

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOU MAMMARI DE TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



Mémoire de Magister

Spécialité : Electrotechnique

Option : Entraînements électriques

Présenté par :

AIT HAMOU Assia

Thème

Mise en œuvre d'un modèle couplé analytique-numérique pour la détection de défauts à vitesse élevée

Devant le jury composé de :

BENFDILA Arezki Professeur, Université de Tizi-Ouzou,	Président
MOHELLEBI Hassane, Professeur, Université de Tizi-Ouzou,	Rapporteur
MOKDAD Rabah, Professeur, Université de Tizi-Ouzou,	Examineur
OULD OUALI Samy Hassani, Maitre de conférences B, université de Tizi-Ouzou,	Examineur

Soutenu le : 12/03/2015

Remerciements

Comme le veut la tradition, je vais tenter de satisfaire au difficile exercice de la page des remerciements, peut-être la tâche la plus ardue de ces années de thèse.

Non qu'exprimer ma gratitude envers les personnes en qui j'ai trouvé un soutien soit contre ma nature, bien au contraire. La difficulté tient plutôt dans le fait de n'oublier personne. C'est pourquoi, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers mon directeur de mémoire, Monsieur Hassane MOHELLEBI, Professeur à l'UMMTO, aussi bien pour son aide précieuse que pour ses qualités humaines. Malgré les nombreuses sollicitations, il m'a toujours consacré le temps nécessaire pour être guidé efficacement. Avec sa grande rigueur scientifique et ses remarques toujours utiles, j'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.

Je remercie Monsieur Arezki BENFDILA, Professeur à l'UMMTO de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de soutenance.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur MOKDAD Rabah, Professeur, Université de Tizi-Ouzou et Monsieur Samy Hassani OULD OUALI, MCB à l'UMMTO, pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers Messieurs Meziane HAMEL doctorant à l'UMMTO et Farid HOCINI MCB à l'UMMTO, pour leur aide durant la préparation de ce travail. Je les remercie également pour tous les conseils qu'ils m'ont apportés et pour tous les encouragements qu'ils n'ont cessé de me prodiguer.

Je dédie ce travail

A ma très chère fille

A mon mari bien aimé Aichour Mohammaed

A mes très chers parents

A mes bons parents

A mes frères et leur femme et sœurs et leur mari

A mes dons frères et belle sœurs et leur mari

A tous ceux qui me sont chère

Sommaire

Introduction générale.....	5
Chapitre I : Généralités sur le Contrôle Non Destructif	
I.1. Introduction :.....	7
I.2. Historique :	8
I.3. Différentes techniques du C N D :	8
I.3.1. Examen visuel :	8
➤ Avantages :.....	9
➤ Inconvénients :.....	9
I.3.2. Ressuage :.....	9
➤ Avantage.....	9
➤ Inconvénients.....	9
I.3.3. Radiographie :	10
➤ Avantage.....	10
➤ Inconvénients.....	10
I.3.4. Contrôle par Ultrasons :	11
➤ Avantage.....	11
➤ Inconvénients.....	12
I.3.5. Flux de fuite magnétique (magnétoscopie) :	12
➤ Avantages.....	13
➤ Inconvénients.....	13
I.3.6. Thermographie.....	14
➤ Avantages.....	14
➤ Inconvénients	14
I.4. Le contrôle non destructif par courants de Foucault	15
I.4.1 Contexte du contrôle par courants de Foucault.....	15
I.4.2 Principe de la méthode des courants de Foucault.....	16
I.4.3 Produits contrôlés	18
I.4.4 Facteurs affectant la réponse de la bobine.....	18
I.4.5 Les types de sondes.....	19
I.4.5.1 Sonde à double fonctions.....	19
I.4.5.2 Capteur à fonctions séparées.....	20
I.4.5.3 Sonde différentielle.....	21
I.4.6 Plan d'impédance normalisé.....	21

Sommaire

1.4.7 Traitement du signal recueilli.....	23
1.5 Modes d'excitation	24
1.5.1 Contrôle mono-fréquence.....	24
1.5.2 Contrôle par courants de Foucault pulsés.....	24
1.5.3 Technique à fréquences multiples.....	25
1.5.4 Balayage en fréquence.....	26
1.5.5 Autres techniques.....	26
1.6 Avantages des courants de Foucault.....	27
1.7 Limites des techniques de courants de Foucault.....	27
1.8 Conclusion	28
Chapitre II : Méthodes Numériques et Formulation Éléments Finis	
II.1 Introduction.....	29
II.2 Equations de Maxwell.....	29
a. Forme différentielle des équations de Maxwell.....	29
b. Forme intégrale des équations de Maxwell.....	30
c. Les lois constitutives du milieu.....	31
II.3 Méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	34
II .3.1 Méthode des différences finies.....	35
a. Introduction :.....	35
b. Approximation des dérivées :.....	36
c. Système matriciel :.....	36
II .3.2 La méthode des éléments finis	37
II .3.2.1 Introduction.....	37
II .3.2.2 Types de la formulation des problèmes.....	37
a. Formulation variationnelle :.....	37
b. Formulation résidus pondérés :.....	39
II .3.2.3 Le principe de la méthode des éléments finis :.....	39
II .3.2.4 Discrétisation du domaine d'étude:.....	40
a) Éléments de références :.....	41
b) Fonction d'interpolation:.....	42
b.1) Principe de l'état complet:.....	42
b.2) Principe de compatibilité:.....	42
c) Fonction d'interpolation sur un élément:.....	42

Sommaire

d) Calcul de la fonction d'approximation.....	43
II.3.2.5 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques :.....	45
II.3.2.5.1 équation magnétostatique:.....	45
a) cas cartésien:.....	45
b) cas axisymétrique:.....	47
II.3.2.5.2 Equation magnétodynamique:.....	48
a) cas cartésien:.....	48
b) cas axisymétrique:.....	50
II.3.3 Méthode d'équations intégrales de frontières(MIF):.....	51
II.4. Conclusion:.....	51
Chapitre III : Modèles Analytiques et Méthodes Couplées	
III.1 Introduction:.....	52
III.2. Modèle analytique en coordonnées cylindrique :.....	52
III.2. 1. Equation électromagnétique dans la région non conductrice:.....	52
III.2. 2. Méthode de résolution:.....	52
III.2. 3. Définition des conditions aux limites sur la frontière de la région analytique:.....	53
III.2.4. Solution utilisant les fonctions de Bessel :.....	54
III.2.5. Solutions Elémentaires:.....	55
III.3. Modèle analytique en coordonnées cartésien:.....	60
III.3.1. Equation électromagnétique 2D cartésienne :	60
III.3. 2. Domaine de résolution analytique et conditions aux limites:.....	60
III.3. 3. Résolution :.....	61
a. Définition des problèmes élémentaires:.....	61
b. Solution globale:.....	62
III.4. Méthodes Couplée:	62
III.4.1 Formulation éléments finis-analytique:	62
a. Formulation éléments finis du problème couplé axisymétrique.....	62
b. Formulation éléments finis du problème couplé cartésien.....	65
III.4.2. Formulation éléments finis intégrales de frontières :	67
III.4.3 Formulation élément finis-impédance de surface :.....	69
Chapitre IV. Application : Simulation du mouvement du capteur dans un dispositif CND	
IV. Application à la simulation du mouvement du capteur dans un dispositif CND :.....	72
IV. 1. Cas d'un dispositif CND axisymétrique :.....	72

Sommaire

IV. 1.1. Structure géométrique :.....	72
IV.1. 2. Propriétés physiques :	72
IV.1.3. Formulation électromagnétique du problème :.....	72
IV.1. 4. Domaine d'étude et conditions aux limites :.....	73
IV.1. 5 Maillage du domaine d'étude :.....	74
IV. 1.6. Résultats :.....	75
a. Distribution du potentiel vecteur magnétique A :.....	75
b. Effet de la position du capteur sur la répartition de A.....	80
c. Allure de la densité de courant induit par le mouvement en fonction du déplacement :.....	81
d. Etude de l'effet de la vitesse Cas axisymétrique ($f=50$ kHz) :.....	82
e. Comparaison des résultats pour différentes valeur de la vitesse de déplacement :.....	86
f. Étude de l'effet de la fréquence sur la répartition de la densité de courant induit ($v=25$ m/s) Cas axisymétrique :.....	88
g. Comparaison des temps de résolution :.....	91
IV. 2. Etude d'un dispositif de contrôle non destructif en coordonnées cartésiennes :.....	91
IV. 2.1. Structure géométrique :.....	92
IV. 2.2. Caractéristiques géométriques :.....	92
IV. 2.3. Propriété physiques :.....	92
IV.2.4. Domaine d'étude et conditions aux limites :.....	93
IV.2. 5 Maillage du domaine d'étude :.....	93
IV. 2.6. Résultats :.....	94
a. Résultats en terme de potentiel vecteur magnétique A :.....	94
b. Effet de la position du capteur sur la répartition du potentiel vecteur magnétique :.....	101
c. Allure de la densité de courant induit par le mouvement en fonction du déplacement :.....	106
d. Effet de la fréquence sur la répartition de la densité de courant induit :.....	107
e. Etude de l'effet de la vitesse Cas cartésienne ($f=50$ kHz) :.....	110
f. Comparaison des résultats pour différentes triangle de l'inducteur :.....	112

Sommaire

Conclusion générale:.....	113
Bibliographie :	

Introduction Générale

Introduction

Le domaine du contrôle non destructif (CND) est un domaine qui prend de plus en plus de l'importance compte tenue des exigences de la maintenance des dispositifs et structures utilisés dans l'industries et science de l'ingénieur.

Les techniques du contrôle non destructif utilisées sont nombreuses, on pourra citer parmi celles-ci :

- l'examen visuel
- Le ressuage
- La radiographie
- Le contrôle par Ultrasons
- Le flux de fuite magnétique (magnétoscopie)
- La thermographie
- Le contrôle par courants de Foucault

La technique du contrôle non destructif par courants de Foucault (CND-CF), objet d'intérêt dans le cadre de ce mémoire, à été appliqué à la détection de défauts dans les pièces conductrices, les matériaux composites, les matériaux magnétique,...etc. la deuxième phase de l'étude dans le domaine du contrôle non destructif est l'évaluation non destructif qui concerne la reconstitution du défaut en exploitent les méthodes de traitement de problème inverse sur la base d'algorithme d'optimisation.

La modélisation d'une configuration réelle du contrôle non destructif par courants de Foucault ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et fait appel à des méthodes numériques (éléments finis, volumes finis, différences finies domaine temporel). Parmi celles-ci, la méthode des éléments finis (MEF) qui permet de prendre en compte des géométries complexes de sondes et de pièces et la non-linéarité des propriétés physique des matériaux à inspecter reste de loin la plus performante, l'emploi de cette méthode reste imprécise pour la prise en compte du mouvement et aboutit à des systèmes algébriques de tailles énormes dans certaines situation, pour remédier à cet inconvénient, une méthode couplée analytique- numérique a été utilisée dans ce mémoire. Les méthodes couplées proposées ont pour objectif d'éviter le maillage d'une région, ce qui permet de diminuer la taille des problèmes, l'espace mémoire nécessaire au stockage et à la résolution, le temps de résolution et le coût de résolution lié à l'opération.

Plusieurs études ont été menées pour la détection de défauts dans les matériaux en modes absolu, différentiel en considérant le régime statique (MFL : Magnetic Flux Lia

Introduction

kage), le régime harmonique (CF : courants de Foucault) et le régime pulsé (alimentation transitoire). Dans les précédentes études, la vitesse de déplacement du capteur n'est pas prise en considération dans la modélisation (considérée faible). Pour notre part, on se propose de mener une étude sur l'effet de la vitesse de déplacement du capteur sur la densité de courant induit résultant du mouvement en vue de prévoir la conséquence sur la fiabilité des mesures effectuées lors de l'opération d'inspection.

Les applications à considérer concernant :

- L'inspection d'un pipeline dont l'étude est menée en coordonnées cylindrique
- Le contrôle du rail de train en considérant un défaut dans le plan cartésien $[x, y]$.

Pour la concrétisation du travail, ce mémoire est organisé comme suit :

Pour qu'on puisse mener à bien l'étude du phénomène électromagnétique intervenant dans les dispositifs de CND-CF, nous présentons d'abord une recherche bibliographique et une description détaillée de certains dispositifs qui feront l'objet du premier chapitre.

Le deuxième chapitre traite brièvement des équations électromagnétiques déduites des équations de Maxwell. Différentes méthodes numériques de résolution ont été présentées. La méthode des éléments finis utilisée dans le cadre de ce travail est présentée plus en détail dans ce chapitre.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes analytiques qui présentent l'avantage, au prix d'hypothèses simplificatrices, de représenter correctement les phénomènes physiques étudiés et une mise en œuvre relativement avantageuse. La formulation éléments finis des modèles couplés est aussi fournie.

Le quatrième chapitre est dédié à l'application et à la validation des modèles couplés analytique numérique (axisymétrique, cartésien) mis en œuvre pour la simulation du mouvement dans le but d'évaluer l'effet de la vitesse sur la densité de courant aux bornes du capteur.

La présente étude se termine par une conclusion

Chapitre I

Généralités sur le Contrôles Non Destructifs

I.1 Introduction :

Dans l'industrie, les exigences de fiabilité, de réduction des coûts et de sécurité deviennent de plus en plus contraignantes. Au niveau de la production, il faut dimensionner les pièces au plus juste tout en garantissant leurs disponibilités et leurs performances. Durant l'exploitation d'un produit industriel, son maintien en état de marche dans de bonnes conditions de sécurité nécessite une bonne connaissance de l'évolution des pièces qui le constitue. Cette connaissance implique en particulier de réaliser des contrôles ne portant pas atteinte à l'intégrité des pièces et en entravant le moins possible la disponibilité du produit. Ceci justifie l'importance croissante que prend le contrôle non destructif (CND) [1].

Le contrôle non destructifs par courants de Foucault (or Eddy Current Testing: ECT) est un des plus importants dans l'industrie. Il permet donc d'inspecter un matériel conducteur sans y provoquer sa destruction [2].

Les applications générales de la méthode CND sont la détection de défauts, la mesure d'épaisseur et l'identification de métaux et des alliages.

Des exemples spécifiques dans les industries de métaux sont l'inspection de tubes ou de barres lors de leurs fabrications. La méthode est aussi utilisée dans le domaine de l'aéronautique (détection de fissures), de l'évaluation des dommages par la chaleur et la détection de couches de corrosion cachées [2].

On distingue diverses techniques [3, 4, 5] dont principalement :

- Les ultrasons,
- Les rayons X ou Gamma,
- Le ressuage ou la thermographie infrarouge,
- La magnétoscopie,
- Les courants de Foucault.

Le choix de l'une d'entre elles dans une application est basé par la nécessité que les propriétés de la pièce à contrôler soient compatibles avec le phénomène physique mis en jeu [6].

Le CND, repose sur un ensemble de méthodes qui permettent de caractériser l'état d'intégrité des structures industrielles, sans les abîmer, soit au cours de la production soit en cours d'utilisation.

Il faut donc choisir, pour chaque opération de contrôle, la méthode adéquate en fonction du type de défaut, des caractéristiques de la pièce, des conditions de mise en œuvre [7].

I.2. Historique :

Le contrôle non destructif constitue un champ d'application privilégié des découvertes de la physique.

Aussi l'histoire du contrôle non destructif commence-t-elle avec celle de la physique moderne à la fin du XIX siècle qui a débuté par la découverte des rayons X puis des courants de Foucault, etc. Ce n'est toutefois qu'à partir de la seconde guerre mondiale que les techniques de contrôle non destructives ont pris leur essor dans l'industrie, en particulier dans la métallurgie : contrôle des aciers, radiographie des soudures. Une importante accélération du progrès et du développement du contrôle non destructif s'est manifestée ensuite vers les années 1960-1970 avec le développement rapide de secteurs très demandeurs tels que les centrales électriques nucléaires ou encore l'aéronautique.

Aujourd'hui, les champs d'application s'étendent de plus en plus et celui-ci devient un outil incontournable dans l'approche qualité. La plupart des techniques consistent à exciter la pièce contrôlée par un signal physique adapté et à recueillir la réponse de la pièce qui doit caractériser son état et plus particulièrement la présence d'un défaut [1,7].

I-3- Différentes techniques du C N D :

Les techniques non destructives doivent s'adapter aux matériaux que nous souhaitons contrôler. Dans le cas des métaux, et pour un contrôle au sein du métal, il faut exploiter les phénomènes physiques qui permettent de pénétrer dans le métal et sélectionner celui qui permet le mieux de fournir les informations requises par l'utilisateur.

Actuellement, pour la plupart des métaux, il existe différents moyens de pénétrer au sein de la matière.

Il existe plusieurs techniques de CND, elles peuvent être classées comme suit :

I-3-1-Examen visuel :

L'inspection visuelle est la plus ancienne procédure de contrôles non destructifs. Il peut être aidé, par un éclairage classique ou laser. Il reste cependant sujet aux inconvénients liés à l'œil humain, c'est-à-dire une faible productivité et une certaine subjectivité, entraînant un manque de fiabilité. Les résultats prospères ont dépendu de la compétence de l'opérateur, le bon nettoyage, illumination adéquate de la zone inspecté et la qualité de l'instrument optique. Ces facteurs sont encore importants aujourd'hui, mais le matériel est devenu beaucoup plus sophistiqué. Habituellement, l'inspection

visuelle ne peut pas être utilisée pour vérifier des résultats de test, ni ce peut être utilisé pour remplacer d'autres méthodes de CND [8, 9, 10, 11]

- **Avantages**

- Examen simple, rapide et pas coûteux;
- Souplesse d'inspection.

- **Inconvénients**

- Détection limitée aux défauts superficiels;
- La surface doit être propre;
- Pas d'interruption des parcours optiques entre l'œil et la pièce examinée.

I.3.2-Ressuage :

Le ressuage est un moyen de recherche des défauts superficiels qui consiste en l'amélioration de l'inspection visuelle de défectuosité. Cet essai permet de déceler les défauts qui apparaissent à la surface. Il est appliqué dans le cas des matériaux non magnétiques (alliages à base d'Al, de Cu, de Ti, aciers inoxydables, etc.). Son mode d'emploi est très simple. Il consiste à l'aspiration du pénétrant par la couche poudreuse du révélateur, le mécanisme de révélation des défauts par ressuage correspond aux quatre phases, application du pénétrant suivie d'un temps d'imprégnation, élimination de l'excès du pénétrant sur la surface de la pièce, ressuage du pénétrant par disposition d'une couche de « révélateur » sur la surface. L'image des défauts apparaîtra à l'observateur dans la mesure où l'étalement du pénétrant sur le révélateur conduit à une nette variation de couleur ou de luminance [1, 11, 12].

- **Avantages**

- Facilité de mise en œuvre et relativement sensible aux fissures débouchant ;
- Appliqué sur les matériaux diélectriques et non ferromagnétique.

- **Inconvénients**

- Limite de l'application sur les matériaux non poreux ;
- L'interprétation des résultats est subjective: Il est impossible de déterminer les dimensions exactes des défauts ;
- Danger des solvants toxiques, corrosifs et inflammable.

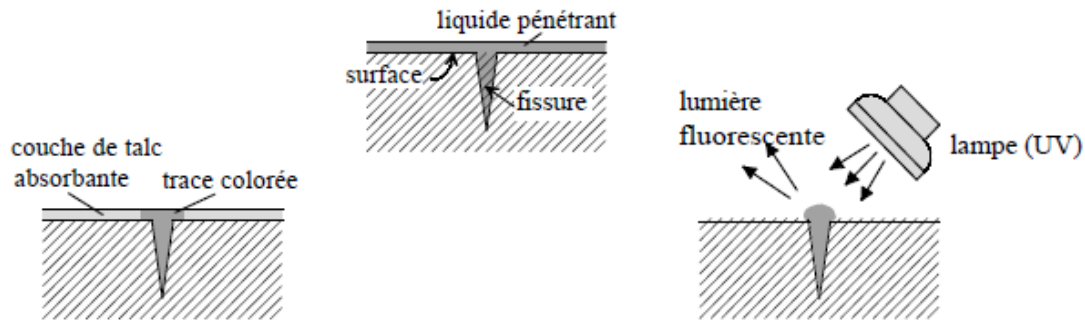


Figure 1.1 – Les contrôles par ressuage

I.3.3-Radiographie :

La radiographie est une méthode couramment employée pour contrôler l'intérieur d'une pièce. Il s'agit de traverser la matière à examiner par un rayon ionisant de très courte longueur d'onde. En franchissant la pièce, l'énergie des photons de ce rayon est partiellement absorbée par la matière rencontrée selon sa densité.

Un détecteur (film, écran...) est placé derrière la pièce et fournit un radiogramme de la zone traversée. Les défauts sont représentés dans cette image par une variation locale de l'intensité [1].

○ Avantages

- Contrôle des objets de forme compliquée ;
- Facile à Transporté (générateurs de rayons X de faibles énergies, appareils de radioactive portatifs);
- Apprécier la nature et la taille des défauts.

○ Inconvénients

- L'interprétation des images demande un niveau d'expertise de l'opérateur;
- Mise en œuvre des dispositifs et procédures de protection du personnel;
- Cette technique est extrêmement coûteuse et impose des conditions de sécurité ;
- Le risque de ne pas détecter les fissures se présentant selon l'axe du faisceau.

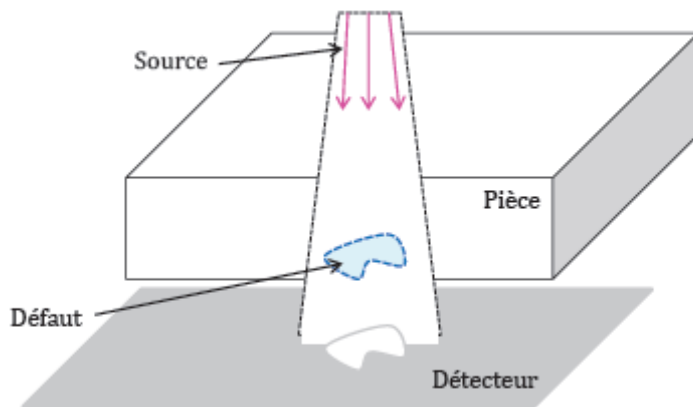


Figure 1.2- Principe de la radiographie.

I.3.4-Contrôle par Ultrasons :

Le contrôle non destructif par ultrasons consiste à générer une onde ultrasonore qui se propage dans la pièce à contrôler par un transducteur piézoélectrique et analyser sa propagation.

L'onde ultrasonore est réfléchiée par le fond de la pièce et par d'éventuelles discontinuités présentes dans le matériau. La localisation d'un défaut dans la profondeur de la pièce se fait grâce à la position de son écho obtenu sur l'échogramme. L'amplitude relative des différents échos peut renseigner sur l'importance du défaut. Toutefois, les anomalies de surface sont difficilement détectables. La méthode peut être appliquée à tous les matériaux qui ne présentent pas une très forte atténuation ni une anisotropie très importante à l'instar des matériaux métalliques, composites, céramiques etc. [13]. Elle offre une grande sensibilité de détection qui peut atteindre par exemple 1 mm à 0,2 mm dans le cas de l'acier, et permet la détection de défauts localisés dans le volume de pièces d'épaisseur importante.

o Avantages

- Grand pouvoir de pénétration (plusieurs mètres dans l'acier forge).
- Haute sensibilité de détection de défauts, notamment pour la recherche des défauts plans (dépend de la fréquence de l'onde ultrasonore);
- Détection, localisation et dimensionnement des défauts;
- Inspection et détection en temps réel.

o Inconvénients

- Sensible à la nature et à l'orientation des défauts;
- Technique souvent très coûteuse (investissement, temps de contrôle) ;
- Inspection limitée par la complexité de la forme de la pièce contrôlée.

