République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de MASTER II

Spécialité : MATHEMATIQUES

Option : Modélisation Mathématique

Intitulé du mémoire

Résultats d'existence pour quelques problèmes d'évolution non linéaires du type Kirchhoff-Carrier

---

Réalisé par :

Ibaouene Youcef

Devant le jury d'examen composé de :

Mllah	Omar	MCB	UMMTO	Président
Bedouhene	Fazia	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Rahmani	Leila	MCA	UMMTO	Examinatrice
Menguelti	Ali	MAB	UMMTO	Examinateur

Promotion: 2013/2014

Table des matières

Rremerciements

Ce travail ne sera jamais au stade de réalisation sans l'assistance de Dieu le tout puissant. Dieu merci!

Je tiens à remercier tout ceux qui ont contribué du près du loin à la réalisation de ce simple travail.

C'est avec une grande reconnaissance que je tiens à remercier ma promotrice Madame Bedouhene Fazia pour ses conseils précieux et sa guidence sans cesse et sans répit. Elle accepté de m'encadrer dans ce mémoire et avec jouissance. Patiemment elle m'a guidé de début jusqu'à la fin.

Je suis également reconnaissant de tous les efforts et le temps sacrifie par les membres de juré, pour leur évaluation et correction de mon travail -Merci-

Introduction générale

Le mouvement transversal d'une corde vibrante est modélisé par l'équation

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\tau\frac{\partial u}{\partial t}=\Big(p_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^L\big|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\big|ds\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f,$$

où $x\in[0,L]$ et $t>0$, $u(t,x)$ est le déplacement verticale du point x à l'instant t, ρ la densité de masse, h la surface de la section de corde, L la longueur de la corde, p_0 la tension initiale de la corde, τ le module de résistance, E le module de Young du matériel et f la force extérieure (par exemple l'action de la pesanteur). Lorsque $f=0$, cette équation a été proposée en 1876 par le physicien allemand G.Kirchhoff [13], représentant elle même une extension de l'équation de d'Alembert des ondes. L'équation de Kirchhoff a été reprise par plusieurs auteurs dont entre autres, Carrier [2] et Narasimha [22]. En 1960 Oplinger [23] a fait une étude numérique tout en validant ses résultats par des essais expérimentaux.

La généralisation naturelle du l'équation de Kirchhoff est donnée par le problème non linéaire mixte suivant

$$(P)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a\Big(\displaystyle\int_\Omega\big|\nabla_x u(t,x)\big|^2dx\Big)\Delta_x u=f\ dans\,(0,T)\times\Omega,\\[2ex] u\equiv 0\ sur\,\partial\Omega\times[0,T),\\[2ex] u(x,0)=\phi_0(x)\ sur\,\Omega,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\phi_1(x)\ sur\,\Omega,\end{cases}$$

où a est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Le problème (P) est appelé non local en raison de la présence du terme $a\Big(\int_\Omega\big|\nabla u\big|^2dx\Big)$ qui implique que l'équation n'est pas une identité ponctuelle. Cela provoque certaines difficultés mathématiques qui rendent l'étude d'un tel problème intéressante.

Plusieurs auteurs (voir par exemple [1], [8], [25]) se sont attachés a l'étude de problème (P) dans le cas $1,2,\ldots,n$ dimensionnelle.

Dickey et Bernstein ont étudié le cas $n=1$ et $\Omega=(0,L)$. Ils ont considéré ϕ_0 et ϕ_1 comme fonctions analytique avec certaines conditions de croissance. Sous la condition $a(s)\geq m>0$ exprimant le caractère hyperbolique strict de l'équation, des résultats d'existence dans certains espaces de Sobolev ont pu être établis. Reprenant les travaux de Pohozaev [24], dans un cadre abstrait, J. L. Lions [17] a

proposé plusieurs orientations de recherche pour ce type de problème. La premier consiste à considérer ce type d'équations dans le cas dégénéré, *i.e.* sous une condition d'hyperbolicité faible ($a(s) \geq 0$). Dans ce cadre, P.D'Ancona et S.Spagnalo [8] ont pu résoudre le problème dans la classe des fonctions C^2 par apport à t, et analytique par apport à x. La deuxième idée de J. L. Lions consiste à considérer la fonction a dépendante de t et x. Dans le cas non dégénéré, Froto [9] a obtenu des solutions non locales et Limaco et al. [12] ont obtenu des solutions globales pour un modèle viscoelastique (*i.e.* $f = f(t, x, u^{'})$) moyennant certaines restrictions sur les données initiales (et ce dans les deux papiers). Gourdin et Mechab [7] ont prouvé l'existence (globale) de solutions du problème (P) dans le classe des fonctions C^2 en t et analytiques en x, sous l'hypothèse d'hyperbolicité mais avec des conditions sur la taille des non linéarités. La technique utilisée repose sur la méthode des approximations de Galerkin. Dans le même contexte, les problèmes non locaux elliptique et parabolique associé à (P) ont été considérés dans [18, 20, 19, 3] en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. La question d'existence, d'unicité ainsi que le comportement asymptotique de la solution est aussi considérée.
Récemment, dans [10], S. Guesmia a proposé un modèle couvrant tous les problèmes de Kirchhoff-Carrier considérés dans les références citées précédemment. Dans un premier temps, il a examiné le problème dans le cas dégénéré et a démontré l'existence de solutions locales. En suite, en examinant le cas non dégénéré, il a démontré un résultat d'existence de solutions locales et non locales. La technique utilisée dans sa démarche repose sur le théorème de point fixe de Schauder combiné avec quelques méthodes asymptotiques. L'objectif de ce mémoire consiste à développer l'article [10].
Le mémoire est organisé comme suit:

- Le chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite du travail. Nous rappelons tout d'abord quelques définitions et résultats de base sur les espaces de Sobolev. Nous exposerons ensuite le problème d'évolution linéaire du type hyperbolique. Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution grâce aux approximations de Galerkin. Nous achevons ce chapitre en rappelant quelques inégalités classiques et certaines variantes du théorème de point fixe.
- Le chapitre 2 est consacré à l'étude de l'article [10]. On présentera deux résultats d'existence pour quelques problèmes de Kirchhoff-Carrier de la forme suivante

$$(P')\begin{cases} u^{''} - \nabla.(a(.,l(u))\nabla u) = f(.,u^{'},l(u)) \ \text{ dans } \ Q_T \\ \\ u = 0 \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ \\ u(0) = 0 \text{ et } u^{'}(0) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

  où $Q_T = (0, T) \times \Omega$ (Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$), a (resp. f) une fonction a valeur réelle dépendant de terme non-local $l(u)$ (resp un terme non-local $l(u)$ et la vitesse $u^{'}$).

Chapitre 1

Outils de base pour l'analyse des EDPs

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. En premier lieu, nous donnons quelques définitions et résultats sur les espaces de Sobolev. Nous exposerons ensuite le problème d'évolution linéaire du type hyperbolique. Nous donnons un résultat d'existence et d'unicité de la solution grâce aux approximations de Galerkin. Nous achevons ce chapitre en rappelant quelques inégalités classiques et certaines variantes du théorème de point fixe.

1.1 Généralités sur les EDP

Définition 1.1.1. Une équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) est une équation dont l'inconnue est une fonction et portant sur les dérivée partielle de cette fonction :
- l'inconnue : $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- l'équation $F(x, u(x), Du(x), \ldots, D^p u(x)) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ (ou Ω) avec
$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^p} \to \mathbb{R}$ est donnée. L'indice p s'appelle l'ordre de cette E.D.P.

Définition 1.1.2. (Le problème de Dirichlet) On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type de Dirichlet. Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma := \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de façon suivante : Déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad dans\ \Omega \\ \\ u = 0 \quad sur\ \Gamma, \end{cases}$$

où f est une fonction dans un certain espace fonctionnel H.

1.1.1 Exemples et classification si l'ordre est ≤ 2

Les E.D.P sont de transcription mathématique de phénomène intervenant en physique, chimie, finance, biologie,.... On distingue trois grandes catégories d'E.D.P :

1. Les E.D.P de type elliptique dont le prototype est l'équation de Poisson:

$$-\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

2. Les E.D.P de type parabolique dont le prototype est l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \alpha \Delta T(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \alpha > 0.$$

Il s'agit d'un problème d'évolution car la variable t du temps intervient.

3. Les E.D.P de type hyperbolique dont le prototype sont

-l'équation de transport:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0.$$

Si on considère une E.D.P d'ordre ≤ 2 à coefficient constants du type

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + b\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x,t) + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,t) + d\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + e\frac{\partial u}{\partial y}(x,t) + fu = 0,$$

avec a, b, c, d, e, et f des réels donnés alors si la forme quadratique

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

- est une ellipse ($b^2 - 4ac < 0$) l'E.D.P est dite elliptique
- est une parabole ($b^2 - 4ac = 0$) l'E.D.P est dite parabolique
- est une hyperbole ($b^2 - 4ac > 0$) l'E.D.P est dite hyperbolique.

1.2 Les espaces de Sobolev

1.2.1 Définitions et propriétés

Dans tout le travail, Ω sera en général un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Les espaces L^p

Définition 1.2.1. (Fonction mesurable) Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Définition 1.2.2. (Fonction intégrable) On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si

$$\int_{\Omega} |f| dx < \infty,$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.3. (Espace de Lebesgue) Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \ mesurable \ et \ |f|^p \quad integrable\}$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $||.||_{L^\infty}$:

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{\alpha : |f(x)| \leq \alpha \quad p.p.\}$$

Théorème 1.2.1. *On a les trois propriétés suivantes:*

1. L^p est un espace vectoriel et $||.||_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

2. L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3. L^p est séparable pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.2.2. *(Convergence dominée) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que $|f_n| \leq g$ p.p., où g est une fonction intégrable. Supposons de plus que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ p.p. Alors f est intégrable et*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Définition 1.2.4. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f|_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \in \Omega$.

Définition 1.2.5. (Support d'une fonction continue) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle support de f l'ensemble

$$supp(f) = adh\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.2.6. (L'espace $C_c(\Omega)$) On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact dans Ω.

Définition 1.2.7. (L'espace $C_c^\infty(\Omega)$) On désigne par $C_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ définie sur Ω qui sont à support compact dans Ω

Théorème 1.2.3. *(Théorème de densité) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$; c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction*

$f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $||f - f_\epsilon||_{L^p} < \epsilon$.

Remarque 1.1. Le théorème ci-dessus n'est pas vrai si $p = \infty$. En effet, si $f_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ converge vers une fonction f dans $L^\infty(\Omega)$, alors f est continue. En effet,

$$||f - f_\epsilon||_{L^\infty} < \epsilon$$

et donc f_ϵ converge uniformément vers f, ce qui nous assure la continuité de f.

Définition 1.2.8. (Exposant conjugué) Soit $1 \le p \le \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p qui vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2.4. *(L'inégalité de Cauchy)*

$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \ (a, b \in \mathbb{R}).$$

Preuve.

$$0 \le (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Théorème 1.2.5. *(Inégalité de Young) Soit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve. La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est convexe, et par conséquent

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q} \le \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Théorème 1.2.6. *(Inégalité de Hölder) Supposons $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors si $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega |uv| dx \le ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve. Par homogènes, on peut supposer $||u||_{L^p(\Omega)} = ||v||_{L^q(\Omega)} = 1$. Puis l'inégalité de Young implique pour $1 < p, q < \infty$ que

$$\int_\Omega |uv| dx \le \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q dx = 1 = ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.7. *(Inégalité de Minkowski) Supposons $1 < p, q < \infty$ et $u, v \in L^p(\Omega)$. Alors*

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \le ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} ||u+v||_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u+v|^p dx &\le \int_\Omega |u+v|^{p-1}(|u| + |v|) dx \\ &\le (\int_\Omega |u+v|^p dx)^{\frac{p-1}{p}}((\int_\Omega |u|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega |v|^p dx)^{\frac{1}{p}}) \end{aligned}$$

$$= ||u+v||_{L^{p-1}(\Omega)}(||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}),$$

ceci implique que

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.2.8. *(Inégalité Cauchy-Schwarz)*

$$|x.y| \leq |x||y| \ \ (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, et note

$$0 \leq |x \pm \epsilon y|^2 = n|x|^2 \pm 2\epsilon xy + \epsilon^2 |y|^2.$$

Par conséquent

$$\pm x.y \leq \frac{1}{2\epsilon}|x|^2 + \frac{\epsilon}{2}|y|^2.$$

On prend $\epsilon = \frac{x}{y}$, à condition que $y \neq 0$, on obtient

$$|x.y| \leq |x||y| \ \ (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.2.9. *(Inégalité de Gronwall) Soit z une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$z(t) \leq a + b\int_0^t z(s)ds \ \forall t \in [0, T],$$

où a, b sont deux constantes positives ou nulles, alors

$$z(t) \leq ae^{bt} \ \ \forall t \in [0, T].$$

Preuve. Soit $v(t) = a + b\int_0^t z(s)ds$. La fonction v est de classe C^1 et

$$v^{'}(t) = bz(t) \leq bv(t).$$

Ainsi,

$$(v(t)\exp(-bt))^{'} = \exp(-bt)(v^{'}(t) - bv(t)) \leq 0,$$

et $v(t)\exp(-bt) \leq v(0) = a$. Comme $z(t) \leq v(t)$, on a montré que

$$z(t) \leq a\exp(bt).$$

Convergence faible dans les espaces L^p

Définition 1.2.9. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Si $1 \leq p \leq \infty$, on dit qu'une suite u_n converge faiblement vers u dans L^p si u_n, $u \in L^p$ et si

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x) = 0, \quad \forall \varphi \in L^{p^{'}}(\Omega).$$

On note dans ce cas-là $u_n \rightharpoonup u$.
2. Si $p = \infty$, on dit que la suite u_n converge (*)-faiblement vers u dans L^∞ si u_n, $u \in L^\infty$ et si

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [u_n(x) - u(x)]\varphi(x) = 0, \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega).$$

On note $u_n \rightharpoonup^* u$ dans L^∞.

Théorème 1.2.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Les propriétés suivantes sont vérifiées:*
1. Si $u_n \to u$, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans L^p, pour tout $1 \leq p < \infty$.
2. Si $1 \leq p \leq \infty$ et si $u_n \rightharpoonup u$ dans L^p, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||u_n||_{L^p} \leq C \quad et \quad ||u||_{L^p} \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||_{L^p}.$$

3. Si $1 < p < \infty$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $||u_n||_{L^p} \leq C$, alors il existe une sous suite $\{u_{n_i}\}$ et u dans L^p tel que

$$u_{n_i} \rightharpoonup u \quad dans \quad L^p.$$

Si $p = \infty$ et s'il existe une constante $K > 0$ telle que $||u_n||_{L^p} \leq K$, alors il existe une sous suite $\{u_{n_i}\}$ et u dans L^p tel que

$$u_{n_i} \rightharpoonup^* u \quad dans \quad L^\infty.$$

Exemple 1. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction définie par*

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{[n,\,2n]}(x).$$

Alors f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,\infty[)$. En effet, si g est une fonction à support compact, alors il existe une constante C tel que $\int_0^\infty g(x)dx \leq C$ pour tout x dans $[0,\infty]$. Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty [f_n(x) - f(x)]g(x) &= \lim_{n\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{n}} g(x)dx \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

Cependant, f_n ne converge pas fortement vers une fonction f dans $L^2([0,\infty])$. En effet, si c'est le cas, alors il existe une sous suite de f_n, qui converge presque partout vers f, et donc $f = 0$ est la seule limite possible. Mais

$$\begin{aligned}||f_n||_{L^2}^2 &= \int_0^\infty \frac{1}{n} 1_{[n,\,2n]}(x)dx \\ &= \frac{1}{n}\int_n^{2n} dx = 1.\end{aligned}$$

pour tout n, donc $||f_n||_{L^2}$ ne converge pas vers $||f||_{L^2} = 0$.

Produit de convolution

Définition 1.2.10 (Suite régularisante). On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ de fonctions telle que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ Supp\rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}),\ \int \rho_n = 1,\ \rho_n \geq 0\, sur\, \mathbb{R}^N,$$

où $B(0, \frac{1}{n})$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\frac{1}{n}$.

Théorème 1.2.11. *(Produit de convolution) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On pose*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$||f * g||_{L^p} \leq ||f||_{L^1}||g||_{L^p}.$$

Théorème 1.2.12. *Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante. Prenons $f \in C_c(I)$ et définissons une suite de fonctions*

$$f_n(x) = f * \varphi_n(x).$$

Alors pour n suffisamment grand, $f_n \in C_c^\infty(I)$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f * \varphi_n(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx.$$

De plus, $f_n \to f$ uniformément. Si par ailleurs $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Propriétés 1.2.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors*

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}.$$

Remarque 1.2.1. Si f et g sont à support compact, alors $f * g$ est à support compact. Cependant, si l'un des supports seulement est compacte, alors $f * g$ n'est en général pas à support compact.

Lemme 1.2.1. *Soit k un entier, $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ et $g \in C_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$. Alors*

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \text{ et } D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g.$$

Dérivée des distributions

Définition 1.2.11. (Espace des fonctions test) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on appelle espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n | f \in C_0^\infty(\Omega)\}.$$

Définition 1.2.12. (Espace des distributions) On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et on note $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Définition 1.2.13. (Distribution régulière) Soit f un élément de $L^1_{loc}(\Omega)$. La distribution :

$$[f] : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \langle f, u\rangle = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx,$$

est appelée distribution régulière associée à la fonction f.

Définition 1.2.14. (Dérivation des distributions) Soit T un élément de $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle ordre de α et on note $|\alpha|$ l'entier $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. La dérivée d'ordre $|\alpha|$ de T est l'application suivante, notée $D^\alpha T$:

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto D^\alpha T(u) = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha u\rangle.$$

Remarque 1.2.2. Cette définition sert d'extension à la définition usuelle de dérivation. On obtient ainsi que toute distribution (qui n'est pas forcément une fonction) devient indéfiniment dérivable.

Remarque 1.2.3. Si u est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note D^α la dérivée d'ordre α de u :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

1.2.2 Les espaces de Sobolev en dimension n

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.2.15. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définir par

$$W^{1,p} = \{u \in L^p(\Omega) | \exists g_i \in L^p(\Omega)\, telque \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} g_i \varphi \; \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \, \forall i = 1, \ldots, N\}$$

Lorsque $p = 2$, on pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \; et \; \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

Remarque 1.2.4. En d'autre terme, $W^{1,2}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est muni de la norme

$$||u||_{W^{1,2}} = ||u||_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^p}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_{L^2} = \int_\Omega \big(u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x)\big)dx,$$

est un espace de Hilbert. La norme $||.||_{W^{1,2}}$ est celle induite par le produit scalaire $(.,)_{H^1}$.

Remarque 1.2.5. On définit de manière analogue à la dimension une les espaces de Sobolev d'ordre entier quelconque. Si $k > 0$ est un entier, on note $W^{k,p}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$, dont la dérivées partielles prises au sens faible $D^\alpha u$ sont dans $L^p(\Omega)$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\alpha| \leq k$

Propriété 1.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $1 \leq p \leq \infty$ et $k \geq 1$.*
$W^{k,p}(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{W^{k,p}}$ est un espace de Banach, séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.

1.2.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.2.16. Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}$ désigne la fermeture de $C_0^1(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On dit que les fonctions $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont en gros les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ qui s'annulent sur le bord. En supposant Ω assez régulier, on a néanmoins le résultat suivant :

Théorème 1.2.13. *Supposons Ω de classe C^1. Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \quad avec\, 1 \leq p < \infty.$$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $u = 0$ sur $\partial\Omega$;
2. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.2.14. *(Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $1 \leq p \leq \infty$. Alors il existe $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ tel que*

$$||u||_{L^p} \leq \gamma ||\nabla u||_{L^p}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

ou de manière équivalente

$$||u||_{W^{1,p}} \leq \gamma ||\nabla u||_{L^p}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

1.2.4 L'espace H^{-1}

Définition 1.2.17. On désigne par $H^{-1}(\Omega)$, l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$. En d'autres termes, $f \in H^{-1}(\Omega)$ si f est une forme linéaire bornée sur $H^{-1}(\Omega)$. On écrira $\langle .,. \rangle$ pour désigner le crochet de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.
On munit H^{-1} de la norme dual définie comme suit :

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup \big\{ \langle f, u \rangle, u \in H_0^1(\Omega), ||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \big\}.$$

Nous disposons du théorème suivant caractérisant l'espace $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 1.2.15. *(Caractérisation de $H^{-1}(\Omega)$) :*
(i) Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors, il existe $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \big(f^0 v + \sum_{i=1}^n f^i v_{x_i}\big)dx \quad (v \in H_0^1). \tag{1.1}$$

(ii) De plus

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \inf\Big\{\big(\sum_{i=1}^n |f^i|^2 dx\big)^{\frac{1}{2}}, f\, verifiant\, (1.1)\, pour\, f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(\Omega)\Big\}.$$

On écrit dans ce cas

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^n f^i_{x_i}.$$

1.2.5 Les distributions vectorielles

Soit X un espace de Hilbert, ou plus généralement, un espace de Banach défini sur Ω (typiquement, $X = L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, où $C(\overline{\Omega})$) , $]0,T[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. dt désignera la mesure de Lebesgue sur $]0,T[$.

