabarit d'atténuation assurant la robustesse de la stabilité aux dynamiques négligées.

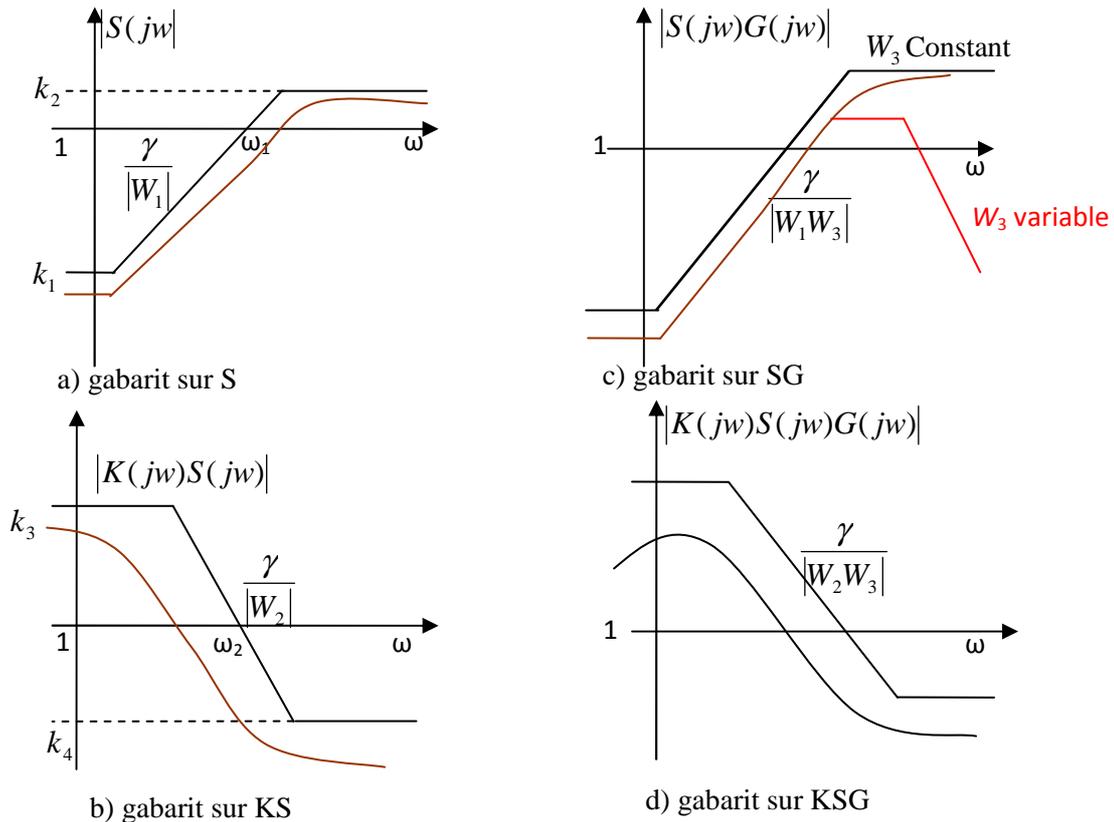


Fig. III.4: Diagramme de Bode des gabarits fréquentiels.

III.1. Mise sous forme standard du système pondéré

Le système muni du correcteur est augmenté par des fonctions de pondération figure (III.3), doit alors être mis sous la forme standard, c'est-à-dire sous la forme représentée par l'équation (II.15) [18].

Il faut d'abord identifier les différents signaux :

- $G(s)$: (entrée $u+b$, sortie y) :
$$\begin{cases} \dot{x} = A_G x + B_G (u + b) \\ y = C_G x \end{cases}$$
- $W_1(s)$: (entrée ε , sortie e_1) :
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (r - y) \\ e_1 = C_1 x_1 + D_1 (r - y) \end{cases} \tag{III.16}$$
- $W_2(s)$: (entrée u , sortie e_2) :
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ e_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$$
- $W_3(s)$: (entrée d , sortie b) :
$$\begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 d \\ b = C_3 x_3 + D_3 d \end{cases}$$

Le système $P(s)$ admet une représentation d'état d'ordre n définie par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A.z + B_w w + B_u u \\ e = C_e z + D_{ew} w + D_{eu} u \\ y = \varepsilon = C_\varepsilon z + D_{\varepsilon w} w + D_{\varepsilon u} u \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

tel que : $z = (x \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$; $w = \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$

et

$$A = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & -B_G C_3 \\ -B_1 C_G & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & -B_G D_3 \\ B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \end{bmatrix} ; B_u = \begin{bmatrix} B_G \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

$$C_e = \begin{bmatrix} -D_1 C_G & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix} ; C_\varepsilon = [-C_G \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{III.20})$$

$$D_{ew} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; D_{eu} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} ; D_{\varepsilon w} = [I \quad 0] ; D_{\varepsilon u} = [0]. \quad (\text{III.21})$$

soit :

$$B = [B_w \quad B_u], C = \begin{bmatrix} C_e \\ C_\varepsilon \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_{ew} & D_{eu} \\ D_{\varepsilon w} & D_{\varepsilon u} \end{bmatrix}.$$

L'application de l'algorithme de Glover-Doyle à ce système augmenté, doit particulièrement vérifier les quatre hypothèses de l'étape (1) de l'algorithme.

- Si (A, B, C, D) est minimal, la partie non commandable du problème est constituée par le filtre $W_3(s)$, et la partie non observable est constituée par les filtres $W_1(s)$ et $W_2(s)$.
- L'hypothèse 1 impose donc de choisir les pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ stables, et l'hypothèse 2 impose de choisir $W_2(s)$ avec un gain non nul à l'infini.
- On peut enfin noter que l'ordre du correcteur $K(s)$ est égal à la somme des ordres de $G(s)$ et des filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$.

L'ensemble des problèmes de commande auxquels répond cette synthèse est le suivant:

- assurer une erreur de poursuite par rapport à un signal d'entrée
- assurer un rejet des perturbations
- limiter l'amplitude des signaux de commande par rapport à la référence et au bruit de mesure.

III.2. Choix des fonctions de pondération

La synthèse H_∞ est fréquentielle, donc toute spécification doit être imposée par l'intermédiaire d'un gabarit fréquentiel, ainsi les filtres auront le rôle de modeler les transferts en boucle fermée de l'asservissement. Bien que plusieurs techniques de choix des filtres aient été utilisées, elles restent souvent spécifiques à un système donné. On s'intéresse dans ce qui suit au choix de fonctions de pondération. Nous commençons par l'étude des fonctions de pondération entières, puis nous traitons le problème des fonctions de pondérations non entières [12,19].

III.2.1. Choix des fonctions de pondération entières

Le choix de ces fonctions se fait naturellement à partir du cahier des charges. En effet, la plupart des spécifications peuvent être interprétées par des contraintes fréquentielles sur les transferts en boucle fermée. Néanmoins, il est important de noter que les transferts en boucle fermée ne sont pas indépendants entre eux et que pour un transfert donné le correcteur ne peut pas agir sur tout le domaine fréquentiel.

Considérons les transferts S et T , on a quatre transferts qui apparaissent, mais on pondérera seulement trois transfert car $S+T=I$, et donc une fois que S (ou T) est fixé T (ou S) l'est aussi.

Les demandes principales d'un cahier des charges peuvent souvent être prises en compte par certaines caractéristiques fréquentielles des pondérations:

- gain en basses fréquences,
- gain à hautes fréquences,
- comportement asymptotique à l'origine,
- comportement asymptotique à l'infini,
- fréquence de passage à 0_{dB}

Choix de la pondération W_1 :

Pour contraindre le module de la fonction de sensibilité $S(s)$ par la pondération $W_1(s)$, dans [19] l'auteur propose de choisir $W_1(s)$ de la forme

$$W_1(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$b_1 = G_\infty \cdot \sqrt{|G_0^2 - 1|}, \quad b_0 = G_0 \cdot \omega_c \cdot \sqrt{|G_\infty^0 - 1|}$$

$$a_1 = \sqrt{|G_0^2 - 1|}, \quad a_0 = \omega_c \cdot \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}$$

Où

$$G_0 = |W_1(0)|, \quad G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_1(j\omega)|.$$

Avec $(G_0 - 1)(G_\infty - 1) < 0$ et $\omega_c > 0$ telle que $|W_1(j\omega_c)| = 1$, ω_c étant la fréquence de coupure souhaitée.

Comme le régulateur $K(s)$ est calculé de sorte que $|S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|}$, le gain G_0 permet donc

de contraindre $|S(j\omega)|$ en basses fréquences ($|S(0)| \leq \frac{1}{G_0}$), permettant ainsi de réduire l'erreur

statique. Comme la norme H_∞ de la fonction de sensibilité $S(s)$ est égale à l'inverse de la marge de module, on peut donc contraindre $S(s)$ en hautes fréquences par une borne supérieure telle que :

$\|S\|_\infty \leq \frac{1}{G_\infty}$ (G_∞ est une borne supérieure sur la marge de module) permettant ainsi la stabilité du système bouclé.

Choix de la pondération W_2 :

La relation (III.14) montre que la fonction de pondération $W_2(s)$ intervient pour contraindre le module de $KS(s)$ qui lie le bruit $b(s)$ à la commande $u(s)$. De plus, cette contrainte doit agir uniquement en basses fréquences, car on peut agir en hautes fréquences avec le correcteur $K(s)$ (en haute fréquence on a : $KS(s) \approx K(s)$).

Contrairement à la pondération $W_1(s)$, la pondération $W_2(s)$ est déterminée de façon itérative. En effet, on cherche à limiter l'amplitude du signal de commande $u(s)$, on peut

choisir dans un premier temps $W_2(s)$ comme un gain afin de limiter la complexité du correcteur, on augmente progressivement le gain $|W_2(j\omega)|$ afin que la fonction de sensibilité $S(s)$ suive au plus près le gabarit $\frac{1}{|W_1(j\omega)|}$. Enfin on introduit une atténuation en hautes fréquences sur le gabarit $\frac{1}{|W_2(j\omega)|}$, l'objectif étant d'obliger le gain du correcteur à chuter dans cette région des fréquences afin de limiter la sensibilité au bruit ; mais on fait en sorte de ne pas augmenter de façon trop importante la valeur de γ .

Il faut noter que $\frac{1}{W_2(s)}$ est une fonction de transfert passe bas et on peut choisir la même structure que $W_1(s)$ [3, 12].

Choix de la pondération W_3 :

La pondération $W_3(s)$ agit sur le transfert $W_1GS(s)$ (équation III.13) qui lie la perturbation en entrée du procédé $b(s)$ et l'erreur $\varepsilon(s)$ pondérée par $W_1(s)$. Le gabarit que doit satisfaire $|GS(j\omega)|$ est donc $\frac{1}{W_1W_3(j\omega)}$. Dans un premier temps on choisit $W_3(s)$ très faible (en d'autres termes, le calcul du correcteur tient compte de la référence $r(s)$, mais ignore la perturbation $b(s)$), on augmente ensuite progressivement la valeur de $W_3(s)$ agissant ainsi en basses fréquences de $GS(s)$, jusqu'à ce qu'un effet significatif apparaisse sur la valeur de γ , en veillant toute fois à ce que celui-ci ne dépasse pas excessivement la valeur 1. On abaissera finalement le gabarit $\frac{1}{|W_1W_3(j\omega)|}$.

Remarque : Le temps de rejet de la perturbation et la sensibilité de l'erreur de poursuite par rapport à une perturbation sur la commande sont liés au gain de W_3 . Si ce gain est très élevé et donc la contrainte $\frac{1}{|W_1W_3(j\omega)|}$ est forte, le temps de rejet sera court et la sensibilité de l'erreur $\varepsilon(s)$ faible par rapport à la perturbation $b(s)$. Il est possible d'utiliser un filtre du premier ordre pour $W_3(s)$, il aurait comme objectif de pondérer $GS(s)$ afin d'assurer une robustesse plus importante [3, 12].

III.2.2 Exemple d'application

Pour illustrer le choix des fonctions de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$, considérons l'exemple simple de la figure III.3 où le système à commander est représenté par:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{III.23})$$

On veut concevoir un correcteur H_∞ standard permettant d'assurer les objectifs suivants :

- La fréquence du coupure doit être égale à 1rd/s.
- Suivi de consigne avec une erreur statique inférieure à 1%.
- Temps de réponse de l'ordre de 3s.
- Marge de module au moins égale à 0.5 ($G_\infty \leq 0.5$)
- Gain entre la référence et la commande inférieur à 20 pour tout ω ,
($|KS(j\omega)| \leq 20$).
- Erreur statique due à la perturbation doit être inférieure à 1%.

- Choix de la pondération $W_1(s)$

Les trois premières spécifications du cahier des charges concernent la fonction de sensibilité $S(s)$. Elles permettent de fixer respectivement son gain statique ($G_0 = 0.01$), sa pulsation à 0dB ($\omega_c \approx 1$), et son gain maximal ($G_\infty = 1/0.5$). En appliquant la relation (III.22), on obtient :

$$W_1(s) = \frac{50s + 86.6}{100s + 0.866} \quad (\text{III.24})$$

- Choix de la pondération $W_2(s)$

Dans un premier temps, $W_2(s)$ est choisie constante, afin d'imposer au transfert $KS(s)$ un gabarit constant égal à 2, soit

$$W_2(s) = 1/2 = 0.5 \quad (\text{III.25})$$

Pour atténuer le gain du correcteur en hautes fréquences, on impose un gabarit à $K(s)S(s)$ puisque en hautes fréquences $K(s)S(s) \approx K(s)$. La figure (III.6) représente l'allure de ce gabarit.

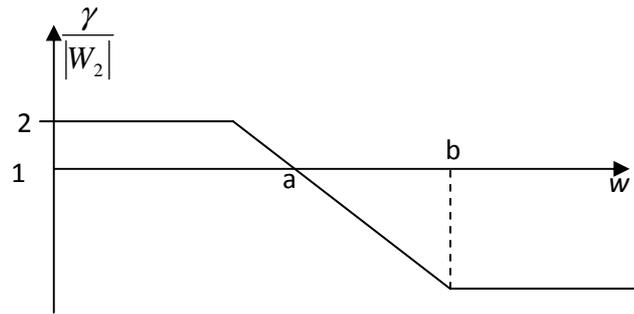


Fig. III.5. Gabarit imposé à KS

En prenant $a = 200$ et $b = 5000$ (suffisamment grand), on aura

$$W_2(s) = \left(\begin{array}{c} 1 + \frac{s}{5000} \\ 2 \frac{1 + \frac{s}{200}}{1 + \frac{s}{5000}} \end{array} \right)^{-1} = 0.5 \cdot \frac{1 + \frac{s}{200}}{1 + \frac{s}{5000}} \quad (\text{III.26})$$

- Choix de la pondération $W_3(s)$

Dans un premier temps $W_3(s)$ est choisie faible (on ignore la perturbation b): $W_3(s) = 10^{-2}$. On augmente ensuite progressivement cette valeur, jusqu'à ce qu'un effet significatif apparaisse sur la valeur de γ . On obtient $\gamma = 1.1235$ pour $W_3(s) = 0.9$.

Les fonctions de pondération ainsi choisies doivent normalement contraindre le calcul du régulateur qui permet au système en boucle fermée de respecter le cahier des charges imposé. Pour déterminer le régulateur permettant d'atteindre ces objectifs, on met le système augmenté par les fonctions de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ sous la forme standard, donnée par les équations III.16 à III.21. La synthèse H_∞ utilisant l'algorithme de Glover-Doyle donné dans le paragraphe (§-II-1) pour la valeur $\gamma = 1.1235$ permet de déterminer le régulateur $K(s)$ dont le modèle transfert est donné par :

$$K(s) = \frac{2.2305 (s + 5000) (s + 1.014)}{(s + 199.7) (s + 15.84) (s + 0.008661)} \quad (\text{III.27})$$

Pour montrer que le régulateur ainsi calculé atteint les objectifs du cahier des charges nous avons effectué des simulations du système en boucle fermée où :

- La référence $r(t)$ est un échelon d'amplitude 10.
- Le signal de perturbation $b(t)$ est un échelon d'amplitude 1.5 appliqué en régime permanent de la sortie à l'instant $t = 2s$.

Afin de vérifier chacune des caractéristiques du cahier des charges nous présentons également le diagramme de Bode des fonctions de transfert $S(s)$, $K(s)S(s)$, $SG(s)$ et $KSG(s)$ caractérisant la boucle fermée ainsi que leurs gabarits respectifs. La réponse indicielle de la sortie est également donnée pour vérifier les caractéristiques dynamiques et statiques du cahier des charges. Tous ces résultats sont illustrés par les figures III.6, III.7.

- La figure III.6.a représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité

$S(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1|$. On constate que le diagramme de $S(s)$ est en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de $S(s)$ est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

- La figure III.6.b représente le diagramme de Bode du module du transfert $KS(s) = u(s)/r(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_2|$. Dans ce cas aussi le diagramme de $KS(s)$ est en dessous de son gabarit, le gain de $KS(s)$ est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne.

- La figure III.6.c représente le diagramme de Bode du module du transfert $SG(s) = \varepsilon(s)/b(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1W_3|$. Le diagramme de Bode de $SG(s)$ est également en dessous du gabarit, cela garanti le rejet de la perturbation.

- La figure III.6.d montre que le diagramme de Bode du module $KSG(s)$ est en dessous du son gabarit $\gamma/|W_2W_3|$, cela justifier le bon choix des fonctions de pondération $W_2(s)$ et $W_3(s)$.

- La figure III.7 enfin représente la réponse indicielle de la sortie (trait continu) soumise à un échelon de référence de 10 et un échelon de perturbation d'amplitude 1.5 appliqué à l'instant $t=2$ s. La valeur finale de la sortie est égal à $y(\infty) = 10$. Ceci montre que la précision imposé est respectée $\varepsilon_{01} = 0.002$ (le temps du régime transitoire est d'environ $t_r = 0.625$ s). Ces valeurs montrent que les objectifs du cahier des charges sont atteints. De plus, lorsqu'on applique la perturbation, celle-ci est rejetée au bout de $t=2$ s et la sortie revient à sa valeur de référence avec une précision $\varepsilon_{01} = 0.002$

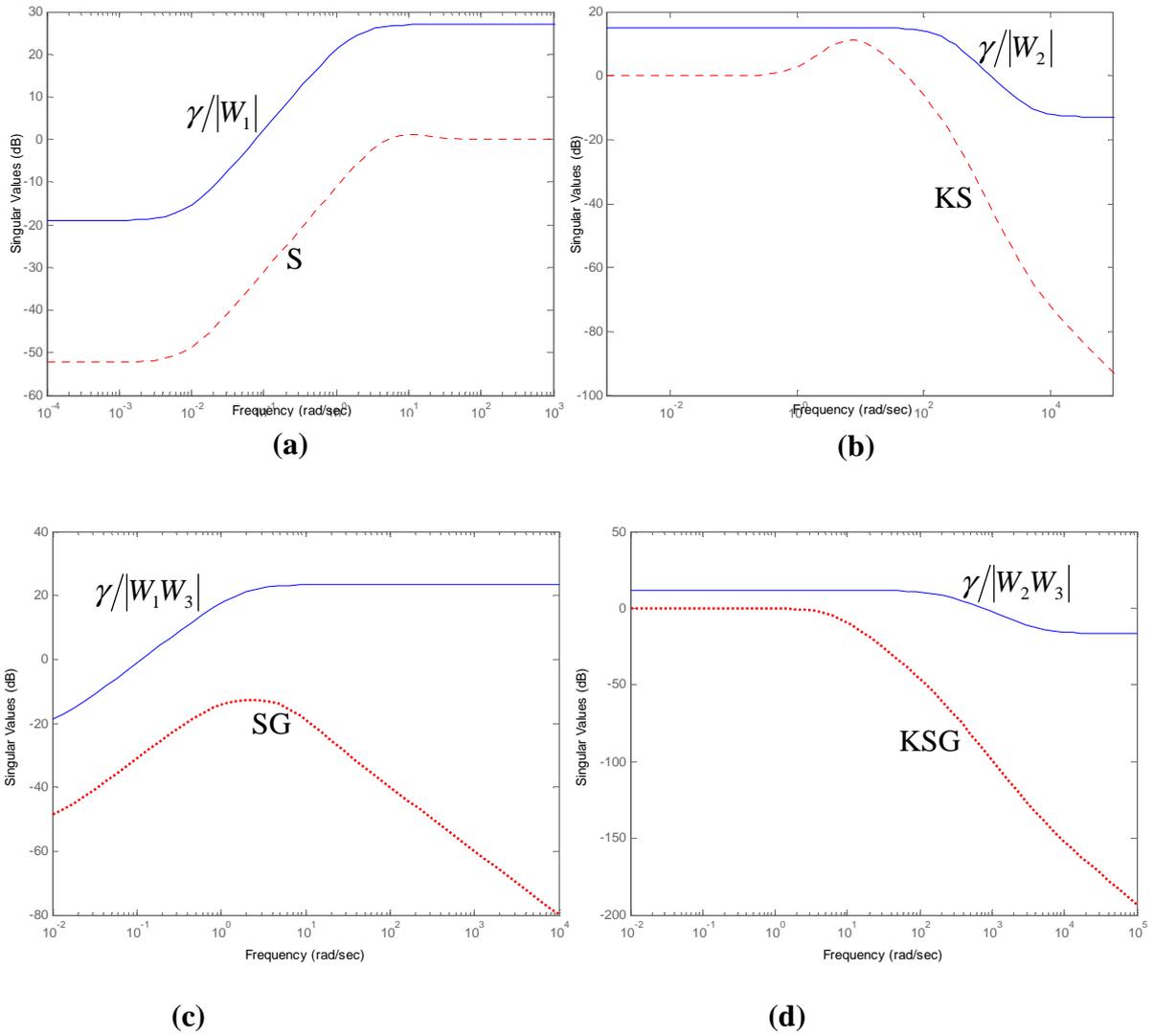


Fig. III.6 Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectif.

