

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mouloud Mammeri TIZI-OUZOU



Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique

En Vue de L'obtention Du Diplôme de Master Académique
en Génie Mécanique

Option : Comportement et Mise en Forme des matériaux

THEME

*Identification des paramètres matériels des
structures par approches inverses.*

■ *Proposé et dirigé par :*

M^r. AMZIANI Ahcene

■ *Etudié par :*

M^r. MALEK Slimane

Promotion 2013

Remerciement

Je remercie Dieu avant tout.

Je tiens à remercier très chaleureusement mon encadreur A. AMZIANI qui a su guider ce travail par ses conseils avisés et qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce mémoire. Je le remercie également pour ses encouragements et pour toutes les connaissances que j'ai acquises à ses côtés.

Je remercie aussi les membres de jury qui ont bien voulu accepter de juger mon travail.

Je remercie très chaleureusement mon père et ma mère et toute la famille.

Un grand merci à tous les enseignants du Département de Génie Mécanique, mes collègues et tous mes amis.

Merci.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à toute ma famille, qui m'a été la source d'assurance durant mon séjour à l'université.

- *Mes chers parents.*
- *Mes sœurs.*
- *Mes frères.*
- *Tous mes amis.*
- *Tous les étudiants de la faculté génie de la construction et surtout a mes collègues de section C.M.F.M .*

❖ *Sommaire*

Introduction générale

Chapitre I : Etude bibliographique

Introduction	1
I.1 : Technique des jauges à résistance électrique :	1
I.2 : Méthode des Champs Virtuels (MCV) :	1
I.3 : La corrélation d'images numériques :	2
I.4 : Analyse vibratoire :	2
I.5 : Ultrason :	3
I.6 : Nanoindentation :	3
I.7 : Simulation numérique:	4
I.7.1 : Approches inverses :	4
I.7.2: Approche pseudo-inverse: [23] Yuming LI.	4
I.8 : Méthode de Tikhonov :	5
I.9: Conclusion :	5

Chapitre II : Essais mécaniques

II-1 Introduction :	7
II-2 Les principaux essais mécaniques sont :	7
II-2.1Traction :	7
II-2.2 : Dureté :	8
II-2.3 : Résilience :	8
II-2.3 : Fatigue :	8
II-2.4 : Fluage :	8
II.3 Essai de traction :	8
II.3.1 : Principe de l'essai :	8
II .3.2 : Machine de traction :	8

II .3.2 : Machine de traction :	8
II.3.3 : Les éprouvettes de traction :	9
II.3.4 : Résultat d'un essai de traction classique [D] :	12
II .3.5 : Domaine d'élasticité :	13
II.3.6 : Loi de comportement élastique linéaire	14
II. 3.6.1 : Loi de Hooke généralisée :	14
II. 3.6.2 : Symétrie cubique	15
II. 3.6.3 : Isotropie :	16
➤ II.4 : Essai de dureté	18
➤ II.4-1 : Principe :	18
II.4.2 : Machine de l'essai dureté :	18
➤ II.4. 3 : Types d'essais :	19
➤ Essai Brinell	19
➤ Essai Vickers	20
➤ Essai Rockwell	21
II.5 : Essai de résilience (résistante aux chocs):	22
➤ II.5.1 : Principe :	22
➤ II.5.2 : Éprouvette	22
➤ II.5.3 : Expression de la résilience	22
➤ II.5.4 : Mouton de Charpy :	23
➤ Principe :	23
➤ II.6 : Essais de fatigue	23
➤ II.6.1 : Les essais de fatigue conventionnels :	23
➤ Le domaine de la fatigue oligocyclique (ou fatigue plastique) :	24
➤ Le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles :	24
➤ Le domaine de l'endurance :	24
II.7 : Essai Fluage [A] :	25
➤ II.7.1 : la courbe de fluage:	25
➤ La Figure II.12 :	25
➤ le fluage primaire:	26
➤ Le fluage tertiaire:	26

➤ Le fluage secondaire :	27
II.8 : Conclusion :	27

Chapitre III : Approches inverses

III.1 : Généralités sur le problème inverse.....	28
III.1.1 : La paramétrisation du système :	28
III.1.2 : Les deux familles de problèmes inverses.....	28
III.1.2. a : Le problème inverse d'identification.....	28
III.1.2. b : Le problème inverse de conception.....	29
III.1.3 : Ecriture mathématique :	29
III .2 : Présentation quelques méthodes inverses :	29
III .2.1 : La Méthode de Moindre Carrée.....	29
III .2.1.1 : La droite des moindres carrés :.....	30
III.2.1.2 : Evaluation de la qualité de la régression :.....	31
➤ Prévisions :	32
➤ Remarque :	32
III .2.2 : La Méthode de TIKHONOV [II] :	33
III .2.2.1 : Méthodes de régularisation de Tikhonov :	34
III .2.2.2 :Méthode de régularisation de Tikhonov classique :	35
III .2. 3 : La Méthode de La décomposition en valeurs singulières [III]:	36
III.2.4 : Méthode du gradient conjugué [IV] :	38
III.2.4.1 : La méthode du gradient conjugué vue comme méthode directe	39
III.2.4.2 : La méthode du gradient conjugué vue comme une méthode itérative :	39
III .2.5 :Algorithme de Gauss – Newton [V] :	41
III.2 .6 : La Méthode Bayésienne : [VI]	42
III.2 .6.1 : Notations, définitions et commentaires :	42
➤ Définitions :	42
III.2 .6.2 : La loi a posteriori :	42
III.2 .6. 3 : La loi du couple (θ .X)	43
III.2 .6.4 : La loi marginale de X.	43
III.2 .6.4 :La philosophie de l'approche bayésienne :	43

➤ Un abus de notation	44
III.2 .6.5 : Le calcul de la loi a postérieur :	45
➤ Une situation simple.....	45
III.2 .6.6 : Le raisonnement proportionnel :	45
➤ Une notation et une définition	45
➤ Deux remarques :	46
III.2 .6.7 :L'estimation bayésienne:	46
III.2 .6.7 . a : Le cas uni-dimensionnel:	46
➤ Définition	46
III.2 .6.7 . b : Le cas multi-dimensionnel :	47
III.2 .6.8 :Le risque de Bayes :	47
➤ Propriétés de l'estimateur de Bayes :	48
➤ Loi a priori impropre et estimateur de Bayes généralisé	48
➤ Les intervalles de confiance bayésiens :	49
III.2 .6.9 : Problèmes inverses avec bruit aléatoire [VII] :	49
III .4 : Conclusion :	51

Chapitre : IV : Application des Approches Inverses Pour l'évaluation des Paramètres Matériels des Matériaux

IV.1. Introduction	52
IV. 2 : Présentation du logiciel ABAQUS :	52
IV 2.1. Les Logiciels sur le marché.....	52
IV.2.2 : Les caractéristiques du logiciel ABAQUS :	54
IV.2.3 : Bases de l'interface d'ABAQUS :	54
IV.2.4 : Les touches de la souris :	54
IV.2.5 : Manipulation de la vue affichée :	55

IV.2.6 : Présentation générale d'ABAQUS :	55
IV.2.7 : Les principaux modules :	57
IV.2.8 : Les algorithmes de résolution:	59
IV.3 : Applications des approches inverses et simulation numérique :	60
IV.3.1 : Simulation numérique:	60
IV.3.2 : Dimensions d'éprouvette de traction :	60
IV.3. 3 : Modélisation :	61
IV.3. 3 : Résultats obtenus :	62
IV. 3.4 :Application des méthodes inverses et résultats :	63
Formulation de problème inverse :	63
IV. 4 : Résultats et discussion:	62
IV. 4.1 : Evaluation de E :	62
IV. 4.1.a : Résultats Sans bruit :	63
➤ Le premier cas :	63
➤ Le deuxième cas	64
➤ Le troisième cas	65
• Discussion :	65
IV. 4.1.b : Résultats avec bruit :	66
➤ Le premier cas :	66
➤ Le deuxième cas	66
➤ Le troisième cas	66
• Discussion :	67
IV. 4.2 :Evaluation du couple (E, v) :	67
IV. 4.2.a : Résultats Sans bruit :	68
➤ Le premier cas :	68
➤ Le deuxième cas	68
➤ Le troisième cas	69
IV. 4.2.b : Résultats avec bruit	69
➤ Le premier cas :	69

➤ Le deuxième cas	70
➤ Le troisième cas	70
• Discussion	70
VI.5 : Conclusion :	71
❖ <i>Conclusion générale</i>	72

❖ *Liste des figures*

Figure II.1 : machine de traction.....	9
Figure II.2 : Des éprouvettes cylindriques et plates [A].	10
Figure II.3 : Forme et dimensions de la partie calibrée des éprouvettes cylindriques [B]	11
Figure II.4 : Représentation schématique d'un essai de traction [D]	12
Figure II.5 : machine de traction.	18
Figure II.6: Essai de Brinell.....	19
Figure II.7 : Essai de Vickers.....	20
Figure II.8 : Essai de Rockwell.....	21
Figure II : 9 Eprouvette résilience.	21
Figure II : 10 Essai de CHRP.....	23
Figure II.11 : Courbe de Wöhler.....	24
Figure II.12 : Courbe type de Fluage.....	26
Figure IV.1 : schémas de résolution dans ABAQUS.	56
Figure : IV.2 : Dimensions d'éprouvette de traction.	60
Figure : IV.3 : l'éprouvette maillée.	62
Figure : IV.4 : l'éprouvette avec les conditions aux limites.....	62
Figure : IV.5 : résultat de l'éprouvette après l'application de la force.	62
Figure : IV.6 courbe linéaire σ/ε pour premier cas.....	67
Figure : IV.7: courbe linéaire σ/ε pour deuxième cas	68
Figure : IV.8 : courbe linéaire σ/ε pour troisième cas.....	68
Figure : IV.9 : courbe des déformations $-\varepsilon_{22}$ en fonction ε_{11}	72

Introduction générale

❖ Introduction générale

Il est indispensable pour appréhender un matériau de le caractériser, c'est-à-dire d'en analyser les propriétés. Il existe de nombreuses techniques de caractérisation des matériaux, Les essais-mécaniques sont les plus couramment utilisés car ils permettent d'avoir des données sur les propriétés mécaniques, rapidement avec des appareils de mesure relativement simple. Parmi ces essais mécaniques nous pouvons citer quelques-uns comme l'essai de traction, fluage, dureté, la fatigue.....etc. Mais des fois nous n'obtenons pas des résultats satisfaisantes car il y a des erreurs de mesures, dû soient à l'expérimentateur ou bien à la complexité de la géométrie, manque des moyennes, Et tout ça a pousser les chercheurs à développer et à améliorer des techniques de caractérisation pour avoir des meilleurs résultats, gagner de temps, et qui soient moins coûteuses, simple à appliquer. Dans notre étude bibliographique nous allons présenter quelques techniques très fiables, Dans ce mémoire, on se propose l'identification du module de Young et du coefficient de poisson par simulation de l'essai de traction sur logiciel **ABAQUS** et l'application des méthodes inverse.

Le plan du mémoire est articulé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique sur les techniques de caractérisation des propriétés mécanique des matériaux.

Le second chapitre se porte sur l'étude générale des essais mécaniques couramment utilisés pour évaluer les caractéristiques mécanique des matériaux.

Le troisième chapitre présente les approches inverses d'une manière générale, pour le consacrer ensuite aux méthodes inverses couramment utilisés dans l'identification les paramètres matériels.

Dans Le quatrième chapitre nous allons commencer par simuler l'essai de traction pour mesurer les contraintes σ et Les déformations ε , ensuite nous allons appliquer trois approches inverses pour identifier le module d'Young et le coefficient de poisson, afin de discuter les résultats, et nous terminons ce mémoire par une conclusion générale.

Chapitre : I

Etude bibliographique

Introduction :

Le développement de techniques fiables de mesures de champs de déplacements et de déformations est primordial si l'on veut caractériser Les effets (hétérogènes) mécaniques à une échelle fine. En effet des matériaux, homogènes sous sollicitations complexes ou hétérogènes. Font apparaitre des champs dont l'analyse multi-échelle est indispensable En relation avec leur microstructure ou le type de changement imposé. Ces développements s'inscrivent dans la dialectique essai/calcul en modélisation des matériaux hétérogènes et des structures dans laquelle les mesures de champ jouent un rôle primordial.

Parmi les différentes techniques utilisées on peut citer quelques techniques :

I.1. Technique des jauges à résistance électrique :

La technique des jauges à résistance électrique [1, 2, 3, 4] : c'est une méthode d'extensomètres indirecte ponctuelle, qui se pratique essentiellement sur des prototypes réels. Et trouvée par William Thomson 1856, le développement des premiers jauges en aux années Amérique du nord 1930. Elles furent fabriquées par Simons et Ruge dans leur laboratoire du MIT.

En 1952, les anglais Sanders et Roe introduisirent les jauges à trame pelliculaire qui sont fabriquées par un procédé de photogravure. De puis ce jour, c'est devenu la technique expérimentale d'analyse des contraintes la plus populaire. Et cette technique la plus utilisée actuellement pour les raison suivants : fiabilité de mesures, possède une chaîne de mesure efficace et performante, simplicité de mise en œuvre et coût faible par rapport à d'autres méthodes.

I.2. Méthode des Champs Virtuels (MCV) :

La Méthode des Champs Virtuels (MCV) [5], Développée par Grediac a la fin des années 1980 [6]. La MCV est dédiée au traitement de mesures de champs de déformations pour l'identification de modèles de comportement de tous types (linéaire ou non linéaire) de nombreux travaux ont mis en évidence la très grande efficacité et la robustesse de la MCV pour la caractérisation de comportements linéaires (en élasticité linéaire) pour des matériaux a comportement isotrope aussi bien qu'orthotrope [7, 8].

Dans ces cas, l'application de la méthode des champs virtuels conduit en effet a l'expression du problème d'identification sous la forme d'un simple système d'équations

linéaires dont l'inversion conduit à l'identification directe et immédiate des paramètres de comportement, avec une très grande précision. De plus, des études plus approfondies [9] ont prouvé que l'utilisation de Champs Virtuels Spéciaux permet de réduire significativement l'impact des bruits de mesure (inévitables lors du traitement de données expérimentales) sur les résultats d'identification et donc de renforcer encore la robustesse de la méthode.

I.3. La corrélation d'images numériques :

La corrélation d'images numériques (Digital Image corrélation ou DIC en anglais) [10, 11] est une méthode optique 2D ou 3D qui permet de mesurer les déplacements entre deux images. Elle est de plus en plus employée en sciences des matériaux pour déterminer des champs de déformations ou pour fournir des champs de déplacements à des procédures d'identification de propriétés matériaux. Dans la plupart des essais mécaniques standards, il est possible de se contenter des champs de déplacements mesurés en 2D [10]. Les premiers développements de ces techniques de mesures remontent aux années 1980 [11]. En France ont développé une partie de cette méthode et à l'étranger sont faites dans l'espace réel de la mécanique des solides [12]. Cette méthode est développée ici dans l'espace de Fourier, ceci conduit à plusieurs avantages, notamment la rapidité des calculs. [13] ont montré que cette méthode permet par post-traitement des mesure lors d'essais mécaniques, les propriétés élastiques de matériaux disponibles sous faible volume et présentant de faible déformations (céramique).

I.4. Analyse vibratoire :

La méthode d'analyse vibratoire la plus couramment utilisée dans le domaine expérimental consiste en l'excitation de la structure (poutre, Plaque) et l'enregistrement de sa réponse. Cette méthode applicable à bien des matériaux [14], donne une estimation instantanée des propriétés mécaniques des produits testés et peut permettre d'établir une véritable carte d'identité mécanique de chaque pièce (Haines and Leban, 1997; Zaveri et Phil, 1984). Le principal avantage de cette méthode, outre le fait qu'elle soit non-destructive, est la simplicité. Elle s'adapte à toutes les dimensions de pièces, ne demande que très peu de manipulation et peut être facilement automatisée à court terme. Dans les analyses vibratoires, on est toujours amené vers la mesure des modes de vibration (fréquences naturelles de vibration) afin de les comparer aux références bibliographiques.

On estime que la confirmation des modes propres de vibration par des essais peut fournir la réassurance pour la validation des résultats des essais effectués (Ewins, 1984).

I.5. Ultrason :

Caractérisation des matériaux par ultrasons est un point important et prend une place croissante au cours de la fabrication et "en service" inspection processus dans les industries de l'énergie et la pétrochimie [15]. Un ultrason est une vibration de même nature que le son, mais de fréquence supérieure à la plus haute fréquence audible pour un homme. Ces vibrations sont produites dans la matière à une fréquence supérieure à 20 000 Hz. Les ultrasons se déplacent à des vitesses différentes dans les différents milieux traversés. Ils détiennent les mêmes propriétés générales que les ondes élastiques, c'est-à-dire des ondes vibratoires ou des ondes de pressions dépendant du milieu de propagation [16]. La 1^{ère} découverte en 1880, de la piézo-électricité, par les frères Pierre et Jacques Curie. En 1883, le physiologiste anglais Francis Galton invente un "sifflet à ultrasons" [16]. Ultrason est utilisé durant la première guerre mondiale pour par exemple détecter les sous-marins. En 1918, Langevin l'utilise pour mesurer la profondeur et détecter la présence d'icebergs avec les sonars qui commencent à se répandre à partir de 1920 et qui sont les premiers appareils à ultrasons. [17] M. AIT OUARABI (1), F. BOUBENIDER (1), D. BRADAÏ (2). Ont constaté que la technique d'ultrason la plus adéquate pour l'évaluation des propriétés mécaniques (module d'Young E, module de compressibilité K et module de cisaillement G) de polymère des inclusions sphériques (composite).

I.6. Nanoindentation :

L'indentation instrumentée est une technique de caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux, [18], [19]. Lors de la pénétration, à vitesse de charge constante, de l'inventeur dans le matériau à tester, l'appareil enregistre la charge appliquée en fonction de la profondeur atteinte. Contrairement à un essai de microdureté, où seule l'analyse de l'empreinte résiduelle est utilisée pour identifier les paramètres rhéologiques du matériau, l'analyse de la courbe force/enfoncement délivrée par le Nano Indenteur permet, à l'aide de modèles analytiques comme celui d'Oliver et Pharr [18], de déterminer le module d'élasticité moyen et la dureté moyenne du matériau. L'analyse de la courbe :(force / enfoncement) permet d'identifier la loi de comportement élasto-plastique du matériau.

Depuis une dizaine d'années, des méthodes inverses permettent ; à partir d'une ou plusieurs courbes force /enfoncement, de déterminer complètement la courbe contrainte/déformation d'un matériau, [19], [20], [21] et ainsi d'identifier la limite élastique du matériau et son comportement dans le domaine plastique Dao *et al.* [19] ont développé une méthode qui, à partir d'une unique courbe force - enfoncement, permet d'identifier la limite

élastique, σ_y0 , et l'exposant d'écroutissage, n , d'un matériau suivant une loi d'écroutissage de type Hollomon.

I.7. Simulation numérique:

Ces dernières années, grâce à l'avancement des technologies informatiques, les moyens d'analyse numérique ont été largement développés et de nombreux outils numériques sont désormais utilisés dans le domaine de la conception et de la fabrication. Les essais numériques sont beaucoup moins coûteux que les essais expérimentaux, ils représentent donc un gain considérable de temps et d'argent.

I.7.1. Approches inverses :

Un problème inverse, ou d'estimation de paramètre, consiste à trouver à partir de mesure disponible les coefficients d'un modèle physique donné priori. Ce type de problème, se pose toujours dans l'industrie, lorsque l'on cherche par exemple à identifier, caractériser ou recalculer le modèle d'un système physique dont nous avons une connaissance partielle, d'autre part il peut être intéressant aussi, partant d'un modèle connu, d'optimiser ses caractéristiques en ciblant une mesure à atteindre dite (optimale).

I.7.2. Approche pseudo-inverse: [22] Yuming LI.

Une approche simplifiée appelée « Approche Inverse » (AI) pour la simulation de l'emboutissage a été développée par Batoz, [23], [24], [25], [26]. L'Approche Inverse exploite au maximum la connaissance de la forme finale de la pièce pour obtenir le flan plan initial de manière directe et donc très rapidement. A l'inverse de la simulation d'emboutissage par des approches incrémentales classiques, la pièce finale connue est rabattue numériquement sur le plan horizontal pour obtenir le flan plan initial, ainsi que les déformations et les contraintes dans la pièce finale. Les hypothèses de chargement proportionnel et d'actions des outils simplifiées sont retenues en ignorant l'historique de déformation. De nombreux cas-tests ont montré que l'AI donnait une assez bonne estimation des déformations, mais une estimation médiocre des contraintes.