Définition 1.2.18. Pour un entier $k \geq 0$, on note $C^k([0,T];X)$ l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de $[0,T]$ dans X. Si on note $||v||_X$ la norme de X, alors $C^k([0,T];X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$||v||_{C^k([0,T];X)} = \sum_{m=0}^k \big(\sup_{0\leq t\leq T} ||\frac{d^m v}{dt^m}(t)||_X\big)$$

Définition 1.2.19. On note $L^2(]0,T[;X)$ l'espace des fonctions de $]0\,T[$ dans X telles que la fonction $t \to ||v(t)||_X$ soit mesurable et de carré intégrable, c'est-à-dire que

$$||v||_{L^2}(]0,T[;X) = \sqrt{\int_0^T ||v(t)||_X^2 dt} < +\infty.$$

Muni de cette norme $L^2(]0,T[;X)$ est aussi un espace de Banach. De plus, si X est un espace de Hilbert, alors $L^2(]0,T[;X)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u,v\rangle_{L^2}(]0,T[;X) = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_X dt$$

Remarque 1.2. Si X est l'espace $L^2(\Omega)$, alors $L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$ s'identifie à l'espace $L^2(]a,b[\times\Omega)$ puisque, par le théorème de Fubini, on a

$$||v||_{L^2(]0,T[;L^2(\Omega))} = \int_0^T \big(\int_\Omega |u(t)|^2(x)dx\big)dt = \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^2 dxdt = ||v||^2_{L^2(]0,T[\times\Omega)}.$$

Pour $1 \leq p < +\infty$, peut généraliser la définition dessus en introduisant l'espace de Banach $L^p(]0,T[;X)$ des fonctions de $]0,T[$ dans X telles que la fonction $t \to ||v(x)||_X$ soit mesurable et de puissance p-ème intégrable.

Remarque 1.3. Pour tout $1 \leq p < \infty$, $C(0,T;\, X)$ est dense dans $L^p(0,T;\, X)$.

Définition 1.2.20. (i) L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ consiste en toutes les fonctions $u \in L^2(0,T;X)$ telles que $u^{'}$ au sens faible et $u^{'} \in L^2(0,T;X)$.

De plus,

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \Big(\int_0^T \big(||u(t)||^p + ||u^{'}(t)||\big)dt\Big)^{\frac{1}{p}} \ (1 \leq p < \infty) \\ \\ \sup_{[0,\,T]} \big(||u(t)|| + ||u^{'}(t)||\big) \ (p = \infty). \end{cases}$$

(ii) On écrit $H^1(0,T;X) = W^{1,p}(0,T;X)$.

Théorème 1.2.16. *soit $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ pour un certain $1 \leq p \leq \infty$.*
Alors,
(i) $u \in C(0,T;X)$,
(ii) $u(t) = u(s) + \displaystyle\int_s^t u^{'}(\tau)d\tau$ pour tout $0 \leq s \leq s \leq T$.
(iii) De plus, nous avons l'estimation suivante :

$$\max_{[0,\,T]} ||u(t)|| \leq C||u||_{W^{1,p}(0,T;X)}, \tag{1.2}$$

où C est une constante ne dépendant que de T.

Preuve

Prolongent U sur $\mathbb{R}$ en posant $u \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[\cup]T,\, +\infty[$, et posons $u^{\epsilon} = \eta_{\epsilon} * u$, où η_{ϵ} est la régularisée de U sur $\mathbb{R}$. Un calcul élémentaire montre que $u^{\epsilon'} = \eta_{\epsilon} * u^{'}$ sur $]\epsilon, T-\epsilon[$. On obtient alors les convergences suivantes lorsque $\epsilon \to 0$

$$\rho = \begin{cases} u^{\epsilon} \to u \ dans\ L^p(0,T;X), \\ \\ u^{\epsilon'} \to u^{'} \ dans\ L^p(0,T;X). \end{cases} \tag{1.3}$$

Fixons $0 < s < t < T$, on a

$$u^{\epsilon}(t) = u^{\epsilon}(s) + \int_s^t u^{\epsilon'}(\tau)d\tau.$$

En utilisant la convergences (1.3), on obtient

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u^{'}(\tau)d\tau \ \ p.p.\, 0 < s < t < T. \tag{1.4}$$

Finalement, la continuité de de l'application $t \mapsto \int_s^t u^{'}(\tau)d\tau$ permet de conclure (i) et (ii). L'estimation (1.2) est une conséquence directe de (1.4).

Théorème 1.2.17. *Supposons $u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ avec $u^{'} \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big)$. Alors*
(i) $u \in C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$.

(ii) L'application $t \mapsto ||u||^2_{L^2(\Omega)}$ *est absolument continue, avec*

$$\frac{d}{dt}||u(t)||^2_{L_2(\Omega)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle \ p.p.\, t \in [0,T].$$

(iii) De plus, nous avons les estimations suivantes

$$\max_{0\le t\le T} ||u(t)||_{L^2(\Omega)} \le C\Big(||u||_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + ||u'||_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\Big),$$

où C *est une constante dépendante uniquement de* T

1.3 Formule de Green

Dans cette section on pose que Ω *est un sous-ensemble borné et ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *et* $\partial\Omega$ *est* C^1.

Théorème 1.3.1. *(Théorème de Gauss-Green) Soit* $u \in C^1(\overline{\Omega})$. *Alors elle vérifie la formule de Green*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial_{x_i}}(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\eta_i dS,$$

où η_i *est la* i^{eme} *composante de la normale extérieure unité de* Ω

Théorème 1.3.2. *(Formule d'intégration par partie) Soit* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. *Alors*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x)dS \ (i = 1,\dots,n).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 1.3.1 sur uv.

Théorème 1.3.3. *(Formule de Green) Soit* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. *Alors*

(i) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial\eta(x)}dS,$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla v(x).\nabla u(x)dx = -\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v(x)}{\partial\eta(x)}u(x)dS,$

(iii) $\displaystyle\int_\Omega u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v(x)}{\partial\eta(x)} - v(x)\frac{\partial u(x)}{\partial\eta(x)}dS,$

où $\nabla u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big)_{1\le i\le n}$ *est le vecteur gradient de* u, *et* $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = \nabla u.\eta$, *et* η *est le vecteur extérieur unité de* Ω.

Preuve. On applique le théorème 1.3.2.

Définition 1.3.1. On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est régulier de classe C^k (avec un entier $k \ge 1$) s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{0\le i\le I}$ tels que

$$\overline{\omega_0} \subset \Omega,\ \overline{\Omega} \subset \cup_{i=0}^I \omega_i,\ \partial\Omega \subset \cup_{i=0}^I \omega_i,$$

et que, pour chaque $i = \{1,\dots,I\}$, il existe une application bijective ϕ_i de classe C^k, de ω_i dans l'ensemble

$$Q = \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}, |y'| < 1, |y_n| < 1\},$$

dont l'inverse est aussi de classe C^k, et telle que

$$\begin{aligned}\phi_i(\omega_i \cap \Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, y_n > 0\} = Q^+,\\ \phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) &= Q \cap \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, y_n = 0\}.\end{aligned}$$

1.4 Injection de Sobolev

Définition 1.1. Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F. Cette application permet de considérer E comme un sous-ev de F. On notera $E \hookrightarrow F$. On dira que cette inclusion est :
- Continue, et on notera $E \hookrightarrow F$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|u\|_F \leq \|u\|_E \textit{ pour tous } u \in E.$$

- Compacte, notée $E \hookrightarrow F$, si de toute suite bornée dans E (pour la norme de E), il est possible d'extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F).
- Dense si pour tout $u \in F$ il existe une suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).

Théorème 1.1. ***(Rellich-Kondrachov)***
On suppose que Ω est borné et de classe C^1. On a :

1. *Si $N < 2$ alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$.*
2. *Si $N = 2$ alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [2,\infty[$.*
3. *Si $N > 2$ alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right[$.*

On particulier, on a toujours :

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Donc, on peut déduit que :

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Le théorème suivant est dû également à F.Rellich : *Le théorème suivant est dû également à F.Rellich :*

Théorème 1.2. *Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$H_0^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega).$$

En particulier, on a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

1.5 Problème d'évolution linéaire hyperbolique

1.5.1 Modélisation et exemple d'équation hyperbolique

Le modèle hyperbolique que nous étudierons dans ce mémoire est l'équation des ondes dont l'origine physique. Par exemple, en deux dimension d'espace elle est un modèle pour étudier les vibration d'une membrane élastique tendue. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \ dans\, \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \\ u = 0 \quad sur\, \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ \\ u(t=0) = u_0(x) \ dans\, \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) \ dans\, \Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

Le problème aux limites (1.5) *modélise, par exemple, la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique, ou bien de l'amplitude d'un champ électrique de direction constante. L'inconnue $u(t,x)$ est ici une fonction scalaire.*

1.5.2 Existence et unicité dans le cas hyperbolique

La démarche à adopter pour établir l'existence et l'unicité de la solution de ce problème repose sur en trois étapes. Premièrement, on établit une formulation variationnelle, deuxièmement, on démontre l'existence et l'unicité de cette formulation variationnelle en utilisant une base hilbertienne de fonctions propres, troisièmement, on montre que cette solution variationnelle vérifie bien le problème aux limites.

A. Formulation variationnelle

L'idée est d'écrire une formulation variationnelle qui ressemble à une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre. Nous multiplions donc l'équation des ondes (1.5) *par une fonction test $v(x)$ qui ne dépend pas du temps t. A cause de la condition aux limites nous demandons à ce que v s'annule sur le bord de l'ouvert Ω. Un calcul formel conduit à*

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)dx. \tag{1.6}$$

Il est clair que l'espace naturel pour la fonction test v est $H_0^1(\Omega)$. On introduit alors le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est la forme bilinéaire $a(u,v)$ définis par

$$\langle \omega, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \omega(x)v(x)dx \ et \ a(\omega,v) = \int_\Omega \nabla\omega(x)\nabla v(x)dx.$$

Soit un temps final $T > 0$ *(éventuellement égal à* $+\infty$*), on se donne le terme source* $f \in L^2(]0,T[;\, L^2(\Omega))$*. On se donne aussi des condition initiales* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $u_1 \in L^2(\Omega)$*. La formulation variationnelle déduite de* (1.6) *est donc : trouver une solution* u *dans* $C([0,T];\, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];\, L^2(\Omega))$ *telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in H_0^1(\Omega), 0 < t < T, \\ \\ u(t=0) = u_0,\ \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Les données initiales ont bien un sens dans (1.7) *grâce au choix de l'espace d'énergie* $C([0,T];\, H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];\, L^2(\Omega))$ *pour la solution* u*. Nous justifierons encore ce choix un peu plus loi en établissant son lien avec des égalités d'énergie.*
Finalement, la dérivée en temps dans la formulation variationnelle (1.7) *doit être prise au sens faible puisqu'à priori la fonction* $t \to \langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)}$ *n'est qu'une fois dérivable en temps puisqu'elle appartient à* $C^1(0,T)$*.*

B. Un résultat générale

Soit V *et* H *deux espaces de Hilbert tels que* $V \subset H$ *avec injection dense et compacte (typiquement* $V = H_0^1(\Omega)$ *et* $H = L^2(\Omega)$*)*

Théorème 1.5.1. *SoientV et* H *deux espaces de Hilbert tels que* $V \subset H$ *avec injection compacte et* V *est dense dans* H*. Soit* $a(u,v)$ *une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans* V*. Soit un temps final* $T > 0$*, une donnée initiale* $(u_0, u_1) \in V \times H$*, et un terme source* $f \in L^2(]0,T[;\, H)$*. Alors le problème*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in V, 0 < t < T, \\ \\ u(t=0) = u_0,\ \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1, \end{cases} \tag{1.8}$$

(où l'équation de (1.8) *a lieu au sens faible dans* $]0,T[$*) a une unique solution*
$u \in C([0,T];\, V) \cap C^1([0,T];\, H)$*. De plus, il existe une constante* $C > 0$ *(qui ne dépend que de* Ω *et de* T*) telle que*

$$||u||_{C([0,T];\,V)} + ||u||_{C^1([0,T];\,H)} \leq C(||u_0||_V + ||u_1||_H + ||f||_{L^2(]0,T[;\,H)}. \tag{1.9}$$

C. Applications

prouvons que cette approche variationnelle a bien permis de résoudre l'équation aux dérivées partielles d'origine.

Théorème 1.5.2. *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^n$*, et un temps final* $T > 0$*. On considère une donnée initiale* $(u0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *et un terme source*

$f \in L^2(]0,T[;\, L^2(\Omega))$. *Alors l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \ p.p.\, dans\, \Omega\times]0,T[\\ \\ u = 0 \ p.p.\, sur\, \partial\Omega\times]0,T[\\ \\ u(x,0) = u_0(x) \ p.p.\, dans\, \Omega \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x=0) = u_1(x) \ p.p.\, dans\, \Omega \end{cases} \tag{1.10}$$

admet une unique solution $u \in C([0,T];\, V) \cap C^1([0,T];\, H)$. *De plus, il existe une constante* $C > 0$ *(qui ne dépend pas de* Ω *et de* T*) telle que, pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\int_\Omega \Big(|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\Big) \leq C\Big(\int_\Omega \big(|u_1(x,t) + |\nabla u_0(x,t)|^2\big)dx + \int_0^t \int_\Omega |f(x,s)|^2 dxds\Big) \quad . \tag{1.11}$$

Démonstration.

Nous appliquons le théorème 1.3.1 à la formulation variationnelle (1.7) *de l'équation des ondes obtenue à la section A (ces hypothèses sont facilement vérifiées avec* $H = L^2(\Omega)$ *et* $V = H_0^1(\Omega)$*). Il reste à montrer que l'unique solution* $u \in C(0,T; H_0^1(\Omega) \cap C(0,T; L^2(\Omega)$ *de cette formulation variationnelle est bien une solution de* (1.10). *Tout d'abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application du théorème de trace à* $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ *pour tout* $t \in [0,T]$, *et la condition initiale est justifiée par la continuité de* $u(t)$ *en* $t = 0$ *comme fonction à valeur dans* $H_0^1(\Omega)$ *et de* $u'(t)$ *en* $t = 0$ *comme fonction à valeur dans* $L^2(\Omega)$.
Pour que u *est suffisamment régulière, par intégration par partie la formulation variationnelle de problème* (1.7) *est équivalente à*

$$\int_\Omega \big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - f\big) v dx = 0,$$

pour tout $v(x) \in C_\Omega^t$ *et presque tout* $t \in]0,T[$. *On en déduit donc l'équation de* (1.10).

1.6 Théorèmes de point fixe

Si f *est une application d'un ensemble* E *dans lui même, on appelle point fixe de* f *tout élément* x *de* E *tel que* $f(x) = x$. *De nombreux problèmes, y compris des problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, peuvent être (re)formulés sous forme de problème d'existence d'un point fixe pour une certaine application dans un certain espace. Il est par conséquent intéressant de disposer de théorèmes assurant l'existence de points fixes dans des contextes aussi généraux que possible.*

On rappelle d'abord le théorème de point fixe de Picard pour une contraction stricte dans un espace métrique complet.

Théorème 1.6.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet, $T : E \to E$ une contraction stricte i.e. telle qu'il existe une constante $k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in E,\ d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0) \in E$. De plus, pour tout $z \in E$, la suite des itérés $T^m(z)$ converge vers x_0 quand $m \to +\infty$.

Ce théorème, ou des variantes de ce théorème, est néanmoins utile dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'évolution, notamment pour établir le théorème de Cauchy-Lipschitz.

1.6.1 Le théorème de point fixe de Brouwer

Le théorème de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie. Soit $\overline{B}^m = \{x \in \mathbb{R}^m, ||x|| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$ muni de la norme euclidienne usuelle.

Le théorème de Brouwer affirme que :

Théorème 1.6.2. *Toute application continue de $\overline{B}^m$ dans $\overline{B}^m$ admet au moins un point fixe.*

Le théorème de Brouwer est un résultat non trivial, sauf dans le cas $m = 1$ où il se montre très simplement par un argument de connexité. Il en existe plusieurs démonstrations dans le cas général, faisant toutes appel à des notions plus ou moins élémentaires.

Théorème 1.6.3. *Soit K un compact homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^m$. Toute application continue de K dans K admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.6.4. *Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^m$. toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

Remarque 1.6.1. En général, il n'y a aucune raison pour que le point fixe de Brouwer soit unique.

Voici maintenant un résultat qui est également équivalent au théorème de Brouwer.

Théorème 1.6.5. *Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie) et soit $P : E \to E$ une application continue telle qu'il existe $\rho > 0$ pour lequel tout point x sur la sphère de rayon ρ satisfait $P(x).x \geq 0$. Il existe alors un point x_0, $||x_0|| \leq \rho$, tel que $P(x_0) = 0$.*

1.6.2 Les théorèmes de point fixe de Schauder

Les résultats précédents utilisent de façon cruciale la dimension finie, par exemple par l'intermédiaire de la formule de changement de variable dans les intégrales ou la compacité de la boule fermée. En dimension infinie, le théorème de Brouwer n'est plus vrai. En voici un exemple. On considère l'espace des suites de carré sommable $l^2 = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$. Muni de la norme $||x||_{l^2} = (\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, c'est un espace de Hilbert de dimension infinie. Soit $\overline{B}$ sa boule unité fermée et S sa sphère unité. Alors l'application :

$$T : \overline{B} \to \overline{B}, T(x) = \left(\sqrt{1 - ||x||_{l^2}^2}, x_0, x_1, x_2, \dots\right)$$

est continue mais n'a pas de point fixe. En effet, T est à valeurs dans la sphère unité, donc un éventuel point fixe devrait satisfaire à la fois $||x||_{l^2} = 1$ et $x_0 = 0$ et $x_{i+1} = x_i$ pour tout $i \geq 0$, soit $x = 0$, or $T(0) = (1, 0, \ldots) \neq 0$.

Le problème vient en fait d'un manque de compacité, les espaces de dimension infinie n'étant pas localement compacts. Nous avons besoin d'une propriété d'approximation des compacts d'un espace vectoriel normé par des ensembles de dimension finie qui va nous permettre de nous ramener à ce dernier cas.

Lemme 1.6.1. *Soit E un espace vectoriel normé et soit K un compact de E. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ϵ de E de dimension finie et une application g_ϵ continue de K dans F_ϵ tels que pour tout $x \in K$, $||x - g_\epsilon(x)||_E < \epsilon$. De plus, $g_\epsilon(K) \subset convK$.*

Note : $convK$ dénote l'enveloppe convexe de K. C'est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de K, ou encore le plus petit convexe qui contient K. Le lemme exprime que tout compact K peut être approché arbitrairement près par un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Preuve. Comme K est compact, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_i, i = 1, \ldots, p$, de K, tel que K soit recouvert par les boules ouvertes de centre x_i et de rayon ϵ, *i.e.*, $K \subset \cup_{i=1}^{p} B(x_i, \epsilon)$. Pour chaque indice i, on définit une fonction positive sur E par

$$\delta_i(x) = (\epsilon - ||x - x_i||_E)_+.$$

Il est clair que $\delta_i \in C^0(E; \mathbb{R}_+)$ comme composée d'application continues et qu'elle est strictement positive dans la boule ouvert $B(x_i, \epsilon)$ et nulle par ailleur. De plus,

$$\forall x \in K, \sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) > 0.$$

En effet, quel que soit x dans K, il existe un indice j tel que $x \in B(x_j, \epsilon)$ par la propriété de recouvrement. Pour ce j, nous avons donc $\delta_j(x) > 0$ et par conséquent, $\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) \geq \delta_j(x) > 0$ (en fait cette somme est même minorée inférieurement par un $\delta > 0$). Définissons alors

$$g_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x)}.$$

D'après ce qui précède, $g_\epsilon \in C^0(K, F_\epsilon)$, où, F_ϵ est le sous-espace vectoriel de E engendré par le points x_i, ce qui implique que $dim F_\epsilon \leq p$. De plus, il est clair par construction que $g_\epsilon(K) \subset convK$.

Vérifions la propriété d'approximation. Pour tout x dans K et pour tout i, nous pouvons écrire $x_i = x + h_i$, où h_i est tel que $||h_i||_E < \epsilon$ si et seulement si $\delta_i(x) > 0$.