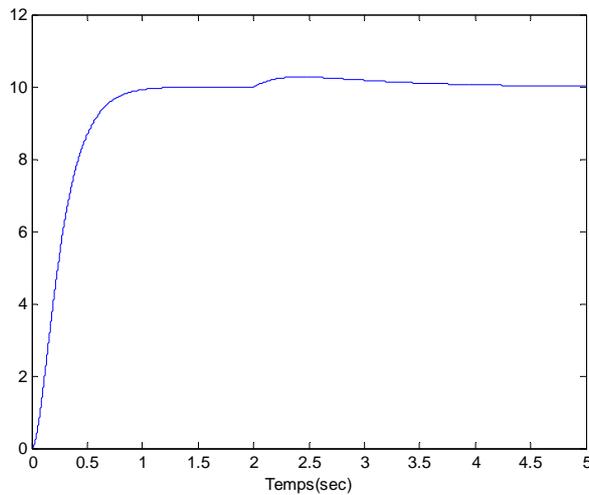


Fig. II.7. Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée.

III.2.3. Choix des fonctions de pondération non entières

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les caractéristiques de la boucle fermée pouvaient être imposées par un choix judicieux des fonctions de pondération, permettant de modéliser les fonctions de transfert reliant les différentes entrées aux différentes sorties du système en boucle fermée. Ceci pouvait être obtenu par la détermination des paramètres de ces fonctions de pondération.

Néanmoins, lorsque les paramètres du système à commander changent (pour une raison ou une autre), les caractéristiques de la boucle fermée risquent d'en être affectées puisque les paramètres du régulateur dépendent des paramètres du système. Ceci peut être amélioré en utilisant le concept de la dérivation d'ordre non entier qui introduit un degré de liberté supplémentaire « l'ordre non entier » qui intervient comme une puissance de l'opérateur de Laplace dans la fonction de transfert du régulateur [51]. Ce paramètre n'étant pas un coefficient du régulateur il est indépendant des paramètres du système. C'est l'influence de ce paramètre sur les caractéristiques de la boucle fermée qui est étudiée dans ce paragraphe. Pour ce faire on introduit des gabarits fractionnaires.

- Dans un premier temps, on utilise les fonctions de pondération entière obtenues dans le paragraphe précédent dans lesquelles l'opérateur de dérivation s est remplacé par l'opérateur de dérivation non entier s^α . Ainsi les transferts entiers de la forme:

$$W_e(s) = \frac{b_1s + b_0}{a_1s + a_0} \quad (\text{III.28})$$

sont remplacés par les fonctions de transfert suivantes :

$$W_{ne}(s) = \frac{b_1s^\alpha + b_0}{a_1s^\alpha + a_0} \quad (\text{III.29})$$

- Sachant que le diagramme de Bode du transfert entier qui approxime l'opérateur d'intégration non entier $\frac{1}{s^\alpha}$ présente des caractéristiques similaires à celles des fonctions de pondération entières, on utilise comme fonctions de pondération le transfert non entier :

$$W_{ne}(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{III.30})$$

- Pour synthétiser le correcteur H_∞ en utilisant l'algorithme de Glover-Doyle ; on doit d'abord approximer les transferts (III.29 et III.30) par des modèles entiers. Comme la

synthèse est basée sur la représentation d'état nous avons utilisé l'approximation des systèmes non entiers en représentation d'état présentée dans le chapitre I.

De plus, la résolution du problème H_∞ basé sur des fonctions de pondérations non entières représente une difficulté pour le choix de l'ordre de dérivation non entier α .

Par conséquent, on se propose dans ce qui suit d'étudier l'influence de ce paramètre sur les caractéristiques de la boucle fermée. On considère pour ce faire deux cas : α compris entre 0 et 1 et α compris entre 1 et 2, et on se base sur l'exemple précédent pour étudier l'influence de ce paramètre sur les performances de la boucle fermée.

III.2.3.1. Correcteur H_∞ utilisant des fonctions de pondération ayant la forme

$$\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$$

Le système à commander est celui donné par le transfert (III.23), les pondérations entières choisies sont :

$$W_1(s) = \frac{50s + 86.6}{99.99s + 0.866}, \quad W_2(s) = 0.5 \cdot \frac{1 + \frac{s}{200}}{1 + \frac{s}{5000}}, \quad W_3(s) = 0.9$$

1^{er} cas : $0 < \alpha < 1$ (on considère $\alpha = 0.7$)

Dans ce cas les fonctions de pondérations sont :

$$W_{1ne}(s) = \frac{50 s^{0.7} + 86.6}{99.99 s^{0.7} + 0.866} \quad (\text{III.31})$$

$$W_{2ne}(s) = 0.5 \cdot \frac{1 + \frac{s^{0.7}}{200}}{1 + \frac{s^{0.7}}{5000}} \quad (\text{III.32})$$

$$W_{3ne}(s) = 0.9 \quad (\text{III.33})$$

L'opérateur de dérivation $s^{0.7}$ est alors approximé dans la bande de fréquences $[10^{-3}, 10^3]$ en utilisant 10 cellules et le correcteur H_∞ synthétisé est effectué pour $\gamma = 1.118014$.

L'introduction du correcteur non entier ainsi obtenu dans la boucle de régulation donne les résultats représentés par les figures III.8 à III.9. La référence étant $r(t)$ un échelon d'amplitude 10, la perturbation est injecté à $t = 2s$ et la simulation temporelle effectuée jusqu'à $t = 5s$.

- La figure III.8.a représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité

$S(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1|$. On constate que le diagramme de $S(s)$ est en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de $S(s)$ est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

- La figure III.8.b représente le diagramme de Bode du module du transfert $KS(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_2|$. Dans ce cas aussi le diagramme de $KS(s)$ est en dessous de son gabarit, le gain de $KS(s)$ est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne.

- La figure III.8.c représente le diagramme de Bode du module du transfert $SG(s)$ (trait discontinu) et celui du gabarit $\gamma/|W_1W_3|$. Le diagramme de Bode de $SG(s)$ est également en dessous du gabarit, cela garanti une rejet de perturbation basses fréquences.

- La figure III.8.d montre que le diagramme de Bode du module $KSG(s)$ est en dessous du son gabarit $\gamma/|W_2W_3|$.

- La figure III.9 représente la réponse indicielle de la sortie (trait continu) soumise à un échelon de référence de 10 et un échelon de perturbation d'amplitude 1.5 appliqué à l'instant $t=2s$. La valeur finale de la sortie est égale à $y(\infty) = 9.97$ ceci montre que la précision imposé est respectée $\varepsilon_{01} = 0.03$ (le temps du régime transitoire est d'environ $t_r = 0.732s$). Ces valeurs montrent que les objectifs du cahier des charges sont atteints. De plus, lorsqu'on applique la perturbation, celle-ci est rejetée au bout de $t=2s$ et la sortie revient à sa valeur de référence avec une précision $\varepsilon_{01} = 0.004$ La figure (III.8.b) traduit cet effet, le module de

transfert $t_{be}(s)$ qui relie la perturbation à l'erreur est inférieur à $\frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|}$.

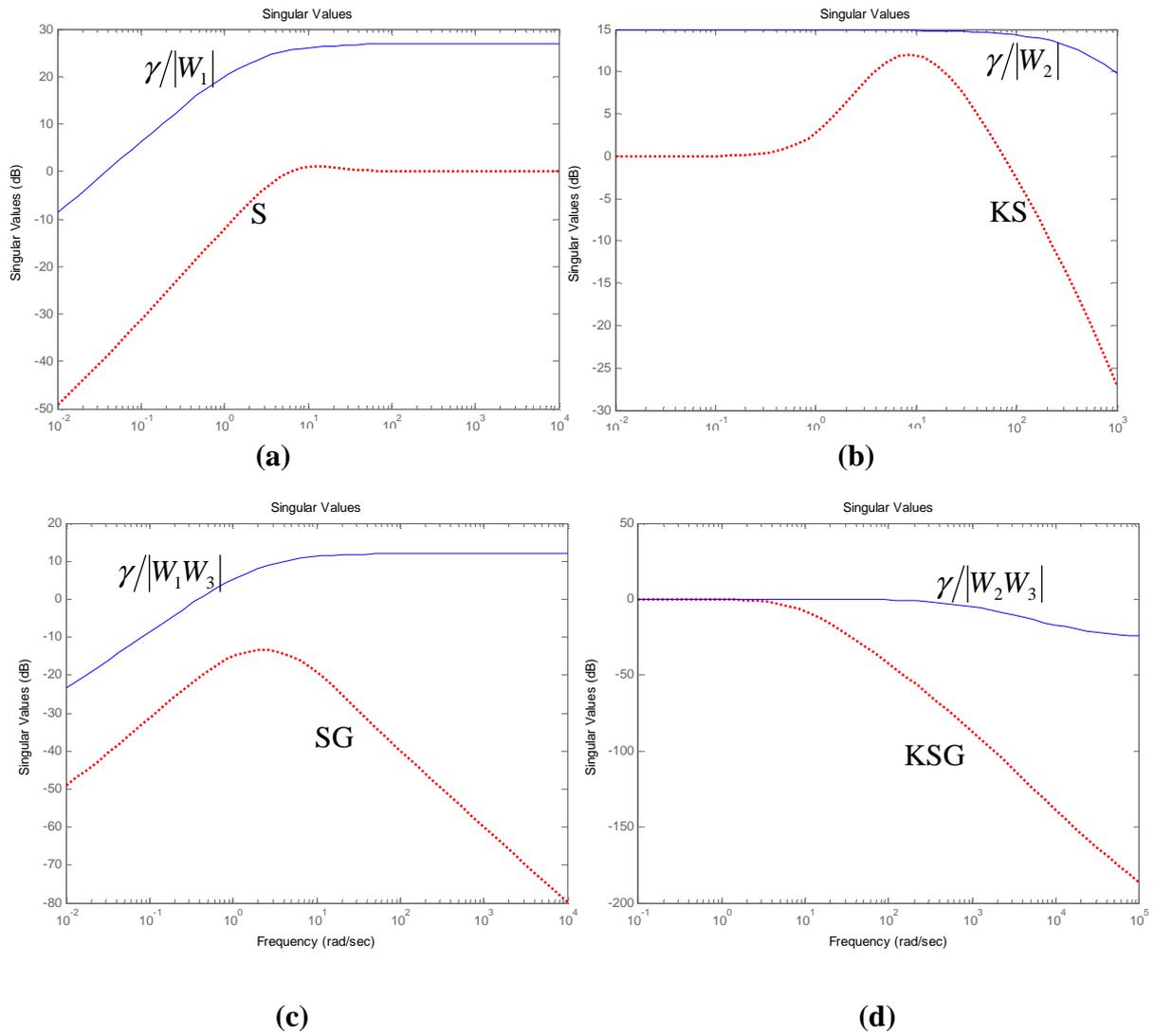


Fig. III.8 Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectif.

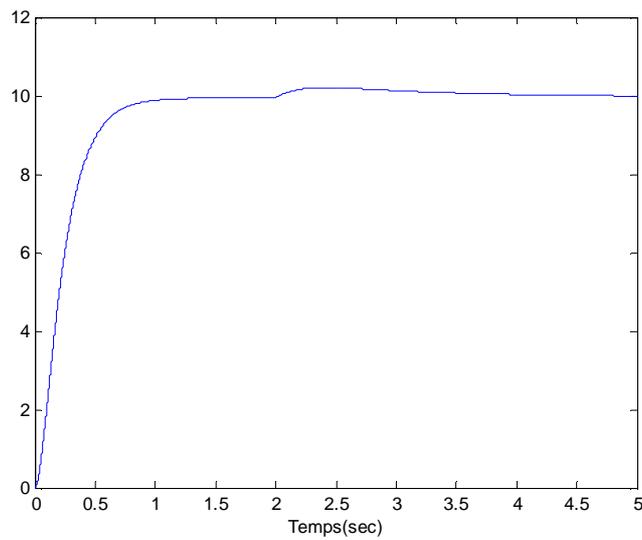


Fig. III.9. Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée.

2^{ème} cas $\alpha = 1.3$

On procède de la même manière que précédemment avec :

$$W_{1ne}(s) = \frac{50 s^{1.3} + 86.6}{99.99 s^{1.3} + 0.866} \quad (\text{III.34})$$

$$W_{2ne}(s) = 0.5 \cdot \frac{1 + \frac{s^{1.3}}{200}}{1 + \frac{s^{1.3}}{5000}} \quad (\text{III.35})$$

$$W_{3ne}(s) = 0.9 \quad (\text{III.36})$$

L'opérateur de dérivation $s^{1.3}$ est alors approximé dans la bande de fréquences $[10^{-5}, 10^5]$ en utilisant 10 cellules et le correcteur H_∞ synthétisé est effectué pour $\gamma = 1.129260$.

L'introduction du correcteur non entier ainsi obtenu dans la boucle de régulation donne les résultats représentés par les figures III.10 et III.11. La référence étant $r(t)$ un échelon d'amplitude 10, la perturbation est injecté à $t = 2s$ et la simulation temporelle effectuée jusqu'à $t = 5s$.

- La figure III.10.a représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité $S(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1|$. On constate que le diagramme de $S(s)$ en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de $S(s)$ est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

- La figure III.10.b représente le diagramme de Bode du module du transfert $KS(s)$ (trait discontinu) et celui du gabarit $\gamma/|W_2|$. Dans ce cas aussi le diagramme de $KS(s)$ est en dessous de son gabarit, le gain de $KS(s)$ est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne.

- La figure III.10.c représente le diagramme de Bode du module du transfert $SG(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1W_3|$. Le diagramme de Bode de $SG(s)$ est également en dessous du gabarit, cela garanti une rejet de perturbation basses fréquences.

La réponse de l'asservissement à un échelon de consigne est donnée par la figure (III.11), on obtient un dépassement d'environ 0.7%, sans erreur statique avec un temps de monté temps de réponse $t_r = 0.617s$. L'injection d'une perturbation à l'instant $t=2s$ n'introduit pas d'erreur statique.

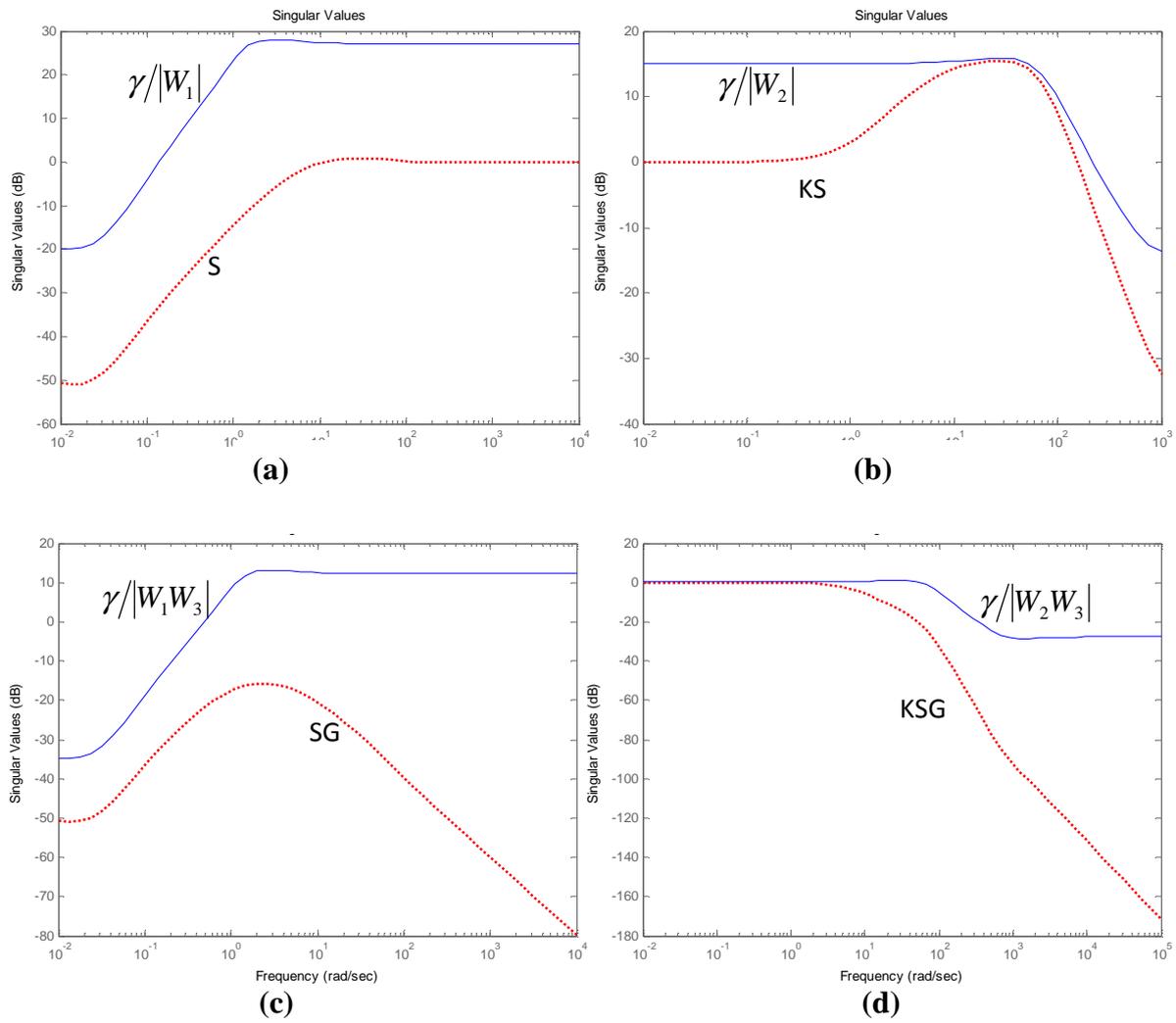


Fig. III.10 Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectif.

