

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou



**FACULTE DES SCIENCES**  
*Département de Mathématiques*

*Mémoire de Master*  
***Recherche Opérationnelle***

*Thème*

**Synthèse d'observateurs pour une classe de  
système non linéaire et application**

**Présenté par :**

**AMIAR Kamel & NAIT LARBI Mohand Larbi**

**Devant le jury d'examen composé de :**

<b>Président :</b>	<b>M<sup>r</sup>. OUKACHA Brahim</b>	<b>Professeur</b>
<b>Examineur :</b>	<b>M<sup>r</sup>. HAMAZ Abdelghani</b>	<b>MCA</b>
<b>Directrice du mémoire :</b>	<b>M<sup>me</sup>. KHELLAS Fazia</b>	<b>Professeur</b>

Le 06 décembre 2020

## **Remerciements**

*Nous remercions Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.*

*Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements à notre promotrice Mme **KHELLAS Fazia** pour nous avoir proposé le thème de ce mémoire et nous avoir dirigé, aidé et conseillé tout le long de notre travail et pour le temps qu'elle a bien voulu nous consacrer et que nous ne remercierons jamais assez pour son soutien et sa patience. Qu'elle trouve en ces lignes l'expression de notre gratitude.*

*Ensuite à Monsieur **OUKACHA** et Monsieur **HAMAZ** les membres du jury qui ont eu l'amabilité d'accepter d'évaluer ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre reconnaissance.*

*Nous ne saurons oublier le grand mérite des enseignants qui ont contribué à notre cursus particulièrement ceux du département "Mathématiques" et qu'ils trouvent ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.*

*Finalement, nous remercions toute personne ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.*

## **Dédicaces**

*Du profond de mon cœur, je dédie ce travail à tous ceux qui me sont chers.*

### **A mes chers parents**

*Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde, qui ont toujours été là pour moi, aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consentis pour mon instruction et mon bien-être.*

*Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagnera toujours.*

*Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices. Puisse Dieu le très haut, vous protéger et vous accorder santé, bonheur et longue vie.*

### **A ma chère sœur**

*A ma sœur, qui n'a pas cessée de me soutenir que Dieu la protège et lui offre la chance et le bonheur, je lui souhaite plein de réussite.*

*A toute la famille **AMIAR** ainsi qu'à tous mes cousins.*

*A mes chers oncles paternels ainsi qu'à toutes leurs familles.*

*A mon cher oncle maternel ainsi qu'à toute sa famille.*

*A la mémoire de mes grands-parents maternels et ma grand-mère paternelle que je n'ai pas pu connaître.*

*A mes chers amis d'enfance.*

*A mes chers camarades d'université.*

*À toute personne qui porte de l'estime pour moi.*

*Et sans oublier mon binôme Mohand Larbi et sa famille.*

**Kamel**

## **Dédicaces**

### ***Je dédie ce modeste travail***

*Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde : Mes chers **Parents** qui ont sacrifié les plus belles années de leurs vies pour me voir un jour réussir, qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un honorable modèle de labeur et de persévérance, qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma profonde reconnaissance et ma parfaite considération, que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices.*

*A mes frères que j'aime énormément.*

*A ma chère sœur que je remercie pour son encouragement et son aide.*

*A mes chers amis d'enfance.*

*A mes chers amis d'université.*

*Et bien sûr mon binôme Kamel et sa famille.*

***Mohand Larbi***

# Table des matières

<b>Introduction Générale .....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre (1) : Généralités sur les systèmes dynamiques .....</b>	<b>3</b>
<b>1) Rappels sur les systèmes dynamiques.....</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction.....	4
1.2 Définition des systèmes dynamiques .....	4
1.3 Systèmes autonomes et non autonomes.....	4
1.4 Système linéaire autonomes.....	5
1.5 Etude des systèmes linéaires .....	5
1.6 Equation des systèmes linéaires .....	6
1.7 Propriétés des systèmes linéaires .....	6
a) Contrôlabilité .....	7
b) Observabilité.....	8
c) Stabilisabilité et Détectabilité .....	9
1.8 Problème de Cauchy.....	10
<b>2) Stabilité au sens de Lyapunov.....</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction .....	12
2.2 Notion de stabilité.....	12
2.3 Stabilité au sens de Lyapunov .....	15
2.4 Définition de la fonction de Lyapunov .....	16
2.5 Méthode directe de Lyapunov .....	17
2.5.1 Fonction de Lyapunov.....	17
2.5.2 Théorème de stabilités locale.....	19
2.6 Méthode indirect de Lyapunov .....	20
2.6.1 Théorème de stabilité global .....	23
2.7 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires.....	24
2.8 Inégalités linéaires matricielles.....	26

<b>3) Etat de l'art sur les observateurs .....</b>	<b>30</b>
3.1 Introduction .....	30
3.2 Définition classique d'un observateur .....	30
3.3 Observateurs des systèmes linéaires .....	31
3.3.3 Observateur de Luenberger .....	31
3.3.1 Observateur de Kalman .....	33
3.3.2 Observateur a entrée inconnue.....	34
3.4 Observateurs des systèmes non linéaires .....	35
3.4.1 Observateur de Luenberger étendu.....	35
3.4.2 Filtre de Kalman étendu .....	36
3.4.3 Observateur à grand gain .....	36

## **Chapitre (2) : Synthèse d'observateur à entrée inconnue..... 40**

2.1 Introduction.....	41
2.2 Description du système.....	41
2.3 Conception d'observateur.....	42
2.4 Exemple illustratif.....	46
2.5 Conclusion .....	50

### **Annexe**

2.6 Programme sous Matlab .....	46
a) Programme résolution de LMI et simulink.....	51
b) Résultat d'exécution.....	54

<b>Bibliographie .....</b>	<b>56</b>
----------------------------	-----------

# Introduction générale

Dans la pratique, il existe des perturbations dans de nombreux systèmes qui entraînent une distorsion des performances et de la stabilité du système. Par conséquent, éliminer les influences de la perturbation devient une question urgente qui retient beaucoup l'attention de nombreux chercheurs. Récemment, une méthode de synthèse d'observateurs de perturbations a été développée dans [18] et [19] pour estimer les perturbations du système.

Il existe de nombreuses études axées sur la conception de l'observateur de perturbations qui sont publiées ces dernières années. Par exemple, dans [20], la méthode basée sur l'observateur de perturbations a été proposée pour estimer la perturbation de charge de la machine synchrone à aimants permanents (PMSM). En outre, une conception d'observateur de perturbations pour les systèmes linéaires à temps discret et le moteur synchrone à aimant permanent (PMSM) a été étudiée dans [21] et [22], respectivement. Cependant, les méthodes de ces trois articles ne peuvent s'appliquer qu'aux perturbations à basse fréquence. Sinon, ces approches ne parviennent pas à estimer les perturbations. De plus, une approche pour estimer la perturbation et les états inconnus pour un système linéaire en temps discret a été concernée dans [23], dans laquelle la perturbation était considérée comme un état auxiliaire et la technique du descripteur a été utilisée pour synthétiser l'observateur.

En outre, le contrôleur basé sur l'observateur de perturbations en mode glissant a été conçu pour les systèmes flous [24] et les observateurs en mode glissant étendu ont été synthétisés pour les systèmes linéaires à sauts markoviens avec l'existence des perturbations [25]. Cependant, les perturbations dans ces études doivent satisfaire la contrainte bornée. De plus, la méthode de conception de l'observateur de perturbations pour le système non linéaire à entrée saturée a été étudiée dans [26]. L'élimination des perturbations basée sur la méthode d'observation des perturbations a été proposée pour une classe de systèmes stochastiques dans [27]. Mais les perturbations dans ces deux méthodes sont supposées être générées à partir d'un système exogène. Dans [28], le contrôleur hybride basé sur l'observateur de perturbation a été étudié pour le système linéaire perturbé, cependant, la méthode de cette étude ne garantit que la stabilité exponentielle et ne rend pas les systèmes asymptotiquement stables.

Motivés par les discussions mentionnées ci-dessus, l'objectif de ce mémoire est de développer la méthode de synthèse d'observation due à [29] pour estimer non seulement les états non mesurables mais aussi les perturbations inconnues. En outre, l'application de la méthode proposée pour le moteur à courant continu est présentée pour prouver le succès de cette méthode.

Le mémoire est structuré en deux chapitres : Le chapitre (1) est dédié aux généralités sur les systèmes dynamiques. On y rappelle entre autres les notions de stabilité, contrôlabilité, observabilité, et un état de l'art sur les observateurs d'états. Le chapitre (2) retrace la méthode

proposée par [29], qui consiste à synthétiser un observateur d'état et pour une classe des systèmes à perturbation inconnues. Notre contribution dans ce chapitre réside dans la partie programmation où nous avons programmé les conditions assurant la convergence de l'observateur. Aussi, nous avons simulé via simulink l'exemple du moteur à courant continu.

# **CHAPITRE (1) :**

## *Généralités sur les systèmes dynamiques*

# 1) Rappels sur les systèmes dynamiques.

## 1.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à quelques rappels préliminaires nécessaires pour la compréhension de la partie principale du mémoire, à savoir le chapitre 2.

## 1.2. Définition des systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objets en interaction, défini par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (1.1)$$

que l'on écrit par abus d'écriture :

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.2)$$

## 1.3. Systèmes autonomes et non autonomes

On pourrait dire que le système (1,1) est autonome lorsque  $f$  ne dépend pas explicitement du temps. Dans ce cas l'équation s'écrit :

$$\dot{X} = f(x).$$

On peut noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si le contrôle dépend explicitement du temps.

### Exemple 1.1

L'équation suivante :  $\dot{x}(t) = t^2 + x(t)$  équation différentielle ordinaire linéaire par rapport à  $x$  ;  
Non autonome  $f(t, x) = t^2 + x$

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendent de l'instant initial  $t_0$ .

La terminologie autonome/non-autonome vient de la physique : les lois fondamentales de la physique ne dépendent pas du temps. De ce fait, l'évolution d'un système physique isolé peut normalement être d'écrit par une équation autonome.

L'évolution d'un système physique ne sera pas d'écrit par une équation non-autonome que quand il est soumis à des forces extérieures au système, qu'il n'évolue donc pas de manière autonome, au sens courant du terme.

Dans la suite de ce mémoire, on s'intéressera aux systèmes autonomes.

## 1.4. Système linéaires autonomes

Définir un système dynamique nécessite de définir deux catégories de descriptions:

-une représentation d'état:  $\dot{X}(t) = A.X(t)$ .

Il s'agit d'une liste de variables, que l'on appelle vecteur d'état  $X$ , permettant de décrire à tout instant un ensemble d'objets. Le nombre de ces variables correspond au nombre de degrés de liberté de notre système ;

-une fonction de transition :  $f(t) = e^{At}$ .

Cette fonction décrit l'évolution dans le domaine de temps, elle donne ainsi l'évolution du vecteur d'état entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Nous pouvons classer les systèmes selon trois catégories : les systèmes discrets, les systèmes hybrides et les systèmes à temps continus. C'est à cette dernière catégorie qui nous intéresse. Pour les systèmes continus, le modèle du système dynamique peut être linéaire ou non linéaire et stationnaire, ou non stationnaire. Une classe particulière dont l'importance pratique est remarquable est celle des systèmes décrits par des équations différentielles linéaires ; nous parlons alors des systèmes linéaires.

## 1.5. Etude des systèmes linéaires

Un système linéaire est un système qui vérifie deux principes fondamentaux, le premier est celui de superposition, c'est à dire, si l'entrée du système se décompose en une somme de plusieurs entrées alors la sortie du système sera la somme des sorties correspondant à chaque entrée séparée, et le deuxième principe est celui de causalité où toutes les valeurs sont nulles

avant le début de l'expérience ce qui correspond à l'application de la première consigne. Pour résumer, un système est linéaire s'il peut être modélisé par des fonctions linéaires.

## 1.6. Equations d'état d'un système linéaire

La phase de modélisation est importante dans le processus d'analyse et de synthèse d'un système de commande. En Automatique, le modèle mathématique d'un système dynamique est défini comme un ensemble d'équations qui représentent le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. L'état d'un modèle représente l'ensemble des paramètres nécessaires pour connaître le comportement de la sortie d'un système en fonction des entrées auxquelles il est soumis.

De nombreuses méthodes de détection et d'isolation de défauts utilisent l'état du système pour la génération de résidus permettant de détecter et d'isoler les défauts. Suivant le système étudié, l'état peut être entièrement mesuré, donc connu à chaque instant, ce qui ne nécessite alors pas sa reconstruction. Cependant, dans la plupart des systèmes, l'état est partiellement mesuré ou totalement inconnu. L'observateur a donc le rôle de reconstruire partiellement ou entièrement l'état  $x(t)$  du système, selon les exigences de l'utilisateur.

La structure de la représentation d'état commune pour un système continu linéaire à coefficients constants LTI (Linéaire à Temps Invariant) est donnée par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ Y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Où :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $y(t) \in \mathbb{R}$  représentent respectivement le vecteur d'état et le vecteur de sortie du système dynamique.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  représentent les matrices constantes connues du système dynamique.  $U(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée du système dynamique.

## 1.7. Propriétés des systèmes linéaires

Pour un système décrit dans l'espace d'état, il existe des propriétés [1] comme la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilisabilité et la détectabilité, qui jouent un rôle important dans les problèmes de synthèse de correcteurs, d'observateurs, et particulièrement dans la conception des filtres de détection et de diagnostic de défaillances. L'étude de ces propriétés par Kalman [2] dans un cadre restreint, a donné lieu à des conditions étendues plus tard à un cadre plus général [3].

