==

N°d'ordre: ....

République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliqués à la Gestion

Par

Mohamed Ali MOKRANI

Mohamed Ramdane MENGUELTI

Modèle entrée-sortie de LEONTIEF

Soutenue le 04 Octobre 2022 devant le jury :

Mme.	KHEFFACHE Rezika	UMMTO	Présidente
Mme.	MOUSSOUNI Samia	UMMTO	Examinatrice
M.	MEHIRI Mohamed	UMMTO	Rapporteur

Année Universitaire : 2021/2022

A ma très chère mère et mon très cher père pour leur dévouement leur disponibilité, leur sacrifice et leur afection tout au long de mes études
Á mon très cher frère, Mes chères soeurs .
Á mon beau-frère Amar ZOUZI.
Á mon neveu Adam,Á mes deux nièces Sophia et Syrine.
Á celle qui a été toujours avec moi pour me soutenir dans les pires moments,celle qui me donne du courage pour me battre encore plus,ma femme LYDIA anisi que toute sa petite famille KACEL que je tiens à remercier.
Á mes chers amis Nassim, Moghni et Seif eddin.
Á ma binôme Mohamed Ramdane et sa famille.
Á tous mes amis.
Á toute la promotion MAG 2022.

MOKRANI Mohamed Ali

Je dédie ce mémoire à mes **chers parents** qui ont été toujours à mes côtes et m'ont toujours soutenu tout au long de ces longues années d'études. En signe de reconnaissance qu'ils trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour tout ce qu'ils ont consenti d'efforts et de moyens pour me voir réussir dans mes études,Que dieu le tout puissant vous préserve et vous accorde Santé, longue vie et bonheur.

A mes **chères sœurs** et leurs petites filles **Dalia,Élina et Numidia**.

A ma tente et mes chers oncles paternels et maternelle et leurs enfant.

A tt les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom **Menguelti et ferhani**.

À la mémoire de ma grand-mère **yama 3zizen**et mon oncle **Aomar**.

À mon binôme **Mohamed Ali mokrani**,et sa famille et tout mes amis.

Et bien sûr à ma **future femme** ma moitié qui à été tjr derrière moi.

A tt les gens qui me connaissent et que je connais.

Ét à tous ceux qui m'aiment et que j'aime.

Á toute la promotion MAG 2022.

MENGUELTI Mohamed Ramdane

Remerciements

Il nous est agréable d'adresser nos premiers remerciements à Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donnés suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous témoignons toute notre reconnaissance à M. MEHIRI Mohamed, qui nous a proposés ce thème, pour sa disponibilité, ainsi que son aide et son suivi pour accomplir ce travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements aux membres du jury, Mme KHEFFACHE -présidente du jury- et Mme MOUSSOUNI -examinatrice- qui nous ont fait l'honneur de lire et d'examiner ce travail.

Nous remercions aussi tous nos camarades de la faculté des sciences et du département mathématiques, nos amis de la promotion. On leur exprime notre profonde sympathie et leur souhaitons beaucoup de réussite. Nous remercions de tout coeur nos très chers enseignants de nous avoir donnés le courage, le savoir, la science et la volonté de poursuivre nos études malgré tous les obstacles et les difficultés rencontré(e)s.

Finalement, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou'de loin à l'élaboration de ce mémoire, sans oublier tous ceux qui nous ont encouragés tout au long de notre parcours universitaire.

Tizi-Ouzou, le 19 octobre 2022.

Table des matières

Liste des figures

Introduction générale

C'est vers la fin des années quarante du siècle dernier que le professeur Wassily LEONTIEF avait fini d'introduire des données dans l'ordinateur de l'université de Harvard (Etats-Unis). Celles-ci contenaient deux cent cinquante mille (250000) renseignements, constituant une synthèse de plus de deux ans de travail laborieux, collectés par le bureau des statistiques américain.

LEONTIEF avait divisé l'économie américaine en cinq cents (500) secteurs, tels que l'industrie du charbon, l'industrie automobile, les communications, etc. Pour chacun de ces secteurs, il avait écrit une équation linéaire décrivant comment celui-ci distribuait sa production aux autres secteurs.
Les capacités limitées de l'ordinateur de l'époque –un Mack II- l'ont contraint à ramener le problème à un système de quarante-deux (42) équations à autant d'inconnues ; et, même ainsi, il avait fallu faire tourner le Mack II pendant cinquante-six (56) heures pour aboutir à une solution.

Quelques décennies plus tard –en 1973 exactement- LEONTIEF se verra décerner le prix Nobel d'économie et, depuis ses travaux, l'analyse des modèles économiques à grande échelle est annexée à l'usage de machines de plus en plus puissantes et l'informatique et l'algèbre linéaire sont devenues des domaines intimement liés. C'est ainsi que beaucoup de chercheurs dans divers domaines utilisent l'informatique pour étudier et analyser des modèles mathématiques mettant en jeu de très grandes quantités de données, le modèle linéaire s'étant, de ce fait, taillé une place importante en algèbre linéaire et avec l'aide de l'informatique on a vu d'ailleurs l'explosion du calcul parallèle à grande échelle.

De nos jours, scientifiques et ingénieurs de tous bords penchent sur des problèmes bien plus complexes, tels que l'exploration pétrolière, la programmation linéaire (compagnies de navigation, aérienne ou autres), réseaux électriques (conception de circuits électriques ou puces électroniques constituées de millions de transistors), ...

Dans ce mémoire, nous commençons par rappeler quelques notions d'algèbre linéaire, notamment de calcul vectoriel et matriciel, et comme les matrices intervenant en pratique dans les modèles économiques (et même par ailleurs en ingénierie) sont assez grandes et contiennent des valeurs nulles, on parlera de la notion de conditionnement et de décomposition en valeurs singulières de matrices, cela fait l'objet du chapitre 1.

Dans le chapitre 2, nous traitons du modèle de LEONTIF en économie, et on tentera de citer ses diverses utilisations dans d'autres domaines.

On verra au chapitre 3, après quelques brefs rappels sur le langage R de programmation, un exemple d'application sous R. On tentera d'interpréter les résultats à la lumière du travail présenté au chapitre 2.

Enfin, on terminera ce mémoire par une conclusion, où on citera les différentes perspectives et d'éventuelles pistes à « approfondir ».

RAPPELS MATRICIELS 1

Ce chapitre a pour but de rappeler, sans démonstrations, quelques résultats relatifs aux matrices, leurs normes, ainsi que certains domaines de leur application dont le plus connu est la résolution des systèmes linéaires d'équations algébriques. La dernière section introduit la notion (importante) de conditionnement d'une matrice.SLIMANI [1989]

1.1 Représentation matricielle d'un opérateur linéaire

Soit $V_1 = \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$ et $V_2 = \mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ deux espaces vectoriels réels, et soit $T : V_1 \longrightarrow V_2$ une application linéaire.
II est connu que T est représentable par une matrice réelle A à n lignes et m colonnes de la manière suivante :
Tout $x \in \mathbf{R}^m$ peut s'écrire sous forme vectorielle comme

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Appliquer T sur x pour obtenir $y = T(x)$ revient à multiplier x par A et obtenir le vecteur colonne y

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix};$$

où $y_i = \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} a_{ik} x_k$ représente la i-ème composante de y.

1.2 Algèbre des matrices

Soit $\mathbf{R}^{n\times m}$ l'espace vectoriel de toutes les matrices réelles A à n lignes et m colonnes :

$$A \in \mathbf{R}^{n\times m} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

A est dite de type (n,m) si $n \neq m$; elle est dite (carrée) d'ordre n si $m = n$. Deux sous-espaces importants sont associés à toute matrice A de type (n,m). Le sous-espace **image** de A defini par

$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid y = Ax \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}}\}$$

et son **noyau**, par :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbf{R}^m \mid Ax = 0\}$$

$\mathrm{Im}(A)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, engendré par les colonnes de A.
Le rang de A est défini par

$$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

C'est le nombre maximal de colonnes ou de lignes de A linéairement indépendantes ($0 \leq rg(A) \leq min(n,m)$).
Si $n = m$, il est bien connu que les trois propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) A est régulière,
(ii) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ (le vecteur nul de $\mathbf{R}^m$),
(iii) rang $(A) = n$.

Ci-dessous, une liste de certaines matrices spéciales est donnée. Une matrice A d'ordre n est dite :

Symétrique	si $A^T = A$
Définie positive	si $x^T Ax > 0, 0 \neq x \in \mathbf{R}^n$
Positive	si $x^T Ax \geq 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$
Orthogonale	si $A^T A = AA^T = I$
Diagonale	si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq$ n)
Triangulaire supérieure	si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$

1.3 Normes vectorielles

Une norme vectorielle sur $\mathbf{R}^n$ est une application $f : \mathbf{R^n} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ avec égalité ssi $x = 0$;
2. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$ (Inégalité Triangulaire) ;
3. $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}^\star$.

Une telle fonction est habituellement notée par $\|.\|$.

Une classe importante de normes est

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p} \quad p \geq 1,$$

parmi lesquelles, plus particulièrement :

$$\|x\|_1 = (|x_1| + \ldots + |x_n|)\,,$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2\right)^{1/2}, \quad \text{(norme euclidienne)}$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|\,, (1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}).$$

Elles sont d'une importance capitale en analyse numérique.
La norme (L_2), appelée norme euclidienne, a une importance particulière du fait qu'elle coïncide avec la (vraie) distance dans $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$.

Un résultat classique concernant les normes L_p est l'inégalité de Hölder suivante) :

$$\left|x^T y\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (1/p) + (1/q) = 1.$$

Un cas spécial de cette dernière est l'Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\left|x^T y\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Elle a aussi la particularité d'être invariante par transformation orthogonale : Si Q est une matrice orthogonale d'ordre n, alors

$$\|Qx\|_2^2 = (Qx, Qx) = x^T \left(Q^T Q\right) x = \|x\|_2^2,$$

où (x, y) dénote le produit scalaire de x et y.
Toutes les normes sur $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ sont **équivalentes** : pour deux normes N et N′ sur $\mathbf{R}^n$, il existe deux constantes positives m et M telles que :

$$m * N(x) \leq N'(x) \leq M * N(x)$$

pour tout x de $\mathbf{R}^n$.

1.4 Normes matricielles

De manière analogue au cas vectoriel sur $\mathbf{R}^n$, une norme matricielle sur $\mathbf{R}^{n\times m}$ est une fonction $f : \mathbf{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $f(A) \geq 0 \quad \forall \mathrm{A} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ avec égalité ssi $A = 0$;
b) $f(A+B) \leq f(A) + f(B) \quad \forall A, B \in \mathbf{R}^{n\times m}$;
c) $f(\alpha A) = |\alpha| f(A) \quad \forall A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ et $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Les normes dont l'utilisation est très fréquente en analyse numérique sont :
- La norme F (dite de FROBENIUS)

$$\|A\|_F = \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{1/2}, \tag{1.1}$$

(norme euclidienne ou -dite aussi- de SCHUR), et
- les normes L_p (spécialement pour $p = 1, 2$ et ∞) :

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \tag{1.2}$$

On peut facilement montrer que pour toutes ces normes, pour toutes matrices A, B appartenant à $\mathbf{R}^{n\times m}$ et $\mathbf{R}^{m\times q}$ respectivement, on a :

$$\|AB\|_{\mathrm{p}} \leq \|A\|_{\mathrm{p}} \|B\|_{\mathrm{p}} \tag{1.3}$$

Remarque :

On peut trouver de nombreuses normes matricielles qui ne satisfont pas l'équation (1.3). Par exemple si on definit la norme de A par

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

et si on prend $A = B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, on peut vérifier que $\|AB\|_* > \|A\|_* \|B\|_*$.