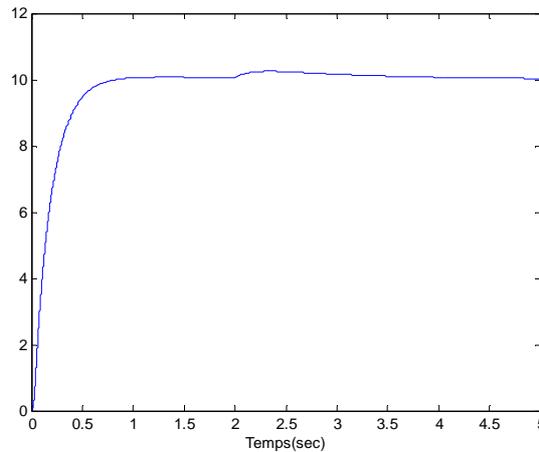


Fig. III.11. Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée.

III.2.3.2 Correcteur H_∞ non entier utilisant l'intégrateur généralisé ($\frac{1}{s^\alpha}$):

La deuxième façon de procéder consiste à prendre directement les fonctions de pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ non entières sous forme d'un intégrateur généralisé :

$$W_{ne}(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (\text{III.37})$$

Nous avons déjà vu au chapitre I paragraphe IV.1, que l'approximation d'un dérivateur généralisé dans une bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$ par des méthodes d'approximations fréquentielles (Oustaloup, Charef...), conduit à un dérivateur borné en fréquences sous la forme d'un filtre :

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^\alpha \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{Z_i}}{1 + \frac{s}{P_i}} \quad (\text{III.38})$$

On procède de la même manière que précédemment mais on ne considère que le cas où $\alpha > 1$ car pour $\alpha < 1$, la valeur de γ obtenu est trop supérieur à 1. Ainsi les fonctions de pondération non entières sont données comme suit :

Pour $\alpha = 1.5$

On procède de la même manière que précédemment avec :

$$W_{1ne}(s) = \frac{1}{s^{1.5}} \quad (\text{III.39})$$

$$W_{2ne}(s) = s^{1.5} \quad (\text{III.40})$$

$$W_3(s) = \frac{1}{s^{1.5}} \quad (\text{III.41})$$

L'opérateur de dérivation $s^{1.5}$ est approximé dans la bande de fréquences $[10^{-3}, 10^3]$ en utilisant 10 cellules et le correcteur H_∞ synthétisé est effectué pour $\gamma = 1.655$.

Les figures III.12 (a, b, c et d) présentent les modules des transferts $S(s)$, $KS(s)$, $SG(s)$ et $KSG(s)$, on remarque qu'ils sont en dessous de leurs gabarits fréquentiels.

La figure (III.13) montre que la réponse indicielle de la boucle fermée corrigée répond comme un deuxième ordre avec : un dépassement d'environ 7.37% et sans erreur statique ; le temps de réponse $t_r = 0.749s$, et l'injection d'une perturbation $b = 1.5$ à $t = 2s$ n'introduit pas d'erreur statique.

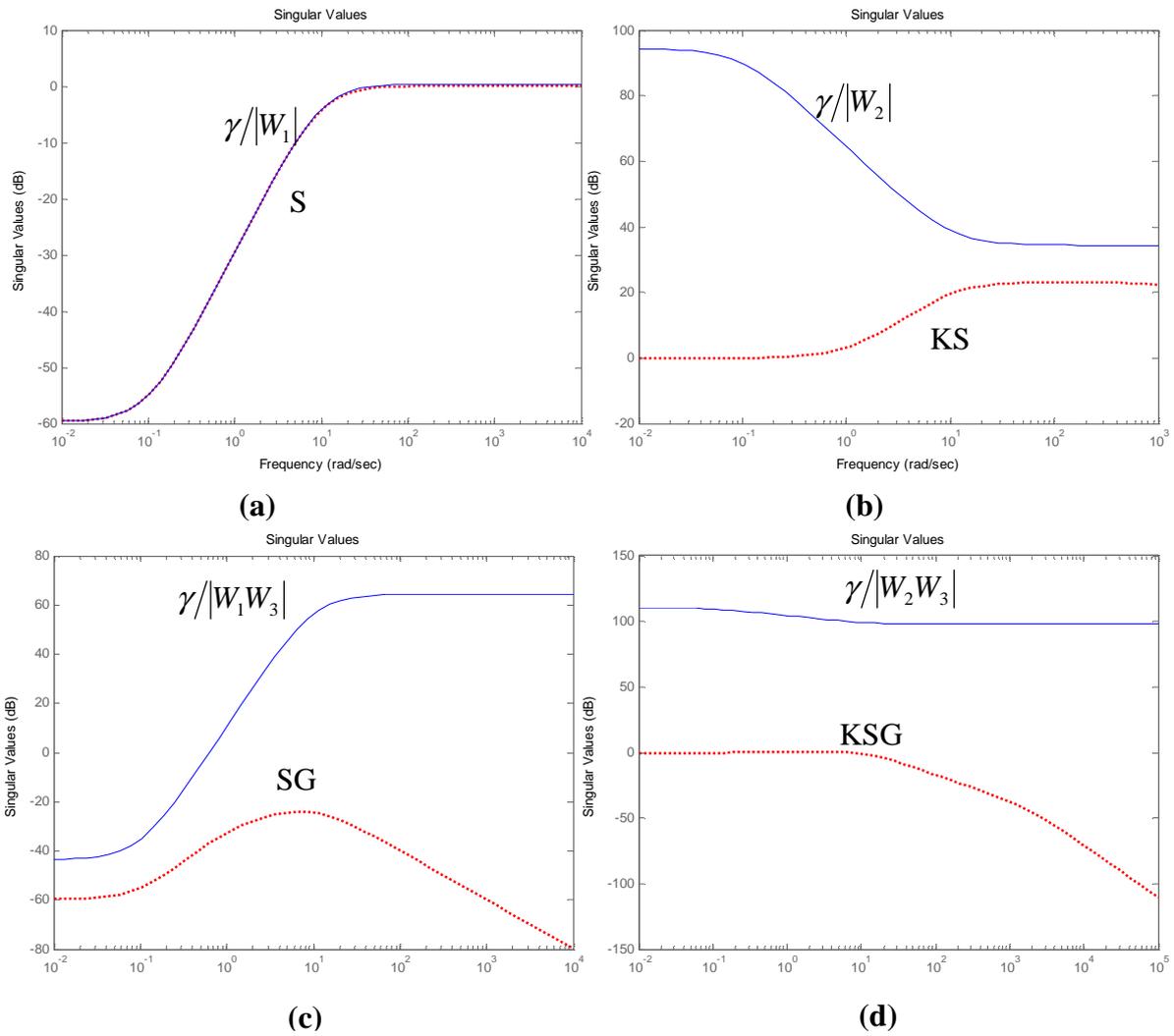


Fig. III.12 Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectif.

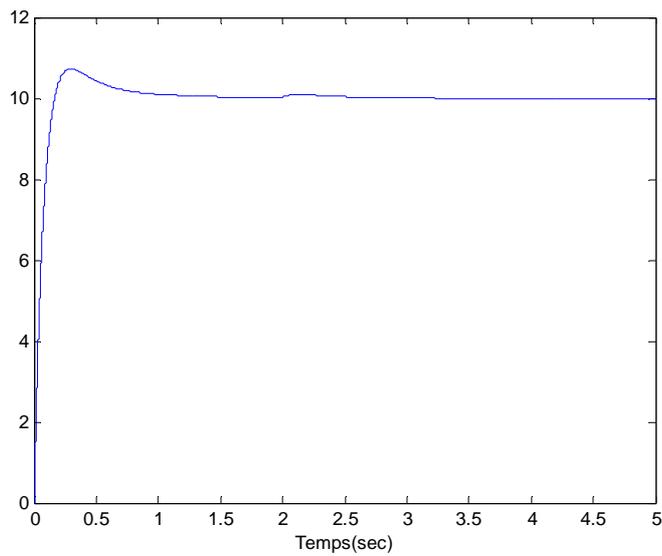


Fig. III.13. Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée.

Remarque : à travers de cet exemple, on remarque que si on augmente l'ordre de dérivation α , la réponse indicielle en boucle fermée reste de deuxième ordre, mais le régime permanent est atteint plus rapidement avec un dépassement plus élevé, et le majorant γ décroît vers 1.

Etude comparative :

Pour comparer les résultats précédents, la figure III.14 présente la réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée des quatre régulateurs développés. Les réponses sont similaires d'un point de vue caractéristique statique et dynamique même si le correcteur utilisant les filtres ayant la forme $1/s^{1.5}$ présente un dépassement cela étant dû à la valeur choisie de α . Néanmoins, c'est ce régulateur qui rejette rapidement la perturbation.

Par contre, la différence est illustrée par la figure de la boucle ouverte (III.15) qui montrent qu'un plateau du diagramme des phases est plus intéressant dans le cas où $\alpha = 1.3$ qui présente une phase constante dans la bande de fréquence $[10^{-1}, 10^{+1}]$ autour de la pulsation de coupure $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$. Cela signifie que si le gain du système change de valeur le diagramme de module de la boucle ouverte change (ce qui est normal), par contre la phase reste constante c'est-à-dire la marge de phase n'est pas modifiée, par conséquent le dépassement est indépendant du gain du système. C'est cette robustesse qui est recherchée lorsqu'on utilise le régulateur CRONE en particulier ou les régulateurs fractionnaires en général.

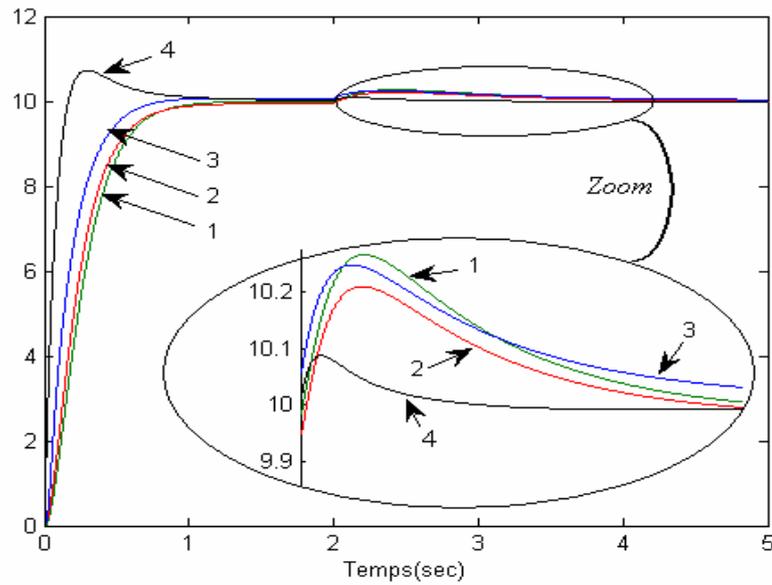


Fig. III.14. Réponse indicielle de la boucle fermée. (1. pondérations entières 2. pondérations non entières $\alpha = 0.7$, 3. pondérations non entières $\alpha = 1.3$, 4. intégrateur généralisé $\alpha = 1.5$)

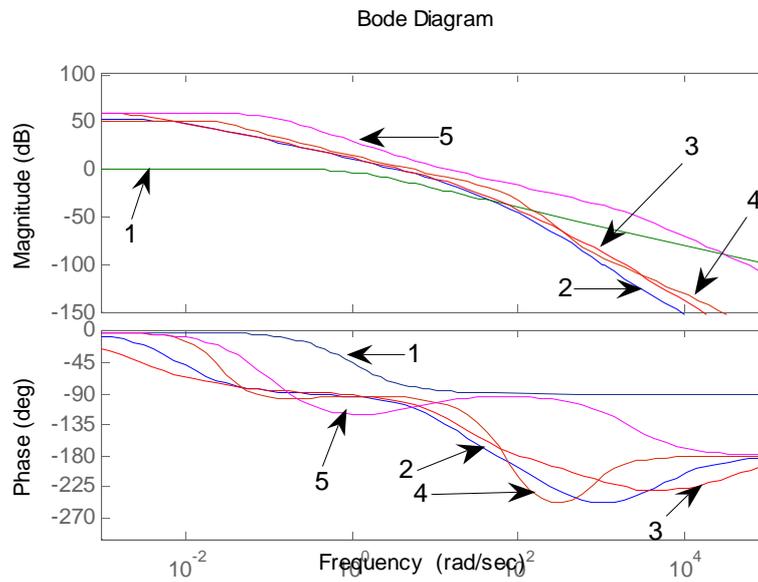


Fig. III.15. Réponse fréquentielle de la boucle ouverte. (1. sans régulateur 2. pondérations entières 3. pondérations non entières $\alpha = 0.7$, 4. pondérations non entières $\alpha = 1.3$, 5. intégrateur généralisé $\alpha = 1.5$)

Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté une nouvelle méthode de synthèse des régulateurs fractionnaires basée sur la synthèse H_∞ pondérée. Ces régulateurs ont été obtenus à travers les fonctions de pondération fractionnaires proposées. Plusieurs types de fonctions de pondération ont alors été proposés, dans un premier cas on a remplacé dans les fonctions de pondération entière l'opérateur de dérivation s par l'opérateur non entier s^\square . Dans un second cas, on considère l'intégrateur non entier $1/s$ comme fonction de pondération. La synthèse du régulateur a été obtenue en utilisant l'algorithme de Glover-Doyle qui est basé sur des modèles entiers. Nous avons par conséquent utilisé des approximations des filtres fractionnaires par des modèles entiers. Au vu des résultats obtenus on considère que tous les objectifs de robustesse, rejet de perturbation, variation des paramètres, ont été atteints. Il convient enfin de signaler que le choix de l'ordre non entier reste le problème de cette méthode, cela peut être une perspective de ce travail.

Chapitre IV

Application à la commande en vitesse d'une machine asynchrone

Introduction

L'utilisation des machines asynchrones dans les entraînements industriels est en pleine expansion, du fait de leur robustesse. Depuis leur apparition, elles ont fait l'objet de nombreuses études basées, essentiellement sur la méthode du schéma équivalent.

Dans la première partie de ce chapitre on présente les modèles mathématiques de la machine ainsi que sa commande vectorielle. Classiquement et de façon systématique, tous les modèles sont obtenus via la transformée de Park qui consiste à écrire ces modèles dans des repères particuliers [5, 9, 25].

La commande de la machine se divise en deux sous-systèmes, interne électrique (le courant) et externe mécanique (la vitesse). Cette dernière est peu sensible aux variations des paramètres électriques, car la dynamique du sous-système mécanique est beaucoup plus lente que celle du sous-système électrique. On appliquera dans ce chapitre les commandes étudiées dans le chapitre précédent pour commander la vitesse d'un moteur asynchrone, on s'intéresse particulièrement aux variations des paramètres mécaniques (le moment d'inertie) et électrique (la résistance rotorique). Ces variations peuvent être dues à leurs variations naturelles causées par l'échauffement ou le vieillissement de la machine, ou bien tout simplement dues à la mauvaise mesure. Pour cela on étudiera la robustesse des régulateurs calculés vis-à-vis du suivi de consigne, du rejet de perturbation et l'atténuation des bruits de mesure.

I. Modélisation dynamique de la machine asynchrone

Pour élaborer des lois de commande pour la machine asynchrone, il est nécessaire d'établir un modèle. Pour ce faire, nous utilisons la transformation de Park. Dans notre cas, on s'intéresse aux régulateurs de flux, des courants $i_{ds}(t)$, $i_{qs}(t)$ et de la vitesse $\Omega(t)$.

I.1. Mise en équations de la machine asynchrone

La dynamique de la machine asynchrone est complexe à cause du couplage entre le stator et le rotor. La transformation de Park lié au référentiel (d, q) est utilisée pour l'analyse des associations convertisseur-machine, les paramètres sont représentés suivant deux axes magnétiques découplés.

Le passage d'une représentation triphasée à une représentation biphasé [6, 9, 20], en utilisant la matrice de transformation $[P]$ de Park, représentée ci-dessous, repose sur la conservation des forces magnétomotrices.

$$P(\theta) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\Pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\Pi}{3}\right) \\ \sin \theta & \sin\left(\theta - \frac{2\Pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\Pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Et la matrice de transformation inverse de Park est :

$$[P(\theta)^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\Pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{2\Pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{4\Pi}{3}\right) & \sin\left(\theta - \frac{4\Pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Dans le cas d'une machine équilibrée, les transformations suivantes sont appliquées au stator et au rotor :

$$[v_{dq0}] = [P] \times [v_{abc}] ; [i_{dq0}] = [P] \times [i_{abc}] ; [\varphi_{dq0}] = [P] \times [\varphi_{abc}].$$

Le modèle de Park dans le repère (d, q) lié au champ tournant d'une machine asynchrone est donné par :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (\text{IV.3})$$

Où $u = [v_{ds}, v_{qs}]^T$ est le vecteur de commande et $x = [i_{ds}, i_{qs}, \varphi_{dr}, \varphi_{qr}]^T$ est le vecteur d'état.

Le modèle ainsi obtenu est donné par :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2}\right) & \omega_s & \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} & \frac{L_m \omega}{\sigma L_s L_r} \\ -\omega_s & -\left(\frac{R_s L_r^2 + R_r L_m^2}{\sigma L_s L_r^2}\right) & -\frac{L_m \omega}{\sigma L_s L_r} & \frac{L_m}{\sigma L_s L_r T_r} \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_s - \omega \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & -(\omega_s - \omega) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \varphi_{dr} \\ \varphi_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{bmatrix} \quad (IV.4)$$

L'équation du mouvement est donnée par:

$$\frac{J}{P} \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = C_{em}(t) - C_r(t) \quad (IV.5)$$

L'expression du couple électromagnétique est donnée par:

$$C_{em}(t) = P \frac{L_m}{L_r} (\varphi_{dr}(t) \cdot i_{qs}(t) - \varphi_{qr}(t) \cdot i_{ds}(t)) \quad (IV.6)$$

On remarque que le modèle de la machine asynchrone dans le repère de Park est non linéaire, à cause du produit croisé des composantes du courant et du couple électromagnétique et de la présence de la vitesse dans les équations électriques du modèle d'état.

Le recours à la commande vectorielle permet de s'affranchir de cette difficulté.

I.2. Principe de la commande vectorielle

Le principe de cette commande revient à assimiler le comportement de la machine asynchrone à celui de la machine à courant continu à excitation séparée, en découplant les grandeurs génératrices du couple électromagnétique de celles du flux. Cela revient à faire orienter le repère (dq) de sorte que le flux rotorique coïncide avec l'axe (d) en agissant sur les variables i_{ds} et i_{qs} . Les grandeurs φ_r et C_{em} sont commandées séparément, cela se traduit par [5, 25]:

$$\begin{cases} \varphi_{qr}(t) = 0 \\ \varphi_{dr}(t) = \varphi_r(t) \end{cases} \quad (IV.7)$$

L'expression (IV.6) devient alors :

$$C_{em}(t) = P \frac{L_m}{L_r} \varphi_r(t) \cdot i_{qs}(t) \quad (IV.8)$$

L'évolution du flux est donnée par la relation :

$$T_r \frac{d}{dt} \varphi_r(t) + \varphi_r(t) = L_m i_{ds}(t) \quad (IV.9)$$

En introduisant l'équation (IV.7) dans la matrice du modèle final de la machine, on aboutit :

$$v_{ds}(s) = \sigma \cdot L_s \cdot s \cdot i_{ds}(s) + \left(R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{ds}(s) - \sigma \cdot L_s \cdot \omega_s(s) \cdot i_{qs}(s) - R_r \frac{L_m}{L_r} \varphi_r(s) \quad (IV.10)$$

$$v_{qs}(s) = \sigma \cdot L_s \cdot s \cdot i_{qs}(s) + \left(R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{qs}(s) - \sigma \cdot L_s \cdot \omega_s(s) \cdot i_{ds}(s) - \omega_r(s) \frac{L_m}{L_r} \varphi_r(s) \quad (IV.11)$$

$v_{qs}(s), v_{ds}(s), i_{qs}(s), i_{ds}(s), \varphi_r(s), \omega_s(s)$ et $\omega_r(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace de $v_{qs}(t), v_{ds}(t), i_{qs}(t), i_{ds}(t), \varphi_r(t), \omega_s(t)$ et $\omega_r(t)$. Pour contrôler les courants $i_{ds}(s)$ et $i_{qs}(s)$ indépendamment l'un de l'autre, les tensions statoriques dans le repère (d,q) sont décomposées selon la relation [9]:

$$\begin{cases} v_{ds}(s) = v_{dsd}(s) + v_{dsc}(s) \\ v_{qs}(s) = v_{qsd}(s) + v_{qsc}(s) \end{cases} \quad (IV.12)$$

Avec :

$$\begin{cases} v_{dsd}(s) = -\sigma L_s \omega_s(s) i_{qs}(s) - R_r \frac{L_m}{L_r} \varphi_r(s) \\ v_{qsd}(s) = +\sigma L_s \omega_s(s) i_{ds}(s) - \frac{L_m}{L_r} \omega_r(s) \varphi_r(s) \end{cases} \quad (IV.13)$$

$v_{dsc}(s)$ et $v_{qsc}(s)$ contrôlent les courants $i_{ds}(s)$ et $i_{qs}(s)$ respectivement. De plus, comme la dynamique des courants est plus rapide que celle du flux et de la vitesse, on peut négliger ces dernières pour calculer les paramètres des régulateurs du flux et de la vitesse. Le modèle non linéaire de la machine asynchrone est ainsi transformé en quatre modèles linéaires de premier ordre. Quatre régulateurs IP classiques suffisent pour commander en vitesse la machine. Notre travail consiste à élaborer une loi de commande par la synthèse H-infini pour commander la vitesse en gardant les régulateurs IP classiques pour commander les courants $i_{ds}(s), i_{qs}(s)$ et le flux $\varphi_r(s)$. Le schéma de la figure (IV.1) montre la structure de la partie commande.