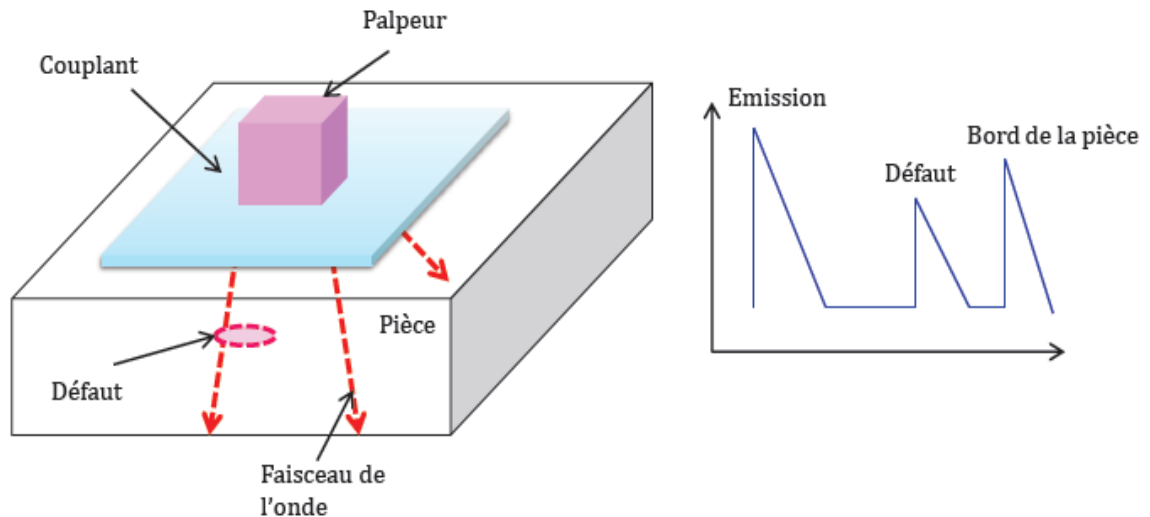


Figure 1. 3 – Principe des ultrasons.

I.3.5 -Flux de fuite magnétique (magnétoscopie) :

Appliquée exclusivement sur des matériaux ferromagnétiques (fer, acier, fonte, ...), la magnétoscopie est une méthode de contrôle non destructif qui permet de détecter des discontinuités débouchant en surface ou sous-cutanées. Comparée au ressuage, elle est donc plus restrictive mais elle lui est préférée, quand elle est applicable, car elle est beaucoup plus rapide [13, 14].

La magnétoscopie consiste à aimanter la pièce à contrôler, ou une partie de celle-ci, à l'aide d'un champ magnétique constant et suffisamment élevé figure 1.4. L'existence de discontinuités de surface ou sous-jacentes provoquent une distorsion des lignes de force du champ magnétique qui génère des flux de fuite. Ces flux sont mis en évidence par des révélateurs magnétiques micronisés et déposés sur la surface de la pièce. En attirant les particules du révélateur, les flux de fuite fournissent des signatures particulières des discontinuités. Cependant, une meilleure détection n'est obtenue que si les discontinuités se situent perpendiculairement aux lignes de force du champ magnétique. Pour détecter toutes les discontinuités à la surface d'une pièce, il faut effectuer deux aimantations orthogonales l'une par rapport à l'autre.

Comme le ressuage, la magnétoscopie est une méthode globale et permet la détection de tous les défauts de surface ou légèrement sous-jacents. Néanmoins, elle ne s'applique qu'à des matériaux ferromagnétiques et ne permet pas l'appréciation de la profondeur des défauts, ce qui rend l'interprétation lors de la phase de révélation très délicate. En outre, après chaque contrôle d'un matériau, celui-ci peut nécessiter une désaimantation.

○ Avantages

- Simple, peu coûteux et rapide ;
- Détection des défauts débouchant et sous-jacents.

○ Inconvénients

- Applicable seulement aux matériaux ferromagnétiques ;
- Aimantation dépend de la perméabilité de la pièce examinée ;
- La sensibilité de détection des défauts dépend en effet de la nature, de la direction et de l'intensité de la magnétisation de la pièce.

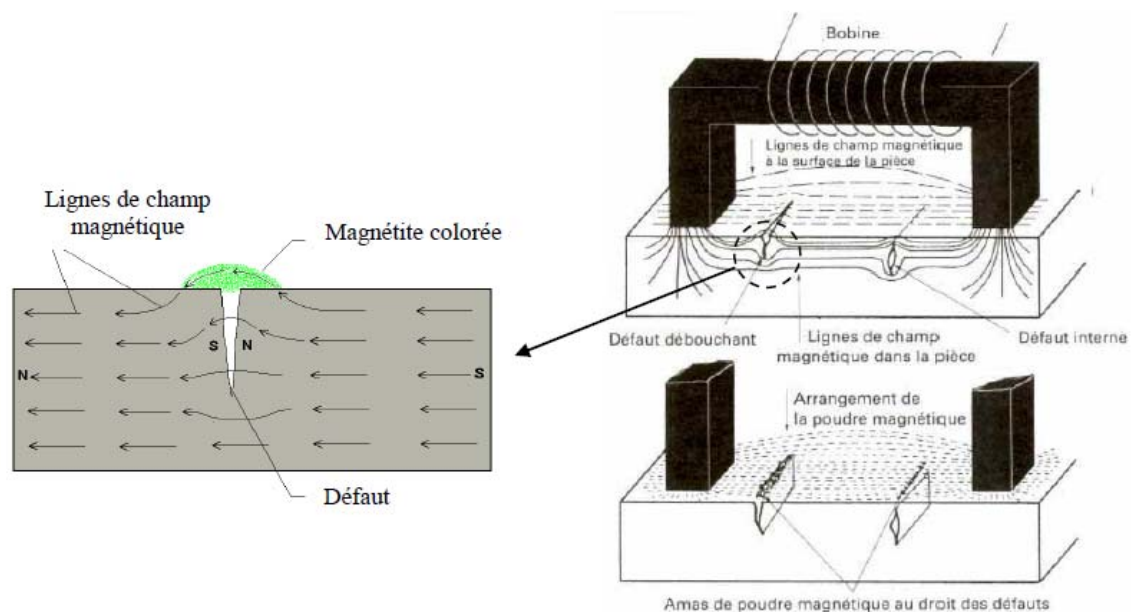


Figure 1. 4 – Inspection par magnétoscopie.

I.3.6 Thermographie

Le contrôle non destructif par thermographie (Thermography Testing en anglais) est utilisé pour déceler des défauts volumiques et des défauts de surface. En produisant un échauffement local et homogène dans la structure à contrôler, on peut observer l'évolution de la température à l'aide d'une caméra thermographique. Ainsi, les défauts présents jouent le rôle d'obstacles à la transmission de la chaleur dans le matériau et engendrent des anomalies thermiques qui peuvent être détectées par la caméra.

On distingue la thermographie passive où l'apport de la chaleur qui provoque l'élévation de température est extérieur, et la thermographie active qui suppose que le chauffage soit obtenu par une sollicitation mécanique interne [14]. Les principaux avantages de cette méthode résident dans la possibilité d'effectuer un contrôle sans contact avec une bonne qualité des résultats qui est liée à l'utilisation de caméras très sensibles. Ses inconvénients sont la lenteur du phénomène de propagation de la chaleur et le coût élevé de l'investissement.

Parmi les avantages et les inconvénients de cette méthode :

- **Avantages**

- Méthode sans contact ;
- Toute l'épaisseur de la pièce est généralement contrôlée ;
- Les cavités (champs de bulles d'air, fissures, délaminages, ...) sont bien détectées ;
- La sensibilité à la détection des défauts de faibles dimensions ;
- L'archivage des résultats est garanti à l'aide de la caméra infrarouge.

- **Inconvénients**

- Des difficultés de mesure liées aux effets perturbateurs ;
- Des difficultés de localisation de la profondeur des défauts, du fait que l'image obtenue donne une projection de ces derniers sur le plan de la pièce testée ;
- L'interprétation des mesures pas toujours facile, surtout pour identifier la nature des défauts ;

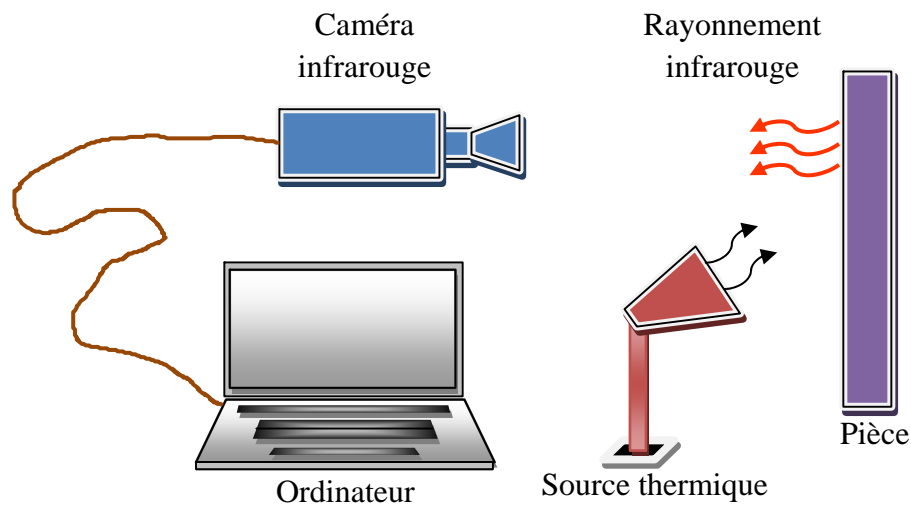


Figure 1.5 - Principe du contrôle par thermographie

I.4 Le contrôle non destructif par courants de Foucault

I.4.1 Contexte du contrôle par courants de Foucault

Le développement de la technique de contrôle non destructif par courants de Foucault (physicien français 1819-1869) a été rendu possible grâce à la découverte de l'induction électromagnétique, en 1831, par Michael Faraday (physicien et chimiste britannique 1791-1867) [15]. En 1879, David Hughes (physicien britannique 1831-1900) a été le premier à avoir fait des essais non destructifs par courants de Foucault [15]. Il a enregistré des changements des propriétés d'une bobine quand elle est placée à proximité de métaux de différentes conductivité et perméabilité. Dans les années 1950 et 1960, des travaux considérables ont été brillamment menés et ont permis de régler plusieurs questions qui relèvent non seulement de la théorie mais aussi de l'expérimental. De nos jours, les essais non destructifs par courants de Foucault sont devenus une technique largement utilisée dans différents secteurs de l'industrie, particulièrement dans l'industrie aéronautique et nucléaire, vu qu'elle est suffisamment précise et facilement assimilable [16, 17].

La méthode des courants de Foucault est utilisée principalement dans deux types d'applications [18, 19]. Le premier type consiste à détecter des défauts dans des pièces

métalliques, qui peuvent se présenter sous forme de fissure surfacique ou sous-jacente [20]. Ce type d'application est évidemment très important car les défauts peuvent être dangereux, et dans ce cas, la pièce doit être soit jetée soit réparée. Comme les courants de Foucault ont tendance à se concentrer sur la surface de la pièce inspectée, alors ils ne peuvent être utilisés que pour détecter des défauts non loin de la surface. Dans ce premier type, on parle de contrôle non destructif (CND). Le deuxième type consiste à évaluer les propriétés électromagnétiques d'un produit ou d'un défaut à savoir la conductivité électrique [21, 22] la perméabilité magnétique [23, 24] ou encore les grandeurs géométriques [25]. Les courants de Foucault dépendent directement de la conductivité électrique et de la perméabilité magnétique d'un matériau. Par conséquent, ils peuvent être utilisés, par exemple, pour trier des matériaux conducteurs car souvent différents matériaux présentent des conductivités différentes. Etant donné que la conductivité électrique et la perméabilité magnétique peuvent être liées à des caractéristiques structurelles telles que la dureté, la composition chimique, la granulométrie et la résistance des matériaux, nous pouvons également appliquer les techniques de courants de Foucault pour différencier les propriétés d'un revêtement liées à la structure de ce dernier et aux conditions de son dépôt [26]. Ces techniques peuvent également être utilisées pour mesurer l'épaisseur d'un revêtement allant de quelques micromètres à quelques millimètres [16, 17, 27]. Dans ce deuxième type d'application on parle d'évaluation non destructive (END).

En résumé, la technique des courants de Foucault peut être appliquée à tout type de matériaux conducteurs pour :

1. détecter des fissures ou des failles,
2. détecter une corrosion,
3. mesurer les caractéristiques géométriques d'une pièce ou d'un défaut,
4. mesurer les caractéristiques physiques (conductivité électrique et perméabilité magnétique).

I.4.2 Principe de la méthode des courants de Foucault

Le contrôle par courants de Foucault est l'une des méthodes qui est basée sur le principe du champ magnétique induit. Quand une bobine est alimentée par un courant variable dans le temps (comme le montre la figure 1.6), un champ magnétique est créé

au voisinage de la bobine. Placée à proximité d'un matériau conducteur, cette bobine créera, dans celui-ci, des courants induits, appelés courants de Foucault, par l'induction en vertu de la loi de LENZ. Ces mêmes courants induits créent à leur tour, selon la loi de Lenz, un champ magnétique qui s'oppose au champ d'excitation qui leur a donné naissance. Il apparaît alors un champ magnétique résultant dont dépend fortement la valeur de l'impédance de la bobine. En présence d'une anomalie dans la pièce contrôlée, la circulation des courants induits est perturbée, entraînant ainsi une variation de l'impédance apparente de la bobine.

Ce phénomène d'induction peut, en effet, être exploité pour étudier l'intégrité de pièces conductrices. Une fente située en regard de la bobine comme l'illustre la figure 1.7, va directement affecter et réduire les courants induits dans la pièce. Ainsi l'impédance de la bobine va augmenter car les courants induits auront diminués. Donc, la modification des courants de Foucault dans la pièce peut être détectée en connaissant simplement le courant dans la bobine.

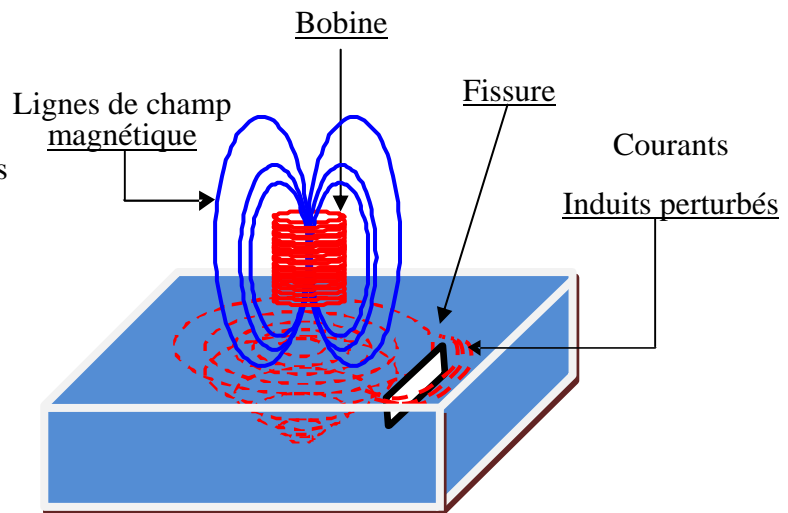
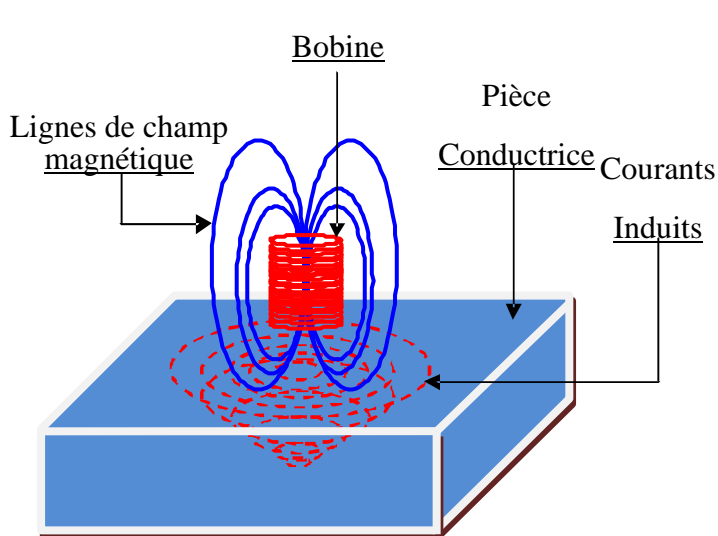


Figure 1.6 - Principe des courants induits

Figure 1.7 - Courants induits perturbés par une fissure

I.4.3 Produits contrôlés

Le contrôle non destructif par courants de Foucault peut être utilisé pour n'importe quel milieu à condition que celui-ci soit conducteur d'électricité. Cependant, dans la pratique, ce sont essentiellement les produits de forme cylindriques, tels que les barres et tubes, ainsi que plane (rail,..) qui couvrent la plupart des applications [14]. En effet, les tubes de faible épaisseur, tels qu'ils sont utilisés pour les éléments combustibles ou condenseurs et échangeurs de vapeur dans les centrales nucléaires, les plaques utilisées en aéronautique représentent les domaines d'application les plus importants du contrôle par courants de Foucault (Aviation ?). L'avantage avec cette méthode est qu'il est possible d'assurer un contrôle rapide à des cadences avoisinant 2m/s tout en garantissant la détection de défauts dont le seuil de profondeur soit d'environ 0.1 mm. Pour s'adapter à des conditions particulières et augmenter la fiabilité des produits dans ce secteur d'activités, des développements de méthodes et appareils de contrôle ont été réalisés [28].

En plus des produits cylindriques, on trouve toutes les pièces à forte concentration de contraintes utilisées dans l'industrie aéronautique, et dont le nombre est relativement important, qui sont concernées par le contrôle par courants de Foucault [29]. A titre d'exemple, le contrôle d'impacts sur les bords d'attaque des aubes du premier étage du compresseur, causés par un passage de débris, est assuré par des capteurs spéciaux déplacés manuellement.

I.4.4 Facteurs affectant la réponse de la bobine

En plus des défauts, plusieurs autres facteurs peuvent affecter la réponse d'une bobine. Le signal recueilli aux bornes de la bobine est une combinaison d'un ensemble de réponses comportant :

- La réponse du défaut
- La géométrie de la pièce inspectée
- Le lift-off.

L'évaluation des propriétés d'un défaut présumé ou du matériau est possible dès lors que tous les autres facteurs sont connus. Nous donnons ci-après les principaux

facteurs qui peuvent affecter la réponse de la bobine.

- La perméabilité magnétique du matériau
- La conductivité électrique du matériau
- Le lift-off
- La fréquence

I.4.5 Les types de sondes

Dans la mise en œuvre de sondes pour une application de contrôle par courants de Foucault, il est nécessaire que les bobinages remplissent deux fonctions principales, à savoir la fonction d'émission d'un champ électromagnétique variable et de réception d'un autre champ électromagnétique également variable. Ces deux fonctions peuvent être réalisées par une ou plusieurs bobines. Par conséquent, une sonde comprend une ou plusieurs bobines dont certaines sont émettrices et d'autres réceptrices. En pratique, une bobine ne peut être qu'émettrice, ou réceptrice seulement, ou encore les deux en même temps. Il existe donc plusieurs façons de mettre en œuvre des sondes pour réaliser un contrôle par courants de Foucault.

I.4.5.1 Sonde à double fonctions

La sonde à double fonction représente la configuration la plus simple car elle est constituée d'une seule bobine qui assure à elle seule les deux fonctions d'émission et de réception du champ électromagnétique figure 1.8. L'exploitation passe par la mesure des variations de l'impédance de la bobine qui caractérisent le phénomène de courants de Foucault et qui se traduit par une modification du coefficient de self inductance L et de la résistance R .

Supposons que la bobine est alimentée par un générateur de courant sinusoïdal, on dit alors que la tension a une composante en phase avec le courant et une composante déphasée de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, toute variation d'impédance se traduit par une modification de l'amplitude et de la phase de la tension recueillie aux bornes de la bobine.

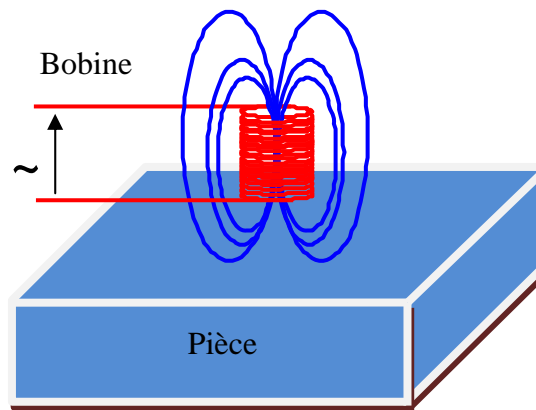


Figure 1.8 - Sonde à double fonctions

I.4.5.2 Capteur à fonctions séparées

Dans ce cas les fonctions émission et réception sont séparées et sont remplies par deux bobines distinctes figure 1.9.

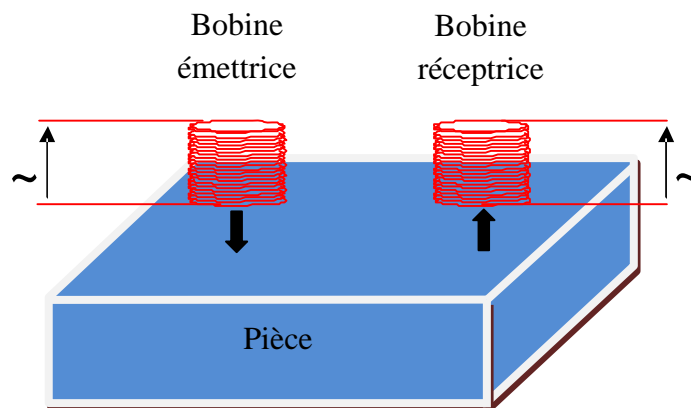


Figure 1.9 - Sonde à fonctions séparées

Une bobine émettrice parcourue par un courant créant un champ électromagnétique dont une partie, plus ou moins importante, est captée par un récepteur qui peut être soit une bobine soit un capteur de champ (GMR, GMI...) [30, 31, 34]. La réception peut se faire à endroit différent de la position de la bobine émettrice. La tension aux bornes du récepteur dépend d'une part des caractéristiques géométriques des bobines et de leur position relative et d'autre part des courants de Foucault qui apparaissent dans le matériau contrôlé.

1.4.5.3 Sonde différentielle

Dans ce mode d'exploration, on utilise deux bobines de mesure et compare une zone du milieu à tester avec une zone voisine en faisant la différence d'une façon permanente entre les deux mesures. Tant que le matériau a les mêmes caractéristiques en regard des deux bobines, le signal recueilli est nul. Si l'une des bobines se trouve en face d'un défaut, il apparaît un signal de défaut figure 1.10. Ce type de sonde permet de s'affranchir des perturbations dues principalement aux variations de la distance sonde-pièce (appelé lift-off) d'un côté et des variations des paramètres électromagnétiques du matériau contrôlé comme par exemple la conductivité électrique de l'autre.