On a donc

$$g_\epsilon(x) = x + \frac{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) h_i}{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x)},$$

et

$$||\frac{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) h_i}{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x)}||_E \leq \frac{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x) ||h_i||_E}{\sum_{i=1}^{p} \delta_i(x)}$$

puisque, dans la somme du numérateur du deuxième membre de l'inégalité, les seuls termes non nuls sont ceux pour lesquels $||h_i||_E < \epsilon$.
Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 1.6.6. *Soit E un espace vectoriel normé. C un convexe compact de E et T une application continue de C dans C. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. D'après le lemme 1.6.1 pour tout entier $n \geq 1$, il existe un sous-espace de dimension finie F_n et une application g_n continue de C dans F_n tels que

$$\forall x \in C,\, ||x - g_n(x)||_E < \frac{1}{n} \; et\, g_n(C) \subset convC = C.$$

On note $\overline{conv}A$ l'enveloppe convexe fermée d'une partie A dans E, c'est-à-dire l'adhérence de l'enveloppe convexe de A. Posons $K_n = \overline{conv}g_n(C)$. C'est un convexe de F_n, compact comme sous-ensemble fermé du compact C. On considère l'application $T_n : K_n \to K_n$ définie par $T_n(x) = g_n(T(x))$. Cette application est continue comme composée d'applications continues, donc, par le théorème 1.6.4, elle admet un point fixe $x_n \in K_n \subset C$. Comme C est un compact métrique, on peut extraire de la suite x_n une sous-suite $x_{n'}$ qui converge vers un certain $x \in C$.
L'application T étant continue, on en déduit d'abord que $T(x_{n'} \to T(x)$ quand $n' \to \infty$. Puis, utilisant l'inégalité triangulaire, il vient :

$$||x - T(x)||_E \leq ||x - x_{n'}||_E + ||x_{n'} - T_{n'}(x_{n'})||_E + ||T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})||_E + ||T(x_{n'}) - T(x)||_E.$$

Le premier et le dernier terme du membre de droite de cette inégalité tendent vers zéro quand n' tend vers l'infini, par la convergences que nous venons de montrer. Le deuxième terme est identiquement nul par la propriété de point fixe pour $T_{n'}$.
Enfin,

$$||T_{n'}(x_{n'}) - T(x_{n'})||_E = ||g_{n'}(T_{n'}(x_{n'})) - T(x_{n'})||_E < \frac{1}{n'} \to 0 \; quand\, n' \to +\infty,$$

par construction de $g_{n'}$. Par conséquent, $x = T(x)$ est point fixe de T.
Dans le cas d'un espace de Banach, le théorème de Schauder est souvent utilisé sous la forme suivante :

Théorème 1.6.7. *Soit E un espace de Banach, C un convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.*

Preuve. Soit $C' = \overline{conv}T(C)$. Il s'agit d'un convexe inclus dans C. En effet, $T(C) \subset C$, donc $convT(C) \subset C$ car C est convexe, et $\overline{conv}T(C) \subset C$ car C est fermé. De plus, C' est compact dans espace complet.
On applique alors le théorème de Schauder à la restriction de T à C'.

Remarque 1.6.2. Dans les applications du théorème de Schauder aux problèmes aux limites non linéaire, on dispose d'une certaine liberté. Il faut d'abord reformuler le problème sous forme d'un problème de point fixe d'une certaine application T. Il faut ensuite choisir un espace E sur lequel T soit continue, puis un convexe fermé C tel que T envoie C dans C, qui soit compact ou tel que $T(C)$

soit relativement compact. Notons que pour cette dernière propriété, il suffit parfois de montrer que pour toute suite $x_n \in C$, il existe une sous-suite telle que $T(x_{n'})$ converge dans E, sans nécessairement montrer que la sous-suite $x_{n'}$ elle-même converge, ce qui n'est d'ailleurs pas forcément le cas.

Chapitre 2

Résultats d'existence pour quelques problèmes de Kirchhoff-Carrier

2.1 Introduction

On considère le problème viscoelastique non linéaire du mouvement transversal d'une corde élastique vibrante de longueur L fixée à deux extrémités. Le déplacement verticale $u(t,x)$ au point $x \in (0, L)$ et au temps t est la solution du modèle suivant, proposé par Kirchhoff [13],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{Ld\left(t,x\right)}\left(\tau_0 + \frac{\sigma\left(t,x\right)}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2.1}$$

où $d\left(t,x\right)$, $\sigma\left(t,x\right)$, τ_0, $k\left(t,x\right) = \dfrac{\frac{\partial}{\partial t}d\left(t,x\right)}{d\left(t,x\right)} + \eta$, $\eta \geq 0$ sont des paramètres bien connus (voir l'exposé de l'introduction). En analysant le même problème physique, Carrier [2] a proposé un autre modèle qui dépend de l'intégrale du carrée de u, *i.e.*, on remplace le terme non local dans (2.1)(c-à-d le terme $\displaystyle\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$) par $\displaystyle\int_0^L u^2 dx$, on trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{Ld\left(t,x\right)}\Big(\tau_0 + \frac{\sigma\left(t,x\right)}{2L}\int_0^L u^2 dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{2.2}$$

En combinant les deux modèles (2.2) et (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{Ld\left(t,x\right)}\left(\tau_0 + \frac{\sigma\left(t,x\right)}{4L}\left(\int_0^L u^2 dx + \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

soit encore

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{Ld\left(t,x\right)}\left(\tau_0 + \frac{\sigma\left(t,x\right)}{4L}\int_0^L u^2 dx + \frac{\sigma\left(t,x\right)}{4L}\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{2.3}$$

En posant $m_0\left(t,x\right) = \dfrac{\tau_0}{Ld\left(t,x\right)}$, $m_1\left(t,x\right) = m_2\left(t,x\right) = \dfrac{\sigma\left(t,x\right)}{4L^2 d\left(t,x\right)}$ et $m_3\left(t,x\right) = k\left(t,x\right)$, l'équation (2.3) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Big(m_0\left(t,x\right) + m_1\left(t,x\right)\int_0^L u^2 dx + m_2\left(t,x\right)\int_0^L \big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_3\left(t,x\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{2.4}$$

qui est une équation hyperbolique non local.

Cette équation peut être couplée avec quelques conditions initiales naturelles et des conditions aux limites

$$u(0,x) = u_0(x) \quad dans\,(0,L), \tag{2.5}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \quad dans\,(0,L),$$
$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \tag{2.6}$$

où $m_i : \mathbb{R}^+ \times (0,L) \to \mathbb{R}$ pour $i = 0,\ldots,3$.

Soit z_0 une fonction à valeurs réelles solution du problème linéaire hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} z_0 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} z_0 = 0, \\ \\ z(t,0) = z_0(t,L) = 0, \\ \\ z(0,x) = u_0(x), \ \dfrac{\partial}{\partial t} z(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

En posant

$$z(t,x) = u(t,x) - z_0(t,x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0,L],$$

en retranchant la première équation de (2.7) de l'équation (2.4), on trouve :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Big(m_0(t,x) + m_1(t,x)\int_0^L u^2 dx + m_2(t,x)\int_0^L \big(\frac{\partial u}{\partial x}\big)^2 dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} z_0 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} z_0 = 0,$$

comme $u = z + z_0$, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(z+z_0) - \Big(m_0(t,x) + m_1(t,x)\int_0^L (z+z_0)^2 dx + m_2(t,x)\int_0^L \Big(\frac{\partial(z+z_0)}{\partial x}\Big)^2 dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$- \frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} = -m_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} z_0 - m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} + m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \Big(m_0(t,x) + m_1(t,x)\int_0^L z^2 dx + m_1(t,x)\int_0^L z_0^2 dx + 2m_1(t,x)\int_0^L z z_0 dx + \\ &\quad m_2(t,x)\int_0^L \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 dx + m_2(t,x)\int_0^L \Big(\frac{\partial z_0}{\partial x}\Big)^2 dx + 2m_2(t,x)\int_0^L \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z_0}{\partial x} dx\Big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad = -m_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} z_0 - m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} + m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.8}$$

On pose

$$l(z) = \Big(m_0(t,x) + m_1(t,x)\int_0^L z^2 dx + m_1(t,x)\int_0^L z_0^2 dx + 2m_1(t,x)\int_0^L z z_0 dx$$

$$+ m_2(t,x)\int_0^L \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 dx) + m_2(t,x)\int_0^L \Big(\frac{\partial z_0}{\partial x}\Big)^2 dx + 2m_2(t,x)\int_0^L \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z_0}{\partial x}dx\Big). \tag{2.9}$$

En ajoutant $l(z)\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$ aux deux côtés de l'égalité (2.8), on obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - l(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + l(z)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = -m_3(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} - m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} + m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} + l(z)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2},$$

ou de façon équivalente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - l(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - z_0) = -m_3(t,x)\frac{\partial}{\partial t}(u - z_0) - m_3(t,x)\frac{\partial z_0}{\partial t} + (l(z)-1)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - l(z)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -m_3(t,x)\frac{\partial z}{\partial t} - m_3(t,x)z_0^{'} + (l(z)-1)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2},$$

avec $\dfrac{\partial z_0}{\partial t} = z_0^{'}$.

On a aussi $z(t,0) = u(t,0) - z_0(t,0) = 0$ et $z(t,L) = u(t,L) - z_0(t,L) = 0$.

D'autre part, on a :

$$z(0,x) = u(0,x) - z_0(0,x) = u_0(x) - u_0(x) = 0,$$

et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x} = u_1(x) - u_1(x) = 0,$$

d'où

$$z(t,0) = z(t,L) = 0,$$

et

$$z(0,x) = \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Finalement, le problème (2.4)-(2.6) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - l(z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -m_3(t,x)\dfrac{\partial z}{\partial t} - m_3(t,x)z_0^{'} + (l(z)-1)\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}, \\ z(t,0) = z(t,L) = 0, \\ z(0,x) = \dfrac{\partial}{\partial t}z(t,x) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

où $l(z)$ est donné par (2.9).

Remarquons que $l(z)$ contient différents types de termes non-locaux.

Motivé par ce modèle, nous allons maintenant introduire un problème plus général. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et T une constante positive. Posons

$$Q_T = (0,T) \times \Omega,$$

On note par x un point de $\mathbb{R}^N$ et (t,x) un point de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^N$.
On pose

$$\nabla_x u = \nabla u = (\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_N} u)^{\perp}, \ u' = \partial_t u,$$

où $\perp$ désigne le symbole de transposition.
Notons par $a = a(t,x,s)$ (resp. $f = f(t,x,r,s)$) une fonction à valeur réelle dépendant d'un terme non-local $s = l(z)$ (resp un terme non-local $s = l(z)$ et la vitesse $r = u^{'}$).
Considérons le problème d'évolution non-local défini comme suit :

$$\begin{cases} u^{''} - \nabla.\big(a(.,l(u))\nabla u\big) = f\big(.,u^{'},l(u)\big) \text{ dans } Q_T \\ \\ u = 0 \text{ sur } (0,T) \times \partial\Omega, \\ \\ u(0) = 0 \text{ et } u^{'}(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.11}$$

Définition 2.1.1. On dit que le problème (2.11) admet une solution local si il existe $T_0 \leq T$ et une fonction $u : (0,T_0) \times \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaisant (2.11) au sens faible.
Si $T_0 = T$ on dit que u est une solution non-locale.
Afin de généraliser les modèle (2.8) et (2.10), on suppose que

$$\begin{aligned} l(u)(t,x) \quad = \quad & \Big(\big(\int_\Omega \hbar_0(t,x,y)u^2(y)dy\big)^{p_0}, \big(\int_\Omega \hbar_1(t,x,y)(\partial_{x_1}u(y))^2(y)dy\big)^{p_1}, \ldots, \\ & \big(\int_\Omega \hbar_N(t,x,y)(\partial_{x_N}u(y))^2(y)dy\big)^{p_N}, \big(\int_\Omega h_1(t,x,y)u(y)dy)^{q_0}\big), \\ & \big(\int_\Omega h_1(t,x,y)\partial_{x_1}u(y)dy)^{q_1}\big), \ldots, \big(\int_\Omega h_N(t,x,y)\partial_{x_N}u(y)dy)^{q_N}\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.12}$$

où pour $i = 0, \ldots, N$ p_i, q_i sont des entiers et $\hbar_i$, h_i sont des fonctions à valeurs réelles. L'existence de solutions locales, dans le cas dégénéré aussi bien que dans le cas non dégénéré (dans des situations naturelles plus générales motivées par le problème (2.10)) sera démontré en utilisant les méthodes asymptotiques combinées avec le théorème du point fixe de Schauder. On présentera également un résultat d'existence d'une solution non-locale moyennant quelques hypothèses sur les données du problème.
Dans ce qui suit, pour un domaine donné ω, on dénotera par $(.,.)_\omega$ le produit scalaire de $L^2(\omega)$ (ou tout simplement par $(.,.)$ s'il y a pas d'ambiguïté), et par $\langle .,. \rangle_\omega$ le crochet de dualité entre $H_0^1(\omega)$ et $H^{-1}(\omega)$ ou simplement $\langle .,. \rangle$) et par $|.|_2$ la norme de $L^2(\omega)$.
A présent, nous présentons les hypothèses à imposer sur la fonctions a afin de définir les cas dégénéré et non dégénéré. D'autres hypothèses seront imposées sur a dans la section suivante. Suppose que a est une fonction continue, *i.e.*

$$a \in C([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{2N+2}). \tag{2.13}$$

On distingue deux cas selon les valeurs de la fonction a.
(I) Cas dégénéré

$$a(0,x,0) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.14}$$

(II) Cas non dégénéré

$$a \gg 0 \quad dans \quad [0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{2N+2}. \tag{2.15}$$

En plus, on suppose que les fonctions $\hbar_i$, h_i introduit dans (2.12), vérifient
$\hbar_i,\, h_i \in C([0,T] \times \overline{\Omega} \times \overline{\Omega})\ \forall i = 0, \dots, N,$
et qu'il existe un constant $\delta > 0$ telle que

$$|\hbar_i|, |\hbar_i^{'}|, |\nabla \hbar_i|, |\nabla \hbar_i^{'}| \leq \frac{\delta}{2} \quad p.p.\,(t,x,y) \in (0,T) \times \Omega \times \Omega \quad \forall i = 0, \dots, N, \tag{2.16}$$

$$|h_i|_2, |h_i^{'}|_2, |\nabla h_i|_2, |\nabla h_i^{'}|_2, \ \leq \frac{\delta}{2} \quad p.p.\,(t,x) \in (0,T) \times \Omega \quad \forall i = 0, \dots, N. \tag{2.17}$$

En générale, la fonction f est supposée être continue, c'est à dire que

$$f \in C([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N+2}), \tag{2.18}$$

d'autres d'hypothèses seront imposées sur f dans la prochaine section selon les cas dégénéré et non-dégénéré.

Dans la section qui suit, on étudiera l'existence de solutions locales faibles de (2.11) dans le cas dégénéré. Pour ce faire, on résout d'abord une suite de problèmes réguliers en utilisant le Théorème du point fixe de Schauder, la suite de solutions ainsi obtenues, va converger vers la solution de notre problème. La troisième section est consacrée à l'étude de l'existence de solutions faibles locales et non locales du problème non-dégénéré, moyennant certaines hypothèses sur les données. Rappelons d'abord une version du théorème du point fixe de Schauder.

Lemme 2.1. *: Soit ϕ une partie relativement compacte convexe d'un espace de Banach B. Soit $H : \phi \to \phi$ une fonction continue sur tout partie de ϕ de dimension finie. Alors, il existe une suite convergente $u_n \in \phi$, telle que la suite $H(u_n)$ converge vers la limite de u_n i.e.*

$$\lim_{n\to\infty} H(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n$$

2.2 Solution locale du problème dégénéré

Dans cette section, on va traiter l'existence de solution local du problème quasi linéaire et hyperbolique donné par (2.11) *avec un terme non-local l définir par (2.12) i.e. on suppose que a satisfait* (2.14). *En effet, on va effectuer quelque hypothèse sur les données. Alors par* (2.13) *et* (2.14), *il existe ρ, λ, $\gamma_1 > 0$ et un constante $\leq T$ (qu'on notera toujours par T) tel que*

$$|a(t,x,s)| \leq \frac{\gamma_1}{2}, a(t,x,s) \geq 2\lambda, \forall (t,x,s) \in (0,T) \times \Omega \times \overline{B}_\rho, \tag{2.19}$$

où $\overline{B}_\rho \subset \mathbb{R}^{2N+2}$ la boule fermée de rayon ρ et de centre à l'origine. En plus, on suppose qu'il existe des constantes $\gamma, \gamma_0, b \geq 0$ telles que

$$|a^{'}|, |\nabla a|, |\nabla_s a|, |\nabla_s(\nabla a)|, |\nabla a^{'}|, |\nabla_s a^{'}|, |\nabla_s(\nabla_s a)| \ \leq \frac{\gamma}{2}, p.p.\,(t,x,s) \in (0,T) \times \Omega \times \overline{B}_\rho, \tag{2.20}$$

$$|\nabla_x f| \leq \gamma_0, |\nabla_s f|, \quad |f'| \leq \gamma, |\partial_r f| \quad \leq b \ p.p. \, (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.21}$$

où ∇_s est le gradient par rapport à s. Comme conséquence de la dernière inégalité et (2.18) *on obtient :*

$$\Big| \int_0^r \partial_r f dx \Big| \leq \int_0^r |\partial_r f| dx \leq \int_0^r b,$$

alors

$$|f(t,x,r,s)| - |f(t,x,0,s)| \leq b|r| \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho,$$

d'où

$$|f(t,x,r,s)| \leq b_0 + b|r| \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.22}$$

où $b_0 = \max_{t,\,x,\,s} |f(t,x,0,s)|$. Remarquons que (2.22) *reste vraie pour le problème* (2.10) *car nous prouverons avec la suite que $l(z)$ est borné. On va commencer par introduire le même problème par des données régulières*

2.2.1 Existence de solutions du problème régulier

L'idée cruciale utilisée par S. Guesmia pour résoudre le problème (2.11) *est basée sur l'idée de résoudre la suite des problèmes réguliers en utilisant le théorème du point fixe de Schauder donnée par le lemme 2.1. les solutions ansi obtenues convergent vers les solutions de notre problème. Introduisons les familles de fonctions suivante :*

$$a_n \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \overline{B}_\rho) \ et \ \hbar_i^n, h_i^n \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho)$$

pour chaque $i = 0, \ldots, N$, telles que

$$\begin{cases} a_n \to a, a_n^{'} \to a^{'}, \nabla a_n \to \nabla a, \nabla a_n^{'} \to \nabla a^{'}, \nabla_s \nabla a_n \to \nabla_s \nabla a, \\ \nabla_s a_n \to \nabla_s a, \nabla_s a_n^{'} \to \nabla_s a^{'}, \nabla_s \nabla_s a_n \to \nabla_s \nabla_s a, dans \, L^\infty((0,T) \times \Omega \times \overline{B}_\rho), \\ \hbar_i^n \to \hbar_i, (\hbar_i^n)^{'} \to \hbar_i^n, \nabla \hbar_i^n \to \nabla \hbar_i, \nabla (\hbar_i^n)^{'}) \to \nabla \hbar_i^{'} \ dans \, L^\infty((0,T) \times \Omega \times \Omega), \\ h_i^n \to h_i, (h_i^n)^{'} \to h_i^n, \nabla \hbar_i^n \to \nabla h_i, \nabla (h_i^n)^{'}) \to \nabla h_i^{'} \ dans \, L^\infty((0,T) \times \Omega; L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.23}$$

Comme on a (2.16) , (2.17) , (2.19) , (2.20) *et* (2.23) *on peut supposer que, pour chaque $n > 0$,*

$$a_n(t,x,s) \geq \lambda, \quad \forall (t,x,s) \in (0,T) \times \Omega \times \overline{B}_\rho, \tag{2.24}$$

$$|a_n| \leq \gamma_1, |a_n^{'}|, |\nabla_s a_n|, |\nabla_s(\nabla_x a_n)|, |\nabla a_n^{'}|, |\nabla a_n|, |\nabla_s a_n^{'}|, |\nabla_s(\nabla_s a_n)| \leq \gamma \\ \forall \, (t,x,s) \in (0,T) \times \Omega \times \overline{B}_\rho, \tag{2.25}$$

$$|\hbar_i^n|, |(\hbar_i^n)'|, |\nabla_x \hbar_i^n|, |\nabla_x (\hbar_i^n)'| \leq \delta \quad \forall (t,x,y) \in (0,T) \times \Omega \times \Omega \ \forall i = 0, \ldots, N, \tag{2.26}$$

$$|h_i^n|_2, |(h_i^n)'|_2, |\nabla_x h_i^n|_2, |\nabla_x (h_i^n)'|_2 \leq \delta, \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \Omega \ \forall i = 0, \ldots, N. \tag{2.27}$$

à l'aide du lemme qui suit nous allons construire une suite de fonctions régulières qui converge vers f.

Lemme 2.2. *: Soit f une fonction vérifiant les hypothèses (2.18), (2.21), alors il existe une suite de fonctions $f_n \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho)$ telle que :*

$$|\partial_t f_n|, \quad |\nabla_s f_n| \leq \gamma, \quad |\partial_r f_n| \leq b, \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.28}$$

$$|f_n(t,x,r,s)| \leq b_0 + b|r|, \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.29}$$

$$f_n(t,.,r,s) = 0 \quad \textit{sur le bord} \quad \partial\Omega \quad \forall (t,r,s) \in (0,T) \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho. \tag{2.30}$$

En plus, pour toute suite z_n convergente vers z dans $L^2(Q)$, on a :

$$f_n(.,z_n,.) \to f(.,z,.) \quad \textit{dans}\, L^\infty(\overline{B}_\rho; L^2(Q)). \tag{2.31}$$

Preuve. On définit la fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ par :

$$\rho = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & si \ |x| < 1 \\ \\ 0 \quad si \quad non, \end{cases}$$

telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho dx = 1, \quad \rho \geq 0.$$

On définit la fonction ρ_n par :

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx).$$

Alors $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^∞, et satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1 \quad supp(\rho_n) \in B(0, \frac{1}{n}), \, pour\, n \to \infty.$$

• De (2.20), on sait que f est localement intégrable. Posons $f_n = f * \rho_n$, qui s'écrit comme suit :

$$f_n(t,x,r,s) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x-y, r, s) \rho_n(y) dy.$$

L'existence d'une suite de fonction $f_n \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho)$ est donc assurée.