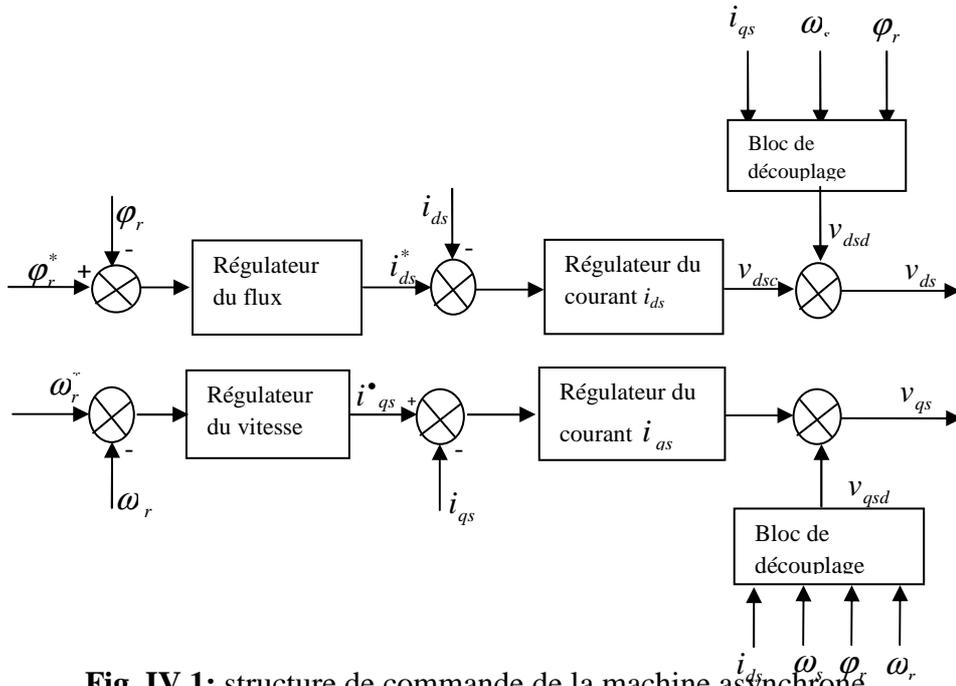


Fig. IV.1: structure de commande de la machine asynchrone

Modèle des courants

On a :

$$\begin{cases} v_{dsc}(s) = \sigma.L_s.s.i_{ds}(s) + \left(R_s + R_r \cdot \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{ds}(s) \\ v_{qsc}(s) = \sigma.L_s.s.i_{qs}(s) + \left(R_s + R_r \cdot \frac{L_m^2}{L_r^2} \right) i_{qs}(s) \end{cases} \quad (IV.14)$$

Ainsi les fonctions de transfert correspondantes sont données par :

$$G_i(s) = \frac{i_{ds}(s)}{v_{dsc}(s)} = \frac{i_{qs}(s)}{v_{qsc}(s)} = \frac{G_{0i}}{1 + T_i.s} \quad (IV.15)$$

Avec :

$$G_{0i} = \frac{L_r^2}{L_r^2.R_s + L_m^2.R_r} \quad \text{et} \quad T_i = \frac{\sigma.L_s.L_r^2}{L_r^2.R_s + L_m^2.R_r} \quad (IV.16)$$

On aboutit alors aux schémas blocs simples et identiques pour les deux axes :

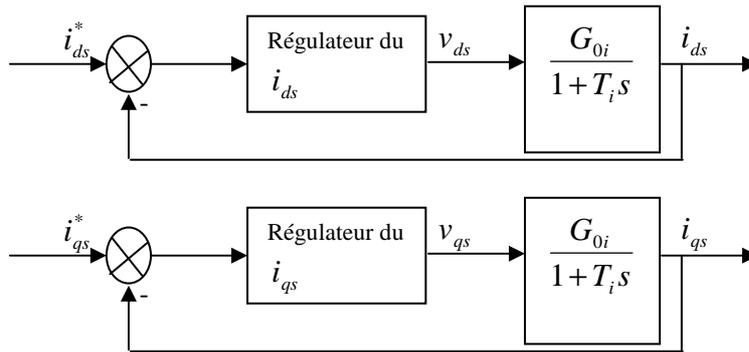


Fig. IV.2: boucles de régulation de i_{ds} et i_{qs} après découplage.

Modèle du flux

De l'équation (IV.9) et en supposant qu'en régime permanent le courant $i_{ds}(s)$ est égal à $i_{ds}^*(s)$, on a:

$$G_{\phi}(s) = \frac{\varphi_r(s)}{i_{ds}^*(s)} = \frac{G_{0\phi}}{1 + T_{\phi}s} \tag{IV.17}$$

Avec :

$$\begin{cases} G_{0\phi} = L_m \\ T_{\phi} = \frac{L_r}{R_r} \end{cases} \tag{IV.18}$$

$i_{ds}^*(s)$ est la sortie délivrée par le régulateur du flux qui sert de référence au régulateur du courant $i_{ds}(s)$.

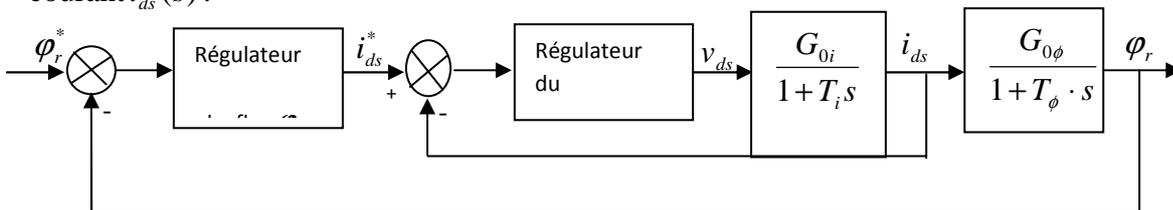


Fig. IV.3: boucle de régulation du flux.

Modèle de la vitesse

En utilisant l'équation (IV.5), et en négligeant le régime transitoire des grandeurs électromagnétiques, $i_{ds}(s) = i_{ds}^*(s)$, $i_{qs}(s) = i_{qs}^*(s)$ et $\varphi_r(s) = \varphi_r^*(s)$ et en considérant le couple résistant nul, on obtient :

$$G_w(s) = \frac{\Omega(s)}{i_{qs}^*(s)} = \frac{G_{0w}}{1 + T_w \cdot s} \quad (\text{IV.19})$$

Avec :

$$G_{0w} = \frac{PL_m \phi_r^*}{L_r f} \text{ et } T_w = \frac{J}{f} \quad (\text{IV.20})$$

ϕ_r^* étant la consigne constante imposée par le régulateur du flux et $i_{qs}^*(s)$ est la sortie du régulateur de vitesse qui sert de référence au régulateur du courant $i_{ds}(s)$.

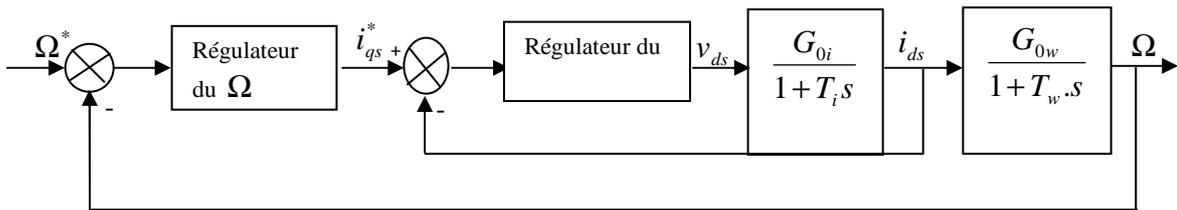


Fig. IV.4: boucle de régulation de la vitesse.

II. Application à la commande en vitesse de la machine asynchrone

Les courants ayant un régime transitoire plus rapide que celui de la vitesse mécanique, on peut négliger leur régime dynamique, lorsqu'on veut contrôler la vitesse. On peut de ce fait utiliser un régulateur H-infini pour la grandeur vitesse $\Omega(s)$, l'intérêt est d'améliorer la robustesse de la commande vis-à-vis des variations des paramètres mécaniques (le moment d'inertie en particulier), le rejet de perturbation (cas $c_r \neq 0$), l'atténuation des bruits de mesure et avoir une commande nécessaire au suivi de référence.

II.1. Correcteur H_∞ entier basé sur des fonctions de pondération entières

II.1.1 Présentation du problème

Le processus à asservir est présenté schématiquement par la figure(IV.4). L'objectif du problème est de calculer un correcteur H_∞ standard augmenté de trois fonctions de pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$. Les objectifs de l'asservissement sont les suivants :

- suivi de consigne avec erreur statique nulle,
- rendre le système plus rapide,
- bande passante : $\omega_c \approx 16$ rd/s,
- marge de phase : $\Delta\varphi \approx 45^\circ$,

- erreur statique due à une perturbation ($c_r \neq 0$) inférieur à 1%,
- atténuation du bruit de mesure,
- commande modérée.

II.1.2 Choix des fonctions de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$

Le procédé à commander représente la partie mécanique de la machine, sa fonction de transfert, qui correspond à son état paramétrique nominal, est donnée par :

$$G_w(s) = \frac{G_{0w}}{1 + T_w \cdot s} = \frac{235.4}{3.875s + 1} \quad (\text{IV.21})$$

Le filtre $W_1(s)$ est choisi afin que le diagramme de $\frac{\gamma}{|W_1|}$, coupe l'axe 0dB à 16 rd/s (bande passante demandée) et en appliquant la relation (III.22) avec $G_\infty = 0.7$, $G_0 = 100$ et $\omega_c = 16$ rd/s.

Dans un premier temps $W_2(s)$ et $W_3(s)$ sont choisies constantes, avec $W_3(s)$ très faible ($W_3 = 10^{-2}$). En d'autres termes, le calcul du correcteur tient compte de la référence mais ignore la perturbation. La valeur de $W_2(s)$ est ajustée afin que la fonction de sensibilité S suive le plus près possible le gabarit $\frac{\gamma}{|W_1|}$. Finalement, la valeur $W_2 = 1$ à été retenue. Dans ce

cas la norme H_∞ de la matrice $\begin{bmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{bmatrix}$ est $\gamma = 0.9$.

On augmente ensuite progressivement la valeur de W_3 , jusqu'à ce qu'un effet significatif apparaisse sur la valeur γ , en veillant toutefois à ce que celui-ci ne dépasse pas excessivement la valeur 1. On obtient $\gamma = 0.9082$ pour $W_3 = 0.26$.

Enfin, on introduit une atténuation en haute fréquences sur le gabarit $\frac{\gamma}{|W_2|}$ afin d'obliger le

gain du correcteur à chuter dans les hautes fréquences. Cela permet de limiter la sensibilité au bruit. A nouveau on fait en sorte de ne pas augmenter de façon trop importante la valeur de γ .

Les fonctions de transfert finalement choisies sont:

$$W_1(s) = \frac{(70s + 1143)}{(100s + 11.43)} \quad (\text{IV.22})$$

$$W_2(s) = \frac{86.6s + 5000}{0.866s + 10000} \tag{IV.23}$$

$$W_3(s) = 0.26 \tag{IV.24}$$

On obtient $\gamma = 0.9182$ pour un correcteur d'ordre 3 dont la fonction de transfert est :

$$K(s) = \frac{19.39s^2 + 2.24e^5s + 1.684e^6}{s^3 + 3419s^2 + 5.155e^5s + 5.886e^4} \tag{IV.25}$$

L'introduction du correcteur entier ainsi obtenu dans la boucle de régulation de la vitesse donne des résultats présentés par les figures IV.5 et IV.6.

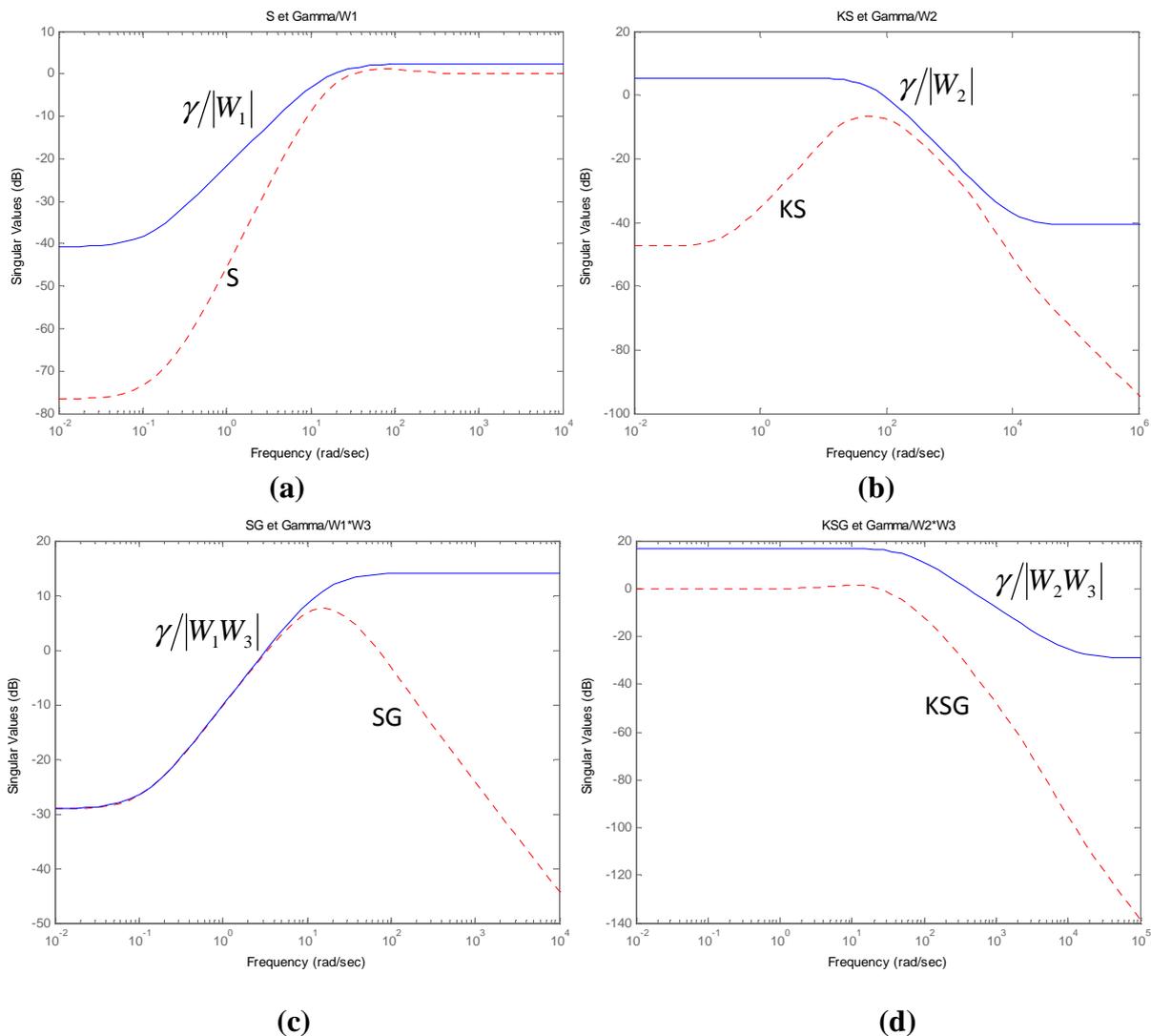


Fig. IV.5 Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectifs.

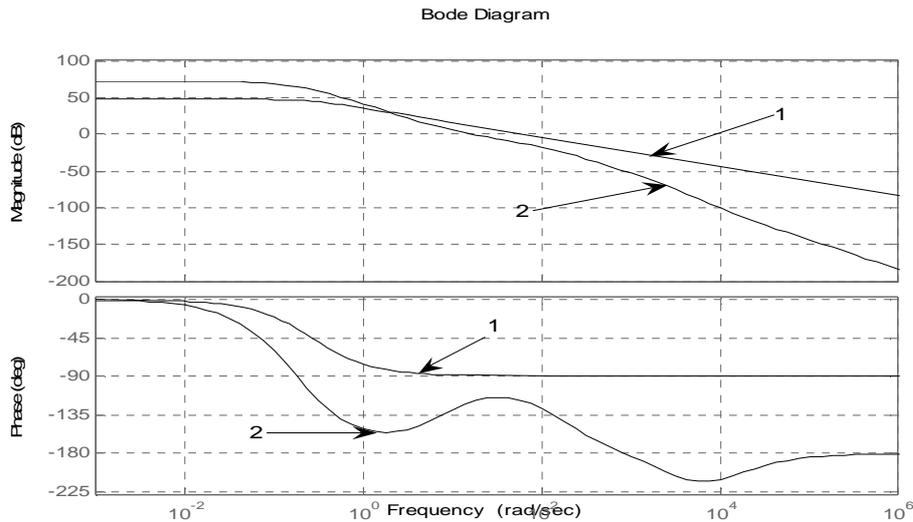


Fig. IV.6: Réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée (2) et du procédé $G_w(s)$ (1).

La figure (IV.5.a) représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité $S(s)$ et celui de son gabarit $\frac{\gamma}{|W_1|}$. On remarque que le diagramme de $S(s)$ est en dessous de son gabarit et le gain de $S(s)$ en basse fréquences est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

La figure (IV.5.b) représente le diagramme de Bode du module du transfert $KS(s) = \frac{u(s)}{r(s)}$ et celui du gabarit $\frac{\gamma}{|W_2(jw)|}$. Dans ce cas aussi le diagramme de $KS(s)$ est en dessous de son gabarit, le gain de $KS(s)$ est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne, et assure une stabilité robuste sur le modèle complet.

La figure (IV.5.c) représente le diagramme de Bode du module du transfert $SG(s) = \frac{\varepsilon(s)}{b(s)}$ et celui du gabarit $\frac{\gamma}{|W_1W_3(jw)|}$. Le diagramme de Bode de $SG(s)$ est également en dessous du gabarit, cela garanti un rejet de perturbation.

La figure (IV.5.d) représente le diagramme de Bode du module $KSG(s)$ et son gabarit $\frac{\gamma}{|W_2W_3(jw)|}$. Le diagramme de Bode de $KSG(s)$ est également en dessous du son gabarit fréquentielle, cela justifie le bon choix des fonctions de pondération $W_2(s)$ et $W_3(s)$.

La figure (IV.6) représente la réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée $G(s)K(s)$ et celle de procédé $G(s)$, elle montre que la pulsation au gain unité est égale 16rd/s et la marge

de phase est égale à 55° . Ces résultats montrent que le cahier des charges est respecté, à l'exception de la marge de phase qui est un peu grande. Ceci est dû à la relation qui existe entre la marge de phase et le dépassement. Si la marge de phase diminue, le dépassement augmente et vice versa. Mais dans notre cas on tolère le dépassement, donc la marge de phase obtenue est acceptable.