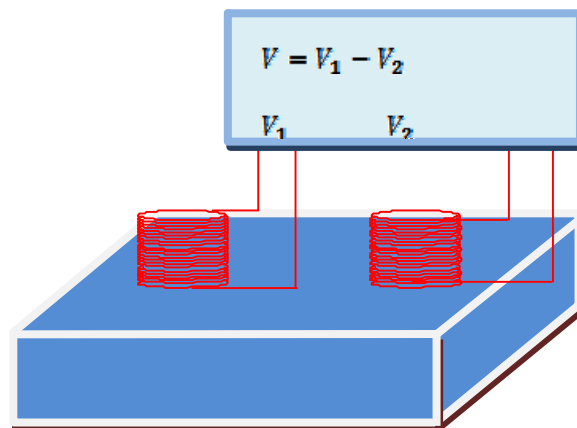


Figure 1.10 - Sonde à fonctions séparées (différentielle)

Parmi les différentes sondes destinées pour le contrôle par courants de Foucault, les sondes différentielles sont utilisées pour détecter des discontinuités ou des défauts comme les fissures. Par contre, les sondes absolues sont préférées pour la détection de défauts caractérisés par des variations graduelles comme les dégradations dues à la corrosion.

1.4.6 Plan d'impédance normalisé

Dans ce qui suit on considère un capteur à double fonctions. L'interaction capteur/cible s'étudie en examinant l'impédance complexe du capteur. Pour un bobinage de N spires parcouru par un courant alternatif sinusoïdal I_{exc} , cette impédance est définie par :

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}_{exc}} \quad (I.1)$$

Où \mathbf{V} et \mathbf{I}_{exc} sont les vecteurs complexes associés à la tension et au courant d'excitation. La grandeur \mathbf{V} se décompose en parties active et réactive, en quadrature et en phase avec \mathbf{I}_{exc} . L'impédance \mathbf{Z} s'écrit :

$$\mathbf{Z} = R + jX \quad (I.2)$$

Un capteur inductif est donc caractérisé par deux grandeurs : la composante résistive R qui englobe les pertes par courants de Foucault dues à la pénétration du champ dans la cible et les pertes internes du bobinage d'excitation, et le terme inductif X qui représente la réactance du bobinage d'excitation, liée à la topologie des lignes de champ magnétique émises par le capteur.

Pour ne conserver dans l'expression de l'impédance que les variations dues à la présence de la cible, on introduit traditionnellement la notion d'impédance normalisée. Cette impédance normalisée \mathbf{Z}_n se déduit de \mathbf{Z} à l'aide de l'expression :

$$\mathbf{Z}_n = R_n + jX_n = \frac{\mathbf{Z} - R_0}{X_0} \quad (I.3)$$

où $\mathbf{Z}_0 = R_0 + jX_0$ est l'impédance à vide du capteur (impédance en absence de cible).

En faisant ressortir les grandeurs normalisées de l'impédance, la mesure devient indépendante des caractéristiques propres de la bobine (nombre de spires, pertes à vide) et de la croissance de la réactance en fonction de la fréquence. Elle dépend uniquement des paramètres de structure que sont la fréquence d'excitation f et la géométrie du capteur, et des paramètres de la cible à savoir sa géométrie, sa conductivité électrique σ , sa perméabilité magnétique μ (cas d'une pièce magnétique) et la distance capteur/cible h (lift-off). L'étude des variations de \mathbf{Z}_n s'effectue dans le plan d'impédance normalisée en traçant X_n en fonction de R_n . La présence de défauts ou d'inhomogénéités dans la cible induit une modification de l'un ou de plusieurs des

trois paramètres influents (σ, μ, h) qui se traduit dans le plan d'impédance complexe (X_n, R_n) , par un déplacement du point de fonctionnement représentatif du capteur. La figure 1.11 montre un exemple de variation de l'impédance normalisée en fonction de la fréquence.

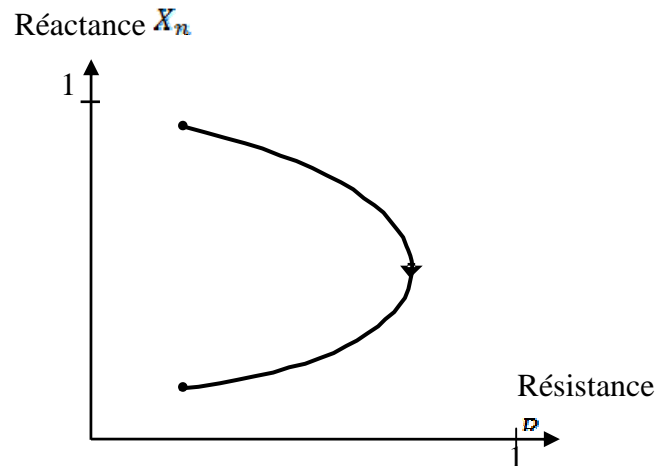


Figure 1.11 - Influence de la fréquence sur le diagramme d'impédance normalisée

Traitement du signal recueilli

Un appareillage à courant de Foucault se présente sous forme d'un coffret relié par un câble à un des capteurs décrits précédemment. Dans ce coffret se trouvent les différents étages ayant des fonctions bien précises à remplir:

- un générateur de courant ou de tension sinusoïdal permettant d'alimenter une ou plusieurs bobines avec un courant sinusoïdal. On peut dans la plupart des appareils régler la fréquence et l'amplitude de ce courant dans une plage assez grande;
- un système de mise en forme du signal dont le rôle est d'annuler les déséquilibres du signal, propres aux bobines, et de détecter puis équilibrer le signal de défaut, ceci peut être réalisé soit par un montage en pont, soit en rendant indépendantes les composantes en phase et en quadrature du signal ;
- un circuit d'analyse qui a pour but de sélectionner les signaux provenant de défauts différents, et de les différencier par leur phase. Pour cela, de nombreux types de circuits sont utilisés. La détection synchrone et la détection par échantillonnage sont les plus couramment utilisées ;
- un dispositif d'exploitation et de présentation des résultats.

1.5 Modes d'excitation

1.5.1 Contrôle mono-fréquence

Le contrôle mono-fréquence utilise une excitation sinusoïdale de fréquence fixe. Les fréquences utilisées sont extrêmement variables en fonction des applications considérées. Ainsi par exemple, pour la détection de défauts débouchant ou situés dans des parois minces, on utilisera des fréquences élevées, allant jusqu'à quelques MHz. Au contraire, pour le contrôle de produits ferromagnétiques, on utilise des fréquences basses. Cependant, elles devront se situer dans une gamme raisonnable. En effet, lorsque la fréquence choisie est trop basse, l'amplitude des courants induits sera faible et la précision de mesure insuffisante à cause des bruits. Une fréquence trop élevée engendre l'apparition de phénomènes parasites dus notamment aux capacités résultant de l'interaction entre deux spires de la sonde. Ces dernières provoquent des résonances et tendent à court-circuiter le circuit inductif.

1.5.2 Contrôle par courants de Foucault pulsés

Les techniques conventionnelles d'inspection par courants de Foucault utilisent un courant alternatif sinusoïdal pour alimenter la bobine excitatrice. La technique de courants de Foucault pulsés, qui utilise un signal impulsionnelle pour alimenter la bobine, est une approche relativement nouvelle et prometteuse dans le domaine du contrôle par courants de Foucault. La forme du signal d'alimentation peut être rectangulaire, triangulaire ou semi-sinusoïdale, cette dernière étant la plus utilisée en raison de sa simplicité de mise en œuvre. L'avantage d'utiliser une fonction impulsionnelle est que celle-ci contient un continuum de fréquences. Ainsi, la réponse électromagnétique pour plusieurs fréquences peut être mesurée en une seule étape seulement. Comme la profondeur de pénétration des courants induits dépend de la fréquence, alors les informations relatives à plusieurs profondeurs peuvent être obtenues simultanément. Si la mesure est effectuée dans le domaine temporel, un défaut se situant près de la bobine sera observé en premier et ce lui situé dans une position lointain le sera après un certain temps. En utilisant cet effet, Cheng-Chi Tai et al [27] ont mis en œuvre une méthode utilisant les courants de Foucault pour déterminer à la fois la conductivité et l'épaisseur d'un revêtement.

Cette technique est plus riche en information qu'un contrôle par courants de Foucault sinusoïdal mono ou multifréquences. Cependant, les signaux de mesure étant rapides et souvent de faible amplitude, ne peuvent être collectés qu'en utilisant un système d'acquisition performant ou un système d'inspection automatisé afin d'améliorer leur qualité et de pouvoir construire des cartographies des zones inspectées. Des systèmes d'inspection à deux dimensions sont typiquement utilisés. Cela pourrait être un système de balayage qui scanne une surface relativement plane en mode XY.

1.5.3 Technique à fréquences multiples

La technique de courants de Foucault à fréquences multiples pour chaque valeur de fréquence donnée [28]. La base de données construite suit au contrôle précédent est utilisée pour retrouver les paramètres de la pièce contrôlée. L'impédance de la bobine peut être affectée par les facteurs suivants:

1. La distance sonde/pièce (lift-off).
2. La conductivité électrique et la perméabilité magnétique de la pièce inspectée.
3. La présence de défauts de surface ou de défauts à une profondeur faible.
4. La géométrie de la pièce.

Plusieurs facteurs sont souvent présents simultanément. D'une façon générale, dans un problème d'inversion quand il s'agit d'identifier n paramètres de la cible, il est nécessaire de disposer d'au moins n informations fournies par la sonde. La technique multifréquence consiste à choisir judicieusement les fréquences d'excitation de la sonde de telle sorte à recueillir des informations riches et surtout complémentaires sur la pièce à contrôler. L'idéal serait que chaque paramètre à identifier ait une influence sur le signal de mesure à une fréquence unique. Toutefois, ceci est très difficile à réaliser en pratique. Quant au nombre de fréquences nécessaire, il est directement lié au nombre et à la nature des paramètres à identifier. Dans le cas simple où l'intérêt se limite à la détection de défauts ou d'autres changements brusques dans la géométrie, une sonde différentielle peut être utilisée pour éliminer les facteurs indésirables, vu qu'ils varient d'une manière progressive. Etant donné que chaque bobine a sa propre gamme de fréquence de travail, plus d'une bobine (un ensemble de bobines) peut être utilisé pour

étendre la fréquence de test. Dans la pratique, les mesures multifréquence sont mise en œuvre en utilisant un analyseur d'impédance.

1.5.4 Balayage en fréquence

Les techniques de courants de Foucault basées sur le balayage en fréquence impliquent la collecte de données en utilisant une large gamme de fréquences qui varient d'une façon continue [29]. Cela implique généralement l'utilisation d'un appareil spécialisé, comme un analyseur d'impédance, qui peut être configuré pour effectuer automatiquement des mesures sur toute une gamme de fréquences. La technique à balayage en fréquence peut être mise en œuvre avec l'équipement commercial, mais la mesure est difficile et nécessite un temps plus important.

Etant donné que la profondeur de pénétration des courants de Foucault dépend de la fréquence, l'avantage de la technique de balayage en fréquence est que l'information est obtenue sur plusieurs niveaux de profondeur.

Les mesures en fréquences balayées sont utiles dans des applications telles que la mesure de l'épaisseur de revêtements conducteurs et la différenciation entre les défauts dans des couches différentes d'une structure. Les mesures en fréquences balayées permettent également de distinguer entre les fissures qui se produisent sur le revêtement extérieur et les défauts se trouvant dans le revêtement interne.

1.5.5 Autres techniques

La technique connue sous le nom de l'imagerie à photo-induction [30] et la technique de courants de Foucault à champ lointain [31, 32] sont également utilisées.

La méthode d'imagerie à photo-induction combine une excitation photo-thermique créée par un faisceau laser avec une sonde de courant de Foucault. Elle est puissante et elle est de haute résolution. Avec cette technique, une résolution microscopique (20 μm) est possible en utilisant des bobines à courants de Foucault standard. Cette méthode a été utilisée pour étudier les fissures de surface et des soudures dans des échantillons métalliques [33].

La technique de courants de Foucault à champ lointain est basée sur la transmission

d'un champ électromagnétique à travers un tube en métal. Elle permet la détection de défauts sur les parois intérieures et extérieures du tube. La méthode utilise deux bobines, une bobine d'excitation et une bobine de prélèvement. La distance entre les bobines est de 2 à 5 fois le diamètre du tube. La bobine d'excitation crée des courants de Foucault à basse fréquence dans le tube. Une bobine de prélèvement qui est placée dans la zone de champ lointain (2 à 5 fois le diamètre du tube) capte ce champ électromagnétique.

1.6 Avantages des courants de Foucault

La méthode de contrôle et d'évaluation non destructifs par courants de Foucault a plusieurs avantages :

1. Sensible aux défauts fins.
2. Appréciation possible de la profondeur du défaut.
3. Se prête bien à l'automatisation.
4. Autorise des vitesses de défilement élevées.
5. Respectueuse de l'environnement.
6. Peut être utilisée pour des produits de révolution de grande longueur.
7. Équipement portable.

Un autre avantage important du contrôle par courants de Foucault, contrairement aux autres méthodes, telles que les ultrasons, magnétoscopie etc., c'est qu'il n'y a pas besoin de contact physique avec la surface de l'échantillon à inspecter.

1.7 Limites des techniques de courants de Foucault

Comme toutes les autres méthodes de contrôle non destructif (ultrasons, radiographie, thermographie et magnétoscopie etc.), les techniques de courants de Foucault ont leurs propres défauts.

1. Seuls matériaux conducteurs peuvent être inspectés.
2. L'information combinée à partir d'un défaut ou un changement dans les propriétés de l'échantillon est parfois difficile de se séparer.
3. La rugosité de surface peut interférer avec la mesure.
4. Les normes de référence sont nécessaires pour l'étalonnage.

5. La profondeur de pénétration est limitée.
6. Les défauts tels que les décollements qui se trouvent en parallèle aux courants de Foucault sont difficiles à détecter.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les méthodes de contrôle non destructif les plus couramment utilisées dans l'industrie. Nous avons donné leurs principes en précisant les avantages et les inconvénients de chacune d'elles. La méthode utilisée dans le cadre de cette thèse est le contrôle par courants de Foucault. Par conséquent, un accent a été mis sur celle-ci en la détaillant un peu plus par rapport aux autres. Pour ce faire, nous avons présenté le contexte de la méthode, son principe ainsi que ses paramètres caractéristiques. Nous avons également rappelé les types de sondes employées dans cette technique et les différents modes d'excitations de celles-ci. Il en résulte, qu'élaborer un système de contrôle à courants de Foucault revient à considérer trois problématiques qui sont :

1. Conception du dispositif d'instrumentation qui excite la pièce et qui reçoit l'influence de l'interaction sonde/pièce.
2. Modélisation directe qui consiste à simuler l'interaction sonde/pièce afin de prédire les signaux courants de Foucault obtenus.
3. Inversion des signaux courants de Foucault afin d'estimer les caractéristiques de la pièce inspectée.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons aux méthodes numériques et formulation éléments finis.

Chapitre II

Méthodes Numériques et
Formulation Éléments Finis

II.1 Introduction

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser les systèmes physiques de plus en plus complexe, pour cela il a besoin de modèles lui permettant de simuler le comportement de ces systèmes.

L'utilisation des modèles analytiques présente l'avantage, au moyen des hypothèses simplificatrices, de présenter correctement les phénomènes physiques étudiés et une mise en œuvre relativement avantageuse. Mais, lorsque les équations aux dérivées partielles sont fortement non linéaires, ces modèles deviennent inadéquats. Ainsi on est amené à utiliser des méthodes numériques. Ceci est rendue possible grâce au développement de l'outil informatique. La mise en place de logiciels d'analyse et de conception de plus en plus performants permet de réduire considérablement le temps de calcul et d'analyse.

Dans ce qui suit, on citera quelques-unes de ces méthodes, on s'intéressera particulièrement à la méthode des éléments finis.

II.2 Équations de Maxwell

Le comportement des phénomènes électromagnétiques traités dans le domaine de la physique mathématique est résumé par l'emploi des équations de MAXWELL, appelées aussi équations générales de l'électromagnétisme [64]. Ces équations s'écrivent sous deux formes équivalentes qui sont :

a. Forme différentielle des équations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{II.1})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.4})$$

ρ est la densité de charge volumique.

\vec{D} , \vec{E} , \vec{B} et \vec{H} sont respectivement les vecteurs déplacement, champ électrique, induction magnétique et champ magnétique.

\vec{J} représente la densité de courant et dans le cas général elle est donnée par :

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D + \vec{J}_M \quad (\text{II.5})$$

\vec{J}_C exprime la densité de courant de conduction électrique induit et inducteur donnée par :

$$\vec{J}_C = \vec{J}_S + \vec{J}_{ind} \quad (\text{II.6})$$

\vec{J}_S étant la densité de courant source et \vec{J}_{ind} représente la densité de courant résultant du phénomène induit.

\vec{J}_D représente la densité de courant de déplacement dont l'expression est la suivante :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

\vec{J}_M est la densité de courant due à la présence de milieu magnétique exprimée par :

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (\text{II.8})$$

\vec{M} étant le vecteur aimantation du milieu magnétique en présence.

La nature locale des équations de Maxwell permet de prendre en compte dans les différentes équations, en fonction de la nature du milieu, soit l'un des effets (conducteur, diélectrique ou magnétique) ou l'association de deux ou trois effets.

b. Forme intégrale des équations de Maxwell

♦ La première équation de Maxwell traduit le théorème de Gauss:

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV \quad (\text{II.9})$$

ou bien

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_t \quad (\text{II.10})$$

Q_t : Charge totale contenue dans le volume V [C / m³].

dV : Volume élémentaire.

♦ La deuxième équation de Maxwell est donnée sous forme suivante

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{II.11})$$

Sachant que :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi \quad (\text{II.12})$$

ϕ : le flux magnétique à travers la section (s).

$d\vec{l}$: le contour d'intégration.

♦ La troisième équation de Maxwell exprime la notion de conservation du flux magnétique:

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{II.13})$$

♦ La quatrième équation de Maxwell, appelée loi de Maxwell-Ampère, est donnée par :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i \quad (\text{II.14})$$

I_i : Courant i enlacé par la courbe (c).

c. Les lois constitutives du milieu

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.15})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II.16})$$

μ : Perméabilité magnétique [H / m].

ε : Permittivité électrique [F / m].

d. La loi d'Ohm

$$\vec{J}_i = \sigma_i \vec{E}_i \quad (\text{II.17})$$

σ_i : Conductivité électrique du milieu i [Ω / m].

e. L'équation de conservation de la charge

Maxwell avait montré que l'équation de continuité utilisée:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{II.18})$$

n'était pas en conformité avec l'équation de conservation de la charge électrique sauf dans un seul cas lorsque la densité de charge ρ était indépendante du temps. Afin d'assurer la validité de l'équation de conservation de la charge même en régime variable, Maxwell a modifié l'équation (II.4) en lui ajoutant un terme de densité de courant appelé densité de courant de "déplacement" ou bien vecteur "déplacement" et noté $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$.

Ainsi la correction introduite par Maxwell conduit à l'écriture de la quatrième équation la forme suivante :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_D \quad (\text{II.19})$$

En appliquant la divergence à cette dernière, l'équation de continuité appelée aussi équation de conservation de la charge trouvée devient conforme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.20})$$

I. Equations aux dérivées partielles 2D

La représentation sous forme différentielle des phénomènes électromagnétiques en général s'obtient en effectuant une combinaison des équations de Maxwell, des relations du milieu, de la loi d'Ohm et de certaines lois fondamentales de la physique.

L'équation (II.3) permet de déduire qu'il existe un potentiel vecteur magnétique \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (\text{II.21})$$

la combinaison des équations (II.2) et (II.21) conduit à :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.22})$$

La relation (II.22) permet de déduire qu'il existe un potentiel électrique scalaire U tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} U \quad (\text{II.23})$$

d'où :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.24})$$

et

$$\vec{J} = \sigma \left(-\vec{\nabla} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Sachant que : $\vec{J}_s = -\sigma \vec{\nabla} U$

d'où finalement l'expression de la densité de courant de conduction suivante :

$$\vec{J}_c = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.25})$$

et en tenant compte des équations (II.21) (II.25) l'équation (II.19) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.26})$$

Sachant que :

$$\vec{H} = \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right)$$

Les courant de déplacement sont négligeables devant les courant de conduction d'où

$$\vec{J}_D = 0$$

Ce qui permet de déduire l'équation électromagnétique 2D suivante [47, 48]:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{II.27})$$

\vec{J}_s : densité de courant source

L'équation (II.27) précédente s'exprimera par :

- Dans le cas 2D axisymétrique

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial z} \right) - \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = J_{s\varphi} \quad (\text{II.28})$$

$$\text{avec : } \vec{A} = \begin{cases} 0 \\ A_\varphi \\ 0 \end{cases} ; \quad \vec{J}_s = \begin{cases} 0 \\ J_{s\varphi} \\ 0 \end{cases}$$

- Dans le cas 2D cartésien

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = J_{sz} \quad (\text{II.29})$$

$$\text{avec : } \vec{A} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ A_z \end{cases} ; \quad \vec{J}_s = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ J_{sz} \end{cases}$$

II.3 Méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles

La résolution analytique des équations aux dérivées partielles des problèmes dont la géométrie est complexe. Il faut donc utiliser des méthodes numériques comme :

*La méthode des différences finies.

- * La méthode des éléments finis.
- * La méthode d'intégrale de frontière.

Nous on s'intéresse à la méthode des éléments finis qui a les avantages suivants :

- Traitement possible de géométries complexes.
- Détermination plus naturelle des condition aux limites.
- Possibilité de démonstration mathématique de convergence et de majoration d'erreur.

II .3.1 Méthode des différences finies :

a. Introduction :

Cette méthode consiste à transformer l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où, chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue aux nœuds du domaine de résolution. L'ensemble des points de discrétisation constitue un maillage. Ainsi, l'équation aux dérivées partielles est transformée en équation algébrique en chaque point [65].

La figure 2.1 suivante représente un maillage type différences finis

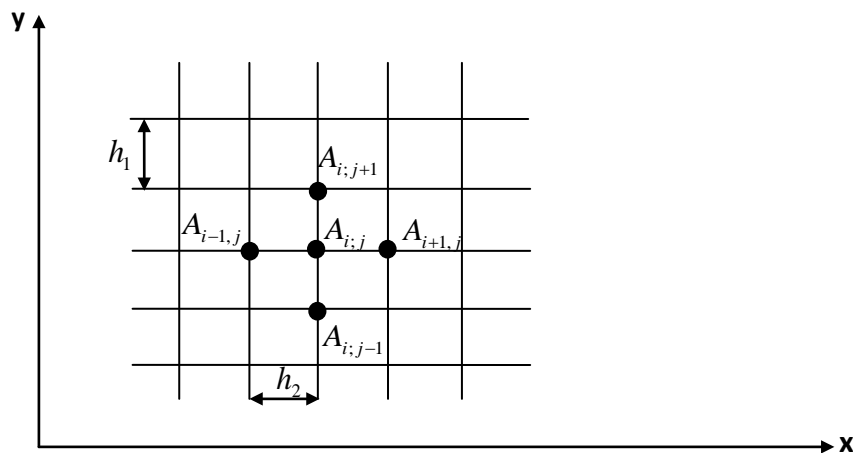


Figure 2.1- maillage type différence finis.

b. L'approximation des dérivées :

L'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h_1} \quad (\text{II.30})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h_2} \quad (\text{II.31})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h_1^2} \quad (\text{II.32})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h_2^2} \quad (\text{II.33})$$

Avec $h_1 = h_2 = h$

Laplacien discrétisé s'écrit alors

$$(\Delta A)_{i,j} = \left[\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right]_{i,j} \quad (\text{II.34})$$

$$(\Delta A)_{i,j} = \frac{1}{h^2} [A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}] \quad (\text{II.35})$$

c. Système matriciel :

L'expression (II.35) est appelée la formule à "cinq points", des expressions plus précises peuvent être obtenues en conservant plus de termes dans le développement en séries de Taylor. Mais ceci conduit à plus de complexité. L'écriture de cette équation pour tous les nœuds du maillage conduit à un système matriciel suivant :

$$[S][A] = [F] \quad (\text{II.36})$$

Avec

[F] : Terme source

[S] : Matrice inversible

[A] : Matrice des inconnues

La résolution de ce système nous permet d'avoir la distribution de l'inconnue dans le domaine d'étude.