• D'autre part, on a :

$$|\partial_t f_n| = \left| \partial_t \int_{\mathbb{R}^N} f(t, x-y, r, s) \rho_n(y) dy \right|,$$

grâce au théorème de Fubini, on obtient :

$$|\partial_t f_n| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \partial_t f(t, x-y, r, s) \rho_n(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_t f(t, x-y, r, s)| \rho_n(y) dy,$$

d'après (2.19), on a :

$$|\partial_t f| \leq \gamma \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)dy,$$

et comme

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)dx = 1,$$

alors

$$|\partial_t f_n| \leq \gamma.$$

De même pour $\nabla_s f_n$ et $\partial_r f_n$, on trouve :

$$|\nabla_s f_n| \leq \gamma \ \ et \ \ |\partial_r f_n| \leq b,$$

d'où

$$|\partial_t f_n|, \quad |\nabla_s f_n| \leq \gamma, \quad |\partial_r f_n| \leq b, \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho,$$

• en utilisant la dernière égalité et l'hypothèse de $f_n \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_n$, on obtient (pour $r > 0$):

$$\Big| \int_0^r \partial_r f_n dx \Big| \leq \int_0^r |\partial_r f_n| dx \leq \int_0^r b,$$

alors

$$|f_n(t,x,r,s)| - |f_n(t,x,0,s)| \leq b|r| \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f_n(t,x,r,s)| &\leq |f_n(t,x,0,s)| + b|r| \\ &\leq b_0 + b|r| \quad \forall (t,x,r,s) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \end{aligned}$$

où $b_0 = \max_{t,\,x,\,s} |f_n(t,x,0,s)|$.

• On a $supp(\rho_n) \subset B(0, \dfrac{1}{n})$ alors $\rho_n(x-y) = 0$ si $x - y \notin B(0, \dfrac{1}{n})$, ce qui donne $x \notin B(y, \dfrac{1}{n}) \ \forall y \in \Omega$. D'où

$$f_n(t,.,r,s) = 0, \ sur \ le \ voisinage \, de \, \partial\Omega \quad \forall (t,r,s) \in (0,T) \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho,$$

• On a z_n convergente vers z dans $L^2(Q)$, ce qui donne $\lim_{n\to\infty} ||z_n - z||_{L^2(Q)} = 0$.

Par définition, on a :

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(.,z_n,.) - f(.,z,.)||_{L^\infty(\overline{B}_\rho;L^2(Q))} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{B}_\rho} ||f_n(.,z_n,.) - f(.,z,.)||_{L^2(Q)}.$$

Or, par application de l'inégalité $\sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{2}(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}) \ \forall a, b \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} ||f_n(.,z_n,.) - f(.,z,.)||_{L^\infty(\overline{B}_\rho;L^2(Q))} \leq \sqrt{2} \lim_{n\to\infty} \sup_{\overline{B}_\rho} (&||f_n(.,z_n,.) - f(.,z_n,.)||_{L^2(Q)} \\ &+ ||f(.,z_n,.) - f(.,z,.)||_{L^2(Q)}) \quad . \end{aligned}$$

et comme f est continue alors

$$\lim_{n\to\infty}(||f(.,z_n,.)-f(.,z,.)||_{L^2(Q)}=0,$$

et comme aussi $f_n \to f$ quand $n\to\infty$ on trouve :

$$\lim_{n\to\infty}(||f_n(.,z_n,.)-f(.,z_n,.)||_{L^2(Q)}=0,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty}||f_n(.,z_n,.)-f(.,z,.)||_{L^\infty(\overline{B}_\rho;L^2(Q))}=0.$$

Il en résulte que :

$$f_n(.,z_n,.)\to f(.,z,.)\quad dans\ L^\infty(\overline{B}_\rho;L^2(Q)).$$

Remarque 2.1. On remarque que l'estimation

$$|\nabla_x f|\le \gamma_0,\quad p.p.(t,x,r,s)\in(0,T)\times\Omega\times\mathbb{R}\times\overline{B}_\rho \tag{2.32}$$

est utilisés seulement ici, elle n'est pas réellement nécessaire. Au lieu de (2.32), par exemple, on peut seulement supposer que f est uniformément continue en x.
Nous établissons l'existence de solutions locaux des problèmes réguliers non-locales suivants :

$$\begin{cases} u''-\nabla.\big(a_n\big(.,l_n(u)\big)\nabla u\big)=f\big(.,u',l_n(u)\big)\ \text{ dans }\ Q_T,\\[2ex] u=0 \text{ sur } (0,T)\times\partial\Omega,\\[2ex] u(0)=0 \text{ et } u'(0)=0 \text{ dans } \Omega,\end{cases} \tag{2.33}$$

où l_n est définie comme dans (2.12), en remplaçant $\hbar_i$, h_i par $\hbar_i^n$, h_i^n respectivement pour $i=0,\dots,N$.

Théorème 2.1. *Soit Ω un ouvert borné régulière de $\mathbb{R}^n$, soit f_n la suite de fonction régulière donnée par le lemme 2.2. Supposons que* (2.24)-(2.27) *sont réalisées et on a*

$$4(b+b_0)(b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2)<\min\left(1,\frac{\lambda}{2}\right)\lambda M^2, \tag{2.34}$$

où M est donnée ci dessous par (2.44)*. Alors, pour tout n et tout $T_0\in]0,T]$ il existe au moins une solution u_n telle que :*

$$\begin{cases} u_n\in C(0,T_0;\ H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T_0;\ H^2(\Omega)),\partial_t^2u_n\in L^\infty(0,T_0;\ L^2(\Omega))\\[2ex] \partial_t u_n\in L^\infty(0,T_0;\ H_0^1(\Omega))\cap C(0,T_0;\ L^2(\Omega)),\\[2ex] u_n(0)=0\ et\, u_n'(0)=0\ dans\ \Omega,\\[2ex] u_n''-\nabla.\big(a_n\big(.,l_n(u_n)\big)\nabla u_n\big)=f_n\big(.,u_n',l_n(u_n)\big).\end{cases} \tag{2.35}$$

En plus, pour chaque n, nous avons les estimations suivantes

$$|\Delta u_n|_{L^\infty(0,T_0;\,L^2(\Omega))},\ |\nabla u_n^{'}|_{L^\infty(0,T_0;\,L^2(\Omega))} \leq M, \tag{2.36}$$

$$|u_n^{''}|_{L^\infty(0,T_0;\,L^2(\Omega))} \leq R, \tag{2.37}$$

où R est une constante indépendante de n

Preuve. Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder (lemme 2.1), on sait que pour chaque $\omega \in C^\infty(\overline{Q})$ qui s'annule sur $[0,T]\times\Omega$, le problème linéaire hyperbolique suivant :

$$\begin{cases} u_n^{''} - \nabla(a_n(.,l_n(\omega)))\nabla u_n) = f_n(.,u_n^{'},l_n(\omega)) \\ u_n = 0\, sur\,(0,T)\times\Omega, \\ u_n(0) = 0,\ et\,\partial_t u_n(0) = 0\ dans\,\Omega, \end{cases} \tag{2.38}$$

admet une unique solution au sens faible.
Pour cette dernière affirmation, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(u_n,v) + \displaystyle\int_\Omega a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n.\nabla v dx = (f_n(.,\omega^{'},l_n(\omega)),v)\ dans\,\mathcal{D}^{'}(0,T), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_n \in C(0,T;H_0^1(\Omega)),\ u_n^{'} \in C(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_n(0) = 0 \quad et\, u_n^{'}(0) = 0\ dans\,\Omega. \end{cases} \tag{2.39}$$

On pose $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ et

$$a(u_n,v) = \int_\Omega a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n.\nabla v dx,$$

et comme
$f_n \in C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\overline{B}_\rho)$ est régulière alors, on peut supposer que

$$f_n \in L^2(]0,T[\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\overline{B}_\rho;L^2(\Omega)).$$

Premièrement, on montre que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive
Il est clair que $a\,(.,.)$ bilinéaire et symétrique. Il reste de montrer que $a(.,.)$ est continue et coercive.
Pour montrer que $a(.,.)$ est continue, il suffit de montrer que

$$|a_n(u_n,v)| \leq M||u_n||||v||.$$

On a

$$|a_n(u_n,v)| = |\int_\Omega a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n.\nabla v dx| \leq \int_\Omega |a_n(.,l_n(\omega))||\nabla u_n|.|\nabla v|dx,$$

d'après (2.23), on obtient :

$$|a_n(u_n, v)| \leq \gamma_1 \int_\Omega |\nabla u_n|.|\nabla v| dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on aura :

$$|a_n(u_n, v)| \leq \gamma_1 \Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^2| \Big)^{\frac{1}{2}} . \Big(\int_\Omega \nabla v|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq M||u_n||||v||,$$

avec $\gamma_1 = M$,
donc $a(.,.)$ est continue.
Ainsi, pour montrer que $a(.,.)$ est coercive (elliptique), il suffit de montrer que

$$a(v, v) \geq \nu ||v||^2.$$

On a

$$a_n(v, v) = \int_\Omega a_n(.,l_n(\omega)) \nabla v . \nabla v dx = \int_\Omega a_n(.,l_n(\omega)) |\nabla v|^2 dx,$$

d'après (2.22), on obtient :

$$a_n(v, v) \geq \lambda \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \nu ||v||^2,$$

donc $a(.,.)$ est coercive.
En effet, V, H deux espaces de Hilbert tel que $V \subset H$ avec injection compact et V dense dans H, $a(.,.)$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue et coercive, ainsi un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_n \in V$ et $u_n^{'} \in H$ ou bien $(u_n, u_n^{'}) \in V \times H$, et un terme source
$f_n \in L^2(]0, T[\times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho; H)$, implique que, d'après le théorème d'existence et l'unicité dans le cas hyperbolique le problème (2.39) a une unique solution $u_n \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$.
Nous appliquons le résultat ci-dessus à la formulation variationnelle (2.39) de l'équation du problème (2.38) (ces hypothèses sont facilement vérifiées avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$). Il reste à montrer que l'unique solution $u_n \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ de cette formulation variationnelle est bien une solution du problème (2.38). Tout abord, la condition aux limites de Dirichlet se retrouve par application de théorème du trace à $u_n(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $t \in [0, T]$, et la condition initiale est justifiée par la continuité de $u_n(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeur dans $H_0^1(\Omega)$ et de $u_n^{'}(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeur dans $L^2(\Omega)$.
Pour que u_n soit suffisamment régulière, par intégration par partie, la formulation variationnelle du problème (2.39) est équivalente à

$$\int_\Omega \Big(u_n^{''} - \nabla (a_n(., l_n(\omega)) \nabla u_n) - f_n\big(., \omega^{'}, l_n(\omega)\big) \Big) dx = 0,$$

pour tout $v(x) \in H_0^1(\Omega)$ et presque tout $t \in]0, T[$. On déduit donc l'équation de (2.38).
En particulier, d'après (2.30) et la condition initiale nulle, on déduit que les conditions de compatibilité pour les problèmes hyperboliques d'ordre m sont réalisées, pour $m \in \mathbb{N}$ (voir [22]). Alors, comme

toutes les données de problème sont régulières et si on suppose que $\partial\Omega$ est suffisamment régulier, pour $\partial\Omega \in C^{\infty}$, il s'ensuit que u_n est régulière, *i.e.*

$$u_n \in C^{\infty}(\overline{Q}_T). \tag{2.40}$$

En combinant (2.40) avec $u_n = 0$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$, on obtient :

$$\partial_t^k u_n = 0 \quad sur\,(0,T) \times \Omega,\, \forall k \geq 0. \tag{2.41}$$

En utilisant les conditions initiales nulles et bornées, on déduit que :

$$\partial_{x_i}^k u_n(0) = \partial_{x_i}^k u_n^{'}(0) = 0 \quad dans\,\Omega,\, pour\, i = 1,\ldots,N, \forall k \geq 0. \tag{2.42}$$

On est maintenant en mesure de définir suite de fonctions $(H_n)_n$, par :

$$\omega \longrightarrow H_n(\omega) = u_n,$$

et on considère les hypothèses suivantes

$$\sup_{t\leq T_0} |\partial_t^2 \omega|_2 \leq R, \quad \sup_{t\leq T_0} \big(|\partial_t \nabla \omega(t)|_2^2 + |\Delta\omega(t)|_2^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq M, \tag{2.43}$$

où R, $T_0 > 0$ sont des constantes indépendantes de n qui seront choisies ultérieurement. On a $T_0 < T$. M est constante vérifiant la $2^{\text{ème}}$ inégalité de (2.43), telle que $l_n(\omega) \in \overline{B}_\rho$ *i.e.*

$$\begin{cases} M = \sup\big\{M^{'}|\forall\omega \in C_0^{\infty}(\Omega),\, |\Delta\omega|_2 \leq M^{'} \Rightarrow l(\omega) \in \overline{B}_{\frac{\rho}{2}}\big\}, \\ \forall\omega \in C_0^{\infty}(\Omega),\, |\Delta\omega|_2 \leq M \Rightarrow l_n(\omega) \in \overline{B}_\rho \end{cases} \tag{2.44}$$

La prochaine étape de la démonstration consiste à établir les estimations (2.36) - (2.37).
Pour cela, on a besoin d'écrire une certaine d'égalité.
Pour ce faire, on suppose que

$$u_n \in C^4(\overline{\Omega}_T). \tag{2.45}$$

Nous appliquons Laplacien à la $1^{ére}$ équation de (2.38), *i.e.*

$$\partial_t^2 \Delta u_n - \Delta\nabla(a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n) = \Delta f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big),$$

ensuite, les hypothèses (2.40) et (2.41) permettent de tester l'identité ci-dessus avec
$v = -\partial_t u_n$ et par intégration sur Ω, on obtient :

$$-\int_\Omega \partial_t^2 \Delta u_n.\partial_t u_n dx + \int_\Omega \big[\Delta\nabla\big(a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n\big)\big]\partial_t u_n dx = -\int_\Omega \Delta f_n(.,\omega^{'},l_n(\omega)).\partial_t u_n dx.$$

Une intégration par parties, nous donne :

$$-\int_\Omega \partial_t^2 \Delta u_n.\partial_t u_n dx = \int_\Omega \partial_t^2 \nabla u_n.\partial_t \nabla u_n dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_n^{''}}{\partial n}.\partial_t u_n ds,$$

(A l'aide de la formule de Green)
et comme $\partial_t^k u_n = 0$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$, $\forall k \geq 0$, alors

$$\partial_t u_n = 0 \, sur \, (0,T) \times \partial\Omega$$

Ce qui donne :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_n''}{\partial n} . \partial_t u_n ds = 0,$$

d'où

$$\int_\Omega -\partial_t^2 \Delta u_n . \partial_t u_n dx = \int_\Omega -\partial_t^2 \nabla u_n . \partial_t \nabla u_n dx = \big(- \partial_t^2 \nabla u_n, \partial_t \nabla u_n \big),$$

$\big($car $L^2(\Omega)$ muni de produit scalaire $(f,g) = \int_\Omega f(x).g(x)dx\big)$
et on a aussi :

$$\int_\Omega \big[\Delta \nabla \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) \big] \partial_t u_n dx = - \int_\Omega \nabla \big[\nabla \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) \big] \partial_t \nabla u_n dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \nabla}{\partial n} \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) \partial_t u_n dx,$$

ce qui donne :

$$\int_\Omega \big[\Delta \nabla \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) \big] \partial_t u_n dx = - \int_\Omega \nabla \big[\nabla \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) \big] \partial_t \nabla u_n dx.$$

De la même manière, par la formule de Green on a :

$$- \int_\Omega \Delta f_n(.,\omega', l_n(\omega)). \partial_t u_n dx = \int_\Omega \nabla f_n(.,\omega', l_n(\omega)). \partial_t \nabla u_n dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f_n}{\partial \eta} . \partial_t u_n ds,$$

d'après (2.41), on obtient :

$$- \int_\Omega \Delta f_n(.,\omega', l_n(\Omega)). \partial_t u_n dx = \int_\Omega \nabla f_n(.,\omega', l_n(\omega)). \partial_t \nabla u_n dx,$$

d'où

$$(-\partial_t^2 \nabla u_n, \partial_t \nabla u_n) - \int_\Omega \nabla \big[\nabla (a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n) \big] \partial_t \nabla u_n dx = \int_\Omega \nabla f_n(.,\omega', l_n(\omega)). \partial_t \nabla u_n dx, \tag{2.46}$$

comme $\partial_t u_n = 0$ sur $(0,T) \times \partial\Omega$. Comme conséquence de (2.41), du lemme 2.2 et de l'identité

$$\nabla \big(a_n(.,l_n(\omega)) \nabla u_n \big) = \partial_t^2 u_n - f_n \big(.,\omega', l_n(\omega)\big),$$

pour tout $t \in [0,T]$, nous avons :

$$\nabla \big(a_n(.,l_n(u_n)) \nabla u_n \big) \in H_0^1(\Omega),$$

c'est à dire que

$$\nabla\big(a_n(.,l_n(u_n))\nabla u_n\big) = 0, \quad sur\,\partial\Omega \quad et\,\Delta\nabla\big(a_n\big(.,l_n(u_n)\big)\nabla u_n\big) \in L^2(\Omega).$$

Retournons à (2.46), il s'ensuit que :

$$(\partial_t^2 u_n, \partial_t u_n) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)},$$

car, on :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_n^{'}|^2 dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2 dx \\
&= \int_\Omega \partial_t \nabla u_n^{'}.\nabla u_n^{'} dx \\
&= \int_\Omega \partial_t^2 \nabla u_n.\partial_t \nabla u_n dx \\
&= (\partial_t^2 u_n, \partial_t u_n)
\end{aligned}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla\big[\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big]\partial_t\nabla u_n dx &= \int_\Omega \big\{\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big\}\Delta u_n^{'} dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\frac{\partial}{\partial n}u_n^{'} ds,
\end{aligned}$$

(par la formule de Green)
et comme $\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big) \in H_0^1(\Omega)$ alors $\nabla\big(a_n(.,l_n(\omega))\nabla u_n\big) = 0$ sur $\partial\Omega$
d'où

$$-\int_\Omega \nabla\big[\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big]\partial_t\nabla u_n dx = \int_\Omega \big\{\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big\}\Delta u_n^{'} dx,$$

d'autre part

$$\int_\Omega \nabla f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\nabla u_n dx = -\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\Omega)\big)\partial_t\Delta u_n dx + \int_{\partial\Omega} f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\frac{\partial}{\partial n}u_n^{'} ds,$$

et par le lemme 2.2 on a $f_n = 0$ sur $(0,T)\times\partial\Omega$, alors $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\frac{\partial}{\partial n}u_n^{'} ds = 0$,
implique que :

$$\int_\Omega \nabla f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\nabla u_n dx = -\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\Omega)\big)\partial_t\Delta u_n dx,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \big[\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big]\Delta u_n^{'} dx = -\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dx. \tag{2.47}$$

On développe la deuxième intégrale de (2.47), on trouve :

$$\int_\Omega \big[\nabla\big(a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big)\big]\Delta u_n^{'} dx = \int_\Omega a_n(.\,,l_n(\omega))\Delta u_n \Delta u_n^{'} dx + \int_\Omega \big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]\nabla u_n\big\}\Delta u_n^{'} dx,$$

on remplace cette dernière égalité dans (2.47), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\Delta u_n \Delta u_n^{'} dx &= -\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t \Delta u_n dx \\ &\quad - \int_\Omega \big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big].\nabla u_n\big\}\Delta u_n^{'} dx. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Comme toutes les quantités sont régulières, la $1^{ére}$ intégrale dans l'identité ci-dessus s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\Delta u_n \Delta u_n^{'} dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\partial_t|\Delta u_n|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]|\Delta u_n|^2 dx\end{aligned}$$

car, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]|\Delta u_n|^2 + a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\partial_t|\Delta u_n|^2\Big)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]|\Delta u_n|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\partial_t|\Delta u_n|^2 dx\end{aligned}$$

Remplaçons cette dernière égalité dans (2.48) et nous intégrons sur $(0,t)$ pour $t \le T_0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dx d\sigma &= -\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dx d\sigma \\ + \int_0^t \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]|\Delta u_n|^2 dx d\sigma &- \int_0^t\int_\Omega \big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]\nabla u_n\big\}\Delta u_n^{'} dx d\sigma\end{aligned}$$

d'où l'égalité d'inergie suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dx &= \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]|\Delta u_n|^2 dx d\sigma \\ - \int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dx d\sigma &- \int_0^t\int_\Omega \big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]\nabla u_n\big\}\Delta u_n^{'} dx d\sigma.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Estimation I