En conséquence, l'utilisation directe de l'AI pour la simulation du retour élastique et de l'endommagement par exemple, n'est pas envisageable. Pour s'affranchir de cette difficulté, une approche dite « Approche-Pseudo Inverse » (API) est développée pour permettre de regrouper les avantages de l'AI et de l'approche incrémentale classique: la rapidité et la prise en compte de l'historique de déformation.

I.8. Méthode de Tikhonov :

La régularisation de Tikhonov, nommé pour Andrey Tikhonov, est la méthode la plus couramment utilisée de régularisation des problèmes mal posés. Dans les statistiques, la méthode est connue comme la régression de crête, et, avec de multiples découvertes indépendantes, il est également différemment connu comme méthode de Tikhonov-Miller, la méthode Phillips-Twomey, la méthode d'inversion linéaire contrainte, et la méthode de régularisation linéaire. Elle est liée à l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour non-linéaires problèmes des moindres carrés. [27] Boukriaa, P. Perrotina, A.Bennanib, A. Limamc. pour Le problème de caractérisation des impacts sur une structure devient plus complexe lorsque le point d'impact est inconnu. A utilisé la méthode de Tikhov et [28] L-Curve qui permet de déterminer le paramètre de régularisation de manière graphique. Développée par Hansen. Et avec cette méthode il a obtenu des bons résultats.

I.9. Conclusion :

Dans cet étude bibliographique, nous avons présentés quelques techniques d'évaluation des caractéristiques mécaniques des matériaux, parmi ces technique qu'on cité il y a des méthodes très anciennes et même des nouvelles, destructives et non destructives, chaque technique a ces avantages et des inconvénients, et nous, la méthode qui nous intéresse est celle, qui est facile à utiliser, moins coûteuse, donne des bons résultats...etc.

Chapitre : II

Essais mécaniques

II.1. Introduction :

L'histoire des essais mécaniques se confond avec l'histoire de la résistance des matériaux. On peut penser que les premiers essais mécaniques ont été destinés à tester les matériaux en vue de la construction et ce dans un but de bonne adaptation du matériau, dans le cadre de mécanique de la rupture: le matériau doit être suffisamment solide pour l'usage. Et les premiers travaux écrits peuvent être attribués à Léonard de Vinci (1452-1519) pour une machine décrite et dessinée et qui servait pour une 'Expérience de la force capable d'agir sur la longueur d'un file de fer' mais on estime que c'est Galilée (1564-1641) le premier à vraiment théoriser avec son '*Discorsi e dimostrazioni matematiche*' sur la tension et la flexion des poutres. Ensuite on voit une évolution dans la science des matériaux avec **Robert Hooke** (1635-1703) avec la théorie sur l'élasticité.

Les essais mécaniques sont des expériences dont le but est de caractériser les lois de comportement des matériaux (mécanique des milieux continus). La loi de comportement établit une relation entre les contraintes (pression=force/surface) et les déformations (allongement unitaire adimensionnel). Il ne faut pas confondre une déformation avec un déplacement ou une dilatation. Cependant, la déformation d'une pièce dépend de la géométrie de la pièce et de la manière dont sont exercés les efforts extérieurs sur cette pièce.

Il faut donc normaliser les essais. Des normes définissent donc :

- La forme de la pièce d'essai dont on teste le matériau, on parle alors d'éprouvette normalisée ;
- Comment sont exercés les efforts sur l'éprouvette, on parle alors d'essai normalisé.

Dans ce document, nous décrivons les essais mécaniques couramment utilisés pour caractériser le comportement mécanique des matériaux, puis nous donnons quelques lois phénoménologiques utilisées dans les calculs simples.

II.2. Les principaux essais mécaniques sont :

II.2.1. Traction :

On sollicite une éprouvette en traction uni-axiale jusqu'à la rupture pour en déterminer des caractéristiques mécaniques telles que le module de Young E , l'allongement à la rupture $A\%$, la limite d'élasticité: R_e ou σ_y et la résistance à la traction R_m . Voir aussi Dynamomètre.

II.2.2. Dureté :

On applique sur une éprouvette un pénétrateur sous une certaine charge F . Il existe plusieurs essais selon le type de dureté désirée (Meyer, Brinell, Rockwell, Vickers et Shore). Voir aussi Échelle de Mohs.

II.2.3. Résilience :

On rompt une éprouvette entaillée en U ou en V en son milieu à l'aide d'un mouton-pendule Charpy.

II.2.3. Fatigue :

On fait subir un nombre important de cycles de flexion sur des éprouvettes normalisées. En considérant le moment où ces éprouvettes rompent, on détermine la limite de rupture en fatigue.

II.2.4. Fluage :

C'est le phénomène physique qui provoque la déformation irréversible d'un matériau soumis à une contrainte constante (notée σ_0), inférieure à la limite d'élasticité du matériau, pendant une durée suffisante. Le fluage ainsi que la relaxation de contrainte sont deux méthodes en quasi-statique de caractérisation des matériaux ductiles mais aussi fragile.

Le propos de ce 2^{ème} chapitre est de présenter les essais mécanique les plus couramment utilisées, qu'on a déjà commencé les présenter par leurs définitions :

II.3. Essai de traction :**II.3.1 Principe de l'essai :**

Cet essai ou expérience consiste à placer une éprouvette normalisée du matériau à étudier entre les mâchoires d'une machine de traction qui tire sur l'éprouvette jusqu'à sa rupture. On enregistre l'allongement et la force appliquée, que l'on convertit ensuite en déformation et contrainte.

II .3.2 Machine de traction :

Une machine de traction [29], est constituée d'un bâti portant une traverse mobile. L'éprouvette de traction, vissée ou enserrée entre des mors, selon sa géométrie, est amarrée à sa partie inférieure à la base de la machine et à sa partie supérieure à la traverse mobile (dans le cas d'une machine mécanique) ou au vérin de traction (dans le cas d'une machine hydraulique). Le déplacement de la traverse vers le haut réalise la traction.

Une machine de traction comporte une cellule de charge, qui permet de mesurer l'effort appliqué à l'éprouvette et le déplacement de l'éprouvette peut être suivi de diverses façons. Les dispositifs expérimentaux sont généralement asservis et peuvent être pilotés à vitesse de montée en charge, à charge constante, à vitesse de déformation constante, etc. selon ce qui peut être proposé par le système de pilotage.



Figure II.1 : machine de traction

II.3.3. Les éprouvettes de traction :

Les éprouvettes de traction adoptent deux géométries [29] : cylindrique ou plate. La section doit être constante sur une longueur suffisante pour obtenir un état de contrainte homogène pendant l'essai. Aux deux extrémités sont usinées des têtes d'amarrage avec des rayons de courbures suffisamment grands pour éviter des concentrations de contrainte excessives. Dans le cas des éprouvettes plates, le centrage de l'éprouvette peut devenir problématique si des trous calibrés ne sont pas percés dans les têtes.

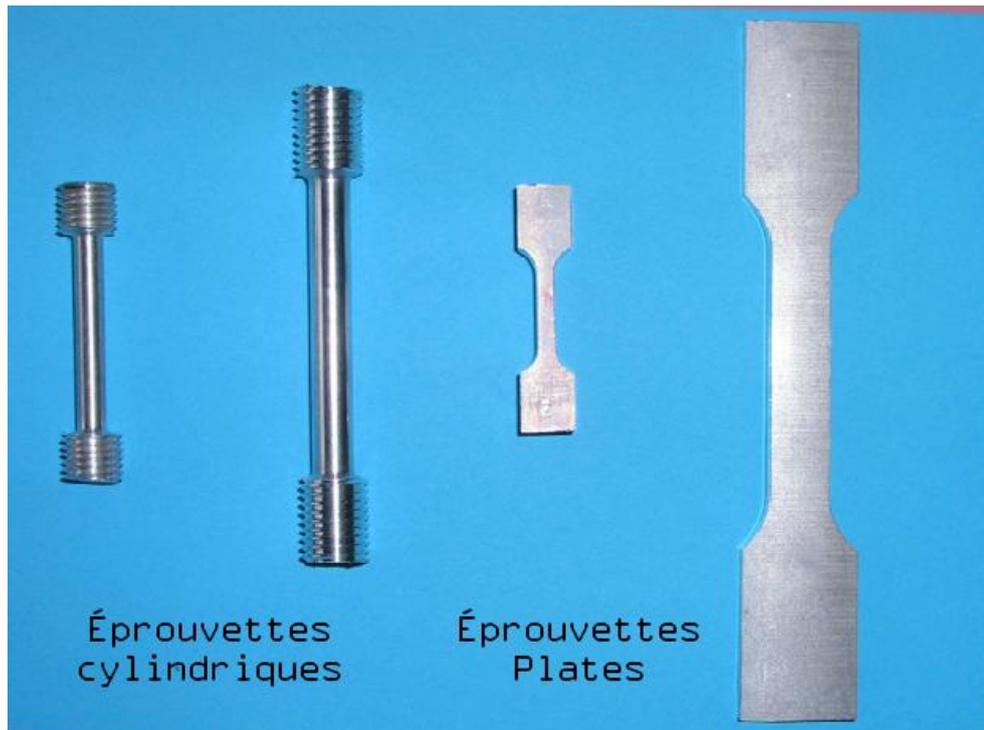


Figure II.2 : Des éprouvettes cylindriques et plates [29].

La section utile peut être circulaire, carrée, rectangulaire, etc.[30] Il est préférable, quand cela est possible, d'utiliser une section circulaire qui donne des résultats plus reproductibles à la rupture en régularisant l'amorçage. En effet, celui-ci est souvent superficiel et plus aisé sur les angles. L'analyse de la striction est également plus facile sur une section circulaire. Pour les éprouvettes rectangulaires, il est recommandé de ne pas dépasser le rapport 8/1 entre les côtés. Au-delà, il peut en effet devenir difficile de créer un champ de contrainte uniforme dans la partie utile.

En règle générale, le diamètre d ne doit pas être inférieur à 4 mm, dimension au-dessous de laquelle les défauts-superficiels, dont l'importance par rapport au volume varie comme $1/d$, risquent d'introduire beaucoup de dispersion. Par ailleurs, la section utile doit être suffisamment grande par rapport à celle de la microstructure (dimension du grain par exemple). La longueur L_c de la partie calibrée doit être suffisante par rapport à la distance L_0 entre repères, c'est-à-dire à la longueur utile. Il est recommandé de prendre $L_c = L_0 + 2d$, d étant le diamètre de l'éprouvette. Cette disposition permet d'assurer, d'après le principe de St-Venant (cf. article Théorie de l'élasticité [R 305] dans le traité Sciences fondamentales), dans toute la partie utile de l'éprouvette, une répartition homogène de contrainte, non perturbée par l'influence des têtes d'amarrage.

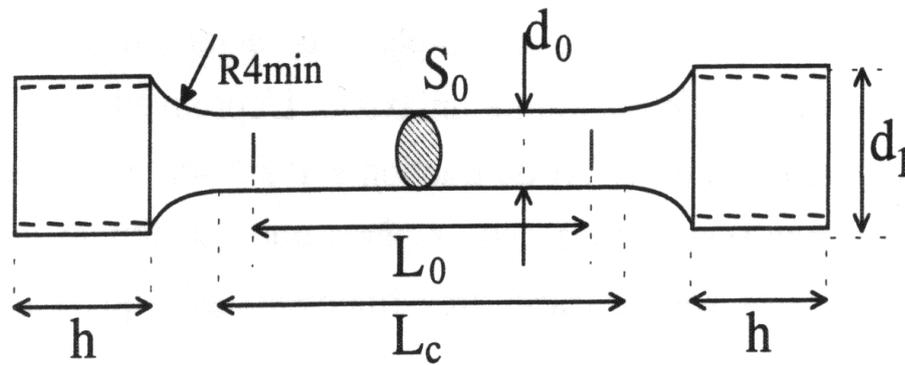


Figure II.3 : Forme et dimensions de la partie calibrée des éprouvettes cylindriques [30]

$d_0 = \text{Ø}$ partie calibrée

$d_1 = \text{Ø}$ des têtes filetées

$L_0 =$ longueur entre repère = $5 d_0$

$L_C =$ longueur calibrée S_0

$h =$ longueur des têtes

$L_0 = K\sqrt{S_0}$

$L_C = L_0 + (d_0/2) \text{ à } L_0 + 2d_0$

$L_T \geq L_C + 2d_0$ ou $L_C + 4d_0$ suivant le mode d'attache avec S_0 section initiale de l'éprouvette

Le tableau suivant représente des éprouvettes normalisées [30] :

Caractéristiques géométriques des principales éprouvettes de traction normalisées pour usage général					
K	Longueur entre repères $L_0 = K\sqrt{S_0}$ (mm)	Diamètre d (mm)	Section S_0 (mm ²)	Longueur calibrée l_c (mm)	Longueur totale l_t
5,65	$100 \pm 1,0$	$20 \pm 0,105$	314	110 à 140	Dépend du mode de fixation de l'éprouvette dans les attaches de la machine En principe : $L_t \geq L_c + (2d \text{ ou } 4d)$
5,65	$50 \pm 0,5$	$10 \pm 0,075$	78,5	55 à 70	

Tableau II.1 : Caractéristiques géométriques des principales éprouvettes de traction normalisées pour usage général.

II.3.4. Résultat d'un essai de traction classique [31] :

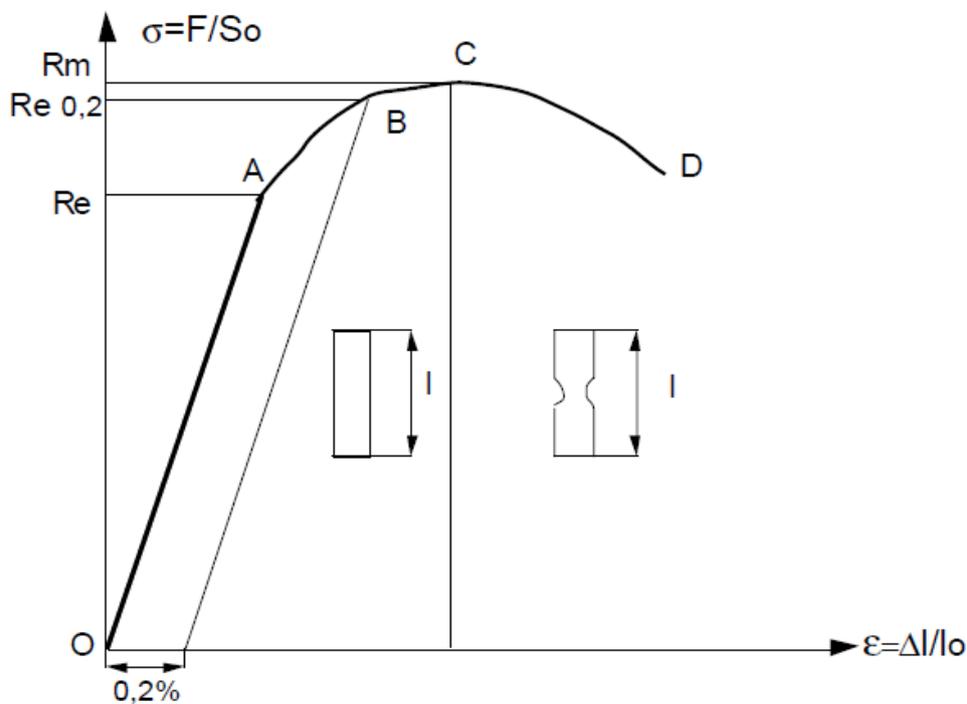


Figure II.4 : Représentation schématique d'un essai de traction [31]

- La droite OA correspond à la déformation élastique réversible.
- La courbe AC est le domaine de déformation plastique homogène: si on supprime la force de traction, il y a un retour élastique suivant une parallèle à OA et il reste une déformation permanente.
- Pour CD, la force nécessaire pour déformer le matériau diminue alors que l'allongement continue d'augmenter : cette instabilité est appelée instabilité plastique. La striction apparait.
- En D il y a rupture de l'éprouvette.
 - **Re** (MPa) est la limite de proportionnalité ou **limite élastique**. Elle est bien marquée pour les matériaux ductiles. Re correspond au seuil d'écoulement plastique.
 - **Rm** est la **résistance limite** à la traction. Cette valeur est utilisée pour estimer la limite d'endurance à la fatigue (**Figure : II.4**)
 - **Re** est atteinte quand on observe la première chute de l'effort lors de l'essai. En l'absence de ce phénomène, quand OA n'est pas rectiligne, on doit utiliser la limite conventionnelle d'élasticité **Re(0,2)** qui correspond à un allongement plastique de : **0,2%** : voir (**Figure : II.4**)

Les aciers austénitiques ont une limite élastique plus faible qui conduit en pratique à utiliser **Re(0,2)**. [31]

II .3.5 . Domaine d'élasticité :

Le domaine de l'élasticité linéaire OA de la courbe : (figure II.4) est caractérisé par :

- une relation de proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation de l'éprouvette dans sa partie utile,
- une réversibilité de la déformation (si on relâche la force, l'éprouvette revient dans son état initial).

Dans ce cas, la relation de proportionnalité peut s'écrire entre les composantes de la courbe rationnelle sous la forme :

$$\sigma_{33} = E\epsilon_{33} \quad (\text{II.1})$$

La constante de proportionnalité E de la relation (1) est appelée module d'Young. Il s'agit de la pente de la courbe rationnelle dans le domaine d'élasticité. La relation elle-même est appelée loi de Hooke.

La section S de l'éprouvette de traction joue un rôle dans le passage de la force appliquée F à la contrainte de Cauchy. En fait, cette section évolue par l'intermédiaire des déformations qui ont lieu perpendiculairement à l'axe de traction. Ainsi, selon les axes X1 et X2, on constate que la déformation est donnée par :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{33} \quad (\text{II.2})$$

Où ν est appelé coefficient de Poisson. Les tenseurs $\vec{\sigma}$ et $\vec{\epsilon}$ ont donc la forme suivante dans un essai de traction sur un matériau isotrope élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon_{33} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

II.3.6 . Loi de comportement élastique linéaire

II. 3.6.1. Loi de Hooke généralisée :

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (\text{II.4})$$

Où $\underline{\underline{C}}$ est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}). Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{II.5})$$

Où $\underline{\underline{S}}$ est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques des matériaux (ses composantes covariantes sont S_{ijkl}).

Les tenseurs $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{S}}$ ont a priori 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3). Toutefois, nous avons vu que les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations sont symétriques. Ils n'ont donc chacun que 6 composantes indépendantes, et leur liaison linéaire peut alors être réalisée à l'aide de 36 termes seulement. La forme suivante est souvent utilisée, dans un repère orthonormé, pour relier les composantes des contraintes et des déformations :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Avec la condition $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{jilk} = C_{ijlk}$. Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

Relations de symétrie :

En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Les principaux cas rencontrés sont l'orthotrope (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux), qui réduit le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du bois et des cristaux orthorhombiques), la symétrie cubique (orthotropie avec des propriétés identiques dans les trois directions orthogonales aux plans de symétrie), qui réduit le nombre de composantes à 3 (c'est le cas de la structure de nombreux métaux), et l'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), qui réduit le nombre de composantes à 2 (cette hypothèse est largement utilisée en mécanique des milieux continus, pour les matériaux courants).