Les deux concepts fondamentaux de contrôlabilité et d'observabilité pour les systèmes linéaires peuvent être caractérisés en utilisant une condition de rang généralisé [4].

## a) Contrôlabilité

Un système est dit contrôlable si nous pouvons le ramener à tout état prédéfini au moyen d'une commande, nous disons que le système (1.3) est contrôlable (ou commandable) si quel que soit l'état  $X(t_i)$  à l'instant initial  $t_i$ , il existe une commande admissible  $u(t)$ , appliquée sur un intervalle de temps fini  $[t_i, t_f]$  qui amène le système initialement en  $X(t_i)$  à l'état  $X(t_f)$  en un temps fini.

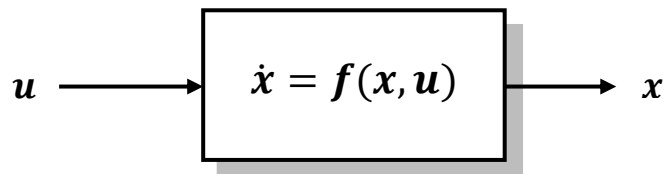


FIGURE 1.1 Système avec contrôle.

### Définition 1.1

On dit que le système (1.3) est contrôlable (ou commandable) en temps  $T > 0$ , s'il existe un contrôle  $u$  tel que la trajectoire associée relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps  $T$ . i.e.:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \exists u \in L_{loc}^{\infty}([0, T], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ p.p. sur } [0, T]$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

La contrôlabilité est une notion importante puisqu'elle établit le fait que nous puissions commander le système afin de modifier son comportement. Cette notion joue donc un rôle très important dans la théorie de la synthèse de systèmes de commande dans l'espace d'état.

Il est clairement difficile d'utiliser directement la définition précédente afin de décider de la contrôlabilité d'un système LTI donné. La contrôlabilité est une propriété caractéristique du couplage entre l'entrée et la sortie du système et fera donc intervenir les matrices  $A$  et  $B$ . Un critère algébrique simple construit à partir de ces deux matrices existe pour la contrôlabilité, il est dû à Rudolf Kalman et Richard Bucy, et il est donné par le théorème suivant :

### Théorème 1.1 (critère de Kalman)

Un système LTI d'équation dynamique d'état donnée par (1.3) est dit contrôlable si et seulement si :

$$Mc = \text{rang}([ B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B ]) = n$$

Cette matrice est appelée matrice de contrôlabilité et ses colonnes sont calculer de façons itérative :

$$A^{k+1}B = A * A^k B.$$

Nous disons alors que la paire  $(A, B)$  est contrôlable.

### Exemple 1.2

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$Mc = (B \ AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $\text{rang}(Mc) = 2$ , donc  $(A, B)$  est contrôlable.

### b) Observabilité

L'observabilité est une caractéristique structurelle complémentaire de la contrôlabilité. Elle correspond à la capacité pour un système à connaître l'historique d'un état interne à partir de la seule connaissance des variables de sortie mesurées. Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et de ses sorties pendant un intervalle de temps fini  $[t_i, t_f]$  permet de retrouver l'état initial  $X_i$ . En fait, puisqu'il est possible pour les systèmes linéaires d'avoir une solution analytique, l'observabilité nous permet donc de connaître l'état  $x(t)$  à tout instant compris dans l'intervalle  $[t_i, t_f]$ .

### Définition 1.2

Le système (1.3) est observable en temps  $T$ , si pour toute paire d'états Initiaux  $x_0$  et  $x_1$ , avec  $x_0 \neq x_1$ , il existe une entrée  $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$  qui distingue  $x_0$  et  $x_1$ . Autrement dit:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq x_1 \Rightarrow \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \text{ Tel que } y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot)).$$

De manière équivalente, on peut dire:

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \forall u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \quad y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot)) \Rightarrow x_0 \neq x_1.$$

Un critère de Kalman existe également pour la notion d'observabilité et fait intervenir la matrice dynamique  $A$  et la matrice de sortie  $C$  et il est donné par le théorème suivant :

### **Théorème 1.2 (critère de Kalman)**

Un système LTI d'équation dynamique d'état donnée par (1.3) est observable si et seulement si :

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Cette matrice est appelée matrice d'observabilité et ses lignes se calculent de façon itérative :

$$CA^{k+1} = CA^k A.$$

Nous disons alors que la paire  $(A, C)$  est observable.

### **c) Stabilisabilité et Détectabilité dans le cas linéaire**

Les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité d'une représentation d'état sont des propriétés relativement fortes qui peuvent ne pas être vérifiées simultanément pour une représentation d'état donnée. Deux autres propriétés plus faibles peuvent alors être satisfaites et nous permettre d'utiliser cette représentation d'état, qui sont la stabilisabilité et la détectabilité.

#### **Définition 1.3 (Stabilisabilité)**

Une représentation d'état d'un système LTI (1.3) est dite stabilisable, c'est-à-dire la paire  $(A, B)$  est stabilisable, si tous ses modes instables sont commandables.

Le critère de stabilisabilité est donné par : Le système (1.3) est stabilisable si et seulement si, pour tout  $\lambda \in C^+$ , c'est-à-dire pour les valeurs propres instables de  $A$ , nous avons :

$$\text{rang}[\lambda I - AB] = n.$$

#### **Définition 1.4 (Détectabilité)**

Une représentation d'état d'un système LTI (1.3) est dite détectable, c'est-à-dire la paire  $(A, C)$  est détectable, si tous ses modes instables sont observables.

Le critère de détectabilité est donné par : Le système (1.3) est détectable si et seulement si pour  $\lambda \in \mathbb{C}^+$ , c'est-à-dire pour les valeurs propres instables de  $A$ , nous avons :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n.$$

Dans cette section, les problèmes d'analyse et de synthèse ont été posés en se plaçant dans l'hypothèse de linéarité. Les théories et les méthodes qui ont été développées dans le domaine de l'automatique et qui ont permis de faire des progrès notables dans les domaines des asservissements et des régulations ont été présentées. Néanmoins, très rapidement, l'ingénieur s'est rendu compte que cette approche ne permettait pas d'étudier le comportement de bon nombre de systèmes réels. Nous avons donc assisté, à partir des années cinquante, à de nombreuses études et recherches dans le domaine des systèmes non linéaires.

## 1.8. Problème de Cauchy

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $f$  est une application de  $I \times U$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $x_0 \in U$ . Le théorème de Cauchy- Lipschitz usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale pourvu que  $f$  soit continue, et localement Lipschitzienne par rapport à sa deuxième composante.

### Définition 1.5

L'application  $f$  de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $U$  si :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}^+, \forall (t, x_1) \in U, (t, x_2) \in U, \text{ alors } \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq \gamma \|x_2 - x_1\|.$$

$\gamma$  est appelé la constante de Lipschitz. Noter qu'elle ne dépend ni de  $x_1$ , ni de  $x_2$ .

### Définition 1.6

L'application  $f$  de l'ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est localement Lipschitzienne par rapport à  $x$  sur  $U$ , si  $\forall (t, x) \in U$ , on peut trouver un voisinage ouvert de  $(t, x)$  dans  $U$ , dans lequel  $f$  est Lipschitzienne. Bien sûr si  $f$  est Lipschitzienne, elle est aussi localement Lipschitzienne.

Un résultat très important est que si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , alors elle est localement Lipschitzienne.

En particulier en dimension 1, la constante  $\gamma$  est donnée par :

$$\gamma = \sup_{(t,x) \in U} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|.$$

### **Théorème 1.3 (Théorème de Cauchy Lipschitz)**

On suppose que la fonction :

$$f: I \times V \rightarrow V$$

vérifie les deux hypothèses suivantes :

1.  $f$  est localement lipschitzienne par rapport à  $x$  au sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall x \in V; \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V; \exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+) \\ \forall t \in I; \forall y, z \in B(x, r) \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|. \end{aligned}$$

2.  $f$  est localement intégrable par rapport à  $t$ , i.e. :

$$\forall x \in V; \exists \beta \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+); \forall t \in I; \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Alors pour toute donnée initiale  $(t_0, x_0) \in I \times V$ , il existe une unique solution du problème de Cauchy (1.4) .

## 2) Stabilité au sens de Lyapunov.

### 2.1. Introduction

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques se révèle précieuse dans un grand nombre de contextes dont :

\_Nucléaire : emballement d'un réacteur de fission ou extinction d'un plasma confiné (réacteur de fusion).

\_Chimie : emballement d'un réacteur homogène (Bhopal) ou hétérogène (torréfaction bois).

\_Biologie : systèmes proies-prédateurs (=ressources-consommateurs).

\_Prévision des ressources halieutiques : sardine contre thon (risque d'extinction d'une espèce de poisson. La surpêche d'une espèce modifie/rompt l'équilibre sardine-thon).

\_Systèmes biologiques à évolution rapide : cellule contre virus (+ou- virulent) et antibiotique contre bactérie (+ou- résistante).

\_Contrôle-commande : stabilité de la trajectoire d'une fusée, d'un satellite, d'un avion, . . .

\_Mécanique des fluides : instabilités variées (Saman-Taylor, Rayleigh-Bénard, Marangoni, Taylor-Couette, Kelvin-Helmholtz, . . .).

### 2.2. Notion de stabilité

On représente dans cette partie les notions de stabilité pour le système dynamique autonome.

Considérons alors le système suivant qui est décrit par une équation différentielle :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

On suppose que pour toute condition initiale  $x_0$ , il existe une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous noterons indifféremment  $x(t, x_0)$  où  $x(t)$  cette solution.

### Définition 2.1 (point d'équilibre)

On dit que l'état d'équilibre  $x_e \in \mathbb{R}^n$  est un Point d'équilibre ou point singulier du système (2.1) si :

$$f(x_e) = 0.$$

$x(t, x_e)$  est l'unique solution du problème de Cauchy associé. C'est-à-dire qu'un point d'équilibre constitue par lui-même une trajectoire. Si on suppose l'unicité de la solution du problème de Cauchy les trajectoires ne peuvent pas s'auto intersecter et par conséquent un point d'équilibre ne peut être atteint que de manière asymptotique.

### Définition 2.2 (Stabilité du point d'équilibre)

On dit que l'état d'équilibre  $x_e$  est point d'équilibre stable si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon.$$

Dans le cas contraire  $x_e$  est dit instable.

Cette définition signifie que la trajectoire d'état peut être gardé arbitrairement près de  $x_e$ , si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de  $x_e$ .

### Définition 2.3 (Attractivité)

On dit que l'état d'équilibre  $x_e$  est attractif s'il existe un voisinage  $U$  de  $x_e$  tel que :

$$\forall x_0 \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = x_e$$

Si de plus  $U = \mathbb{R}^n$  on dit alors que  $x_e$  est globalement attractif.

### Définition 2.4 (Stabilité asymptotique)

Un point d'équilibre  $x_e$  est asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\delta > 0$  tel que:

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_e.$$

Un point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, la stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable, mais que de plus on est capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire issue  $x_0$  appartenant à un voisinage de  $x_e$  tend vers  $x_e$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

### Définition 2.5 (Stabilité exponentielle)

Un équilibre  $x_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $a > 0$  et  $\lambda > 0$  tels que :

$$\forall t > 0 \exists B_r(x_e, r), \forall x_0 \in B_r, \|x(t) - x_e\| < a \Rightarrow \|x(0) - x_e\| < \exp(-\lambda t).$$

Cela signifie que vecteur d'état, pour une condition initial  $x_0 \in B_r$  converge vers  $x_e$  plus rapidement qu'une fonction exponentielle,  $\lambda$  est appelé le taux de convergence, d'autre part la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique qui implique la stabilité.

### Définition 2.6 (Stabilité globale)

Si la propriété de stabilité asymptotique (exponentielle) est vérifié quel que soit  $x(0)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

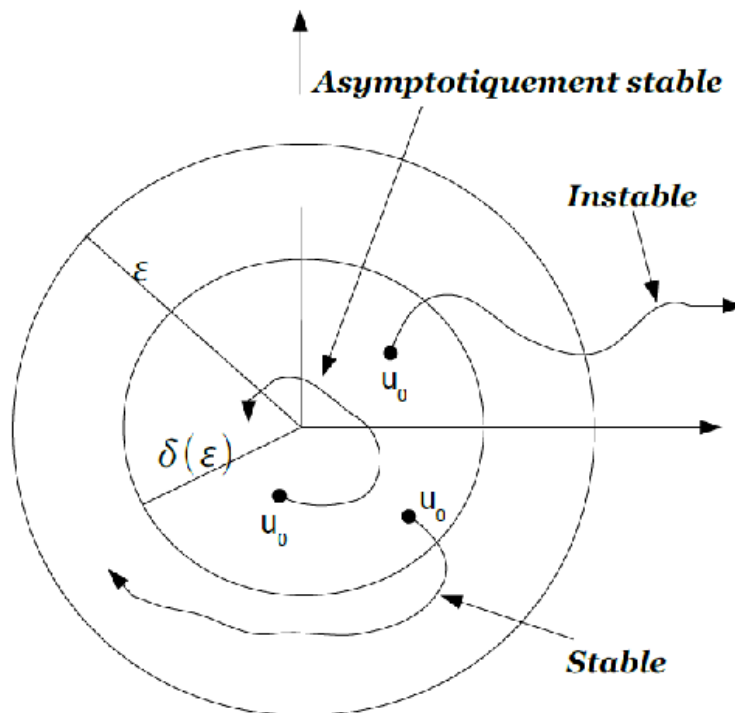


Figure 1. Type de stabilité.