II.2. Correcteur H_∞ utilisant des fonctions de pondération non entières

II.2.1 Correcteur H_∞ utilisant des fonctions de pondération ayant la forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$

On rappelle que la synthèse du correcteur H_∞ non entier, consiste à remplacer l'opérateur de Laplace s par s^α dans les fonctions de pondération entières données dans le paragraphe (III.2). Ainsi les fonctions de pondération non entières sont :

$$W_{1ne}(s) = \frac{(70s^{0.7} + 1143)}{(100s^{0.7} + 11.43)} \quad (IV.26)$$

$$W_{2ne}(s) = \frac{86.6s^{0.5} + 5000}{0.866s^{0.5} + 10000} \quad (IV.27)$$

$$W_{3ne}(s) = W_3(s) = 0.26 \quad (IV.28)$$

Les opérateurs de dérivation $s^{0.7}$, $s^{0.5}$ sont approximés dans une bande de fréquences $[10^{-5} \ 10^{+5}]$ en utilisant 10 cellules et le correcteur H_∞ synthétisé est effectué pour $\gamma = 0.986216$.

L'introduction du correcteur non entier ainsi obtenu dans la boucle de régulation de la vitesse donne des résultats présentés par les figures IV.7 et IV.8.

La figure (IV.7) représente le diagramme de Bode des modules des fonctions S , KS , SG , KSG et leurs gabarits fréquentiels respectifs.

Dans ce cas aussi tous les transferts caractérisant la boucle fermée sont situés en dessous de leurs gabarits, avec la particularité que c'est le transfert $SG(s)$ qui atteint le premier ses limites, c'est donc le rejet de perturbation qui ne peut pas être amélioré.

La figure (IV.8) représente le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigé et celle de procédé $G(s)$. On remarque que la marge de phase obtenue est de 70° à 16rd/s, elle est supérieure à celle demandée, cela est dû à la plage d'approximation choisie.

Remarque : on peut avoir une marge de phase de 45° , en élargissant la bande de fréquences d'approximation, mais la valeur de γ dépasse 1.

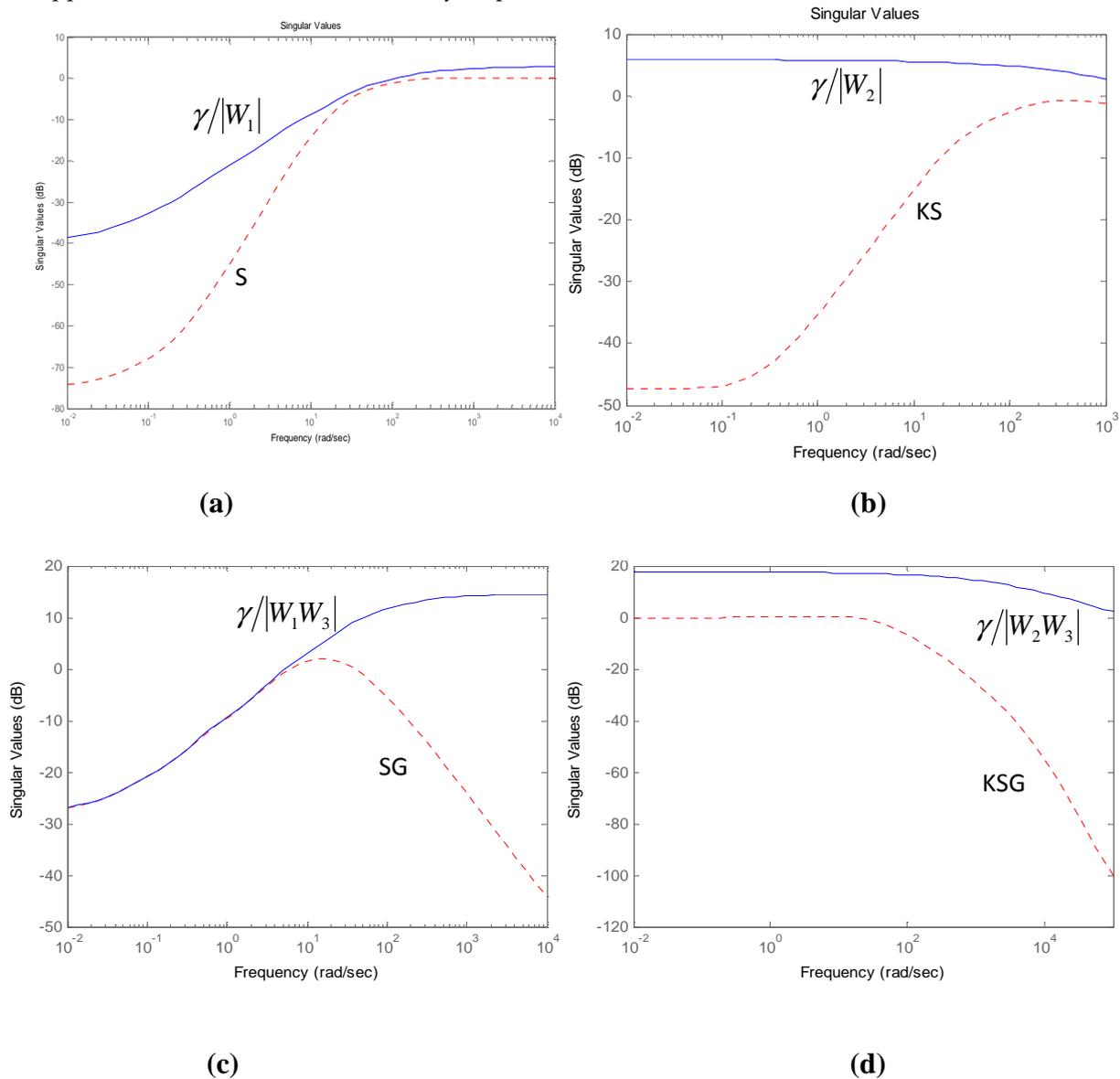


Fig. IV.7: Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectifs.

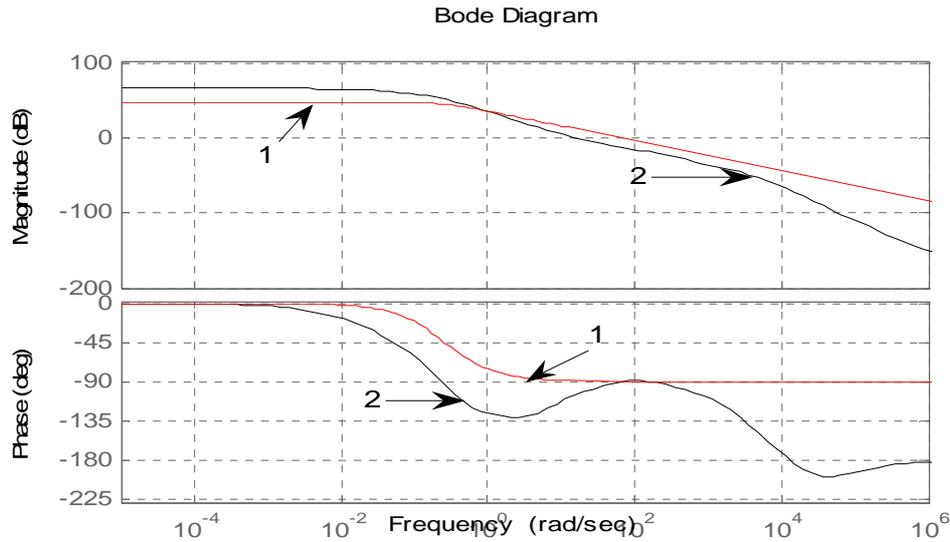


Fig. IV.8: Réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée (2) et du procédé

$$G_w(s)(1).$$

II.2.2. Correcteur H_∞ non entier utilisant l'intégrateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$

Dans ce cas, la procédure consiste à prendre directement les fonctions de pondération $W_{1ne}(s)$, $W_{2ne}(s)$ et $W_{3ne}(s)$ sous forme d'un dérivateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$.

Ainsi les fonctions de pondération non entières choisies pour $\alpha = 1.7$ sont :

$$W_{1ne}(s) = \frac{1}{s^{1.7}} \quad (\text{IV.29})$$

$$W_{2ne}(s) = \frac{1}{s^{1.7}} \quad (\text{IV.30})$$

$$W_{3ne}(s) = 0.1 \quad (\text{IV.31})$$

L'opérateur de dérivation $s^{1.7}$ est approximé dans une bande de fréquences $[10^{-1} \ 10^{+1}]$ en utilisant 10 cellules et le correcteur H_∞ synthétisé est effectué pour $\gamma = 1.006$.

Les résultats obtenus sont illustrés par les figures IV.9 et IV.10.

La figure (IV.9) représente le diagramme de Bode des modules des fonctions S , KS , SG , KSG et leurs gabarits fréquentiels respectifs.

Dans ce cas aussi tous les transferts caractérisant la boucle fermée sont situés en dessous de leurs gabarits, avec la particularité que ce sont les transferts $S(s)$ et $SG(s)$ qui atteignent les

premiers leurs limites, c'est donc la précision et le rejet de perturbation qui ne peuvent pas être améliorés.

La figure (IV.10) représente le diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigé et celle de procédé $G(s)$. On remarque que la marge de phase obtenue est de 71° à 16rd/s.

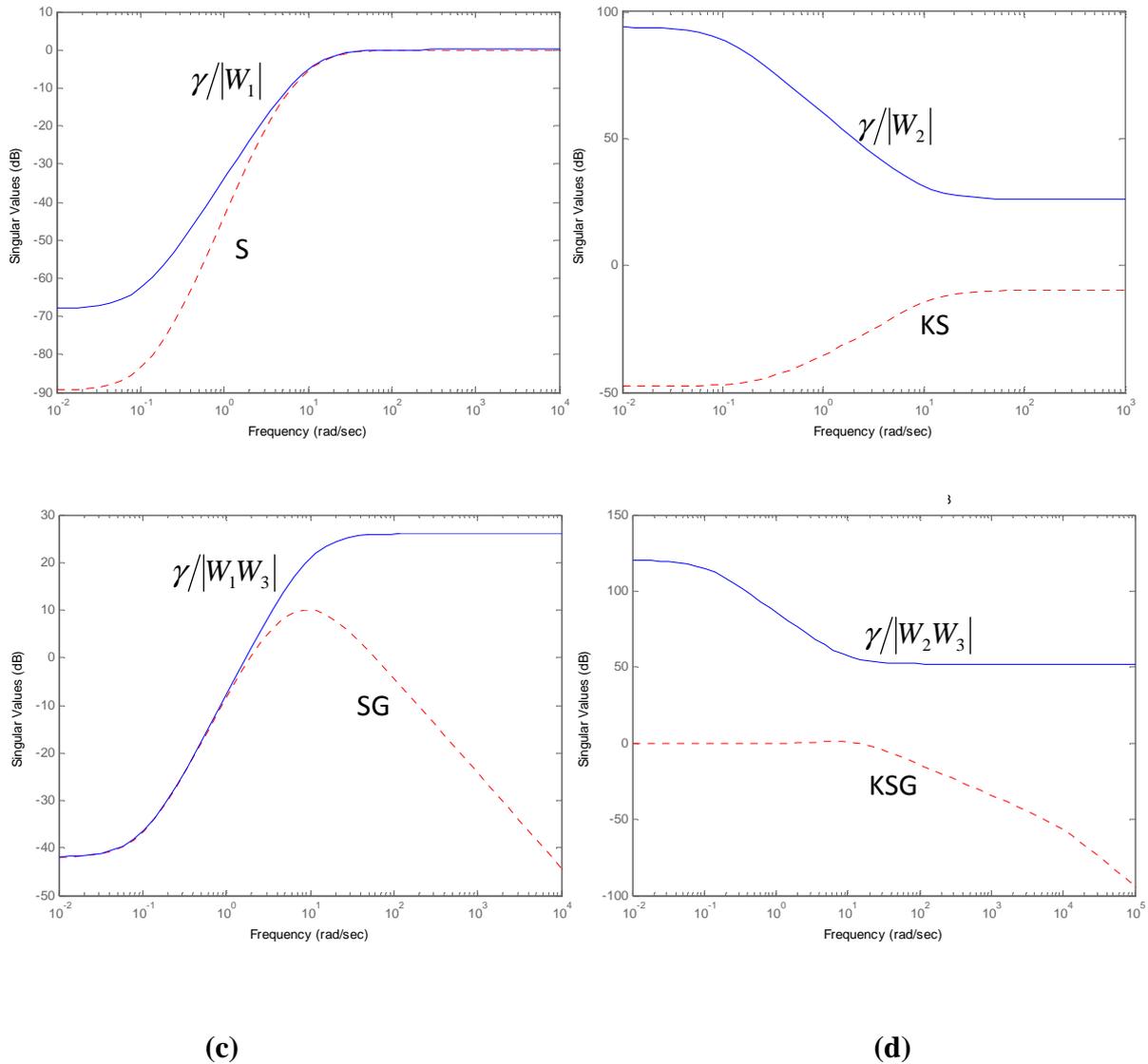


Fig. IV.9: Diagramme de Bode des transferts S , KS , SG , KSG et leurs gabarits respectifs.

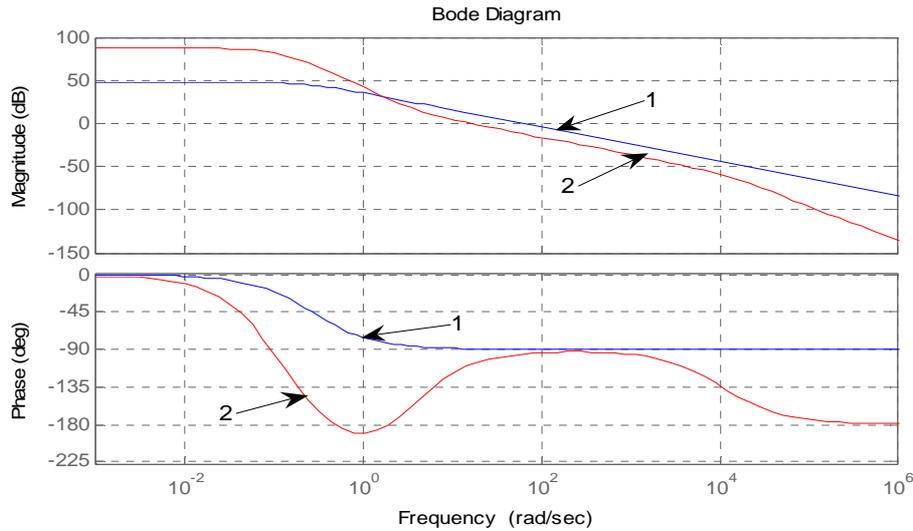


Fig. IV.10: Réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée (trait continu) et du procédé $G_w(s)$ (trait discontinu).

II.3. Teste de robustesse

Pour étudier la robustesse des trois régulateurs ainsi calculés on a appliqué à l'entrée de la boucle de régulation de la vitesse deux types de références :

- la première est d'une consigne d'amplitude 157 rad/s (la vitesse nominale de la machine sans régulation) afin de tester la robustesse de la commande vis-à-vis de rejet de perturbation. On a choisi la valeur 157 rad/s de la consigne pour voir si le courant de démarrage est plus important en boucle fermée.
- la deuxième est une consigne en escalier (voir la figure IV.11) pour tester la robustesse de la commande vis-à-vis de suivi de consigne, de l'atténuation des bruits de mesure ainsi qu'aux variations de paramètres (moment d'inertie, la résistance rotorique).

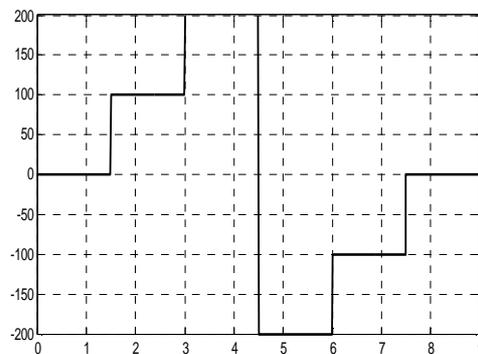


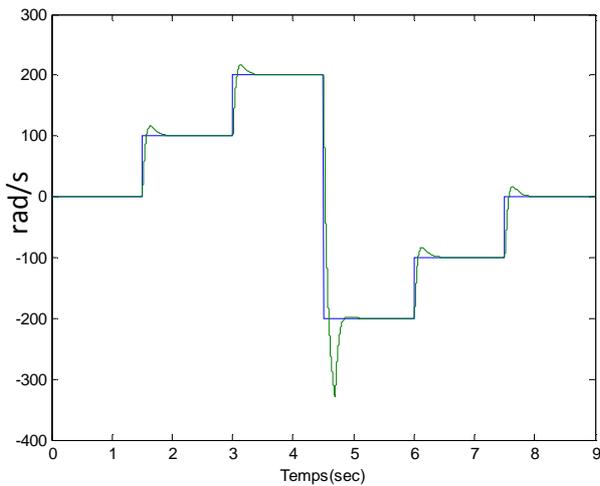
Fig. IV.11: Référence en escalier utilisé pour le deuxième teste.

II.3.1. Suivi de consigne

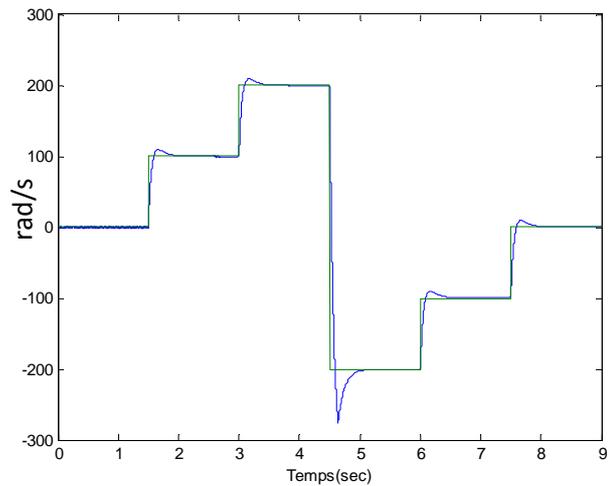
La figure (VI.12) représente pour chaque correcteur, la réponse indicielle du procédé nominal. On constate que pour les trois régulateurs la vitesse suit la trajectoire imposée.

La figure (IV.13) montre la grandeur interne de la boucle de commande de la vitesse pour chaque régulateur qu'est le courant $i_{qs}(t)$, pour l'état paramétrique nominal de la machine.

La figure (VI.14) représente le flux ϕ_r , qui correspond au découplage de la machine.
machine.