II. 3.6.2. Symétrie cubique

Dans le cas de la symétrie cubique, les trois composantes indépendantes de $\underline{\underline{C}}$ sont souvent notées C_{11} (= C_{1111}), C_{12} (= C_{1122}) et C_{44} (= C_{2323}). Des notations identiques pour $\underline{\underline{S}}$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ 2\sigma_{23} \\ 2\sigma_{31} \\ 2\sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{II.8})$$

(8)

II. 3.6.3. Isotropie :

Dans le cas isotrope, le nombre de coefficients est réduit à deux par la relation

$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$. Il existe plusieurs façons d'exprimer ces coefficients. On peut par

exemple choisir ceux de Lamé $\lambda = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12})$ et $\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$,

Ou le module d'Young $E = \mu \frac{3\lambda + \mu}{\lambda + \mu}$ et le coefficient de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

vus dans le cas de l'essai de traction. La loi de comportement élastique linéaire s'écrit dans le cas isotrope de la façon suivante :

$$\underline{\epsilon} = 2\mu\underline{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\underline{\epsilon})\underline{I} = \frac{E}{1+\nu} \left(\underline{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\underline{\epsilon})\underline{I} \right) \quad (\text{II.9})$$

Et dans le sens inverse :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2\mu} \underline{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \text{tr}(\underline{\sigma})\underline{I} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma})\underline{I} \quad (\text{II.10})$$

Où \underline{I} est le tenseur identité. Notons enfin que le module de compression hydrostatique K est également utilisé. Il relie la partie hydrostatique de la déformation ($\epsilon_H = \text{tr}(\underline{\epsilon})$) à la contrainte hydrostatique ($\sigma_H = \text{tr}(\underline{\sigma})$). Il peut être exprimé en fonction des coefficients de Lamé ou en fonction de E et ν sous la forme :

$$K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu} \quad (\text{II.11})$$

II.4 . Essai de dureté [32, 33] :

II.4.1. Principe :

Il consiste à enfoncer un pénétrateur indéformable, dont les formes et les dimensions varient en fonction du type d'essai, dans le métal à tester. La charge est constante et on mesure la surface ou la profondeur de l'empreinte laissée dans le matériau.

II.4.2. Machine de l'essai dureté :



Figure II.5. machine de traction.

II.4.3. Types d'essais :

Il existe trois principaux type d'essais de dureté, qui différent essentiellement par la forme du pénétrateur : l'essai Brinell, l'essai Vickers et l'essai Rockwell :

➤ **Essai Brinell [32, 33] :**

L'essai Brinell utilise comme poinçon une bille en acier trempé ou en carbure de tungstène de 10 mm de diamètre (D). La pression est maintenue pendant 15 à 30 s selon le métal.

- On applique une charge (F) de 500 ou 3000 kgf.
- On mesure le diamètre (d) de l'empreinte en millimètres.

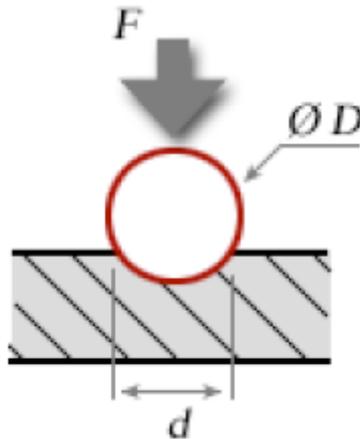


Figure II.6. Essai de Brinell

La charge d'essai F (N) est choisie dans une gamme normalisée adaptée à D et au matériau testé. La dureté est donnée par le rapport de F (en kg force à l'origine) à la surface de l'empreinte, exprimée sans dimension :

$$HBW = \frac{0,102 \cdot 2F}{\pi D (D - \sqrt{D^2 - d^2})} \quad (\text{II.12})$$

F : est la force appliquée en kilogramme-force (kgf) ; Si F est Newton, il faut multiplier F par 0,102

D : le diamètre de la bille en millimètre (mm).

d : le diamètre de l'empreinte laissée par la bille en millimètre (mm).

h : profondeur en millimètre (mm)

➤ **Essai Vickers** [32, 33] :

Il consiste à imprimer dans la pièce à essayer, sous une charge F , à l'aide d'un pénétrateur en forme de pyramide droite à base carrée, angle au sommet 136° , et à mesurer la

diagonale d de l'empreinte laissée sur la surface, après enlèvement de la charge. La dureté Vickers HV est le quotient de la charge d'essai par l'aire de l'empreinte.

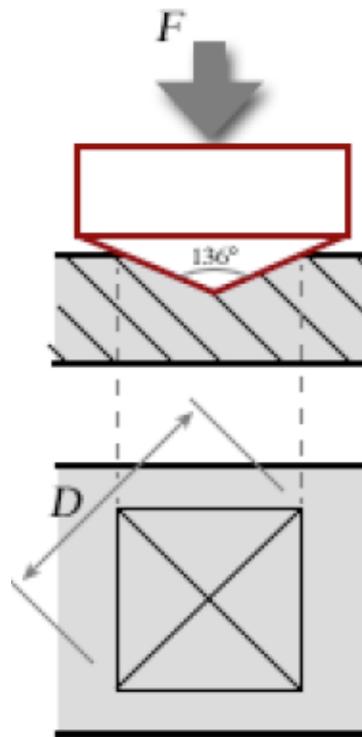


Figure II.7. Essai de Vickers

$$HV = 0,102 \frac{2F \cdot \sin(136^\circ/2)}{d^2} = 0,189 \frac{F}{d^2} \quad \text{II.13}$$

$$\text{La dureté de Vickers} \begin{cases} \mathbf{HV = F / S} \\ S = d^2 / (2 \cdot \sin A/2) \\ \mathbf{HV = 0,189 F / d^2} \end{cases}$$

d : diagonale moyenne de l'empreinte en millimètres.

A : angle au sommet du pénétrateur : 136° .

F : charge d'essai en newtons, celle qu'on a appliquée est de 10 g.

➤ **Essai Rockwell [32, 33] :**

Essai Rockwell : mesure de la dureté d'un métal selon l'enfoncement d'une bille d'acier, appelé dureté Rockwell B (HRB) ou d'un cône de diamant de 120° , dureté Rockwell C (HRC).

L'essai consiste à appliquer une précharge de 100 N sur le pénétrateur qui s'enfonce d'une profondeur e_0 . On applique une force supplémentaire F , pendant 3 à 8 s, le cône s'enfonce d'une profondeur e_1 . On supprime la force F , le cône reste enfoncé d'une profondeur e_2 . La profondeur rémanente ($e_2 - e_0$) permet le calcul de la dureté selon la formule : Les indices Rockwell peuvent se lire directement sur un cadran gradué.

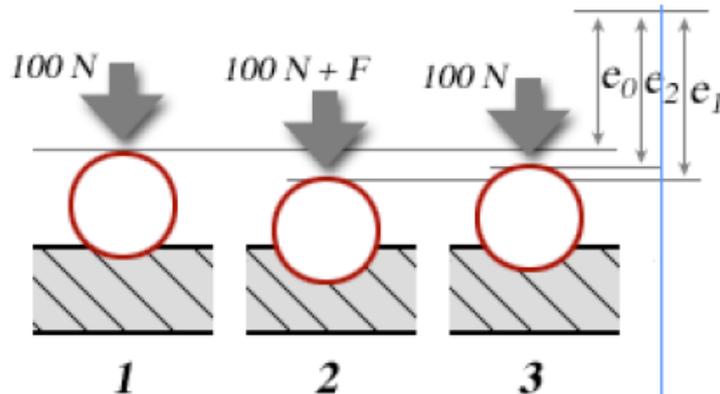


Figure II.8 Essai de Rockwell

❖ ROCKWELL C

$$HRC = 500(100 - (e_2 - e_0)) \quad (\text{II.14})$$

Le pénétrateur est un cône de diamant de 120° et d'extrémité sphérique ($\varnothing 0,2$ mm).
La charge F est de 1400 N (150 kgf).

❖ ROCKWELL B

$$HRB = 500(130 - (e_2 - e_0)) \quad (\text{II.15})$$

Le pénétrateur est une bille d'acier de 1,59 mm de diamètre.

La charge F est de 900 N (100 kgf).

II.5. Essai de résilience (résistante aux chocs) [32, 33] :

II.5.1. Principe : Énergie qu'il faut fournir pour rompre un matériau.

II.5.2. Éprouvette : Barreau prismatique entaillé pour localiser la rupture.

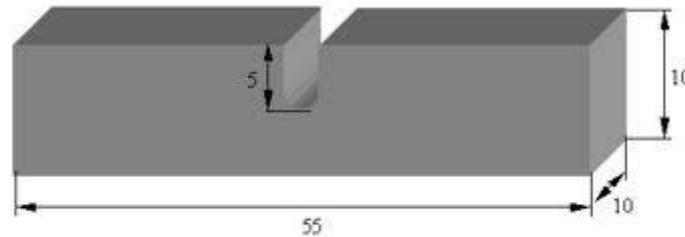


Figure II. 9 Epreuve résilience.

II.5.3. Expression de la résilience : C'est le rapport à l'énergie absorbée par la rupture sur la section rompue de l'éprouvette.

$$K = \frac{W(\text{Energie de rupture en J(joule)})}{S(\text{section rompue en m}^2)} \quad \text{II.15}$$

II.5.4. Mouton de Charpy :

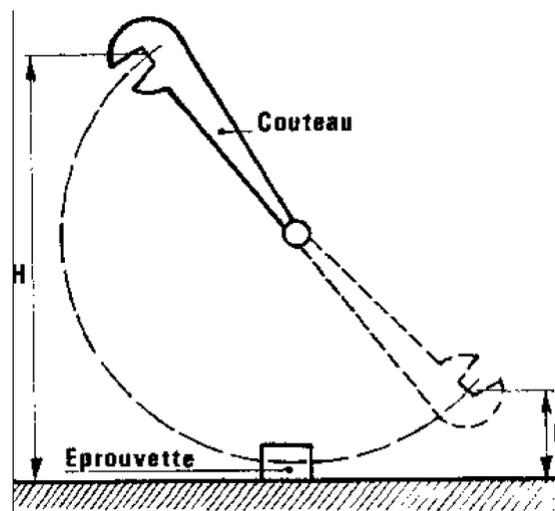


Figure II.10 Essai de CHARPY

- ❖ **Principe** : Masse pendulaire tombant d'une hauteur (H) (W_i = Énergie initiale) et, après rupture, remontant d'une hauteur (h) sous l'effet de l'énergie résiduelle (W_r).

$$K = \frac{W_i - W_r}{S} = \frac{P(H-h)}{S} \quad (\text{II.16})$$

II.6. Essais de fatigue [34, 35] :

La fatigue est un mode de rupture différé qui se produit lorsque le matériau est soumis à des chargements cycliques, et cela même pour des contraintes bien inférieures à sa limite d'élasticité et des températures faibles. Ce mode d'endommagement limite la durée de vie des composants de la plupart des machines et des installations industrielles.

II.6.1. Les essais de fatigue conventionnels :

Consistent à soumettre une éprouvette de traction compression ou de flexion à des cycles de contrainte. La sollicitation de fatigue est caractérisée par l'amplitude de contrainte du cycle de fatigue ($\Delta\sigma$) et par le rapport de charge ($R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$). On mesure le nombre de cycles à rupture N pour chaque type de sollicitation ($\Delta\sigma$, R). On trace alors les courbes dites S-N qui donnent la demi-amplitude de contrainte $\sigma_a = \Delta\sigma/2$ en fonction du nombre de cycles à rupture N pour divers rapport de charge.

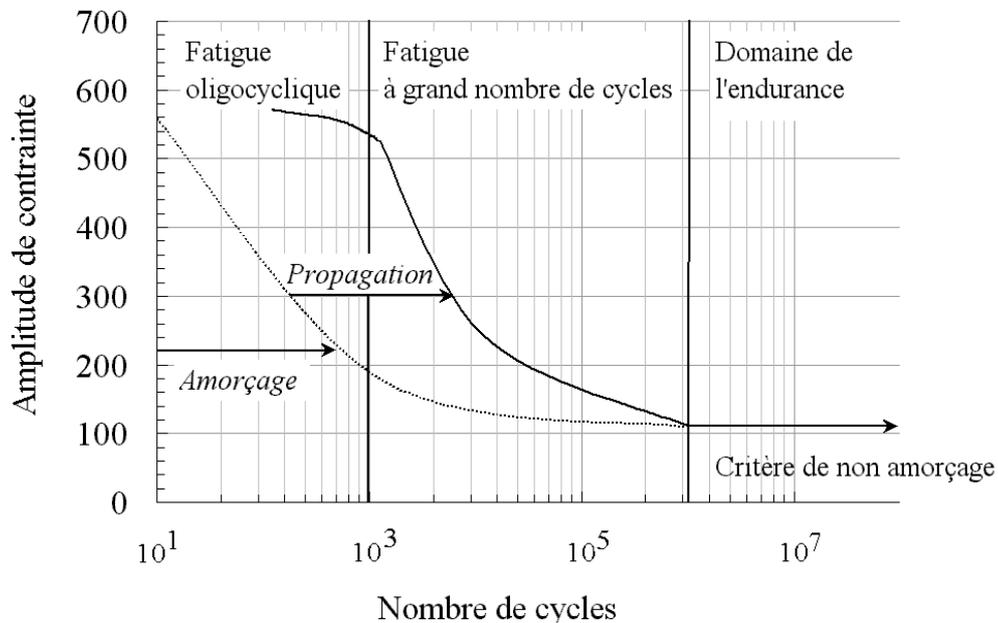


Figure II.11 Courbe de Wöhler

La première observation que l'on peut faire sur une courbe de Wöhler, est que les durées de vie en fatigue pour une amplitude de contrainte donnée sont distribuées statistiquement. L'origine principale de cette variabilité des durées de vie est l'existence de défauts dans le matériau qui conduisent à l'amorçage et la propagation de fissures.

On distingue trois domaines sur une courbe de Wöhler :

➤ **Le domaine de la fatigue oligocyclique (ou fatigue plastique) :**

La durée de vie en fatigue est fortement dépendante du comportement plastique cyclique du matériau. La durée de vie la plus courte possible sur la courbe de Wöhler est égale à $\frac{1}{4}$ de cycle et est obtenue lorsque la contrainte appliquée est la contrainte maximale du matériau.

➤ **Le domaine de la fatigue à grand nombre de cycles :**

Le matériau est sollicité dans son domaine d'élasticité macroscopique. La rupture provient de l'amorçage d'une fissure et de leur propagation par fatigue jusqu'à la rupture. La durée de vie correspond alors au nombre de cycles nécessaires pour que ce défaut se propage jusqu'à la rupture.

➤ **Le domaine de l'endurance :**

Une asymptote apparaît sur la courbe S-N (mais ce n'est pas toujours vrai), ce qui signifie que la rupture ne se produit pas même au bout d'un nombre de cycles infini, soit parce qu'aucun défaut ne s'est amorcé, soit parce que les fissures cessent de se propager. Les critères habituellement employés pour dimensionner les structures dans le domaine de l'endurance, sont des critères de non-amorçage de fissures.

II.7. Essai Fluage [33] :

Un essai de fluage déformation consiste à mesurer la déformation en fonction du temps. En pratique un essai de fluage consiste à maintenir une éprouvette à haute température sous charge constante (et non sous contrainte constante), et à mesurer la déformation en fonction du temps.

II.7.1. la courbe de fluage

La Figure II.12 : donne la forme classique d'une courbe de fluage donnant la déformation ε en fonction du temps « t ». Un essai de fluage se pratique très généralement sous une contrainte inférieure à la limite d'élasticité macroscopique du matériau. L'étape de mise en charge se traduit alors par une déformation élastique ε_0 de l'éprouvette.

La courbe de fluage permet généralement de différencier trois stades de fluage avant la rupture.

➤ le fluage primaire

La première partie de la courbe correspond à une décroissance de la vitesse de déformation avec le temps. Ce premier stade du fluage est appelé fluage primaire, ou fluage transitoire. A basse température et basse contrainte, comme dans le fluage du plomb à température ambiante, le fluage primaire est le régime de fluage prédominant

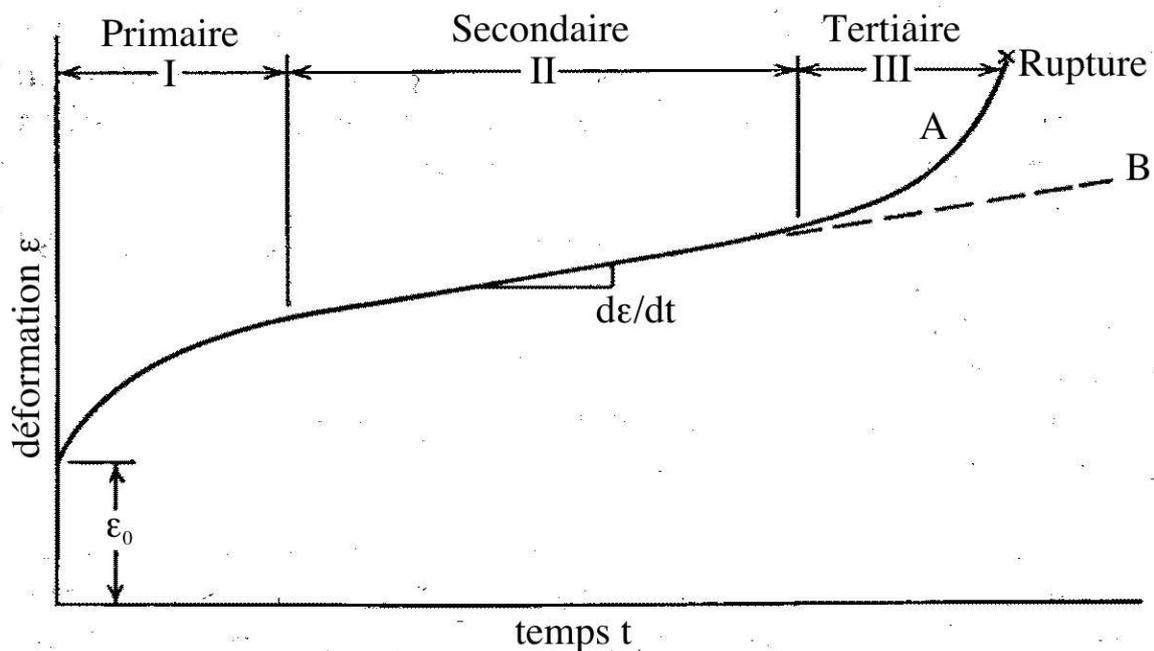


Figure II.12 Courbe type de Fluage

Figure II.12 : Courbe de fluage typique présentant les trois stades du fluage. La courbe A correspond à un essai sous charge constante; la courbe B correspond à un essai sous contrainte constante. D'après Dieter.

La mise en équation du fluage primaire fait intervenir le temps. On retiendra essentiellement la loi du fluage parabolique ou fluage β .

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta t^m \quad \text{où } 0 < m < 1 \quad (\text{II.17})$$

➤ **Le fluage secondaire :**

Le deuxième stade du fluage est nommé fluage secondaire ou fluage stationnaire (en fait « en régime stationnaire»). Il se caractérise par une vitesse de déformation constante. Cette vitesse de déformation est appelée vitesse de déformation minimale et correspond au paramètre de dimensionnement le plus important que l'on puisse tirer de la courbe de fluage.

Le fluage stationnaire est couramment décrit par la loi puissance :

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^n \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \quad (\text{II.18})$$

Où B et n sont des constantes du matériau et DH l'énergie d'activation du mécanisme contrôlant la vitesse de déformation. n est compris entre 3 et 8 pour la plupart des métaux purs et alliages courants.

➤ **Le fluage tertiaire**

Le troisième stade du fluage est nommé fluage tertiaire. Il apparaît essentiellement dans les essais menés sous charge constante, à haute température et forte contrainte lorsque la réduction de la section de l'éprouvette devient effective, soit lors de l'apparition d'une striction, soit à cause de la formation de vides internes à l'éprouvette. Ce troisième stade du fluage est souvent associé à des modifications métallurgiques comme le grossissement des précipités, la recristallisation ...

II.8. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présentés, les principaux essais mécaniques classiques utilisés depuis des siècles, dans le but de déterminer les caractéristiques mécaniques des matériaux. Et nous pouvons conclure que ces essais sont indispensables pour la caractérisation mécanique.

Chapitre : III

Approches inverses

III.1 Introduction

Depuis maintenant une trentaine d'années, la théorie des problèmes inverses connaît un formidable essor, en partie grâce à la puissance croissante des ordinateurs qui rend possible des calculs impensables il y a seulement une dizaine d'années.

Un expérimentateur se trouve parfois face à des phénomènes qui lui échappent et qu'il cherche à expliquer. Il se crée alors des modèles et établit des lois qui leur sont associées. C'est ce qu'on peut appeler la «recherche des causes à partir des effets ». La théorie des problèmes inverses, formalisation mathématique de ce concept, n'a fait que généraliser cette approche et la rendre applicable à n'importe quel domaine scientifique. Cette théorie, qui peut parfois devenir très complexe, puise sa raison d'être dans la mauvaise connaissance qu'a l'homme de son environnement.