### Définition 2.7

Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans  $\mathbb{R}^n$ , on dira que le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement (exponentiellement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

### Remarque 2.1

Pour un système linéaire  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ou  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.

### Théorème 2.1 [5]

- \_ S'il existe une valeur propre  $\lambda$  de  $A$  telle que  $Re(\lambda) > 0$ , alors le point d'équilibre 0 est instable.
- \_ Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.
- \_ Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de  $A$  est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.

La définition de la stabilité présente certains désavantages importants :

-Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.

-Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues.

## 2.3. Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continument (c'est-à-dire décroît avec le temps) alors le système qu'il soit linéaire ou non linéaire, stationnaire ou non stationnaire, tend à se ramener à un état d'équilibre (il est stable).

La méthode directe de Lyapunov cherche donc à générer une fonction scalaire positive  $V(X)$  de type énergétique qui admet une dérivée temporelle  $\dot{V}(X)$  négative à l'exception du point d'équilibre où  $V(X)$  admet un minimum  $V(X_e)$ . La fonction  $V(X)$  décroît donc continument le long des solutions du système jusqu'à où elle atteint sa valeur minimale, on dit alors que le système approche le point d'équilibre  $X_e$ . Ainsi, l'idée développée par Lyapunov, a été d'introduire des fonctions réelles et d'étudier leurs variations le long de la trajectoire du système considéré [6].

## 2.4. Définition de la fonction de Lyapunov

Le concept de la fonction de Lyapunov est à l'origine de la mécanique théorique. Nous avons vu dans les systèmes conservatifs stables l'énergie est une fonction scalaire définie positive qui peut décroître avec le temps. Pour l'utilisation de cette analogie, nous pouvons définir une énergie généralisée de la fonction de Lyapunov pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires.

L'énergie généralisée de la fonction de Lyapunov d'un système autonome décrit par l'équation d'état  $\dot{X} = f(X)$  est une fonction scalaire avec les propriétés suivantes :

1. Fonction scalaire :  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Définie positive :  $V[X(t)] > 0$ .
3. Dissipativité :  $\frac{d}{dt}V[X(t)] = \frac{dV}{dX} \frac{d[X(t)]}{dt} < 0$ .

### Définition 2.8 (Fonction définie positive)

1. Une fonction scalaire  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est localement définie positive dans  $\Omega$ , ou  $\Omega$  est un voisinage de l'origine si :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $\forall x \neq 0 \in \Omega \quad V(x) > 0$ .

2. Une fonction scalaire  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie positive si elle vérifie :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad V(x) > 0$ .

### Définition 2.9 (Fonctions semi définies positives)

1. Une fonction scalaire  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est localement semi définie positive dans  $\Omega$ , ou  $\Omega$  est un voisinage de l'origine si :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $\forall x \neq 0 \in \Omega \quad V(x) \geq 0$ .

2. Une fonction scalaire  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est semi définie positive si elle vérifie :

1.  $V(0) = 0$ ,
2.  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad V(x) \geq 0$ .

## Remarque 2.2

1. Si une fonction  $V$  est (localement), (semi) définie négative alors  $-V$  est (localement), (semi) définie positive.
2. Cas particulier important : la forme quadratique  $V(x) = x^T P x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , avec  $P = P^T$ ,  $V$  est (semi) définie positive, (négative) si  $P$  est une matrice (semi) définie positive, (négative).
3. Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $P$  soit définie positive est que ses valeurs.

## 2.5. Méthode directe de Lyapunov

### 2.5.1. Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Etant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure à la décroissance de l'énergie.

Illustrons son origine mécanique par l'étude de l'équilibre de l'oscillateur harmonique avec frottement visqueux.

Si  $d(\dot{x})$  représente le frottement visqueux, supposé être une fonction impaire de la vitesse  $\dot{x}$ , alors le principe fondamental de la dynamique fournit

$$M\ddot{x} = -kx - d(\dot{x}).$$

Posons  $z_1 = x$  et  $z_2 = \dot{x}$ , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{d}{m}z_2. \end{cases}$$

Ce système physique possède l'énergie totale  $E$ , comme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$E = \frac{1}{2}mz_2^2 + \frac{1}{2}kz_1^2 = V(z_1, z_2).$$

Etudions l'évolution de l'énergie au cours du temps. Si  $(x(t), \dot{x}(t))$  est une solution alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} k x^2(t) \right) = m \dot{x}(t) \ddot{x}(t) + k x(t) \dot{x}(t) = -\dot{x}(t) d(\dot{x}(t)) \leq 0,$$

car  $d$  est une fonction impaire. On observe donc que l'énergie décroît le long des trajectoires du mouvement.

Nous allons maintenant introduire la notion de dérivation d'une fonction le long des trajectoires du système.

On considère le système (2.2), pour simplifier l'écriture on supposera que l'origine est un point d'équilibre.

Soit  $V$  une fonction de classe  $C^1$  sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$  contenant l'origine,  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto V(x)$ . On notera  $\dot{V}$  la fonction définie par :

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt} V(x(t)), t = 0 = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x),$$

c'est la dérivée de  $V(x)$  le long des trajectoires du système (2.2).

### Définition 2.10

- \_  $V$  est dite définie positive si :  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0$  dans un voisinage de 0. pour tout  $x \neq 0$ .
- \_  $V$  est dite définie négative si :  $-V$  est définie positive.
- \_  $V$  est dite semi-définie positive si :  $V(0) = 0$  et  $V(x) \geq 0$  dans un voisinage de 0.
- \_  $V$  est non définie si :  $V(0) = 0$  et  $V(x)$  change de signe dans tout voisinage de 0.

### Exemple 2.1

- \_  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  est définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .
- \_  $V(x) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$  est semi-définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .
- \_  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  est définie positive dans  $\mathbb{R}^2$  mais semi-définie positive dans  $\mathbb{R}^3$ .
- \_  $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 - x_2^4$  est définie positive à l'intérieur du cercle unité.

—La forme  $V(X) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j$ , où  $P$  est une matrice réelle symétrique, est définie positive ssi toutes les valeurs propres de  $P$  sont strictement positives, autrement dit,  $V$  est définie positive si et seulement si la matrice  $P$  est symétrique définie positive. Rappelons le principe de Rayleigh : si  $P$  est une matrice symétrique (ou plus généralement une matrice hermitienne), alors toutes ses valeurs propres sont réelles, de plus,

$$\lambda_{\min}(P) x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) x^T x, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour vérifier qu'une matrice symétrique est définie positive, on peut utiliser le critère de Sylvester :  $P$  est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs.

### Définition 2.11 (Fonction de Lyapunov)

Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction de classe  $C^1$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(x) = 0 \quad x = 0.$$

Ayant la propriété :

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est à dire  $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0$ , alors la stabilité est en plus asymptotique.

### 2.5.2. Théorème de stabilité locale

Le premier théorème en relation avec la fonction de Lyapunov est le résultat de stabilité locale autour du point d'équilibre. Nous énonçons le théorème avec précision :

#### Théorème 2.2 (Lyapunov, 1892) [7]

Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre du système (2.2), et  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , contenant  $x_0$ . Soit  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable telle que :

- i/  $V(0) = 0$  et  $V(x) > 0$  dans  $D - \{0\}$ .
- ii/  $\dot{V}(x) \leq 0$  dans  $D$ , alors  $x_0 = 0$  est stable.

Si de plus on a :

- iii/  $\dot{V} < 0$  dans  $D - \{0\}$ , alors  $x_0 = 0$  est asymptotiquement stable.

#### Exemple 2.2

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement Lipschitzienne vérifiant

$$h(0) = 0, \quad xh(x) \geq 0, \quad \forall |x| \leq 1.$$

Considérons la forme quadratique :

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

comme fonction candidate de Lyapunov. La dérivée  $\dot{V}(x)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (4x_1 + 2x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2 \\ &= 2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)h(x_1 + x_2) \\ &\leq -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2, \forall |x_1 + x_2| \leq 1 \\ &= -x^T \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} x, \forall |x_1 + x_2| \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\dot{V}(x)$  est définie négative dans l'ensemble

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_1 + x_2| \leq 1\}.$$

La fonction  $V$  est bien une fonction de Lyapunov pour le système (2.3), on conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est localement asymptotiquement stable.

## 2.6. Méthode indirecte de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique du système autour du point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système complet. Il s'agit de la méthode indirecte de Lyapunov.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x),$$

où  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1(D)$  et  $D$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  contenant le point d'équilibre du système, i.e.  $f(0) = 0$ . Par le théorème de la moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x,$$

où  $z_i$  est un point du segment joignant  $x$  et l'origine. Cette égalité est vraie pour tout  $x \in D$ , tel le segment joignant  $x$  et l'origine reste dans  $D$ . Comme  $f(0) = 0$ , on peut écrire :

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x,$$

d'où l'on peut déduire que

$$f(x) = Ax + g(x),$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ et } g_i(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

La fonction  $g_i(i = 1, \dots, n)$

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|.$$

Et par la continuité de la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , on remarque que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (2.2) par son linéarité

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{ou } A = \frac{\partial f}{\partial x}(0). \quad (2.4)$$

Le théorème qui suit, connu comme méthode indirecte de Lyapunov, utilise la linéarisation (2.4) du système (2.2) et peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale, plus précisément :

### **Théorème 2.3 [5]**

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système

$$\dot{x} = f(x)$$

où  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^1(D)$  et  $D$  un voisinage de zéro.

Soit

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=0}$$

alors,

1. L'origine est asymptotiquement stable si  $Re(\lambda_i) < 0$  pour toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ .
2. L'origine est instable si  $Re(\lambda_i) > 0$  pour au moins une valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ .

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque  $Re(\lambda_i) \leq 0$  pour tout  $i$  et  $Re(\lambda_i) = 0$  pour un certain  $i$ .

### Exemple 2.3

Considérons le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - b \sin x_2.\end{aligned}$$

Nous sommes en présence de deux points d'équilibres :  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  et  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ .

La matrice Jacobienne est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}.$$

Pour étudier la stabilité de l'origine, on calcule la Jacobienne au point  $x = 0$

$$A = \frac{df}{dx}(x) \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Pour tout  $a, b > 0$ , les valeurs propres de  $A$  sont purement réelles et sont strictement négatives. On conclut donc que le système est asymptotiquement stable à l'origine.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ , on calcule la Jacobienne en ce point :

$$\tilde{A} = \frac{df}{dx}(x) \Big|_{x_1 = \pi, x_2 = 0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $\tilde{A}$  sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}.$$

Pour tout  $a > 0$  et  $b \geq 0$ , nous avons  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} > 0$ . En vertu du théorème (2.3), le point d'équilibre  $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$  est instable.

### 2.6.1. Théorème de stabilité global

Nous avons vu que la stabilité locale signifie la stabilité pour toute condition initiale  $x_0$  dans un voisinage  $D$  du point d'équilibre, et la stabilité globale celle pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . La question est de savoir s'il suffit de remplacer  $D$  par  $\mathbb{R}^n$  et de vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du système. La réponse est non (cf. [5]), par conséquent il faut une condition supplémentaire: Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclut sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, et d'autre part il faut également que la condition de bornitude radiale existe, c'est-à-dire :

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ lorsque } \|x\| \rightarrow \infty .$$

Dans ce cas, on dit que  $V$  est radialement non-bornée. Le théorème suivant, dû à Barbashin-Krasovskii, récapitule ces conditions :

#### Théorème 2.4 [7]

Soit  $x = 0$  un point d'équilibre pour le système (2.2). Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  vérifiant

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0. \\ \dot{V}(x) &< 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \|x\| \rightarrow \infty &\implies V(x) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Alors  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

#### Preuve.

Soit  $p \in \mathbb{R}^n$  un point quelconque. Posons  $c = V(p)$ , la condition (2.5) implique que pour tout  $c > 0$ , il existe  $r > 0$ , tel que  $V(x) > c$  chaque fois que  $\|x\| > r$ . Ainsi,  $\Omega_c \subset B_r$ , ce qui implique que l'ensemble  $\Omega_c$  est borné. Le reste de la démonstration est similaire à celle du théorème (2.2).

#### Exemple 2.4

Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2 \end{aligned}$$

où  $a > 0$ ,  $h(\cdot)$  est localement Lipschitz,  $h(0) = 0$ ,  $yh(y) > 0$  pour tout  $y \neq 0$ . La fonction de Lyapunov :

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

est définie positive pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$  et radialement non-bornée, sa dérivée est :

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

est définie négative sur  $\mathbb{R}^2$  pour tout  $k \in (0,1)$ . On conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

## 2.7. Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax. \quad (2.6)$$

Lorsque toutes les valeurs propres de  $A$  vérifient  $Re(\lambda_i) < 0$ , alors  $A$  est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité. Supposons que la matrice  $A$  est inversible, cela, nous garantirait l'unicité du point d'équilibre  $x = 0$ . Rappelons que l'origine du système (2.6) est asymptotiquement stable si et seulement si la matrice  $A$  est de Hurwitz.