II .3.2 La méthode des éléments finis

II .3.2.1 Introduction

Les sciences de l'ingénieur permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis fut introduite par P.P. Sylvester et M.V.K.Chari vers 1970, c'est l'une des méthodes les plus utilisées pour résoudre ces équations car cette méthode s'adapte bien à son intégration dans les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO) [66]. C'est une méthode qui nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans un domaine quelconque à une, deux ou trois dimensions.

De plus, elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines de formes complexes. Le principe de la méthode est basé sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites, cette formulation peut être de type variationnelle ou résidus pondérés. [61, 62, 66]

II .3.2.2 Types de formulation des problèmes

Cette méthode peut être de deux types

- Variationnelle
- ou
- Résidus pondérés

a. Formulation variationnelle

La méthode variationnelle nécessite la connaissance de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Cette fonctionnelle est déterminée à partir du principe de l'action Hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L(A).d\Omega. \tag{II.37}$$

L : fonction de Lagrange qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle :

$$L = W_c - W_p$$

Ω : domaine de résolution.

Résoudre le problème variationnelle défini par la fonctionnelle d'énergie F(A) revient à minimiser cette fonctionnelle.

Le principe de minimisation consiste à écrire que :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \tag{II.38}$$

Dans le cas à une dimension, la fonctionnelle d'énergie peut s'écrire par exemple :

$$F(A) = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \alpha^2 A^2 + 2\alpha \right) dx \tag{II.39}$$

ou :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \tag{II.40}$$

L'inconnue A(x, y) est discrétisée par :

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) A_i \tag{II.41}$$

n : nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : inconnue au nœud i du domaine.

$\phi_i(x, y)$ fonction de forme au nœud i.

b. Formulation résidus pondérés

La formulation résidus pondérés permet de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles en approximant la solution exacte par une solution approchée.

En remplaçant la solution exacte par la solution approchée, nous commettons une erreur appelée résidu R_i .

$$R_i = L(u) - f \neq 0 \text{ ou bien } R_i = 0 \quad (\text{II.42})$$

A l'aide des fonctions de pondération ϕ_i bien choisies, nous imposons à l'intégrale du résidu de s'annuler en n points de Ω .

$$\int_{\Omega} (L(u) - f) \phi_i d\Omega = 0 \quad (\text{II.43})$$

Pour la méthode des éléments finis ϕ_i est une base de fonction de projection d'où la formulation éléments finis du problème définit par l'EDP.

Dans le cas cartésien, l'équation aux dérivées partielles (EDP) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - j\omega\mu A = -\mu J_s \quad (\text{II.44})$$

La formulation éléments finis sera donnée alors par:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - j\sigma\omega\mu A + \mu J_s \right) \phi_i dx dy = 0 \quad (\text{II.45})$$

Les fonctions de pondération qui constituent une base de fonction linéairement indépendante et l'utilisation de la méthode de GALERKINE consiste à imposer que les fonctions de projection ϕ_i sont identiques aux fonctions de forme ϕ_j .

$$\text{Avec :} \quad A(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y) A_j \quad (\text{II.46})$$

II .3.2.3 Le principe de la méthode des éléments finis

La résolution d'un problème par la méthode des éléments finis suit le procédé suivant [54, 61, 62] :

- Traduire le problème physique sous forme d'un modèle mathématique (équations aux dérivées partielles) avec des conditions aux limites aux bords du domaine d'étude (Ω), nécessaires et suffisantes pour l'unicité de la solution.
- Construire une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation intégrale du système.
- Diviser (Ω) en sous domaines (maillage), les sous domaines sont appelés éléments.
- Choisir la famille des champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds, la maille complétée par ces informations est alors appelée élément
- Ramener le problème à un problème discret, c'est la discrétisation. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis se résume en deux questions :
 - 1-Comment choisir le problème discret dont la solution est proche de la solution exacte ?
 - 2-Quelle signification donner au mot proche ?
- On résout le problème discret.
- Construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs.
- Visualiser et exploiter la solution pour juger sa qualité numérique et de la satisfaction des critères de cahier des charges.

II .3.2.4 Discrétisation du domaine d'étude

L'approche de base de la méthode des éléments finis est de subdiviser le domaine d'étude en un nombre fini de sous domaines appelés éléments. L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est aussi définie en fonction de la géométrie de l'élément qu'on choisit préalablement et coïncide avec les nœuds de cet élément relatifs aux valeurs de l'inconnue. On parle alors d'interpolation nodale [50, 55].

a) Eléments de références

Pour des domaines d'étude à une, deux ou trois dimensions, on utilise des éléments de références simples tels que : le triangle, le rectangle, le tétraèdre ; le parallélépipède, auxquels on associe un système de coordonnées normées. Cela permet de définir une fois, pour chaque type d'élément les fonctions d'interpolation. Ces dernières, une fois construites, on déduit les fonctions associées au système réel à l'aide des transformations géométriques. [52, 53]

• **Eléments à une dimension :**

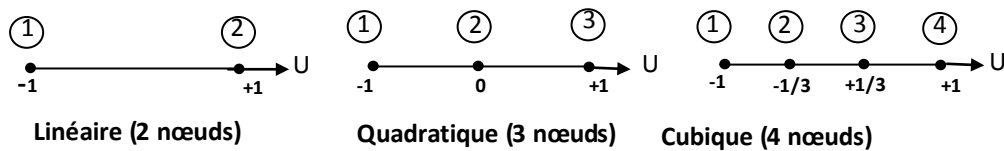


Figure.2.2 : Représentation de Eléments de référence 1D

• **Eléments à deux dimensions : ϕ_j**

-Elément triangulaire :

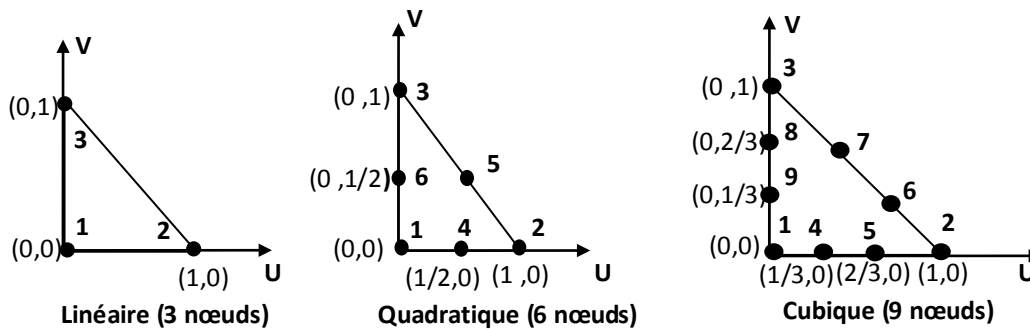


Figure.2.3 : Représentation de Eléments de référence 2D triangulaire

-Elément carré :

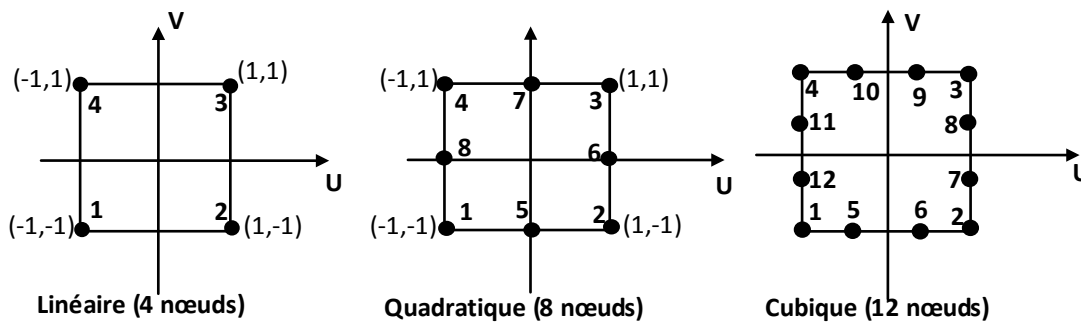


Figure.2.4 : Représentation de Eléments de référence 2D carré

Eléments à trois dimensions :

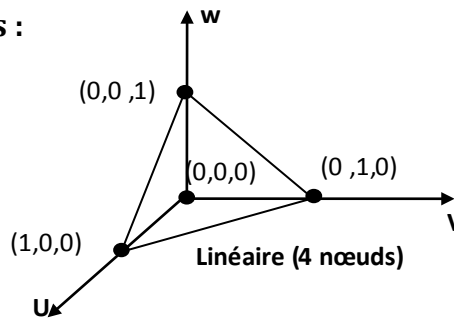


Figure.2.5 : Représentation de Eléments à tétraédrique

b) Fonction d'interpolation

Les fonctions d'interpolations sont obtenues à partir du triangle de Pascal, donné ci dessous :

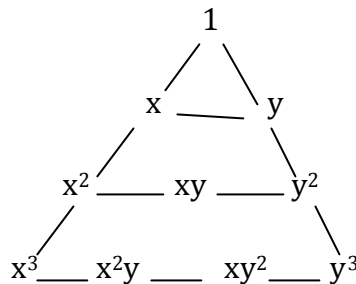


Figure.2.6 : Représentation de triangle de Pascal.

Ces fonctions sont construites de telles sortes à obéir aux conditions suivantes [49] :

b.1) Principe de l'état complet

-La fonction doit contenir un terme constant.

b.2) Principe de compatibilité

Ce principe consacre la continuité de la fonction d'interpolation. On cite un exemple de la fonction d'interpolation dans le cas d'un élément linéaire carré.

$$U(x, y) = ax + by + cxy + d \tag{II.47}$$

c) Fonction d'interpolation sur un élément

Dans chaque élément du domaine d'étude, on approche la fonction d'interpolation en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de l'élément choisi. Ainsi sur un domaine (Ω) discrétisé en sous domaines (Ω_e) , on définit

une fonction approchée U^e différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale sur les nœuds du domaine [51, 54].

La fonction d'approximation aura la forme suivante :

$$U(x) = \langle N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ \dots \ N_n(x) \rangle \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \langle N_n(x) \rangle [U_n] \quad (II.48)$$

Où :

$U(x)$: la fonction d'approximation.

$U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_n$: Les valeurs de la fonction d'interpolation aux nœuds du domaine.

$N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ \dots \ N_n(x)$: Les fonctions de forme sur l'élément.

Les fonctions d'interpolation doivent être continues sur les éléments (Ω_e) et satisfaire les conditions de continuité entre les éléments de (Ω_e).

d) Calcul de la fonction d'interpolation

Dans le présent cas, on prend comme élément de référence, un élément triangulaire linéaire 2D, sa fonction d'interpolation est la suivante [56] :

$$U(x) = ax + by + c \quad (II.49)$$

Elle peut être écrite aussi sous la forme suivante :

$$U(x) = \langle x \ y \ 1 \rangle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (II.50)$$

On écrit la fonction d'interpolation $U(x, y)$, qui prendra des valeurs (U_i, U_j, U_k) aux nœuds i, j, k .

$$U(x_i, y_i) = a.x_i + b.y_i + c \quad (II.51)$$

$$U(x_j, y_j) = a.x_j + b.y_j + c \quad (II.52)$$

$$U(x_k, y_k) = a.x_k + b.y_k + c \quad (II.53)$$

A partir de ces équations on peut écrire le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \quad (II.54)$$

Le problème consiste en la recherche des coefficients a, b, c de la fonction d'interpolation.

Ils se déduisent comme suit :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \quad (II.55)$$

Ainsi $U(x, y)$ s'écrit

$$U(x, y) = \langle x \ y \ 1 \rangle \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \quad (II.56)$$

Si U^e est la fonction d'interpolation sur l'élément e :

$$U^e(x, y) = \langle \alpha_i(x, y) \ \alpha_j(x, y) \ \alpha_k(x, y) \rangle \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix} \quad (II.57)$$

Tel que :

$$\alpha_i(x, y) = \left[\frac{1}{2D^e} \right] (\omega_i^e + \sigma_i^e .x + \beta_i^e .y) \quad (II.58)$$

$$\alpha_j(x, y) = \left[\frac{1}{2D^e} \right] (\omega_j^e + \sigma_j^e .x + \beta_j^e .y) \quad (II.59)$$

$$\alpha_k(x, y) = \left[\frac{1}{2D^e} \right] (\omega_k^e + \sigma_k^e .x + \beta_k^e .y) \quad (II.60)$$

Avec :

$$\beta_i^e = y_j - y_k ; \sigma_i^e = x_k - x_j ; \omega_i^e = x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j \quad (\text{II.61})$$

$$\beta_j^e = y_k - y_i ; \sigma_j^e = x_i - x_k ; \omega_j^e = x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k \quad (\text{II.62})$$

$$\beta_k^e = y_i - y_j ; \sigma_k^e = x_j - x_i ; \omega_k^e = x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i \quad (\text{II.63})$$

Et

$$2D^e = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} ; D^e \text{ est l'aire de l'élément triangulaire.}$$

II.3.2.5 Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

II.3.2.5.1 équation magnétostatique

a) cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas, est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \quad (\text{II.64})$$

La formulation intégrale de l'équation (II.42) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_z \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{II.65})$$

L'équation (II.44) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.66})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (II.66) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy \\ & = - \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} v \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (II.67)$$

Où $\cos(n, x)$ et $\cos(n, y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (II.67) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (II.68)$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (II.60)$$

L'expression (II.69) devient alors :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (II.70)$$

L'équation (II.70) en écriture condensée devient :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy \quad (II.71)$$

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (II.71) on aboutit à :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} v \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (II.72)$$

Avec :

i, j : Entiers naturels variant de 1 à N.

N : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de (II.72) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M]. [A] = [K] \quad (II.73)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v. \nabla \alpha_i \cdot \nabla \alpha_j \, dx \, dy \quad (II.74)$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx \, dy \quad (II.75)$$

[A] Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

b) cas axisymétrique

Dans ce cas l'équation magnétostatique est donnée par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(r.A_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (II.76)$$

En considérant comme inconnu le potentiel vecteur donné par $A = r.A_\varphi$

l'équation (II.76) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (II.77)$$

La formulation intégrale de l'expression (II.77) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - J_\varphi \right) dr dz = 0 \quad (II.78)$$

L'équation (II.78) peut être écrite comme suit ;

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \cdot dr \, dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot dr \, dz \quad (II.79)$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (II.79) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \cdot dr \, dz \\ & \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr \, dz + \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (II.80)$$

En remplaçant (II.79) dans (II.80), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \nabla \alpha_i \cdot \nabla A \cdot dr \, dz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot dr \, dz \quad (II.81)$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{II.82})$$

L'équation (II.52) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A} \cdot dr \, dz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr \, dz \quad (\text{II.83})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j$$

Et en remplaçant dans (II.83) on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \, dr \, dz \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr \, dz \quad (\text{II.84})$$

L'écriture de (II.84) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{II.85})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} \, dr \, dz \quad (\text{II.86})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr \, dz \quad (\text{II.87})$$

II.3.2.5.2 Equation magnétodynamique

a) cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas où le milieu comporte une source est donnée par :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge v \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} + \sigma \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{J_z} \quad (\text{II.88})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (II.88) s'écrit :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge v \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} + j\sigma\omega \overrightarrow{A} = \overrightarrow{J_z} \quad (\text{II.89})$$

Après transformation (II.89) l'équation devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\omega\sigma A_z = J_z \quad (\text{II.90})$$

La formulation intégrale de l'équation (II.90) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\omega\sigma A_z - J_z\right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{II.91})$$

L'équation (II.91) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) \cdot dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.92})$$

L'application du théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) \cdot dx dy & (\text{II.93}) \\ & = - \iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} v \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, y)\right) \cdot d\Gamma \\ & = \iint_{\Omega} v \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A_z \cdot dx dy + \int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (II.92) dans (II.93) on obtient :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A_z \cdot dx dy - \int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.94})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} v \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{II.95})$$

L'expression (II.94) devient alors :

$$\iint_{\Omega} v \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A_z \cdot dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.96})$$

Sachant que :

$$A = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot A_j$$

Et en remplaçant dans (II.96) on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \nu \cdot \overline{\nabla \alpha_j} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \cdot \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_j \cdot \alpha_j dx dy \right] A_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.97})$$

L'écriture de (II.97) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{II.98})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} dx dy \quad (\text{II.99})$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j dx dy \quad (\text{II.100})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dx dy \quad (\text{II.101})$$

$$\overline{A} = A_r + jA_i \quad (\text{II.102})$$

b) cas axisymétrique

En considérant comme précédemment le régime harmonique ; la formulation intégrale dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$- \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot dr dz + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A_z \cdot \frac{dr dz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{II.103})$$

L'application du théorème de Green, nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot dr dz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} \\ & = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} dr dz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^N \left[\iint_{\Omega} \alpha_j \cdot \sigma \cdot A \cdot \frac{dr dz}{r} \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_j \cdot J_{\varphi} \cdot dr dz \quad (\text{II.105})$$

L'écriture de (II.72) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{II.106})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overline{\nabla \alpha_i} \cdot \overline{\nabla \alpha_j} \, dr \, dz \quad (\text{II.107})$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{dr \, dz}{r} \quad (\text{II.108})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_z \cdot dr \, dz \quad (\text{II.109})$$

$$\overline{A} = A_r + jA_i \quad (\text{II.110})$$

II.3.3 Méthode d'équations intégrales de frontières(MIF)

Elle consiste à transformer les équations de Maxwell en une équation intégrale qui exprime la valeur de l'inconnue (potentiel) à l'intérieur du domaine d'étude Ω en fonction de sa valeur et de la dérivée normale sur sa frontière. Ceci est permis grâce à la seconde identité de Green qui permet de ramener l'intégration de l'EDP dans le domaine d'étude à celle considérée sur la frontière du domaine.

La MIF s'adapte bien aux problèmes à frontières «ouvertes» (potentiel A nul à l'infini), et lorsque la fréquence de travail est très importante conduisant à une profondeur de pénétration très faible vis-à-vis des dimensions du dispositif ce qui rend les méthodes numériques inadaptées.

La MIF appliquée uniquement à des milieux homogènes dont les propriétés physiques sont constantes donne une meilleure précision en résolvant les équations intégrales avec un nombre d'inconnues réduit. Cependant la MIF a l'inconvénient outre le problème des singularités de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls) non symétrique ce qui augmente le coût de la résolution tout en affectant grandement la précision [38].

II.4. Conclusion

Les méthodes de résolutions des équations électromagnétiques ont été présentées au cours de ce chapitre. Pour la suite de travail nous avons retenus la méthode des éléments finis ayant été retenue pour notre travail.

Chapitre III

Modèles Analytiques et Méthodes Couplées

III.1. Introduction

Les développements que nous aurons à effectuer traiteront de la présentation de la solution analytique dans une région non conductrice (région de l'air) d'un dispositif électromagnétique comportant des pièces en mouvement.

La recherche d'une solution analytique de l'équation axisymétrique 2D dans un conducteur passif a déjà fait l'objet d'un travail antérieur pour des configurations axisymétriques massives et tubulaires [36, 37].

La résolution analytique du problème électromagnétique dans le cas d'un conducteur actif est traité dans le cadre d'un mémoire de magister [38].

III.2. Modèle analytique en coordonnées cylindrique :

III.2. 1. Equation électromagnétique dans la région non conductrice :

L'équation traduisant le comportement du champ électromagnétique en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} est obtenue à partir des équations de Maxwell en imposant la densité de courant $\vec{J}_s = 0$ et la conductivité électrique de l'air $\sigma_{air} = 0$.

Ainsi l'équation devient :

$$\vec{\nabla}(\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad (\text{III.1})$$

ν : réductivité magnétique.

En hypothèse 2D axisymétrique, l'équation (III.1) aura la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 A_\varphi(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi(r,z)}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi(r,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.2})$$

L'équation ainsi obtenue représente le comportement du potentiel vecteur magnétique à l'intérieur de la région de l'entrefer séparant l'inducteur de l'induit. Celle-ci sera résolue en utilisant la méthode proposée, une solution utilisant la méthode classique basée sur les équations de Bessel sera présentée.

III.2. 2. Méthode de résolution

La résolution analytique des équations aux dérivées partielles s'effectue en utilisant l'une des méthodes suivantes dans le cas des équations linéaires aux dérivées partielles (à coefficients constants) [39, 41]:

- Méthode de séparation des variables
- Méthode des séries exponentielles

- Méthode des transformations conformes
- Méthode des composantes longitudinales

Dans le cas d'équations différentielles non-linéaires (à coefficients non-constants), les principales méthodes utilisées sont [40, 42, 43]:

- Méthode des développements asymptotiques
- Méthode d'intégration par des séries entières (cas d'une équation différentielle à une variable

Concernant le problème à traiter, la méthode de séparation de variable se trouve bien adaptée à la géométrie et à la nature des conditions aux limites associées à la définition du problème [39].

L'application de la méthode de séparation des variables se traduit par la considération d'une solution analytique définie par :

$$A_{\varphi}(r, z) = A_{\varphi}(r) A_{\varphi}(z) \quad (\text{III.3})$$

avec :

$A_{\varphi}(r)$ est une fonction ne dépendant que de la variable r .

$A_{\varphi}(z)$ est une fonction ne dépendant que de la variable z .

III.2.3. Définition des conditions aux limites sur la frontière de la région analytique :

Les conditions aux limites définies sur la frontière de la région analytique (Macro-Elément) sont telles que représentées sur la figure 3.1 suivante :

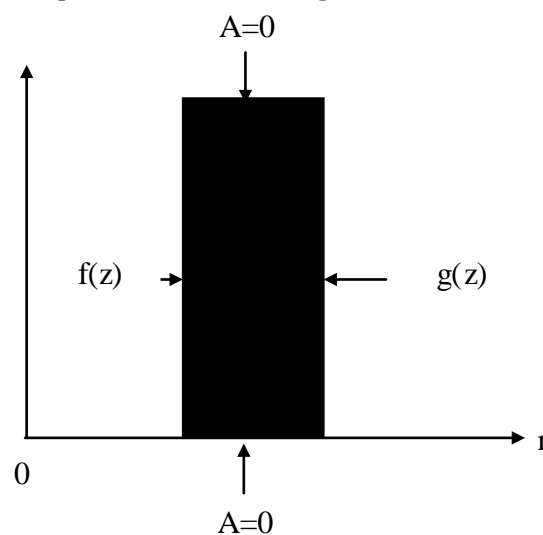


Figure.3.1 : Représentation du domaine de résolution analytique (Région du Macro-Elément)

$$A) \left\{ \begin{array}{l} A_{\varphi}(r_0, z) = f(z) \\ A_{\varphi}((r_0 + a), z) = g(z) \\ A_{\varphi}(r, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (III.4)$$

$$A_{\varphi}(r, b) = 0$$

En introduisant (III. 3) dans l'équation (III. 2) et en procédant aux transformations adéquates, on arrive à définir deux équations différentielles dont chacune ne dépend que d'une seule variable telles que représentées par les expressions suivantes [44]:

$$\frac{d^2 A_{\varphi}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_{\varphi}(r)}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) A_{\varphi}(r) = 0 \quad (III.5)$$

$$\frac{d^2 A_{\varphi}(z)}{dz^2} + \lambda^2 A_{\varphi}(z) = 0 \quad (III.6)$$

III.2.4. Solution utilisant les fonctions de Bessel :

L'équation (III.5) est résolue en procédant à des transformations afin de ramener cette équation à une forme connue des équations de BESSEL dont les solutions ne sont autres que les fonctions de BESSEL de 1^{ère} et 2nd espèces. Ainsi après réarrangement de (III.5) celle-ci devient :

$$x^2 A_{\varphi}''(x) + x A_{\varphi}'(x) - (x^2 + 1) A_{\varphi}(x) = 0 \quad (III.7)$$

$$\text{avec : } x = \lambda r \quad (III.8)$$

L'équation (III.9) est l'équation modifiée de BESSEL d'ordre 1 admettant pour solution les fonctions modifiées de BESSEL d'ordre 1 de 1^{ère} et 2nd espèces $I_1(\lambda r)$ et $K_1(\lambda r)$ et la solution s'exprimera alors par [41, 45]:

$$A_{\varphi}(r) = C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r) \quad (\text{III.9})$$

C_1 et C_2 représentent les constantes d'intégration qui seront déterminées à partir des conditions aux limites associées au problème.