III.1.1. La paramétrisation du système :

La première étape pour la résolution d'un problème inverse est appelée « Paramétrisation du système ». Cette étape consiste en la simplification du système physique étudié. Il est évidemment illusoire d'envisager la détermination de toutes les causes à partir de tous les effets. Les effets doivent donc être ciblés soigneusement en fonction du domaine d'étude et de ses applications.

III.1.2. Familles de problèmes inverses

III.1.2. a. Problème inverse d'identification

Ce type d'approche inverse a pour point de départ l'observation. On entend généralement par observation la mesure. Ces mesures doivent alors nous permettre de reconstruire les paramètres indéterminés d'un système physique (sources, caractéristiques physiques de matériaux, géométrie,...). Cette approche nécessite donc une forte composante expérimentale. C'est à ce type de problème que nous allons être confrontés.

III.1.2.b. Problème inverse de conception :

Ces applications se situent dans le domaine plus général de l'optimisation et essaient de répondre à la question suivante : comment, à partir d'effets désirés, optimiser les causes ?

Une application peut être, par exemple, de positionner des sources de chaleur afin d'obtenir le profil de température souhaité. Cette approche, très orientée vers des domaines de la CAO, ne

Possède plus aucune composante expérimentale. Les effets ne sont plus des mesures, mais des valeurs souhaitées de grandeurs physiques.

III.1.3. Ecriture mathématique :

Un problème inverse peut s'écrire de la façon suivante :

$$A(x) = b \quad (\text{III.1})$$

Où A est une fonction dépendant du modèle choisi et peut être qualifiée de «relation de cause à effet ». x représente le vecteur des paramètres à identifier. Il peut s'agir de caractéristiques des sources, de grandeurs géométriques ou de matériaux.

b : représente l'objectif, c'est-à-dire soit des mesures, soit des valeurs désirées de grandeurs. Résoudre un problème inverse, c'est alors trouver x en connaissant à la fois A et b .

III .2. Présentation quelques méthodes inverses :

III .2.1. La Méthode des Moindres Carrés [36] :

Une situation courante en mécanique est d'avoir à sa disposition deux ensembles de taille n , $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, obtenus expérimentalement ou mesurés. Le problème de la régression consiste à rechercher une relation pouvant éventuellement exister entre les x et les y , par exemple de la forme $y = f(x)$. Lorsque la relation recherchée est affine, c'est-à-dire de la forme $y = ax + b$, on parle de régression linéaire. Mais même si une telle relation est effectivement présente, les données mesurées ne vérifient pas en général cette relation exactement. Pour tenir compte dans le modèle mathématique des erreurs observées, on considère les données $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ comme autant de réalisations d'une variable aléatoire Y et parfois aussi les données $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ comme autant de réalisations d'une variable aléatoire X . On dit que la variable Y est la variable dépendante ou variable expliquée et que la variable X est la variable explicative.

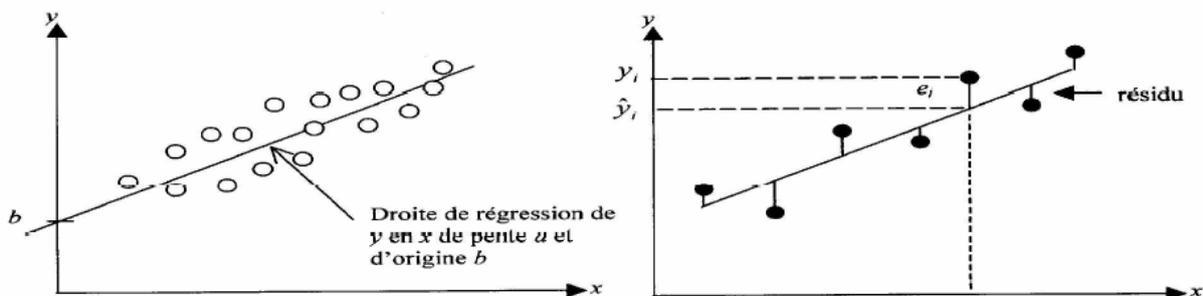
III .2.1.1. La droite des moindres carrés :

Les données $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ peuvent être représentées par un nuage de n points dans le plan (x, y) , le diagramme de dispersion. Le centre de gravité de ce nuage peut se calculer facilement : il s'agit du point de coordonnées

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) (x, y). \quad (\text{III.2})$$

Rechercher une relation affine entre les variables X et Y revient à rechercher une droite qui s'ajuste le mieux possible à ce nuage de points. Parmi toutes les droites possibles, on retient celle qui jouit d'une propriété remarquable : c'est celle qui rend minimale la **somme des carrés des écarts** des valeurs observées y_i à la droite $\hat{y}_i = ax_i + b$. Si ε_i représente cet écart, appelé aussi résidu, le principe des moindres carrés ordinaire (MCO) consiste à choisir les valeurs de a et de b qui minimisent

$$E = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - (ax_i + b))^2 \quad (\text{III.3})$$



Un calcul montre que ces valeurs, notées \hat{a} et \hat{b} sont égales à

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \quad (\text{III.4})$$

On exprime souvent \hat{a} au moyen de la variance de X , s_x^2 , et de la covariance des variables

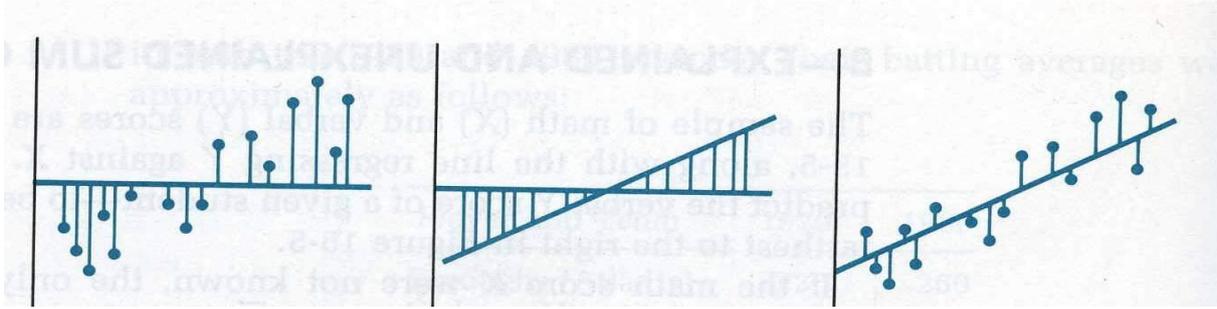


Figure (III.1 ,2) Illustration de la formule $DT=DA+DR$. La droite horizontale passe par le centre de gravité du nuage ; la première figure représente la dispersion totale DT , la seconde la dispersion due à la régression DR (nulle si la pente de la droite des moindres carrés est nulle et importante si cette pente est forte) et la troisième la dispersion autour de la droite, ou dispersion résiduelle. Aléatoires X et Y , cov_{xy} :

$$\hat{a} = cov_{xy}/s_x^2, \text{ Avec } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ et } cov_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \quad (\text{III.5})$$

III.2.1.2. Evaluation de la qualité de la régression :

Pour mesurer la qualité de l'approximation d'un nuage $(x_i, y_i)_{i=1 \dots n}$ par sa droite des moindres carrés (après tout on peut toujours faire passer une droite par n'importe quel nuage!), on calcule son coefficient de corrélation linéaire défini par :

$$r_{xy} = \frac{cov_{xy}}{s_x s_y}. \quad (\text{III.6})$$

C'est un nombre compris entre -1 et $+1$, qui vaut $+1$ (resp. -1) si les points du nuage sont exactement alignés sur une droite de pente a positive (resp. négative). Ce coefficient est une mesure de la dispersion du nuage. On considère que l'approximation d'un nuage par sa droite des moindres carrés est de bonne qualité lorsque $|r_{xy}|$ est proche de 1 (donc r_{xy} proche de $+1$ ou de -1) et de médiocre qualité lorsque $|r_{xy}|$ est proche de 0. En pratique on estime souvent la régression acceptable lorsque $|r_{xy}| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{0,75} = 0,866$. Parfois on préfère calculer non plus r_{xy} mais son carré noté

$R^2 = r_{xy} r_{xy}$ car on a la relation suivante :

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (\text{III.7})$$

Qui exprime que la dispersion totale de Y (DT) est égale à la dispersion autour de la régression (DA) plus la dispersion due à la régression (DR). Or on peut vérifier que l'on a $R^2 = \frac{DR}{DT}$, c'est-à-dire que le R^2 représente la part de la dispersion totale de Y que l'on peut expliquer par la régression. Ainsi si l'on obtient une valeur de $R^2 = 0,85$ (et donc $r = \pm 0,92$. . .), cela signifie que la modélisation par la droite des moindres carrés explique 85% de la variation totale, ce qui est un très bon résultat. Cependant, même avec un R^2 excellent (proche de 1), notre modèle linéaire peut encore être rejeté. En effet, pour être assuré que les formules données \hat{a} et \hat{b} fournissent de bonnes estimations de la pente et de l'ordonnée à l'origine de la droite de régression, il est nécessaire que les résidus ε_i soient indépendants et distribués aléatoirement autour de 0. Ces hypothèses ne sont pas forcément faciles à vérifier. Un tracé des résidus et un examen de leur histogramme permet de détecter une anomalie grossière mais il faut faire appel à des techniques statistiques plus élaborées pour tester réellement ces hypothèses.

➤ **Prévisions :**

Si $y = \hat{a}x + \hat{b}$ est la droite des moindres carrés d'un nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1\dots n}$ on appelle valeurs prédites de y par le modèle les valeurs :
 $\hat{y}_i := \hat{a}x_i + \hat{b}$.

Notons cependant que s'il peut sembler naturel d'utiliser une valeur prédite pour compléter les données initiales dans l'intervalle des valeurs de X , on se gardera de prédire sans de multiples précautions supplémentaires des valeurs de X en dehors de cet intervalle. En effet il se peut que la relation entre X et Y ne soit pas du tout linéaire mais qu'elle nous soit apparue comme telle à tort parce que les x_i sont proches les uns des autres.

➤ **Remarque :**

Pour finir voici quelques remarques :

1. Certains ne manqueront pas d'être surpris du fait que à côté des définitions de la variance et de la covariance que nous avons données on trouve dans certains ouvrages (ou dans les calembrettes) une autre définition dans laquelle le facteur $\frac{1}{n}$ a été remplacé par le facteur $\frac{1}{n-1}$. Disons que "notre" définition est la définition de la variance (ou la covariance) théorique alors que celle qui comporte un facteur $\frac{1}{n-1}$ est la définition de la variance (ou la

covariance) empirique. La première est celle que l'on utilise lorsque n est l'effectif total de la population alors que la seconde est celle que l'on utilise lorsque l'on estime la variance (ou la covariance) sur un échantillon de taille n beaucoup plus petite que la taille totale. De toute façon, dans le cadre de la régression linéaire, on notera que tant pour le calcul de \hat{a} que dans celui de r_{xy} , le résultat sera le même que l'on utilise l'une ou l'autre de ces formules.

2. Dans le calcul de la droite des moindres carrés, les variables X et Y ne jouent pas des rôles interchangeables. La variable dépendante Y prend, comme son nom l'indique, des valeurs qui dépendent de celles de X . D'ailleurs si l'on échange les rôles de X et de Y , on calcule une approximation linéaire de la forme $x = \hat{a}'y + b'$, le critère des MCO est alors

$E = \sum_{i=1}^n (x_i - (a'y_i + b'))^2$, et ce n'est plus le même et la droite que l'on obtient en général. Cette droite, tout comme la précédente, passe par le centre de gravité du nuage de point, mais c'est généralement leur seul point commun. C'est le problème considéré qui indique s'il faut considérer Y ou plutôt X comme variable dépendante (et l'autre comme variable explicative). Mais si l'on s'intéresse aux interactions entre deux variables X et Y dont ni l'une ni l'autre n'est clairement dépendante de l'autre, alors on pourra choisir de régresser Y en fonction de X ou bien le contraire. Mais on ne doit pas s'attendre à obtenir les mêmes résultats.

3. On appelle donnée éloignée (oublier) un point du nuage situé à l'écart. S'il est éloigné dans la direction de y , il lui correspondra un important résidu. S'il est éloigné dans la direction des x , il peut présenter un très petit résidu et en même temps avoir une grande influence sur les valeurs de \hat{a} et \hat{b} trouvées. On appelle donnée influente un point du nuage dont l'oubli conduirait à une droite des moindres carrés bien différente. C'est souvent le cas des données éloignées dans la direction des x .

III .2.2. La Méthode de TIKHONOV[37]

Lorsque le problème inverse devient mal posé, ce qui est malheureusement souvent le cas, il est nécessaire d'utiliser une technique pour rendre le problème à nouveau bien posé. De nombreux travaux existants cherchent à résoudre ce problème dans tous les domaines : mathématique, mécanique, physique ... et peuvent se séparer en deux grandes familles : les méthodes déterministes et les méthodes probabilistes.

Les premières, parmi elles on peut citer les techniques de régularisation de Tikhonov, quasi-réversibles, les méthodes probabilistes, quant à elles, sont assez nombreuses, L'étude de ces méthodes Tikhonov, sont présentées dans la partie suivante.

III .2.2.1. Méthodes de régularisation de Tikhonov :

L'idée de la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas de modifier légèrement l'opérateur pour trouver un problème bien posé comme la méthode de QR, mais de stabiliser les solutions du problème inverse régularisé vis-à-vis de faibles variations des données. Cette méthode est proposée par Tikhonov dont l'idée de départ est présentée dans la partie suivante.

III .2.2.2. Méthode de régularisation de Tikhonov classique :

La méthode de régularisation de Tikhonov "classique" a initialement été proposée pour les problèmes inverses linéaires de type :

$AX = B$ avec des connaissances a priori sur la solution : $X \sim X_0$.

La méthode de régularisation de Tikhonov consiste à chercher une solution faisant un compromis entre la vérification du modèle et la connaissance a priori sur la solution. Elle est définie comme l'intersection C des deux convexes suivants :

$$C = \{ X \mid \|AX - B\| \leq \epsilon_1 \} \cap \{ X \mid \|X - X_0\| \leq \epsilon_2 \} \quad (\text{III.8})$$

où les coefficients ϵ_1, ϵ_2 représentent les tolérances accordées à la solution X par rapport au modèle et à la connaissance a priori X_0 .

Lorsque le domaine C n'est pas vide, la solution régularisée au sens de Tikhonov existe et il est facile de montrer qu'elle est la solution du problème de minimisation suivant avec $\alpha = \epsilon_1^2 / \epsilon_2^2$:

$$\min_X J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 \quad (\text{III.9})$$

Le paramètre α , appelé paramètre de régularisation de Tikhonov, représente le compromis entre l'exactitude vis-à-vis du modèle et la proximité par rapport à la solution donnée X_0 . Le choix de ce paramètre est assez délicat et dépend de la confiance accordée au modèle ainsi que de la connaissance a priori sur la solution donnée. α Petit va rendre le problème instable, alors que s'il est grand, la solution obtenue s'approche de X_0 mais vérifie moins le modèle (mécanique). La solution régularisée au sens de Tikhonov est donc paramétrée par le coefficient α :

$$X_\alpha = X_0 - (A^T A + \alpha I_d)^{-1} A^T (A X_0 - B) \quad (\text{III.10})$$

Une méthode usuelle pour choisir le paramètre de régularisation optimal α est le principe de sélection de « Morozov » (the discrepancy principle), qui consiste à déterminer α à partir des connaissances a priori sur l'amplitude d'erreur du système $AX = B$, notée δ dans l'équation (III.11). En utilisant ce principe, le problème inverse (III.10) s'écrit comme deux problèmes successifs :

$$\left. \begin{aligned} X_\alpha &= \underset{X}{\text{Argmin}} J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2 \\ \alpha_X &= \{\alpha / |AX - B| = \delta \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.11})$$

Il a été démontré mathématiquement que ce principe converge toujours pour un problème inverse linéaire mal posé au sens de « Hadamard ». Des propositions d'amélioration de la vitesse de convergence peuvent être trouvées dans l'ouvrage d'Engl & al [Eng96]. D'autre part, le choix du type de terme de régularisation au sens de Tikhonov est assez varié (sur X ou X' ...) et fait l'objet des travaux dans littérature [Tik77]. Ce choix dépend du type de problèmes traités, de connaissances a priori possédées. L'application de la technique de régularisation de Tikhonov est très importante en mécanique et a donné lieu à beaucoup de travaux. Citons ici quelques exemples : l'identification de contraintes dans une structure élastoplastique à partir de mesures (partielles) sur le champ de déplacement [And95] ou encore l'identification des chargements thermiques dans les zones inaccessibles à partir des mesures surabondantes sur le reste de la frontière.

III .2.2.3. Méthode de régularisation itérative de Tikhonov :

Une version améliorée de la méthode de régularisation de Tikhonov "classique"

Elle consiste à mettre à jour les connaissances sur la solution donnée du problème inverse de façon itérative. Cette méthode est donc appelée méthode de régularisation itérative de Tikhonov. Nous reprenons le problème inverse linéaire présenté ci-dessus.

L'application de la méthode de régularisation de Tikhonov "classique" conduit à la minimisation de la fonction suivante :

$$\min J(X) = \|AX - B\|^2 + \alpha \|X - X_0\|^2$$

X

La méthode de régularisation itérative de Tikhonov cherche à résoudre successivement le problème (III.9) dans lequel, à chaque itération, la connaissance de la solution donnée X_0 est mise à jour par la solution de l'itération précédente. Par exemple, à l'itération i , le problème de minimisation

s'écrit :

$$\min_{X^i} J(X^i) = \|AX^i - B\|^2 + \alpha \|X^i - X^{i-1}\|^2 \quad (\text{III.12})$$

Il a été démontré que la méthode converge lorsque le paramètre α tend vers zéro [Eng96]. Par contre, à notre connaissance, aucun résultat de convergence n'est établi pour un α fixé.

De plus, afin de choisir le paramètre de régularisation α , cette méthode a besoin de connaissances a priori sur l'erreur de modèle ($AX - B$) ce qui est équivalent à la connaissance sur le niveau de perturbation de mesures dans notre problème. Elle est donc difficile à appliquer dans notre contexte.

III.2.3. La Méthode de La décomposition en valeurs singulières[38]:

Une façon naturelle d'étudier le problème est de s'intéresser à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de A^* . Soit A^* l'adjoint de A . Supposons que A^*A soit un opérateur compact sur H avec comme valeurs propres $\{b_k^2\}$, $b_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, et soit $\{\varphi_k\}$ une base orthonormée sur H de fonctions propres. Remarquons que $\|A\varphi_k\| = b_k$. Soit :

$$\psi_k = \frac{A\varphi_k}{\|A\varphi_k\|} = b_k^{-1} A\varphi_k \quad (\text{III.13})$$

La base $\{\varphi_k\}$ est orthonormée. De plus,

$$A\varphi_k = b_k \psi_k ; \quad A^* \psi_k = b_k \varphi_k. \quad (\text{III.14})$$

On a alors pour tout f dans D ,

$$Af = \sum_k b_k^{-1} \langle Af, \psi_k \rangle A\varphi_k = \sum_k b_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k, \quad (\text{III.15})$$

$$f = \sum_k b_k^{-1} \langle Af, \psi_k \rangle \varphi_k + u, \quad (\text{III.16})$$

Où $u \in \ker A$ la série converge pour $\|\cdot\|$. Les relations (1) - (3) donnent la SVD de A .

En fait nous ne considèrerons que le cas où $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. On s'intéresse seulement à reconstruire la part de f qui n'est pas dans le noyau. Les problèmes causés par une image $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$ strictement plus petite que \mathbf{G} et un noyau non-nul ne seront pas traités ici. En effet, il est alors possible de définir l'inverse de Moore-Penrose (généralisé) de l'opérateur \mathbf{A} . Ceci consiste à restreindre le domaine de définition et l'image de \mathbf{A} de façon à rendre l'opérateur inversible et à l'étendre ensuite à son domaine maximal.