On peut également caractériser la stabilité asymptotique en utilisant la méthode de Lyapunov. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T P x,$$

où  $P$  est une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de  $V$  au long des trajectoires du système (2.6) est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x,$$

où  $Q$  est la matrice symétrique donnée par

$$Q = -(PA + A^T P). \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est dite équation de Lyapunov.

Le théorème suivant caractérise la stabilité asymptotique de l'origine en terme de solution de l'équation de Lyapunov :

### **Théorème 2.5 [5]**

Une matrice  $A$  est de Hurwitz si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive  $Q$  donnée, il existe une matrice  $P$  symétrique définie positive vérifiant l'équation de Lyapunov (2.7). Si de plus  $A$  est de Hurwitz, alors  $P$  est l'unique solution de l'équation (2.7).

**Preuve.**

La suffisance découle du théorème (2.2) avec  $V(x) = x^T P x$ . Pour montrer la nécessité, supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  vérifient  $Re(\lambda_i) < 0$ , et considérons la matrice  $P$  définie par

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt. \quad (2.8)$$

Cette intégrale est bien définie du fait que les éléments à intégrer sont de la forme  $t^{K-1} \exp(\lambda_i t)$ , avec  $Re(\lambda_i) < 0$ . La matrice  $P$  est clairement symétrique.

Montrons qu'elle est définie positive. Supposons le contraire, il existe donc un vecteur  $x \neq 0$  tel que  $x^T P x = 0$ . Comme la matrice  $\exp(At)$  est inversible pour tout  $t$ , il vient que

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\Rightarrow \int_0^{\infty} x^T \exp(A^T t) Q \exp(At) x dt = 0 \\ &\Rightarrow \exp(At) x \equiv 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que  $P$  est définie positive. En remplaçant l'expression de  $P$  dans l'équation de Lyapunov, on obtient

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) A dt + \int_0^{\infty} A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt = \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^{\infty} = -Q. \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $P$  est bien une solution de l'équation de Lyapunov. Pour montrer que c'est l'unique solution, supposons l'existence d'une autre solution  $\tilde{P} \neq P$ . Donc

$$(\tilde{P} - P)A + A^T(P - \tilde{P}) = 0,$$

il vient que

$$0 = \exp(A^T t) [(\tilde{P} - P)A + A^T(P - \tilde{P}) \exp(At)] = \frac{d}{dt} \{ \exp(A^T t) [(\tilde{P} - P) \exp(At)] \}.$$

Autrement dit

$$\exp(A^T t) (\tilde{P} - P) \exp(At) \equiv \text{constante pour tout } t.$$

En particulier, comme  $\exp(A0) = Id$ , nous avons

$$(\tilde{P} - P) = \exp(A^T t) (\tilde{P} - P) \exp(At) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Finalement  $P = \tilde{P}$ .

### Remarque 2.3

L'équation (2.7) est une équation linéaire algébrique qui peut se résoudre en la réécrivant sous la forme  $Mx = y$ , où  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs constitués des éléments de  $P$  et  $Q$ . Elle peut également être résolue en la considérant comme cas particulier de l'équation de Sylvester  $PA + BP + C = 0$ . Il existe de nombreuses méthodes numériques efficaces pour la résolution de telles équations. Notons que la plus part des logiciels de programmation des systèmes de contrôle contiennent des commandes pour la résolution de l'équation de Lyapunov.

### Exemple 2.5

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } P = \begin{bmatrix} p11 & p21 \\ p12 & p22 \end{bmatrix}.$$

L'équation de Lyapunov a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p11 \\ p12 \\ p22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

L'unique solution de cette équation est

$$\begin{bmatrix} p11 \\ p12 \\ p22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

## 2.8. Inégalités linéaires matricielles

Les techniques LMI (abréviation anglaise d'Inégalité Matricielle Linéaire) permettent de formuler de nombreuses spécifications de conception sous forme de contraintes inégalités. Par exemple, l'analyse et la conception à partir de l'approche de Lyapunov permettent une formulation LMI. La stabilité d'un système dynamique  $\dot{x} = Ax$  est équivalente à la faisabilité de trouver  $P = P^T$  tel que  $A^T P + PA < 0$  et  $P > Id$ .

Une fois la formulation LMI réalisée, le problème est résolu exactement par les algorithmes d'optimisation convexe.

Une contrainte LMI sur un vecteur variable  $x$  de  $\mathbb{R}^m$  est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m < 0, \quad (2.9)$$

où  $x_1, x_2, \dots, x_m$  sont des variables réelles, dites aussi variables de décision de la LMI;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de décision (ses composantes sont des variables de décision) et  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  sont des matrices symétriques données.

Il existe des situations où les variables sont des matrices, comme par exemple l'inégalité matricielle de Lyapunov.

$$F(X) = A^T X + XA + Q < 0,$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont deux matrices constantes données, et la variable  $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice inconnue. Nous allons expliquer dans ce qui suit comment se ramener de cette inégalité matricielle à une LMI de la forme (2.9).

Soit  $E_1, E_2, \dots, E_m$  une base de  $S^n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathbb{R}^{n \times n}, N = N^T\}$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre  $n$ . Pour tout  $X \in S^n(\mathbb{R})$ , il existe  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  tels que

$$X = \sum_{i=1}^m x_i E_i.$$

L'inégalité de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1(A^T E_1 + E_1 A) + \dots + x_m(A^T E_m + E_m A) < 0, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre qu'une LMI particulière.

Une autre LMI souvent rencontrée en commande est l'inégalité de Riccati

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0,$$

où  $R > 0$ ,  $Q = Q^T$ ,  $R = R^T$ ,  $P = P^T$ .

Cette dernière s'exprime comme une LMI en  $P$ .

La notation suivante  $F < 0$  (ou  $F \leq 0$ ) signifie que la matrice  $F$  est définie négative (respectivement  $F$  semi-définie négative). La contrainte  $F(x) < 0$  est une contrainte convexe en  $x$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$  est convexe. On dit que la LMI (2.9) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur  $x \in \mathbb{R}^m$  tel que l'inégalité matricielle (2.9) est vérifiée. Pour des fonctions affines  $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n(\mathbb{R})$ , les contraintes  $F(x) > 0$  et  $F(x) < G(x)$  sont aussi des LMIs car elles peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} -F(x) &< 0, \\ F(x) - G(x) &< 0. \end{aligned}$$

### 2.8.1. Programmation semi-définie

Grâce à des outils comme Matlab par exemple, il existe des fonctions qui permettent de résoudre plusieurs types de problèmes LMI.

Les trois problèmes de bases sont les suivants :

1. La faisabilité d'un problème LMI, comme il a été signalé auparavant, permet de déterminer s'il existe un vecteur  $x$ , qui vérifie la contrainte LMI  $F(x) < 0$ .
2. Minimiser  $c^T x$  par rapport à  $F(x) < 0$ ; où  $c \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , et  $F$  est une matrice symétrique et affine en  $x$ , est appelé un programme semi-défini (ou SDP pour semi-definite program). Le vecteur  $c$  définit l'objectif du problème et  $x \in \mathbb{R}^m$  représente la variable de décision.
3. Minimiser les valeurs propres généralisées. Il s'agit ici de déterminer le minimum d'un paramètre  $\lambda$  tel que le problème LMI suivant sont vérifié :

$$\begin{cases} C(x) < 0 \\ B_j(x) > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \\ A_j(x) > \lambda B_j(x), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}$$

où  $x$  correspond à l'ensemble des inconnues de l'inégalité matricielle,  $C$ ,  $B_j$ ,  $A_j$  sont des matrices.

Il existe plusieurs algorithmes de résolution numérique de tels types de problèmes LMI. La technique que nous avons utilisée pour résoudre la LMI de notre application est celle exploitée par le logiciel Matlab (plus précisément, la fonction `feasp`), à savoir la méthode projective détaillée dans [30]. La solution exhibée par Matlab est une solution particulière de la LMI à résoudre.

L'avantage majeur des SDP est que leur complexité est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe des algorithmes qui permettent d'en calculer l'optimum global (pour une décision fixée a priori) en un temps de calcul polynomial par rapport à la taille du problème.

## 2.8.2. Les théorèmes classiques

La difficulté n'est donc pas de résoudre une LMI. En effet les théorèmes issus des techniques du type Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires qui s'écrivent sous la forme d'inéquation de Riccati. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ses contraintes non linéaires en formulation LMI.

Pour cela, nous disposons des lemmes suivants :

La transformation basée sur le complément de Schur est la méthode la plus simple et la plus fréquemment utilisée pour transformer des contraintes non linéaires en des contraintes LMI. Cette transformation est la suivante :

### Lemme 2.1 (Complément de Schur [31])

Soient trois matrices  $Q(x)$ ,  $S(x)$  et  $R(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ , les matrices  $Q(x)$  et  $R(x)$  étant symétriques. La LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

est équivalente aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \end{cases}$$

Une autre transformation est décrite dans le lemme suivant :

**Lemme 2.2 [31]**

Pour toutes matrices  $A$ ,  $P_0 > 0$  et  $P_1 > 0$ , l'inégalité

$$A^T P_1 A - P_0 < 0$$

est équivalente à l'existence d'une matrice  $Y$  telle que :

$$\begin{bmatrix} -P_0 & A^T Y^T \\ Y A & -Y - Y^T + P_1 \end{bmatrix} < 0.$$

# 3) Etat de l'art sur les observateurs

## 3.1. Introduction

La mise en œuvre des lois de commande basées sur le modèle mathématique du système, repose implicitement sur l'hypothèse que tout l'état est connu à chaque instant. Pour des raisons technologiques (de matériel, de réalisabilité, etc), de fiabilité (panne des éléments de mesure) ou encore économiques (coût des capteurs), dans de nombreuses applications la mesure de tout l'état n'est pas possible.

De ce fait, l'idée repose sur l'utilisation d'un observateur d'état. L'objectif de ce chapitre est de présenter les observateurs des systèmes linéaires et les observateurs des systèmes non linéaires.

## 3.2. Définition classique d'un observateur [8]

On appelle observateur (ou reconstituteur d'état) d'un système dynamique :

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)). \\ y(t) = h(x(t)). \end{cases}$$

Un système dynamique auxiliaire (O) dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie  $\hat{x}(t)$  est l'état estimé :

$$(O): \begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)). \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)). \end{cases}$$

Telle que l'erreur entre le vecteur d'état  $x(t)$  et  $\hat{x}(t)$  tende asymptotiquement vers zéro.

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ Quand } t \rightarrow \infty.$$

Le schéma d'un tel observateur est donné par la figure (3.1).

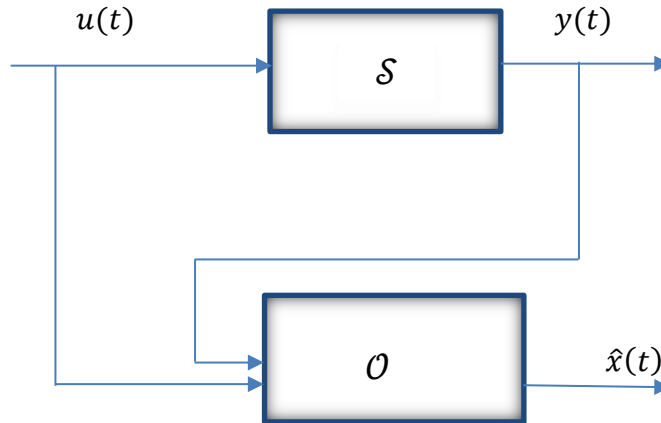


Figure 3.1 Diagramme structurel d'un observateur.

### 3.3. Observateurs des systèmes linéaires

Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe, et par Kalman dans le cadre stochastique. Dans les deux cas, on considère le modèle dynamique du système linéaire défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  et  $v(t) \in \mathbb{R}^p$  sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives  $Q$  et  $R$ . Ces bruits sont supposés non corrélés. Les matrices du système sont de dimensions appropriées, et les conditions initiales sont définies par  $x(0) = x_0$ .

#### 3.3.1. Observateur de Luenberger

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. Supposons que le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + Bu \\ y(t) = Cx. \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit observable. Le but est de construire un observateur asymptotique  $\hat{x}(\cdot)$  de  $x(\cdot)$ , i.e. une fonction dynamique  $\hat{x}(\cdot)$  de l'observable  $y(\cdot)$  telle que  $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , l'idée est

de copier la dynamique du système observé et d'y ajouter un terme correctif qui tienne compte de l'écart entre la prédiction et la réalité.