Nous allons, dans un premier temps, estimer les inégalités du côté droit de l'équation (2.49).

i) Posons $l_n^{'}(\omega)(t,x)$ la quantité donnée par :

$$\begin{aligned}l_n^{'}(\omega)(t,x) = \Big(p_0\Big(\int_\Omega \hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega 2\hbar_0^n\omega\omega^{'} + \partial_t\hbar_0^n\omega^2, p_1\Big(\int_\Omega \hbar_1^n(\partial_{x_1}\omega)^2\Big)^{p_1-1}\int_\Omega 2\hbar_1^n\partial_{x_1}\omega\partial_{x_1}\omega^{'} \\ + \partial_t\hbar_1^n(\partial_{x_1}\omega)^2, \ldots, p_N\Big(\int_\Omega \hbar_N^n(\partial_{x_N}\omega)^2\Big)^{p_N-1}\int_\Omega 2\hbar_N^n\partial_{x_N}\omega\partial_{x_N}\omega^{'} + \partial_t\hbar_N^n(\partial_{x_N}\omega)^2,\end{aligned}$$

$$q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega h_0^n\omega' + \partial_t h_0^n\omega, q_1\Big(\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega\Big)^{q_1-1}\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega' + \partial_t h_1^n\partial_{x_1}\omega$$
$$,\dots, q_N\Big(\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big)^{q_N-1}\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega' + \partial_t h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big). \tag{2.50}$$

D'après (2.26), on a :

$$\begin{aligned}\Big|p_0\Big(\int_\Omega \hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega 2\hbar_0^n\omega\omega' + \partial_t\hbar_0^n\omega^2\Big| &\le p_0\Big(\delta\int_\Omega |\omega|^2+|\omega'|^2\Big)^{p_0-1}\delta\int_\Omega 2|\omega||\omega'|+|\omega|^2+|\omega'|^2\\ &\le p_0\delta^{p_0-1}\Big(\int_\Omega |\omega|^2+|\omega'|^2\Big)^{p_0-1}\delta\int_\Omega \big(|\omega|+|\omega'|\big)^2,\end{aligned}$$

puisque $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, on déduit que

$$\begin{aligned}\Big|p_0\Big(\int_\Omega \hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega 2\hbar_0^n\omega\omega' + \partial_t\hbar_0^n\omega^2\Big| &\le p_0\delta^{p_0}\Big(\int_\Omega |\omega|^2+|\omega'|^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega 2\big(|\omega|^2+|\omega'|^2\big)\\ &\le 2p_0\delta^{p_0}\Big(\int_\Omega |\omega|^2+|\omega'|^2\Big)^{p_0}\\ &\le 2p_0\delta^{p_0}\big(|\omega|_2^2+|\omega'|_2^2\big)^{p_0}.\end{aligned}$$

D'autre part $\forall i = 1,\dots,N$, d'après (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|p_i\Big(\int_\Omega \hbar_i^n(\partial_{x_i}\omega)^2\Big)^{p_i-1}\int_\Omega 2\hbar_i^n\partial_{x_i}\omega\partial_{x_i}\omega' + \partial_t\hbar_i^n(\partial_{x_i}\omega)^2\Big| &\le p_i\Big(\delta\int_\Omega |\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2\Big)^{p_i-1}\\ &\quad .\delta\Big(\int_\Omega 2|\partial_{x_i}\omega||\partial_{x_i}\omega'|+|\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2\Big)\\ &\le p_i\delta^{p_i}\Big(\int_\Omega |\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2\Big)^{p_i-1}.\int_\Omega\Big(|\partial_{x_i}\omega|+|\partial_{x_i}\omega'|\Big)^2,\end{aligned}$$

en appliquant l'égalité $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, il vient

$$\begin{aligned}\Big|p_i\Big(\int_\Omega \hbar_i^n(\partial_{x_i}\omega)^2\Big)^{p_i-1}\int_\Omega 2\hbar_i^n\partial_{x_i}\omega\partial_{x_i}\omega' + \partial_t\hbar_i^n(\partial_{x_i}\omega)^2\Big| &\le p_i\delta^{p_i}\Big(\int_\Omega |\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2\Big)^{p_i-1}\\ &\quad .\int_\Omega 2(|\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2)\\ &\le p_i\delta^{p_i}\Big(\int_\Omega |\partial_{x_i}\omega|^2+|\partial_{x_i}\omega'|^2\Big)^{p_i}\\ &\le p_i\delta^{p_i}\big(|\partial_{x_i}\omega|_2^2+|\partial_{x_i}\omega'|_2^2\big)^{p_i}\\ &\le p_i\delta^{p_i}\big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega'|_2^2\big)^{p_i}\end{aligned}$$

(la dernière inégalité est vraie puisque $|\partial_{x_i}\omega|_2^2 \le |\nabla\omega|_2^2$)

De manière similaire, avec l'inégalité (2.27), on a :

$$\Big|q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega h_0^n\omega' + \partial_t h_0^n\omega\Big| \le q_0\Big(|h_0^n|_2|\omega|_2\Big)^{q_0-1}\Big(|h_0^n|_2|\omega'|_2 + \partial_t|h_0^n|_2|\omega|_2\Big)$$

$$\leq q_0(\delta|\omega|_2)^{q_0-1}\delta\Big(|\omega^{'}|_2+|\omega|_2\Big),$$

de fait que :

$$\big(|a|+|b|\big)\leq\Big(2\big(|a|^2+|b|^2\big)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega h_0^n\omega^{'}+\partial_t h_0^n\omega\Big| &\leq q_0\delta^{q_0}\Big(\big(|\omega|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{q_0-1}\Big(2\big(|\omega^{'}|_2^2+|\omega|_2^2\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq q_0\delta^{q_0}\Big(|\omega|_2^2+|\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_0-1}{2}}\Big(2\big(|\omega^{'}|_2^2+|\omega|_2^2\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\sqrt{2}q_0\delta^{q_0}\Big(|\omega|_2^2+|\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_0}{2}}.\end{aligned}$$

De la même manière, pour tout $i\in\{1,\ldots,N\}$ et par (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|q_i\Big(\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big)^{q_i-1}\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega^{'}+\partial_t h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big| &\leq q_i\Big(\big(|h_i^n|_2|\partial_{x_i}\omega|_2\Big)^{q_i-1}\Big(|h_i^n|_2|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2+|\partial_t h_i^n|_2|\partial_{x_i}\omega|_2\Big)\\ &\leq q_i\Big(\delta\big(|\partial_{x_i}\omega|_2+|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2\big)\Big)^{q_i-1}\delta\Big(|\partial_{x_i}\omega|_2+|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2\Big),\end{aligned}$$

et comme on a $|a|+|b|\leq\Big(2\big(|a|^2+|b|^2\big)\Big)^{\frac{1}{2}}$, alors

$$\begin{aligned}\Big|q_i\Big(\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big)^{q_i-1}\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega^{'}+\partial_t h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big| &\leq\sqrt{2}q_i\delta^{q_i}\Big(|\partial_{x_i}\omega|_2^2+|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i-1}{2}}\Big(|\partial_{x_i}\omega|_2^2+|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\sqrt{2}q_i\delta^{q_i}\Big(|\partial_{x_i}\omega|_2^2+|\partial_{x_i}\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}},\end{aligned}$$

d'autre part :

$$|\nabla\omega|_2^2=|\partial_{x_1}\omega|_2^2+\ldots+|\partial_{x_N}\omega|_2^2,$$

on obtient alors $\forall i=1,\ldots,N$

$$|\nabla\omega|_2^2\geq|\partial_{x_i}\omega|_2^2$$

ce qui donne :

$$\Big|q_i\Big(\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big)^{q_i-1}\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega^{'}+\partial_t h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big|\leq\sqrt{2}q_i\delta^{q_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}.$$

D'où la conclusion

$$\begin{aligned}|l_n^{'}(\omega)(t,x)| &\leq 2\Big(p_0\delta^{p_0}(|\omega|_2^2+|\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_0}+\sum_{i=1}^N p_i\delta^{p_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_i}\\ &\quad+\sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}\Big(|\omega|_2^2+|\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_0}{2}}+\sum_{i=1}^N q_i\delta^{q_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big).\end{aligned}$$

D'après l'inégalité du poincaré $\exists\, C_\Omega > 0$ telle que :

$$|\omega|_2^2 \leq C_\Omega |\nabla\omega|_2^2, \quad et \quad |\omega^{'}|_2^2 \leq C_\Omega |\nabla\omega^{'}|_2^2,$$

ceci implique que :

$$\begin{aligned}|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq\ & 2\Big(p_0\delta^{p_0}\Big(C_\Omega\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)\Big)^{p_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_i}\Big)\\ &+ \sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}\Big(C_\Omega\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)\Big)^{\frac{q_0}{2}} + \sum_{i=1}^{N} q_i\delta^{q_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq\ & 2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_i}\Big)\\ &+ \sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_0}{2}} + \sum_{i=1}^{N} q_i\delta^{q_i}\Big(|\nabla\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big). \qquad (2.51)\end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\Delta v \in L^2(\Omega)$, et par l'inégalité du poincaré on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx &= -\int_\Omega v\Delta v \quad (formule\, de\, Green)\\ &\leq \Big(\int_\Omega |\Delta v|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |v|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq |\nabla v|_2 |v|_2,\end{aligned}$$

et comme

$$|v|_2^2 \leq C_\Omega |\nabla v|_2^2,$$

alors

$$|v|_2 \leq C_\Omega^{\frac{1}{2}} |\nabla v|_2,$$

d'où

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx = |\nabla v|_2^2 \leq C_\Omega^{\frac{1}{2}} |\Delta v|_2 |\nabla v|_2,$$

ce qui donne :

$$|\nabla v|_2 \leq C_\Omega^{\frac{1}{2}} |\Delta v|_2. \qquad (2.52)$$

En appliquant cette inégalité à (2.51), on obtient :

$$\begin{aligned}|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq\ & 2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{p_i}\Big)\\ &+ \sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_0}{2}} + \sum_{i=1}^{N} q_i\delta^{q_i}\Big(|C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big),\end{aligned}$$

suit encore

$$|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq 2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2+C_\Omega|\nabla\omega|_2^2\Big)^{p_0}+\sum_{i=1}^{N}p_i\delta^{p_i}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+$$
$$|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2+C_\Omega|\nabla\omega|_2^2\Big)^{p_i}\Big)+\sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\Big(C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2+C_\Omega|\nabla\omega|_2^2\Big)^{\frac{q_0}{2}}$$
$$+\sum_{i=1}^{N}q_i\delta^{q_i}\Big(|C_\Omega|\Delta\omega|_2^2+|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2+C_\Omega|\nabla\omega|_2^2\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big),$$

d'où

$$|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq 2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\Big(\big(C_\Omega+1\big)\big(|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\big)\Big)^{p_0}+\sum_{i=1}^{N}p_i\delta^{p_i}\Big(\big(C_\Omega+1\big)\big(|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\big)\Big)^{p_i}\Big)$$
$$+\sqrt{2}\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\Big(\big(C_\Omega+1\big)\big(|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\big)\Big)^{\frac{q_0}{2}}+\sum_{i=1}^{N}q_i\delta^{q_i}\Big(\big(C_\Omega+1\big)\big(|\Delta\omega|_2^2+|\nabla\omega^{'}|_2^2\big)\Big)^{\frac{q_i}{2}}\Big).$$

D'après (2.43), on a :

$$\sup_{t\leq T_0}\big(|\nabla\omega^{'}(t)|_2^2+|\Delta\omega(t)|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}\leq M,$$

et donc

$$\big(|\nabla\omega^{'}|_2^2+|\Delta\omega|_2^2\big)\leq M^2.$$

Par conséquent, on en déduit que

$$|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq 2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\big(C_\Omega+1\big)^{p_0}M^{2p_0}+\sum_{i=1}^{N}p_i\delta^{p_i}\big(C_\Omega+1\big)^{p_i}M^{2p_i}\Big)$$
$$+2\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\big(C_\Omega+1\big)^{\frac{q_0}{2}}M^{\frac{q_0}{2}}+\sum_{i=1}^{N}q_i\delta^{q_i}\big(C_\Omega+1\big)^{\frac{q_i}{2}}M^{q_i}\Big).$$

D'où

$$|l_n^{'}(\omega)(t,x)| \leq \Upsilon(\delta,M), \tag{2.53}$$

où

$$\Upsilon(\delta,M)=2\Big(p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{p_0}\big(C_\Omega+1\big)^{p_0}M^{2p_0}+\sum_{i=1}^{N}p_i\delta^{p_i}\big(C_\Omega+1\big)^{p_i}M^{2p_i}\Big)$$
$$+2\Big(q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{\frac{q_0}{2}}\big(C_\Omega+1\big)^{\frac{q_0}{2}}M^{q_0}+\sum_{i=1}^{N}q_i\delta^{q_i}\big(C_\Omega+1\big)^{\frac{q_i}{2}}M^{q_i}\Big). \tag{2.54}$$

ii) $\partial_{x_i}l_n(\omega)(t,x)$ est donnée par :

$$\partial_{x_i}l_n(\omega)(t,x)=\Big(p_0\Big(\int_\Omega\hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega\partial_{x_i}\hbar_0^n\omega^2, p_1\Big(\int_\Omega\hbar_1^n(\partial_{x_1}\omega)^2\Big)^{p_1-1}\int_\Omega\partial_{x_i}\hbar_1^n(\partial_{x_1}\omega)^2,\ldots,$$
$$p_N\Big(\int_\Omega\hbar_N^n(\partial_{x_N}\omega)^2\Big)^{p_N-1}\int_\Omega\partial_{x_i}\hbar_N^n(\partial_{x_N}\omega)^2, q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega\partial_{x_i}h_0^n\omega,$$

$$q_1\Big(\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega\Big)^{q_1-1}\int_\Omega\partial_{x_i}h_1^n\partial_{x_1}\omega,\ldots,q_N\Big(\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big)^{q_N-1}\int_\Omega\partial_{x_i}h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big).$$

D'après (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|p_0\Big(\int_\Omega\hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega\partial_{x_i}\hbar_0^n\omega^2\Big| &\le p_0\Big(\int_\Omega|\hbar_0^n||\omega^2|\Big)^{p_0-1}\int_\Omega|\partial_{x_i}\hbar_0^n||\omega^2|\\ &\le p_0\delta^{p_0-1}\Big(\int_\Omega|\omega|^2\Big)^{p_0-1}\delta\int_\Omega|\omega|^2\\ &\le p_0\delta^{p_0}\Big(\int_\Omega|\omega|^2\Big)^{p_0}\\ &\le p_0\delta^{p_0}|\omega|_2^{2p_0},\end{aligned}$$

et pour tout $i,j=1,\ldots,N$ et par (2.26), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|p_i\Big(\int_\Omega\hbar_i^n\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\Big)^{p_i-1}\int_\Omega\partial_{x_j}\hbar_i^n\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\Big| &\le p_i\Big(\int_\Omega|\hbar_i^n|\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\Big)^{p_i-1}\int_\Omega\partial_{x_j}|\hbar_i^n|\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\\ &\le p_i\delta^{p_i-1}\big(|\partial_{x_i}\omega|_2^2\big)^{p_i-1}\delta|\partial_{x_i}\omega|_2^2\\ &\le p_i\delta^{p_i}|\partial_{x_i}\omega|_2^{2p_i},\end{aligned}$$

d'un autre côté on a :

$$|\nabla\omega|_2^2=|\partial_{x_1}\omega|_2^2+\ldots+|\partial_{x_N}\omega|_2^2,$$

donc

$$|\partial_{x_i}\omega|_2^2\le|\nabla\omega|_2^2\quad\forall i=1,\ldots,N.$$

D'où

$$\Big|p_i\Big(\int_\Omega\hbar_i^n\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\Big)^{p_i-1}\int_\Omega\partial_{x_j}\hbar_i^n\big(\partial_{x_i}\omega\big)^2\Big|\le p_i\delta^{p_i}|\nabla\omega|_2^{2p_i}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\Big|q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega\partial_{x_i}h_0^n\omega\Big| &\le q_0\big(|h_0^n|_2|\omega|_2\big)^{q_0-1}|\partial_{x_i}h_0^n|_2|\omega|_2\\ &\le q_0\delta^{q_0-1}|\omega|_2^{q_0-1}\delta|\omega|_2\\ &\le q_0\delta^{q_0}|\omega|_2^{q_0},\end{aligned}$$

et $\forall i,j=1,\ldots,N$ et par (2.27), on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|q_i\Big(\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big)^{q_i-1}\int_\Omega\partial_{x_j}h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big| &\le |q_i\big(|h_i^n|_2|\partial_{x_i}\omega|_2\big)^{q_i-1}|\partial_{x_j}h_i^n|_2|\partial_{x_i}\omega|_2\\ &\le q_i\delta^{q_i-1}|\partial_{x_i}\omega|_2^{q_i-1}\delta|\partial_{x_i}\omega)|_2\\ &\le q_i\delta^{q_i}|\partial_{x_i}\omega|_2^{q_i},\end{aligned}$$

et comme $|\partial_{x_i}\omega|_2^2\le|\nabla\omega|_2^2$, alors

$$\Big|q_i\Big(\int_\Omega h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big)^{q_i-1}\int_\Omega\partial_{x_j}h_i^n\partial_{x_i}\omega\Big|\le q_i\delta^{q_i}|\nabla\omega|_2^{q_i},$$

d'où

$$|\partial_{x_i} l_n(\omega)(t,x)| \leq p_0\delta^{p_0}|\omega|^{2p_0} + q_0\delta^{q_0}|\omega|_2^{q_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}|\nabla\omega|_2^{2p_i} + q_i\delta^{q_i}|\nabla\omega|_2^{q_i}.$$

Enfin, par l'inégalité du poincaré et par (2.52), on aura :

$$|\omega|_2 \leq C_\Omega|\Delta\omega|_2, \quad |\nabla\omega|_2 \leq C_\Omega^{\frac{1}{2}}|\Delta\omega|_2,$$

on obtient donc

$$|\partial_{x_i} l_n(\omega)(t,x)| \leq p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{2p_0}|\Delta\omega|^{2p_0} + q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{q_0}|\Delta\omega|_2^{q_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}C_\Omega^{p_i}|\Delta\omega|_2^{2p_i} + q_i\delta^{q_i}C_\Omega^{\frac{q_i}{2}}|\Delta\omega|_2^{q_i},$$

d'après (2.43), on trouve :

$$|\Delta\omega|_2^2 \leq M^2,$$

d'où

$$|\partial_{x_i} l_n(\omega)(t,x)| \leq p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{2p_0}M^{2p_0} + q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{q_0}M^{q_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}C_\Omega^{p_i}M^{2p_i} + q_i\delta^{q_i}C_\Omega^{\frac{q_i}{2}}M^{q_i}.$$

Posons alors :

$$\overline{\Upsilon}(\delta, M) = p_0\delta^{p_0}C_\Omega^{2p_0}M^{2p_0} + q_0\delta^{q_0}C_\Omega^{q_0}M^{q_0} + \sum_{i=1}^{N} p_i\delta^{p_i}C_\Omega^{p_i}M^{2p_i} + q_i\delta^{q_i}C_\Omega^{\frac{q_i}{2}}M^{q_i}, \tag{2.55}$$

d'où la conclusion

$$|\partial_{x_i} l_n(\omega)(t,x)| \leq \overline{\Upsilon}(\delta,M) \tag{2.56}$$