On peut projeter Y sur $\{\psi_K\}$, on obtient alors :

$$\langle Y, \psi_K \rangle = \langle Af, \psi_K \rangle + \varepsilon \langle \xi, \psi_K \rangle = \langle f, A^* \psi_K \rangle + \varepsilon \langle \xi, \psi_K \rangle.$$

$$\text{et donc d'après (III.14) : } Y_k = b_k \theta_k + \varepsilon \xi_k \quad k=1,2,3,\dots ; \quad (\text{III.17})$$

Où les $\xi_k = \langle \xi, \psi_K \rangle$ sont des variables aléatoires i.i.d. gaussiennes standard

$$\theta_k = \langle f, \varphi_K \rangle.$$

Le problème dans (4) est d'estimer $\theta = \{\theta_k\}$ à partir de l'observation $y = \{y_k\}$. Les b_k sont, en général, connues et caractérisent le problème inverse. En particulier, étant valeurs propres d'un opérateur compact, $b_k \rightarrow 0$

En fait, (4) revient à raisonner sur l'espace des coefficients. On appellera suite gaussienne le modèle défini par (4). Ce modèle apparaît notamment dans Belitser et Levit (1995), Johnstone (1998) et Birgé et Massart (2001).

$$E_f \|\hat{f} - f\|^2 = E_0 \sum_K (\hat{\theta}_K - \theta_K)^2 = E_0 \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \quad (\text{III.18})$$

Où $\hat{\theta} = \{\hat{\theta}_k\}$ est un estimateur de θ , et $\hat{f} = \sum \hat{\theta}_k \varphi_K$ l'estimateur de f associé. La notation $\|\cdot\|$ correspond aux normes L_2 ou ℓ_2 . Ainsi avec ce risque. Par la suite, nous travaillerons dans l'espace des coefficients en utilisant le modèle (4).

Ce modèle, bien que correspondant comme nous l'avons vu à un problème inverse mal posé, peut être lié à d'autres cas. En particulier, si $\mathbf{b}_K \equiv \mathbf{1}$ alors ceci est la suite gaussienne associée à un problème direct ($\mathbf{A} = \mathbf{I}$). Johnstone (1999) a montré que (4) apparaît dans le cas d'observations avec bruit corrélé. De plus, le cas si $b_K \rightarrow \infty$ peut aussi être considéré, car cela se produit pour les problèmes inverses bien-posés.

Si l'on oppose le cas direct au cas mal-posé, la remarque essentielle est que les b_k détériorent le signal θ_k . La présence des valeurs singulières rend ainsi l'estimation plus délicate. Il est en particulier naturel de penser que la vitesse à laquelle les b_k tendent vers 0 permettra de caractériser la difficulté du problème. Nous verrons cela plus précisément dans la Section 2.3.

Une remarque importante est que si l'on désire obtenir une estimation raisonnable de θ , il est nécessaire que les termes θ_k décroissent assez vite. Or les θ_k sont les coefficients de f dans la base $\{\varphi_k\}$ associée à l'opérateur A . Ainsi, la base $\{\varphi_k\}$ doit permettre une bonne représentation de f . Le problème majeur est qu'elle dépend seulement de l'opérateur. Il est donc naturel de se demander si cette base sera appropriée. Cette constatation est l'une des critiques les plus importantes (et les plus fondées) que l'on puisse faire au sujet de l'utilisation de la SVD.

Ceci a en particulier été noté dans Donoho (1995). **D. Donoho** a alors proposé une approche intermédiaire, appelée décomposition en ondelettes-vaguelettes (WVD). Elle consiste à utiliser comme système de départ sur l'espace H une base appropriée, afin de bien représenter f . La base considérée est ainsi une base d'ondelettes. On projette les observations sur la base image par l'opérateur A de ce système d'ondelettes. On obtient alors une base de vaguelettes dans G . On peut ainsi construire des estimateurs atteignant la vitesse optimale de convergence sur les espaces de Besov. Cette WVD est maintenant très populaire en statistique des problèmes inverses (voir par exemple Kolaczyk (1996), Abramovich et Silverman (1997) et Johnstone (1999)). Cette méthode est notamment utilisée dans l'article [9] sur le problème de tomographie par émission de positrons.

III.2.4. Méthode du gradient conjugué [39] :

L'objectif est de minimiser la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x)$ où A est une matrice carrée symétrique définie positive de taille n .

Le calcul montre qu'une solution du problème est la solution du système $Ax = b$: en effet, on a

$$\nabla f(x) = Ax - b \quad (\text{III.19})$$

III.2.4.1. La méthode du gradient conjugué vue comme méthode directe :

On rappelle que deux vecteurs non nuls u et v sont conjugués par rapport à \mathbf{A} si

$$u^T \mathbf{A} v = 0 \quad (\text{III.20})$$

Sachant que \mathbf{A} est symétrique définie positive, on en déduit un produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{A}} := \langle \mathbf{A}u, v \rangle = \langle u, \mathbf{A}^T v \rangle = \langle u, \mathbf{A}v \rangle = u^T \mathbf{A}v \quad (\text{III.21})$$

- Deux vecteurs sont conjugués s'ils sont donc orthogonaux pour ce produit scalaire.
- La conjugaison est une relation symétrique : si u est conjugué à v pour \mathbf{A} , alors v est conjugué à u . Supposons que $\{p_k\}$ est une suite de n directions conjuguées deux à deux. Alors les $\{p_k\}$ forment une base de \mathbf{R}^n , ainsi la solution x_* de $\mathbf{A}x = b$ dans cette base :

$$x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \quad (\text{III.22})$$

Les coefficients sont donnés par

$$b = \mathbf{A}x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{A}p_i \quad (\text{III.23})$$

$$P_K^T b = P_K^T \mathbf{A}x_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_K^T \mathbf{A}P_i = \alpha_k P_K^T \mathbf{A}P_k \quad (\text{III.24})$$

(car : $\forall i \neq k, P_i, P_k$ sont conjugués deux à deux)

$$\alpha_k = \frac{P_K^T b}{P_K^T \mathbf{A}P_k} = \frac{\langle P_k, b \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle_{\mathbf{A}}} = \frac{\langle P_k, b \rangle}{\|p_k\|_{\mathbf{A}}^2} \quad (\text{III.25})$$

On a ainsi l'idée directrice de la méthode pour résoudre le système $\mathbf{A}x = b$: trouver une suite de n directions conjuguées, et calculer les coefficients α_k .

III.2.4.2. La méthode du gradient conjugué vue comme une méthode itérative :

En choisissant correctement les directions conjuguées p_k , il n'est pas nécessaire de toutes les déterminer pour obtenir une bonne approximation de la solution x_* . Il est ainsi possible de considérer la méthode du gradient conjugué comme une méthode itérative. Ce choix permet ainsi de considérer la résolution de systèmes de très grande taille, où le calcul de l'ensemble des directions aurait été très long.

On considère ainsi un premier vecteur x_0 , qu'on pourra supposer nul (sinon, il faut considérer le système $\mathbf{A}z = b - \mathbf{A}x_0$). L'algorithme va consister, partant de x_0 , à se « rapprocher » de la solution x^* inconnue, ce qui suppose la définition d'une métrique. Cette métrique vient du fait que la solution x^* est l'unique minimiseur de la forme quadratique :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T \mathbf{A}x - x^T b, x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{III.26})$$

Ainsi, si $f(x)$ diminue après une itération, alors on s'approche de x^* .

Ceci suggère donc de prendre la première direction p_1 comme l'opposé du gradient de f à $x=x_0$. Le gradient vaut $\mathbf{A}x_0 - b = -b$, d'après notre première hypothèse. Les vecteurs suivants de la base seront ainsi conjugués au gradient, d'où le nom « méthode du gradient conjugué ».

Soit r_k le résidu à la k^{e} itération :

$$r_k = b - \mathbf{A}x_k \quad (\text{III.27})$$

Notons que r_k est l'opposé du gradient de f en $x=x_k$, ainsi, l'algorithme du gradient indique d'évoluer dans la direction r_k . On rappelle que les directions p_k sont conjuguées deux à deux. On veut aussi que la direction suivante soit construite à partir du résidu courant et des directions précédemment construites, ce qui est une hypothèse raisonnable en pratique.

La contrainte de conjugaison est une contrainte d'ortho-normalité, aussi le problème partage des similitudes avec le procédé de Gram-Schmidt.

On a ainsi

$$P_{k+1} = r_k - \sum_{i \leq k} \frac{P_i^T A r_k}{P_i^T A P_i} p_i \quad (\text{III.28})$$

Suivant cette direction, le point suivant est donné par

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_{k+1} p_{k+1} \quad (\text{III.29})$$

Avec :

$$\alpha_{K+1} = \frac{p_{K+1}^T b}{p_{K+1}^T A P_{K+1}} = \frac{p_{K+1}^T (r_k + A x_k)}{p_{K+1}^T A P_{K+1}} = \frac{p_{K+1}^T r_k}{p_{K+1}^T A P_{K+1}} \quad (\text{III.30})$$

La dernière égalité venant du fait que p_{k+1} et x_k sont conjugués.

III .2.5. Algorithme de Gauss – Newton[40] :

La méthode de Gauss-Newton et ses variations ont été intensivement employées dans la solution du problème inverse (Jacquard et Jain, 1965 ; Thomas et al., 1972 ; Yoon et Yeh 1976 ; Yeh et Yoon, 1981 ; Cooley, 1977, 1982, 1983, 1985). Cet algorithme se base sur l'algorithme de Newton qui utilise comme direction de descente la solution de l'équation:

$$\nabla^2 J(\alpha_k) d_k = -\nabla J(\alpha_k) \quad (\text{III.31})$$

En utilisant la matrice Jacobienne, on peut écrire le gradient de la fonction 'objectif' sous la forme suivante:

$$\nabla J(\alpha) = \mathcal{J}(\alpha)^T \Omega(\alpha) v(\alpha) \quad (\text{III.32})$$

Avec $\Omega(\alpha)$ est la matrice diagonale donnée par $\Omega_{i,i(i=1,N_m)} = w_i$. $v(\alpha)$ est un vecteur donné par :

$$v_i(i=1,N_m) = u_i - u_i^{\text{mes}} \quad (\text{III.33})$$

Ainsi le Hessien peut être calculé en dérivant l'équation (2) par rapport à (α) :

$$\nabla^2 J(\alpha) = \mathcal{J}(\alpha)^T \Omega(\alpha) \mathcal{J}(\alpha) + \Omega(\alpha) v(\alpha) \nabla^2 v(\alpha) \quad (\text{III.34})$$

$\nabla^2 v(\alpha)$: est la partie provenant de la dérivée seconde des variables d'état par rapport aux paramètres. L'algorithme de Gauss – Newton, contrairement à Newton, n'utilise qu'une partie du Hessien de J . De manière à éviter le calcul des dérivées secondes, le Hessien est approximé par :

$$\nabla^2 J(\alpha) \approx \mathcal{J}(\alpha)^T \Omega(\alpha) \mathcal{J}(\alpha) \quad (\text{III.35})$$

La direction de Gauss – Newton sera la solution particulière du système:

$$[\mathcal{J}(\alpha_k)^T \Omega(\alpha_k) \mathcal{J}(\alpha_k)] d_k = -\mathcal{J}(\alpha_k)^T \Omega(\alpha_k) v(\alpha_k) \quad (\text{III.36})$$

Et enfin la modification sur le nouveau paramètre α_{k+1} se fait à partir de la relation

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \rho_k d_k. \quad (\text{III.37})$$

III.2.6. La Méthode Bayésienne [41] :

III.2 .6.1. Notations, définitions et commentaires :

L'ensemble des observations est noté x . Dans ce cours est $x = (x_1, \dots, X_i, \dots, x_n)$; autrement dit, on dispose d'un échantillon de taille n . Le cadre statistique de ce cours étant celui de la statistique inférentielle, les observations x_i sont donc considérées comme des réalisations de variables aléatoires, notées X_i .

➤ Définitions :

On entend par information a priori sur le paramètre θ toute information disponible sur θ en dehors de celle apportée par les observations.

L'information a priori sur θ est entachée d'incertitude (si ce n'était pas le cas, le paramètre θ serait connu avec certitude et on n'aurait pas à l'estimer!). Il est naturel de modéliser cette information a priori au travers d'une loi de probabilité, appelée loi a priori. Sa densité est notée $\pi(\theta)$

Le modèle statistique paramétrique bayésien consiste en la donnée d'une loi a priori et de la loi des observations. On appelle loi des observations, la loi conditionnelle de X sachant θ Sa densité est notée $f(x/\theta)$. que la variable aléatoire X soit discrète ou continue. Si X est discrète, $f(x/\theta)$. représente $\Pr(X = x/\theta)$. On fera dans ce cours systématiquement l'hypothèse que, sachant, θ les v.a. X_i sont indépendantes. Autrement dit on aura:

$$f(X/\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i/\theta) \quad (\text{III.38})$$

Indiquons maintenant les autres lois de probabilité qui interviennent en statistique bayésienne.

III.2 .6.2. La loi a posteriori : C'est la loi conditionnelle de θ sachant x . Sa densité est notée : $\pi(\theta/X)$. En vertu de la formule de Bayes, on a:

$$\pi(\theta/X) = \frac{f(\theta/X)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(X/\theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (\text{III.39})$$

III.2 .6.3. La loi du couple (θ .X). Sa densité est notée $h(\theta; x)$. On a donc :

$$h(\theta, x) = f(X/\theta) \pi(\theta) \quad (\text{III.40})$$

III.2 .6.4. La loi marginale de X. Sa densité est notée $m(x)$. On a donc

$$m(X) = \int_{\Theta} f(X/\theta) \pi(\theta) d\theta \quad (\text{III.41})$$

➤ **Commentaires:**

III.2.6.4. La philosophie de l'approche bayésienne :

Alors que la statistique classique repose sur la loi des observations, la statistique bayésienne repose sur la loi a posteriori. La loi a posteriori peut s'interpréter comme un résumé (en un sens probabiliste) de l'information disponible sur θ , une fois x observé. L'approche bayésienne réalisé en quelque sorte l'actualisation de l'information a priori par l'observation x , au travers de $\pi(\theta/X)$.

Le schéma ci-dessous résume la démarche bayésienne dans le cadre de la statistique paramétrique inférentielle.

Il fait également apparaitre, la modélisation stochastique des x_i comme étant des réalisations de variables aléatoires X_i (cette modélisation est caractéristique de la statistique inférentielle), ainsi que la modélisation stochastique de l'information a priori disponible sur le paramètre θ au travers de la loi a priori.

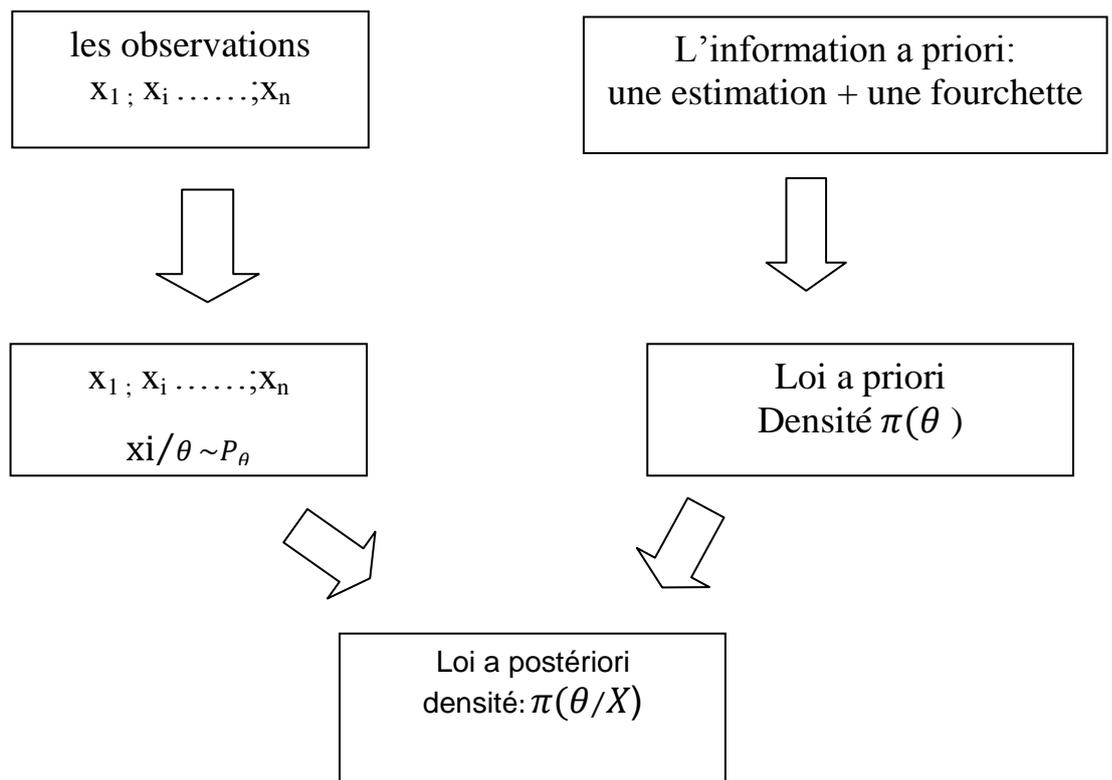


Figure III.3 Organigramme de la méthode Bayésienne.

➤ **Unabusdenotation :**

Auvudecequi précède, il apparaît que la notation θ désigne tantôt une variable aléatoire, tantôt un paramètre. Cette abus de notation qui déroutait souvent les débutants est fréquente (sinon systématique) dans les ouvrages de statistique bayésienne. On pourrait évidemment, distinguer la variable aléatoire et le paramètre par deux notations distinctes, en notant, par exemple, $\theta_{v.a.}$ la variable aléatoire, et en réservant la notation θ au paramètre, comme dans le schéma ci-dessous

grandeurs aléatoires	grandeurs non aléatoires
$\theta_{v.a}$	θ : le paramètre à estimer
$X_i \theta \sim P_\theta$	$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$: les observations

En pratique, on ne le fait pas; c'est le contexte qui permet de lever l'ambiguïté. Donnons quelques exemples. Quand on écrit $\theta \sim \text{Beta}(3,7)$ ou $\Pr(\theta \in [0.1, 0.3]) = 0.5$, il est clair qu'on parle de la variable aléatoire. Quand on écrit $\theta = 0.3$ il est clair qu'on parle du paramètre.

III.2 .6.5. Le calcul de la loi a posteriori :

➤ **Unesituationsimple**

On dispose d'un vecteur d'observations:

$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, et on considère le modèle bayésien suivant:

$X_i | \theta \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ et $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$. On a:

$$f(X/\theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i/\theta) = \theta^s (1 - \theta)^{n-s} \quad (\text{III.42})$$

$s = \sum_{i=1}^n x_i$. comme: $\theta \sim \text{beta}(a, b)$, on a :

$$\pi(\theta) = \frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta) \quad (\text{III.43})$$

D'autre part on a :

$$\pi(\theta/X) = \frac{f(X/\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(X/\theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (\text{III.44})$$

Il est facile de vérifier que :

$$\int_{\theta} f(X/\theta) \pi(\theta) d\theta = B(\alpha, \beta) \quad (III.45)$$

où $\alpha = a + s$ et $\beta = b + n - s$. D'où :

$$\pi(\theta/X) = \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta) \quad (III.46)$$

Par conséquent :

$$\theta/X \sim \text{beta} \left(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (III.47)$$

III.2.6.6. Le raisonnement proportionnel :

Il est parfois possible d'éviter le calcul de l'intégrale $\int_{\theta} f(X/\theta) \pi(\theta) d\theta$ en raisonnant proportionnellement :

➤ **Une notation et une définition :**

Soient deux fonctions réelles f et g définies sur le même espace Y . On dit que f et g sont proportionnelles, ce qu'on note $f \propto g$, si il existe une constante $a \neq 0$ telle que :

$f(y) = ag(y)$ pour tout $y \in Y$. Il est clair que la relation $f \propto g$ est une relation d'équivalence. En particulier : $f \propto g \Leftrightarrow g \propto hf$.

➤ **Deux remarques :**

❖ 1. Soit $f(y)$ la densité d'une variable aléatoire Y de loi inconnue. Si

$$f \propto u_1 \dots \propto u_k \propto g$$

où $u_1 \dots u_k$ désignent des fonctions réelles et $g(y)$ est la densité d'une loi de probabilité :

P , alors $Y \sim P$.

❖ 2. Dans un contexte bayésien on a : $\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$. En tant que fonctions de θ , les deux expressions $\pi(\theta|x)$ et $f(x|\theta)\pi(\theta)$ sont effectivement proportionnelles ; la constante qui apparaît dans la définition est égale ici à $1/m(x)$; à noter que cette quantité est bien une constante, au sens où elle ne dépend pas de θ . L'écriture $\pi(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta)$ est souvent reformulée de la façon suivante :

$$\pi(X/\theta) \propto \pi(\theta) \quad (III.48)$$

III.2 .6.7. L'estimation bayésienne:

➤ Définition de l'estimateur de Bayes :

III.2 .6.7 .a Le cas uni-dimensionnel: On suppose dans cette section que le paramètre θ est réel.