**Définition 3.1**

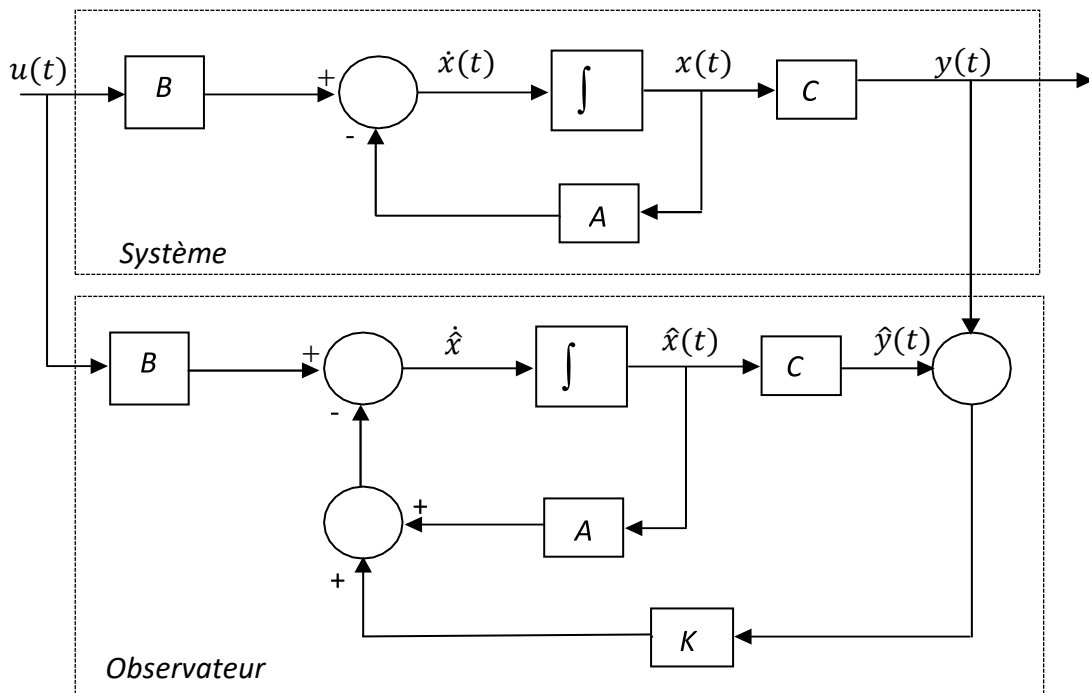
Un observateur asymptotique (ou observateur de Luenberger)  $\hat{x}(\cdot)$  de  $x(\cdot)$  une solution d'un système du type :

$$\hat{\dot{x}}(t) = \underbrace{A \hat{x}(t) + Bu(t)}_{(I)} + \underbrace{K(C\hat{x}(t) - y(t))}_{(II)}, \tag{3.3}$$

où  $L \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  est appelée matrice de gain, telle que

$$\forall x(0), \quad \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

La partie (I) est celle correspondante à la dynamique du système et la partie (II) est le correctif. Compte tenu des équations d'état et de sortie de l'observateur (3.3) et du système (3.2), nous en déduisons le diagramme structurel présenté à la Figure (3.2) ci-dessous :



**Figure 3.2.** Diagramme structurel de l'observateur de Luenberger.

### Remarque 3.1

Introduisons  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , l'erreur entre la prédiction  $\hat{x}(\cdot)$  et l'état réel  $x(\cdot)$ .

On a

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t).$$

Et donc  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour toute valeur initiale  $e(t)$  si et seulement si la matrice  $A + LC$  est Hurwitz. Construire un observateur asymptotique revient donc à déterminer une matrice de gain  $L$  telle que  $A + LC$  soit Hurwitz.

### 3.3.2. Observateur de Kalman

L'observateur de Kalman (figure 2.2) est l'outil utilisé pour résoudre le problème d'estimation de l'état des systèmes Linéaires à Temps Variant (LTV), qui sont caractérisés par des bruits gaussiens de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$  et  $R$  respectivement présentés dans le système (2.9) par  $\eta(t)$  et  $\zeta(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \eta(t), & \eta(t) \cong N(0, Q(t)). \\ y(t) = C(t)x(t) + \zeta(t), & \zeta(t) \cong N(0, R(t)). \end{cases} \quad (3.5)$$

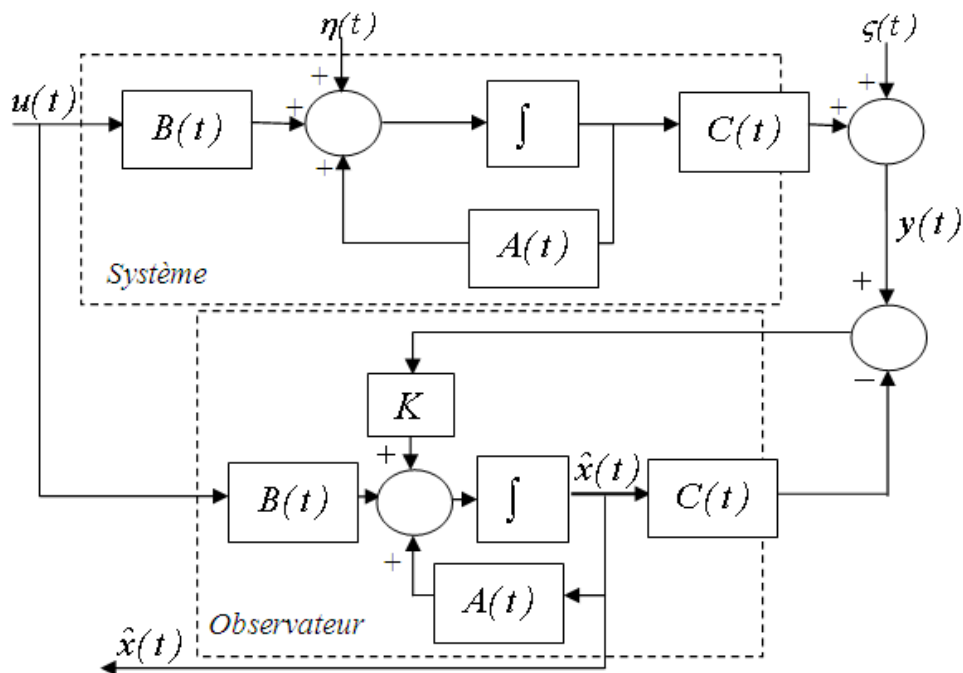


Figure 3.3. Structure de l'observateur de Kalman.

L'observateur pour ce système (3.5) est donné par le théorème suivant :

### **Théorème 3.1 [9]**

Si le système (3.5) est uniformément observable, alors il existe un observateur de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)), \quad (3.6)$$

où  $K(t)$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{S} = -S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)Q(C(t) - S(t)RS(t)). \\ S(0) = S_0 > 0. \\ Q = Q^T > 0. \\ K(t) = S^{-1}(t)C^T(t)Q. \end{cases} \quad (3.7)$$

Quelques résultats de convergence pour l'observateur de Kalman sont donnés dans le travail de Boutayeb et Darouach [10].

### **3.3.3. Observateur à entrée inconnue**

La théorie d'observateur à entrée inconnue est applicable à la classe des systèmes linéaires (1.3). Seulement cette fois, les entrées inconnues interviennent dans le modèle du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $d(t) \in \mathbb{R}^q$  est une entrée inconnue et  $E$  est une matrice de rang plein de dimension appropriée. Pour le système (3.8) on dit qu'un observateur est à entrée inconnue si l'erreur d'estimation tend vers zéro en présence d'entrées inconnues. Sa structure est donnée par [11].

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + TBu(t) + Ky(t) \\ \hat{x} = z(t) + Hy(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état de l'observateur et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état estimé du système, les matrices  $F, T, K$  et  $H$  qui seront déterminées pour stabiliser l'observateur et découpler les entrées inconnues. En posant  $K = K_1 + K_2$ , la dérivée de l'erreur d'estimation par rapport au temps sera donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) &= (A - HCA - K_1C)e - [F - (A - HCA - K_1C)z(t) \\ &\quad - [T - (I - HC)]Bu(t) - (I - HC)Ed(t) - [K_2 - (A - HCA - K_1C)H]y(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ainsi les conditions permettant le découplage de l'entrée inconnue sont :

$$\begin{aligned}
(HC - I)E &= 0 \\
T &= I - HC \\
F &= A - HCA - K_1C \\
K_2 &= FH \\
K &= K_1 + K_2.
\end{aligned}$$

Si ces conditions sont satisfaites alors l'erreur dynamique sera :

$$\dot{e}(t) = Fe(t).$$

Afin que l'erreur d'estimation tende asymptotiquement vers zéro, les valeurs propres de  $F$  doivent être à partie réelle négative. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel observateur pour un système décrit par l'équation (3.8) sont [12]

$$\begin{aligned}
\text{Rang}(CE) &= \text{Rang}(E) \\
(C, A_l) &\text{ est stable, } A_l = A - E[(CE)^T CE]^{-1}(CE)^T CA.
\end{aligned}$$

La première condition signifie que le nombre de lignes linéairement indépendantes de la matrice  $C$  ne doit pas être inférieur au nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice  $E$ , c'est-à-dire, le nombre de mesures indépendantes doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées inconnues à découpler.

## 3.4. Observateurs des systèmes non linéaires

### 3.4.1. Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsqu'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, l'utilisation de cet observateur peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Dans le deuxième cas, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires.

En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

### 3.4.2. Filtre de Kalman Étendu (EKF)

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires. Dans un environnement déterministe, une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu a été établie dans [13] et [14] pour la classe des systèmes non linéaires à temps discret. Cependant, cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste, à l'heure actuelle, un problème ouvert.

### 3.4.3. Observateurs à grand gain

Les techniques dites à grand gain peuvent être appliquées sans transformation du système initial. Dans ce cas, la conception de l'observateur se fait directement à partir de la structure du système. Cette technique utilise la théorie de stabilité de Lyapunov pour adapter les techniques développées dans le cas linéaire. La méthode présentée dans [15] donne des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système, pour la classe des systèmes non linéaires décrits par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + f(u(t), x(t)). \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

La dynamique de l'état comporte une partie linéaire non commandée et une partie non linéaire commandée, vérifiant en général la condition de Lipschitz par rapport à  $x$

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|. \quad (3.12)$$

L'observateur à grand gain possède la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}), \quad u(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)). \quad (3.13)$$

L'appellation grand gain provient de la structure de l'observateur : lorsque la fonction non linéaire possède une grande constante de Lipschitz, la moindre erreur entre l'état réel et l'état estimé va se répercuter et croître. Par conséquent, le gain  $K$  de l'observateur (3.13) doit être important pour compenser cette amplification de l'erreur.

La dynamique de l'erreur d'estimation  $\dot{e}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  se déduit de (3.11) et (3.13) :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)). \quad (3.14)$$

Il a été démontré dans [16] que si le gain  $K$  est choisi telle que :

$$k < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad (3.15)$$

où  $k$  est la constante de Lipchitz de  $f(x(t), u(t))$ ,  $\lambda_{\min}(Q)$  et  $\lambda_{\max}(P)$  sont les valeurs propres maximales et minimales.  $Q$  est une matrice symétrique définie positive et  $P$  est une matrice définie positive, solution de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + (A - KC) = -Q. \quad (3.16)$$

Alors (3.13) est un observateur asymptotique du système non linéaire (3.11).

La synthèse de l'observateur consiste à ajuster les matrices  $P$ ,  $Q$  et  $K$  de façon à garantir l'égalité (3.16). Ensuite, on vérifie si la condition (3.15) est satisfaite. Ainsi, et malgré l'intérêt du résultat, cette méthode n'est pas constructive, elle ne donne aucune indication sur le choix d'un gain satisfaisant la condition (3.15). Cette approche a été étendue par plusieurs auteurs. Pour simplifier le problème on peut remplacer la matrice  $Q$  par une matrice identité; et cela revient à choisir un gain  $K$  qui satisfait :

$$k < \frac{1}{\lambda_{\min}(P)}. \quad (3.17)$$

Ces techniques dites à grand gain sont très répandues dans la littérature. Il s'agit principalement de techniques de vérification, qui permettent d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel. La structure de l'observateur non linéaire est une structure de Luenberger étendue au cas non linéaire.

#### 3.4.4. Observateurs à mode glissant

Dans toutes les méthodes vues précédemment, le modèle dynamique du système étudié était supposé parfaitement connu. Ici, il s'agit de développer une certaine robustesse vis-à-vis d'incertitudes paramétriques. Le principe des observateurs à modes glissants consiste à contraindre, à l'aide de fonctions discontinues, les dynamiques d'un système d'ordre  $n$  à converger vers une variété  $S$  de dimension  $(n - p)$  dite surface de glissement (étant la dimension du vecteur de mesure). L'attractivité de cette surface est assurée par des conditions appelées conditions de glissement. Si ces conditions sont vérifiées, le système converge vers la surface de glissement et y évolue selon une dynamique d'ordre  $(n - p)$ .

Dans le cas des observateurs à modes glissants, les dynamiques concernées sont celles des erreurs d'observation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . A partir de leurs valeurs initiales  $e(0)$ , ces erreurs convergent vers les valeurs d'équilibre en deux étapes:

Dans une première phase, la trajectoire des erreurs d'observation évolue vers la surface de glissement sur laquelle les erreurs entre la sortie de l'observateur et la sortie du système réel (les mesures)  $e_y = y - \hat{y}$  sont nulles. Cette étape, qui généralement est très dynamique, est appelée mode d'atteinte.

Dans la seconde phase, la trajectoire des erreurs d'observation glisse sur la surface de glissement avec des dynamiques imposées de manière à annuler toutes les erreurs d'observation. Ce dernier mode est appelé mode de glissement. Les différentes étapes de synthèse d'un observateur à mode glissant sont connues et clairement identifiées dans [17].