La solution de l'équation différentielle (III.8) est obtenue en considérant une solution de la forme :

$$A_{\varphi}(z) = C_3 \sin(\lambda z) + C_4 \cos(\lambda z) \quad (\text{III.10})$$

Ou bien

$$A_{\varphi}(z) = K_1 e^{\lambda z} + K_2 e^{-\lambda z} \quad (\text{III.11})$$

Les expressions (III.10) et (III.11) sont équivalentes [36, 39], la forme de la solution donnée par la relation (III.10) sera utilisée pour la suite des développements.

La forme de la solution finale est donnée par :

$$A_{\varphi}(r, z) = (C_1 I_1(\lambda r) + C_2 K_1(\lambda r))(C_3 \sin(\lambda z) + C_4 \cos(\lambda z)) \quad (\text{III.12})$$

Les constantes d'intégration C_1, C_2, C_3 et C_4 seront entièrement déterminées à partir des conditions aux limites considérées sur les frontières du domaine de résolution.

III.2.5. Solutions Élémentaires :

La solution globale sera obtenue en procédant à une superposition de deux solutions élémentaires en considérant que [46]:

$A_{\varphi}(r, z)_{\text{I}}$ est solution lorsque $A_{\varphi}(r, z)$ s'annule à la coordonnée $r_1 = r_0$

$A_{\varphi}(r, z)_{\text{II}}$ est solution lorsque $A_{\varphi}(r, z)$ s'annule à la coordonnée $r_2 = r_0 + a$

et la solution globale sera :

$$A_{\varphi}(r, z) = A_{\varphi}(r, z)_{\text{I}} + A_{\varphi}(r, z)_{\text{II}} \quad (\text{III.13})$$

a. Solution élémentaire en $r_1 = r_0$

La condition au limite à la coordonnée $r_1 = r_0$ est définie par :

$$A_\varphi(r_0, z)_I = f(z) \tag{III.14}$$

et illustré par la figure, ci-après :

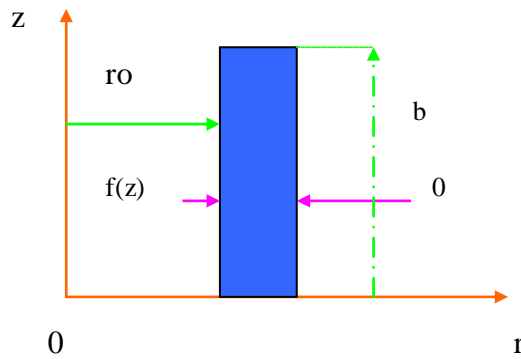


Figure.3.2: Condition sur la frontière située à $r=r_0$

$$A_\varphi(r_1, z)_I = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{1n} I_1(\lambda_n r_1) + c_{2n} K_1(\lambda_n r_1)) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \tag{III.15}$$

d'où :

La fonction $f(z)$ est une fonction de type éléments finis qui permet d'assurer la continuité entre la région du FME (solution analytique) et la région éléments finis. Cette fonction a les mêmes propriétés qu'une fonction d'approximation par élément finis et elle est représentée par la somme discrète suivante :

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(z) A_i \tag{III.16}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n_1$$

i : Nombre de nœuds sur la frontière située à la coordonnée $r = r_0$.

A_i : Inconnue au nœud i de la frontière.

$\alpha_i(z)$ est une fonction de forme de type élément finie définie dans le tableau I avec :

$$\alpha_i(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad \text{(III.17)}$$

$k: 1, 2, 3, \dots, n_1$

L'introduction de la relation (III.19), avec $\alpha_i(z)$ telle que définie dans le tableau I, conduit à :

$$A_\varphi(r, z)_I = \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_{ni} \frac{r}{r_1} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_1) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r_1)} \sin(\lambda_n z) \right\} A_i \quad \text{(III.18)}$$

La forme éléments finis de la solution s'exprimera par :

$$A_\varphi(r, z)_I = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i(r, z) A_i \quad \text{(III.19)}$$

Avec la fonction $\alpha_i(r, z)$ définit par :

$$\alpha_i(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{ni} \frac{r}{r_1} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_1) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r_1)} \sin(\lambda_n z) \quad \text{(III.20)}$$

b. Solution élémentaire à la coordonnée $r_1 = r_0 + a$

La solution élémentaire sur la frontière située à la coordonnée $r_2 = r_0 + a$ est définie à partir de la condition aux limites imposée sur cette même frontière $g(z)$.

La forme de la solution est donnée par :

$$A_\varphi(r, z)_\text{II} = \sum_{n=1}^{\infty} (d_{1n} I_1(\lambda_n r_2) + d_{2n} K_1(\lambda_n r_2)) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) \tag{III.21}$$

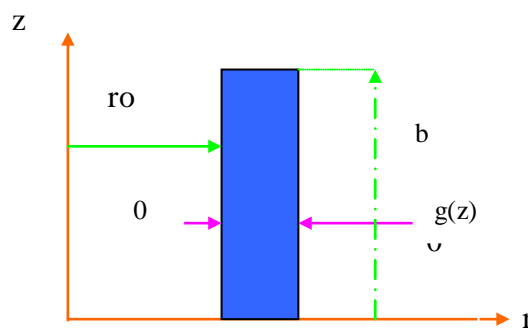


Figure3.3 : Condition sur la frontière située à $r=r_0+a$

Les coefficients C_{2n} sont déduits en imposant à la frontière $r_2 = r_0 + a$ l'égalité suivante :

$$A_\varphi(r, z) \Big|_{r = r_0 + a} = g(z) \tag{III.22}$$

en combinant les égalités (III.21) et (III.22), la condition aux limites se retrouve sous forme d'une série de Fourier suivante :

$g(z)$ étant une fonction de type éléments finis définie sur la frontière située à la coordonnée $r_2 = r_0 + a$ et exprimée par :

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j(z) A_j \tag{III.23}$$

En remplaçant $g(z)$ par son expression dans la relation (III.23), celle-ci devient :

$\alpha_j(z)$ est définie de la même façon que la fonction $\alpha_i(z)$.

La solution sur la frontière située à la coordonnée $r_2 = r_0 + a$ aura alors la forme suivante :

$$A_\varphi(r, z)_\text{II} = \sum_{j=1}^{n_2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_{nj} \frac{r}{r_2} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_2) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r_2)} \sin(\lambda_n z) \right\} A_j \quad (\text{III.24})$$

$A_\varphi(r, z)_\text{II}$ Pourra aussi s'exprimer sous d'une fonction d'approximation par éléments finis en posant :

$$\alpha_j(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{nj} \frac{r}{r_2} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_2) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r_2)} \sin(\lambda_n z) \quad (\text{III.25})$$

d'où :

$$A_\varphi(r, z)_\text{II} = \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_j(r, z) A_j \quad (\text{III.26})$$

La solution globale sera alors telle que définie par l'expression (III.13) à savoir :

$$A_\varphi(r, z) = A_\varphi(r, z)_\text{I} + A_\varphi(r, z)_\text{II} \quad (\text{III.27})$$

d'où :

$$A_\varphi(r, z) = \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_{ni} \frac{r}{r_1} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_1) - \frac{I_1(\lambda_n r_2)}{K_1(\lambda_n r_2)} K_1(\lambda_n r_1)} \sin(\lambda_n z) \right\} A_i + \sum_{j=1}^{n_2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_{nj} \frac{r}{r_2} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n r_2) - \frac{I_1(\lambda_n r_1)}{K_1(\lambda_n r_1)} K_1(\lambda_n r_2)} \sin(\lambda_n z) \right\} A_j \quad (\text{III.28})$$

La relation (III.27) représente la solution proposée pour représenter le comportement du potentiel vecteur magnétique à l'intérieur de la région de l'entrefer.

La solution ainsi obtenue a pour expression [28] :

$$A_{\varphi}(r, z) = \sum_{j=1}^{nt} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} B_{nj} \frac{r}{c} \frac{I_1(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n c_1)}{K_1(\lambda_n c_1)} K_1(\lambda_n r)}{I_1(\lambda_n c) - \frac{I_1(\lambda_n c_1)}{K_1(\lambda_n c_1)} K_1(\lambda_n c)} \sin(\lambda_n z) \right\} A_j \quad (III.29)$$

avec : $c = r_1$ et $c_1 = r_2$ si $j=1, 2, \dots, n_1$

$c = r_2$ et $c_1 = r_1$ si $j=n_1 + 1, \dots, nt$

Les coefficients B_{nj} sont fournis dans l'annexe 1.

A_j : inconnue au nœud j.

III.3. Modèle analytique en coordonnées cartésien :

III.3.1. Equation électromagnétique 2D cartésienne

L'étude de problèmes électromagnétiques dans le plan $[x, y]$ nécessite la résolution, dans le cas de la prise en compte du mouvement, de l'équation magnétostatique dans la région de l'entrefer donnée par :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \quad (III.30)$$

En hypothèse 2D cartésien, obtenue à partir de l'équation précédente tel que présentée au chapitre II sera:

$$\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(x, y)}{y^2} = 0 \quad (III.31)$$

III.3.2. Domaine de résolution analytique et conditions aux limites

Le domaine de résolution du problème plan est représenté par la figure ci-dessous avec les conditions aux limites type Dirichlet :

$$A(x_1, y) = 0 \quad (\text{III.32.a})$$

$$A(x_2, y) = 0 \quad (\text{III.32.b})$$

$$A(x, y_1) = f(y) \quad (\text{III.32.c})$$

$$A(x, y_2) = g(y) \quad (\text{III.32.d})$$

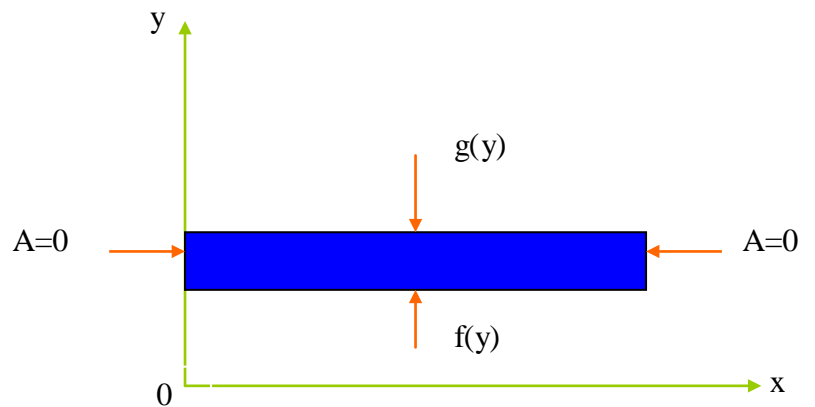


Figure.3.4 : Domaine de résolution et conditions aux limites du problème cartésien

III.3.3. Résolution

a. Définition des problèmes élémentaires

Le problème global défini par l'équation cartésienne 2D (III.31) et les conditions aux limites (III.32.a),..., (III.32.d) sera résolu en considérant les deux solutions élémentaires correspondantes aux hypothèses suivantes :

$A_z(x, y)_I$ est solution lorsque $A_z(x, y)$ s'annule à la coordonnée $y = y_2$

$A_z(x, y)_II$ est solution lorsque $A_z(x, y)$ s'annule à la coordonnée $y = y_1$

et la solution globale sera :

$$A_z(x, y) = A_z(x, y)_I + A_z(x, y)_II \quad (\text{III.33})$$

Les solutions élémentaires seront obtenues à partir des conditions aux limites élémentaires définies sur les frontières du Macro-Elément cartésien associées aux deux problèmes élémentaires ci-dessous :

- Problème élémentaire 1:

$$A(x_1, y) = 0 \quad (\text{III.34.a})$$

$$A(x_2, y) = 0 \quad (\text{III.34.b})$$

$$A(x, y_1) = f(y) \quad (\text{III.34.c})$$

$$A(x, y_2) = 0 \quad (\text{III.34.d})$$

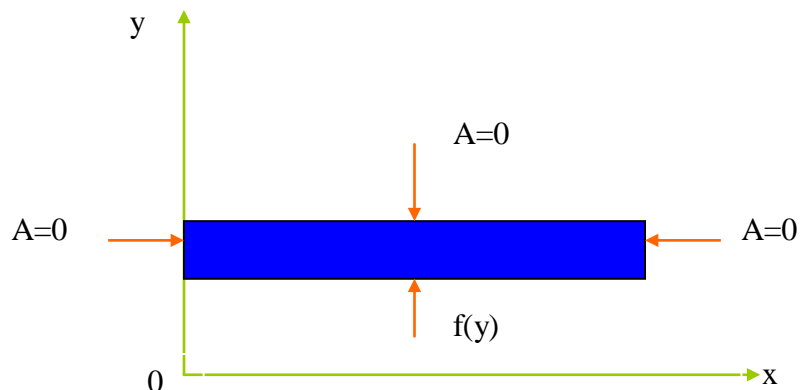


Figure.3.5 : Définition du problème élémentaire 1 en termes de condition aux limites

-Problème élémentaire 2 :

$$A(x_1, y) = 0 \quad (III.35.a)$$

$$A(x_2, y) = 0 \quad (III.35.b)$$

$$A(x, y_1) = 0 \quad (III.35.c)$$

$$A(x, y_2) = g(y) \quad (III.35.d)$$

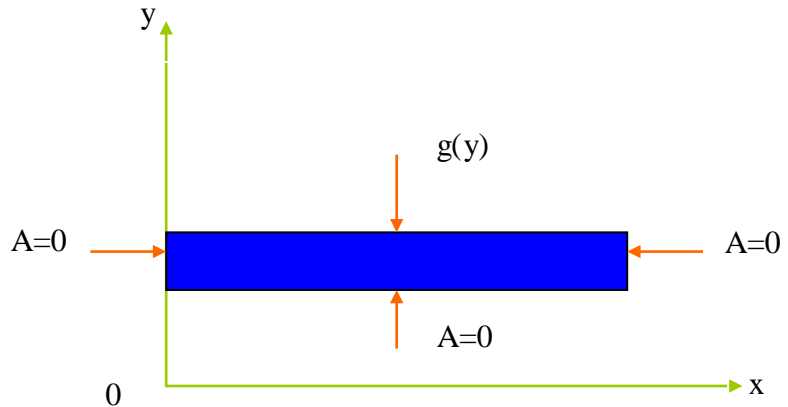


Figure.3.6 : Définition du problème élémentaire 2 en termes de condition aux limites

b. Solution globale

La solution au problème plan défini par l'équation électromagnétique 2D cartésienne (III.31) et les conditions aux limites (III.32.a),..., (III.32.d) est obtenue par la superposition des solutions aux problèmes élémentaires définis précédemment à partir des étapes de calcul explicitées lors de l'obtention de la solution axisymétrique. Ainsi l'utilisation de la méthode de séparation des variables et les conditions aux limites de types fonctions éléments finis sur les frontières horizontales du Macro-Elément conduisent à la solution du Macro-Elément 2D cartésien suivante :

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{nt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{ni} \frac{\sinh(\frac{n\pi}{b} y) - \tanh(\frac{n\pi}{b} c') \cosh(\frac{n\pi}{b} y)}{\sinh(\frac{n\pi}{b} c') - \tanh(\frac{n\pi}{b} c) \cosh(\frac{n\pi}{b} c')} \sin(\frac{n\pi}{b} x) \right) A_i \quad (III.36)$$

si $i=1,2,\dots,n1$ alors $c' = y2$ et $c = y1$

si $i=n1+1,\dots,nt$ alors $c' = y1$ et $c = y2$

III.4. Méthodes Couplée:

III.4.1 Formulation éléments finis-analytique:

a. Formulation éléments finis du problème couplé axisymétrique

La formulation éléments finis dans le cas d'un problème électromagnétique comportant un inducteur, une charge et la région de l'air sera comme suit:

$$\iint_{\Omega} \alpha_i (\vec{\nabla} \wedge \nu (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})) d\Omega = \iint_{\Omega} \alpha_i \vec{J}_s d\Omega \quad (III.37)$$

Dans le cas traité, 2D axisymétrique, les grandeurs \vec{A} et \vec{J}_s n'ont qu'une seule composante dirigée suivant la direction azimutale φ :

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0)$$

$$\vec{J} = (0, J_{s\varphi}, 0)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cylindriques, lorsque le phénomène est bidimensionnel, une telle formulation sera :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \right\} drdz = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (\text{III.38})$$

L'utilisation du théorème de Green permet d'obtenir la formulation axisymétrique suivante :

$$\iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right\} \frac{drdz}{r} - \int_{\Gamma} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (\text{III.39})$$

$$A = rA_\varphi$$

Sur le domaine Ω_1 , on peut écrire :

$$\iint_{\Omega_1} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right\} \frac{drdz}{r} - \int_{\Gamma_{1m}} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r} = 0 \quad (\text{III.40})$$

Sur le domaine Ω_2 , on peut écrire :

$$\iint_{\Omega_2} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right\} \frac{drdz}{r} - \int_{\Gamma_{2m}} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (\text{III.41})$$

La considération de conditions aux limites type Dirichlet homogène permet de réduire les expressions (III.42) et (III.43) à l'interface entre les frontières verticales du Macro-Élément avec les frontières éléments finis, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\int_{\Gamma_{13EF}} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma_{13}}{r} = - \int_{\Gamma_{3ME}} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma_{13}}{r} = 0 \quad (\text{III.42})$$

$$\int_{\Gamma_{23EF}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{23}} = - \int_{\Gamma_{1ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{11}} = 0 \quad (III.43)$$

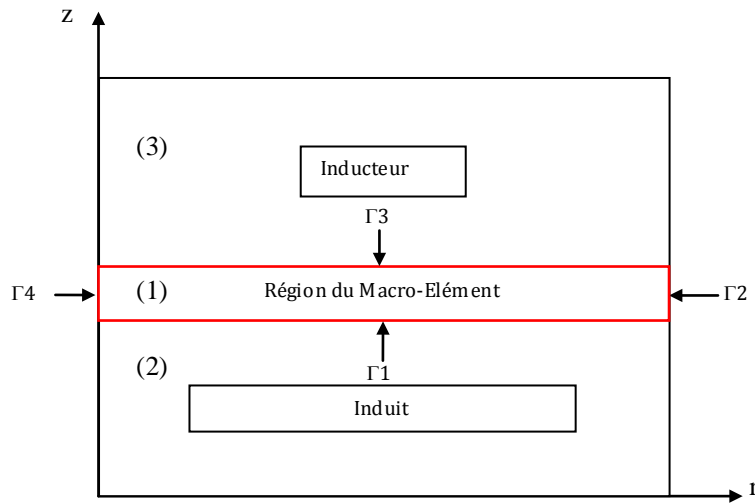


Figure.3.7: Représentation des frontières du Macro-Élément

et sur la frontière du Macro-Élément, l'intégration sur le contour, en tenant compte des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes sur les frontières verticales, fournit :

$$\int_{\Gamma_{3ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{13}} + \int_{\Gamma_{1ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{11}} = \int_{\Gamma_{ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{ME}} \quad (III.44)$$

La formulation éléments finis faisant intervenir les frontières verticales du macro-élément sera alors :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right\} \frac{drdz}{r} + \int_{\Gamma_{3ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{13}} + \int_{\Gamma_{1ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{11}} \\ = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \end{aligned} \quad (III.45)$$

qu'on pourra aussi écrire sous la forme condensée suivante :

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right\} \frac{drdz}{r} + \int_{\Gamma_{ME}} v\alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r^{ME}} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (III.46)$$

L'inconnue A est approchée par une fonction de type :

$$A(r, z) = \sum_{j=1}^{nn} \alpha_j(r, z) A_j \quad (\text{III.47})$$

nn : Nombre de nœuds inconnus du domaine de résolution

Lorsqu'on introduit l'expression de discrétisation de l'inconnue dans la formulation éléments finis du problème magnétostatique cette dernière devient :

$$\sum_{j=1}^{nn} \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \frac{\partial \alpha_j}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) \frac{drdz}{r} A_j + \sum_{j=1}^{nn} \left(\int_{\Gamma} v \alpha_i^{ME} \frac{\partial \alpha_j^{ME}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r} \right) A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (\text{III.48})$$

d'où le système algébrique suivant :

$$[M + S^{ME}] [A] = [K] \quad (\text{III.49})$$

[M] : Matrice éléments finis.

[S^{ME}] : Matrice du Macro-Elément.

[K] : Vecteur source.

[A] : Vecteur des inconnues

Les éléments des différentes matrices du système algébrique sont tels que :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j \frac{drdz}{r} \quad (\text{III.50})$$

$$S^{ME}_{ij} = \int_{\Gamma} v \alpha_i^{ME} \frac{\partial \alpha_j^{ME}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{r}$$

(III.51)

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{s\varphi} drdz \quad (\text{III.52})$$

b. Formulation éléments finis du problème couplé cartésien

La formulation éléments finis du problème aux dérivées partielles dans le cas d'un phénomène physique plan (en coordonnées x et y) peut être illustré par le dispositif de la figure 3.8 suivante:

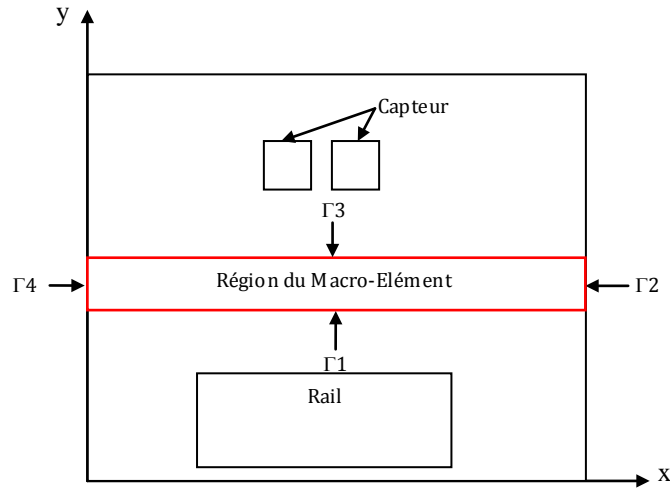


Figure.3.8 : Définition d'un problème plan (x, y).