Rappelons que $\pi(\theta|x)$ s'interprète comme un résumé de l'information disponibles sur θ , une fois x observé. D'un point de vue bayésien, l'idéal serait que le statisticien, communique à son interlocuteur (le médecin, l'économiste, l'ingénieur, etc) la loi a posteriori, de façon à ne pas perdre d'information. Quand on souhaite cependant disposer d'une estimation pour θ , on retient le plus souvent la moyenne de la loi a posteriori.

➤ **Définition :** On appelle estimation bayésienne du paramètre θ la moyenne de la loi a posteriori. Cette moyenne est notée $E[\theta|x]$. Formellement, on a:

$$E[\theta/X] = \int_{\theta} \theta \pi(\theta/X) d\theta = \frac{\int_{\theta} \theta f(X/\theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{\theta} f(X/\theta) \pi(\theta) d\theta} \quad (\text{III.49})$$

L'estimateur de Bayes de θ est noté $\hat{\theta}_B$. Il est donc défini par $\hat{\theta}_B(X) = E[\theta/X]$

III.2 .6.7.b. Le cas multi-dimensionnel :

Dans un contexte multi-dimensionnel où $\theta = (\theta_j; j=1, \dots, J)$ la moyenne a posteriori $E[\theta|x]$ est égale au vecteur $(E[\theta_j|x]; j=1, \dots, J)$, où

$$E[\theta_j/X] = \int_{\theta_j} \theta_j \pi(\theta_j/X) d\theta_j \quad (\text{III.50})$$

$\pi(\theta_j|x)$ est obtenu en intégrant $\pi(\theta|x)$ sur toutes les composantes de θ autres que θ_j .

Le plus souvent, les estimateurs de Bayes des θ_j ne peuvent pas être calculés de façon explicite et il faut faire appel aux méthodes de simulation de Monte Carlo. Voici cependant une situation dans laquelle le calcul des estimateurs de Bayes ne pose aucune difficulté.

III.2 .6.8. Le risque de Bayes :

La recherche d'estimateurs de Bayes peut se faire dans le cadre de la théorie de la décision. La démarche consiste alors à se fixer une règle de préférence entre estimateurs et à chercher un estimateur optimal au sens de cette règle de préférence. Rappelons qu'en statistique classique la règle de préférence repose (le plus souvent) sur le risque quadratique, noté $R(\hat{\theta})$, et défini comme suit :

$$R(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}_B) + [\text{biais}(\hat{\theta}_B)]^2 \quad (\text{III.51})$$

L'approche Bayésienne fait reposer la règle de préférence sur le risque de Bayes. Ladensité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, le risque de Bayes de $\hat{\theta}$ est noté $R(\hat{\theta})$. Il est défini comme suit :

$$R(\hat{\theta}) = E[R(\hat{\theta})] = \int_{\theta} R(\hat{\theta})\pi(\theta) d\theta \quad (\text{III.52})$$

On dira que $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ au sens du risque de Bayes,

$$R(\hat{\theta}_1) < R(\hat{\theta}_2)$$

A noter que, contrairement à la règle de préférence basée sur le risque quadratique il est toujours possible de comparer deux estimateurs de θ au sens du risque de Bayes. Ladensité a priori $\pi(\theta)$ étant fixée, on montre que l'estimateur de Bayes est l'estimateur optimal de θ au sens du risque de Bayes.

➤ Propriétés de l'estimateur de Bayes :

P1. L'estimateur de Bayes est admissible.

P2. L'estimateur de Bayes est biaisé.

Sous certaines hypothèses de régularité le plus souvent satisfaites en pratique, on a les deux propriétés :

P3. L'estimateur de Bayes est convergent en probabilité (quand la taille de l'échantillon $n \rightarrow +\infty$).

P4. La loi a posteriori peut être asymptotiquement (c.a.d. pour de grandes valeurs de n) approximée par une loi normale :

$$N(E[\theta/X], Var[\theta]) \quad (\text{III.53})$$

Cette dernière propriété est particulièrement utile pour construire des intervalles de confiance a posteriori

➤ **Loi a priori impropre et estimateur de Bayes généralisé :**

- Soit $\pi(\theta)$ une application de Θ dans $]0, +\infty[$ telle que :

$$\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = +\infty \quad (\text{III.54})$$

on parle alors de loi a priori impropre.

Cette

terminologie est bien sûr un abus de langage puisque $\pi(\theta)$ n'est pas une densité de probabilité. L'intérêt d'introduire une telle notion est fourni par la définition qui suit :

On donne une loi a priori impropre caractérisée par $\pi(\theta)$. On suppose que l'intégrale

$$\int_{\Theta} L(\theta; X) \pi(\theta) d\theta \quad (\text{III.55})$$

est convergente. On considère la densité de probabilité, en θ , définie par :

$$\frac{L(\theta; X) \pi(\theta)}{\int_{\Theta} L(\theta; X) \pi(\theta) d\theta} \quad (\text{III.56})$$

Cette densité est notée $\pi(\theta|x)$ et est appelée densité de la loi a posteriori. Dans ces conditions, on appelle estimateur de Bayes généralisé de θ , la moyenne de cette loi a posteriori

➤ **Les intervalles de confiance bayésiens :**

On donne un modèle bayésien et on suppose que θ est un paramètre réel. Définition. Soit $\alpha \in]0, 1[$ fixé. Un intervalle I pour lequel on a :

$$P(\theta \in I|x) = \int_I \pi(\theta|x) d\theta = 1 - \alpha \quad (\text{III.57})$$

est appelé un intervalle de confiance a posteriori, de niveau de confiance $1 - \alpha$.

On peut également définir la notion d'intervalle de confiance a priori. Un intervalle J pour lequel on a :

$$P(\theta \in J) = \int_J \pi(\theta) d\theta = 1 - \alpha \quad (\text{III.58})$$

sera appelé un intervalle de confiance a priori, de niveau de confiance $1 - \alpha$.

III.2.6.9. Problèmes inverses avec bruit aléatoire [42]:

Il existe en fait trois approches pour considérer l'erreur sur les observations :

Dans le premier cas, on néglige l'erreur et elle n'est pas prise en compte. Il faut alors imposer une certaine stabilité sur les méthodes de reconstruction afin d'obtenir des techniques utilisables en pratique. Malgré tout, cette optique n'est guère satisfaisante sur le plan mathématique.

La deuxième approche, la plus populaire dans l'étude des problèmes inverses, est de supposer que l'erreur est un élément inconnue d'une boule de l'espace de Hilbert G . On observe alors g^δ avec $\|g^\delta - g\| \leq \delta$, où $g = Af$. Le paramètre $\delta > 0$ mesure l'erreur commise. On considère en fait ici une erreur $e \in G, \|e\| \leq \delta$. Cette approche a été développée notamment dans Tikhonov et Arsenin (1977). On s'intéresse alors à l'obtention de résultats dans le pire des cas, i.e. $\sup_{\|e\| \leq \delta}$.

La dernière approche, est de considérer que l'erreur est une variable aléatoire. Cette optique a été notamment développée dans Sudakov et Khalfin (1964) et Bakushinskii (1969). Cette approche connaît actuellement un réel essor en statistique.

On arrive ainsi naturellement à l'écriture symbolique suivante : soit A un opérateur linéaire continu défini de $D \subset H$ dans $Im(A) \subset G$. On a ainsi l'observation $Y \subset G$,

$$Y = Af + \varepsilon \xi, \quad (\text{III.59})$$

Où ξ est une variable aléatoire généralisée à valeurs dans G , $0 < \varepsilon < 1$ est un paramètre qui caractérise le niveau de bruit. Plus précisément, notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire (sur H ou G) et $\|\cdot\|$ les normes associées. On définit ξ de façon à ce que pour tout $u \in G$, $\langle u, \xi \rangle$ suit une variable gaussienne sur un espace de probabilités (Ω, A, P) , de moyenne 0 et de variance $\|u\|^2$. On suppose de plus que $\mathbf{E}\{\langle \xi, u \rangle \langle \xi, v \rangle\} = \langle u, v \rangle$, pour tout $u, v \in G$, où \mathbf{E} est l'espérance mathématique par rapport à P . Ainsi, ξ peut être, par exemple, un bruit blanc. En particulier, $\|\xi\| = \infty$, le bruit aléatoire étant ainsi très fort. Cette remarque est assez importante, qu'elle constitue en fait l'une des différences fondamentales par rapport au cas du bruit déterministe. Le problème est d'estimer l'élément $f \in H$ à partir de l'observation \mathbf{Y} . Le modèle (1) à un problème inverse avec bruit aléatoire.

Un exemple classique d'un tel modèle en statistique est :

$$dY(\nu) = Af(\nu) + \varepsilon dW(\nu), \nu \in V, \text{ (III.60)}$$

où A est un opérateur de $L_2(V)$ dans $L_2(V)$, avec $V \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. On voit ici que ξ correspond à dW .

Le modèle (2) est une version adaptée aux problèmes inverses, du modèle de bruit blanc gaussien (cas direct $A = I$). Il est bien connu que le bruit blanc gaussien classique, i.e. dans le cas direct, est, sous des conditions assez faibles, équivalent à d'autres modèles statistiques usuels quand $\varepsilon = n^{-1/2}$, modèle de densité, régression non-paramétrique (dans : Brown et Low (1996) et Nussbaum (1996)). Cependant, il faudrait étendre ces résultats au cas par cas, et en particulier pour les problèmes inverses. Ainsi, le bruit blanc gaussien doit être vu comme un modèle idéalisé, permettant de comprendre l'essentiel des phénomènes statistiques se produisant dans un cadre donné. C'est exactement le sens du modèle de problème inverse avec bruit aléatoire (1). Il évite les difficultés techniques et permet de travailler dans un cadre agréable.

III .4 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons commencés par présentation les deux familles de problèmes inverses, ensuite en citant quelques étapes de résolution d'un problème inverse. Dans le reste de ce chapitre nous nous sommes consacrés à la présentation de quelques approches inverses pour résoudre ces problèmes inverses, enfin on a défini les problèmes inverses avec un bruit aléatoire.

Chapitre : IV

Application des Approches Inverses

Pour l'évaluation des Paramètres

Matériels des Matériaux

IV.1. Introduction :

En mécanique, chercher à comprendre les données. C'est souvent chercher à trouver de l'information dans un gros volume de mesures redondantes. C'est aussi chercher des dépendances linéaires ou non entre les variables observées pour résumer celles-ci à un petit nombre de paramètres. Le problème est particulièrement crucial en mécanique où les données sont peu nombreuses car elles sont rares et/ou chères. Il y a donc un réel besoin de méthodes mathématiques nouvelles pour exploiter ces informations. et ces méthodes sont des approches inverses.

Pour l'identification du module d'Young et le coefficient de poisson d'un matériau qui est l'acier, nous avons fait un essai de traction, et pour éviter les erreurs de l'expérimentation, qui sont dûes soit à l'expérimentateur, à la machine de traction ou bien à l'éprouvette qu'on a utilisé, alors dans ce chapitre nous allons simuler cet essai de traction dans le code éléments finis ABAQUS, après la simulation nous avons extrait la contrainte σ_{11} , et les déformations ε_{11} , ε_{22} , nous avons appliqué trois méthodes inverses, TIKHONOV, Moindres Carrée et la décomposition en valeur singulière, pour trouver le module d'Young et coefficient de poisson, et nous avons fait la comparaison entre les résultats que nous avons obtenus, pour terminer avec une conclusion.

IV.2. Présentation du logiciel ABAQUS :

IV 2.1. Logiciels disponibles sur le marché [43]:

Il faut savoir que les logiciels de conception et de calculs assistés par ordinateur sont très nombreux sur le marché. Les plus utilisés sont Nastran/patran, Catia, ABAQUS et SolidWorks. Tous ces logiciels effectuent les mêmes tâches, c'est à dire qu'ils génèrent des structures, ses caractéristiques et celles du problème étudié (par exemple une table avec 8 pieds de différentes longueurs en liège et devant soutenir une charge de 2T en son centre), ensuite ils calculent le devenir de cette structure (déformations, ruptures, plastification...) et enfin ils permettent de traiter ces résultats afin d'en sortir des données utilisables et exploitables.

La plupart des entreprises utilisent un assortiment de ces logiciels qui sont plus ou moins performants dans l'une ou l'autre de ces tâches, par exemple, dessiner avec Catia, calculer avec ABAQUS et faire du post traitement avec patran.

Il vous sera donc certainement demandé dans le monde de l'entreprise une maîtrise de plusieurs de ces outils, d'où l'intérêt de commencer avec ABAQUS.

IV.2.2 Caractéristiques du logiciel ABAQUS :

ABAQUS a été développé par Hibbit, Karlsson & Sorensen (HKS) (devenue ABAQUS, Inc depuis) depuis 30 ans et le début de la théorie des éléments finis et a été amélioré au fur et à mesure pour intégrer toutes les nouveautés de la théorie et des besoins de l'entreprise, jusqu'à ce que l'entreprise soit rachetée par Dassault industries en Octobre de l'année 2005 (donc si ça vous intéresse vous savez où aller frapper).

ABAQUS est avant tout un logiciel de simulation par éléments finis de problèmes très variés en mécanique. Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires.

Le cœur du logiciel ABAQUS est donc ce qu'on pourrait appeler son "moteur de calcul". À partir d'un fichier de données (caractérisé par le suffixe .inp), qui décrit l'ensemble du problème mécanique, le logiciel analyse les données, effectue les simulations demandées et fournit les résultats dans un fichier .odb.

Deux tâches restent à accomplir : générer le fichier de données (cela s'appelle aussi effectuer le prétraitement), et exploiter les résultats contenus dans le fichier. odb (ou post traitement). La structure du fichier de données peut se révéler rapidement complexe : elle doit contenir toutes les définitions géométriques, les descriptions des maillages, des matériaux, des chargements, etc..., suivant une syntaxe précise. Il faut savoir que le pré traitement et le post traitement peuvent être effectués par d'autres logiciels. ABAQUS propose le module ABAQUS CAE, interface graphique qui permet de gérer l'ensemble des opérations liées à la modélisation :

- La génération du fichier de données,
- Le lancement du calcul proprement dit,
- L'exploitation des résultats.

IV.2.3 : Bases de l'interface d'ABAQUS :

➤ **Organisation de l'interface :**

On retrouve dans l'interface les éléments essentiels suivants :

- La fenêtre d'affichage graphique.
- Une première barre de menus en haut : ces menus sont relatifs au module dans lequel on se trouve.
- Une deuxième barre horizontale d'outils : y sont disposées les icônes correspondant aux commandes les plus courantes, c'est-à-dire les commandes d'ouverture et de sauvegarde de fichiers, et les commandes réglant l'affichage des vues (perspective, ombrage, zoom, rotations, etc.).
- Une troisième barre de menus déroulant permettant d'accéder aux autres modules, ou de sélectionner le modèle ou la pièce sur lesquels on souhaite travailler.

Plus important :

- On dispose à gauche d'une colonne d'icônes permettant d'accéder aux outils disponibles à l'intérieur du module dans lequel on se trouve.

❖ **ATTENTION :**

Les icônes comportant une petite flèche en bas à droite () cachent d'autres icônes ! Il faut maintenir enfoncée la touche M1 de la souris sur ces icônes pour voir apparaître les icônes cachées et pouvoir sélectionner les outils correspondants.

L'espace juste sous la fenêtre d'affichage graphique est celui dans lequel ABAQUS vous parle : les messages affichés à cet endroit sont faits pour vous guider dans l'action que vous avez entreprise. Lisez-les, suivez-les attentivement, ils vous seront d'une grande aide. Enfin, une fenêtre en-dessous sur fond blanc est utilisée pour afficher des messages informatifs : réponses à des questions posées, avertissements liés à des problèmes rencontrés, etc.

IV.2.4 : Les touches de la souris :

La souris comporte trois touches, classiquement appelées M1, M2 et M3, de gauche à droite. Chacune à un mode de fonctionnement particulier dans ABAQUS/CAE :

- La touche M1 sert à sélectionner (classique),

- La touche M2 sert en général à confirmer pour quitter une action : elle peut être une alternative pratique pour répondre "OK" à une question. Cliquer sur M2 revient donc la plupart du temps à valider une action, ou à quitter une procédure.
- La touche M3 permet de faire apparaître des menus contextuels relatifs à l'action en cours. En particulier, elle permet bien souvent de faire un pas en arrière dans l'action entreprise.

IV.2.5 : Manipulation de la vue affichée :

Trois raccourcis bien pratiques pour manipuler la vue affichée à l'aide de la souris :

"Ctrl + Alt + souris/M1" : rotation de la vue,

"Ctrl + Alt + souris/M2" : translation de la vue,

"Ctrl + Alt + souris/M3" : zoom avant/arrière.

IV.2.6 : Présentation générale d'ABAQUS :

ABAQUS est un logiciel de simulation par éléments finis de problèmes mécanique. Il se compose de trois produits : ABAQUS /Standard, ABAQUS /Explicit et ABAQUS/Cae.

- **ABAQUS/Standard** : est un solveur généraliste, qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.
- **ABAQUS/Explicit** : emploie un schéma d'intégration explicite, pour résoudre des problèmes dynamiques ou quasi-statiques non-linéaires.
- **ABAQUS/CAE** : constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour les dits solveurs.

ABAQUS effectue la résolution d'un problème, décrit par un fichier « entrée » (ou fichier de données), il écrit la solution vers un fichier « de sortie » (ou fichier de résultats):

- ✓ Le fichier (« texte ») de données a pour extension (.inp), et dont le contenu des mots clés qui décrivent les géométries, les matériaux, les conditions aux limites,...
- ✓ Le fichier de résultats a pour extension (.odb), et dont le contenu des contours et des courbes montrant les résultats.
- ✓ Les autres fichiers créés pendant le calcul dans Abaqus sont :

CHAP.IV : Application des approches inverses pour l'évaluation des paramètres matériels Des matériaux

Le Fichier (.dat) qui contient :

- ✓ Le fichier résumé de notre modélisation,
- ✓ Les messages d'erreur concernant notre modélisation,
- ✓ Les temps de calcul.

Le fichier (.msg) qui contient :

- ❖ Le fichier résumé du calcul en cours,
- ❖ Les messages d'erreur lors du déroulement du calcul.

La figure suivante, illustre un schéma de résolution d'un problème sur ABAQUS :

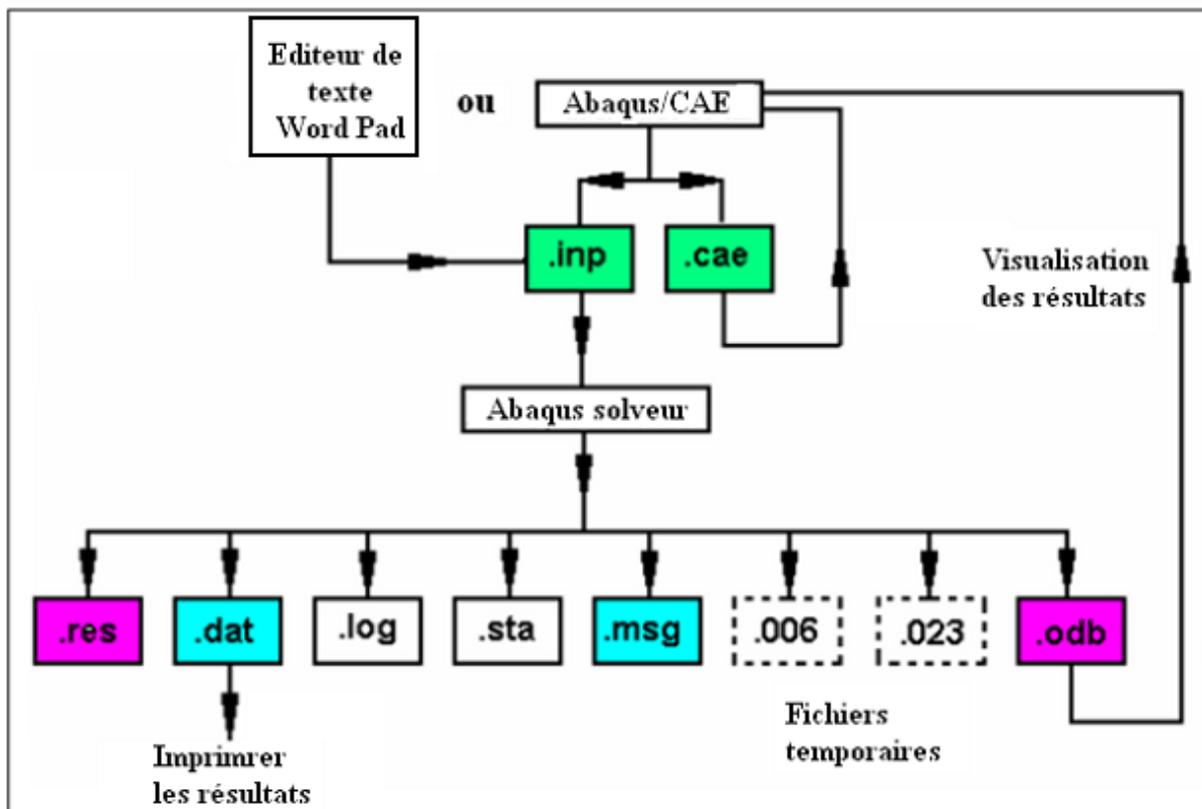


Figure IV.1 : schémas de résolution dans ABAQUS.