Dans la suite, on considérera uniquement les normes vérifiant les propriétés citées en (1.2).
De la définition de la nome L_p d'une matrice, il s'ensuit que

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p \tag{1.4}$$

Du fait de la continuité de la fonction $x \rightarrow \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$ sur la sphère unité $\|x\|_p = 1$, il existe toujours un x^* dans $\mathbf{R}^n$ tel que

$$\|Ax\|_p = \|A\|_p \|x^*\|_p . \tag{1.5}$$

Les normes F et L_p (spécialement L_1, L_2 et L_∞), satisfont certaines inégalités très utiles. Ainsi, pour toute matrice A de $\mathbf{R}^{m \times n}$, on a :

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2 \tag{1.6}$$

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{nm} \max_{ij} |a_{ij}| \tag{1.7}$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty} \tag{1.8}$$

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{1.9}$$

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{1.10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1 \tag{1.12}$$

Une proprieté particulière aux normes F et L_2 est qu'elles sont invariantes par transformation orthogonale, c'est-à-dire que pour toutes matrices orthogonales Q et Z d'ordres appropriés, on a :

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F \tag{1.13}$$

et

$$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2. \tag{1.14}$$

1.5 Décomposition en Valeurs Singulières DVS

Théorème 1.1

Si A est une matrice réelle carrée d'ordre n, il existe deux matrices orthogonales U et V telles que $U^T AV$ est une matrice Σ diagonale. En plus, on peut toujours choisir U et V de manière que les éléments de Σ vérifient l'inégalité suivante :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_\mathrm{n} = 0,$$

où r est le rang de A. En particulier si A est régulière on a

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0.$$

Les nombres σ_i sont les *valeurs singulières* de A. Ce sont les *racines carrées* des valeurs propres (nécessairement positives) de la matrice AA^T, celle-ci étant symétrique définie positive, car pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, non nul on a :

$$x^T \left(AA^T\right) x = \left(A^T x, A^T x\right) = \left\|A^T x\right\|_2^2 > 0$$

II découle de ce théorème que A peut se décomposer sous la forme

$$A = U\Sigma V^T,$$

où

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{bmatrix},$$

$$U = [u_1, \ldots, u_n]$$

et

$$V = [v_1, \ldots, v_n].$$

Par conséquent

$$Av_i = \sigma_i u_i \tag{1.15}$$

et

$$A^T u_i = \sigma_i v_i \tag{1.16}$$

1.6 Interprétation géométrique

Les valeurs singulières σ_i d'une matrice réelle carrée $(n \times n)$ sont précisément les longueurs des branches de l'hyperellipsoïde

$$E = \{y \mid y = Ax, \|x\|_2 = 1\}.$$

Par conséquent, il existe une droite Δ_1 de $\mathbf{R}^\mathrm{n}$ qui est étirée (ou rétrécie) du facteur σ_1 quand elle est transformée par A en une autre droite $A\Delta_1$ de $\mathbf{R}^n$. De même il existe une seconde droite Δ_2, perpendiculaire à Δ_1, qui est elle aussi étirée (ou rétrécie) du facteur σ_2 quand elle est transformée par A en une autre droite $A\Delta_2$ perpendiculaire à $A\Delta_1$.

Un cercle de rayon unité pris dans le plan formé par les deux droites Δ_1 et Δ_2 sera transformé par A en une ellipse dont les branches sont de longueurs

respectives σ_1 et σ_2. C'est la plus grande déformation qu'un cercle de $\mathbf{R}^n$ puisse subir, quand il est transformé par A.
De la définition de la norme L_2 et du fait que celle-ci est invariante par transformation orthogonale, on a :

$$\|A\|_2 = \left\|U^T \Sigma V\right\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1$$

et puisque $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$, il s'ensuit que

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \left\|V\Sigma^{-1}U^T\right\|_2 = \left\|\Sigma^{-1}\right\|_2 = \sigma_n^{-1}.$$

Comme généralisation du théorème 1.1 on a :

Théorème 1.2

Etant donné une matrice réelle de type (n,m) et de rang r, il existe deux matrices orthogonales U et V de types respectifs (n,n) et (m,m) telles que

$$U^T AV = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_r \end{bmatrix},$$

avec

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0.$$

1.7 Théorie de la perturbation

Considérons un système linéaire

$$Ax = b. \tag{1.17}$$

II est admis que la méthode de GAUSS (ou GAUSS-JORDAN) est la plus simple et la plus couramment utilisée pour résoudre un tel système, lorsque la matrice A n'a pas de propriété particulière suggérant l'emploi d'une méthode plus élaborée. La méthode de GAUSS consiste à transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc plus facile à résoudre. (Les opérations autorisées pour transformer ce système sont : échange de deux lignes. multiplication d'une ligne par un nombre non nul).
Quant à l'élimination de Gauss-Jordan, il s'agit d'un algorithme de transformation menant à un système équivalent d'équations linéaires Rx=d R x = d , où R est sous forme echelonnée reduite (FER), qui n'utilise que des opérations élémentaires sur les lignes. En langage courant, on dit que la transformation d'une matrice en FER est une réduction S'il apparaît des multiplicateurs trop grands au cours de l'élimination de GAUSS, il est toujours possible de remédier à cette difficulté en adoptant un choix approprié de pivots.
Une autre difficulté pouvant se présenter en pratique est celle d'un système dit "**mal conditionné**", c'est-à-dire dont la solution est très sensible à de petites perturbations des données initiales A ou/et b.

Considérons d'abord la sensibilité de la solution du système $Ax = b$ à des perturbations du vecteur b.

Si b est remplacé par $b + k$ et $x + h$ est la solution du nouveau système, alors :

$$A(x + h) = b + k. \tag{1.18}$$

On obtient par soustraction de l'équation (1.17) la relation suivante :

$$Ah = k \tag{1.19}$$

c'est-à-dire $h = A^{-1}k$.

Soit $\|.\|_p$ une norme vectorielle quelconque et $\|.\|_p$ la norme matricielle qui lui est subordonnée, c'est-à-dire

$$\|A\|_P = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_P}{\|x\|_P}.$$

On a

$$\|h\|_p \leq \left\|A^{-1}\right\|_p \|k\|_p. \tag{1.20}$$

et, puisque $\|b\|_p \leq \left\|A^{-1}\right\|_p \|x\|_p$, on obtient

$$\frac{\|h\|_p}{\|x\|_p} \leq \|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p \frac{\|k\|_p}{\|b\|_p} \tag{1.21}$$

Ceci montre que le nombre $\|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$ joue le rôle d'une borne supérieure pour la transformation associant à la perturbation relative de la donnée b, la perturbation relative de la solution x.
Ce nombre est appelé **conditionnement** de la matrice A (par rapport à la norme L_p).
Si le conditionnement $\|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$ est relativement très grand, la majoration (1.21) sera très pessimiste pour la plupart des vecteurs seconds membres b et des perturbations k. La plupart des b seront tels que

$$\left\|A^{-1}b\right\|_p = \|x\|_p \ll \left\|A^{-1}\right\|_p \|b\|_p. \tag{1.22}$$

Mais il existe toujours certains choix de b et k pour lesquels la majoration (1.21) est fine, et donc pour lesquels l'effet relatif d'une petite perturbation sur la solution est considérable.

Supposons maintenant que ce soit la matrice A qui soit perturbée par une matrice E :

$$(A + E)(x + h) = b, \tag{1.23}$$

d'où

$$(A + E)h = -Ex. \tag{1.24}$$

Même si A est régulière, ce que nous supposons, $A + E$ peut être singulière si E est quelconque. Écrivons

$$(A + E) = A\left(I + A^{-1}E\right).$$

Théorème 1.3 *Si pour une certaine norme matricielle $\|.\|_p$ on a $\|A\|_p < 1$, alors $I - A$ est réguliere et son inverse $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ satisfait*

$$\frac{1}{1+\|A\|_p} \leq \left\|(I-A)^{-1}\right\|_p \leq \frac{1}{1-\|A\|_p}.$$

On voit bien que $A+E$ est sûrement régulière si

$$\left\|A^{-1}E\right\|_p < 1 \tag{1.25}$$

En supposant cette condition satisfaite, on obtient

$$h = -\left(I + A^{-1}E\right)^{-1} A^{-1}Ex, \tag{1.26}$$

et donc, d'après le théorème précédent,

$$\|h\|_p \leq \frac{\left\|A^{-1}E\right\|_D \|x\|_p}{1-\left\|A^{-1}E\right\|_p} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|_p \|E\|_D \|_x\|_p}{1-\left\|A^{-1}\right\|_D \|E\|_p} \tag{1.27}$$

pouvu que $\left\|A^{-1}\right\|_p \|E\|_p < 1$. Pour la perturbation relative $\|h\|_p/\|x\|_p$, on peut écrire (1.27) sous la forme

$$\frac{\|h\|_P}{\|x\|_p} \leq \frac{\|A\|_D \left\|A^{-1}\right\|_p \|E\|_P/\|A\|_P}{1-\|A\|_p \left\|^{-1}\right\|_p \|E\|_p/\|A\|_P}. \tag{1.28}$$

Ce qui montre, qu'ici encore, le conditionnement de A joue un rôle déterminant dans la majoration de la perturbation relative.

Plus généralement, si l'on considère une perturbation à la fois de A et de b, on aura le système perturbé

$$(A+E)(x+h) = (b+k). \tag{1.29}$$

Si on combine les majorations (1.21) et (1.28) on obtient

Théorème 1.4 *Soit $\|\cdot\|_p$ une norme matricielle. Si $\|E\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p < 1$ et $\|I\|_p = 1$, alors pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|_Q$ (compatible avec $\|\cdot\|_{\mathrm{P}}$), on a pour le système (2.21) la majoration suivante :*

$$\frac{\|h\|_Q}{\|x\|_0} \leq K(p)\|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p \left(\frac{\|k\|_0}{\|b\|_0} + \frac{\|E\|_p}{\|A\|_p}\right), \tag{1.30}$$

avec

$$K(p) = \left(1 - \|E\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p\right)^{-1} \tag{1.31}$$

En résumé, puisque $K(p) \geq 1$, la variation relative en x est bornée par :

1. la variation relative de A **si** b n'est pas perturbée.
2. la variation relative de b **si** A n'est pas perturbée.
3. la variation relative de A plus la variation relative de b **si** A et b sont tous deux perturbés.

Pour (1.21) on a $K(p) = 1$, alors que pour (1.28) et (1.30), $K(p)$ sera voisin de 1 si la valeur de $\|E\|_p$ est suffisamment petite.

Dans tous ces cas, on voit bien que la quantité $\|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p$, notée $\kappa_p(A)$, est la quantité prépondérante dans l'étude des perturbations de la solution du système linéaire $Ax = b$:
Si $\kappa_p(A)$ est **petite**, l'effet d'une petite perturbation de A ou de b sur la solution x sera modéré ou même négligeable, alors que sì $\kappa_p(A)$ est **très grand**, cet effet peut être considérable pour certains couples (E, k).
La majoration (1.21) est la meilleure possible, car l'égalité peut être atteinte.
Bien entendu, le fait que $\kappa_p(A)$ soit très grand n'entraîne pas que

$$\frac{\|h\|_p}{\|x\|_p}$$

soit toujours grand ; mais en général il existera des couples (E, k) pour lesquels cette perturbation relative sera inadmissible et nécessitera en pratique la prise de précautions efficaces (par exemple calcul en double précision), pour contrôler -et donc atténuer, l'effet des erreurs.