La formulation éléments finis associée à ce type de structure est de la forme :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i (\vec{\nabla} \wedge v (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) d\Omega = \iint_{\Omega} \alpha_i \vec{J}_s d\Omega \quad (\text{III. 53})$$

en régime harmonique et avec les grandeurs \vec{A} et \vec{J} ne comportant qu'une seule composante dirigée suivant la direction perpendiculaire au plan d'étude [x, y] :

$$\vec{A} = (0, 0, A_z) \quad (\text{III. 54})$$

$$\vec{J}_s = (0, 0, J_z) \quad (\text{III. 55})$$

L'expression (III. 53) devient :

$$\iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right\} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i A dx dy + \quad (\text{III. 56})$$

$$\int_{\Gamma} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} dx dy$$

La frontière du Macro-Elément cartésien est représentée ci-dessous :

Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 représentent les frontières du Macro-Elément cartésien et en tenant compte des conditions aux limites de type Dirichlet homogène sur les frontières Γ_2 et Γ_4 , les considérations du modèle précédent s'appliquent dans ce cas aussi d'où la formulation éléments finis suivante:

$$\iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right\} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i A dx dy + \quad (\text{III. 57})$$

$$\int_{\Gamma_{MEC}} v \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma_{MEC} = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} dx dy$$

- **Système algébrique matriciel**

Le système matriciel qui en découle s'exprime de la même façon que dans le cas axisymétrique avec une définition des intégrants matriciels et vectoriels comme suit :

$$\{[M] + [S^{MEc}] + j\omega[N]\}[A] = [K] \quad (\text{III. 58})$$

avec:

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \bar{\nabla} \alpha_i \bar{\nabla} \alpha_j dx dy \quad (\text{III. 59})$$

$$S^{MEc}_{ij} = \int_{\Gamma} \nu \alpha_i^{MEc} \frac{\partial \alpha_j^{MEc}}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{III. 60})$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \alpha_j dx dy \quad (\text{III. 61})$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_{sz} dx dy \quad (\text{III. 62})$$

$[S^{MEc}]$: Matrice du Macro-Elément cartésien.

α_i^{MEc} : Fonction de forme associée au modèle cartésien

Le calcul détaillé de la matrice de raideur du macro-élément cartésien S_{ij}^{MEc} est présenté dans l'annexe II.

III.4.2. Formulation éléments finis intégrales de frontières :

La formulation éléments finis intégrales de frontières consiste à associer deux solutions numériques pour la résolution d'un problème défini par des équations aux dérivées partielles. Les solutions numériques sont obtenues à partir de la méthode des éléments finis pour le domaine et la méthode intégrales de frontières pour représenter la frontière de domaine d'étude .soit le domaine de résolution (Γ) délimité par le frontière Γ tel que représenté par la figure suivante :

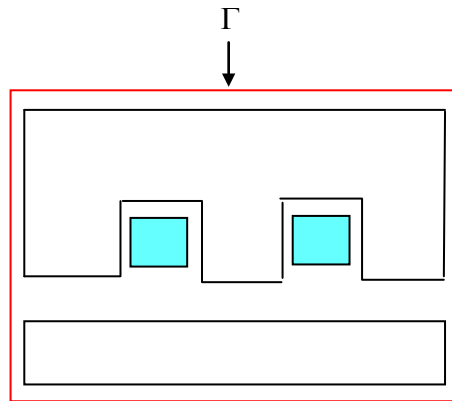


Figure.3.9 : Représentation des frontières

Le problème électromagnétique est décrit par l'équation électromagnétique en régime statique :

$$\overrightarrow{rot}(v\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \vec{J}_s \quad \text{sur } \Omega \quad (\text{III. 63})$$

et par l'équation intégrales de frontières sur Γ , suivante

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} A d\Gamma - \int_{\Gamma} G \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (\text{III. 64})$$

L'équation (III. 64) représente l'identité de Green

La formulation éléments finis de l'équation (III. 63), en exploitant le théorème de Green, en hypothèse 2D cartésien est telle que :

$$\iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla} A_z \overrightarrow{\nabla} \phi_i dx dy - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \phi_i d\Gamma = \iint_{\Omega} J_s \phi_i dx dy \quad (\text{III. 65})$$

En considérant que la fonction d'approximation $A_z(x, y)$ est donné par :

$$A_z(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) A_z \quad (\text{III. 66})$$

ou bien

$$A_z = A^T \cdot \phi^T \quad (\text{III. 67})$$

A^T : Vecteur des inconnues du problème

ϕ^T : Vecteur des fonctions de forme et ϕ_i représente le vecteur des fonctions de projection identique au vecteur des fonctions de forme ϕ^T , on aura le système matériel suivants :

$$[A^T][M] - \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] [N] = [K] \quad (\text{III. 68})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} v \overline{\nabla \phi_i} \overline{\nabla \phi_j} dx dy \quad (\text{III. 69})$$

-l'équation intégrale (III. 64) se met sous forme algébrique suivante :

$$[A^T][P] - \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] [Q] = 0 \quad (\text{III. 70})$$

Le problème complet est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} [A^T][M] - \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] [N] = [K] & (\text{III. 71}) \\ [A^T][P] - \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] [Q] = 0 & (\text{III. 72}) \end{cases}$$

La solution peut être obtenue en résolvant le système précédent qui fournira à la fois les inconnus : $[A^T]$ et $\left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right]$ représentant l'inconnue potentiel vecteur et la dérivée par rapport à la normale du potentiel vecteur.

La méthode de substitution peut être utilisée à savoir :

$$[A^T][P] - \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] [Q] = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial A^T}{\partial n} \right] = [A^T][P][Q]^{-1} \quad (\text{III. 73})$$

On introduit (III. 72) dans (III. 70), on aura :

$$[A^T][M] - [A^T][P][Q]^{-1}[N] = [K] \Rightarrow [A^T]\{[M] - [P][Q]^{-1}[N]\} = [K] \quad (\text{III. 74})$$

L'inversion du système (III. 74) permet de déduire les inconnues potentiel vecteur magnétique A (vecteur $[A^T]$), et à partir de l'équation (III. 73), on déduit les valeurs de dérivée normale.

III.4.3 Formulation élément finis-impédance de surface :

La formulation éléments finis-impédance de surface utilise comme solution impédance de surface, la solution obtenue en résolvant une équation différentielle à une dimension dans la région conductrice à effet de peau.

- Solution impédance de surface

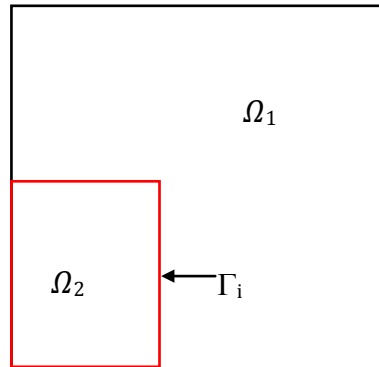


Figure.3.10 : Représentation des frontières

On considère une région conductrice dont l'équation différentielle représentant le comportement du potentiel vecteur magnétique \vec{A} est donnée par :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - j\sigma\omega\mu A_z = 0 \tag{III. 75}$$

σ : Conductivité électrique du milieu conducteur.

μ : Perméabilité magnétique absolue.

ω : Pulsation.

x : Coordonnée.

Avec : $\omega = 2\pi f$

f : fréquence d'alimentation.

La résolution de l'équation différentielle (III. 75) consiste à considérer que la solution est de la forme : $A_z(x) = Ke^{\alpha x}$ (III. 76)

En introduisant l'équation (III. 76) dans (III. 75), on aura :

$$K\alpha^2 e^{\alpha x} - j\alpha\mu\omega K e^{\alpha x} = 0 \Rightarrow \alpha^2 - j\alpha\mu\omega = 0$$

$$\alpha = \pm\sqrt{j\alpha\mu\omega} = \pm\frac{1+j}{\delta} \tag{III. 77}$$

La solution s'écrira alors sous la forme suivante :

$$A_z(x) = K_1 e^{\frac{1+j}{\delta}x} + K_2 e^{-\frac{(1+j)}{\delta}x} \tag{III. 78}$$

Le domaine d'étude est considéré comme étant un demi-plan infini d'où la solution se réduit à :

$$A_z(x) = K_2 e^{-\frac{(1+j)}{\delta}x} \tag{III. 79}$$

Pour $x=0$ $A_z(x)_{x=0} = A_0$ $K_2 = A_0$ (III. 80)

Et donc la solution s'exprime en fonction de la condition à la limite comme suit :

$$A_z(x) = A_0 e^{-\frac{(1+j)x}{\delta}} \quad (\text{III. 81})$$

La formulation éléments finis du problème couplé définie sur Ω et la frontière Γ sera donnée par :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{vrot}\vec{A})\phi_i d\Omega &= \iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right\} \phi_i d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right\} \phi_i d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Or, d'après le théorème de Green :

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \phi_i dx dy = - \iint_{\Omega} v \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial x} \phi_i d\Gamma_x \quad (\text{III. 83})$$

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \phi_i dx dy = - \iint_{\Omega} v \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial y} \phi_i d\Gamma_y \quad (\text{III. 84})$$

En effectuant la somme membre à membre des égalités (III. 83) et (III. 84), on aura :

$$\iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right\} \phi_i d\Omega = - \iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\} dx dy + \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \phi_i d\Gamma \quad (\text{III. 85})$$

Le couplage entre la région non conductrice (l'air) et la région conductrice Ω_2 de frontière Γ_i est réalisé en assurant l'égalité :

$$v_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial n} \right)_{\Gamma_i} = v_{EF} \left(\frac{\partial A_z}{\partial n} \right)_{EF} \Rightarrow v_{EF} \left(\frac{\partial A_z}{\partial n} \right)_{EF} = v_{\Gamma_i} \cdot \frac{\partial}{\partial n} [A_z(x)]_{\Gamma_i} \quad (\text{III. 86})$$

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial n} = -\frac{(1+j)}{\delta} \cdot A_0 e^{-\frac{(1+j)x}{\delta}} \quad (\text{III. 87})$$

$$\frac{\partial A_z(x)}{\partial n} = -\frac{(1+j)}{\delta} \cdot A_z(x) \quad (\text{III. 88})$$

et $\int_{\Gamma} v \frac{\partial A_z}{\partial n} \phi_i d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \left(-\frac{(1+j)}{\delta} \right) A_z \phi_i d\Gamma_i$ et donc, la formulation éléments finis-impédance de surface devient :

$$\iint_{\Omega} v \left\{ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right\} \phi_i d\Omega = - \iint_{\Omega} v \overrightarrow{\nabla} A_z \cdot \overrightarrow{\nabla} \phi_i dx dy + \int_{\Gamma_i} \left(-\frac{(1+j)}{\delta} \right) A_z \phi_i d\Gamma_i \quad (\text{III. 89})$$

Chapitre IV

Application : Simulation du
mouvement du capteur dans un
dispositif CND

IV. Application à la simulation du mouvement du capteur dans un dispositif CND

IV. 1. Cas d'un dispositif CND axisymétrique

Le modèle axisymétrique représentant un tube de pipeline comportant un défaut est considéré dans le cadre de ce travail.

IV. 1.1. Structure géométrique

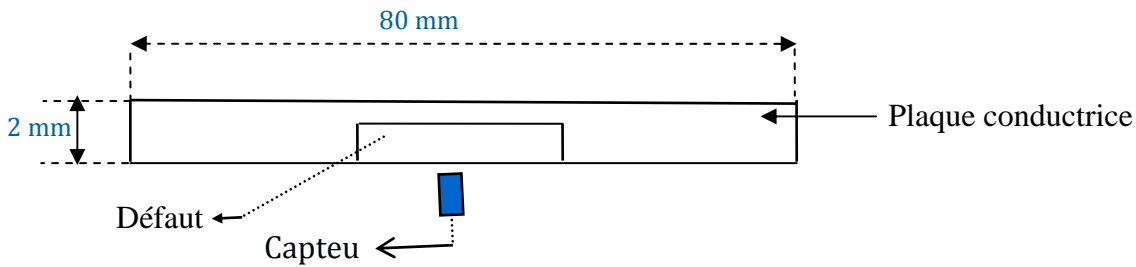


Figure.4.1 géométrie de problème axisymétrique

IV.1. 2. Propriétés physiques

Les propriétés physiques sont telles que:

➤ **Plaque conductrice:**

Conductivité électrique: $\sigma = 5.9 * 1e + 6 [\Omega.m]^{-1}$

Reluctivité magnétique: $\nu = \nu_0$

Fréquence: 50 Hz

➤ **Défaut :**

Conductivité électrique: $\sigma = 0 [\Omega.m]^{-1}$

➤ **Capteur:**

Reluctivité magnétique: $\nu = \nu_0$

Conductivité électrique: $\sigma = 5.9 * 1e + 7 [\Omega.m]^{-1}$

Densité de courant d'excitation: $= 2.66 * 1e + 6$

Nombre de spires: 140

IV.1.3. Formulation électromagnétique du problème

Nous avons considéré un problème magnétodynamique en régime harmonique et dont l'équation en terme de potentiel magnétique vecteur est donnée comme suit :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + j\sigma\omega A = J_{sz} \quad (IV-1)$$

L'adaptation de l'équation (IV-1) pour les différentes régions du système donne :

Dans le capteur (l'inducteur)

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = J_{sz} \tag{IV-2}$$

Dans la charge (l'induit)

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + j\sigma\omega A = 0 \tag{IV-3}$$

Dans l'air

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = 0 \tag{IV-4}$$

IV.1. 4. Domaine d'étude et conditions aux limites

Le domaine d'étude avec les conditions aux limites associées sont représentés ci-dessous :

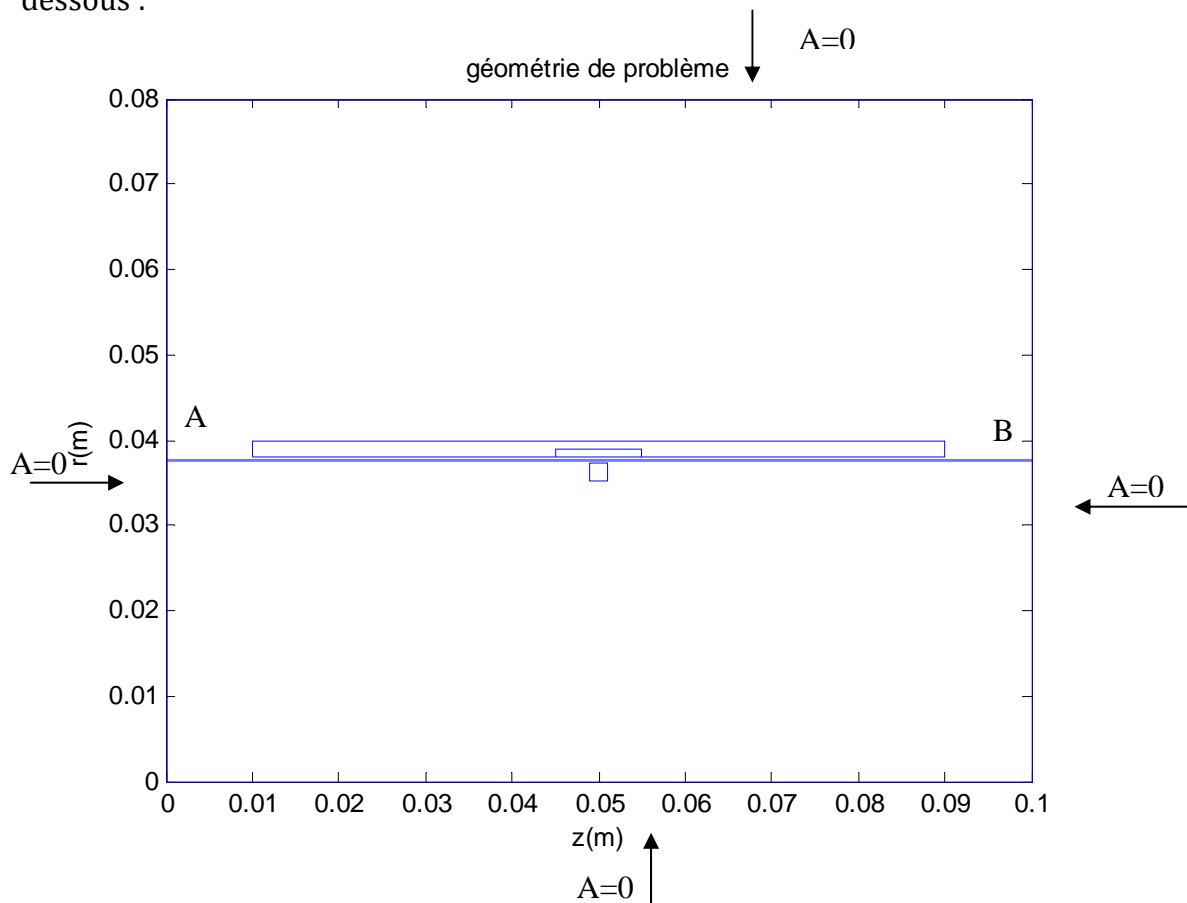


Figure 4.2 : Domaine de résolution et conditions aux limites

IV.1. 5 Maillage du domaine d'étude

Le maillage du domaine d'étude est représenté par la figure ci-après

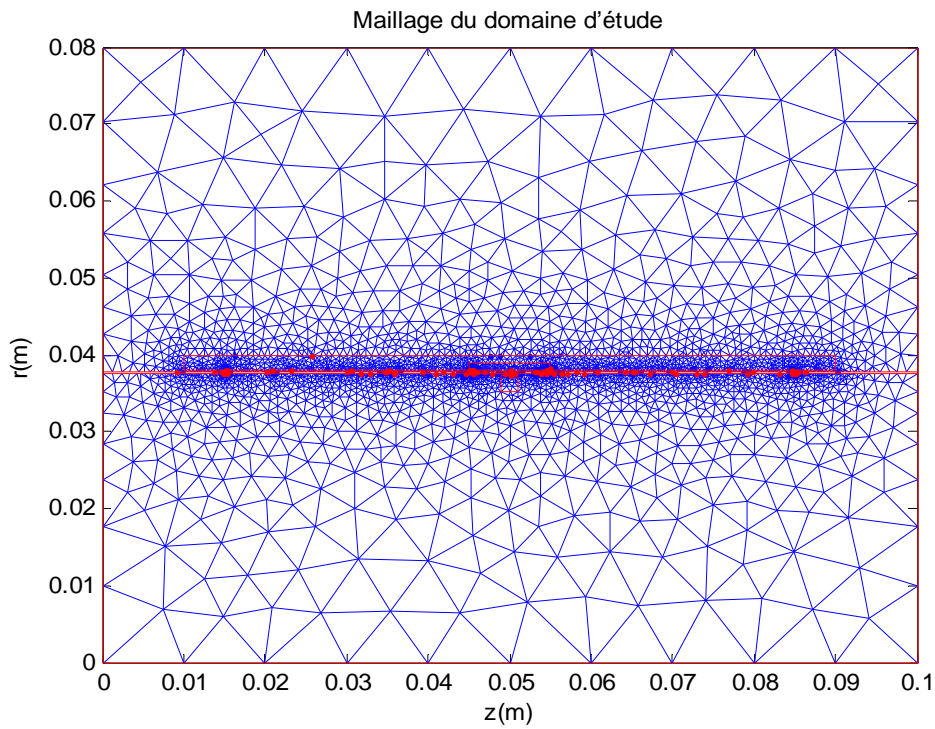


Figure. 4.3 : Maillage du domaine d'étude

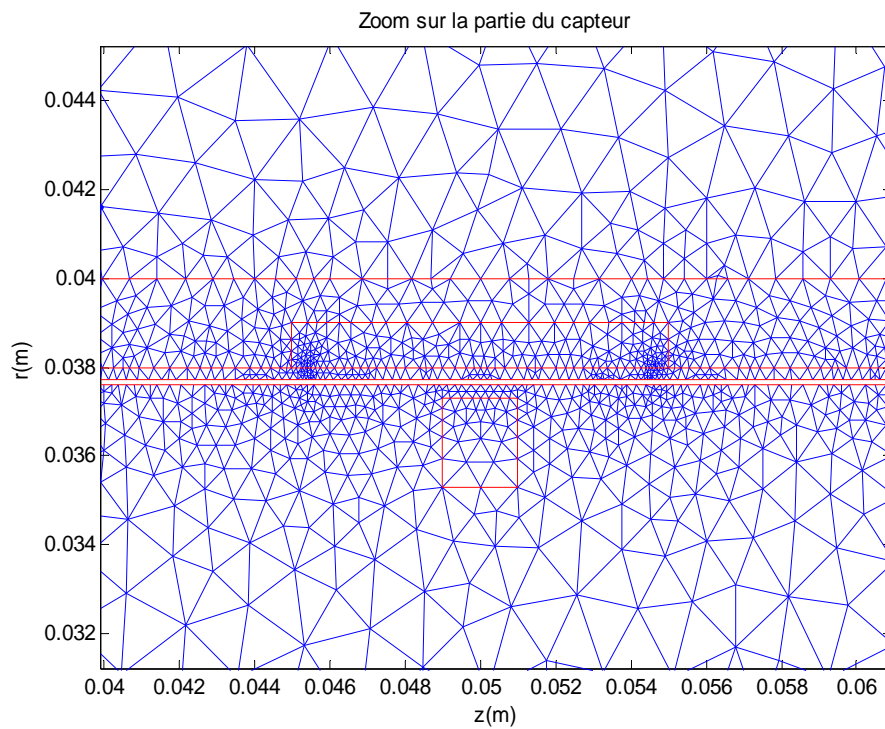


Figure.4.4 Zoom sur la partie du capteur

IV. 1.6. Résultats

Les résultats obtenus sont fournis en termes de potentiel vecteur magnétique, de densité de courant induit et de champ électrique induit.

a. Distribution du potentiel vecteur magnétique A

➤ Cas couplée EF-ME pour $f=50\text{Hz}$

Les figures représentant la distribution du potentiel vecteur magnétique sont obtenues pour différentes positions relatives du capteur (pas 1, 5, 10 et 15) par rapport à la cible. Le changement de position est obtenu en faisant déplacer les nœuds de la frontière du macro-élément pour une fréquence de 50Hz.