(iii) Finalement, $\partial_{x_i} l'_{n(\omega)}(t,x)$ est donné par :

$$\partial_{x_i} l'_n(\omega)(t,x) = A + B,$$

où

$$\begin{aligned} A = \Big(& p_0\Big(\int_\Omega \hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-1}\int_\Omega 2\partial_{x_i}\hbar_0^n\omega\omega' + \partial_t\partial_{x_i}\hbar_0^n\omega^2, p_1\Big(\int_\Omega \hbar_1^n\big(\partial_{x_1}\omega\big)^2\Big)^{p_1-1}\int_\Omega 2\partial_{x_i}\hbar_1^n\partial_{x_1}\omega\partial_{x_1}\omega' \\ &+ \partial_{x_i}\partial_t\hbar_1^n\big(\partial_{x_1}\omega\big)^2, \ldots, p_N\Big(\int_\Omega \hbar_N^n\big(\partial_{x_N}\omega\big)^2\Big)^{p_N-1}\int_\Omega 2\partial_{x_i}\hbar_N^n\partial_{x_N}\omega\partial_{x_N}\omega' + \partial_{x_i}\partial_t\hbar_N^n\big(\partial_{x_N}\omega\big)^2, \\ & q_0\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-1}\int_\Omega \partial_{x_i}h_0^n\omega' + \partial_{x_i}\partial_t h_0^n\omega, q_1\Big(\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega\Big)^{q_1-1}\int_\Omega \partial_{x_i}h_1^n\partial_{x_1}\omega' + \partial_{x_i}\partial_t h_1^n\partial_{x_1}\omega, \ldots, \\ & q_N\Big(\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big)^{q_N-1}\int_\Omega \partial_{x_i}h_N^n\partial_{x_N}\omega' + \partial_{x_i}\partial_t h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}B = \Big(& p_0(p_0-1)\Big(\int_\Omega \hbar_0^n\omega^2\Big)^{p_0-2}\int_\Omega \partial_{x_i}\hbar_0^n\omega^2\Big(\int_\Omega 2\hbar_0^n\omega\omega' + \partial_t\hbar_0^n\omega^2 dy\Big), p_1(p_1-1)\\ &\Big(\int_\Omega \hbar_1^n\big(\partial_{x_1}\omega\big)^2\Big)^{p_1-2}\int_\Omega \partial_{x_i}\hbar_1^n\big(\partial_{x_1}\omega\big)^2 dy\int_\Omega 2\hbar_1^n\partial_{x_1}\omega\partial_{x_1}\omega' + \partial_t\hbar_1^n\big(\partial_{x_1}\omega\big)^2 dy, \dots,\\ & p_N(p_N-1)\Big(\int_\Omega \hbar_N^n\big(\partial_{x_N}\omega\big)^2\Big)^{p_1-2}\int_\Omega \partial_{x_i}\hbar_N^n\big(\partial_{x_N}\omega\big)^2 dy\int_\Omega 2\hbar_N^n\partial_{x_N}\omega\partial_{x_N}\omega'\\ &+\partial_t\hbar_N^n\big(\partial_{x_N}\omega\big)^2 dy, q_0(q_0-1)\Big(\int_\Omega h_0^n\omega\Big)^{q_0-2}\int_\Omega \partial_{x_i}h_0^n\omega dy\int_\Omega h_0^n\omega' + \partial_t h_0^n\omega dy,\\ & q_1(q_1-1)\Big(\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega\Big)^{q_1-2}\int_\Omega \partial_{x_i}h_1^n\partial_{x_1}\omega dy\int_\Omega h_1^n\partial_{x_1}\omega' + \partial_t h_1^n\partial_{x_1}\omega dy, \dots,\\ & q_N(q_N-1)\Big(\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega\Big)^{q_N-2}\int_\Omega \partial_{x_i}h_N^n\partial_{x_N}\omega dy\int_\Omega h_N^n\partial_{x_N}\omega' + \partial_t h_N^n\partial_{x_N}\omega dy\Big).\end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), on obtient :

$$A \le \Upsilon(\delta, M) \quad et\ B \le \max(p_i-1, q_i-1)\Upsilon(\delta, M) \quad pour\ i = 0, \dots, N,$$

d'où

$$|\partial_{x_i} l_n'(t,x)| \le c\Upsilon(\delta, M), \tag{2.57}$$

où

$$c = 1 + \max\{p_i - 1, q_i - 1 \quad pour \quad i = 0, \dots, N\}$$

Dans ce qui suit, pour des raisons de simplicité, on omettra dans $\Upsilon(\delta, M)$ et $\overline{\Upsilon}(\delta, M)$.
Nous allons maintenant estimer les trois termes de côté droit du (2.49).
On réécrit le premier terme comme suit :

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega \partial_t[a_n(.,l_n(\omega))]|\Delta u_n|^2 dxd\sigma = &\int_0^t\int_\Omega \partial_t a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dxd\sigma\\ &+\int_0^t\int_\Omega \nabla_s\big(a_n(.,l_n(\omega)\big).l_n'(\omega)|\Delta u_n|^2 dxd\sigma.\end{aligned} \tag{2.58}$$

En prenant en considération (2.25) et (2.53), on trouve :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t\int_\Omega \partial_t\big(a_n(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2 dxd\sigma\Big| &\le \int_0^t\int_\Omega \gamma|\Delta u_n|^2 dxd\sigma\\ &\le \gamma\int_0^t\int_\Omega |\Delta u_n|^2 dxd\sigma\\ &\le \gamma\int_0^t |\Delta u_n|_2^2 d\sigma,\end{aligned}$$

ainsi

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega \nabla_s a_n\big(.,l_n(\omega)\big).l_n'(\omega)|\Delta u_n|^2 dxd\sigma\Big| \le \int_0^t\int_\Omega \gamma\Upsilon|\Delta u_n|^2 dxd\sigma$$

$$\leq \gamma \Upsilon \int_0^t \int_\Omega |\Delta u_n|^2 dx d\sigma$$
$$\leq \gamma \Upsilon \int_0^t |\Delta u_n|_2^2 d\sigma,$$

d'où

$$\Big| \int_0^t \int_\Omega \partial_t [a_n(., l_n(\omega))] |\Delta u_n|^2 dx d\sigma \Big| \leq \gamma(1+\Upsilon) \int_0^t |\Delta u_n|_2^2 d\sigma. \tag{2.59}$$

Revenons à (2.49) et estimant le deuxième terme dans le coté droit, En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) \partial_t \Delta u_n dx d\sigma &= \int_\Omega f_n\big(t, ., \omega', l_n(\omega)\big) \Delta u_n dx - \int_0^t \int_\Omega \partial_t f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) \Delta u_n dx d\sigma \\
&= \int_\Omega f_n\big(t, ., \omega', l_n(\omega)\big) \Delta u_n dx - \int_0^t \int_\Omega \partial_r [f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big)] \omega'' \Delta u_n dx d\sigma \\
&\quad - \int_0^t \int_\Omega \partial_t f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) \Delta u_n dx d\sigma - \int_0^t \int_\Omega \big\{\nabla_s f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) l_n'(\omega)\big\} \Delta u_n dx d\sigma.
\end{aligned}$$

Nous appliquons le lemme 2.2 et (2.53), on aura :

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^t \int_\Omega f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) \partial_t \Delta u_n dx d\sigma \Big| &\leq \int_\Omega (b_0 + b|\omega'|) |\Delta u_n| dx + b \int_0^t \int_\Omega |\omega''| |\Delta u_n| dx d\sigma \\
&\quad + \gamma(\Upsilon + 1) \int_0^t \int_\Omega |\Delta u_n| dx d\sigma.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young au première terme de l'inégalité ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (b_0 + b|\omega'|) |\Delta u_n| dx &= b_0 \int_\Omega |\Delta u_n| dx + b \int_\Omega |\omega'| |\Delta u_n| dx \\
&\leq b_0 \Big(\int_\Omega \frac{1^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} |\Delta u_n|^2 \Big) + b \Big(\int_\Omega \Big(\frac{1}{2\epsilon} |\omega'|^2 dx + \frac{\epsilon}{2} |\Delta u_n|^2 \Big) \\
&\leq \frac{b_0 mes(\Omega)}{2\epsilon} + \frac{b}{2\epsilon} \int_\Omega |\omega'|^2 dx + \frac{\epsilon}{2} (b_0 + b) |\Delta u_n|_2^2,
\end{aligned}$$

et l'inégalité du poincaré, nous donne :

$$|\omega'|^2 \leq C_\Omega |\nabla \omega'|^2,$$

il vient que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\omega'|^2 dx &\leq \int_\Omega C_\Omega |\nabla \omega'|^2 \\
&\leq C_\Omega |\nabla \omega'|_2^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega \big(b_0 + b|\omega'|\big) |\Delta u_n| dx \leq \frac{b_0 mes(\Omega)}{2\epsilon} + \frac{b}{2\epsilon} C_\Omega |\nabla \omega'|_2^2 + \frac{\epsilon}{2} (b_0 + b) |\Delta u_n|_2^2.$$

De même, pour le deuxième et le troisième terme, on utilise l'inégalité de Young, on obtient :

$$b\int_0^t\int_\Omega |\omega^{''}||\Delta u_n|dxd\sigma \leq \frac{bt}{2}\sup_{\sigma\leq T_0}|\omega^{''}|_2^2+\frac{1}{2}\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,$$

et

$$\gamma(\Upsilon+1)\int_0^t\int_\Omega |\Delta u_n|dxd\sigma \leq \frac{\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)t}{2}+\frac{\gamma(\Upsilon+1)}{2}\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dxd\sigma\Big| &\leq \frac{b_0mes(\Omega)}{2\epsilon}+\frac{\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)t}{2}+\frac{b}{2\epsilon}C_\Omega|\nabla\omega^{'}|_2^2\\ &+\frac{\epsilon}{2}(b_0+b)|\Delta u_n|_2^2+\frac{bt}{2}\sup_{\sigma\leq T_0}|\omega^{''}|_2^2+\frac{1}{2}\big(b+\gamma(\Upsilon+1)\big)\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,\end{aligned}$$

où ϵ est une constante.

Rappelons par (2.43) qu'on a :

$$\sup_{t\leq T_0}|\partial_t^2\omega|_2\leq R,\quad \sup_{t\leq T_0}\Big(|\partial_t\nabla\omega(t)|_2^2+|\Delta\omega(t)|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leq M,$$

donc

$$\sup_{t\leq T_0}|\omega^{''}|_2^2\leq R^2\quad et\quad |\nabla\omega|_2^2\leq M^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dxd\sigma\Big| &\leq \frac{b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2}{2\epsilon}+\Big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2\Big)\frac{t}{2}\\ &+\frac{\epsilon}{2}(b_0+b)|\Delta u_n|_2^2+\frac{1}{2}\big(b+\gamma(\Upsilon+1)\big)\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma. \qquad (2.60)\end{aligned}$$

D'après (2.49) et l'intégration par parties du dernier terme sur le coté droit, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega\{\nabla[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)].\nabla u_n\}\Delta u_n^{'}dxd\sigma &= \int_\Omega\{\big(\nabla[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)].\nabla u_n\big)\}\Delta u_n dx\\ &-\int_0^t\int_\Omega\big(\nabla[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)].\nabla u_n^{'}\big)\Delta u_n dxd\sigma-\int_0^t\int_\Omega\big(\nabla[\partial_t[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)]].\nabla u_n\big)\Delta u_n dxd\sigma\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big].\nabla u_n\}\Delta u_n^{'}dxd\sigma\\ &=\int_\Omega\Big\{\big(\nabla_s a_n.\partial_{x_i}l_n(\omega)\big)_{i=1,\dots,N}.\nabla u_n\Big\}\Delta u_n dx+\int_\Omega\{(\nabla a_n.\nabla u_n)\}\Delta u_n dx\\ &-\int_0^t\int_\Omega\Big\{(\nabla a_n.\nabla u_n^{'})\Big\}\Delta u_n dxd\sigma-\int_\Omega\Big\{\big(\nabla_s a_n.\partial_{x_i}l_n(\omega)\big)_{i=1,\dots,N}.\nabla u_n^{'}\Big\}\Delta u_n dxd\sigma\\ &-\int_0^t\int_\Omega\Big[(\nabla a_n^{'})+\big[\partial_{x_i}\nabla_s a_n.l_n^{'}(\omega)\big]_{i=1,\dots,N}+\big(\nabla_s a_n^{'}.\partial_{x_i}l_n(\omega)\big)_{i=1,\dots,N}+\big(\nabla_s a_n.\partial_{x_i}l_n^{'}(\omega)\big)_{i=1,\dots,N}\end{aligned}$$

$$+\left(\left(\partial_{s_j}\nabla_s a_n.l_n'(\omega)\right)_{j=1,\dots,2N+2}.\partial_{x_i}l_n(\omega)\right)_{i=1,\dots,N}\Big].\nabla u_n\Delta u_n dxd\sigma.$$

Puis, en utilisant (2.25) - (2.27), (2.53), (2.56) et (2.57), on obtient :

$$\Big|\int_\Omega\Big\{\nabla_s\big(a_n.\partial_{x_i}l_n(\omega)\big)_{i=1,\dots,N}.\nabla u_n\Big\}\Delta u_n dx\Big|\leq\sqrt{N}\gamma\overline{\Upsilon}\int_\Omega|\nabla u_n||\Delta u_n|dx,$$

et

$$\Big|\int_\Omega\big\{(\nabla a_n.\nabla u_n)\big\}\Delta u_n dx\Big|\leq\sqrt{N}\gamma\int_\Omega|\nabla u_n)||\Delta u_n|dx.$$

Finalement, de façon similaire, on obtient :

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega\big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big].\nabla u_n\big\}\Delta u_n'dxd\sigma\Big|\leq\sqrt{N}\gamma(\overline{\Upsilon}+1)\int_\Omega|\nabla u_n||\Delta u_n|dx$$
$$+\gamma\sqrt{N}\Big((\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t\int_\Omega|\nabla u_n'||\Delta u_n|dxd\sigma+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)\int_0^t\int_\Omega|\nabla u_n||\Delta u_n|dxd\sigma\Big).$$

L'application de l'inégalité de Young, il vient :

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega\big\{\nabla\big[a_n(.,l_n(\omega))\big].\nabla u_n\big\}\Delta u_n'dxd\sigma\Big|\leq\sqrt{N}\frac{\gamma}{2}(\overline{\Upsilon}+1)\big(\epsilon'|\Delta u_n|_2^2+\frac{1}{\epsilon'}|\nabla u_n|_2^2\big)$$
$$+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}\Big((\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t|\nabla u_n'|_2^2+|\Delta u_n|_2^2d\sigma+(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2+|\Delta u_n|_2^2d\sigma\Big).$$

En prenant en considération (2.52), on peut écrire :

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega\big\{\nabla\big[a_n(.,l_n(\omega))\big].\nabla u_n\big\}\Delta u_n'dxd\sigma\Big|\leq\sqrt{N}\frac{\gamma}{2}(\overline{\Upsilon}+1)\Big(\epsilon'|\Delta u_n|_2^2+\frac{1}{\epsilon'}|\nabla u_n|_2^2\Big)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}\Big((\overline{\Upsilon}+1)$$
$$\Big(\int_0^t|\nabla u_n'|_2^2d\sigma+\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma\Big)+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)\int_0^t C_\Omega|\Delta u_n|_2^2+|\Delta u_n|_2^2d\sigma\Big),$$

d'où

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega\big\{\nabla\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big].\nabla u_n\big\}\Delta u_n'dxd\sigma\Big|\leq\sqrt{N}\frac{\gamma}{2}(\overline{\Upsilon}+1)\Big(\epsilon'|\Delta u_n|_2^2+\frac{1}{\epsilon'}|\nabla u_n|_2^2\Big)+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}\Big((\overline{\Upsilon}+1).$$
$$\int_0^t|\nabla u_n'|_2^2d\sigma+\big(\overline{\Upsilon}+1+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)(C_\Omega+1)\big)\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma\Big).\tag{2.61}$$

Finalement, en combinant (2.49) avec (2.59) - (2.61), il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}|\partial_t\nabla u_n|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2dx\leq\frac{b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2}{2\epsilon}+\big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2\big)\frac{t}{2}$$
$$+\Big(\frac{\gamma\varepsilon'}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)+\frac{\epsilon}{2}(b_0+b)\Big)|\Delta u_n|_2^2+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\Big(\int_0^t|\nabla u_n'|_2^2d\sigma+\frac{1}{\epsilon'}|\nabla u_n|_2^2\Big)$$
$$+\Big\{\frac{b}{2}+\frac{\gamma}{2}\Big[2+2\Upsilon+\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1\Big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)(C_\Omega+1)\Big)\Big]\Big\}\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,$$

d'après (2.24), on aura :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} a_n\big(.,l_n(\omega)\big)|\Delta u_n|^2dx \geq \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega}|\Delta u_n|^2dx = \frac{\lambda}{2}|\Delta u_n|_2^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\partial_t\nabla u_n|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}|\Delta u_n|_2^2 &\leq \frac{b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2}{2\epsilon} + \big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2\big)\frac{t}{2}\\ &+\Big(\frac{\gamma\varepsilon^{'}}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)+\frac{\epsilon}{2}(b_0+b)\Big)|\Delta u_n|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\Big(\int_0^t|\nabla u_n^{'}|_2^2d\sigma+\frac{1}{\epsilon^{'}}|\nabla u_n|_2^2\Big)\\ &+\Big\{\frac{b}{2}+\frac{\gamma}{2}\Big[2+2\Upsilon+\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)(C_\Omega+1)\big)\Big]\Big\}\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma.\end{aligned}$$

En prenant $\epsilon = \dfrac{\lambda}{4(b_0+b)}$ et $\epsilon^{'} = \dfrac{\lambda}{4\gamma\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)}$, on aura :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}|\Delta u_n|_2^2 &\leq \frac{2(b_0+b)(b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2)}{\epsilon} + \big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2\big)\frac{t}{2}\\ &+\Big\{\frac{b}{2}+\frac{\gamma}{2}\big[2+2\Upsilon+\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1)(C_\Omega+1)\big)\big]\Big\}\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma\\ &+\frac{\lambda}{4}|\Delta u_n|_2^2+\frac{2\gamma^2}{\lambda}N(\overline{\Upsilon}+1)^2|\nabla u_n|_2^2+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t|\nabla u_n^{'}|_2^2d\sigma,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_n^{'}|_2^2 + \frac{\lambda}{4}|\Delta u_n|_2^2 &\leq \frac{2(b_0+b)(b_0mes(\Omega)+bC_\Omega M^2)}{\lambda} + \big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)\\ &+bR^2\big)\frac{t}{2}+\Big\{\frac{b}{2}+\frac{\gamma}{2}\big[2+2\Upsilon+\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1)(C_\Omega+1)\big)\big]\Big\}\\ &\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma+\frac{2\gamma^2}{\lambda}N(\overline{\Upsilon}+1)^2|\nabla u_n|_2^2+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t|\nabla u_n^{'}|_2^2d\sigma. \qquad (2.62)\end{aligned}$$

Estimation II

Afin d'appliquer l'inégalité de Gronwall, le lemme suivant à pour but d'estimer le terme $|\nabla u_n|_2^2$.

Lemme 2.3. *On a pour chaque* $t \leq T_0$

$$|\nabla u_n|_2^2 \leq \frac{4}{\lambda}(b_0^2mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2)t^2+\frac{\gamma}{\lambda}(1+\Upsilon)C_\Omega\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma.$$

Preuve. En analysant l'équation dans (2.39) avec $v = u_n^{'}$, on obtient :

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_n,u_n^{'}) + \int_{\Omega} a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n^{'}dx = \big(f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big),u_n^{'}\big),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|u_n^{'}(t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\partial_t|\nabla u_n|^2dx = \int_{\Omega}f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)u_n^{'}dx.$$

En intégrant sur $(0,t)$, on aura :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n^{'}(t)|^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dx=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \partial_t\big[a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\big]\nabla u_n.\nabla u_n dxd\sigma$$
$$+\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big).u_n^{'}dxd\sigma.$$

Nous calculons la première intégrale de côté droit, on obtient :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n^{'}(t)|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dx=+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega a_n^{'}\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dxd\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \big(\nabla_s a_n\big(.,l_n(\omega)\big).l_n^{'}(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dxd\sigma+\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big).u_n^{'}dxd\sigma.$$

Ainsi, d'après (2.24), (2.25), (2.53) et le lemme 2.2, on déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n^{'}(t)|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dx\leq\frac{\gamma}{2}(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma+\int_0^t\int_\Omega(b_0+b|\omega^{'}|)|u_n^{'}|dxd\sigma,$$

et comme

$$\int_\Omega a_n\big(.,l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla u_n dx\geq\lambda\int_\Omega|\nabla u_n|^2dx$$
$$\geq\lambda|\nabla u_n|_2^2,$$

donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_n^{'}(t)|^2+\frac{\lambda}{2}|\nabla u_n|_2^2\leq\frac{\gamma}{2}(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma+\int_0^t\int_\Omega(b_0+b|\omega^{'}|)|u_n^{'}|dxd\sigma.$$

Par l'inégalité de Young et pour $\epsilon>0$, on obtient :

$$|u_n^{'}(t)|_2^2+\lambda|\nabla u_n|_2^2\leq\frac{1}{\epsilon}\Big(b_0^2mes(\Omega)t+b^2\int_0^t|\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma+2\epsilon\int_0^t|u_n^{'}|_2^2d\sigma.$$

Il s'ensuit que :

$$\sup_{\sigma\leq t}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq\sup_{\sigma\leq t}(|u_n^{'}(\sigma)|^2+\gamma|\nabla u_n(\sigma)|_2^2)$$
$$\leq\frac{1}{\epsilon}\Big(b_0^2mes(\Omega)t+b^2\int_0^t|\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma$$
$$+2\epsilon t\sup_{\sigma\leq t}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2.$$

En choisissant $\epsilon=\dfrac{1}{4t}$, on obtient :

$$\sup_{\sigma\leq t}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4t\Big(b_0^2mes(\Omega)t+b^2\int_0^t|\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma$$
$$+\frac{1}{2}\sup_{\sigma\leq t}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2,$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\sup_{\sigma\leq t}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4t\Big(b_0^2 mes(\Omega)t+b^2\int_0^t|\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma,$$

d'où

$$\frac{1}{2}|u_n^{'}(t)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4t\Big(b_0^2 mes(\Omega)t+b^2\int_0^t|\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)\int_0^t|\nabla u_n|_2^2d\sigma.$$

Nous appliquons l'inégalité du poincaré et (2.52), on obtient :

$$\frac{1}{2}|u_n^{'}(t)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4t\Big(b_0^2 mes(\Omega)t+b^2C_\Omega\int_0^t|\nabla\omega^{'}|_2^2d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)C_\Omega\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma.$$