1.8 Conditionnement de matrices

Comme le cas précédent nous l'a montré, la raison qui nous amène à étudier et établir des algorithmes efficaces pour estimer le **conditionnement** d'une matrice est que dans beaucoup de problèmes matriciels, celui-ci nous donne une idée approximative de l'effet de la perturbation des données sur la solution exacte.
Le cas le plus courant en analyse numérique est le système linéaire $Ax = b$; c'est pourquoi il constituera notre unique référence dans cette section. On a vu, en général que, lorsque A et b sont tous les deux perturbés, on a :

$$\frac{\|h\|_Q}{\|x\|_Q} \leq \frac{\|A\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p}{1 - \|E\|_p \left\|A^{-1}\right\|_p} \left(\frac{\|k\|_Q}{\|b\|_Q} + \frac{\|E\|_p}{\|A\|_p} \right).$$

Ce résultat nous donne aussi, une idée assez bonne sur l'erreur dans la solution calculée $\hat{x}$, quand le système a été résolu par une méthode stable telle que la méthode de GAUSS avec pivot. Car en réalité, quand elle est appliquée pour résoudre $Ax = b$, la méthode de GAUSS nous donne une solution approchée qui satisfait le système perturbé FORTIN [2011] :

$$(A + E)\hat{x} = b, \tag{1.32}$$

où E satisfait

$$\|E\|_\infty \leq 8n^3 \rho_n \|A\|_\infty u + O\left(u^2\right), \tag{1.33}$$

où ρ_n est le facteur de croissance et u l'unité d'arrondi de l'ordinateur utilisé. Une borne rigoureuse pour l'erreur relative sur $\hat{x}$,

$$\frac{\|\hat{x} - x\|_p}{\|x\|_p}$$

peut être obtenue en utilisant (1.30) et (1.33) pourvu que $\kappa_p(A)$ ou bien une borne supérieure de celui-ci soit disponible.

Avant de mieux clarifier cela, rappelons qu'en calcul arithmétique en "virgule flottante", les ordinateurs représentent les nombres sous forme

$$x = \pm 0.d_1 d_2 \dots d_t \times \beta^c,$$

où les d_i sont des entiers en base β (par exemple $\beta = 2$), et où le nombre t, fixé une bonne fois pour toutes, par exemple par les caractéristiques de l'ordinateur, est le nombre de chiffres en base β qui représentent la mantisse de x. Par exemple les ordinateurs pour lesquels $t = 15$, représentent le nombre $x = 732.67$ en base $\beta = 2$, comme

$$x = 0.101101110010101 \times 2^{10},$$

et l'erreur commise sur x est inférieure a $2^{-1} = 2^{-15}$. Par conséquent, la solution approchéc (2.32) donnée par la méthode de GAUSS satisfait :

$$\frac{\|\hat{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \sim \beta^{-t} \kappa_p(A), \tag{1.34}$$

où

$$\frac{\|E\|_p}{\|A\|_p} \sim \beta^{-t}. \tag{1.35}$$

Maintenant supposons que $\kappa_{\mathrm{p}}(A) \sim \beta^{\mathrm{a}}$. Donc

$$\frac{\|\hat{x} - x\|_p}{\|x\|_p} \sim \beta^{\mathrm{a}-t}. \tag{1.36}$$

Théorème 1.5 *(Matrices de la forme $Id + A$)*
1. Soit une norme matricielle induite, Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Alors la matrice $Id + A$ est ***inversible*** *et*

$$\left\|(Id + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

2. Si une matrice de la forme Id $+A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***singulière****, alors $\|A\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$.*

1.8.1 Le problème des erreurs d'arrondi

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible ct $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$; supposons que les donnćes A ct b ne soient connues qu'à une erreur près.
Ceci est souvent le cas dans les applications pratiques.
Considérons par exemple le problème de la conduction thermique dans une tige métallique de longueur 1 ; on va essayer de le modéliser sur l'intervalle $[0, 1]$. Supposons que la température u de la tige soit imposée aux extrêmités, $u(0) = u_0$ et $u(1) = u_1$, et que dans la tige, elle satisfait à l'équation de conduction de la chaleur, qui s'écrit $(k(x)u'(x))' = 0$, où k est la conductivité thermique.
Cette équation différentielle du second ordre peut se discrétiser par exemple par différences finies, et donne lieu à un système linéaire de matrice A. Si la conductivité k n'est connue qu'avec une certaine précision, alors la matrice A sera également connue à une erreur près, notée δ_A. On aimerait que l'erreur

commise sur les données du modèle (ici la conductivité thermique k) n'ait pas de conséquence trop grave sur le calcul de la solution du modèle (ici la température u). Si par exemple 1% d'erreur sur k entraine 100% d'erreur sur u, le modèle ne sera pas d'une utilité ... redoutable !

L'objectif est donc d'estimer les erreurs commises sur x solution de (1.1) à partir des erreurs commises sur b et A. Notons $\delta_b \in \mathbb{R}^n$ l'erreur commise sur b et $\delta_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'erreur commise sur A. On cherche alors à évaluer δ_x

où $x + \delta_\infty$ est solution (si elle existe) du système :

$$\begin{cases} x + \delta_\infty \in \mathbb{R}^n \\ (A + \delta_A)\,(x + \delta_\infty) = b + \delta_b. \end{cases}$$

On va montrer que si δ_A "n'est pas trop grand", alors la matrice $A + \delta_A$ est inversible, et qu'on peut estimer δ_∞ en fonction de δ_A et δ_b.

1.8.2 Conditionnement et majoration de l'erreur d'arrondi

Définition 1.1 *(Conditionnement).*

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice imversible. On appelle conditionnement de A par rapport a la norme $\|\cdot\|$ le nombre réel positif cond(A) défini par :

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \left\| A^{-1} \right\|.$$

Théorème 1.6 *Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite.*

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, alors cond $(A) \geq 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, alors $\operatorname{cond}(\alpha A) = \operatorname{cond}(A)$.
3. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles, alors $\operatorname{cond}(AB) \leq \operatorname{cond}(A)\operatorname{cond}(B)$.

MODELE DE LEONTIEF 2

2.1 Introduction

L'analyse Input-Output (littéralement : analyse Entrée-Sortie) est le nom donné à un cadre analytique développé par le professeur américano-soviétique W. LEONTIEF à la fin des années trente, et en reconnaissance à ses travaux analytiques il a reçu le prix Nobel en économie -1973.
On parle souvent du modèle de LEONTIEF en se référant à cette analyse Input-Output, mais également à l'analyse interindustrielle, car l'objectif fondamental de l'analyse Input-Output est d'analyser l'interdépendance des industries dans une économie et MILLER [2009].
De nos jours, les concepts énoncés par LEONTIEF sont devenus des éléments clés pour de nombreux types d'analyses économiques, et selonBAUMOL [2000] l'analyse Input-Output est l'une des méthodes les plus appliquées en économie. Il n'était pas son précurseur et LEONTIEF lui-même a toujours été au moins suffisamment généreux en reconnaissant les origines classiques de l'analyse.
Selon lui, "l'analyse Input-Output est une extension pratique de la théorie classique de l'interdépendance générale qui considère l'ensemble de l'économie d'une région, d'un pays -et même de la planète- comme un système unique et se propose de décrire et d'interpréter son fonctionnement en termes de relations structurelles de base directement observables" (LEONTIEF, 2008).
En revanche, la découverte fondamentale qui distingue le travail de LEONTIEF de (tous) ses prédécesseurs est qu'il était pratique de calculer les coefficients d'Input-Output à partir des données, d'effectuer les calculs algébriques nécessaires, et d'utiliser les résultats pour répondre à une pléthore de questions économiques pratiques .DORFMAN [1973]
Bientôt, cela va faire presqu'un siècle depuis que W. LEONTIEF a publié son article «Quantitave Input-Output Relations in the Economic system of the United States» LEONTIEF [2008 , 1936]. Cette date marque le début de ce qui est devenu une branche majeure de l'économie quantitative. Mais les conditions pour lancer une nouvelle méthode d'analyse économique à cette époque (les années trente -qualifiées a posteriori de l'"entre-deux-guerres") étaient loin d'être propices.
En effet, KEYNES venait de publier «The General Theory», et les économistes de l'époque ont été fortement impliqués dans l'exégèse keynésienne. Et dans le but de comprendre les causes de la Grande dépression et d'en prescrire un remède, il y avait une forte concentration de la part de ces économistes sur la politique économique d'inspiration Keynésienne .

Le déclenchement de la seconde guerre mondiale a beaucoup aidé à valider certaines des hypothèses Keynésiennes, et elle a rapidement contribué à éliminer le chômage qui avait troublé les économistes durant toute une décennie.
Cependant, beaucoup d'économistes n'ont pas été convaincus que les causes profondes de la dépression avaient été extirpées.
C'est ce qui avait conduit un groupe d'économistes du Bureau of Labor Statistics à examiner comment l'analyse Input-Output pouvait contribuer à atteindre l'objectif du plein emploi. LEONTIEF lui a servi de conseiller, et une série d'articles sur les perspectives d'emploi d'après-guerre a été l'un des résultats de cette étude.
Un autre résultat fut la publication des tableaux Input-Output de l'année 1947 ; ils ont été les premiers tableaux à grande échelle. Et à partir de 1958, d'autres tableaux -complémentaires- ont été élaborés, tous les cinq ans environ, par le Bureau of economic Analysis du département du commerce aux Etats-Unis (Rose Miernyk, 1989).

Dans ce mémoire, nous présentons les fondements du modèle d'Input-Output tel que l'a développé à l'origine W. LEONTIEF.
Dans la section suivante, nous en exposons la méthodologie. Et dans une section finale, nous illustrons par quelques applications l'analyse Input-Output.

2.2 Les fondements du modèle Input-Output

2.2.1 Le tableau des Inputs-Outputs

L'information fondamentale utilisée dans l'analyse Input-Output concerne les flux de produits de chaque secteur industriel, considéré comme producteur, vers chacun des autres secteurs (y compris lui-même) considérés comme des consommateurs.
Cette information de base à partir de laquelle un modèle Input-Output est développé, est contenue dans un tableau de transactions interindustrielles.
Les lignes d'un tel tableau décrivent la répartition de l'output (extrant) d'un producteur sur l'ensemble de l'économie.
Les colonnes, quant à elles, décrivent la composition de l'Input (intrant) nécessaire à une industrie particulière pour produire son Output (sa production).
Ces échanges interindustriels de biens constituent la partie ombrée des données du tableau 1 BAUMOL [2000].

La colonne supplémentaire, intitulée demande finale, enregistre les ventes de chaque secteur sur les marchés finaux de leur production (les achats individuels des ménages et les ventes au gouvernement).

Les lignes supplémentaires, intitulées intrants primaires (non industriels), représentent les autres inputs de la production tel que le travail, la dépréciation du capital, les impôts indirects sur les entreprises (IIE) et les importations.

2.2.2 Le modèle de base

La structure mathématique d'un système Input-Output consiste en un ensemble de **n** équations linéaires à **n** inconnues, donc une représentation sous forme matricielle peut être simplement utilisée. Et, bien que la résolution

Tableau 1. Le tableau d'inputs-outputs (TES : tableau des entrées-sorties)

		Secteurs (ou industries)						Total de la demande intermédiaire $Z\mathbf{i}_n$	Demande finale (d)	Output total = Input total
		1	2	...	j	...	n			
Secteurs (ou industries)	1	z_{11}	z_{12}	...	z_{1j}	...	z_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} z_{1j}$	d_1	x_1
	2	z_{21}	z_{22}	...	z_{2j}	...	z_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} z_{2j}$	d_2	x_2
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
	i	z_{i1}	z_{i2}	...	z_{ij}	...	z_{in}	$\sum_{j=1}^{n} z_{ij}$	d_i	x_i
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
	n	z_{n1}	z_{n2}	...	z_{nj}	...	z_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} z_{nj}$	d_n	x_n
Total des intrants intermédiaires ($\mathbf{i}'_n Z$)		$\sum_{i=1}^{n} z_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} z_{i2}$	...	$\sum_{i=1}^{n} z_{ij}$	...	$\sum_{i=1}^{n} z_{in}$			
Intrants primaires (v)		v_1	v_2	...	v_i	...	v_n			
Input total = Output total		x_1	x_2	...	x_i	...	x_n			

FIGURE 2.1 – *Représentation du tableau d'Input-Output*

du système d'équations d'Input-Output soit simple d'un point de vue mathématique, nous allons découvrir par ailleurs qu'il existe des interprétations économiques intéressantes pour certains de ses résultats algébriques.

Un modèle d'Input-Output est élaboré à partir de données d'une zone économique particulière : une nation, une région, un Etat, etc. Les données requises pour construire un tel modèle, sont les flux de produits de chacun des secteurs (en tant que vendeur) vers chacun des autres secteurs (en tant qu'acheteur). Les flux interindustriels ou transactions, sont mesurés pour une période bien déterminée (généralement une année) et en termes monétaires.