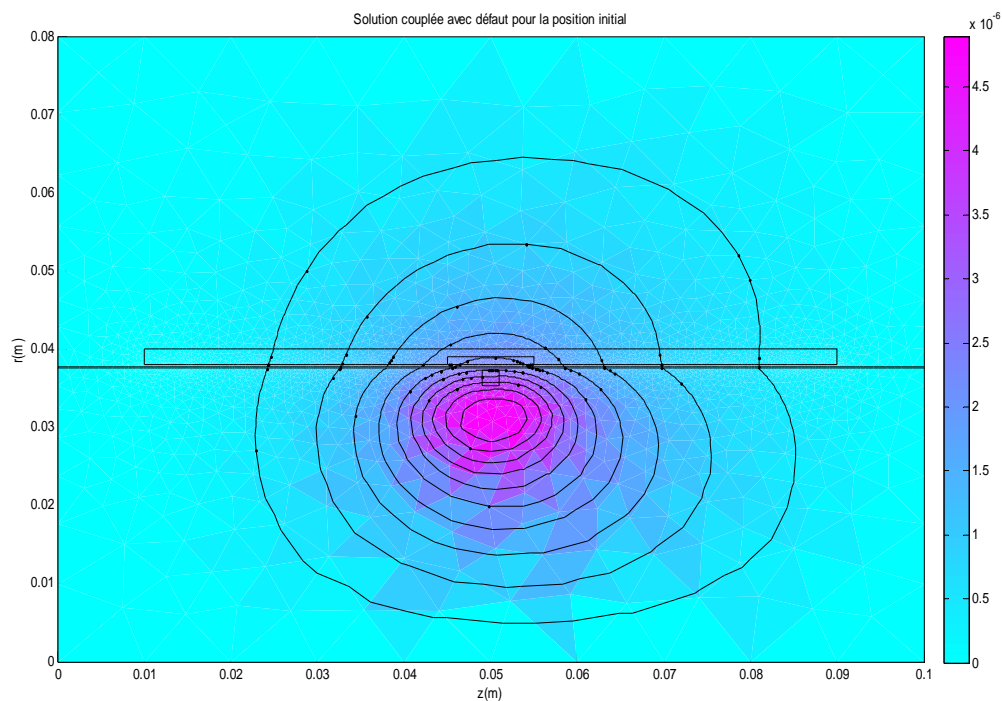


Figure.4.5: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour la position initial

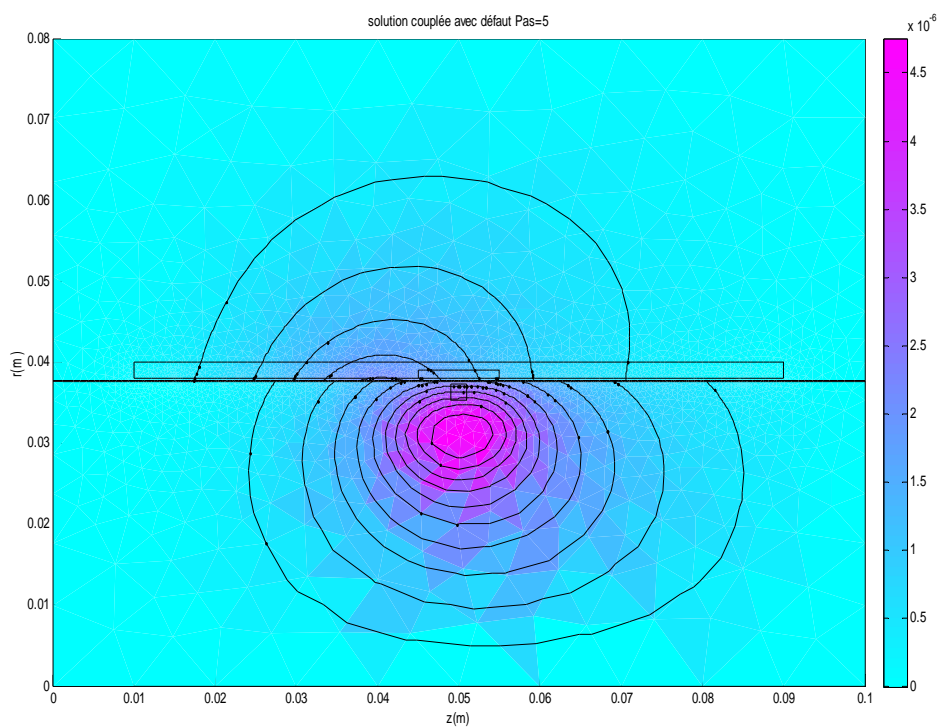


Figure.4.6: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 5 mm

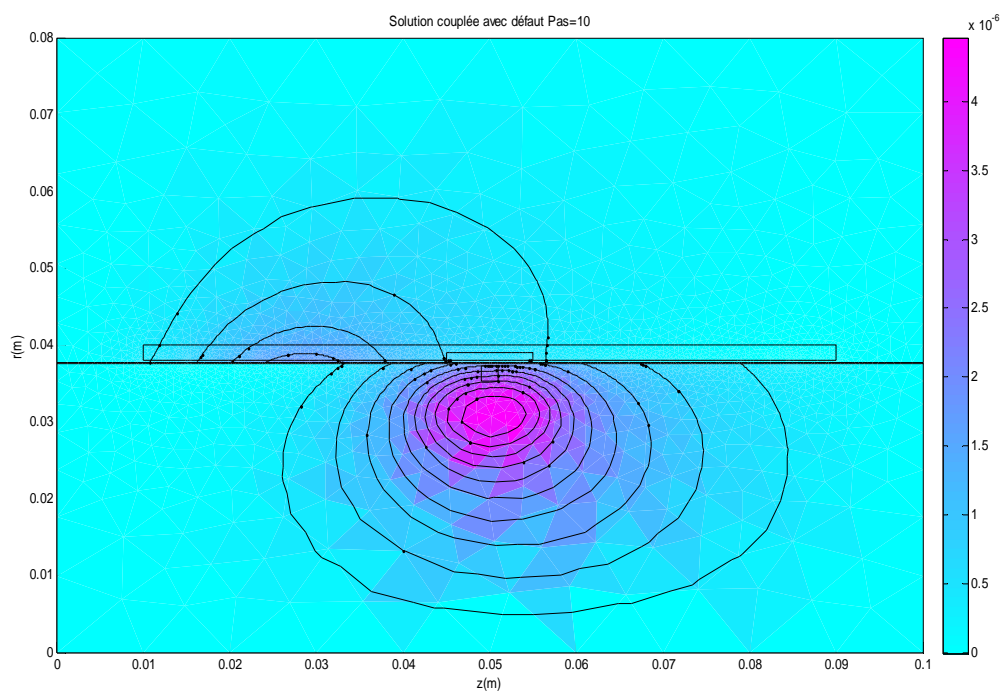


Figure.4.7 : Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 10 mm

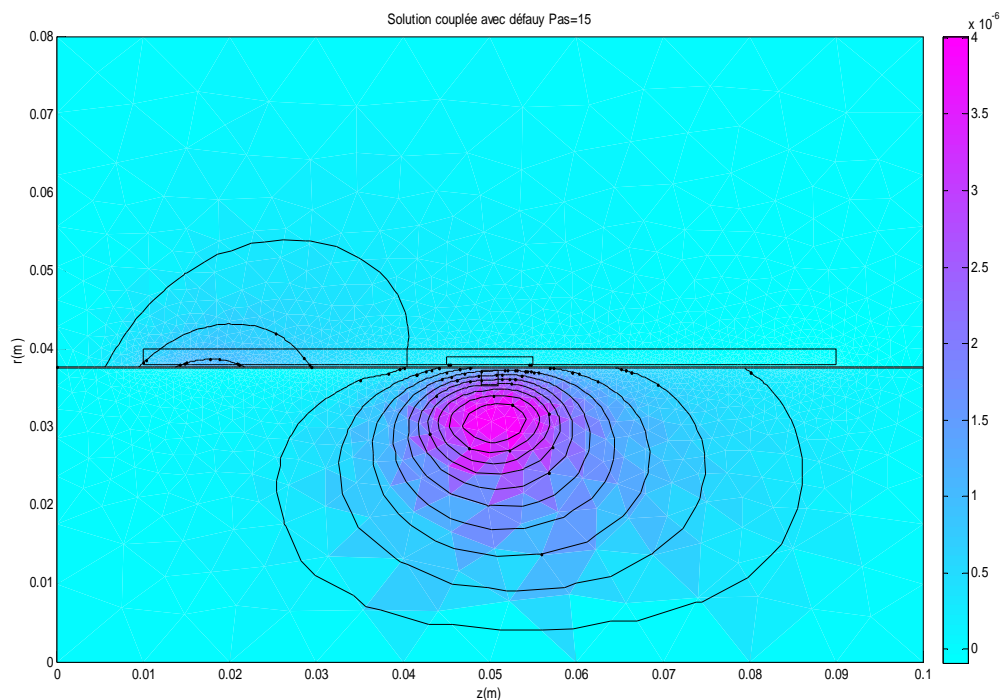


Figure.4.8: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 15 mm

➤ **Cas couplée EF-ME pour $f=50\text{kHz}$**

Les figures représentant la distribution du potentiel vecteur magnétique sont obtenues pour différentes positions relatives du capteur (pas 1, 5 et 10) par rapport à la cible. Le changement de position est obtenu en faisant déplacer les nœuds de la frontière du macro-élément pour une fréquence de 50kHz.

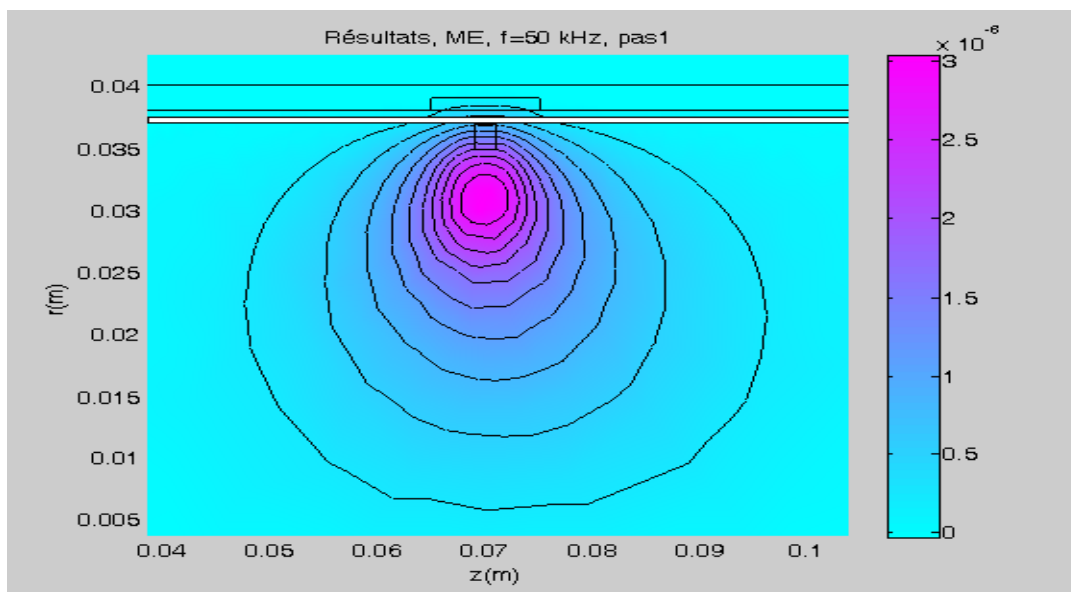


Figure.4.9: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50\text{ kHz}$

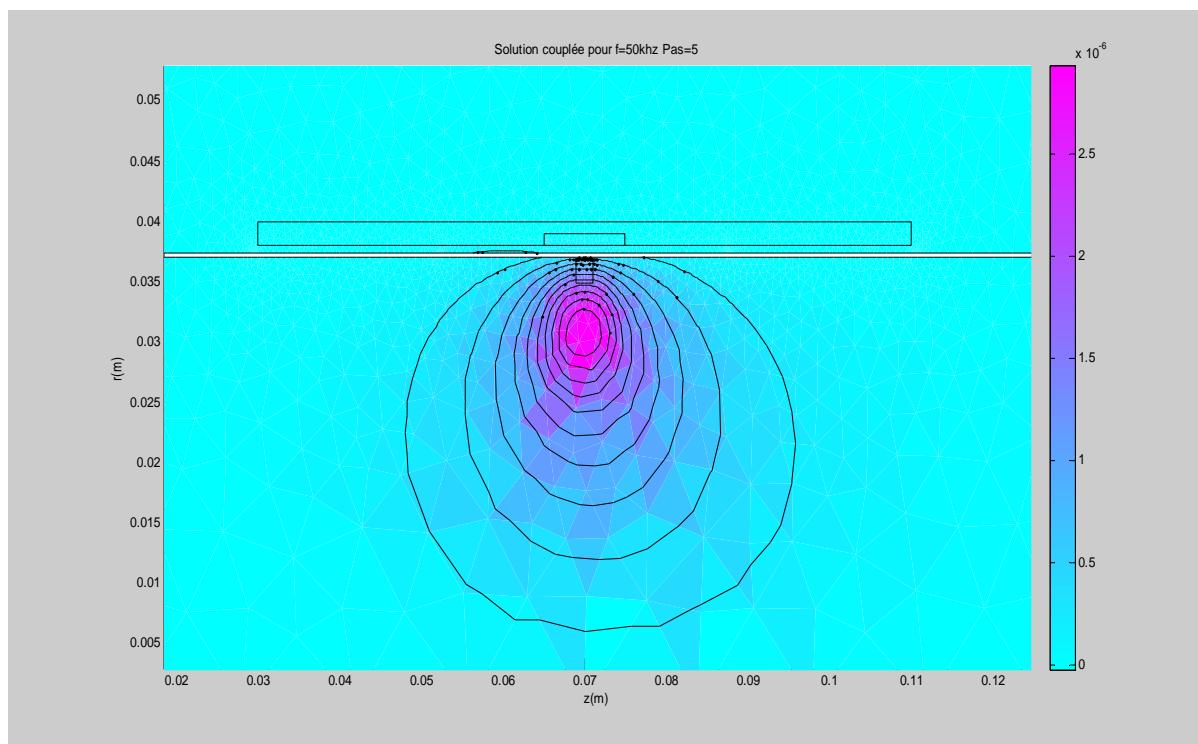


Figure.4.10: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50$ kHz Pas=5mm

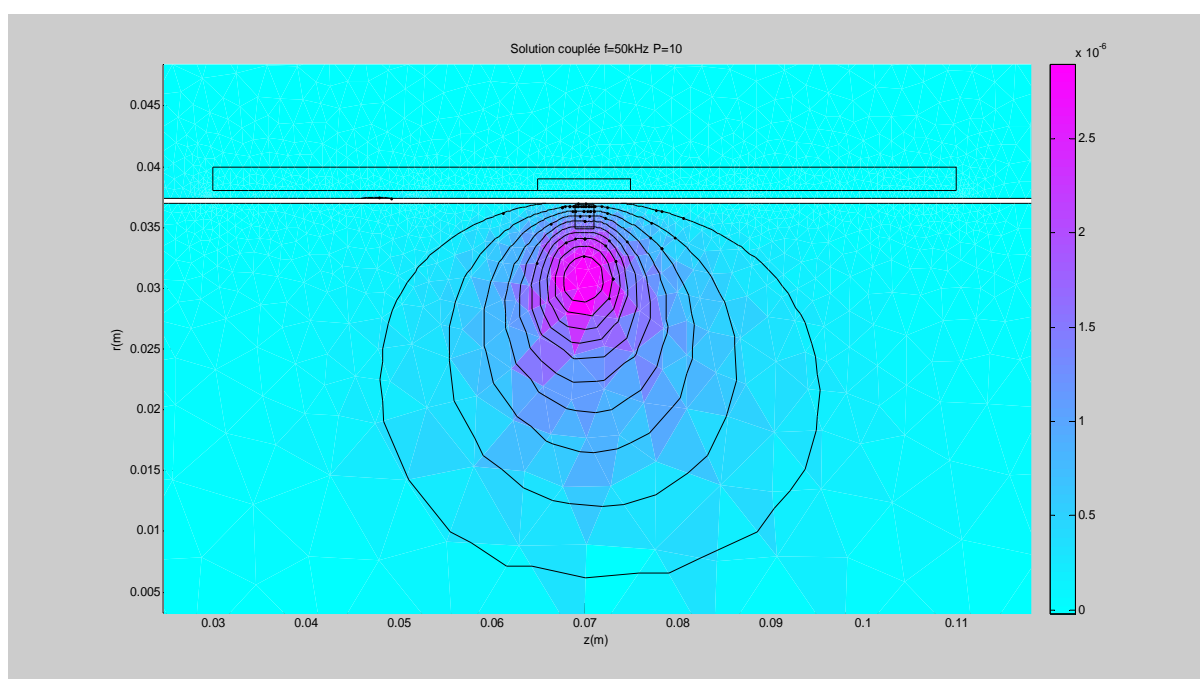


Figure.4.11: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50$ kHz Pas=10mm

➤ Cas EF pour $f=50\text{kHz}$

Les figures représentant la distribution du potentiel vecteur magnétique sont obtenues pour différentes positions relatives du capteur (pas 1, 5 et 10) par rapport à la cible dans le cas éléments finis pour une fréquence de 50kHz.

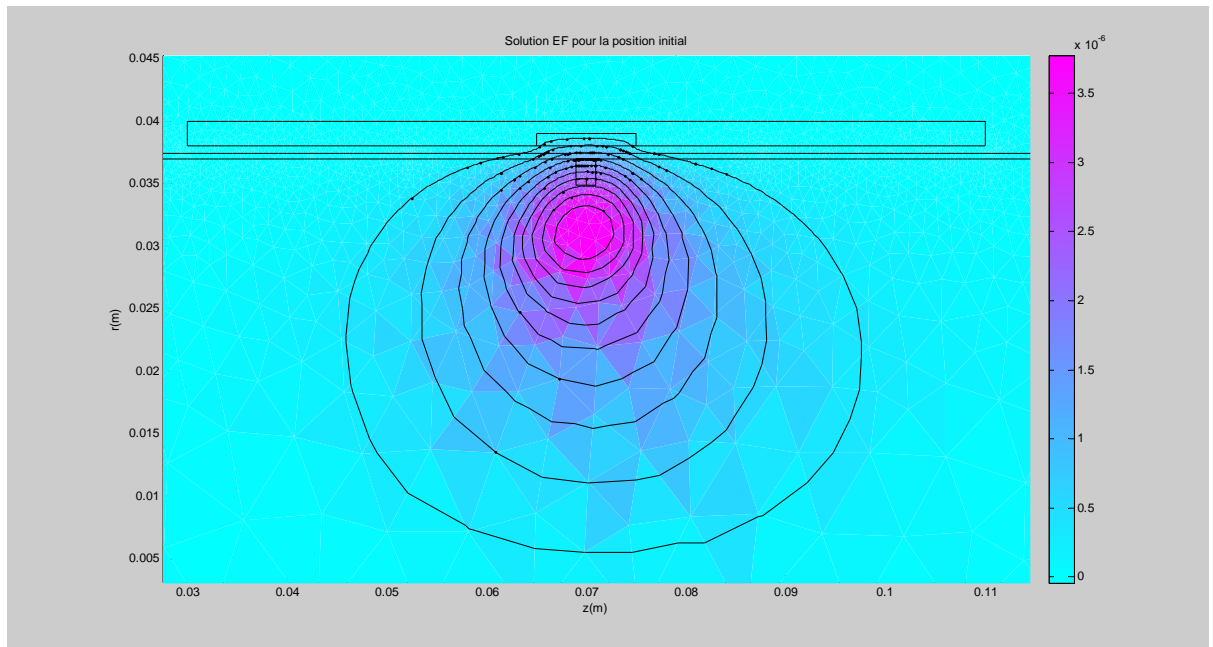


Figure.4.12: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50\text{ kHz}$

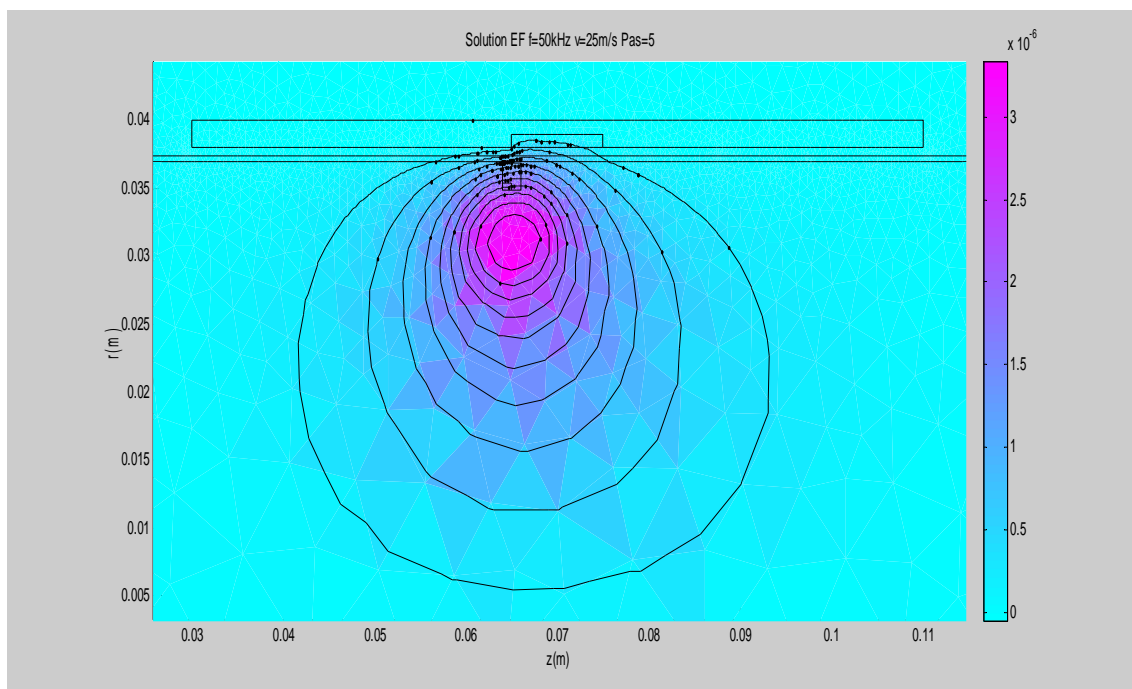


Figure.4.13: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50\text{ kHz}$
Pas=5mm

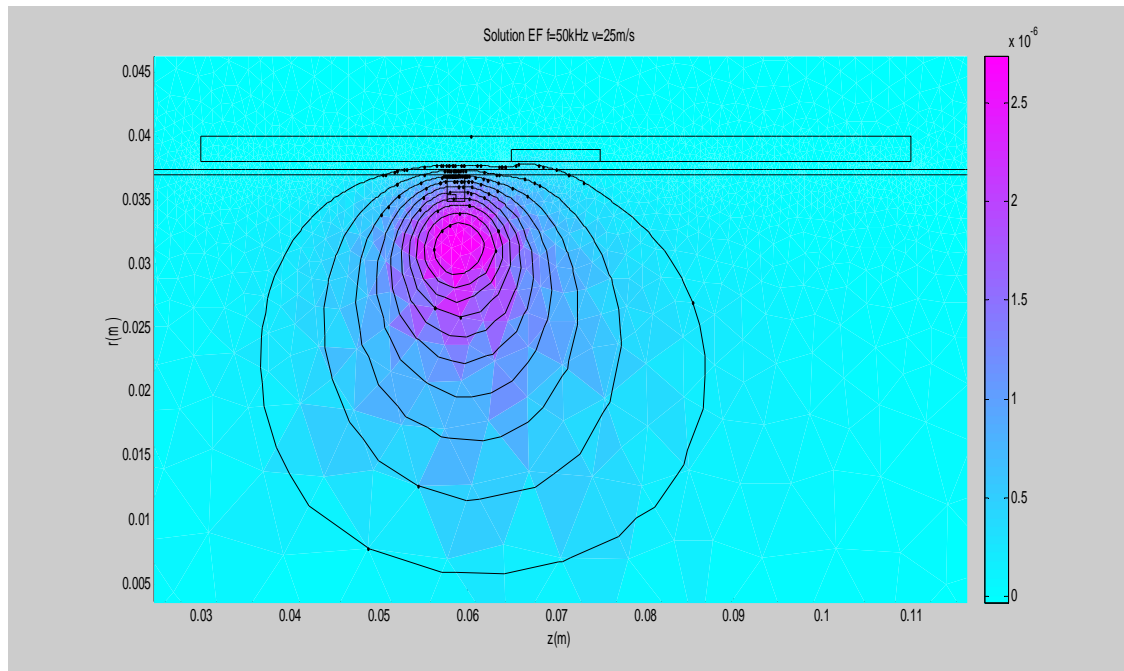


Figure.4.14: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour une fréquence $f=50$ kHz
Pas=10mm

b. Effet de la position du capteur sur la répartition du potentiel vecteur magnétique :