Puis, par (2.43), il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2}|u_n^{'}(t)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4t\Big(b_0^2 mes(\Omega)t+b^2C_\Omega M^2\int_0^t d\sigma\Big)+\gamma(1+\Upsilon)C_\Omega\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,$$

d'où

$$\frac{1}{2}|u_n^{'}(t)|_2^2+\lambda|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4\Big(b_0^2 mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2\Big)t^2+\gamma(1+\Upsilon)C_\Omega\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma,$$

et comme $\frac{1}{2}|u_n^{'}(\sigma)|_2^2\geq 0$ et $\lambda>0$, alors

$$|\nabla u_n(t)|_2^2\leq 4\Big(b_0^2 mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2\Big)t^2+\gamma(1+\Upsilon)C_\Omega\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma.$$

Revenons maintenant à (2.62) et en appliquant le lemme ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\partial_t\nabla u_n|_2^2+\frac{\lambda}{4}|\Delta u_n|_2^2\leq\ &\frac{2(b_0+b)(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2)}{\lambda}+\big(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2\big)\frac{t}{2}\\ &+\frac{8\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2\big(b_0^2 mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2\big)t^2+\Big\{\frac{\gamma}{2}\Big[\frac{4\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2(1+\Upsilon)C_\Omega+2+2\Upsilon\\ &+\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)(C_\Omega+1)\big)\Big]+\frac{b}{2}\Big\}\times\int_0^t|\Delta u_n|_2^2d\sigma\\ &+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t|\partial_t\nabla u_n|_2^2d\sigma.\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}G_{\gamma,\delta,b}(M)=\max\Big(1,\frac{2}{\lambda}\Big)\Big[b+\gamma\Big(&\frac{4\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2(1+\Upsilon)C_\Omega+2+2\Upsilon\\ &+\sqrt{N}\big(2\overline{\Upsilon}+2(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1)(C_\Omega+1)\big)\Big)\Big],\end{aligned}$$

et

$$F_{\gamma,\delta,b}(t,M,R)=\max\Big(1,\frac{2}{\lambda}\Big)\times\Big[(\gamma(\Upsilon+1)mes(\Omega)+bR^2)\frac{t}{2}+\frac{8\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2(b_0^2 mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2)t^2\Big],$$

d'où la conclusion

$$|\partial_t \nabla u_n|_2^2 + |\Delta u_n|_2^2 \leq \max\Big(2,\frac{4}{\lambda}\Big)\frac{2(b_0^2+b)(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b}(t,M,R)t+$$
$$G_{\gamma,\delta,b}(M)\int_0^t |\Delta u_n|_2^2 d\sigma + \max\Big(1,\frac{2}{\lambda}\Big)\gamma\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\int_0^t |\partial_t\nabla u_n|_2^2 d\sigma.$$

En effet, pour montrer que l'inégalité ci-dessus est vraie, il suffit de montrer que si a et b sont deux constantes strictement positives et x, y et z sont des variables positives avec $ax+by\leq z$ alors

$$x+y\leq \max\Big(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\Big)z$$

1 cas : si $a\leq b$ alors

$$x+\frac{b}{a}y\leq \frac{1}{a}z,$$

et comme

$$\frac{b}{a}y\geq y,$$

on obtient

$$x+y\leq \frac{1}{a}z$$

2 cas : même étape, si $b\leq a$ alors

$$\frac{a}{b}x+y\leq \frac{1}{b}z,$$

et comme

$$\frac{a}{b}x\geq x,$$

alors

$$x+y\leq \frac{1}{b}z.$$

D'où

$$x+y\leq \max(\frac{1}{a},\frac{1}{b})z.$$

Finalement, comme on a :

$$\gamma\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\leq G_{\gamma,\delta,b}(M)$$

alors

$$|\partial_t \nabla u_n|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Delta u_n|_2^2 \leq \max\Big(2,\frac{4}{\lambda}\Big)\frac{2(b_0^2+b)(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b}(t,M,R)t+$$
$$G_{\gamma,\delta,b}(M)\Big(\int_0^t |\Delta u_n|_2^2 + |\partial_t\nabla u_n|_2^2 d\sigma\Big).$$

D'autre part $|\partial_t \nabla u_n|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Delta u_n|_2^2$ est une fonction continue de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^+$ et, on a :

$$\max\Big(2,\frac{4}{\lambda}\Big)\frac{2(b_0^2+b)(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2)}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b} \;\; et\, G_{\gamma,\delta,b},$$

sont deux constantes positives et par l'inégalité de Gronwall, on obtient :

$$|\partial_t \nabla u_n|_2^2 + |\Delta u_n|_2^2 \le \Big(\max\Big(2, \frac{4}{\lambda}\Big) \frac{2(b_0^2+b)(b_0 mes(\Omega) + bC_\Omega M^2)}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b} t \Big) \exp G_{\gamma,\delta,b} t. \tag{2.63}$$

Notons que les constantes ci-dessus sont indépendantes de n. Nous utilisons maintenant la deuxième dérivée de $H_n(\omega)$ pour obtenir le 1^{ér} estimation de (2.43). Alors avec (2.39) on obtient :

$$\partial_t^2 u_n = f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) - a_n\big(., l_n(\omega)\big).\Delta u_n - \nabla\big[a_n\big(., l_n(\omega)\big)\big]\nabla u_n,$$

d'où

$$\partial_t^2 u_n = f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big) - a_n\big(., l_n(\omega)\big).\Delta u_n - \nabla a_n\big(., l_n(\omega)\big)\nabla u_n - \big[\nabla_s a_n\big(., l_n(\omega)\big)\partial_{x_i} l_n(\omega)\big]_{i=1,\dots,N}.\nabla u_n.$$

Par ailleurs, pour tous réels a, b, c et d de, on a :

$$(a-b-c-d)^2 \le 2\big[(a-b)^2 + (c-d)^2\big] \le 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2$$

d'où

$$\begin{aligned}\big|\partial_t^2 u_n\big|_2^2 \le 4\big|f_n\big(., \omega', l_n(\omega)\big)\big|_2^2 + 4\big|a_n\big(., l_n(\omega)\big).\Delta u_n\big|_2^2 + 4\big|\nabla a_n\big(., l_n(\omega)\big)\nabla u_n\big|_2^2 \\ + 4\big|\big[\nabla_s a_n\big(., l_n(\omega)\big)\partial_{x_i} l_n(\omega)\big]_{i=1,\dots,N}.\nabla u_n|_2^2.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.2, (2.25) et (2.56) sur la dernière inégalité, on obtient :

$$\big|\partial_t^2 u_n\big|_2^2 \le 4\big(b_0 + b|\omega'|_2\big)^2 + 4\gamma_1^2|\Delta u_n|_2^2 + 4N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)|\nabla u_n|_2^2,$$

et comme $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, alors

$$\big|\partial_t^2 u_n\big|_2^2 \le 8mes(\Omega)b_0^2 + 8b^2|\omega'|_2^2 + 4\gamma_1^2|\Delta u_n|_2^2 + 4N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)|\nabla u_n|_2^2.$$

Or, en utilisant l'inégalité du poincaré et (2.52), on obtient :

$$\big|\partial_t^2 u_n\big|_2^2 \le 8mes(\Omega)b_0^2 + 8b^2 C_\Omega|\nabla\omega'|_2^2 + 4\big[\gamma_1^2 + N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)C_\Omega\big]|\Delta u_n|_2^2.$$

Alors par (2.43) et (2.63), on déduit que

$$\big|\partial_t^2 u_n\big|_2^2 \le I_{\gamma,\delta,b}(M,R), \tag{2.64}$$

où

$$I_{\gamma,\delta,b}(M,R) = 8mes(\Omega)b_0^2 + 8b^2 C_\Omega\big|\nabla\omega'\big|_2^2 + 4\big[\gamma_1^2 + N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)C_\Omega\big]$$

$$\times \Big(\max\Big(2, \frac{4}{\lambda}\Big) \frac{2(b_0^2+b)\big(b_0 mes(\Omega) + bC_\Omega M^2\big)}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b} t \Big) \exp G_{\gamma,\delta,b} t. \tag{2.65}$$

Définition de ϕ

Pour appliquer le théorème du point fixe de Schauder, on doit vérifier que $H_n(\omega)$ satisfait les inégalités similaires à celles données dans (2.43) pour ω *i.e.*

$$\left|\partial_t^2 u_n\right|_2^2 \leq R^2, \quad \left|\partial_t \nabla u_n\right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left|\Delta u_n(t)\right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M^2. \tag{2.66}$$

ça va être réalisé si on a :

$$\left(\max\left(2, \frac{4}{\lambda}\right)\frac{2(b_0^2+b)\big(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2\big)}{\lambda} + F_{\gamma,\delta,b}t\right)\exp G_{\gamma,\delta,b}t \leq M^2, \tag{2.67}$$

et

$$I(M,R) \leq R^2. \tag{2.68}$$

Premièrement, grâce à (2.34), on a :

$$\max\left(2, \frac{4}{\lambda}\right)\frac{2(b_0^2+b)\big(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2\big)}{\lambda} < M^2.$$

On distingue deux cas selon les valeurs γ, δ, b et T_0.
(C_1) Si γ, δ et b sont fixés, on choisit R tel que

$$R^2 > 8mes(\Omega)b_0^2 + 8b^2C_\Omega M^2 + 4\left[\gamma_1^2 + N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)C_\Omega\right] \times \max\left(2, \frac{4}{\lambda}\right)\frac{2(b_0^2+b)\big(b_0 mes(\Omega)+bC_\Omega M^2\big)}{\lambda},$$

alors, il existe $0 < T_0 \leq T$ indépendante de n pour tout (2.67) et (2.68) sont vérifiées pour chaque $t \in (0, T_0)$.
(C_2) Maintenant, on fixe $T_0 = T$ et on choisit R tel que

$$R^2 > 8mes(\Omega)b_0^2 + \max\left(2, \frac{4}{\lambda}\right)\frac{8b_0^2\gamma_1^2 mes(\Omega)}{\lambda},$$

alors, il existe γ, $b > 0$ ou δ, $b > 0$ indépendants de n tel que (2.67) et (2.68) sont vérifiées pour chaque $t \in (0,T_0)$, puisque

$$\lim_{\gamma,\, b\to 0} F_{\gamma,\,\delta,\,b} = \lim_{\gamma,\, b\to 0} G_{\gamma,\,\delta,\,b} = 0.$$

D'autre part, grâce à (2.44), quand δ, $b > 0$ est petit, M peut être choisi suffisamment grand et le M, dans (2.63), peut être contrôlé par b.
Dans cette étude, on a juste besoin d'avoir $\sup_\Omega \hbar$ et $\sup_\Omega h$ suffisement petite afin d'avoir M suffisament grand.
Le deuxième cas (C_2) est dédié à l'étude de l'existence de solutions non-locales(voir la prochaine section), et la premier (C_1) caractérise les solutions locales.
Finalement, on définit ϕ par :

$$\phi = \left\{u \in C^\infty\big([0,T_0]\times\overline{\Omega}\big), u(t,.) = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \left|\partial_t\nabla u\right|_2^2 + \left|\Delta u\right|_2^2 \leq M^2, \left|\partial_t^2 u\right|_2 \leq R \quad \forall t \in (0,T_0)\right\},$$

et on conclut que H_n envoie l'ensemble ϕ dans lui-même. Il est clair que $\phi \in W^1\big(0, T_0;\ H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\big)$ puisque on a :

$$H^2 \cap H_0^1(\Omega) = \big\{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega)\big\}.$$

Nous déduisons alors que ϕ est un ensemble convexe relativement compact dans $L^2\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$.

Fin de la preuve du théorème 2.1

L'étape prochaine consiste à montrer que $H_n : \phi \to \phi$ est une fonction continue. Notons que ϕ est muni de la norme de $L^2\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$. On considère la suite $\omega^m \in \phi$ convergente vers $\omega \in \phi$ dans $L^2\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$, *i.e.*

$$\Big(\int_0^{T_0} \big|\omega^m - \omega\big|_{H^1}^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

et comme $L^2 \hookrightarrow L^1$, on obtient :

$$\int_0^{T_0} \big|\omega^m - \omega\big|_{H^1} dx \to 0. \tag{2.69}$$

Pour n fixé, on pose que $\omega_n^m = H_n(\omega^m) \in \phi$. Comme on a aussi u_n^m, $\omega^m \in \phi$ alors

$$u_n^m \in L^2\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big)\ et\ \partial_t u_n^m \in L^2\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big),$$

car $\phi \subset W^1\big(0, T_0;\ H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\big)$.

Ceci implique que la suite u_n^m est bornée dans $L^2\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big)$, et bornée aussi dans $C\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big)$ (car $C\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big) \subset L^2\big(0, T_0;\ H^2(\Omega)\big)$).

d'un autre côté on a $H_0^2(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^2(\Omega)$,

c-à-d la suite u_n^m est bornée dans $C\big(0, T_0;\ H_0^2(\Omega)\big)$, il existe alors une sous suite encore notée par u_n^m telle que

$$u_n^m \rightharpoonup u_n\ \ dans\ C\big(0, T_0;\ H_0^2(\Omega)\big),$$

et comme l'injection de $H_0^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ est compacte, alors

$$u_n^m \to u_n\ dans\, C\big(0,T_0; H_0^1(\Omega)\big), \tag{2.70}$$

on a aussi la suite $\partial_t u_n^m$ est bornée dans $C\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$, il existe alors une sous suite notée encore par $\partial_t u_n^m$ telle que

$$\partial_t u_n^m \rightharpoonup \partial_t u_n\ \ dans\ C\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big),$$

et comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, alors

$$\partial_t u_n^m \to \partial_t u_n\ dans\ C\big(0, T_0;\ L^2(\Omega)\big), \tag{2.71}$$

où $u_n \in W^1\big(0, T_0;\ H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\big)$.

D'un autre côté on a $\omega^m \in \phi$ alors la suite $\partial_t \omega^m$ est bornée dans $L^2\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$,

d'où il existe une sous suite encore notée par ω^m telle que

$$\partial_t \omega^m \rightharpoonup \partial_t \omega\ dans\ L^2\big(0, T_0;\ H_0^1(\Omega)\big) \tag{2.72}$$

Enfin on a $u_n^m \in \phi$, alors à partir de la définition de ϕ, on obtient

$$\partial_t^2 u_n^m \in L^2\big(0, T_0;\ L^2(\Omega)\big),$$

et la suite $\partial_t^2 u_n^m$ est bornée dans $L^2\big(0, T_0;\ L^2(\Omega)\big)$
D'où il existe une sous suite encore notée par $\partial_t^2 u_n^m$ telle que

$$\partial_t^2 u_n^m \rightharpoonup \partial_t^2 u_n \ dans\, L^2\big((0, T_0) \times \Omega\big), \tag{2.73}$$

où $u_n \in W^1\big(0, T_0;\ H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\big)$. La 3^{eme} convergence (2.72) est réalisée puisque $\omega^m \in \phi$. Puis on réécrit la dernière équation dans (2.39) comme suit :

$$\int_0^{T_0} \big(\partial_t^2 u_n^m, v\big)\varphi d\sigma + \int_0^{T_0}\int_\Omega \varphi a_n\big(., l_n(\omega^m)\big)\nabla u_n^m.\nabla v dx d\sigma = \int_0^{T_0} \big(f_n\big(., (\omega^m)', l_n(\omega^m)\big), v\big)\varphi d\sigma,$$

pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$ et $v \in \mathcal{D}(\omega)$. Ensuite nous passons à la limite quand m tend vers ∞, en utilisant (2.69) - (2.73) et la continuité de a_n et f_n par rapport à s, on obtient :

$$\int_0^{T_0} \big(\partial_t^2 u_n,, v\big)\varphi d\sigma + \int_0^{T_0}\int_\Omega \varphi a_n\big(., l_n(\omega)\big)\nabla u_n.\nabla v dx d\sigma = \int_0^{T_0} \big(f_n\big(., (\omega)', l_n(\omega)\big), v\big)\varphi d\sigma.$$

Notons qu'on a utilisé le théorème de Lebesgue ,(2.29), la continuité de f_n et le fait que

$$l_n(\omega^m) \to l_n(\omega) \quad p.p.\ dans \quad (0,T_0) \times \Omega.$$

On obtient aussi par (2.70) et (2.71) les conditions initiales suivants :

$$u_n(0) = u_n'(0) = 0.$$

Ainsi, u_n est la solution de (2.39) et $H_n(\omega) = u_n$. Comme u_n est l'unique solution de (2.39) il suit que la suite entière u_n^m converge vers u_n dans $L^2\big(0, T_0,, H_0^1(\Omega)\big)$. On obtient ainsi la continuité de H_n.
Finalement, grâce au lemme 2.1, il existe une suite $\overline{u}_n^m \in \phi$ telle que $\overline{u}_n^m$ et $H_n(\overline{u}_n^m) \in \phi$ ont même limite dans $L^2\big(0,T_0,H_0^1(\Omega)\big)$
. En utilisant les premières arguments que précédemment, on déduit que u_n (la limite de $\overline{u}_n^m$ et de $H_n(\overline{u}_n^m)$) est une solution du problème (2.35). De plus, comme $\overline{u}_n^m \in \phi$ il s'ensuit que :

$$\Delta\overline{u}_n^m \rightharpoonup \Delta u_n,\ \partial_t\nabla\overline{u}_n^m \rightharpoonup \partial_t\nabla u_n, \quad \partial_t^2\nabla\overline{u}_n^m \rightharpoonup \partial_t^2\nabla u_n \quad faiblement\, dans\, L^\infty\big(0, T_0;\ L^2(\Omega)\big).$$

Comme la norme est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie de la convergence faible, il s'ensuit que :

$$\big|\partial_t\nabla u_n\big|_* \le \liminf \big|\partial_t\nabla\overline{u}_n^m\big|_* \le M,$$

$$\big|\Delta u_n\big|_* \le \liminf \big|\Delta\overline{u}_n^m\big|_* \le M,$$

$$\big|\partial_t^2 u_n\big|_* \le \liminf \big|\partial_t^2\overline{u}_n^m\big|_* \le R.$$

La preuve du théorème est ainsi achévée.

2.2.2 Théorème d'existence locale pour les problèmes dégénérés

Maintenant, on va énoncer le résultat principal d'éxistence local dans le cas dégénéré.

Théorème 2.2. *(Problème dégénéré) Sous les hypothèses* (2.13)*,* (2.14)*,* (2.16) *-* (2.18)*,* (2.20) *et* (2.21)*, en plus si* (2.34) *est vérifiée alors, pour tout* $T_0 \in]0,T]$*, le problème hyperbolique non-local suivant :*

$$\begin{cases} u \in C\big(0,T_0;\ H_0^1(\Omega)\big) \cap L^\infty\big(0,T_0;\ H^2\big),\ \partial_t^2 u \in L^\infty\big(0,T_0;\ L^2(\Omega)\big), \\ \\ \partial_t u \in L^\infty\big(0,T_0;\ H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big(0,T_0;\ L^2(\Omega)\big), \\ \\ u(0) = 0 \ et\, u^{'}(0) = 0 \quad dans \Omega, \\ \\ u^{''} - \nabla_{.}\big(a(.,l)\big)\nabla u\big) = f\big(.,u^{'},l(u)\big), \end{cases} \tag{2.74}$$

au moins une solution.