Exemple 1 : la valeur en euros (e) de l'acier vendu à un constructeur automobile une année donnée.
En plus, il existe dans tous les pays des ventes aux acheteurs externes (ou exogènes) aux secteurs industriels, qui sont par exemple, les ménages, le gouvernement et le commerce extérieur.

Supposons que l'économie peut être classée en **n** secteurs. Si nous désignons par x_i l'output total (ou la production totale) du secteur i et par d_i la demande finale, on peut formuler une équation linéaire simple expliquant la façon par laquelle le secteur i distribue ses produits sur les autres secteurs (en tant que vendeurs) et à la demande finale :

$$x_i = z_{i1} + z_{i2} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + d_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + d_i \tag{2.1}$$

Les termes z_{ij} représentent les ventes interindustrielles (ventes intermédiaires) par le secteur i à tous les secteurs j (y compris lui-même lorsque $j = i$). L'équation (2.1) représente donc la distribution de 1'output du secteur i. En comptabilisant de 1 à n on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = z_{11} + z_{22} + \cdots + z_{1j} + \cdots + z_{1n} + d_1 \\ x_2 = z_{21} + z_{22} + \cdots + z_{2j} + \cdots + z_{2n} + d_2 \\ \vdots \\ x_i = z_{i1} + z_{i2} + \cdots + z_{ij} + \cdots + z_{in} + d_i \\ \vdots \\ x_n = z_{n1} + z_{n2} + \cdots + z_{nj} + \cdots + z_{nn} + d_n \end{cases} \tag{2.2}$$

Et, sous forme matricielle :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

On peut réécrire les équations du système linéaire (2.2) sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{x} = \mathrm{Z}\mathrm{i}_{\mathbf{n}} + \mathbf{d} \tag{2.4}$$

i_n désigne le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ où toutes les coordonnées sont égales à 1. Il sert de vecteur somme, lorsqu'on procède à la post-multiplication d'une matrice par i_n le produit sera un vecteur colonne dont les éléments sont les sommes des lignes de la matrice, et la prémultiplication de la transposée i'_n par une matrice le produit sera un vecteur ligne dont les éléments sont les sommes des colonnes de la matrice.

Exemple 2 : Tableau Input-Output des comptes nationaux.

Afin d'illustrer les flux dans une économie donnée, nous considérons une (petite) économie à trois secteurs. Nous présentons un tableau de flux élargi pour cette économie dans le tableau (2).
Les éléments qui constituent la demande finale d_i pour les trois secteurs (primaire, secondaire et tertiaire) sont respectivement, les achats des consommateurs (les ménages), les achats à des fins d' investissement (privé), les achats du gouvernement, et les ventes à l'étranger (exportations) .
Donc, la demande finale pour le secteur primaire est $d_1 = c_1 + i_1 + g_1 + e_1$;
pour le secteur secondaire $d_2 = c_2 + i_2 + g_2 + e_2$;
et pour le secteur tertiaire $d_3 = c_3 + i_3 + g_3 + e_3$.

Les éléments composant les payements de chaque secteur sont les rémunérations des employés (du travail, l_1, l_2 et l_3) et pour les autres services de la valeur ajoutée, on compte les services du gouvernement (impôts), le capital (payements d'intérêts), l'immobilier (loyers) ..., etc.

Nous désignons dans notre exemple l'ensemble de ces payements de la valeur ajoutée par n_1 et n_2, donc les payements totaux de la valeur ajoutée de chaque secteur sont :
$v_1 = l_1 + n_1, \quad v_2 = l_2 + n_2 \quad$ et $\quad v_3 = l_3 + n_3$.
Et si on suppose que certains secteurs utilisent des biens importés, dans ce cas nous ajoutons aux intrants primaires m_1, m_2 et m_3 les éléments à l'intersection

Tableau 2. TES des comptes nationaux pour une économie à 3 secteurs

		Secteurs			**Demande finale (d_i)**				**output(x)**
		1	**2**	**3**					
Secteurs	**1**	z_{11}	z_{12}	z_{13}	c_1	i_1	g_1	e_1	x_1
	2	z_{21}	z_{22}	z_{23}	c_2	i_2	g_2	e_2	x_2
	3	z_{31}	z_{32}	z_3	c_2	i_3	g_3	e_3	x_3
Valeur ajouté		l_1	l_2	l_3	l_C	l_I	l_G	l_E	L
		n_1	n_2	n_3	n_C	n_I	n_G	n_E	N
Import		m_1	m_2	m_3	m_C	m_I	m_G	m_E	M
Input(x')		x_1	x_2	x_3	C	I	G	E	X

FIGURE 2.2 – *Représentation du tableau TES des comptes nationaux pour une économie à 3 secteurs*

des lignes de la valeur ajoutée avec les colonnes de la demande finale représentent les payements par les consommateurs finaux (C, I, G et E) pour les services de main-d'œuvre (travail domestique l_C, les fonctionnaires de l'Etat (l_G) et pour le reste de la valeur ajoutée nous avons n_C les payements d'impôts par les ménages.
Et pour l'intersection de la ligne des importations avec les colonnes de la demande finale nous avons par exemple m_G. En additionnant les éléments de la colonne de l'output total dans l'ensemble de l'économie, nous trouvons X donné par :
$X = x_1 + x_2 + x_3 + L + N + M$.

On peut retrouver cette même valeur en additionnant sur la ligne de l'input total :
$X = x_1 + x_2 + x_3 + C + I + G + E$.
En égalisant les deux formules et en soustrayant x_1, x_2 et x_3 , on obtient :

$$\begin{aligned} L + M + N &= C + I + G + E \\ L + N &= C + I + G + (E - M) \end{aligned} \tag{2.5}$$

La partie gauche représente le revenu national brut (RNB), et la partie droite représente le produit national brut (PNB) qui est le total des dépenses en biens de consommation et d'investissements plus les achats publics et la valeur totale des exportations nettes de l'économie.

2.2.3 Le modèle de LEONTIEF

Le tableau des transactions intersectorielles (TES) est simplement une image instantanée (snapshot) des relations comptables entre les secteurs. Afin de pouvoir tirer des résultats concernant la structure de la production dans l'économie, des hypothèses solides sont avancées, et qui seront nécessaire pour relier le niveau d'output avec les quantités d'input utilisées. Déjà, l'existence de la relation entre les inputs et les outputs doit être supposée. Cela peut être fait en excluant le cas irréaliste d'une production sans aucune contribution des intrants .et PIONTKOVSKI [2011]

Les hypothèses permettant de convertir l'équation en un modèle utile dans l'analyse et la prédiction, sont :

H1 : la production de chaque produit nécessite l'utilisation d'au moins un autre produit comme intrant.

H2 (la linéarité) : la quantité d'un input requis est proportionnelle au niveau de l'output, c'est-à-dire pour tout $i(i = 1, 2, \ldots, n)$ input $t_i = a_{ij} \times$ output$_j$ où a_{ij} est un coefficient technique (appelé aussi le coefficient d'input-output) .

H3 (absence de production conjointe) : chaque technique de production ne produit qu'un seul output.

L'hypothèse de linéarité (H2) peut être reformulée comme suit : $Z_{ij} = a_{ij}x_j$, et en substituant cette expression dans (2.4) nous obtenons :

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_i + \cdots + a_{in}x_n + d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + d_i \tag{2.6}$$

En comptant de 1 jusqu'à n, on trouve :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_i + \cdots + a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_i + \cdots + a_{2n}x_n + d_2 \\ \vdots \\ x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_i + \cdots + a_{in}x_n + d_i \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_i + \cdots + a_{nn}x_n + d_n \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour reformuler ce système d'équations linéaires sous forme matricielle nous allons définir la matrice $\hat{x}$. Dans la notation d'algèbre matricielle, le chapeau sur un vecteur désigne la matrice diagonale avec les éléments du vecteur sur la diagonale principale. Par exemple on a :

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Et à partir de la définition de l'inverse, nous avons :

$$\widehat{x}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Nous avons donc :

$$A = Z \times \hat{x}^{-1} \tag{2.8}$$

En utilisant les formules (2.4) et (2.8) 1'écriture sous forme matricielle pour [2.7] sera :

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{d} \tag{2.9}$$

Et la résolution de l'output total nécessaire pour fournir l'ensemble exogène de la demande finale donne :

$$x = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{d} = \mathbf{Ld} \tag{2.10}$$

où $(I_n - A)^1 = L = [l_{ij}]$ est la matrice inverse de LEONTIEF.

Exemple 1 : Considérons une économie à deux secteurs où les échanges intersectoriels sont indiquées dans le tableau suivant.

Tableau 3. Les flux z_{ij} pour l'exemple numérique 01

		Secteurs 1	*Secteurs* 2	*Demande finale* (d_i)	*Output total* (x_i)
Secteurs	1	150	500	350	1000
	2	650	100	1700	2000
v_i		650	1400	1100	3150
Input total (x_i)		1000	2000	3150	6150

Les coefficients techniques du tableau 3 sont obtenus en divisant les flux (les éléments de la matrice Z) dans chaque colonne des secteurs producteurs par l'output total (la somme des lignes) de chaque secteur. Nous avons :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} 150 & 500 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,20 & 0,05 \end{pmatrix}$$

Et la matrice inverse $^{\sigma}$ de LEONTIEF est égale à :

$$L = (I - A)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,20 & 0,05 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0,85 & -0,25 \\ -0,20 & 0,95 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1.254125 & 0.330033 \\ 0.264026 & 1.122112 \end{pmatrix}$$

S'il n'y a pas de changement technologique, les coefficients techniques de la matrice A sont constants.
Supposons qu'il y a un changement dans la demande finale $d^{\text{new}} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1500 \end{pmatrix}$, quel doit être l'output nécessaire pour satisfaire cette nouvelle demande ?
On a :

$$x^{new} = Ld^{\text{new}} = \begin{pmatrix} 1,2541 & 0,330 \\ 0,2640 & 1,1221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1247,5247 \\ 1841,5841 \end{pmatrix}$$

Les valeurs $x_1^{\text{new}} = 1247.524752$ et $x_2^{\text{new}} = 1841.584158$ mesurent l'impact sur l'ensemble de l'économie de ce changement dans la demande finale. Avec la matrice A constante nous pouvons reconstituer le tableau 3 avec cette nouvelle demande. On a $Z = A\hat{X}^{\text{new}}$ et :

$$Z^{\text{new}} = A\hat{x}^{\text{new}} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,20 & 0,05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1247,5247} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1841,5841} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 187,1287 & 460,396 \\ 249,5049 & 92,0792 \end{pmatrix}$$

Et nous avons les résultats dans le tableau 04 :

Tableau 4. Les flux z_{ij} associés à la nouvelle demande et à x^{new}

		Secteurs 1	*Secteurs* 2	*Demande finale* (d_i)	*Output total* (x_i)
Secteurs	*1*	187,1287	187,1287	*600*	1247,5247
	2	187,1287	187,1287	*1500*	1841,5841
v_i		*810,8910*	*289,1089*	*1100*	*3150*
Input total (x_i)		1247,5247	1841,5841	*3150*	*6289,1089*

2.2.4 Les extensions du modèle de base

Le modèle de prix basé sur les données monétaires

Le modèle de base présenté dans l'équation (2.1), représente une comptabilité complète des flux de produits de base, et fournit un moyen de déterminer l'output total d'équilibre. Mais il n'y a cependant aucune mention explicite des prix. Ce qui est contraire aux modèles néoclassiques d'équilibre partiel et général, qui calculent simultanément les prix et les quantités.

L'approche Input-Output pour calculer les prix est basée sur les mêmes coefficients techniques utilisés pour les quantités. Le fait que les prix et les outputs puissent être calculés séparément est attribuable aux hypothèses particulières du modèle Input-Output de base, les hypothèses selon lesquelles les fonctions d'offre sont parfaitement élastiques et les fonctions de demande sont parfaitement inélastiques, conséquence directe des proportions d'inputs supposées fixes DORFMAN [1973].