Ces dernières sont rappelées ci-dessous. Considérons un système d'état non linéaire affiné d'ordre  $n$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n. \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (3.18)$$

L'observateur à modes glissants est défini avec la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) - K\Gamma_s \\ \hat{y} = h(\hat{x}) \end{cases} \quad (3.19)$$

où

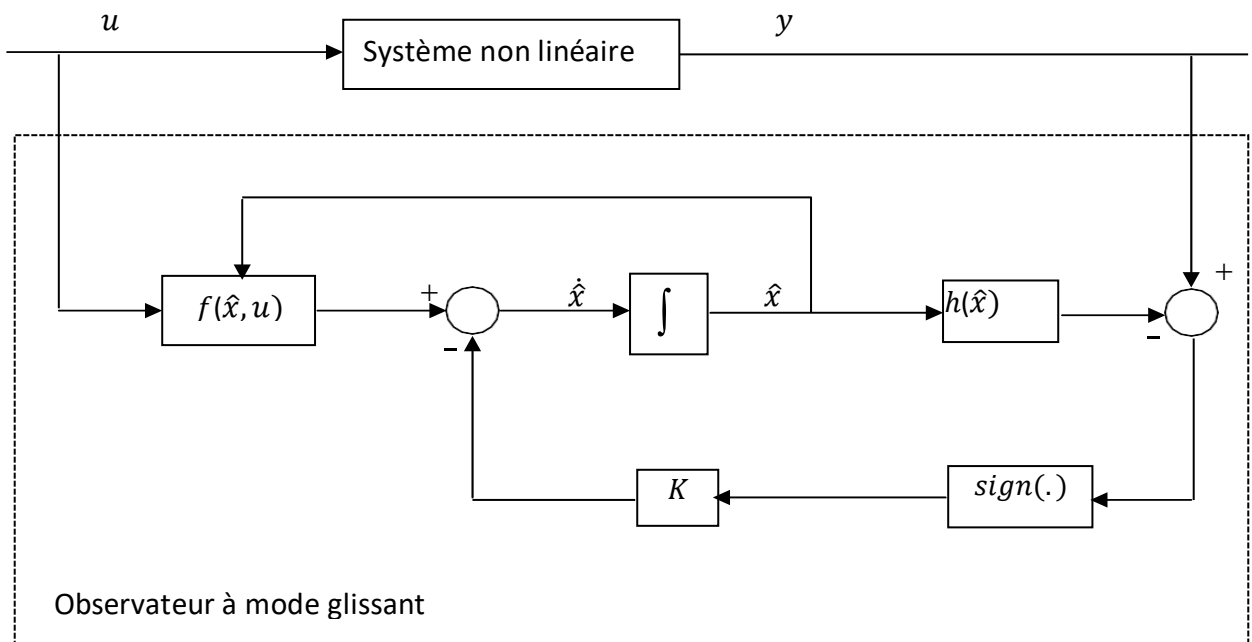
$K$ : est la matrice de gain de dimension  $(n \times p)$ .

$\Gamma_s$ : est un vecteur de dimension  $p \times 1$  défini tel que  $\Gamma_s = [\text{sign}(\hat{y}_1 - y_1) \dots \text{sign}(\hat{y}_p - y_p)]^T$ .

Nous définissons également les vecteurs relatifs aux erreurs d'observation tel que :

$e = \hat{x} - x$  : est le vecteur d'état des erreurs d'observation.

$S = e_y = \hat{y} - y$  : est la surface de glissement.



**Figure 3.4** Schéma fonctionnel d'un observateur à mode glissant.

Pour que l'état estimé converge vers l'état réel, l'observateur à mode glissant doit respecter deux conditions.) :

La première concerne le mode d'atteinte et garantit l'attractivité de la surface de glissement  $S = 0$  de dimension  $p$ , laquelle est attractive si la fonction de Lyapunov  $V(x) = S^T \times S$  vérifie la condition :  $\dot{V}(x) < 0$  si  $S \neq 0$ .

La deuxième concerne le mode glissant, durant cette étape, la matrice des gains correctifs agit de manière à satisfaire la condition d'invariance suivante :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ S = 0. \end{cases}$$

Durant ce mode, les dynamiques du système sont réduites et le système d'ordre  $n$  devient un système équivalent d'ordre  $(n - p)$ . Ces critères permettent la synthèse de l'observateur à mode glissant et déterminent son fonctionnement.

# **CHAPITRE (2) :**

## *Synthèse d'observateur à entrée inconnue*

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on examine les problèmes de conception d'observateurs robustes pour une classe de systèmes linéaires avec perturbations. Une méthode basée sur la méthode d'entrée inconnue pour synthétiser un observateur robuste est développée pour estimer simultanément les états et les perturbations non mesurables. Avec l'aide de la méthodologie de Lyapunov et de la technique d'inégalités linéaires matricielles (LMI), des conditions pour synthétiser l'observateur sont données. Enfin, une application à l'étude du moteur à courant continu entraînant une charge interne est introduite pour prouver l'efficacité de la méthode développée.

### Notations:

$\Delta^T$  indique la matrice de transposition de  $\Delta$ ,  $(\Delta)^+ = [(\Delta)^T(\Delta)]^{-1}(\Delta)^T$  est défini pour Moore-Penrose pseudo-inverse de  $\Delta$ .

$\Delta^{-1}$  désigne la matrice inverse de  $\Delta$  et  $I$  désigne la matrice d'identité.

## 2.2 Description du système

Considérons le système linéaire perturbé suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) & (1a) \\ y(t) = Cx(t) & (1b) \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur de l'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie, et  $d(t) \in \mathbb{R}^k$  est les perturbations. Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , et  $D \in \mathbb{R}^{n \times k}$  sont respectivement les matrices système, d'entrée, de sortie et de perturbation. Supposons que certains / tous les états du système (1) ne soient pas mesurables et que ce système soit affecté par les perturbations de l'actionneur. Le but de ce chapitre est de développer la méthode de synthèse d'observateur proposée par [29] pour concevoir un observateur pour estimer à la fois les états inconnus et les perturbations.

### Hypothèse 1:

les matrices  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{n \times k}$  sont respectivement la matrice de rangs de ligne et de colonne complète; et  $\text{Rang}(CD) = \text{Rang}(D)$ .

## 2.3 Conception d'observateur

Dans ce chapitre, nous utiliserons l'observateur suivant proposé par [29] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = N\hat{x}(t) + Gu(t) + Ly(t) + F\dot{y}(t) & 2a \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) & 2b \\ \hat{d}(t) = (CD)^+\dot{y}(t) - E\hat{x}(t) - Ou(t) & 2c \end{cases}$$

pour estimer les états inconnus et les perturbations, où  $\hat{x}(t)$  est l'estimation de  $x(t)$ ,  $\hat{y}(t)$  est l'estimation de  $y(t)$  et  $\hat{d}(t)$  est l'estimation de  $d(t)$ .  $(CD)^+ = [(CD)^T(CD)]^{-1}(CD)^T$  est la pseudo inverse de Moore-Penrose de  $CD$ .  $N, G, L, F, E$  et  $O$  sont les gains de l'observateur (2) qui seront déterminés ultérieurement.

### Théorème 1.

En considérant le système (1), les estimations d'états et de perturbations se rapprochent des états réels et de la perturbation avec l'observateur (2) asymptotiquement s'il existe des matrices  $N, G, L, F, E, O$  et une matrice symétrique  $P > 0$  satisfaisant aux conditions suivantes:

$$A - FCA - LC - N = 0 \quad (3)$$

$$B - FCB - G = 0 \quad (4)$$

$$D - FCD = 0 \quad (5)$$

$$(CD)^+CA - E = 0 \quad (6)$$

$$(CD)^+CB - O = 0 \quad (7)$$

$$N^T P + PN < 0 \quad (8)$$

### Preuve.

De (2), nous avons:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= C\dot{x}(t) \\ &= CAx(t) + CBu(t) + CDd(t). \end{aligned} \quad (9)$$

L'erreur d'estimation est définie par

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t). \quad (10)$$

De (10), on obtient

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t). \quad (11)$$

La substitution de (1a), (2a) et (9) dans (11) donne

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= [Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) - N\hat{x}(t) - Gu(t) - Ly(t) - F[CAx(t) + CBu(t) + CDd(t)]] \\ \dot{e}(t) &= Ax(t) - FCAx(t) - LCx(t) - N\hat{x}(t) + Bu(t) - FCBu(t) - Gu(t) + Dd(t) - FCDd(t) \\ \dot{e}(t) &= [(A - FCA - LC - N)x(t) + N(x(t) - \hat{x}(t)) + (B - FCB - G)u(t) + (D - FCD)d(t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Si les conditions (3) - (5) sont vérifiées, (12) est équivalent à

$$\dot{e}(t) = Ne(t). \quad (13)$$

L'erreur d'estimation des perturbations est définie par

$$e_d(t) = \hat{d}(t) - d(t). \quad (14)$$

En Substituant (2c) en (14) on obtient

$$\begin{aligned} e_d(t) &= [(CD)^+ \dot{y}(t) - E\hat{x}(t) - Ou(t)] - d(t) \\ &= (CD)^+ CAx(t) + (CD)^+ CBu(t) + d(t) - Ex(t) + Ex(t) - E\hat{x}(t) - Ou(t) - d(t) \\ &= [(CD)^+ CA - E]x(t) + [(CD)^+ CB - O]u(t) + Ee(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Si les conditions (6) et (7) du théorème 1 sont vérifiées, alors (15) devient

$$e_d = Ee(t). \quad (16)$$

D'après (16), nous pouvons voir que lorsque  $e(t) \rightarrow 0$ , cela signifie que  $e_d(t) \rightarrow 0$ . Par conséquent, l'objectif est maintenant simplement de ramener l'approche  $e(t)$  à zéro.

On choisit la fonction Lyapunov

$$V(t) = e^T(t)Pe(t). \quad (17)$$

Donc

$$\dot{V}(t) = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e}. \quad (18)$$

En remplaçant (13) par (18) on obtient

$$\dot{V}(t) = e^T [N^T P + PN] e(t). \quad (19)$$

A partir de (19), nous pouvons voir que, si la condition (8) est vérifiée alors  $\dot{V}(t) < 0$ , elle conduit à l'erreur d'estimation des états (10) et les perturbations (14) convergent vers zéro. La preuve est terminée.

Afin de concevoir l'observateur, toutes les conditions du théorème 1 doivent être résolues pour obtenir les gains d'observateur  $N, G, L, F, E$  et  $O$ . Malheureusement, il est évident que la condition (8) du théorème 1 est une inégalité bilinéaire matricielle (BMI) difficile à résoudre par Matlab, par conséquent, le théorème 2 suivant est nécessaire pour transformer (8) en LMIs.

### **Théorème 2.**

Soit le système (1), l'erreur d'estimation  $e(t)$  et l'erreur d'estimation des perturbations  $e_d(t)$  avec l'observateur (2) convergent vers zéro asymptotiquement s'il existe les matrices  $N, G, L, F, E, O$  et matrice symétrique  $P > 0$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites

$$(A - (UCA))^T P - (VCA)^T X^T - C^T Q^T + P(A - (UCA)) - X(VCA) - QC < 0 \quad (20)$$

où

$$U = D(CD)^+ \quad (21)$$

$$V = (I - (CD)(CD)^+ \quad (22)$$

$$X = PY \quad (23)$$

$$Q = PL. \quad (24)$$

Et les paramètres de l'observateur sont calculés comme suit

$$F = U + YV \quad (25)$$

$$N = A - FCA - LC \quad (26)$$

$$L = P^{-1}Q \quad (27)$$

$$G = B - FCB \quad (28)$$

$$E = (CD)^+ CA \quad (29)$$

$$O = (CD)^+ CB. \quad (30)$$

**Preuve.**

De (5) nous avons

$$FCD = D. \quad (31)$$

La solution générale de (31) est

$$F = D(CD)^+ + Y(I - (CD)(CD)^+) \quad (32)$$

où  $(CD)^+ = ((CD)^T(CD))^{-1}(CD)^T$  et  $Y$  est une matrice arbitraire de dimension compatible.

On définit

$$U = D(CD)^+. \quad (33)$$

$$V = (I - (CD)(CD)^+). \quad (34)$$

En remplaçant (33) et (34) dans (32), on obtient :

$$F = U + YV. \quad (35)$$

De (3) et (35), on a :

$$\begin{aligned} N &= A - FCA - LC \\ &= A - (U + YV)CA - LC \\ &= A - (UCA) - (YVCA) - (LC). \end{aligned} \quad (36)$$

La condition (8) du théorème 1 implique que

$$N^T P + PN < 0. \quad (37)$$

On remplaçant (36) par (37) le rendement est :

$$(A - (UCA) - (YVCA) - LC)^T P + P(A - (UCA) - (YVCA) - LC) < 0 \quad (38)$$

$$(A - (UCA))^T P - (VCA)^T Y^T P - C^T L^T P + P(A - (UCA)) - PY(VCA) - PLC < 0. \quad (39)$$

Let:

$$X = PY \quad (40)$$

$$Q = PL \quad (41)$$

À partir de (40), (41) et (39), on obtient:

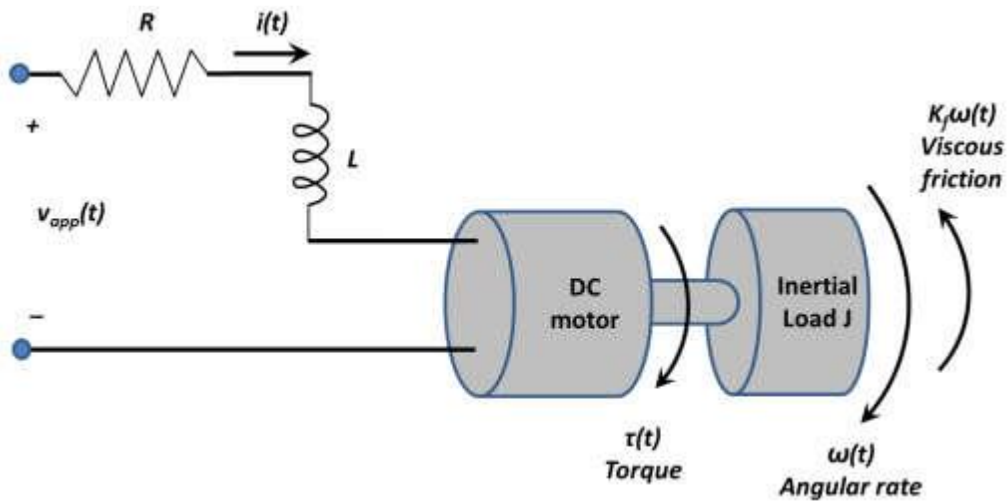
$$(A - (UCA))^T P - (VCA)^T X^T - C^T Q^T + P(A - (UCA)) - X(VCA) - QC < 0. \quad (42)$$

On voit facilement que le (42) et (20) est le même, cela signifie que la BMI (8) du théorème 1 a été transformé avec succès en LMI (20) du théorème 2. La preuve est terminée.