Preuve. En utilisant les estimations (2.36) et (2.37), il est clair que $u_n \in L^\infty\big(0,T_0;\ H^2(\Omega)\big)$ et $\partial_t u_n \in L^\infty\big(0,T_0;\ H_0^1(\Omega)\big)$.
On suit les mêmes étapes de (2.70) et (2.71), on obtient :

$$u_n \to u \quad dans\, C\big(0,T_0;\ H_0^1(\Omega)\big), \tag{2.75}$$

et

$$\partial_t u_n \to \partial_t u \quad dans\, C\big(0,T_0;\ L^2(\Omega)\big). \tag{2.76}$$

D'autre part on a $\big|\big|\partial_t^2 u_n\big|\big|_{L^\infty(0,T_0;\, L^2(\Omega))} \leq R$,
alors la suite $\partial_t^2 u_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, donc il existe une sous-suite notée encore $(\partial_t^2 u_n)$ telle que :

$$\partial_t^2 u_n \rightharpoonup \partial_t^2 u \quad dans\, L^\infty\big(0,T_0;\ L^2(\Omega)\big), \tag{2.77}$$

où u est une fonction qui satisfait la première ligne de (2.74).
Faisons un passage à la limite dans (2.35) terme à terme. Pour le premier terme en, utilisant (2.77) pour chaque $\varphi \in \mathcal{D}(0,T_0)$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient :

$$\int_0^{T_0} \big(\partial_t^2 u_n, v\big)\varphi d\sigma \to \int_0^{T_0} \big(\partial_t^2 u, v\big)\varphi d\sigma. \tag{2.78}$$

Ensuite, comme on a :

$$a_n\big(.,l_n(u_n)\big) - a\big(.,l(u)\big) = \big(a_n\big(.,l_n(u_n)\big) - a\big(.,l_n(u_n)\big) + a\big(.,l_n(u_n)\big) - a\big(.,l(u)\big)\big),$$

en appliquant la première ligne de (2.23), on déduit que les premières parenthèses dans le côté droit de l'identité ci-dessus tendent vers 0 dans $L^\infty((0,T_0) \times \Omega)$. Pour les dernières parenthèses on utilise premièrement les deux dernières lignes de (2.23) avec (2.75) pour montrer que :

$$l_n(u_n) \to l(u) \quad p.p. \quad dans\, (0,T_0) \times \Omega, \tag{2.79}$$

alors, grâce à la continuité de a, on obtient :

$$a(.,l_n(u_n)) \to a(.,l(u)) \quad p.p.\ dans\ (0,T_0)\times\Omega. \tag{2.80}$$

Aussi, avec (2.75) et le théorème de Lebesgue, on a :

$$\int_0^{T_0}\int_\Omega \varphi a_n\big(.,l_n(u_n)\big)\nabla u_n.\nabla v dx d\sigma \to \int_0^{T_0}\int_\Omega \varphi a\big(.,l(u)\big)\nabla u.\nabla v dx d\sigma. \tag{2.81}$$

Finalement, réécrivons l'équation hyperbolique de côté droit dans (2.35) comme

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0}\big(f_n\big(.,(u_n)',l_n(u_n)\big),v\big)\varphi d\sigma &= \int_0^{T_0}\big(f_n\big(.,(u_n)',l_n(u_n)\big)-f_n\big(.,(u)',l_n(u_n)\big),v\big)\varphi d\sigma\\ &+\int_0^{T_0}\big(f_n\big(.,(u)',l_n(u_n)\big),v\big)\varphi d\sigma,\end{aligned}$$

Puis, en appliquant (2.29), (2.76) pour la première intégrale de côté droit et (2.31), (2.77) pour la deuxième, on obtient :

$$\int_0^{T_0}\big(f_n\big(.,(u_n)',l_n(u_n)\big),v\big)\varphi d\sigma \to \int_0^{T_0}\big(f\big(.,(u)',l(u)\big),,v\big)\varphi d\sigma. \tag{2.82}$$

En combinant (2.78), (2.81) et (2.82), l'équation de (2.35) quand $n\to\infty$, pour $\varphi\in\mathcal{D}(0,T_0)$ et $v\in\mathcal{D}(\Omega)$, devient :

$$\int_0^{T_0}\big(\partial_t^2 u,v\big)\varphi d\sigma+\int_0^{T_0}\int_\Omega\varphi a\big(.,l(u)\big)\nabla u.\nabla v dx d\sigma=\int_0^{T_0}\big(f\big(.,(u)',l_n(u)\big),v\big)\varphi d\sigma.$$

On obtient aussi par (2.75) et (2.76) les conditions initiales suivants :

$$u(0)=u'(0)=0.$$

D'où la preuve du théorème.

2.3 Solutions locales et non-locales du problème non dégénéré

Comme mentionné ci-dessus, on dit que le problème (2.11) est non dégénéré si (2.15) est vérifié *i.e.* il existe $\lambda>0$ tel que

$$a(t,x,s)\geq 2\lambda,\quad \forall(t,x,s)\in[0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{2N+2}. \tag{2.83}$$

Sous cette supposition, le théorème suivant montre l'existence de solutions locales et non locales de problème non dégénéré.

Théorème 2.3. *(Problème non dégénéré).*

Supposons que les hypothèses (2.13), (2.15)-(2.18) *sont réalisées et* (2.20), (2.21) *sont réalisées pour*

ρ est suffisamment grand. Alors on a :
- Solution locale : Si on suppose de plus

$$4(b_0+b)bC_\Omega < \min\Big(1, \frac{\lambda}{2}\Big)\lambda, \tag{2.84}$$

alors, il existe $0 < T_0 \leq T$ tel que le problème (2.11) admet au moins une solution.
- Solution non locale : Si on suppose que γ ou δ et b sont suffisamment petits, alors on peut prendre $T_0 = T$.

Preuve. Ici on travaille avec le problème non dégénéré *i.e.* la deuxième inégalité dans (2.19) est réalisée sur une boule centrée arbitraire $\overline{B}_\rho \subset \mathbb{R}^{2N+2}$ de rayon ρ. Dans ce cas, puisque on a (2.84), on peut choisir M suffisamment grand pour obtenir (2.34). Alors, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\forall \omega \in C_0^\infty(\Omega), \quad \big|\Delta\omega\big|_2 \leq M \Rightarrow l(\omega) \in \overline{B}_{\frac{\rho}{2}}.$$

Comme les suites $\hbar_0^n, \ldots, \hbar_N^n$, $h_0^n, \ldots, h_N^n$ sont supposées être uniformément convergentes vers $\hbar_0, \ldots, \hbar_N$, $h_0, \ldots, h_N$ respectivement, on peut supposer que :

$$\forall \omega \in C_0^\infty(\Omega), \quad \big|\Delta\omega\big|_2 \leq M \Rightarrow l_n(\omega) \in \overline{B}_\rho.$$

Notons que toutes les suppositions du problèmes réguliers données au Théorème 2.1 sont vérifiées pour ce choix de ρ et M. Ainsi, la suite de la preuve est similaire à la preuve de Théorème 2.1 et le 1^{ere} point de ce théorème peut être montre comme au Théorème 2.2. Le 2^{eme} point est donné par le même argument en prenant en compte le cas (C_2) dans la section de définition de ϕ ci-dessus, comme le choix de M ici est abstraite. Notons que la supposition que γ est petit est similaire à celle que δ est petit.

2.4 Étude de cas particuliers

Dans cette section on montre que, sous quelques suppositions régulières sur f, on peut éliminer les hypothèses (2.34) et (2.84).
Pour le faire, il est suffisant dans un premier temps de supposer que la suite f_n définie au lemme 2.2, pour chaque $n > 0$, satisfait l'inégalité suivante :

$$|\nabla f_n| \leq \gamma, \; \forall (t, x, r, s) \in [0, T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho. \tag{2.85}$$

Concernant maintenant la fonction f, la supposition ci-dessus peut être reformulée autrement. Il est clair que si la suite f_n satisfait (2.85) et l'affirmation de lemme 2.2, alors f_n est uniformément bornée dans $H^1(\Omega)$. Ceci implique aussi, en utilisant (2.30), que :

$$f(t, x, r, s) \in H_0^1(\Omega), \; \forall (t, r, s) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N+2}. \tag{2.86}$$

Le lemme suivant montre que l'hypothèse (2.86) avec la supposition que le gradient du f soit borné, sont des conditions suffisantes pour construire une suite f_n qui satisfait (2.85).

Lemme 2.4. *: Soit f une fonction qui satisfait les hypothèses* (2.18), (2.21) *et* (2.22). *Supposons que :*

$$f(t,x,r,s) \in H_0^1(\Omega),\ \forall (t,r,s) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.87}$$

$$|\nabla f| \leq \gamma \ sur (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.88}$$

Alors, il existe une suite de fonctions $f_n \in C^\infty\big([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho\big)$, telle que :

$$f_n = 0 \ sur [0,T] \times \partial\Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.89}$$

$$|\partial_t f_n|, |\nabla_s f_n|, |\nabla f_n| \leq C_0\gamma,\ |\partial_r f_n| \leq C_0 b,\ sur\ (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho, \tag{2.90}$$

où C_0 est une constante positive indépendante de n. De plus, pour chaque suite z_n convergente vers z dans $L^2\big([0,T] \times \Omega\big)$, on a :

$$f_n\big(.,z_n,.\big) \to f\big(.,z,.\big) \ dans\ L^\infty\big(\overline{B}_\rho;\ L^2\big([0,T] \times \Omega\big)\big). \tag{2.91}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soit Ω un ouvert régulier et borné dans $\mathbb{R}^N$. Supposons que* (2.13), (2.14), (2.16) - (2.18), (2.20) *et* (2.21) *pour ρ suffisamment grand, sont vérifiées. Soit f_n une suite de fonctions régulières données par lemme 2.4 satisfaisant* (2.85), *alors on a :*

- Solution locale. Pour quelque $0 < T_0 < T$, il existe au moins une solution de problème (2.34).

- Solution non-locale. Si on suppose que (2.15) *est vérifiée, de plus pour quelque γ ou δ, et b suffisamment petit. Alors, il existe une solution de problème* (2.34) *telle que $T_0 = T$.*

Preuve. La preuve est presque la même que la preuve du théorème 2.2. Ici on traite la troisième intégrale dans (2.49). En intégrant par partie par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big)\partial_t \Delta u_n dx d\sigma &= -\int_0^t \int_\Omega \nabla\big[f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big)\big].\partial_t \nabla u_n dx d\sigma \\ = -\int_0^t \int_\Omega \nabla f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big).\partial_t \nabla u_n dx d\sigma &- \int_0^t \int_\Omega \partial_r f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big)\nabla\omega'.\partial_t \nabla u_n dx d\sigma \\ - \int_0^t \int_\Omega \big[\nabla_s f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big).\partial_{x_i} l_n(\omega)\big]_{i=1,\dots,N}.\partial_t \nabla u_n dx d\sigma & \qquad .\end{aligned} \tag{2.92}$$

Notons que la fonction $x \mapsto f_n(.,x,.)$ s'annule sur $\partial\Omega$. Alors, en appliquant (2.56), (2.85) et le lemme 2.4, on obtient :

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^t \int_\Omega \nabla f_n\big(.,\omega', l_n(\omega)\big).\partial_t \nabla u_n dx d\sigma\Big| &\leq \sqrt{N}\int_0^t \int_\Omega \gamma.|\partial_t \nabla u_n| dx d\sigma \\ &\leq \sqrt{N}\gamma \int_0^t \int_\Omega |\partial_t \nabla u_n| dx d\sigma,\end{aligned}$$

on a aussi :

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega \nabla_s\big[f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big).\partial_{x_i}l_n(\omega)\big]_{i=1,\dots,N}.\partial_t\nabla u_n dxd\sigma\Big| \leq \int_0^t\int_\Omega \gamma\overline{\Upsilon}\big|\partial_{x_i}l_n(\omega)\big|_{i=1,\dots,N}.||\partial_t\nabla u_n|dxd\sigma$$
$$\leq \gamma\sqrt{N}\overline{\Upsilon}\int_0^t\int_\Omega |\partial_t\nabla u_n|dxd\sigma,$$

et par rapport au deuxième terme de l'égalité (2.92), on a :

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega \partial_r f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\nabla\omega^{'}.\partial_t\nabla u_n dxd\sigma\Big| \leq \int_0^t\int_\Omega b|\nabla\omega^{'}|.|\partial_t\nabla u_n|dxd\sigma$$
$$\leq b\int_0^t\int_\Omega |\nabla\omega^{'}|.|\partial_t\nabla u_n|dxd\sigma.$$

D'où

$$\Big|\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dxd\sigma\Big| \leq \gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})\int_0^T\int_\Omega \big|\partial_t\nabla u_n\big|dxd\sigma + b\int_0^t\int_\Omega |\nabla\omega^{'}|.\big|\partial_t\nabla u_n\big|dxd\sigma.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})\int_0^t\int_\Omega \big|\partial_t\nabla u_n\big|dxd\sigma \leq \gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})\int_0^t\int_\Omega \big(\frac{1}{2}1^2+\frac{1}{2}|\partial_t\nabla u_n|^2\big)dxd\sigma$$
$$\leq \frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)t + \frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})\int_0^t \big|\partial_t\nabla u_n\big|^2)d\sigma,$$

et on obtient aussi :

$$b\int_0^t\int_\Omega |\nabla\omega^{'}|.|\partial_t\nabla u_n|dxd\sigma \leq b\int_0^t\int_\Omega \big(\frac{1}{2}|\nabla\omega^{'}|^2+\frac{1}{2}|\partial_t\nabla u_n|^2\big)dxd\sigma$$
$$\leq b\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla\omega^{'}|^2dxd\sigma + b\int_0^t\int_\Omega \frac{1}{2}\big|\partial_t\nabla u_n\big|^2dxd\sigma$$
$$\leq b\int_0^t \frac{1}{2}\big|\nabla\omega^{'}\big|_2^2d\sigma + b\int_0^t\frac{1}{2}\big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2d\sigma,$$

d'où

$$\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dxd\sigma \leq \frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)t + \frac{b}{2}\int_0^t \big|\partial_t\nabla\omega^{'}\big|_2^2d\sigma$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})+b)\int_0^t \big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2d\sigma.$$

Par (2.43), on obtient :

$$\frac{b}{2}\int_0^t \big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2d\sigma \leq \frac{b}{2}\int_0^t M^2d\sigma = \frac{b}{2}M^2t,$$

c'est-à-dire que :

$$\int_0^t\int_\Omega f_n\big(.,\omega^{'},l_n(\omega)\big)\partial_t\Delta u_n dxd\sigma \leq \frac{1}{2}(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)+bM^2)t$$

$$+\frac{1}{2}\big(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})+b\big)\int_0^t \big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2 d\sigma. \tag{2.93}$$

Cela signifie que, l'hypothèse (2.34) ou bien (2.84) et (2.59) est remplacée par (2.93). En utilisant cette fois (2.59), (2.61) et (2.93), on obtient la formule équivalente à (2.62) suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2+\frac{\lambda}{2}\big|\Delta u_n\big|_2^2 &\leq \frac{1}{2}\big(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)+bM^2\big)t+\frac{\gamma}{2}\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)\big(\epsilon'\big|\Delta u_n\big|_2^2+\frac{1}{\epsilon'}\big|\nabla u_n\big|_2^2\big)\\ &+\frac{\gamma}{2}\big[\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)\big)(1+C_\Omega)+1+\Upsilon\big]\int_0^t|\Delta u_n|_2^2 d\sigma\\ &+\frac{1}{2}\big(2\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})+b\big)\int_0^t\big|\nabla u_n'\big|_2^2 d\sigma.\end{aligned}$$

En prenant $\epsilon'=\frac{\lambda}{2\lambda\sqrt{N}(\overline{\Upsilon}+1)}$ et en appliquant le lemme 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2+\frac{\lambda}{2}\big|\Delta u_n\big|_2^2 \leq \frac{1}{2}\big(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)+bM^2\big)t\\ &\quad+4\frac{\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2\big(b_0^2mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2\big)t^2+\frac{\gamma}{2}\\ &\quad\times\Big[\sqrt{N}\big(\overline{\Upsilon}+1+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)\big)(1+C_\Omega)+1+\Upsilon+2N\frac{\gamma^2}{\lambda^2}.C_\Omega(1+\Upsilon)\big(\overline{\Upsilon}+1\big)^2\Big]\\ &\quad\times\int_0^t\big|\Delta u_n\big|_2^2 d\sigma+\frac{1}{2}\big(2\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})+b\big)\int_0^t\big|\nabla u_n'\big|_2^2 d\sigma.\end{aligned}$$

On pose :

$$F_{\gamma,\delta,b}(t,M)=\max\Big(1,\frac{2}{\lambda}\Big)\times\Big[\big(\gamma\sqrt{N}(1+\overline{\Upsilon})mes(\Omega)+bM^2\big)+4\frac{\gamma^2}{\lambda^2}N(\overline{\Upsilon}+1)^2(b_0^2mes(\Omega)+b^2C_\Omega M^2)t\Big]t,$$

et

$$\begin{aligned}G_{\gamma,\delta,b}(t,M)=\max\Big(1,\frac{2}{\lambda}\Big)\Big\{&b+\sqrt{N}\gamma\big(3\overline{\Upsilon}+3+\big(\overline{\Upsilon}+(c+1)\Upsilon+\overline{\Upsilon}\Upsilon+1\big)\big)(1+C_\Omega)\\ &+\gamma(1+\Upsilon)+2N\frac{\gamma^3}{\lambda^2}C_\Omega(1+\Upsilon)\big(\overline{\Upsilon}+1\big)^2\Big\}.\end{aligned}$$

Ceci implique que :

$$\big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2+\big|\Delta u_n\big|_2^2\leq F_{\gamma,\delta,b}+G_{\gamma,\delta,b}\times\int_0^t\big|\Delta u_n\big|_2^2+\big|\Delta u_n\big|_2^2 d\sigma.$$

En utilisant la même étape que (2.64) (l'inégalité de Gronwall), on obtient :

$$\big|\partial_t\nabla u_n\big|_2^2+\big|\Delta u_n\big|_2^2\leq F\exp Gt \tag{2.94}$$

Notons que (2.64) est encore vérifie avec

$$I(M,R)=8mes(\Omega)b_0^2+8b^2C_\Omega M^2+4\big[\gamma_1^2+N\gamma^2(1+\overline{\Upsilon}^2)C_\Omega\big]F\exp Gt.$$

Maintenant on peut appliquer le théorème du point fixe de Schauder, sans utiliser (2.34) dans le cas dégénéré ou (2.84) dans le cas non-dégénéré. Nous notons dans le cas non-dégénéré que ρ peut être choisi suffisamment grand. La preuve est similaire à celle preuve du théorème 2.2 et le théorème 2.3.

Remarque 2.2. La supposition (2.84) peut être remplacée par le suivant :

$$f(t,x,0,s) = 0,\ \forall (t,x,s) \in [0,T] \times \Omega \times \overline{B}_\rho.$$

L'hypothèse (2.88) est aussi supposée. En effet, grâce à (2.41) on a :

$$f\big(t,.,\omega^{'}(t,.),s\big) \in H_0^1(\Omega),\ \forall (t,\omega^{'}(t,.),s) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N+2}, \tag{2.95}$$

où $\omega \in \phi$.

Bibliographie

[1] Abbes Benaissa and Leila Rahmani, *Global existence and energy decay of solutions for kirchhoff-carrier equations with weakly nonlinear dissipation*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin **11** (2004), no. 4, 547–574.

[2] G.F. Carrier, *On the nonlinear vibration problem of the elastic string*, Quart. Appl. Math. **3** (1945), 157–165.

[3] M. Chipot, *Element of nonlinear analysis*, Birkhäuser, 2000.

[4] A.T. Cousin, C.L. Frota, N.A. Lar'kin, and L.A. Medeiros, *On the abstract model of the kirchhoff–carrier equation*, Commun. Appl. Anal. **1** (1997), no. 3, 389–404.

[5] H.R. Crippa, *On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations*, Nonlinear Anal **21** (1993), 565–574.

[6] N.S. Trudinger D. Gilbarg, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag (1983).

[7] M. Mechab D. Gourdin, *Problème de cauchy pour des équations de kirchhoff généralisées*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), no. 5–6, 761–776.

[8] P. D'Ancona and S. Spagnolo, *Global solvability for the degenerate kirchhoff equation with red analytic data*, Invent. Math. **108** (1992), no. 2.

[9] C.L. Frota, *Nonlocal solutions of a nonlinear hyperbolic partial differential equation*, Port. Math. **51** (1994), no. 3, 455–473.

[10] Senoussi Guesmia, *Existence results for some Kirchhoff-Carrier problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **75** (2012), no. 5, 2904 – 2921.

[11] R. Izaguirre, R. Fuentes, and M. Milla Miranda, *Existence of local solutions of the kirchhoff-carrier equation in banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **68** (2008), no. 11, 3565 – 3580.

[12] L.A. Medeiros J. Limaco, H.R. Clark, *Vibrations of elastic string with nonhomogeneous material*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), no. 2, 806–820.

[13] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mechanik, teubner*, Leipzig (1883).

[14] S.B. Menezes L.A. Medeiros, J. Limaco, *Vibrations of elastic string: mathematical; mathematical aspects*, Comput. Anal. Appl **4** (2002), 91–127.

[15] O.A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer-Verlag (1984).

[16] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes,*, Dunod (1968).

[17] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations Proceedings of the International Symposium onContinuum Mechanics and Partial Differential Eyuations (Guilherme M. De La Penha and Luiz Adauto J. Medeiros, eds.), North-Holland Mathematics Studies, vol. 30, North-Holland, 1978, pp. 284 – 346.

[18] B. Lovat M. Chipot, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*, Positivity **3** (1999), no. 1, 65–81.

[19] G. Vergara Caffarelli M. Chipot, V. Valente, *Remarks on a nonlocal problem involving the dirichlet energy*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **110** (2003), 199–220.

[20] L. Molinet M. Chipot, *Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems*, Appl. Anal. **80** (2001), 273–315.

[21] Y. Yamada M. Hozoya, *On some nonlinear wave equation i: local existence and regularity of solutions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Ser. **4** **38** (1991), no. 2, 225–239.

[22] R. Narasimha, *Nonlinear vibration of an elastic string*, J.Sound Vibration **8** (1968), 143–146.

[23] D. W. Oplinger, *Frequency response of a nonlinear stretched string*, J. Aconstic Soc. Amer **32** (1960), 1529–1538.

[24] S. Pohozaev, *On a class of quasilinear hyperbolic equations*, Mat. Sb. **95** (1975), 152–166.

[25] M. Milla Miranda R. Izaguirre, R. Fuentes, *Existence of local solutions of the kirchhoff–carrier equation in banach spaces*, Nonlinear Anal. **68** (2008), 3565–3580.

[26] J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, 1987.

[27] Y. Yamada, *Some nonlinear degenerate wave equations*, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1155–1168.

[28] T. Yamazaki, *On local solutions of some quasilinear degenerate hyperbolic equations*, Funkcial. Ekvac. **31** (1988), 439–457.