A partir du tableau 1, nous additionnons la j^{me} colonne,

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} z_{ij} + v_j \tag{2.11}$$

Et sous forme matricielle

$$\mathbf{x}' = \mathbf{i}'\mathbf{Z} + \mathbf{v}' \tag{2.12}$$

où $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v_2} & \cdots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix}$ désigne la dépense totale de la valeur ajoutée par secteur. En substituant $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}' = \mathbf{i}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v}'$ et en post-multipliant par $\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ on obtient :

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}'\mathbf{A} + \mathbf{v}'_c \tag{2.13}$$

où $v'_c = v'\widehat{\boldsymbol{x}}^{-1} = \begin{pmatrix} v_1/x_1 & v_1/x_1 & \ldots & v_n/x_n \end{pmatrix}$.
La partie droite de (2.13) représente le coût des inputs par unité d'output. Les prix d'output sont égaux au coût total de production, de sorte que chaque prix est égal à 1 . Ceci illustre que l'unité de mesure est unique pour tous les montants qui peuvent être achetés pour une unité monétaire. Si nous notons ces prix de base par $p' = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ alors le modèle input-output de prix est :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{A} + \mathbf{v}'_c \tag{2.14}$$

Après une simplification on a :

$$\begin{gathered} \mathbf{p}'(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}'_c \\ \mathbf{p}' = \mathbf{v}'_c(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-\mathbf{1}} = \mathbf{v}'_c\mathbf{L} \end{gathered} \tag{2.15}$$

Mais souvent le modèle est exprimé en vecteurs colonnes plutôt qu'en vecteurs lignes. Dans ce cas :

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}'\right)^{-\mathbf{1}} \mathbf{v}_c = \mathbf{L}'\mathbf{v}_c \tag{2.16}$$

La logique de ce dernier modèle est que la variation des prix des inputs (des intrants primaires) conduit à des variations dans les coûts unitaires des secteurs (donc les prix d'output et non pas les quantités), via les recettes de production qui sont fixes dans la matrice **A** et par conséquent dans la matrice inverse de LEONTIEF $\boldsymbol{L}$ et sa transposée $\boldsymbol{L}'$.et MILLER [2009]

Exemple 2 : On reprend les résultats de l'exemple numérique $n°01$, et la matrice inverse de LEONTIEF L :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1,2541 & 0,330 \\ 0,2640 & 1,1221 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}' = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A}'\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,2541 & 0,2640 \\ 0,330 & 1,1221 \end{pmatrix}$$

A partir des données du tableau TES initial, nous avons $\mathbf{v}_c = \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,70 \end{pmatrix}$ et :

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}'\mathbf{v_c} = \begin{pmatrix} 1,2541 & 0,2640 \\ 0,330 & 1,1221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,65 \\ 0,70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme le prévoit le modèle de prix, sont reproduits les mêmes prix unitaires dans i'. Encore une fois, supposons que les coûts des intrants pour le premier secteur augmentent de 30% (de 0,65 à 0,845) les coûts des intrants primaires du secteur 2 restant inchangés. Le vecteur des nouveaux coûts devient $v_c^{new} = \begin{pmatrix} 0,845 \\ 0,700 \end{pmatrix}$ et :

$$\mathbf{p}^{\text{new}} = \mathbf{L}'\mathbf{v}_c^{\text{new}} = \begin{pmatrix} 1,2541 & 0,2640 \\ 0,330 & 1,1221 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,845 \\ 0,700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,245 \\ 1,064 \end{pmatrix}.$$

Par rapport au prix initial, les prix du secteur 1 augmentent de $24,5\%(1,245)$ et ceux du secteur 2 de $6,4\%$.

Le modèle de prix basé sur les données physiques

Une autre extension du modèle d'input-output de base est le modèle basé sur les quantités physiques. Les caractéristiques de cette variante peuvent être énoncées en termes d'équation d'équilibre «du côté de l'offre».
Nous définissons tout d'abord le « coefficient d'allocation» s_{ij} comme un flux d'input exprimé en termes d'une ligne, plutôt que d'une colonne. s_{ij} représente la quantité physique des biens i délivrés à j et f_i les livraisons à la demande finale. Donc nous avons la relation comptable de base en unités physiquesLEONTIEF [2008 , 1936] :

$$q_i = s_{i1} + s_{i2} + \cdots + s_{ij} + \cdots + s_{in} + f_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} + f_i \tag{2.17}$$

Sous forme matricielle :

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}\mathbf{i_n} + \mathbf{f} \tag{2.18}$$

En revanche, nous définissons les coefficients en termes physiques par $c_{ij} = \frac{s_{ij}}{a_j}$ et donc :

$$C = S\hat{q}^{-1} \tag{2.19}$$

Et $\mathbf{q} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}_\mathbf{n} + \mathbf{f} = \mathbf{C}\mathbf{q} + \mathbf{f}$ auquel cas :

$$\mathbf{q} = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{f} \tag{2.20}$$

La formule (2.20) est le modèle en termes physiques parallèle à la formule (2.10). Supposons que nous connaissons le prix unitaire de l'output de chaque secteur p_i, donc nous pouvons convertir les données de base en unités de valeur :

$$x_i = p_i q_i \tag{2.21}$$

$$z_{ij} = p_i s_{ij} \tag{2.22}$$

$$f_i = p_i d_i \tag{2.23}$$

En multipliant les deux parties par p_i, cela donne :

$$x_i = p_i \bar{q}_i = \sum_{j=1}^{n} p_i s_{ij} + p_i f_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} + d_i \tag{2.24}$$

C'est la relation comptable initiale représentée par (2.1) et sous forme matricielle $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{i_n} + \mathbf{d}$ (formule (2.4)). Et, en termes de colonnes :

$$p_j q_j = \sum_{i=1}^{n} p_i s_{ij} + v_j \tag{2.25}$$

En divisant les deux parties de (2.25) par q_j $\left(q_j \neq 0\right)$ on obtient :

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i s_{ij}}{q_j} + \frac{v_j}{q_j} = \sum_{i=1}^{n} p_i c_{ij} + \frac{v_j}{q_j} \tag{2.26}$$

qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}'\mathbf{C} + \mathbf{v}'_\mathbf{c} \tag{2.27}$$

où $p' = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}'_\mathbf{c}$ représente le coût d'input (travail ou capital) par unité d'output en termes physiques. Et en développant (2.26) nous obtenons :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{v}'_\mathrm{c} \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}'\right)^{-1} \tag{2.28}$$

Et comme on a fait précédemment pour [16], nous pouvons transposer (2.27) pour avoir les prix dans un vecteur colonne au lieu d'un vecteur ligne :

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p} + \mathbf{v_c} \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}'\right)^{-1} \mathbf{v_c} \tag{2.29}$$

Enfin, nous pouvons déduire la relation entre **A** et **C** :

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{x_j} = \frac{p_i s_{ij}}{p_j q_j} = c_{ij} \left(\frac{p_i}{p_j}\right) \tag{2.30}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} = \widehat{\mathbf{p}} S (\widehat{\mathbf{p}})^{-1} = \widehat{\mathbf{p}}\mathbf{C}\widehat{\mathbf{q}} \left(\widehat{\mathbf{q}}^{-1}\widehat{\mathbf{p}}^{-1}\right) = \widehat{\mathbf{p}}\mathbf{C}^{-1} \tag{2.31}$$

2.3 Les liens dans un modèle input-output

Dans le cadre d'un modèle input-output, la production d'un secteur particulier a deux effets économiques sur le reste des secteurs.
D'une part, si le secteur j par exemple, augmente sa production, cela signifie qu'il y aura une demande de plus pour ce secteur (en tant qu'acheteur) sur les biens des autres secteurs lesquels sont utilisés comme des inputs (des intrants) pour produire dans le secteur j.
C'est le sens de causalité des modèles dits « du côté de la demande », et le terme « lien en amont » (backward linkage) est utilisé pour indiquer ce type d'interconnexion d'un secteur donné avec les autres secteurs (en amont) auprès desquels il achète ses intrants.
D'autre part, une augmentation de la production dans le secteur j signifie aussi que des quantités supplémentaires du produit j sont disponible pour être utilisées comme intrants dans d'autres secteurs, c'est-à-dire qu'il y aura

une augmentation des approvisionnements du secteur j (en tant que vendeur) pour les secteurs qui utilisent le bien j dans leur production.
C'est le sens de la causalité dans les modèles dits « du côté de l'offre ».
Le terme « lien en aval » (forward linkage) est utilisé pour désigner ce type d'interconnexion d'un secteur donné avec le reste des secteurs (en aval) auxquels il vend son output et MILLER [2009]

Dans la matrice inverse de LEONTIEF L, chaque secteur est directement et indirectement lié à tous les autres secteurs.
Pour chaque secteur i, ces liens sont divisés en deux types différents : «les liens en amont» (backward linkages) décrivant les apports économiques directs et indirects des autres secteurs dans le secteur i, et «les liens en aval» décrivant les apports économiques directs et indirects du secteur i dans tous les autres secteurs.
«Les liens en amont» du secteur i sont associés à la colonne i et «les liens en aval» sont associés à la ligne i de la matrice inverse de LEONTIEF L.
Par conséquent, l'intensité globale des liens en amont et en aval du secteur i peut être mesurée en calculant la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne et de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice inverse de LEONTIEF.
Ainsi, les multiplicateurs de colonnes et de lignes de la matrice inverse de LEONTIEF $m = \|\ell_{ij}\|$ peuvent être définis comme :

$$mc_j = \sum_{i=1}^{n} \ell_{ij}; mr_i = \sum_{j=1}^{n} \ell_{ij}$$

En notation vectorielle, le vecteur ligne des multiplicateurs de colonne et le vecteur colonne des multiplicateurs de ligne peuvent être présentés comme suit :

$$mc = \begin{pmatrix} mc_1 & mc_2 & \cdots & mc_n \end{pmatrix}; \quad mr = \begin{pmatrix} mr_1 \\ mr_2 \\ \vdots \\ mr_n \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

L'intensité globale des liens en amont et en aval de la matrice inverse de LEONTIEF, est égale à la somme des multiplicateurs de colonne ou la somme des multiplicateurs de ligne :

$$V = \sum_{j=1}^{n} mc_j = \sum_{i=1}^{n} mr_i = \sum_{i,j=1}^{n} \ell_{ij} \tag{2.33}$$

Et le multiplicateur moyen est égal à $\frac{v}{n}$. Ces caractéristiques peuvent être utilisées pour identifier les secteurs clés, ceux qui créent un impact supérieur à la moyenne sur le reste de 1'économie. Deux principaux indices ont été proposés :

• La puissance de la dispersion pour les liens en amont : elle mesure le degré auquel un changement dans le secteur de référence est supérieur à la moyenne de tous les secteurs ;

$$BL_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell_{ij} / \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \ell_{ij} = n \times mc_j / V \tag{2.34}$$

• La sensibilité de la dispersion pour les liens en aval : elle mesure le degré auquel un changement dans la demande finale de tous les secteurs crée une augmentation de l'output dans le secteur de référence supérieure à la moyenne :

$$Fl_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ell_{ij} / \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \ell_{ij} = n \times mr_i / V \tag{2.35}$$

De plus, la somme de tous les liens en amont et la somme de tous les liens en aval sont égales à n, et la moyenne est égale à 1.