IV.2.7 : Les principaux modules :

ABAQUS CAE, est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation. Ses modules sont :

❖ Le module « PART ».

Le module Part, permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un autre logiciel de dessin.

❖ Le module « PROPERTY ».

Le module Property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.

❖ Le module « ASSEMBLY ».

Ce module, permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère, de coordonnées globales. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.

❖ Le module « STEP ».

Ce module, permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent à des moments donnés.

❖ Le module « INTERACTION ».

Grâce ce module, il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques ou autres. Il faut savoir qu'ABAQUS, ne prend en compte que les interactions explicitement définies.

❖ Le module « LOAD ».

Le module Load, permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et les conditions limites sont dépendants des steps, par exemple une force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.

❖ Le module « MESH ».

Ce module, contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.

❖ Le module « JOB ».

Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module Job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires, et en tirer des résultats.

❖ Le module « VISUALIZATION ».

Ce module, permet de visualiser les résultats, les courbes de charges, les déformations...

❖ Le module « SKETCH ».

Ce module, permet de créer des formes bidimensionnelles qui ne sont pas associés à un objet. Il peut être utilisé pour des extrusions par exemple.

ABAQUS, se compose aussi d'autres modules qui sont :

❖ Les modules de ABAQUS /CAE (Computer Aided Engineering), qui est un environnement interactif permettant :

- ✓ La création du modèle E.F,
- ✓ Le lancement de calcul,
- ✓ Le diagnostic d'éléments,
- ✓ La visualisation des résultats.

❖ Les modules ABAQUS /Standard et ABAQUS /Explicit : sont des solveurs qui font les calculs.

❖ Le module ABAQUS/Standard (faisant une résolution implicite) qui permet en premier lieu les :

Analyses linéaires ou non-linéaires, telles que :

- l'analyse statique ou dynamique en contraintes et déplacements,
- la réponse viscoélastique ou viscoplastique,
- l'analyse de transfert thermique (transitoire et stationnaire),
- l'analyse de diffusion de masse (transitoire et stationnaire),
- l'analyse acoustique.

Les problèmes couplés :

- Thermo- mécanique avec couplage réciproque,

- Thermo- électrique,
- Piézo-électrique,
- Mécanique des milieux poreux saturés et non-saturés, couplage avec l'écoulement thermomécanique avec diffusion de masse,
- Couplage mécanique/acoustique.

En deuxième lieu les analyses linéaires de perturbations, telle que :

- Analyse statique ou dynamique en contraintes et déplacements (modes propres, flambage,...).
- Le module ABAQUS/Explicit (faisant une résolution explicite) qui permet :
- l'analyse dynamique en contraintes et déplacements.
- Le module ABAQUS /Viewer qui permet la visualisation des résultats.

IV.2.8 : Les algorithmes de résolution:

ABAQUS, utilise des algorithmes de résolution qui traitent les différents problèmes :

- ✓ le problème linéaire : solution obtenue directement,
- ✓ le problème non-linéaire en régime permanent : solution obtenue avec itération (avec contrôle de la précision),
- ✓ le problème non-linéaire en régime transitoire : solution obtenue avec itération (avec contrôle de la précision) et incrémentation (avec contrôle du pas de temps), utilise le schéma d'intégration implicite de Hilbert-Hughes-Taylor,
- ✓ des techniques de résolution,
- ✓ des non linéarités géométriques,
- ✓ la formulation de Lagrange et de Lagrange actualisées (problème d'élasticité ou d'élastoplasticité),
- ✓ la résolution d'équations non-linéaires,
- ✓ la méthode de Newton complète (qui consiste la reconstruction de la matrice de rigidité pour chaque itération),
- ✓ l'accélérateur de convergence pour des discontinuités sévères,
- ✓ le contrôle de la solution,
- ✓ le contrôle en forces, déplacements et températures pour chaque pas de temps,

✓ le critère sur les résidus (minimum) associés à chaque type d'équations.

-A travers cette présentation, on peut avoir une idée générale sur le fonctionnement du code de calcul par éléments finis ABAQUS.

IV.3 Applications des approches inverses et simulation numérique :

IV.3.1 Simulation numérique:

Pour simuler notre essai de traction dans ABAQUS, nous avons choisi une éprouvette selon la norme ISO6892-1

Géométrie : éprouvette plate

Matériau : -Acier

-Module d'Young : 210 Gpa

-Coefficient de poisson : 0,3

IV.3.2 Dimensions d'éprouvette de traction :

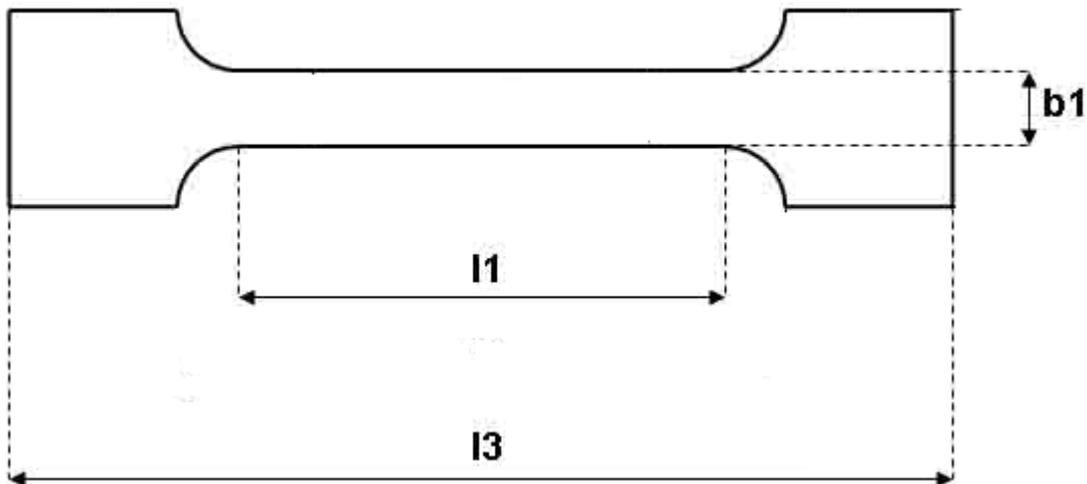


Figure : IV.2 Dimensions d'éprouvette de traction

- ✓ Longueur totale : $L_3 = 195,5 \text{ mm}$
- ✓ Longueur calibré : $L_1 = 75 \text{ mm}$
- ✓ Largeur: $b_1 = 12,5 \text{ mm}$
- ✓ Epaisseur : $e = 3 \text{ mm}$

Dans ABAQUS il suffit juste de simuler la partie calibrée de l'éprouvette

IV.3.3 Modélisation :

Dans ABAQUS nous avons choisi un schéma implicite pour réaliser notre essai de traction On a commencé à créer notre éprouvette en cliquant sur Le module « PART », dans (édit part) on a choisi 3D, Shell, type plane, après qu'on a réalisé notre structure avec ses dimensions : la longueur calibrée = 75 mm, la largeur = 12,5 mm, l'épaisseur = 3mm. Pour définir les propriétés élastiques de notre matériau On a passé au module

« PROPERTY » dans (Edit Material) on l'a nommé Acier et on a donné la valeur de module d'Young : $210 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ et la valeur de coefficient de poisson : 0,3, ensuite après avoir crée dans (Create Section) la section on l'a assigné. Dans Le module « ASSEMBLY » on a crée instances. Dans Le module « STEP » on a créé dix Steps.

Pour le maillage on a passé au module « MESH » dans (Mesh controls) on a choisi un maillage quadratique structuré « quad, structured ». Après le maillage comme illustre la **figure(IV.4)**, pour appliquer les charge et les conditions aux limites on a passé au Le module « LOAD », dans (Create boundary condition) on a imposé un encastrement à l'une des extrémités de l'éprouvette, Un effort de traction est ensuite appliquée à l'extrémité opposée de l'éprouvette. A l'aide (Create load) on a choisi force concentrée, et application des forces de 5 N jusqu'à 50 N de pas de 5 à et chaque force avec son Step, toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, alors on a utilisé Le module « JOB » pour analyser notre modèle, et réaliser tous les calculs qu'on a besoin, a la fin on a utilisé

Le module « VISUALIZATION » Pour visualiser les résultats, ensuite pour chaque force qu'on a appliquée on a tiré la contrainte (σ_{11}), et ses déformations (ϵ_{11} , ϵ_{22}) voir le tableau (IV.1).

- Représentation de l'éprouvette avec le maillage et les conditions aux limites :

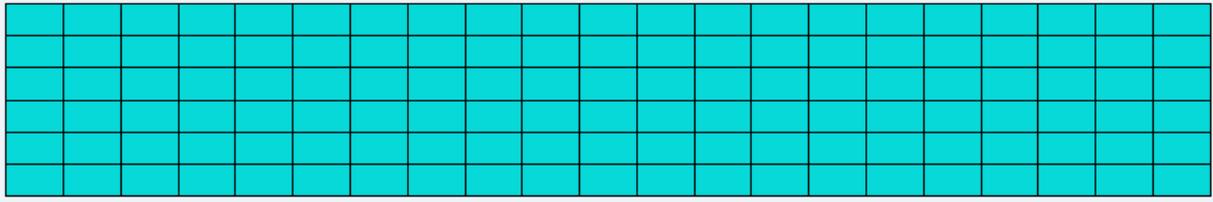


Figure : IV.3 : l'éprouvette maillée



Figure : IV.4 : l'éprouvette avec les conditions aux limites

IV.3.3 Résultats obtenus :

Les résultats obtenus sont représentés dans Tableau VI.1

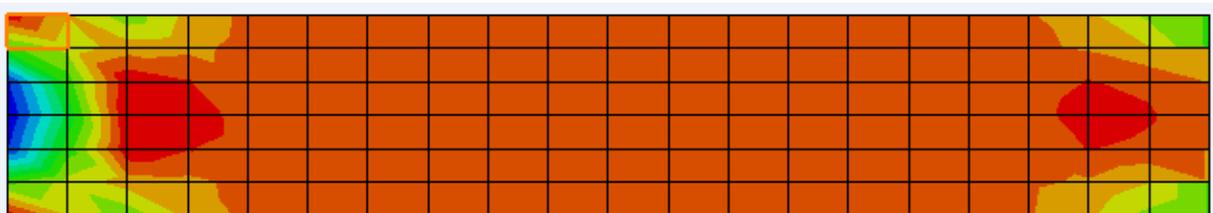


Figure : IV.5 : Contraintes de Von mises

CHAP.IV : Application des approches inverses pour l'évaluation des paramètres matériels Des matériaux

Charge (N)	σ_{11} (Pa)	ϵ_{11}	ϵ_{22}
5	128,895. 10 ³	613,919.10 ⁻⁹	-187.673E-09
10	431,616. 10 ³	2,05742. 10 ⁻⁶	-563.019E-09
15	863,232. 10 ³	4,14484. 10 ⁻⁶	-1.12604E-06
20	1,43872. 10 ⁶	6,85807. 10 ⁻⁶	-1.87673E-06
25	2,15808. 10 ⁶	10,2871. 10 ⁻⁶	-2.81510E-06
30	3,02131. 10 ⁶	14,4019. 10 ⁻⁶	-3.59065E-06
35	4,02841. 10 ⁶	19,2026. 10 ⁻⁶	-5.25485E-06
40	5,17939. 10 ⁶	24,6891. 10 ⁻⁶	-6.75623E-06
45	6,47424. 10 ⁶	30,8613. 10 ⁻⁶	-8.63296E-06
50	7,91296. 10 ⁶	37,7194. 10 ⁻⁶	-10.3220E-06

Tableau VI.1 Tableau des résultats obtenus contraintes et déformations :

IV. 3.4 Application des méthodes inverses et résultats :

Pour identifier les paramètres matériels : le module d'Young et coefficient de poisson de l'éprouvette, après avoir simulé dans ABAQUS l'essai de traction et tiré les contraintes et déformations, on a transféré nos résultats dans l'environnement MALAB, Nous avons choisi trois méthodes inverses qu'on a déjà cité dans le chapitre trois la première la méthode TIKHONOV-PHILLIPS, la seconde la méthode la décomposition en valeurs singulières (SVD) et la troisième c'est la méthode des moindres carrés, Dans logiciel MATLAB on a programmé ces méthodes, sans et avec bruit blanc et, la perturbation choisi est de 5% d'erreur, en suivant les étapes suivantes :

➤ **Formulation de problème inverse :**

Dans le premier cas, pour identifier le module d'Young, notre problème inverse est de uni dimensionnel, on a appliqué la de Hook :

$$\sigma_{11} = E \epsilon_{11} \quad (\text{IV.1})$$

Dans le deuxième cas pour identifier le couple(E, v) on a formulé le problème in verse comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \end{cases} \rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{1}{\nu} \varepsilon_{22} \quad (\text{IV.2})$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = E\varepsilon_{11} \\ \sigma_{11} = -\frac{E}{\nu} \varepsilon_{22} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ E/\nu \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Cette formule a deux inconnus (E, ν)

IV. 4 Résultats et discussion:

IV. 4.1 Premier cas l'évaluation de E :

Le cas sans bruit : on a exécuté les trois méthodes à la fois, mais dans la méthode de TIKONOV, on a choisi des paramètres de régularisation ($a_1 = 10^{-10}$, $a_2 = 10^{-12}$, $a_3 = 10^{-14}$).

Le cas avec un bruit : on a perturbé les déformations mesuré (ε_{11}) avec un bruit blanc Gaussienne de 5% d'erreur, et ce bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire et on a obtenu ces résultats suivant :

IV. 4.1.a : Résultats Sans bruit :

➤ Calcul N°1 :

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-10}$) :

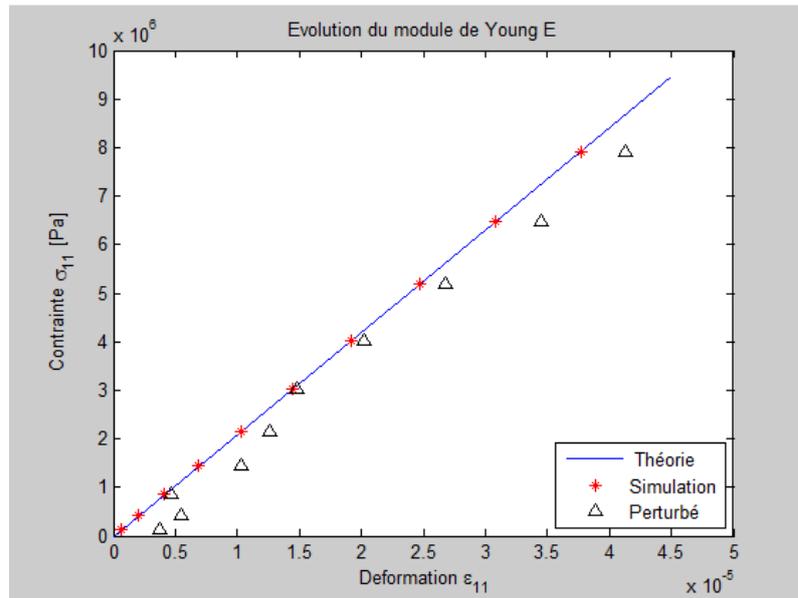


Figure IV.6 courbe linéaire σ/ϵ pour calcul N°1.

Les méthodes	Module d'Young E(Pa)
moindres carrés	$E_1 = 209,8. 10^9$
TIKHONOV	$E_2 = 204,3. 10^9$
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 209,8. 10^9$

CHAP.IV : Application des approches inverses pour l'évaluation des paramètres matériels Des matériaux

➤ Calcul N°2 :

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-12}$) :

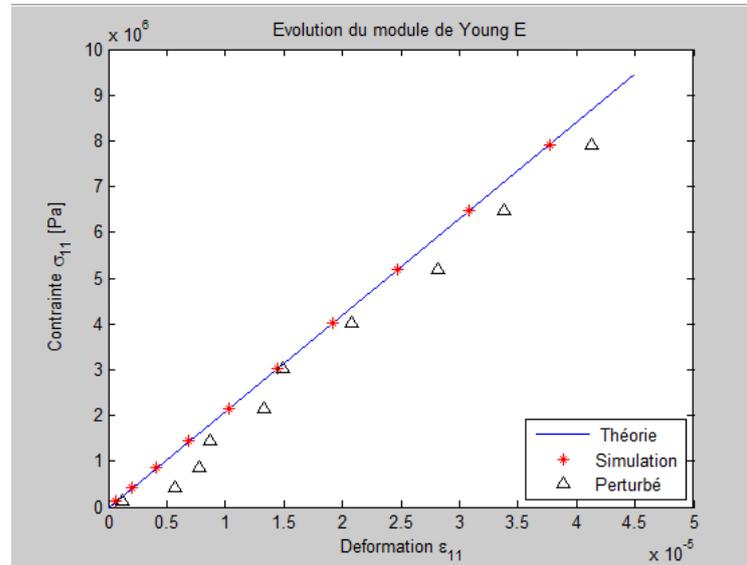


Figure IV.7 courbe linéaire σ/ϵ pour calcul N°2.

Les Méthodes	Module d'Young (Pa)
moindres carrés	$E_1 = 209,8. 10^9$
TIKHONOV	$E_2 = 209,7. 10^9$
Décomposition en valeurs singulière	$E_3 = 209,8. 10^9$

➤ **Calcul N°3 :**

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-14}$) :

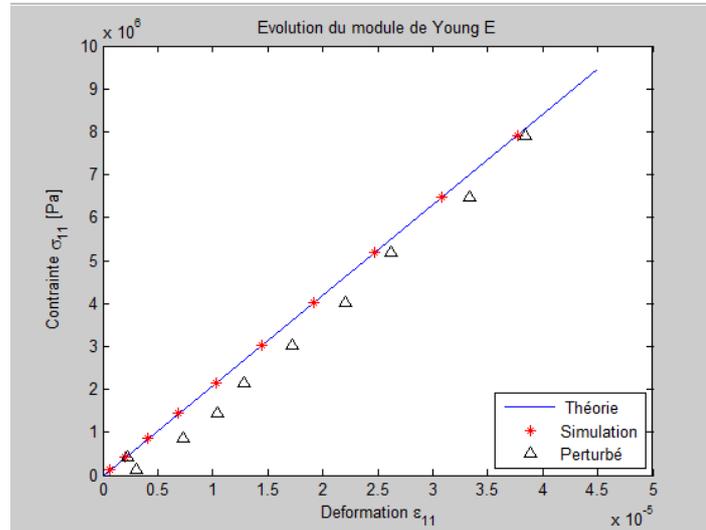


Figure IV.7 courbe linéaire σ/ε pour calcul N°3.

Les Méthodes	Module d'Young E(Pa)
Moindres Carrés	$E_1 = 209,8. 10^9$
TIKHONOV	$E_2 = 209,8. 10^9$
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 209,8. 10^9$

➤ **Discussion :**

On remarque que dans la méthode des moindres carrés et la méthode de la décomposition en valeurs singulières (SVD), on a obtenu des bons résultats $E = 209,8. 10^9 Pa$ est presque égale au module d'Young théorique, et dans la méthode de TIKHONOV au premier cas avec le paramètre de régularisation $a_1 = 10^{-10}$ on a obtenu $E_2 = 204,3. 10^9 Pa$ ce résultats n'est pas satisfaisant, dans le deuxième et troisième cas Avec les paramètres de régularisation $a_2 = 10^{-12}$ et $a_3 = 10^{-14}$ on a obtenu des bons résultats.