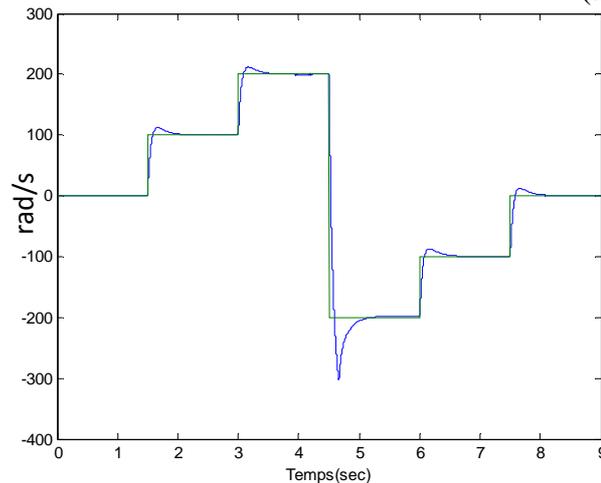


a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier



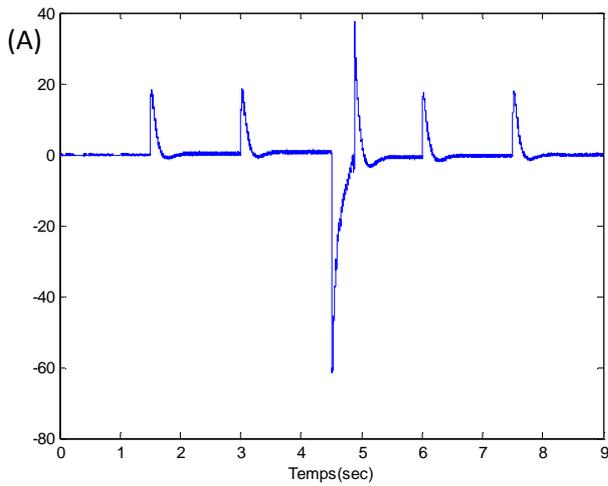
b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération

$$(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$$

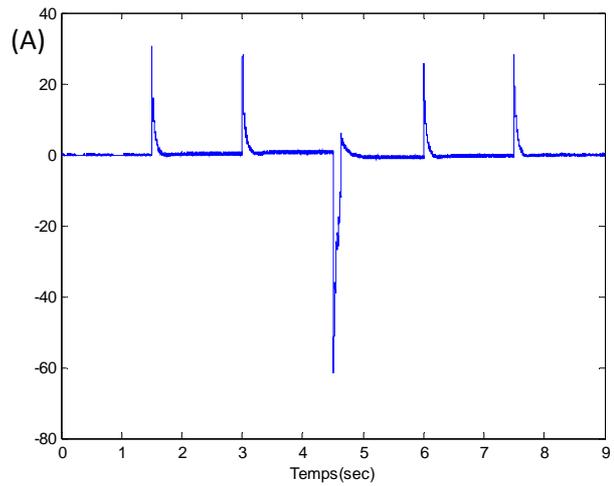


c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(1/s^\alpha)$

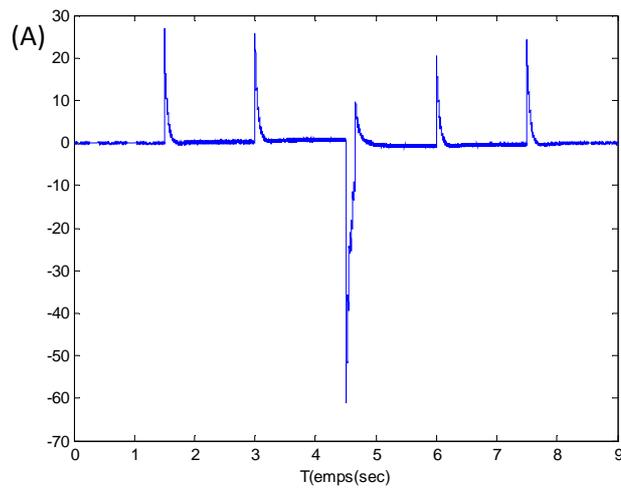
Fig. IV.12: Réponses indicielles de procédé nominal



a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier

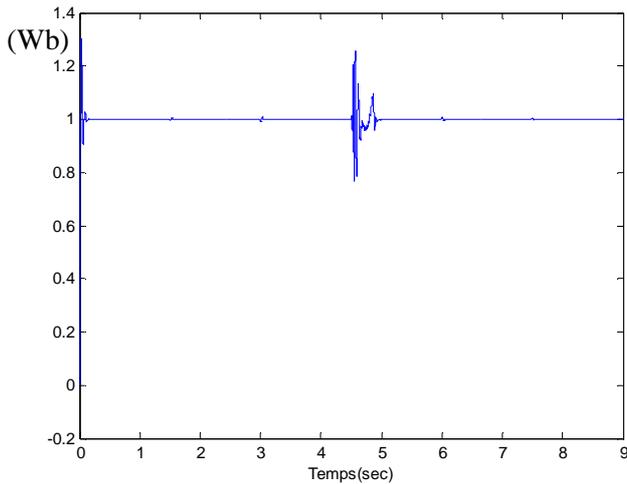


b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$

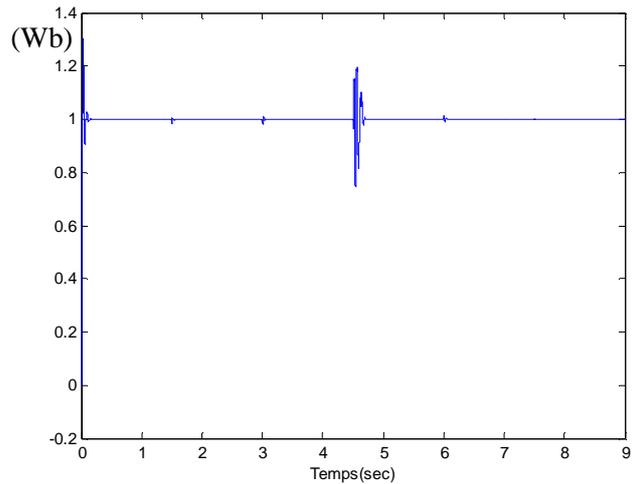


c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(1/s^\alpha)$

Fig. IV.13: Courant $i_{qs}(t)$ pour les différents correcteurs.

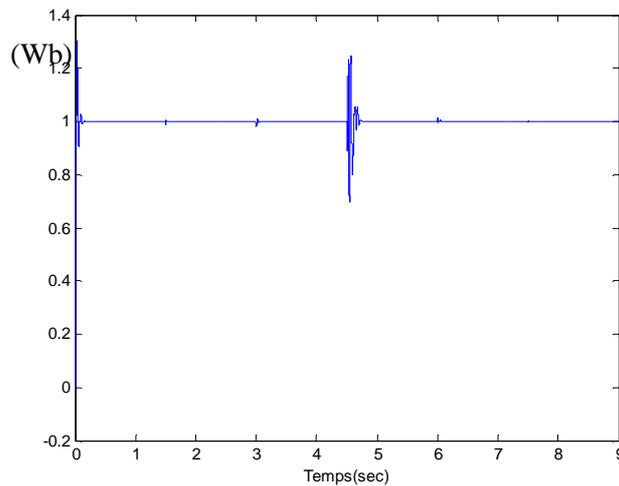


a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier



b : Réponses avec le correcteur H_∞ non

entier utilisant la pondération $(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$



c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(1/s^\alpha)$

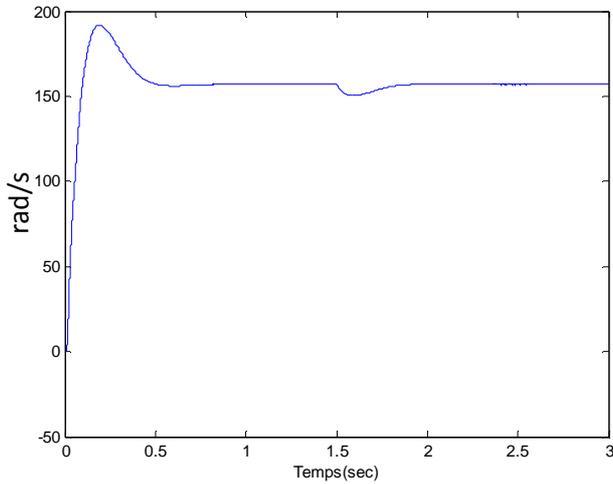
Fig. IV.14: le flux φ_r pour les différents correcteurs

On constate que le découplage est détérioré pour les trois commandes pendant les changements de valeurs de consigne, surtout lors du changement du sens de rotation de la valeur 200rad/s à -200 rad/s.

II.3.2. Rejet de perturbation

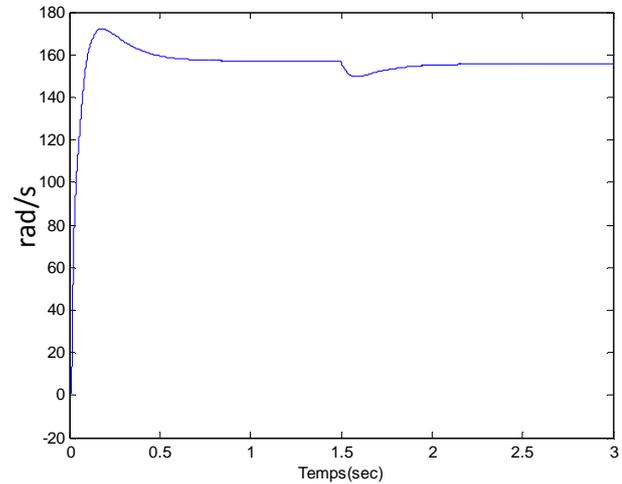
La simulation temporelle pour cette spécification est donnée par la figure(IV.15), avec l'application d'un couple résistant de 1.8 Nm à l'instant $t = 1.5s$. Ces résultats satisfont les spécifications de performances puisque le temps de monté est inférieur à 3s pour les trois régulateurs.

Enfin les perturbations sont efficacement rejetées par les trois correcteurs, c'est ce que montrent les figures (IV.5(c), IV.7(c), IV.9(c)), puisque dans chaque cas le diagramme de Bode de la transmittance SG est inférieur à son gabarit fréquentiel.



a : Réponses obtenues avec

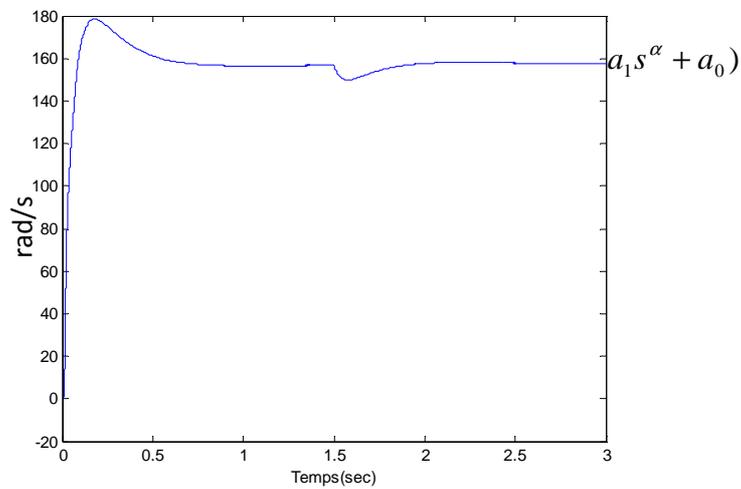
le correcteur H_∞



b : Réponses avec le correcteur H_∞

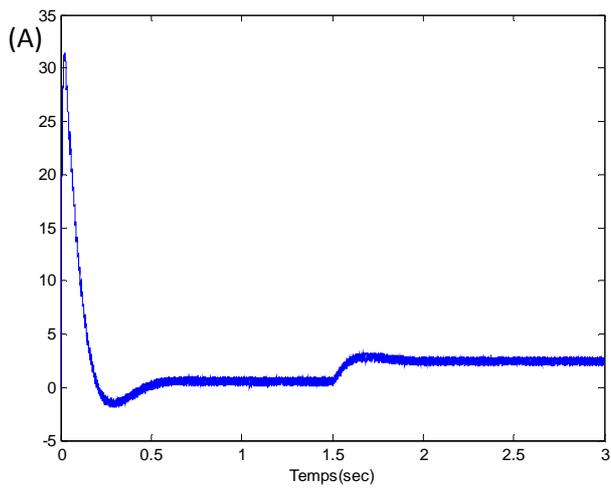
non

entier utilisant la pondération

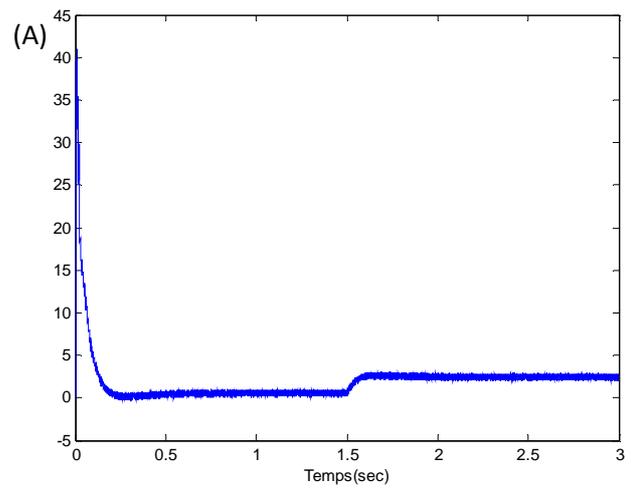


c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération ($1/s^\alpha$)

Fig. IV.15. Réponses indicielles nominales, application d'un couple résistant de 1.8 Nm à $t = 1.5$ s

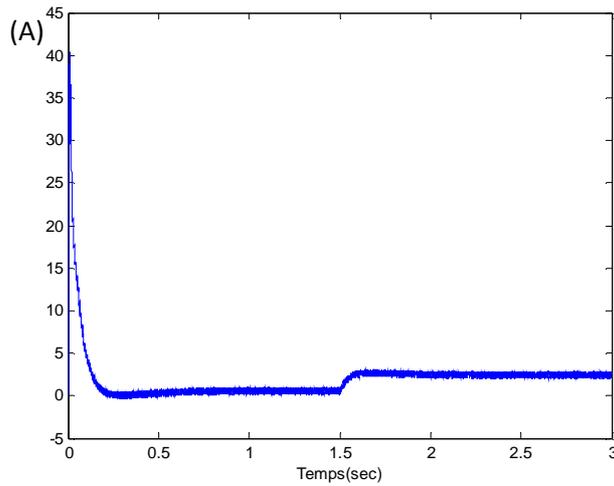


a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier



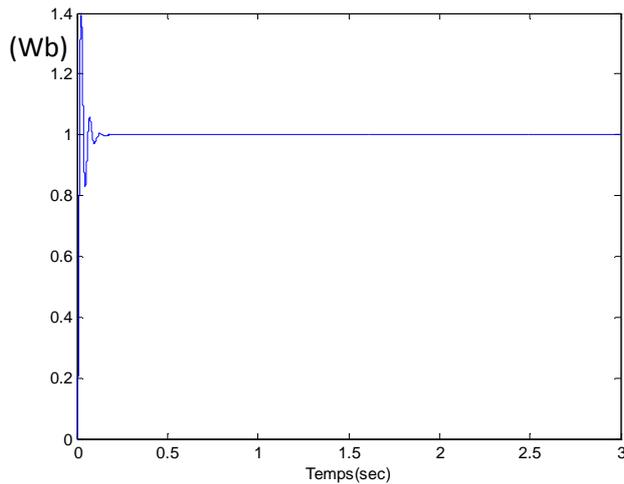
b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération

$$(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$$

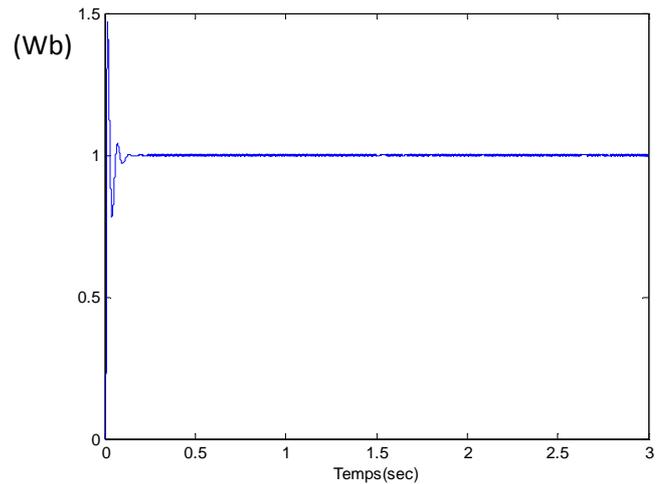


c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞

Fig. IV.16: Courant $i_{qs}(t)$ pour les différents correcteurs

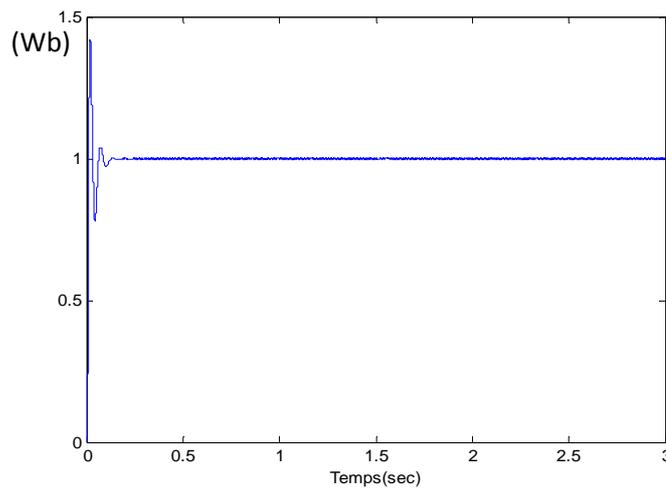


a : Réponses obtenues avec
le correcteur H_∞ entier



b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier
utilisant la pondération

$$(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$$



c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞
non entier utilisant la pondération $(1 / s^\alpha)$

Fig. IV.17: le flux φ_d pour les différents correcteurs

Pour comparer les performances des trois régulateurs, on a mesuré au régime transitoire de la vitesse le temps de réponse, le dépassement, l'erreur statique et le maximum des courants, ainsi que l'effet de la perturbation sur le régime permanent : on a mesuré à l'instant $t=2s$ l'erreur statique E_1 et l'erreur statique E_2 à l'instant $t=3s$, les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	t_r	D(%)	ε_{01}	i_{qsmax}	E_1	E_2
Correcteur entier	0.379	22	0	31	0.05	0
Correcteur non entier utilisant la pondération $b_1s^\alpha + b_0 / a_1s^\alpha + a_0$	0.333	9.6	0.01	41	1.9	1
Correcteur non entier utilisant la pondération $1/s^\alpha$	0.41	13.6	0.02	40	0.5	0.3

Tableau 2 : Caractéristiques de la réponse indicielle pour les trois régulateurs : t_r (temps de réponse), D(%) (dépassement), ε_{01} (erreur statique), i_{qsmax} (le maximum des courants au démarrage), E_1 (l'erreur statique l'instant $t=2s$), E_2 (l'erreur statique l'instant $t=3s$).

De tableau 2 ; on constate que :

-le correcteur entier donne la meilleure valeur de pic de courant, il rejette parfaitement la perturbation ainsi il donne une erreur statique nulle.

-Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération ayant la forme $\left(\frac{b_1s^\alpha + b_0}{a_1s^\alpha + a_0} \right)$, donne le meilleur dépassement de 9.6%.

-Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération sous forme d'un dérivateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$, donne le meilleur dépassement, par rapport au régulateur entier.

La figure (IV.16) représente les courbes du courant pour les trois régulateurs. On remarque que le maximum des courants est respectivement égal à 31A, 41A, 40A au démarrage et lorsqu'on injecte le couple résistant, les régulateurs réagissent en augmentant le courant $i_{qs}(t)$ pour augmenter le couple électromagnétique permettant de compenser le couple résistant afin de ramener la vitesse à sa valeur initiale.

Les courbes de flux (figures IV.17a, IV.17b, IV.17c) qui correspondent respectivement aux trois régulateurs entier, non entier utilisant la pondération $b_1s^\alpha + b_0/a_1s^\alpha + a_0$ et non entier utilisant la pondération $1/s^\alpha$ montrent que lorsqu'on injecte un couple résistant de 1.5, le flux φ_d n'est pas perturbé, cela montre que le découplage est maintenu.