Exemple numérique 2 : Considérons une économie à cinq secteurs où les ventes intersectorielles (les secteurs vendent les uns aux autres) et les outputs totaux sont indiqués dans le tableau suivant :

Tableau 5. Les flux z_{ij} pour l'exemple numérique 02

	S1	S2	S3	S4	S5	C	G	EX	d_i	output
S1	21	0	9	3	0	15	15	22	67	100
S2	1	8	7	29	0	7	7	23	55	100
S3	3	20	0	50	7	9	9	6	20	100
S4	31	2	38	0	3	13	13	1	26	100
S5	10	25	26	1	4	19	19	6	34	100
va	20	40	10	0	56	77	62			
Imp	14	5	10	0	46	77	55			
input	100	100	100	100	100	160	180			

Tableau 6. Les flux z_{ij} pour l'exemple numérique 01

	1	2	3	4	5	*mr*	FL_i
1	1.33	0.05	0.18	0.15	0.02	1.73	0.69
2	0.23	1.17	0.30	0.50	0.04	2.24	0.89
3	0.40	0.36	1.41	0.82	0.13	3.11	1.23
4	0.58	0.19	0.61	1.38	0.09	2.84	1.13
5	0.31	0.41	0.48	0.38	1.09	2.68	1.06
mc	2.84	2.18	2.99	3.22	1.36	V=12.59	
BL_j	1.13	0.86	1.19	1.28	0.54		

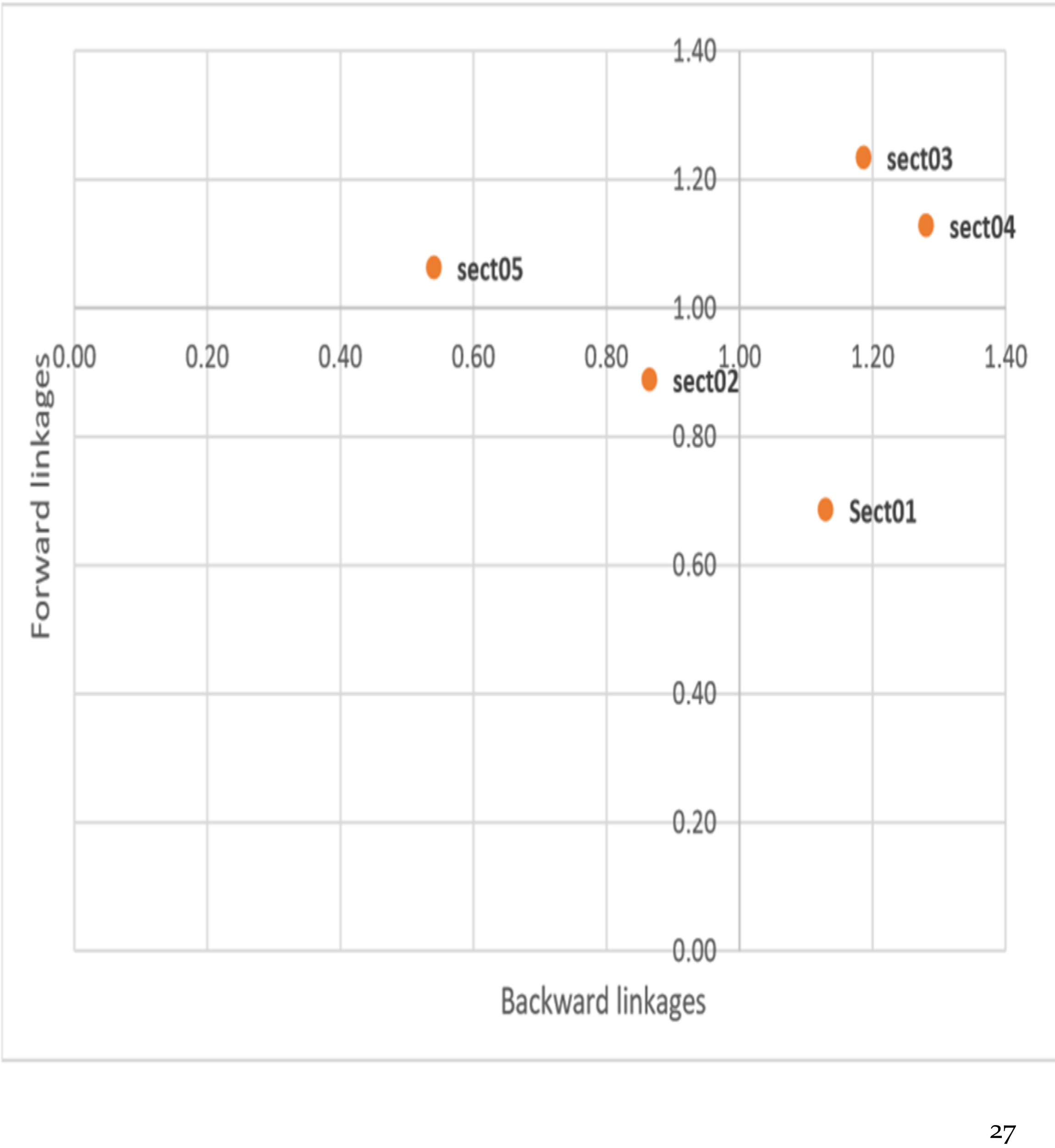
Une interprétation habituelle des résultats du tableau 6 est qu'un indice de lien en amont supérieur à 1 $(BL_j > 1)$ indique que le multiplicateur de colonne correspondant mc_j est supérieur à la moyenne des multiplicateurs colonnes, ce qui fait qu'un changement d'une unité dans la demande finale du secteur j créera une augmentation supérieure à la moyenne de l'économie.
De même, pour l'indice de lien en aval $(FL_i > 1)$, le multiplicateur de ligne correspondant FL_i est supérieur à la moyenne des lignes, ce qui fait qu'un changement d'une unité dans la demande finale de tous les secteurs (y compris le secteur i lui-même) va créer une augmentation supérieure à la moyenne du secteur i.

En utilisant une classification des liens en amont et en aval, nous pouvons diviser les secteurs en quatre groupes :

(i) le secteur i est considéré comme un secteur « clé» ou « important si $BL_j > 1$ et $FL_i > 1$.
(ii) le secteur i est considéré comme un secteur «orienté vers les liens en amont» si $BL_j > 1$ et $FL_i < 1$.
(iii) le secteur i est considéré comme un secteur « orienté vers les liens en aval» si $BL_j < 1$ et $FL_i > 1$.
(iv) le secteur i est considéré comme un secteur « faible » si à la fois $BL_j < 1$ et $FL_i < 1$.

La figure 1 présente une illustration graphique des définitions présentées ci-dessus, où chaque secteur i est représenté par le point i avec ses coordonnées (BL_i, FL_i). D'après la représentation graphique, il existe deux secteurs clés (les secteurs 3 et 4), un secteur orienté vers les liens en aval (secteur 5), un secteur orienté vers les liens en amont (secteur 1) et un secteur avec une faible orientation (secteur 2).

Figure 1. Classification des secteurs.



L'intérêt pour l'analyse Input-Output s'est rapidement répandu dans le monde occidental après la seconde guerre mondiale. Depuis lors, son utilisation (l'analyse Input-Output) n'est pas propre au monde occidental où l'économie est guidée principalement par le marché, mais elle est utilisée surtout dans des économies planifiées lorsqu'une planification centrale* est nécessaire.

(*) Différente de l'économie centralisée : Dans la théorie de la planification centralisée, les entreprises sont soumises au contrôle absolu de l'Etat que ce soit pour les usines, les machines et l'ensemble de la direction de l'entreprise. Les acteurs du marché sont totalement absents. La production et la distribution sont entièrement aux mains de l'État.

3 Notions sur le langage R

3.1 Intoduction

Pour utiliser un langage de programmation, il faut en connaître la syntaxe et la sémantique, du moins dans leurs grandes lignes.
Ce chapitre introduit des notions de base du langage R telles que l'expression, l'affectation et l'objet.
Le concept de vecteur se trouvant au cœur du langage, le chapitre reprend les notions de création et de manipulation des vecteurs et autres types d'objets de stockage couramment employés en programmation en R.

3.2 Commandes R

L'utilisateur de R interagit avec l'interprète R en entrant des instructions à l'invite de commande. Toute commande R est soit une expression, soit une affectation.
Normalement, une expression est immédiatement évaluée et le résultat est affiché à l'écran :

```
> 2 + 3
[1] 5
> pi
[1] 3.141593
> cos(pi/4)
[1] 0.7071068
```

Lors d'une affectation, une expression est évaluée, mais le résultat est stocké dans un objet (variable) et rien n'est affiché à l'écran. Le symbole d'affectation est <-, c'est-à-dire les deux caractères < et - placés obligatoirement l'un à la suite de l'autre :

```
> a <- 5
> a
[1] 5
> b <- a
> b
[1] 5
```

Pour affecter le résultat d'un calcul dans un objet et simultanément afficher ce résultat, il suffit de placer l'affectation entre parenthèses pour ainsi créer une nouvelle expression :

$> (a < - \quad 2+3)$
[1]5

- Le symbole d'affectation inversé $\rightarrow$ existe aussi, mais il est rarement utilisé.
- Éviter d'utiliser l'opérateur = pour affecter une valeur à une variable puisque cette pratique est susceptible d'engendrer de la confusion avec les constructions nom = valeur dans les appels de fonctions.

On sépare les commandes R les unes des autres par un point-virgule ou par un retour à la ligne, c'est-à-dire de placer des points-virgules à la fin de chaque ligne de code.

Le point-virgule peut être utile pour séparer deux courtes expressions ou plus sur une même ligne :

$> a < -5; a+2$
[1]7

C'est le seul emploi que l'on rencontrera du point-virgule en R. On peut regrouper plusieurs commandes en une seule expression en les entourant d'accolades {} . Le résultat du regroupement est la valeur de la dernière commande :

$> \{$
$+ \quad a < -2+3$
$+ \quad b < -a$
$+\}$

Par conséquent, si le regroupement se termine par une assignation, aucune valeur n'est retournée ni affichée à l'écran.

$> \{$
$+ \quad a < -2+3$
$+ \quad b < -a$
$+\}$

Ces règles jouent un rôle important dans la composition de fonctions .

Lorsqu'une commande n'est pas complète à la fin de la ligne, l'invite de commande de *R* change de >␣à +␣ pour nous inciter à la compléter.

3.3 Conventions pour les noms d'objets

Les caractères permis pour les noms d'objets sont les lettres minuscules a-z et majuscules A-Z, les chiffres 0-9, le point «.» et le caractère de soulignement (_).

Selon l'environnement linguistique de l'ordinateur, il peut être permis d'utiliser des lettres accentuées, mais cette pratique est fortement déconseillée puisqu'elle risque de nuire à la portabilité du code.

- Les noms d'objets ne peuvent commencer par un chiffre.
- S'ils commencent par un point, le second caractère ne peut être un chiffre.
- Le langage R est sensible à la casse, ce qui signifie que foo, Foo et Foo sont trois objets distincts. Un moyen simple d'éviter des erreurs liées à la casse consiste à n'employer que des lettres minuscules.

- Certains noms sont utilisés par le système R, aussi il vaut mieux éviter de les utiliser. En particulier, éviter d'utiliser : c, q, t, C, D, I, diff, length, mean, pi, range, var.
- Certains mots sont réservés et il est interdit de les utiliser comme noms d'objets. Les mots réservés par le système sont :
break, else, for, function, if, in, next, repeat, return, while, TRUE, FALSE, Inf, NA, NaN, NULL, NA$_{i}nteger_{,}NA_{r}eal_{,}NA_{c}omplex, NA_{c}haracter_{,}\ldots$, $\ldots 1$, $\ldots 2, etc.$

- Les variables T et F prennent par défaut les valeurs TRUE et FALSE, respectivement, mais peuvent être réaffectées :

```
> T
[1]TRUE
> F
[1]FALSE
```

```
> TRUE <- 3
Error in TRUE <- 3 : membre gauche de
l'assignation (do_set)incorrect
```

```
> (T < −3)
[1]3
```

- Nous recommandons de toujours écrire les valeurs booléennes TRUE et FALSE en long pour éviter des bogues difficiles à détecter.

3.4 Les objets R

Tout dans le langage R est un objet : les variables contenant des données, les fonctions, les opérateurs, même le symbole représentant le nom d'un objet est lui-même un objet. Les objets possèdent au minimum un mode et une longueur et certains peuvent être dotés d'un ou plusieurs attributs

- Le mode d'un objet est obtenu avec la fonction mode :

```
> v < -c(1,2,5,9)
> mode (v)
[1]"numeric"
```

- La longueur d'un objet est obtenue avec la fonction length :

```
> length(v)
[1]4
```

3.4.1 Modes et types de données

Le mode prescrit ce qu'un objet peut contenir. À ce titre, un objet ne peut avoir qu'un seul mode.