## 2.4 Exemple illustratif

Dans ce mémoire, un moteur à courant continu entraînant une charge d'inertie est considéré pour estimer les états inconnus et les perturbations.

Le modèle simple du moteur à courant continu est illustré sur la figure 1 comme suit



**Figure.1.** Modèle du moteur à courant continu avec charge inertielle.

Le modèle linéaire du moteur à courant continu est

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -K_b/L \\ K_m/J & -K_f/J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v_{app}(t) \quad (43)$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} \quad (44)$$

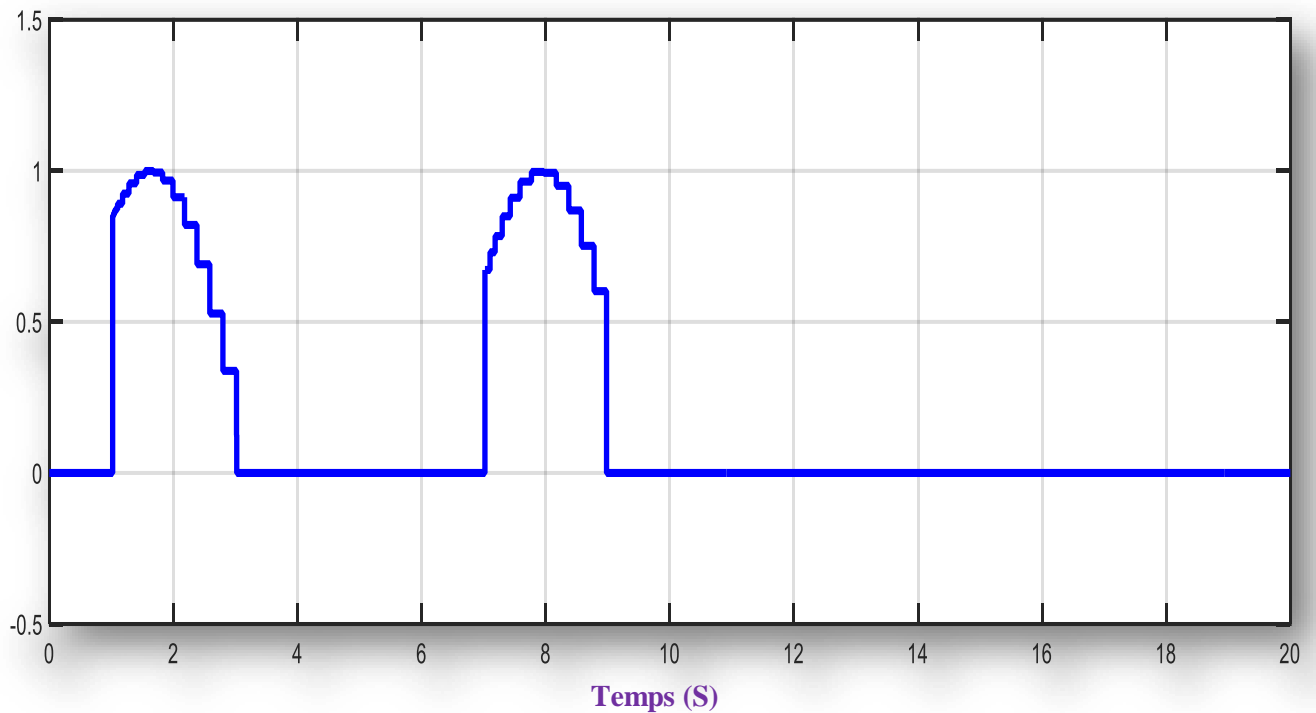
où  $i$  est le courant,  $\omega$  est la vitesse angulaire de la charge,  $v_{app}(t)$  est la tension d'entrée et  $y$  est la sortie. Les paramètres du moteur à courant continu sont  $R = 2.0 [W]$ ,  $L = 0.5 [H]$ ,  $K_m = 0.015$  (constante de couple),  $K_b = 0.015$  (constante emf),  $K_f = 0.2 [Nms]$ ,  $J = 0.02 [kg.m^2]$ .

On définit

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -K_b/L \\ K_m/J & -K_f/J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -0.03 \\ 0.75 & -10 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

On suppose que le système soit affecté par les perturbations démontrées sur la figure 1 avec  $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , le système (43) est le même que la structure du système (1).



**Figure.2.** Perturbation réelle.

On applique la méthode des sections 2 et 3 pour concevoir un observateur pour estimer les états inconnus et les perturbations; et après la résolution des conditions du théorème 2 par les outils LMI dans Matlab on obtient les gains d'observateur comme suit :

$$N = \begin{bmatrix} -0.5000 & 0 \\ 0.0000 & -9.9670 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 4.7500 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -4.0000 & -0.0330 \end{bmatrix}, \quad O = 2.$$

En simulant le système (1) avec l'observateur (2), les résultats obtenus sont

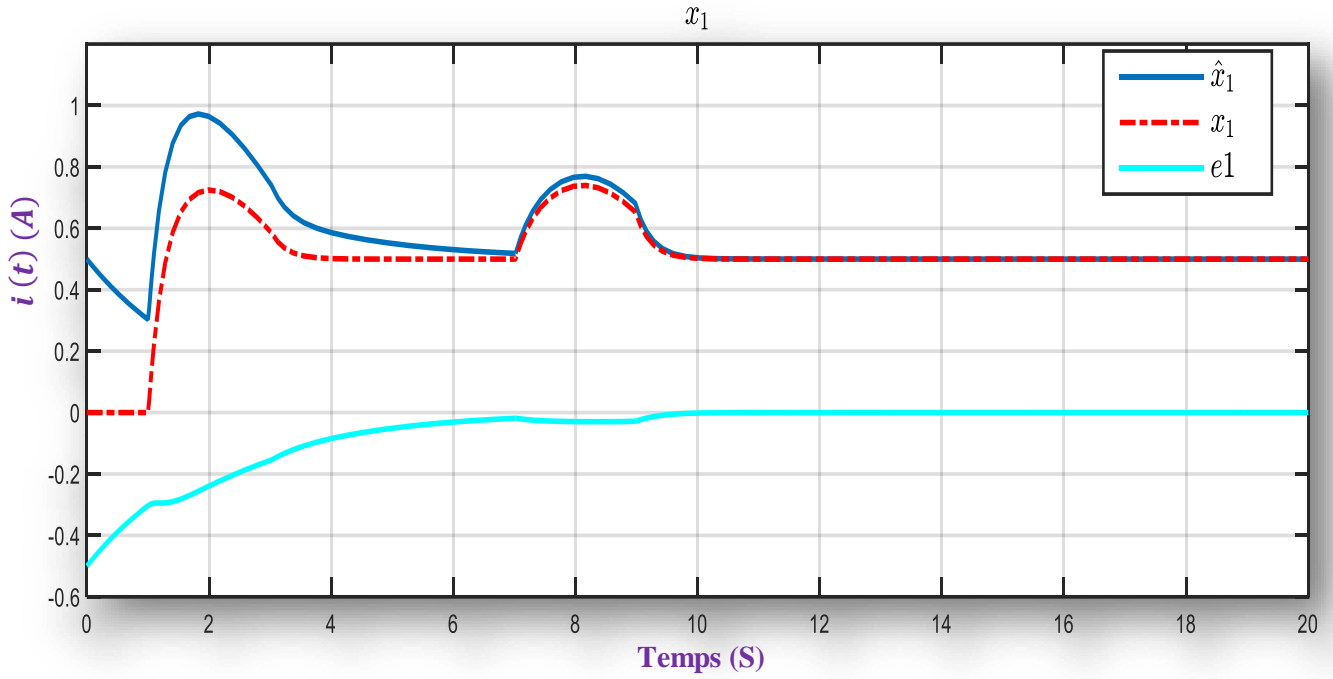


Figure.3. État réel  $x_1$ , état estimé  $\hat{x}_1$  et erreur d'estimation  $e_1$ .

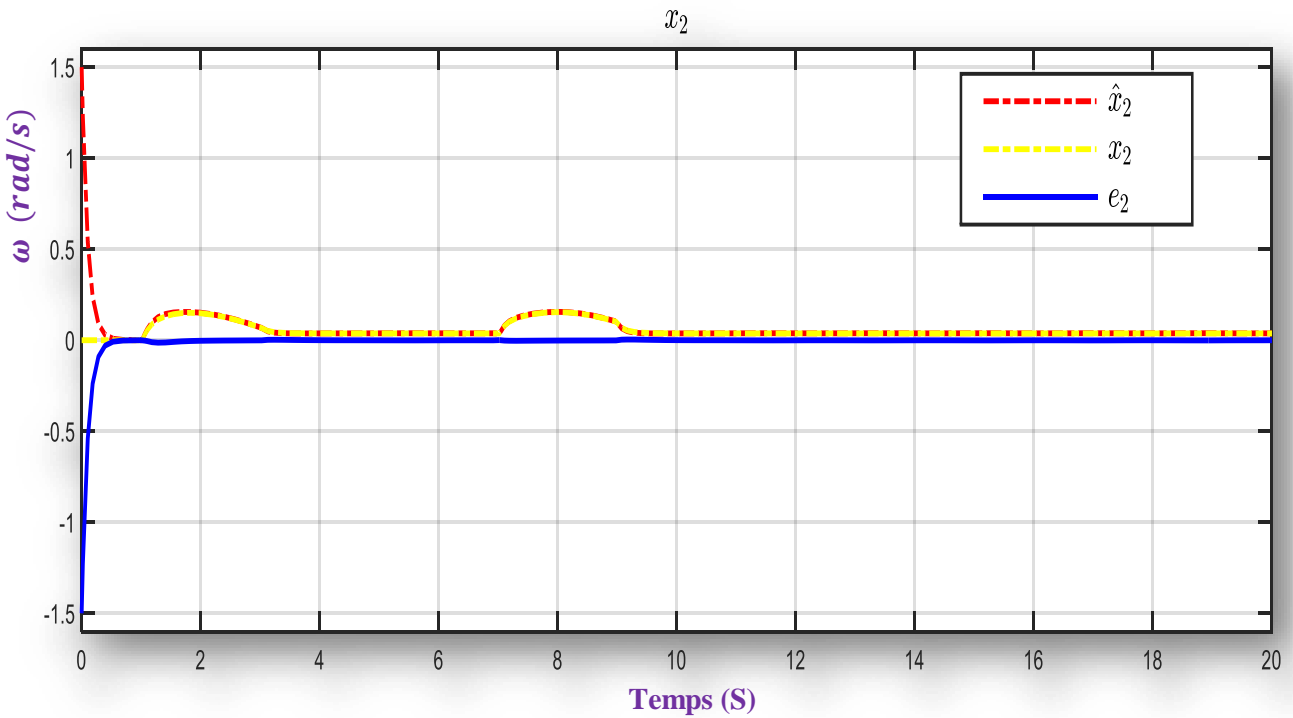


Figure.4. État réel  $x_2$ , état estimé  $\hat{x}_2$  et erreur d'estimation  $e_2$ .