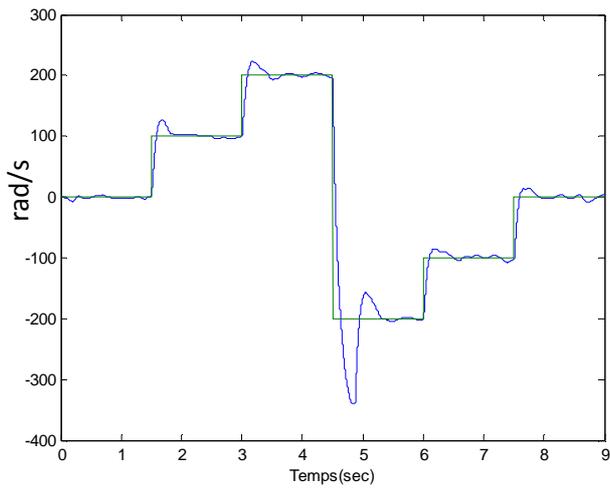
II.3.3. Robustesse vis-à-vis des bruits de mesure

Pour étudier la robustesse vis-à-vis des bruits on applique à l'entrée de la boucle de régulation la consigne de la figure (IV.11) et on injecte des bruits à la vitesse mesurée

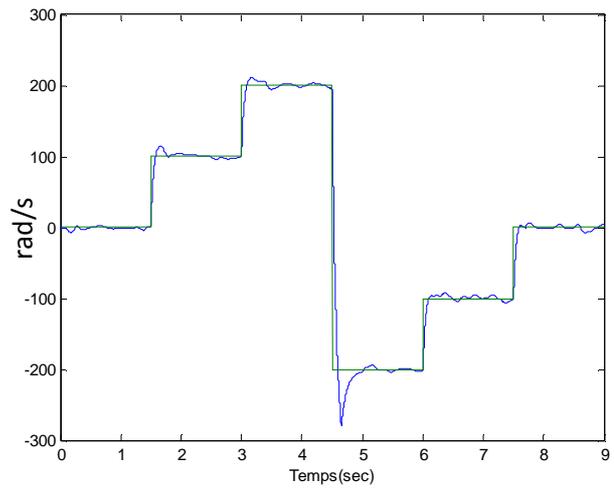
La figure (IV.18) représente l'effet de des bruits sur la vitesse ; on remarque que les trois régulateurs filtrent correctement les bruits.

II.3.4. Robustesse vis-à-vis de variation de paramètres

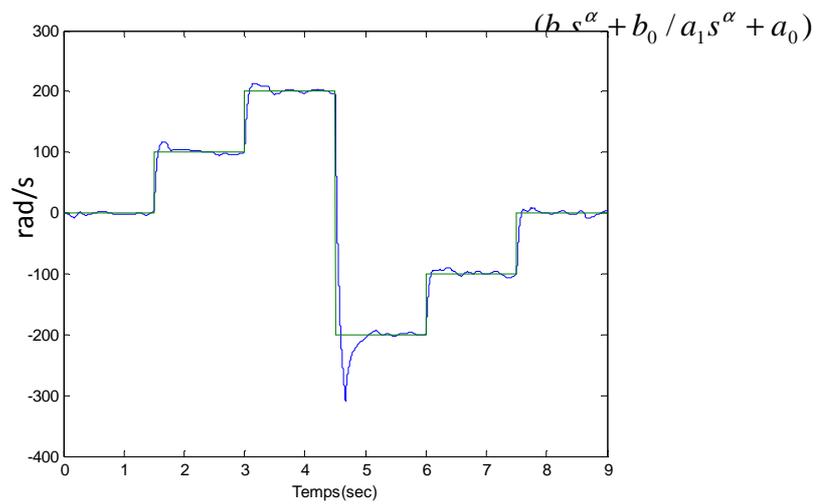
Pour étudier la robustesse vis-à-vis des variations des paramètres mécaniques du moteur asynchrone, on applique à l'entrée de la boucle de régulation de la vitesse une consigne de la figure (IV.11). Plusieurs valeurs sont alors considérées pour le paramètre J et R_r , pour les trois correcteurs. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures (IV.19, IV.20). on remarque que le dépassement de la réponse indicielle est insensible à la variation du moment d'inertie et de la résistance rotorique en utilisant les trois correcteurs, sauf dans le cas de changement de consigne de la valeur 200rad/s à -200rad/s.



a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier

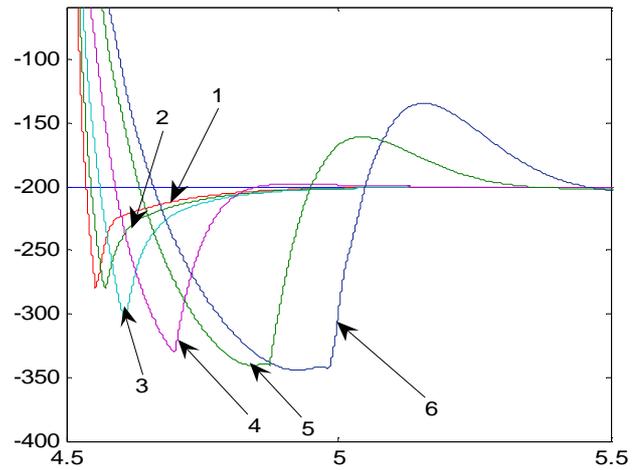
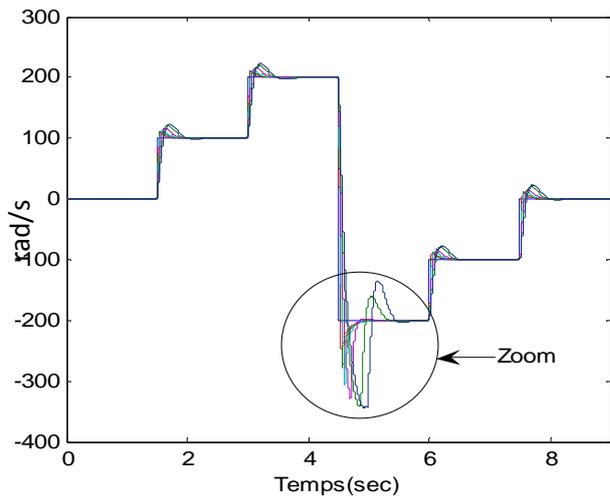


b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération

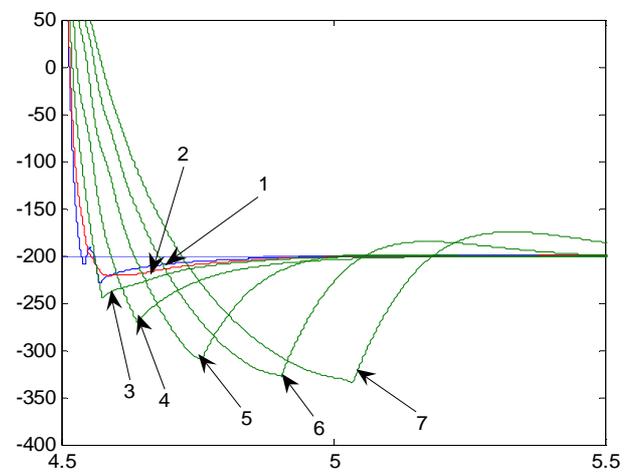
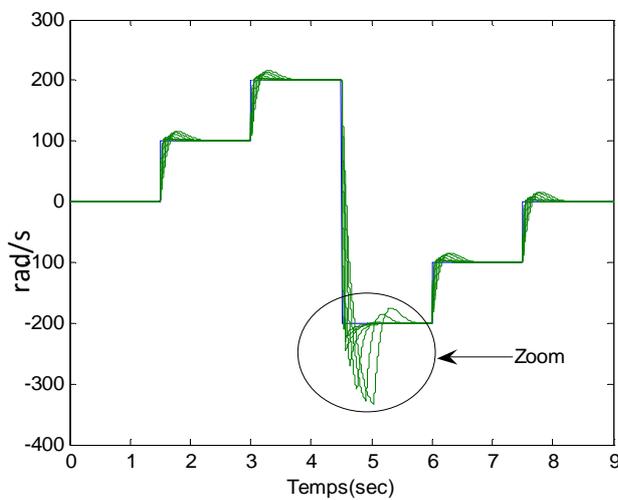


c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération ($1 / s^\alpha$)

Fig. IV.18 : Réponses indicielles nominales, application d'un bruit blanc.

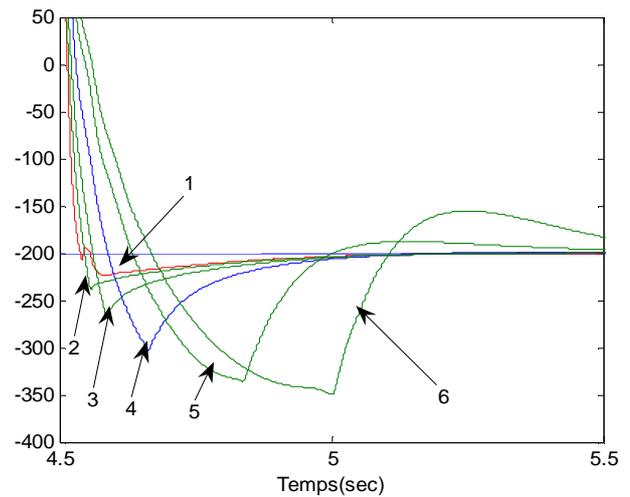
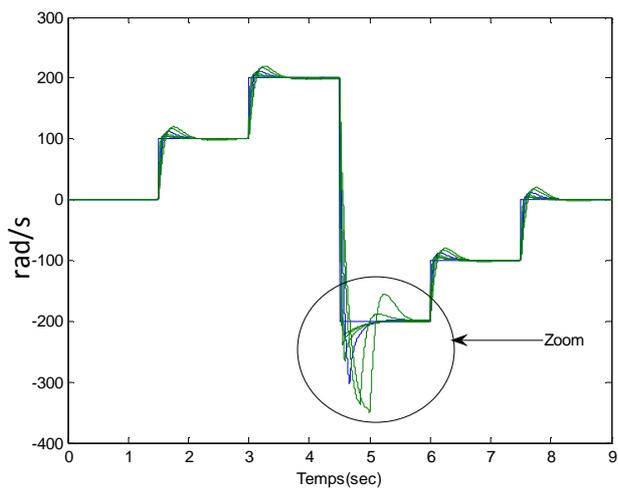


a : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ entier. (1.J/2.5, 2.J/2, 3.J/1.5, 4.J, 5.1.5J, 6.2J)



b : Réponses avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha + a_0)$

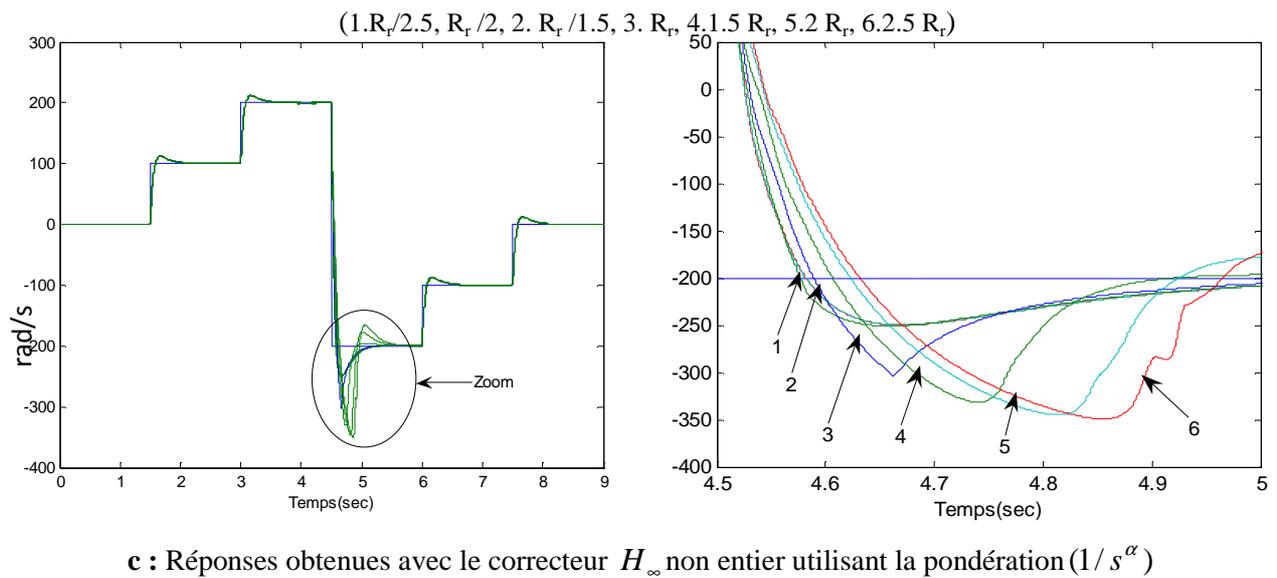
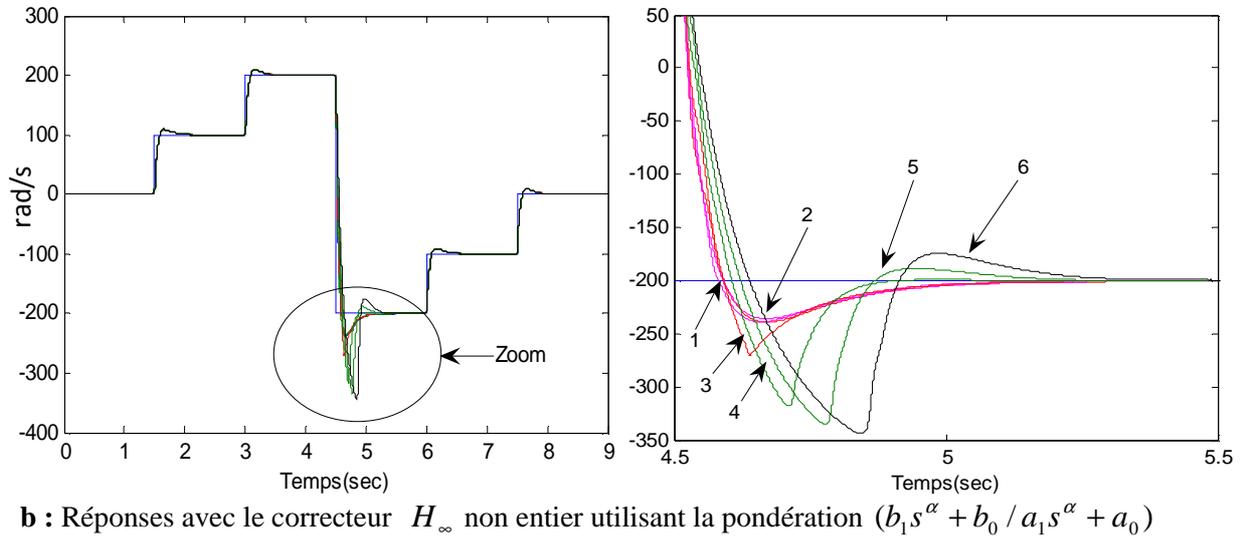
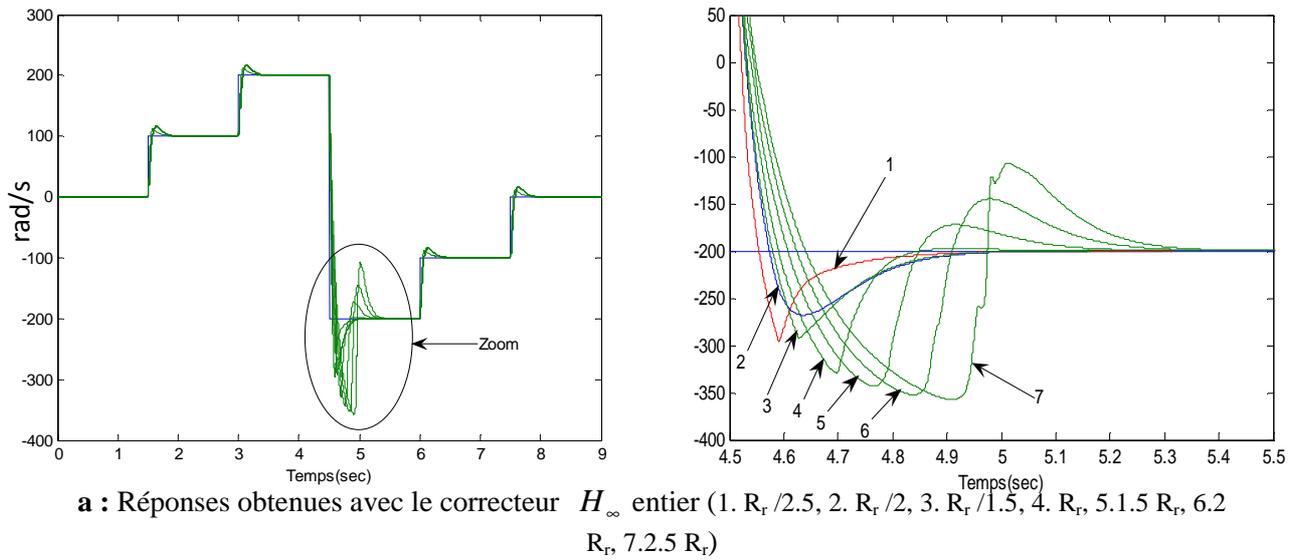
(1.J/2.5, 2.J/2, 3.J/1.5, 4.J, 5.1.5J, 6.2J, 7.2.5J)



c : Réponses obtenues avec le correcteur H_∞ non entier utilisant la pondération $(1/s^\alpha)$

(1.J/2.5, 2.J/2, 3.J/1.5, 4.J, 5.1.5J, 6.2J)

Fig. IV.19: Réponses indicielles pour différentes valeurs du moment d'inertie J



(1. $R_r/2.5$, $R_r/2$, 2. $R_r/1.5$, 3. R_r , 4. $1.5 R_r$, 5. $2 R_r$, 6. $2.5 R_r$)

Fig. IV.20: Réponses indicielles pour différentes valeurs de la résistance rotorique R_r

Critère Correcteur	Rejet de perturbation	Atténuation Des bruits	Suivi de consigne	Variation de paramètres	Temps de réponse t_r	Dépassement	Erreur statique ϵ_{01}	Pic de courant au démarrage	Marge de phase
Correcteur entier	1	1	1	2	2	3	1	1	1
Correcteur non entier utilisant la pondération $b_1 s^\alpha + b_0 / a_1 s^\alpha$	3	1	1	1	1	1	2	3	2
Correcteur non entier utilisant la pondération $1/s^\alpha$	2	1	1	2	3	2	3	2	3

Tableau 3 : classement des trois régulateurs par port aux performances

Conclusion

Dans ce chapitre, on a appliqué les différents régulateurs étudiés dans le chapitre III pour la commande en vitesse de la machine asynchrone. Les résultats de simulation obtenus ont montrés que tous les objectifs de robustesse ont été atteints. En effet, les trois correcteurs donnent des bons résultats vis-à-vis du rejet perturbation, d'atténuations des bruits de mesure et du suivi de consigne. Ils assurent aussi un degré de stabilité robuste vis-à-vis des variations de moment d'inertie et la résistance rotorique du procédé commandé. Ainsi on a établi le tableau comparatif 3, nous permettant de classer chacun des correcteurs selon les critères suivant : rejet de perturbation, atténuation des bruits de mesures, suivi de consigne ainsi que variation de paramètres, temps de réponse, dépassement, erreur statique, , marge de phase et la valeur de pic de courant au démarrage et à partir de ce tableau on a conclu que:

- Le régulateur entier donne une meilleure performance vis-à-vis du rejet de perturbation, valeur du pic de courant au démarrage. Il donne également la meilleure marge de phase et la meilleure erreur statique. Mais il donne le plus grand dépassement.
- Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération ayant la forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$, donne une meilleure performance vis-à-vis du temps de réponse. il donne aussi le meilleur dépassement, mais il est classé le dernier par rapport au rejet de perturbation et à la valeur de pic de courant au démarrage.
- Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération sous forme d'un dérivateur généralisé $\frac{1}{s^\alpha}$, donne le meilleur dépassement, par rapport au régulateur entier. Il est plus performant vis-à-vis du rejet de perturbation, de la valeur de pic de courant au démarrage par rapport aux résultats obtenus par le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération sous forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$. il faut signaler qu'il est classé le troisième vis-à-vis du temps de réponse, erreur statique et de marge de phase.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire traite de la synthèse des régulateurs entiers et non entiers en utilisant le principe de synthèse H_∞ pondérée. Trois structures de régulateurs ont alors été considérées. La première est obtenue en utilisant des fonctions de pondérations entières. La seconde utilise des fonctions de pondération ayant la même structure que celles entières mais en remplaçant l'opérateur de dérivation entier s par l'opérateur de dérivation non entier s^\square . La troisième structure est basée sur l'opérateur d'intégration non entier $1/s^\square$.