- Les objets de mode "numeric", "complex", "logical" et "character" sont des objets simples (atomic en anglais) qui ne peuvent contenir que des données d'un seul type.

- En revanche, les objets de mode "list" ou "expression" sont des objets récursifs qui peuvent contenir d'autres objets. Par exemple, une liste peut contenir une ou plusieurs autres listes.

- La fonction typeof permet d'obtenir une description plus précise de la représentation interne d'un objet (c'est-à-dire au niveau de la mise en oeuvre en C). Le mode et le type d'un objet sont souvent identiques.

3.4.2 Longueur

La longueur d'un objet est égale au nombre d'éléments qu'il contient.
- La longueur, au sens R du terme, d'une chaîne de caractères est toujours 1. Un objet de mode character doit contenir plusieurs chaînes de caractères pour que sa longueur soit supérieure à 1 :

```
> v1 < - "actuariat"
> length(v1)
[1]1
> v2 < -c( "a", "c", "t", "u", "a", "r", "i",
"a", "t")
> length (v2)
[1]9
```

Il faut utiliser la fonction nchar pour obtenir le nombre de caractères dans une chaîne :

```
> nchar (v1)
[1]9
> nchar (v2)
[1]11111111
```

- Un objet peut être de longueur 0 et doit alors être interprété comme un contenant qui existe, mais qui est vide :

```
> v <- numeric (0)
> length(v)
[1]0
```

3.4.3 Objet spécial NULL

L'objet spécial NULL représente « rien », ou le vide.
- Son mode est NULL.
- Sa longueur est 0.
- Toutefois différent d'un objet vide :
- un objet de longueur 0 est un contenant vide ;
- NULL est « pas de contenant ».
- La fonction is.null teste si un objet est NULL ou non.

3.5 Vecteurs

En R, à toutes fins pratiques, tout est un vecteur. Contrairement à certains autres langages de programmation, il n'y a pas de notion de scalaire en R ; un scalaire est simplement un vecteur de longueur 1 . Comme nous le verrons au chapitre 3 , le vecteur est l'unité de base dans les calculs.
- Dans un vecteur simple, tous les éléments doivent être du même mode. Nous nous restreignons à ce type de vecteurs pour le moment.
- Les fonctions de base pour créer des vecteurs sont :
c (concaténation) ;
numeric (vecteur de mode numerique) ;
logical (vecteur de mode logique) ;
character (vecteur de mode caractère).

- Il est possible (et souvent souhaitable) de donner une étiquette à chacun des éléments d'un vecteur.

```
> (v <- c(a = 1, b = 2, c = 5))
a b c
1255
> v <- c(1,2,5)
> names (v) <- c ("a","b","c")
> v
a b c
125
```

Ces étiquettes font alors partie des attributs du vecteur.

- L'indiçage dans un vecteur se fait avec les crochets [ ]. On peut extraire un élément d'un vecteur par sa position ou par son étiquette, si elle existe (auquel cas cette approche est beaucoup plus sûre).

```
> v[3]
c 5
> v ["c"]
C
5
```

3.6 Matrices et tableaux

- Les matrices et tableaux ne sont rien d'autre que des vecteurs dotés d'un attribut dim. Ces objets sont donc stockés, et peuvent être manipulés (exactement) comme des vecteurs simples.
- Une matrice est un vecteur avec un attribut dim de longueur 2. Cela change implicitement la classe de l'objet pour "matrix" et, de ce fait, le mode d'affichage de l'objet ainsi que son interaction avec plusieurs opérateurs et fonctions.
- La fonction de base pour créer des matrices est matrix :

```
> matrix (1 : 6, n row = 2, ncol = 3)
[,1][,2][,3]
 [1,]  1  3  5
 [2,]  2  4  6
```

```
> matrix (1 : 6, nrow = 2, ncol = 3, byrow = TRUE )
[,1]  [,2]  [,3]
 [1,]  1  2  3
 [2,]  4  5  6
```

- La généralisation d'une matrice à plus de deux dimensions est un tableau (array) Le nombre de dimensions du tableau est toujours égal à la longueur de l'attribut dim. La classe implicite d'un tableau est "array".

```
> array(1 : 24, dim = c(3, 4, 2))
, , 1
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    4    7   10
[2,]    2    5    8   11
[3,]    3    6    9   12
, 2
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   13   16   19   22
[2,]   14   17   20   23
[3,]   15   18   21   24
```

L'ordre de remplissage inhabituel des tableaux rend leur manipulation difficile si on ne les visualise pas correctement. Imaginons un tableau de dimensions 3 4 5.
- Il faut voir le tableau comme cinq matrices 3 4 (remplies par colonnes !) les unes derrière les autres.
- Autrement dit, le tableau est un prisme rectangulaire haut de 3 unités,large de 4 et profond de 5.
- Si l'on ajoute une quatrième dimension, cela revient à aligner des prismes les uns derrière les autres, et ainsi de suite.
Comme pour les vecteurs, l'indiçage des matrices et tableaux se fait avec les crochets [ ].

- On extrait un élément d'une matrice en précisant sa position dans chaque dimension de celle-ci, séparées par des virgules :
- On peut aussi ne donner que la position de l'élément dans le vecteur sous-jacent :

```
>m[3]
 [1] 45
```

- Lorsqu'une dimension est omise dans les crochets, tous les éléments de cette dimension sont extraits :

```
    >m[2,,
[1] 80 21 32
```

- Les idées sont les mêmes pour les tableaux.

Des fonctions permettent de fusionner des matrices et des tableaux ayant au moins une dimension identique.
- La fonction "rbind" permet de fusionner verticalement deux matrices (ou plus) ayant le même nombre de colonnes.
- La fonction "cbind" permet de fusionner horizontalement deux matrices (ou plus) ayant le même nombre de lignes.

```
>n<-matrix(1 : 4, nrow=2)
            >cbind(m, n)

      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]  [,5]
[1,]   40    45    55     1     3
[2,]   80    21    32     2     4
```

3.7 Listes

La liste est le mode de stockage le plus général et polyvalent du langage R. Il s'agit d'un type de vecteur spécial dont les éléments peuvent être de n'importe quel mode, y compris le mode list. Cela permet donc d'emboîter des listes, d'où le qualificatif "*rcursif*" pour ce type d'objet.

- La fonction de base pour créer des listes est list :

```
> (x < −list(size = c(1,5,2), user =  "Joe", new  =  TRUE ) )
$size
[1] 152
$user
[1] "Joe"
$new
[1] TRUE
```

Ci-dessus, le premier élément de la liste est de mode "numeric", le second de mode "character" et le troisième de mode "logical".
Il est recommandé de nommer les éléments d'une liste. En effet, les listes contiennentsouvent des
De plus, comme nous le verrons ci-dessous, il est très simple d'extraire des éléments d'une liste p
La liste demeure un vecteur. On peut donc l'indicer avec l'opérateur [ ].
Cependant, cela retourne une liste contenant le ou les éléments indicés. Ce qui est rarement ce qu
Pour indicer un élément d'une liste et n'obtenir que cet élément, et non une liste contenant l'élém
Comparer

```
> x [1]
$size
[1]  152
```

Évidemment, on ne peut extraire qu'un seul élément à la fois avec les crochets doubles [[ ]].

- Petite subtilité peu employée, mais élégante : si l'indice utilisé dans [[ ]] est un vecteur, il est utilisé récursivement pour indicer la liste : cela sélectionnera la composante de la liste correspondant au premier élément du vecteur, puis l'élément de la composante correspondant au second élément du vecteur, et ainsi de suite.

Une autre façon - la meilleure, en fait - d'indicer un seul élément d'une liste est par son étiquette avec l'opérateur :

```
> x$ size
[1]152
```

La fonction "unlist" convertit une liste en un vecteur simple. Elle est surtout utile pour concaténer les éléments d'une liste lorsque ceux-ci sont des scalaires.
Attention, cette fonction peut être destructrice si la liste est assez longue.

3.8 Exemple d'Application

On considère une économie constituée des secteurs du charbon, de l'énergie électrique et de l'acier. La production de chaque secteur est répartie sur les divers secteurs, conformément au tableau 1. Dans chaque colonne de ce tableatu, les chiffres donnent la proportion de la production totale d'un secteur donné.
On peut lire par exemple dans la deuxième colonne du tableau 1 que la production électrique totale se répartit ainsi :
40% pour le secteur du charbon,
50% pour l'acierie
et les 10% restants pour la production électrique (ces 10% sont considérés par ce secteur comme une dépense qu'il doit supporter pour fonctionner).
Puisque toute la production est prise en compte, le total des valeurs de chaque colonne doit être égal à 1.

On note respectivement p_C, p_E et p_A les prix (c'est-à-dire les valeurs en euros) de la production totale des secteurs du charbon, de l'électricité et de l'acier.
Intéressons-nous à déterminer les prix d'équilibre calculés de façon que les revenus de chaque secteur compensent exactement ses dépenses.

TABLEAU 5 (Une économie simplifiée)

Répartition de la production provenant des différents secteurs			
Charbon	Électricité	Acier	Acheté par
$0,0$	$0,4$	$0,6$	Charbon
$0,6$	$0,1$	$0,2$	Électricité
$0,4$	$0,5$	$0,2$	Acier

Chaque secteur va examiner sa colonne dans le tableau 5 pour savoir comment se répartit sa production, ainsi que sa ligne pour savoir ce dont il a besoin (pour se le procurer).
On lit, par exemple, dans la première ligne du tableau 1 que l'industrie charbonnière reçoit (et paye) 40% de la production électrique et 60% de l'acier. Comme les valeurs respectives des productions totales de ces secteurs sont p_E et p_A, l'industrie charbonnière doit dépenser $0,4p_E$ euros pour sa part de production électrique et $0,6p_A$ pour sa part d'acier.
La dépense totale du secteur charbonnier est donc égale à $0,4p_E + 0,6p_A$.
Par hypothèse, le revenu p_C de ce même secteur doit être égal à ses dépenses,

on peut donc écrire l'équation :

$$p_{\mathrm{C}} = 0,4 p_{\mathrm{E}} + 0,6 p_{\mathrm{A}}. \qquad (1)$$

La deuxième ligne du tableau des échanges montre que le secteur de l'électricité dépense $0,6p_{\mathrm{C}}$ pour le charbon, $0,1p_{\mathrm{E}}$ pour l'électricité et $0,2p_{\mathrm{A}}$ pour l'acier.
L'hypothèse d'équilibre dépenses/recettes s'écrit donc :

$$p_{\mathrm{E}} = 0,6 p_{\mathrm{C}} + 0,1 p_{\mathrm{E}} + 0,2 p_{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Enfin, la troisième ligne du tableau conduit à la relation :

$$p_{\mathrm{A}} = 0,4 p_{\mathrm{C}} + 0,5 p_{\mathrm{E}} + 0,2 p_{\mathrm{A}}. \qquad (3)$$

Pour résoudre le système constitué des équations (1), (2) et (3), on fait passer toutes les inconnues dans le premier membre et on triangularise, par la méthode de GAUSS, le système augmenté obtenu

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{C}} - 0,4p_{\mathrm{E}} - 0,6p_{\mathrm{A}} &= 0 \\ -0,6p_{\mathrm{C}} + 0,9p_{\mathrm{E}} - 0,2p_{\mathrm{A}} &= 0 \\ -0,4p_{\mathrm{C}} - 0,5p_{\mathrm{E}} + 0,8p_{\mathrm{A}} &= 0 \end{aligned}$$

On procède ensuite à la réduction à une forme échelonnée. Pour simplifier, on a arrondi les coefficients à deux chiffres décimaux.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0,9 & -0,2 & 0 \\ -0,4 & -0,5 & 0,8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & -0,66 & 0,56 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 0.6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 0.4L_1 \end{array} \right.$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0,66 & -0,56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \; L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -0,4 & -0,6 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \; L_2 \leftarrow L_2 / 0.66 \right.$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,94 & 0 \\ 0 & 1 & -0,85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \; L_1 \leftarrow L_1 + 0.4L_2 \right.$$

La solution générale est donc $p_{\mathrm{C}} = 0,94p_{\mathrm{A}}$, $p_{\mathrm{E}} = 0,85p_{\mathrm{A}}$ et p_{A} quelconque. Le vecteur d'équilibre de cette économie est de la forme

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{C}} \\ p_{\mathrm{E}} \\ p_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94p_{\mathrm{A}} \\ 0,85p_{\mathrm{A}} \\ p_{\mathrm{A}} \end{bmatrix} = p_{\mathrm{A}} \begin{bmatrix} 0,94 \\ 0,85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De tout choix (positif) pour p_A résulte un choix de prix d'équilibre. Si l'on prend par exemple pour p_{A} la valeur 100 (ou 100 millions d'euros), alors $p_{\mathrm{C}} = 94$ et $p_{\mathrm{E}} = 85$. Les recettes et les dépenses de chaque secteur seront égales si la production de charbon est vendue 94 millions d'euros, celle d'électricité 85 millions et celle de l'acier 100 millions.