On peut dire ici que la méthode de TIKHONOV dépend de paramètre de régularisation a chaque fois qu'on prend un meilleur paramètre on a des meilleurs résultats, et dans notre cas $a_3 = 10^{-14}$ c'est un très bon paramètre, il nous a donné très un bon résultat.

IV. 4.2.b : Résultats avec bruit :

➤ Calcul N°1:

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-10}$) :

Les Méthodes	Module d'Young (Pa)	% d'Erreur
Moindres Carrés	$E_1 = 195,5. 10^9$	6.9%
TIKHONOV	$E_2 = 191,1. 10^9 Pa$	9.0%
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 195,5. 10^9 Pa$	6.9%

➤ Calcul N°2:

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-12}$) :

Les Méthodes	Module d'Young (Pa)	% d'Erreur
Moindres Carrés	$E_1 = 192,7. 10^9$	8,2%
TIKHONOV	$E_2 = 192,6. 10^9$	8,3%
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 192,7. 10^9$	8,2%

➤ Calcul N°3 :

Avec le paramètre de régularisation de TIKHONOV ($a_1 = 10^{-14}$) :

Les Méthodes	Module d'Young E(Pa)	% d'Erreur
Moindres Carrés	$E_1 = 192,7. 10^9$	8,2%
TIKHONOV	$E_2 = 192,6. 10^9$	8,2%
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 192,7. 10^9$	8,2%

➤ A partir des figures IV.6, IV.7 et IV.8 on remarque l'écart entre les résultats simulé (E_S) et les résultats obtenus avec perturbation, elles nous montrent aussi que ce n'est pas les mêmes résultats qu'on obtient à chaque exécution

➤ **Discussion :**

On constate un grand écart entre Le module d'Young (E) qu'on a obtenus dans le cas d'un bruit blanc Gaussienne avec le (E) qu'on a obtenus sans bruit et théorique, on remarque aussi que à chaque fois que on exécute le programme, dans la méthode de TIKHONOV on obtient toujours un pourcentage d'erreur relativement important par rapport aux autres méthodes SVD et moindre carré, et tout ça dû au bruit blanc Gaussienne parce que il prend des valeurs hasardeuse, alors puisqu'il est aléatoire.

8

IV. 4.2 Deuxième cas l'évaluation du couple (E, ν) :

Dans ce deuxième cas on fixe le paramètre de régularisation la méthode de TIKHONOV $a = 10^{-14}$

IV. 4.2.a : Résultats Sans bruit :

➤ Calcul N°1:

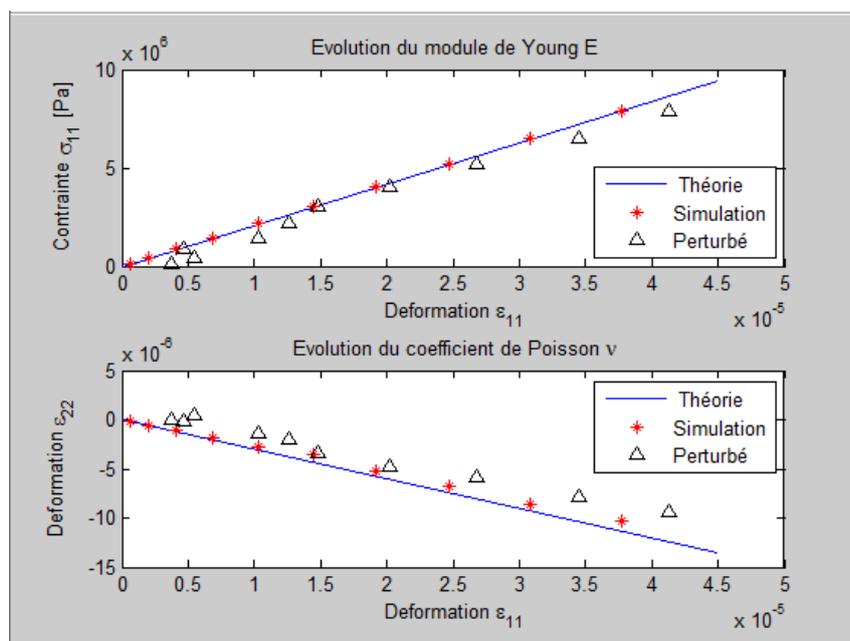


Figure IV.8 courbes du couple (E, ν) $\sigma_{11}/\epsilon_{11}$ et $\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$ pour calcul N°1

CHAP.IV : Application des approches inverses pour l'évaluation des paramètres matériels Des matériaux

Les Méthodes	Module d'Young E(Pa)	Coefficient de Poisson (ν)
Moindres Carrée	$E_1 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27
TIKHONOV	$E_2 = 207,5 \cdot 10^9$	0 ,28
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27

➤ Calcul N°2 :

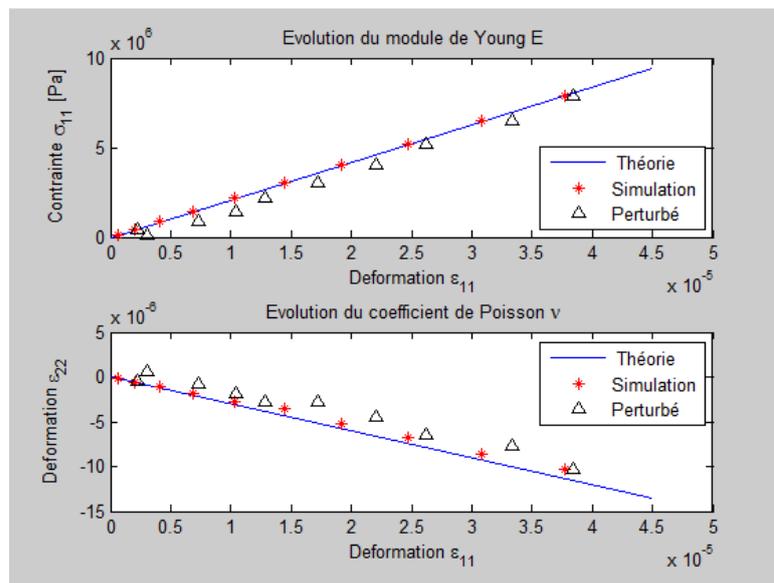


Figure IV.9 courbes du couple (E, ν) $\sigma_{11}/\epsilon_{11}$ et $\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$ pour calcul N°2

Les Méthodes	Module d'Young E(Pa)	Coefficient de Poisson (ν)
Moindres Carrée	$E_1 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27
TIKHONOV	$E_2 = 207,5 \cdot 10^9$	0 ,28
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27

➤ Calcul N°3 :

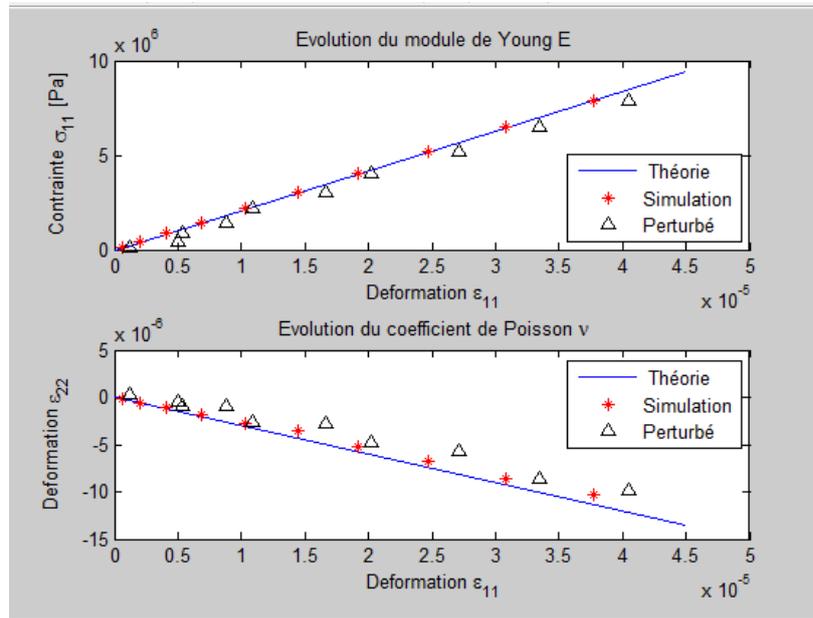


Figure IV.9 courbes du couple (E, ν) $\sigma_{11}/\epsilon_{11}$ et $\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$ pour calcul N°2

Les Méthodes	Module d'Young E(Pa)	Coefficient de Poisson (ν)
Moindres Carrée	$E_1 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27
TIKHONOV	$E_2 = 207,7 \cdot 10^9$	0,28
Décomposition en Valeurs Singulière	$E_3 = 209,7 \cdot 10^9$	0,27

IV. 4.2.b Résultats avec perturbation :

➤ Calcul N°1 :

Les Méthodes	E(Pa)	% d'erreur	ν	% d'erreur
Moindres Carrées	$E_1 = 158,3 \cdot 10^9$	24,4%	0,09	68,6%
TIKHONOV	$E_2 = 158,4 \cdot 10^9$	24,6%	8,7	2799%
SVD	$E_3 = 158,3 \cdot 10^9$	68,6%	0,09	68,6%

CHAP.IV : Application des approches inverses pour l'évaluation des paramètres matériels Des matériaux

➤ Calcul N°2 :

Les Méthodes	E(Pa)	% d'erreur	ν	% d'erreur
Moindres Carrées	$E_1 = 160,6 \cdot 10^9$	19,5%	$\nu = 0,15$	48,8%
TIKHONOV	$E_2 = 160,3 \cdot 10^9$	23,7%	$\nu = 0,16$	46,3%
SVD	$E_1 = 160,6 \cdot 10^9$	19,5%	$\nu = 0,15$	48,8%

➤ Calcul N°3 :

Les Méthodes	E(Pa)	% d'erreur	ν	% d'erreur
Moindres Carrées	$E_1 = 167,3 \cdot 10^9$	20,3%	$\nu = 0,2$	31,9%
TIKHONOV	$E_2 = 163 \cdot 10^9$	23,3%	$\nu = 0,3$	0,2%
SVD	$E_1 = 167,3 \cdot 10^9$	20,3%	$\nu = 0,3$	1,6%

- A partir des figures IV.7, IV.8 et IV.9 on remarque les résultats simulé son relativement proches des valeurs théoriques, mais l'écart entre les résultats obtenus avec un bruit blanc en sont relativement éloignés.

➤ **Discussion :**

On remarque que l'évaluation du couple (σ, ν) dans le premier cas sans perturbation, par les méthodes des moindre carrés et SDV nous ont donné des bons résultats par contre la méthode de TIKHONOV, avec le paramètre de régularisation $\alpha = 10^{-10}$, elle nous a donné un coefficient poisson $\nu = 21,56$ qui est très loin à la réalité, même avec un bon paramètre de régularisation, on n'a pas obtenu des résultats satisfaisant.

Dans le cas avec perturbation, avec un bruit blanc Gaussienne, on remarque que la méthode TIKHNOV nous a permis d'obtenir Un bon résultat pour coefficient de poisson ($\nu = 0,3$ avec une erreur=0,2) qui est égale à (ν) théorique, par contre le module d'Young ($E = 163 \cdot 10^9 Pa$, Avec une erreur 23%) n'est pas satisfaisant. Mais si on le

compare avec la SDV et moindres carrés, c'est la meilleure évaluation pour ce paramètre.

VI.5 : Conclusion :

Les méthodes inverses qu'on a utilisé nous a permis d'identifier les paramètres matériels qu'on cherche (E, ν). Dans le cas d'identification de (E) dans le cas sans bruit, on remarque que la méthode (TIKHONOV) par exemple pour obtenir des bons résultats il faut juste choisir un bon paramètre de régularisation, et dans notre cas ($\alpha = 10^{-14}$), alors le paramètre de régularisation joue un rôle important pour obtenir des bons résultats. avec perturbation, dans le cas avec un bruit blanc, les résultats se changent à chaque fois qu'on exécute notre programme, dans la méthode de (TIKHONOV) on obtient toujours des résultats avec un pourcentage d'erreur relativement important par rapport à les méthodes moindres carrés et (SVD). Le cas d'identification du couple (E, ν) sans bruit, on a obtenu des résultats avec les méthodes (SVD et moindres carrés) proches aux résultats théorique, dans le cas avec perturbation, on remarque une grande influence de bruit blanc sur les résultats, à chaque fois que le bruit blanc change les résultats obtenus changent. on trouve que c'est la méthode de (TIKHONOV) qui nous a donné le coefficient de poisson (ν) qui est le plus proches de la réalité.

Conclusion générale

❖ Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'identification des constantes élastiques (module d'Young et coefficient de poisson) de l'acier en simulant un essai de traction effectué une éprouvette de la norme **ISO6892-1**. Pour identifier ces paramètres il existe plusieurs techniques de caractérisation et on a déjà cité certaine dans le premier chapitre, utilisant généralement on utilise l'expérimental, et la technique la plus simple et couramment utilisée c'est l'essai de traction, Mais dans l'expérimental on n'obtient pas toujours des résultats bien précisés et on fait toujours des erreurs de mesures. Ces erreurs sont dû soient à l'expérimentateur ou bien aux appareils non fiables qu'on a utilisé, pour corriger ce genre d'erreurs, nous nous sommes intéressé dans notre travail la technique des approches inverses qui peuvent minimiser les erreurs et obtenir des meilleurs résultats et même proches de la réalité.

Alors nous avons commencés par la présentation ces approches inverses, parmi elles on a choisi trois approches inverses : TIKHONOV, Moindre Carrés et la Décomposition en Valeurs Singulière, ensuite pour les appliquer tout d'abord nous avons simulé des essais de traction sous ABAQUS, après on a tiré Les contraintes et les déformations, pour appliquer certaines de ces approches inverses, dans le premier cas sans perturbation avec un bon paramètre de régularisation pour la méthodes de Tikhonov on a obtenu des bons résultats, dans le deuxième cas avec un bruit blanc aléatoire, on a obtenu des résultats avec des pourcentages d'erreur relativement satisfaisant, l'évaluation du couple (E, ν) la méthode de Tikhonov nous donne un bon résultat.

Ces approches inverses nous ont permis d'obtenir des bons résultats pour l'identification des constants élastiques du matériau acier, on remarque aussi pour obtenir des résultats mieux, avec la méthode Tikhonov il faut choisir un bon paramètre de régularisation. En perspective, il est souhaitable de voir l'apport de ces méthodes dans l'identification des paramètres matériels des matériaux difficilement caractérisable comme les matériaux composites et polymères aussi l'utilisation de la méthode Bayésienne pour ce cas Là.

❖ *Recherches bibliographiques*

- [1] Marc Blétry, *méthodes de caractérisation mécaniques*, 2006-2007
- [2] *Mechanical Testing, Metals Handbook 9th ed.*, ASM Pub., pp. 609-619, 1985.
- [3] MEC6405-Analyse Expérimentale des contraintes. Automne 2011
- [4] *Les capteurs en instrumentation industrielle*, G. Asch et al., Dunod , pages 377-408, 1983.
- [5] Delphine Notta-Cuvier, *Méthode des Champs Virtuels pour la caractérisation de comportements viscoplastiques et d'endommagement, à partir de mesures de champs mécaniques hétérogènes.*
- [6] M. Grediac. *Principe des travaux virtuels et identification. C.R. Académies des Sciences, Série II, Paris, 309 :1–5, 1989.*
- [7] M. Grediac, F. Pierron, and Y. Surrel. *Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a t-shaped specimen. Experimental Mechanics, 39 :142–149, 1999.*
- [8] M. Grediac, N. Fournier, P.A. Paris, and Y. Surrel. *Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experiments and results. Journal of Sound and Vibration, 210 :645–659, 1998.*
- [9] M. Grediac, E. Toussaint, and F. Pierron. *Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–principle and definitions. International Journal of Solids and Structures, 39 :2691–2705, 2002*
- [10] thèse : Bagher MOHAMMAD SADGHI, *Analyse et Identification du comportement d'aciers à effet TRIP à partir de mesures de champs cinématiques. Le 10 décembre 2010.*
- [11] François Hild. *Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images et application en mécanique des solides, septembre 2003.*
- [12] P. Jacquot. J.M. Fourier, eds *interferometry in Speckle Light, Theory and application, Springer, Berlin(Germany) , 2000.*
- [13] Matthieu Puyo-Pain. François Hild. Jacques Lamon, *Méthodes de mesures de champs et d'identification des propriétés élastiques par corrélation d'images numériques : application à l'étude d'un joint de brasure céramique*
- [14] T3. A.Daoui, A.Meslem, A. Zerizer, R.Marchal. *Identification des fréquences de résonance et du module d'élasticité par la d'analyse vibratoire méthode*
- [15] Fairouz BETTAYEB. *The Multiscale analysis for ultrasonic material characterization*
- [16] Mickael Tanter (LOA, ESPCI). *Imagerie échographique ultrarapide et élasticité Vers une rhéologie temps réel du corps humain*
- [17] *S. Toumi, ** F. Boubenider. *Etude expérimentale de l'atténuation des ondes ultrasonores et des paramètres élastiques dans un composite à base de polymère*

- [18] K. Aki and P. Richards. *Quantitative Seismology : Theory and Methods*. Freeman, 1980
- [19] V. I. Arnold. *Équations différentielles ordinaires*. Éditions de Moscou, 19xx.
- [20] A. Bamberger, G. Chavent, C. Hemon, and P. Lailly. *Inversion of normal incidence seismograms*. *Geophysics*, 47(5) :757–770, 1982.
- [21] A. Bamberger, G. Chavent, and P. Lailly. *Une application de la théorie du contrôle à un problème inverse de sismique*. *Annales de géophysique*, 33 :183–199, 1977.
- [22] Yuming LI. *Simulation numérique de l'emboutissage de tôles minces par une approches Pseudo-inverse avec prise en compte de l'endommagement*. 2006
- [23] J.L. Batoz, G. Dhatt. "Modélisation des structures par éléments finis", Vol. 3, Coques, Ed. Hermès, Paris, 1992
- [24] J.L. Batoz, Y.Q. Guo, F. Mercier. "The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts". *Engineering Computations* 1998; (15): 6-7, pp. 864-892
- [25] Y.Q. Guo, J.L. Batoz, J.M. Detraux, P. Duroux. "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, Vol. 30, pp. 1385-1401, (1990)
- [26] F. Mercier. "Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse", *Thèse de Doctorat, UTC*, 1998.
- [27] Z. Boukriaa, P. Perrotina, A. Bennanib, A. Limamc. *Identification et localisation des impacts par analyse inverse- Poutre et plaque-*
- [28] P. C. Hansen , *The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*, Tech. Report, IMM-REP 99-15, Dept. of Math. Model. Tech. Univ. of Denmark, 1999
- [29] Marc Blétry. *Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux* 2006-2007
- [30] *Technique de l'ingénieur. M120.*
- [31] IN2P3. *CARACTERISTIQUES ET CHOIX DES MATERIAUX*
- [32] Michel Dupeux. *AIDE-MÉMOIRE SCIENCE DES MATÉRIAUX*
- [33] Dominique Ottello. *MÉTAUX & ALLIAGES*.
- [34] J. Molimard, *Cours de Mécanique Expérimentale*. 2011
- [35] *Technique de l'ingénieur. M4170.*

[36] [http://fr.wikipedia.org/wiki-CH5-méthodes des moindres carrés](http://fr.wikipedia.org/wiki-CH5-méthodes_des_moindres_carrés).

[37] Hong-Minh NGUYEN. *Une stratégie d'identification robuste pour la localisation et la rupture*.2006.

[38] Laurent CAVALIER, *Problèmes inverses en statistique*.2003.

[39] http://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_du_gradient_conjugué.

[40] Hassane FAHS. *Identification des paramètres par approches inverses pour la simulation De l'hydrodynamique en milieux fractures*.

[41] Jérôme Dupuis(LSP-UPS). *Statistique Bayésienne et algorithmes MCMC*.2007

[42] R-Abadou, *cours de probabilités*.

[43]