Le dimensionnement de chacun de ces régulateurs s'est fait à l'aide de l'algorithme de Glover-Doyle, qui est basé sur les équations de Riccati et utilisant la représentation d'état. Néanmoins, dans la version standard de la synthèse H_∞ , les modules des fonctions de transfert S, KS, GS et KSG doivent être majorés par la même valeur γ . Mais il arrive parfois que cette condition n'est pas vérifiée par ces quatre fonctions de transfert en même temps. Pour résoudre ce problème, des gabarits fréquentiels (fonctions de pondération) sont introduits aux différents points du schéma de synthèse. Ces fonctions de pondération permettent de modeler, indépendamment les uns des autres, les fonctions de transfert en boucle fermée.

Pour mener à bien ce travail, nous avons rappelé dans le premier chapitre les notions de base de la dérivation non entière et l'approximation des systèmes fractionnaires par des modèles entiers dans la représentation d'état en particulier. Nous avons ensuite présenté dans le deuxième chapitre le principe de synthèse H_∞ par l'approche standard. Le troisième chapitre a été consacré à la synthèse H_∞ pondérée. C'est dans ce cadre que nous avons introduit les fonctions de pondération non entières conduisant ainsi à des régulateurs H_∞ d'ordre non entier. Les résultats de simulation obtenus en appliquant les régulateurs ainsi obtenus sur un système du premier ordre ont montré que tous les objectifs du cahier des charges ont été atteints. En effet, toutes les fonctions de transfert caractérisant la boucle fermée sont situées en dessous de leurs gabarits respectifs. Dans le domaine temporel, les réponses indicielles de la sortie obtenues en utilisant les trois régulateurs sont similaires d'un point de vue caractéristique statique et dynamique. Il faut noter néanmoins que, contrairement aux autres correcteurs, le correcteur utilisant les fonctions de pondération $1/s^\square$ présente un dépassement (cela est dû à la valeur choisie de \square), mais c'est ce régulateur qui rejette rapidement la perturbation. La différence principale entre les trois structures de régulateurs est

illustrée par les réponses fréquentielles de la boucle ouverte. Celles-ci montrent que le régulateur H_∞ non entier utilisant des fonctions de pondération ayant la forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0}\right)$ présente une phase constante dans la bande de fréquences plus large autour de la pulsation de coupure. Cela signifie que si le gain du système change de valeur, le diagramme de module de la boucle ouverte change (ce qui est normal), par contre la phase reste constante cela signifie que la marge de phase n'est pas modifiée, par conséquent le dépassement de la réponse indicielle de la boucle fermée est indépendant du gain du système. C'est cette robustesse qui est recherchée lorsqu'on utilise le régulateur CRONE en particulier ou les régulateurs fractionnaires en général.

L'utilisation des régulateurs fractionnaires pour la commande en vitesse d'un moteur asynchrone [2, 29] a donné des résultats montrant que ce régulateur ne permet pas de rejeter correctement la perturbation due au couple résistant. C'est dans le but d'améliorer cette caractéristique que nous avons utilisé les trois régulateurs étudiés dans le troisième chapitre pour la commande en vitesse du moteur asynchrone. On souhaitait ainsi associer la robustesse de la synthèse H_∞ et celle des régulateurs fractionnaires. Les résultats de simulation obtenus ont montrés que tous les objectifs de robustesse ont été atteints. En effet, les trois correcteurs donnent des bons résultats vis-à-vis du rejet perturbation, d'atténuations des bruits de mesure et du suivi de consigne. Ils assurent également un degré de stabilité robuste vis-à-vis des variations de moment d'inertie et la résistance rotorique de la machine.

Il faut signaler que, du classement établi à la fin du chapitre IV, il en ressort que:

- le régulateur entier est celui qui donne les meilleurs résultats par rapport au: rejet de perturbation, au maximum de pic du courant au démarrage, à l'erreur statique ainsi qu'à la meilleure marge de phase.
- Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération ayant la forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0}\right)$, est par contre le mieux indiqué par rapport aux temps de réponse ainsi qu'au meilleur dépassement.
- Le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération ayant la forme d'un dérivateur généralisé $1/s^\alpha$, donne un meilleur dépassement, par rapport au régulateur entier. il est plus performant vis-à-vis du rejet de perturbation, de la valeur du pic de

courant au démarrage par rapport aux résultats obtenus avec le régulateur non entier utilisant les fonctions de pondération sous forme $\left(\frac{b_1 s^\alpha + b_0}{a_1 s^\alpha + a_0} \right)$.

Enfin, Il faut noter que la synthèse H_∞ pondérée est très tributaire du choix des fonctions de pondération puisque ce sont ces fonctions qui permettent d'atteindre les objectifs du cahier des charges. Néanmoins, leur détermination reste très difficile car elles sont spécifiques à chaque système. Ce problème est rendu encore plus complexe lorsqu'on veut utiliser des fonctions de pondération non entière à cause de l'ordre non entier qu'elles introduisent. En effet, on ne sait pas encore comment choisir la valeur de l'ordre non entier en fonction des caractéristiques que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée. C'est pourquoi la résolution de ce problème est la première perspective de ce travail. Une autre perspective intéressante serait d'explorer d'autres techniques, qui se basent sur la synthèse H_∞ : Loop-shaping et μ -analyse.

Bibliographie

- [1] F. Abdulgalil «Commande linéaire dans les systèmes de forage pétrolier : contribution à la suppression du phénomène de « STICK-SLIP » ». Thèse de doctorat, Université Paris XI. Orsay. 2006.
- [2] L. Ait Messaoud «Contribution à la Commande des Systèmes par Régulateurs d'Ordre Non Entier : Application à la Commande de la Machine Asynchrone». Mémoire de Magister, UMMTO, 2007.
- [3] J.Baowei, A. Haniph. Latchman et O.Crisalle «Robust H-infinity Stabilization for Interval Plants». IEEE International symposium on computer, aided control system design proceedings. September 18-20, Glasgow, Scotland, U,K 2002.
- [4] J.L. Battaglia, L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup et O. Cois «Heat Flow Estimate Through Inverted not Integer Identification Models». International Journal of Thermal Science, Vol. 39 (3), pp. 374-389, 2000.
- [5] N. Benyahia, K. Srairi et S. M. Mimoune «Commande de la Machine Asynchrone Par Orientation du Flux Rotorique» Courrier du Savoir – N°06, pp.147-150, 2005.
- [6] M. Bouharkat «Etude de l'Evolution des Courants Rotoriques d'une Machine Asynchrone à Cage en Régime Dynamique». Thèse de doctorat, université de Batna, Algérie, 2006.
- [7] M. Caputo. «Linear Models of Dissipation whose q is almost frequency independent. », Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. Vol. 2, n° 13, pp. 529-539.
- [8] M. Caputo and F. Mainardi. «A New Dissipation Model Based on Memory Mechanism», Journal of Pure and Applied Geophysics, vol,91, pp.201-210, 1983.
- [9] J.P Caron et J.P. Hautier. «Modélisation et Commande de la Machine Asynchrone » Edition TECHNIP, Paris, 1995.
- [10] J.D Cuyper, J. Swevers, M. Verhaegen et P.Sas «Feedback Control for Signal Tracking on a 4 Poster Test Rig in the Automotive Industry». LMS International, Interleuvenlaan 68, Leuven, Belgium 2001.
- [11] O. Cois , A. Oustaloup , T. Poinot et J.-L. Battaglia «Fractional State Variable Filter For System Identification by Fractional Model». European Control Conference - ECC'2001 - 4-7 September, Porto, 2001.
- [12] F. Demourant «Interaction Identification-Commande Robuste: Méthode et Application à l'Avion Souple». Thèse de doctorat, Ecole Nationale supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.2002. ONERA.

-
-
- [13] T. Djamah et R.Mansouri «Développement d'une Nouvelle Méthode de Calcul d'un Modèle d'état à partir d'un Modèle Transfert d'Ordre Non Entier Monovariante», Rapport Interne.
- [14] T. Djamah, R. Mansouri, M. Bettayeb et S. Djennoune « State Space Realization of Fractional Order Systems» CISA'09, 20-22 Janvier 2009. Intelligent Systems And Automation: 2nd Mediterranean Conference on Intelligent Systems and Automation (CISA'09).AIP Conference Proceedings, Volume 1107, pp. 37-42, 2009.
- [15] A. Djouambi, A.Charef et A.V Besançon «Optimal Approximation, Simulation and Analogue Realisation of the Fundamental Fractional Order Transfer Function»Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 17, No. 4, 455–462, 2007.
- [16] J. Doyle, B. Francis et A. Tannenbaum «Feedback Control Theory», Macmillan Publishing Co., 1990.
- [17] G. Duc « Panorama des principales approches relevant du «cadre H_∞ » ». Traitement du Signal – Volume 15 - n°6, 1998.
- [18] G. Duc et S. Font «Commande H_∞ et μ -Analyse». Editions HERMES, Paris, 1999.
- [19] S. Font « Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis: Optimisation H_∞ et Approche Symbolique de la Forme Standard». Thèse de doctorat, Université Paris XI. Orsay. 1995.
- [20] M.Ghanes «Observation et Commande de la Machine Asynchrone sans Capteur Mécanique», Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Novembre 2005.
- [21] R.Gorenflo and F.Mainardi « Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of fractional Order. In this book: « Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics», A.Carpinteri and F. Mainardi. Edition Springer Verlag, Wien, 1997.
- [22] S.Gumussoy, D.Henrion et M.Millstone «Multiobjective Robust Control with H_∞ », Katholieke Universities Leuven .Department of Computer Science, Belgium, 2001.
- [23] J.Hwa lee « A State Space Approach to h-infinity control of state delayed systems» Proceedings of SL winter workshop, feb, 13 – 15 ,1989.
- [24] M. Ichise, Y. Nagayanagi et T. Kojima « An Analogy Simulation of Non Integer Order Transfer Functions For Analysis of Electrode Processes». Journal of Electro-analytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry, Vol. 33, pp. 253-265, 1971.
- [25] D. Kemache « Contrôle Vectoriel et Adaptatif d'une Machine Asynchrone Alimentée par un Onduleur de Tension ». Mémoire de Magister UMMTO, Algérie, 1998.

-
-
- [26] A. Kruczek et A Stribrsky « H_{∞} Control of Automotive Active Suspension With Linear Motor». CTU, Faculty of Electrical Engineering. Department of Control Engineering Karlovo namesti 13, 121 35 Praha 2000.
- [27] H. Kwakernaak « Robust Control And H_{∞} -Optimisation ». Automatica, vol.29, No.2, PP.255-273, 1993.
- [28] J.A.T. Machado, M.F. Silva, R.S. Barbosa, I.S. Jesus, C.M. Reis, M.G. Marcos et A.F. Galhano «Some Applications of Fractional Calculus Engineering». Mathematical problems in Engineering, Vol. 2010, article ID639801, 2010.
- [29] R. Mansouri «Contribution à l'Analyse et la Synthèse des Systèmes d'Ordre Fractionnaire par la Représentation d'Etat ».Thèse de Doctorat UMMTO, 2008.
- [30] D. Matignon «Représentations en Variables d'Etat de Modèles de Guides d'Ondes Avec Dérivation Fractionnaire». Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1998.
- [31] A. Le Méhauté and G. Crepy. «Introduction to Transfer and Motion in Fractal Media: the Geometry of Kinetics». Solid State Ionics, vol. 9-10, pp.245-253, 1983.
- [32] L. Mianzo et H.Peng «LQ and H_{∞} Preview Control for a Durability Simulator», University of Michigan. 1997.
- [33] K.S Miller and B. Ross. «An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations ».Wiley, New York, 1993.
- [34] A. Monje, M Blas Vinagre, V.Feliu et Y.Q. Chen»Tuning and Auto-tuning of Fractional Order Controllers for Industry Applications». Control Engineering Practice 2007.
- [35] K. B. Oldham and J. Spanier. « Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order». Academic Press, New York, 1974.
- [36] K. B. Oldham and J. Spanier. «the Fractional Calculus». Mathematics in Science and Engineering, vol. 111, Academic Press, New York, 1974.
- [37] A. Oustaloup «La Commande CRONE ». Editions HERMES, Paris, 1991.
- [38] A. Oustaloup «La Dérivation Non Entière : Théorie, Synthèse et Applications».Editions HERMES, Paris, 1995.
- [39] A. Oustaloup «Système Asservis Linéaires d'ordre fractionnaire».Edition Masson, Paris, 1983.
- [40] A. Oustaloup et A. B. Mathieu «La Commande CRONE: du scalaire au multivariable». Editions Hermès, Paris,1999.

-
- [41] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, et F. Nanot .« Frequency-Band Complex No integer Differentiator: Charaterization and Synthesis IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol.47,n°1, pp.25-39, 2000.
- [42] I. Podlubney «Fractioanl-Order Systems and P \hat{I}^{μ} -Controllers». IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, n° 1, pp. 208-214, 1999.
- [43] I. Podlubny «Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation», Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, vol.5, n° 4, pp.367-386, 2002.
- [44] G. Puyou. «Conception Multi-objectifs de Lois de Pilotage pour un Avion de Transport Civil». Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure de l'aéronautique et de L'Espace,ONERA, 2005.
- [45] H.F Raynaud et A. Zergainoh «State-Space Representation For Fractional Order Controller» .Automatica 36 ,1017-1021.2000.
- [46] B. Ross « Fractionnal Calculus and its Applications». Lecture Notes in Mathematics 57, Springer Verlag, Berlin, 1975. [Proc. Int. Conf. held at Univ of New Haven, USA, 1974].
- [47] J. Sabatier, M. Aoun, A. Oustaloup, G. Gregoire, F. Ragot et P. Roy « Estimation of lead acid battery state of charge with a novel fractional model». Proc. of IFAC Fractional Differentiation and its Applications conference, Porto, 2006.
- [48] S.G. Samko, A. A. Kilbas et O.I. Marichev (1993) «Fractional Integrals and Derivatives». Gordon and Science Publishers.
- [49] G. Scorletti, V. Fromion. «Introduction à la Commande Multivariable des Systèmes : Méthode de Synthèse Fréquentielle H_{∞} »,.Thèse de Doctorat, université Caen, Basse Normandie, 2007.
- [50] W. Tan, H. J. Marquez, T. Chen, R. K. Gooden «Control Design for an Industrial Boiler», Proceedings of the American Control Conference Arlington, VA June 25-27, 2001.
- [51] D. Valerio «Fractional Robust System Control». Phd Thesis, Universidade Técnica de Lisboa, October, 2005.
- [52] M.Zeren et H.Özbay «On the Strong Stabilization And Stable H_{∞} Controller Design Problems for MIMO systems». Automatica 36 pp 1675-1684, 2000.

ANNEXE A

A.1. La Fonction Γ

La fonction Gamma (Γ) est la généralisation aux nombres réels de la fonction factorielle, définie pour les nombres entiers positifs, elle est donnée par [51] :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-w} w^{\nu-1} dw \quad \nu \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

On déduit de (A.1) que :

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{A.2})$$

ainsi que

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu) \quad (\text{A.3})$$

Et pour $\nu \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu! \quad (\text{A.4})$$

La fonction Gamma permet également de définir la fonction causale $\Phi_\nu(t)$ telle que :

$$\Phi_\nu(t) = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \quad \nu \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{A.5})$$

La fonction Γ est utilisée pour donner un sens alternatif à la dérivation/intégration fractionnaire

ANNEXE B

I. Valeurs singulières

Les valeurs singulières sont une généralisation de la notion de gain aux systèmes multivariés et permettent de traiter les systèmes multivariés avec autant de simplicité que les systèmes monovariés. Alors qu'un système monovarié est caractérisé par le tracé de son gain en fonction de la pulsation, un système multivarié à n entrées et n sorties est caractérisé par le tracé, en fonction de la pulsation, des n valeurs singulières de sa matrice de gain complexe.

Soit A une matrice complexe ; $A \in C^{m \times n}$, les valeurs singulières de A sont définies par :

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

Les valeurs singulières étant des réels, il est possible de les classer et on note :

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) >> \dots > \sigma_m(A) = \underline{\sigma}(A) \quad (\text{A.7})$$

Nous avons les relations suivantes :

$$\bar{\sigma}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (\text{A.8})$$

$$\underline{\sigma}(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \quad (\text{A.9})$$

On a en effet :

$$(i) \quad \bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

$$(ii) \quad \forall \lambda \in C, \quad \bar{\sigma}(\lambda A) = |\lambda| \bar{\sigma}(A)$$

$$(iii) \quad \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

$$(iv) \quad \bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$$

II. Norme H_2

on appelle L_2 un espace de Helbert .

On définit H_2 comme le sous espace constitué des fonctions de L_2 analytique dans C^+ . la norme H_2 est donnée par :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.10})$$

Tel que

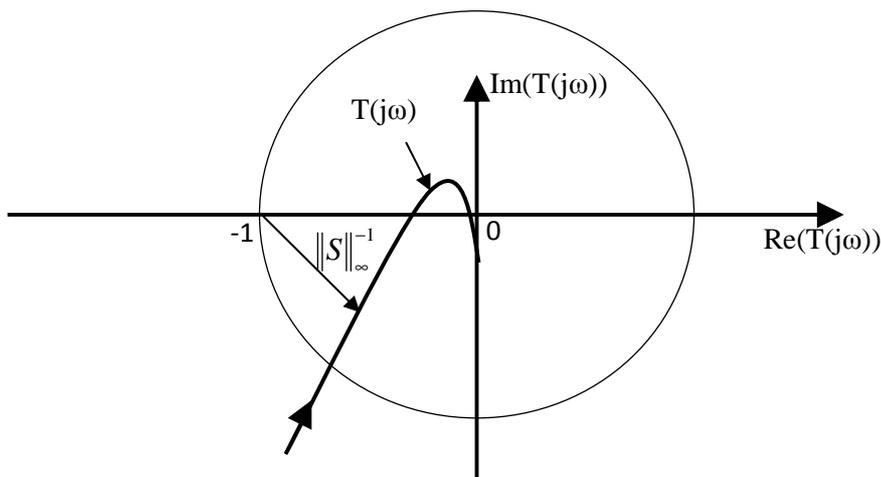
G est la fonction de transfert et $\text{tr}[\]$ désigne la trace d'une matrice, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux .

III. La marge de module

La marge de module notée ΔM , est égale à l'inverse de la norme H_∞ de la fonction de sensibilité S donné par :

$$\Delta M = \frac{1}{\|S\|_\infty} \quad (\text{A.11})$$

Elle est la plus petite distance entre le point critique $(-1, 0)$ du lieu de Nyquist et le tracé de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(j\omega)$. Voir la figure suivante :



IV. Résolution par Riccati

Soient $p = p^T$, $Q = Q^T$ des matrices de même dimension que A . On note :

$$X = Ric \left(\begin{array}{cc} A & -p \\ -Q & -A^T \end{array} \right) \quad (\text{A.11})$$

Quand elle existe, la solution symétrique de l'équation de Riccati :

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (\text{A.12})$$

Telle que toutes les valeurs propres de $A - PX$ ont une partie réelle strictement négative.

ANNEXE C

Paramètres de la machine asynchrone

Les paramètres du réseau :

Le courant : $I = 6.31/3.64$ [A]

La tension : $V = 220/380$ [V]

La fréquence : $f = 50$ [Hz]

Les paramètres électriques :

Puissance nominale : $P_n = 1500$ [w]

Vitesse nominale : $\omega_n = 1500$ [trs/mn]

Le couple nominale : $C_r = 10$ [N.m]

Nombre de paire de pôles : $P = 2$

L'inductance statorique : $L_s = 0.274$ [H]

L'inductance rotorique : $L_r = 0.274$ [H]

L'inductance mutuelle : $L_m = 0.258$ [H]

La résistance statorique : $R_s = 4.85$ [Ω]

La résistance rotorique : $R_r = 3.08$ [Ω]

Les paramètres mécaniques :

Le coefficient des frottements visqueux : $f = 8.10^{-3}$ [kg.m²]

Le moment d'inertie : $J = 31.10^{-3}$ [kg.m²/s].