Exemple2 : Le modèle de **LEONTIEF**
Dans un pays donné, l'économie dépend de trois secteurs : l'agriculture, les biens manufacturés et l'énergie. Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de sa production, une partie de la production des deux autres secteurs et doit satisfaire à la demande (besoins) de la population.

Ces échanges interindustriels sont représentés dans le tableau suivant où l'unité de production est le milliard (M) de l'unité monétaire.

	consommation				
	Agriculture	Biens	Énergie	Besoins de la population	
	1 unité d'agriculture	0,2	0	0	13,2 (unités d'agriculture)
	1 unité de biens	0,1	0,12	0,08	17,6 (unités de biens)
	1 unité d'énergie	0,05	0,08	0,12	1,8 (unités d'énergie)

On suppose que l'économie est équilibrée : la production totale de ces trois secteurs couvre les besoins intérieurs et extérieurs.
1) On note x le nombre d'unités produites par le secteur de l'agriculture, y celui d'unités produites par le secteur des biens manufacturés et z celui d'unités produites par le secteur de l'énergie.

Expliquons l'équation $0,1x + 0,12y + 0,08z + 17,6 = y$:

La production de y unités de biens nécessite $0,1 \times x$ unités d'agriculture, $0,12 \times y$ unités de biens et $0,08 \times z$ unités d'énergie. (Demande interne).
Cette production doit satisfaire cette demande interne et la demande externe de 17,6 unités de biens. D'où :

$$y = (0,1x + 0,12y + 0,08z) + 17,6.$$

2) On peut écrire un système de trois équations (à 3 inconnues) traduisant ce tableau d'échanges interindustriels.

$$\begin{cases} x = 0,2x + 13,2 \\ y = 0,1x + 0,12y + 0,08z + 17,6 \\ z = 0,05x + 0,08y + 0,12z + 1,8 \end{cases}$$

3) Par suite, la matrice carrée A telle que $A \times P + D = P$ (*)

où $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,12 & 0,08 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix}$$

ainsi, on a :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,12 & 0,08 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13,2 \\ 17,6 \\ 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x + 13,2 \\ 0,1x + 0,12y + 0,08z + 17,6 \\ 0,05x + 0,08y + 0,12z + 1,8 \end{pmatrix}$$

Comme, (d'après le système) :
$\begin{pmatrix} 0,2x + 13,2 \\ 0,1x + 0,12y + 0,08z + 17,6 \\ 0,05x + 0,08y + 0,12z + 1,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'égalité (*) est vérifiée.

4) Maintenant, on a l'équivalence

$$A \times P + D = P \iff (I_3 - A) \times P = D$$

où I_3 est la matrice Identité d'ordre 3 .

En soustrayant $\mathrm{A} \times \mathrm{P}$ aux deux membres, et, en factorisant P à droite -en n'oubliant pas que $\mathrm{I}_3 \times \mathrm{P} = \mathrm{P}$, on obtient :

$$\begin{array}{lll} A \times P + D = P & \text{équivaut à} & D = P - A \times P \\ & \text{équivaut à} & D = I_3 \times P - A \times P \\ & \text{équivaut à} & D = (I_3 - A) \times P \end{array}$$

5) A présent, posons $L = I_3 - A$ (matrice de LEONTIEF)
À l'aide d'un calcul simple, écrivons L^{-1} (les coefficients sont donnés sous forme fractionnaire)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,12 & 0,08 \\ 0,05 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0,88 & -0,12 \\ -0,05 & -0,92 & 0,88 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ \frac{115}{768} & \frac{55}{48} & \frac{5}{48} \\ \frac{65}{78} & \frac{5}{48} & \frac{55}{48} \end{pmatrix}$$

6) A ce stade, on se pose la question d'intérêt suivante : quelle doit être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?
On a :

$$L \times P = D$$

,
soit :

$$P = L^{-1} \times D$$

On résout l'équation matricielle en calculant $L^{-1} \times D$
$x = 16,5$; $y = 22,330$ et $z = 5,013$ en milliards d'unités monétaires.

7) Enfin, supposons que pour l'année suivante, la demande intérieure n'est pas modifiée mais que la demande extérieure est donnée par :

Besoinsdelapopulation
10,2 (unités d'agriculture)
18,5 (unités de biens manufacturés)
2 (unité d'énergie)

Reprenons la question précédente : quelle devra être la production de chaque secteur pour que l'économie soit équilibrée ?
Pour ce faire, dans la dernière équation, il suffit de poser :
$D = \begin{pmatrix} 10,2 \\ 18,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de calculer $L^{-1} \times D$
ce qui nous donne :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{51}{4} \\ \frac{5871}{256} \\ \frac{1301}{256} \end{pmatrix}.$$

Conclusion générale

On s'est intéressé dans ce travail au modèle économique développé par le Professeur W. LEONTIEF.
Il date des années quarante du siècle dernier, il est donc relativement ancien, mais sa formulation en tant que modèle linéaire fait sa notoriété puisque de nos jours, son étude est jumelée à la puissance de l'informatique intimement liée à l'algèbre linéaire (et matricielle notamment) sous-jacente.
En plus de l'économie, des applications en industrie et ingénierie sont très variées. Il n'est qu'à voir le nombre de ressources l'utilisant.
On a pu dérouler le modèle de LEONTIEF sur quelques exemples simples de jeux de données. Pour chacun d'eux, on a écrit un modèle linéaire décrivant l'interconnexion de ces données ; on a pu dérouler un exemple en code R et interprété les résultats de son/leur analyse par le modèle de LEONTIEF.

Quelques extensions de ce modèle peuvent elles être envisagées ? on s'est demandé si on peut appliquer ce modèle à des données multidimensionnelles, du genre de celles qu'on rencontre en pratique telles que les données discrètes ou des chroniques (séries temporelles) puisque la puissance des ordinateurs actuellement permet de traiter de très grands ensembles de données de diverses nature et complexité.
D'ailleurs, beaucoup de chercheurs et ingénieurs de divers horizons étudient et analysent des données par des modèles mathématiques mettant en jeu de très grandes quantités de chiffres, qu'on essaye de rendre linéaires quand cela est possible.

On espère avoir, au terme de ce travail, apporté une certaine contribution en vue de vulgariser le modèle de LEONTIEF et remis au goût du jour, un modèle quelque peu ancien et qui était à une certaine époque, la chasse gardée des milieux financiers uniquement.

Il est à espérer qu'il constituera une piste de décollage pours de futurs utilisateurs ou d'analystes de données dans les divers domaines ou le recueil de statistiques chiffrées induit des matrices de grandes dimensions et souvent creuses (et donc -probablement- plutôt mal conditionnées).

Bibliographie

BAUMOL. Leontief's great leap forward : Beyond quesnay, marx and von bortkiewicz. economic systems research, 12(2), 141152. 2000.

DORFMAN. Wassily leontief's contribution to economics. the swedish journal of economics, 75(4), 430. 1973.

BLAIR et MILLER. Input-output analysis : Foundations and extensions (2nd ed.). cambridge : Cambridge university press. 2009.

LESKEROV ; ERSEL et PIONTKOVSKI. Linear model of production in a classical setting. in : Linear algebra for economists. springer texts in business and economics. springer, berlin, heidelberg. 2011.

FORTIN. Analyse numérique pour ingénieurs, (4 eme edition). 2011.

LEONTIEF. Input-output analysis. in : Palgrave macmillan (eds) the new palgrave dictionary of economics. palgrave macmillan, london quantitative input and output relations in the economic systems of the united states. the review of economics and statistics, 18(3), 105. 2008 , 1936.

SLIMANI. *Thèse presentée a l'école des études superieures d'OTTAWA.* PhD thesis, 1989.

Résumé

Le professeur W. LEONTIEF (prix Nobel d'économie en 1973) avait divisé l'économie américaine en cinq cents (500) secteurs et l'a analysée par l'ordinateur –un Mack II (le plus puissant de l'époque) qu'il a fallu faire tourner pendant plus de cinquante heures pour obtenir une solution ; il fallait résoudre un système de quarante-deux (42) équations à autant d'inconnues (représentant deux cent cinquante mille (250 000) renseignements).

Et, depuis ses travaux, l'analyse des modèles économiques utilise la puissance de l'informatique pour étudier des modèles mathématiques mettant en jeu de très grandes quantités de données ; le modèle linéaire s'étant, de ce fait, taillé une place importante en algèbre linéaire et avec l'explosion de l'informatique on a vu se développer le calcul parallèle à grande échelle.

De nos jours, scientifiques et ingénieurs de tous bords penchent sur des problèmes bien plus complexes, tels que l'exploration pétrolière, la programmation linéaire (compagnies de navigation), réseaux électriques, ...

On s'est intéressé au modèle d'Entrée/Sortie de W. LEONTIEF ; il date des années quarante du siècle dernier. Sa formulation en tant que modèle linéaire fait sa notoriété puisque son étude est jumelée à la puissance de l'informatique intimement liée à l'algèbre linéaire (matricielle) sous-jacente. De plus, on lui trouve des applications très variées en industrie et ingénierie.

On a pu dérouler le modèle de LEONTIEF sur quelques exemples simples de jeux de données. Comme le modèle de LEONTIEF est implanté dans le logiciel R, on a estimé "inutile" d'écrire les instructions en langage R ; on s'est restreint à interpréter les résultats d'analyse à la lumière du travail présenté dans ce mémoire.

MOTS CLES :
Modèle de LEONTIEF - entrée-sortie - système linéaire - norme matricielle- conditionnement.

Abstract

The Pr. W. LEONTIEF (Nobel of economics in 1973) have divided the american economy on five hundred (500) sectors and analysed it with the Mack II (the most powerfull at that time) which he compiled for more than fifty (50) hours. It would resolve a system of 42 equations and 42 unknowns (representing about 250 000 informations).

And, since his work, the analysis of economic models uses the power of computer science to study mathematical models involving very large quantities of data ; the linear model having, as a result, carved out an important place for itself in linear algebra, and with the explosion of computer science we have seen the development of large-scale parallel computing.

Nowadays, scientists and engineers of different fields are working on much more complex problems, such as oil exploration, linear programming (shipping companies), electrical networks, ...

We have been interested in W. LEONTIEF's Input/Output model ; it dates from the forties of the last century. Its formulation as a linear model makes its notoriety since its study is coupled with the power of computer science intimately linked to the underlying linear (matrix) algebra. Moreover, it has a wide range of applications in industry and engineering.

We were able to unfold the LEONTIEF model on some simple examples of data sets. As the LEONTIEF model is implemented in the software R software, it was considered "unnecessary" to write the instructions in R language ; we restricted ourselves to interpret the analysis results in the light of the work presented in this dissertation.

KEYS WORDS :
LEONTIEF model - input-output - linear system -matrix norm - conditioning