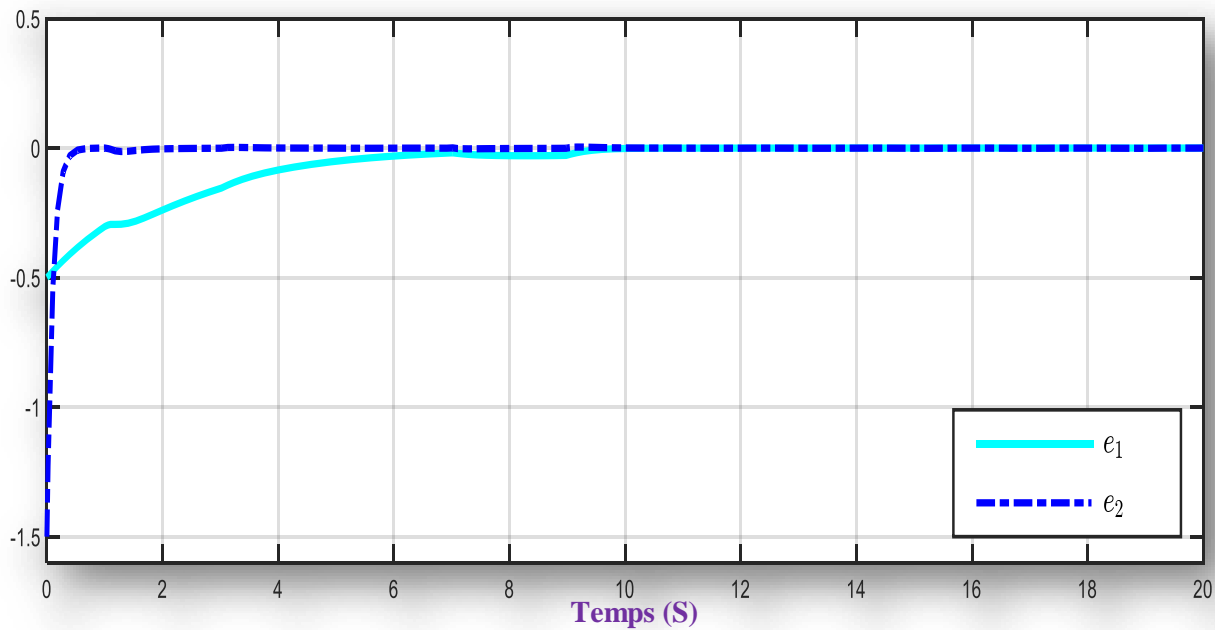


Figure.5. L'erreur d'estimation entre  $dc$  et  $dc1$ .

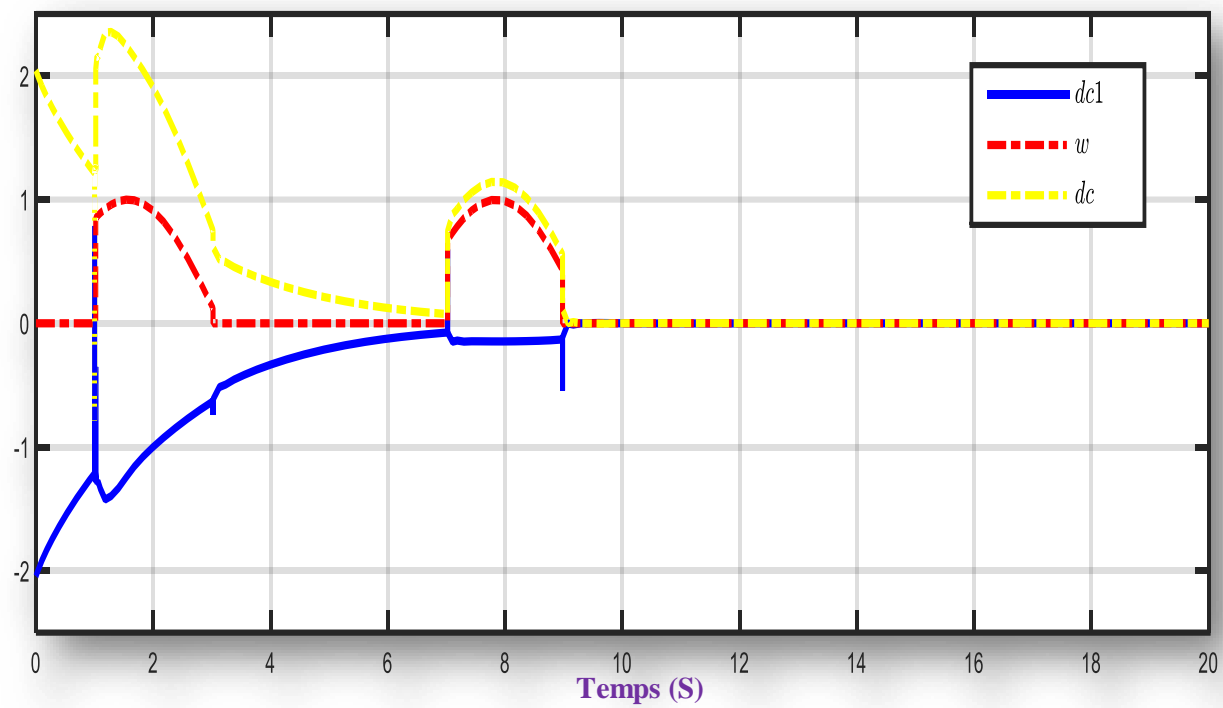


Figure.6. Perturbation réelle  $dc$ , perturbation estimée  $dc1$  et erreur d'estimation  $w$ .

Dans cet exemple, on suppose que les états ne sont pas mesurables et la perturbation est illustrée sur la figure 1. Il convient de noter que la perturbation de la figure 1 varie rapidement, la limite supérieure de cette perturbation est inconnue, et elle n'est pas générée par un système exogène, les méthodes des études précédentes ne peuvent donc pas s'appliquer à ce cas. À partir des Figures. 3-4, ils montrent que les états estimés  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  se rapprochent asymptotiquement des états réels  $x_1$  et  $x_2$  même avec l'effet de la perturbation. De plus, d'après la figure 6, il est évident que la perturbation estimée peut converger vers une perturbation réelle de manière asymptotique. Par conséquent, ces résultats de simulation prouvent que la méthode étudiée dans ce mémoire réussit à concevoir un observateur pour le système avec les perturbations.

## 2.5 Conclusion

Une nouvelle méthode pour concevoir un observateur pour estimer les états inconnus et les perturbations est abordée dans ce mémoire. Les conditions en terme de LMI pour synthétiser l'observateur ont été dérivées à travers deux théorèmes. Enfin, les résultats de simulation de l'application pour moteur à courant continu ont prouvé le succès de la méthode étudiée.

# ANNEXE

## 2.6 Programme sous Matlab

### a) Programme résolution de LMI et simulink

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Déclaration de constante%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
A=[-4, -0.03;0.75, -10];  
B=[2;0];  
C=[1, 0];  
D=[1;1];  
n=2;  
U=D*pinv(C*D);  
V=(eye(1) - (C*D)*pinv(C*D));  
I=pinv(C*D);  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%déclaration des variables%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
P=sdpvar(n);  
% % N=sdpvar(n);  
% % L=sdpvar(2,1);  
% % G=sdpvar(2,1);  
% % F=sdpvar(2,1);  
% % E=sdpvar(1,2);  
% % O=sdpvar(1);  
X=sdpvar(2,1);  
Q=sdpvar(2,1);  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Contraintes LMI%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
LMI=(A - (U*C*A))'*P+P*(A - (U*C*A)) - (V*C*A)'*X'-X*(V*C*A) -Q*C-C'*Q';  
H=set(P>0);  
H=H+set(LMI<0);  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%résolution de la LMI%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
solvesdp(H);  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Récupération des variables%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
P=double(P);  
X=double(X);  
Q=double(Q);  
  
LMI=double(LMI);  
vplmi=eig(LMI)  
Y=inv(P)*X;  
L=inv(P)*Q  
F=U+Y*V  
N=A-F*C*A-L*C  
G=B-F*C*B  
E=pinv(C*D)*C*A  
O=pinv(C*D)*C*B
```

```

x0=[0.1;1];
xc0=[0.5;1.5];

%%%%%Simulink%%%%%%%%

%sim('simulink_DC_motor')
sim('simulink_DC_motor_etage')
figure(1)
%subplot(221)
plot(t,xc(:,1))
hold on
plot(t,x(:,1),'r')
hold on
plot(t,e(:,1), 'c')
legend('xc1','x1','e1');
title('x1');
%subplot(222)
figure(2)
plot(t,xc(:,2));
hold on
plot(t,x(:,2),'r')
hold on
plot(t,e(:,2), 'b')
legend('xc2','x2','e2');
title('x2');
% subplot(223)
figure(3)
plot(t,e(:,1), 'c')
hold on
plot(t,e(:,2), 'b')
legend('e1','e2');
% subplot(224)
figure(4)
plot(t,w,'b')
title('Comportement des composantes de l''erreur d''estimation');
% subplot(224)
figure(5)
plot(t,dc1,'b')
hold on
plot(t,w,'r')
hold on
plot(t,dc,'y')
legend('dc1','w','dc');

```



## **b) Résultat d'exécution**

**Solver for LMI feasibility problems  $L(x) < R(x)$**

**This solver minimizes  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t*I$**

**The best value of  $t$  should be negative for feasibility**

**Iteration : Best value of  $t$  so far**

<b>1</b>	<b>-0.049414</b>
----------	------------------

**Result: best value of  $t$ : -0.049414**

**f-radius saturation: 0.000% of  $R = 1.00e+09$**

**vplmi =**

**-1.1243**

**-1.0733**

**L =**

**0.5000**

**4.7500**

**F =**

**1**

**1**

**N =**

**-0.5000 0**

**0.0000 -9.9700**

**G =**

**0**

**-2**

**E =**

**-4.0000 -0.0300**

**O =**

**2**

# Bibliographie

- [1] Kailath, T., Linear System, Prentice-Hall, 1980.
- [2] Kalman, R.E., on the general theory of control systems, in first IFAC World Congress, 1960.
- [3] Luenberger, D.G., Observers for multi variable systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 11 (2), pp. 190-197, 1966.
- [4] Szigeti, F. Kalman's rank condition for infinite-dimensional time-dependent systems, in Proc. Differential Eq. Conference: equadiff'91, pp. 927-931, 1991.
- [5] Khalil, H. K. ; Non Linear System, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [6] Slotine Jean-Jacques E, Weiping Li: « *Applied Non linear Control* », Massachusetts Institute of Technology, Prentice Hall, 1991.
- [7] C. Bennani. Stabilisation et estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaire et application. Master's thesis, Univ-Mouloud Mammeri, 2011.
- [8] M. Zeitz, Comments on 'comparative study of nonlinear state observation techniques'. Int. J. of Control, 46(5) : 1861-1863, 1987.
- [9] Kalman, R.E. and Bucy R.S, 1961. New results in linear filtering and prediction theory. J. Basic. Eng, page 95-108.
- [10] Boutayeb, M. et Darouach, M., Observers design for linear time varying systems. In proceeding of the 39th Conference on Decision and Control, pages 3183-3187, Sidney, Australia, 2000.
- [11] E. CHERRIER. Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires. Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2006.
- [12] S. BACHIR. Contribution au diagnostic de la machine asynchrone par estimation paramétrique. Thèse, Université de Poitiers, 2002.
- [13] A.H. JAZWINSKI. Stochastic processes and filtering theory. New York Academic.
- [14] G. CHEN. Approximate kalman filtering. World Scientific Series in Approximations and Decompositions, 1993.
- [15] F.E. THAU. Observing the state of non-linear dynamic systems. International Journal of Control, American Control Conference, San.Francisco, USA, 1993.
- [16] S. RAGHAVAN et J.K. HEDRICK. Observer design for a class of nonlinear systems. International, 1994.

- [17] J.-J. E. SLOLINEE, J. K. HEDRICK, and E. A. MISAWA. On sliding observers for non linear systems. American Control Conference, 1987.
- [18] S. H. Li, J. Yang, W. H. Chen, and X. S. Chen. *Disturbance Observer-Based Control Methods and Applications*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
- [19] W. H. Chen, J. Yang, L. Guo, and S. H. Li, “Disturbance-observer based control and related methods—an overview,” *IEEE Trans. Industrial Electron.*, vol. 63, no. 2, pp. 1083-1095, Feb. 2016.
- [20] X. Q. Lu, H. Y. Lin, and J. L. Han, “Load disturbance observer-based control method for sensorless PMSM drive,” *IET Electr. Power Appl.*, vol. 10, n. 8, pp. 735–743, 2016.
- [21] K. S. Kim and K. H. Rew, “Reduced order disturbance observer for discrete-time linear systems,” *Automatica*, vol. 49, pp. 968–975, 2013.
- [22] A. A. Apte, V. A. Joshi, R. A. Walambe, and A. A. Godbole, “Speed control of PMSM using disturbance observer,” *IFAC-Papers On Line*, vol. 49, no. 1, pp. 308–313, 2016.
- [23] D. Y. Kang, “Design of a disturbance observer for discrete-time linear systems,” *14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014)*, KINTEX, Gyeonggi-do, Korea, pp. 1381-1383, 2014.
- [24] X. W. Ma, J. H. Zhang, and J. Wang, “Design of disturbance observer based sliding mode control for fuzzy systems,” *IFAC Papers On Line*, vol. 50, no. 1, pp. 717–722., 2017.
- [25] J. H. Zhang, P. Shi, and W. G. Lin, “Extended sliding mode observer based control for Markovian jump linear systems with disturbances,” *Automatica*. vol. 70, pp. 140–147, 2016.
- [26] Y. L. Wei, W. X. Zheng, and S. Y. Xu, “Anti-disturbance control for non linear systems subject to input saturation via disturbance observer,” *Systems & Control Letters* vol. 85, pp. 61–69, 2015.
- [27] X. J. Wei, Z. J. Wu, H. R. Karimi, “Disturbance observer-based disturbance attenuation control for a class of stochastic systems,” *Automatica*, vol. 63, pp. 21–25, 2016.
- [28] J. D. J. Rubio, “Hybrid controller with observer for the estimation and rejection of disturbances,” *ISA Transactions*, vol. 65, pp. 445–455, 2016.
- [29] Van-Phong Vu and Ton Duc Do, “*Disturbance Observer Synthesis for Linear Systems: Application for DC Motor*”. In International Conference on System Science and Engineering (ICSSE), 2019.
- [30] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A.; *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*. SIAM, 1994.
- [31] Boyd, S., EL Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. ; *Linear matrix inequalities in system and control theory*. In SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.