Les résultats obtenus pour la répartition du potentiel vecteur magnétique le long de la frontière du macro élément à partir du modèle couplé EF-ME pour différentes positions du capteur : position initiale (pas 1), position correspondent au pas 5, position correspondent au pas 10 et position correspondent au pas 15 à partir du centre du défaut sont représentés ci-dessous :

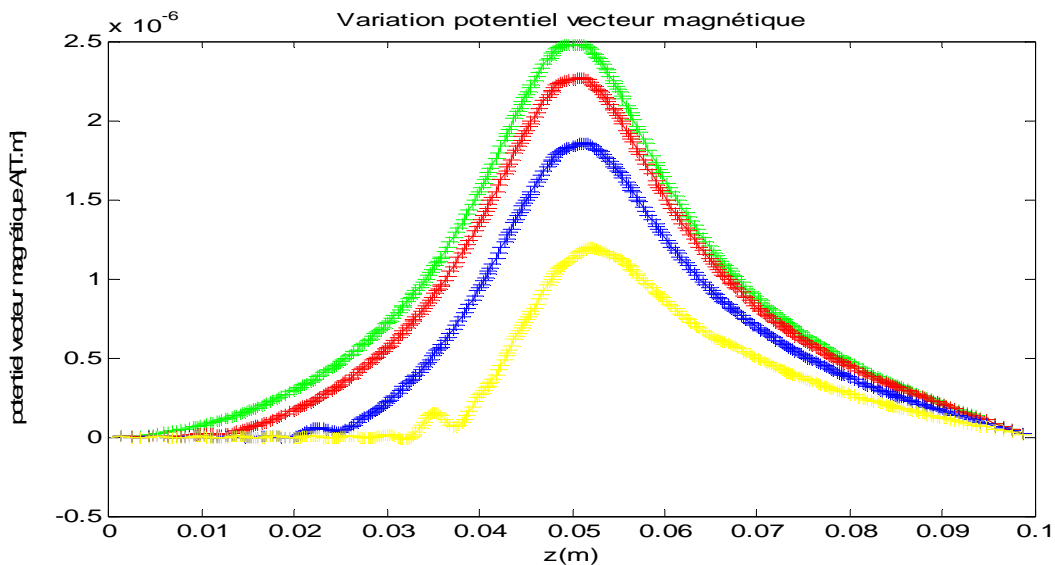


Figure .4.15 : Variation de potentiel vecteur magnétique pour différentes positions relatives du capteur (Solution couplée EF-ME)

c. Allure de la densité de courant induit par le mouvement en fonction du déplacement

La densité de courant induit au sein de l'inducteur a été représentée en choisissant un triangle appartenant à cette région (2176); Les résultats obtenus pour une vitesse $v=25\text{m/s}$ et une fréquence de 50kHz sont fournis ci-après :

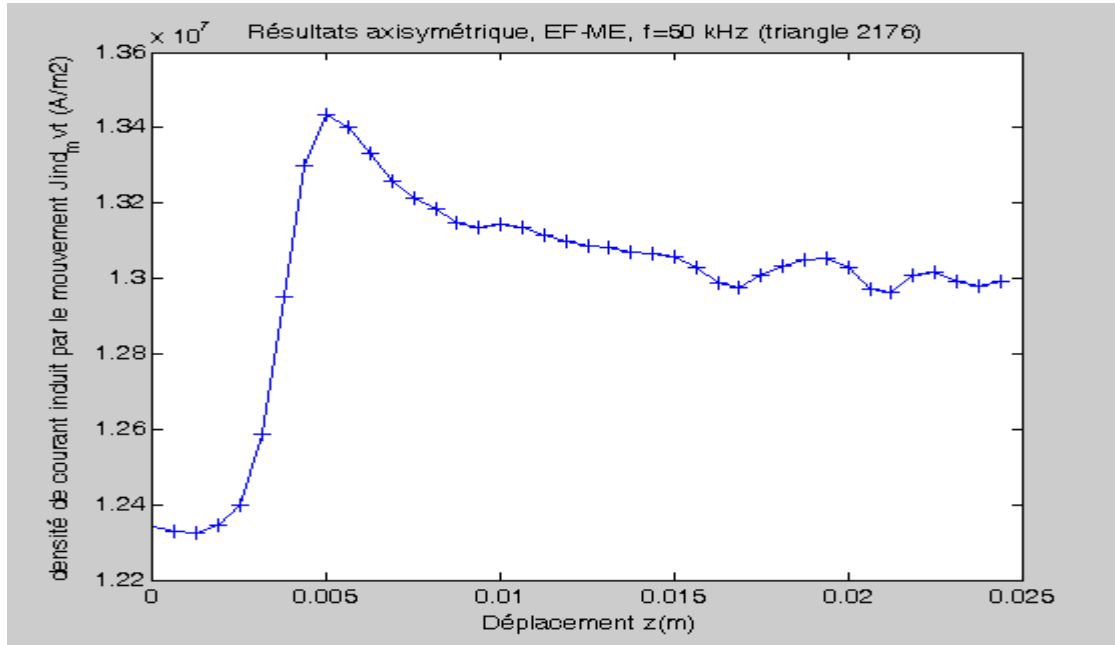


Figure 4.16 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=25\text{m/s}$

-Comparaison avec la densité de courant source :

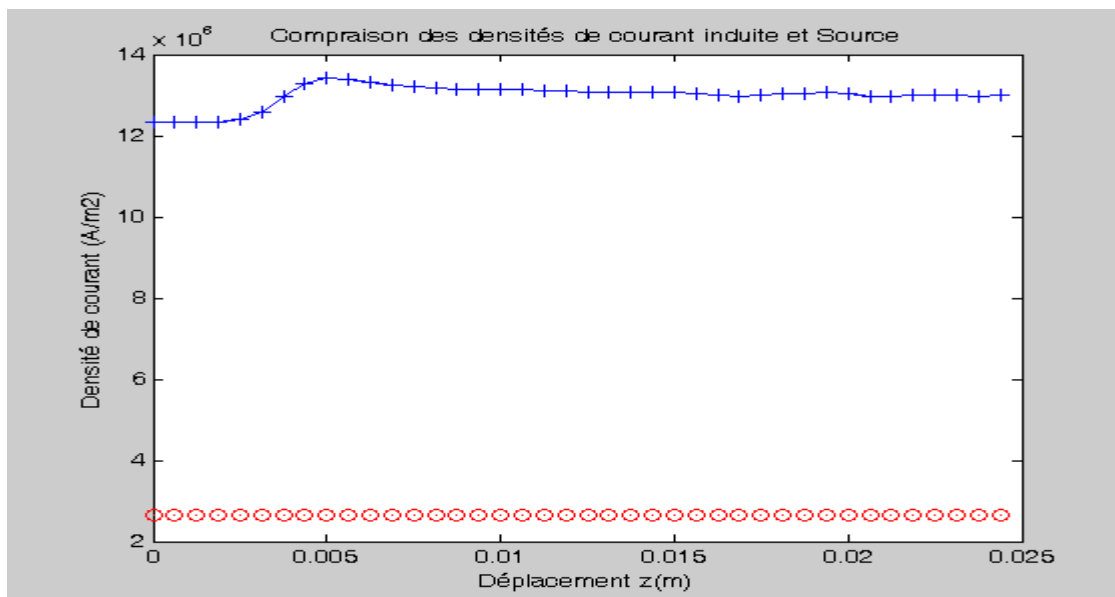


Figure. 4.17: Comparaison des densités de courant induit et source, $v=25\text{m/s}$, 40 pas de calcul

On constat qu'à la vitesse $v=25\text{m/s}$ la densité de courant induite est largement supérieure à la valeur de la densité de courant source.

-Allure du champ électrique : cas axisymétrique

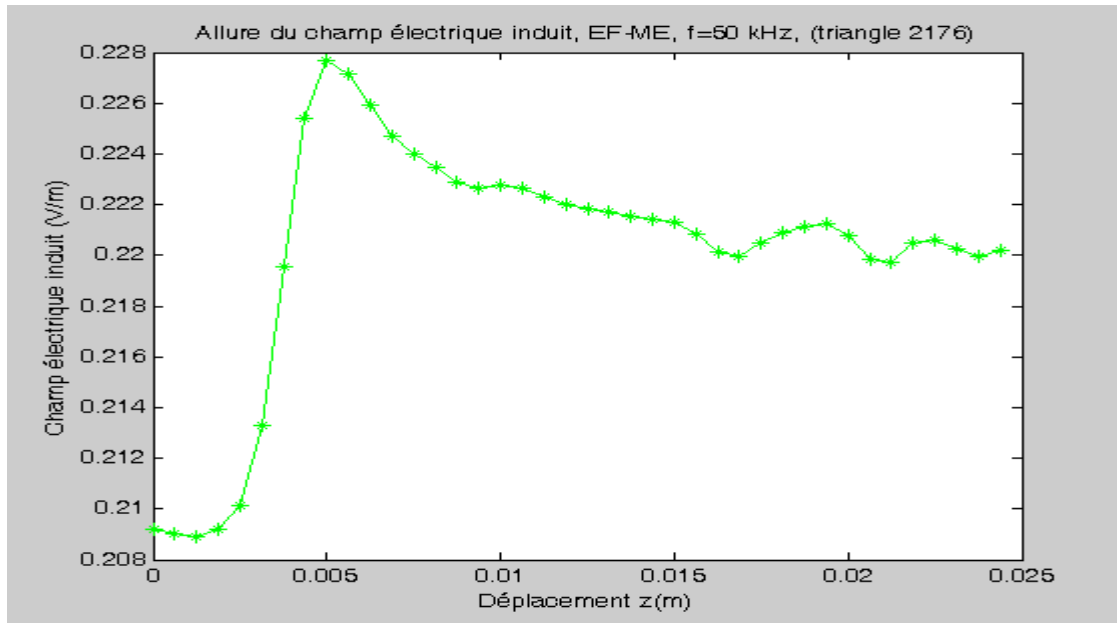


Figure. 4.18: Allure du champ électrique induit, $f=50\text{kHz}$, $v=25\text{m/s}$, EF-ME, 40 pas de calcul

L'allure du champ électrique est identique à celle de la densité de courant sachant que :

$$J_{\text{ind_mvt}} = \sigma * v_z * B_r$$

d. Etude de l'effet de la vitesse Cas axisymétrique ($f=50\text{ kHz}$)

La densité de courant induit et champ électrique induit au sein de l'inducteur a été représentée en choisissant un triangle appartenant à cette région (2176) ; Les résultats obtenus pour les vitesses $v=2.5, 5, 10, 15$ et 25m/s et une fréquence de 50kHz sont fournis ci-après :

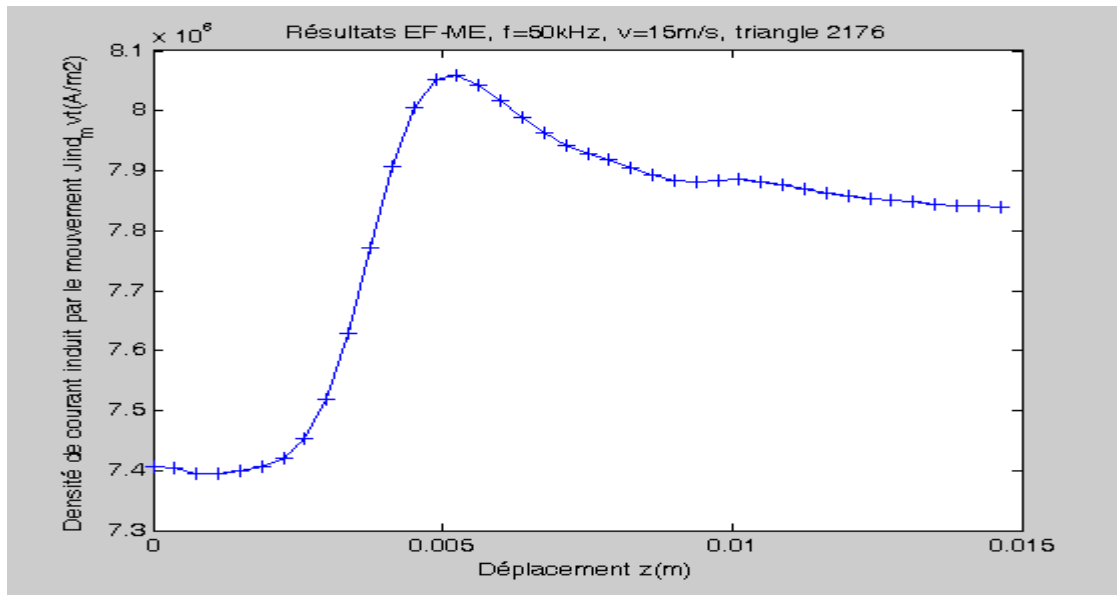
1-Vitesse de déplacement de 15m /s

Figure. 4.19 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=15m/s, 40 pas de calcul

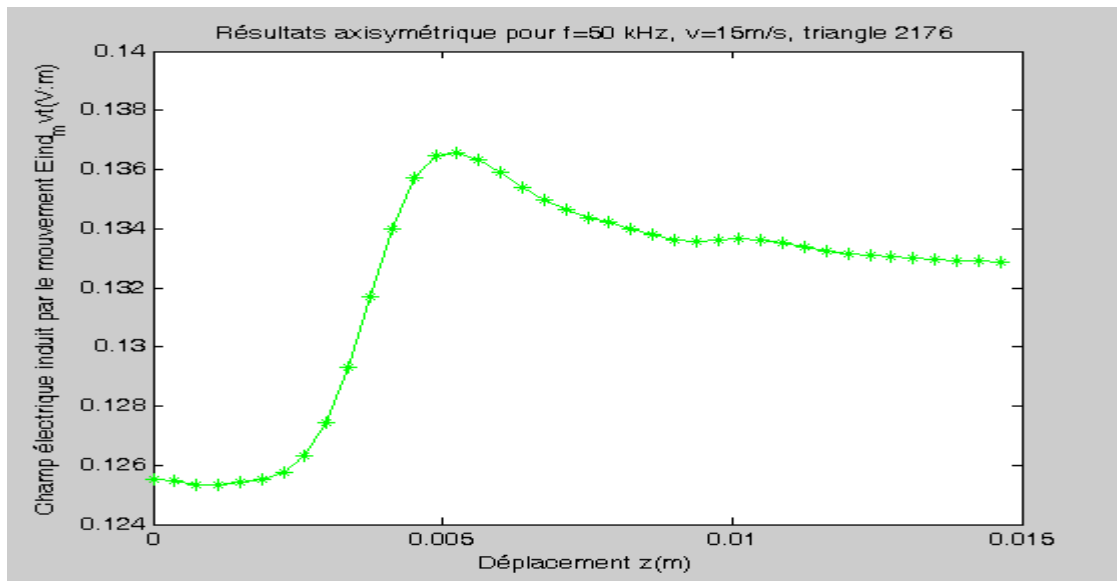


Figure. 4.20 : Allure du champ électrique induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=15m/s, 40 pas de calcul

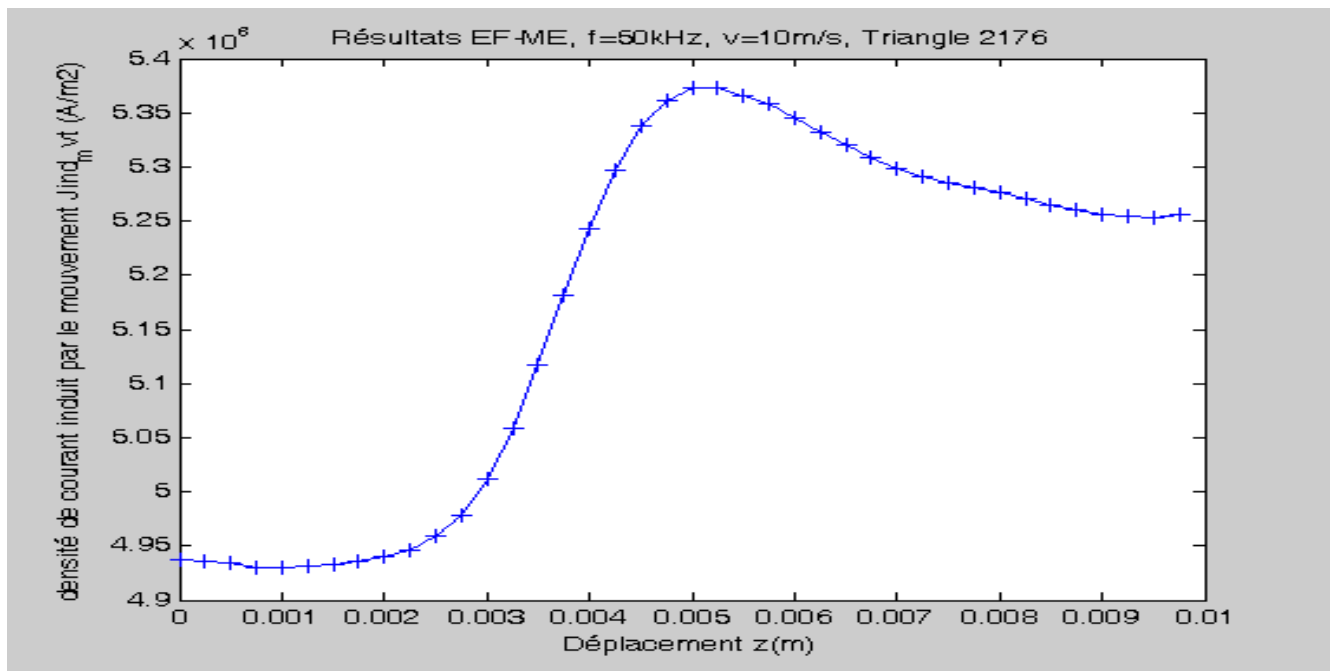
2-Vitesse de déplacement de 10 m /s

Figure. 4.21 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=10\text{m/s}$, 40 pas de calcul

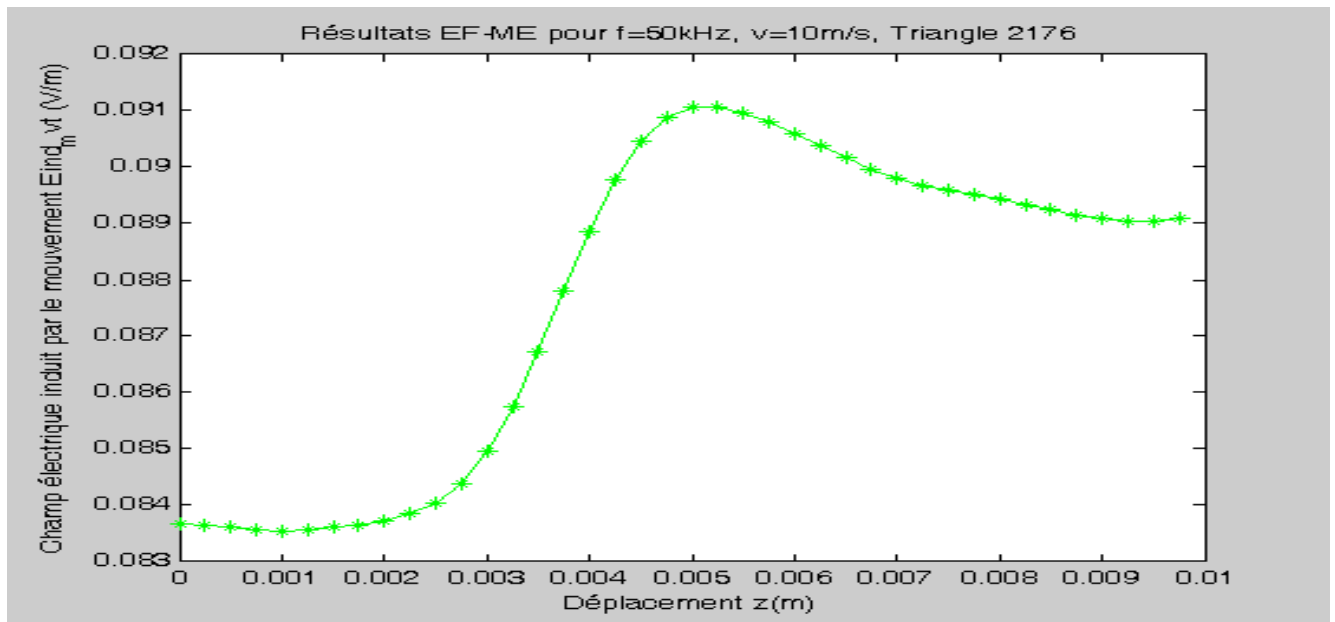


Figure. 4.22 : Allure du champ électrique induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=10\text{m/s}$, 40 pas de calcul

3-Vitesse de déplacement de 5 m /s

Les résultats obtenus pour une vitesse de 5 m/s dont donnés ci-après par les figures ci-après:

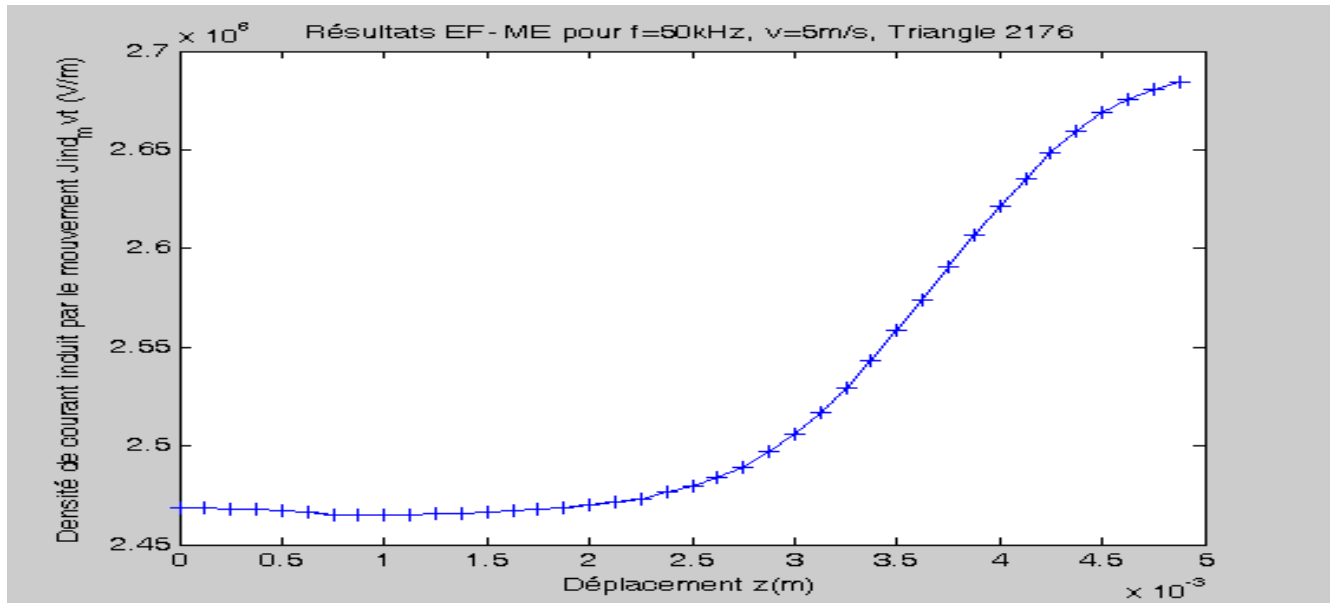


Figure. 4.23 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=5m/s, 40 pas de calcul

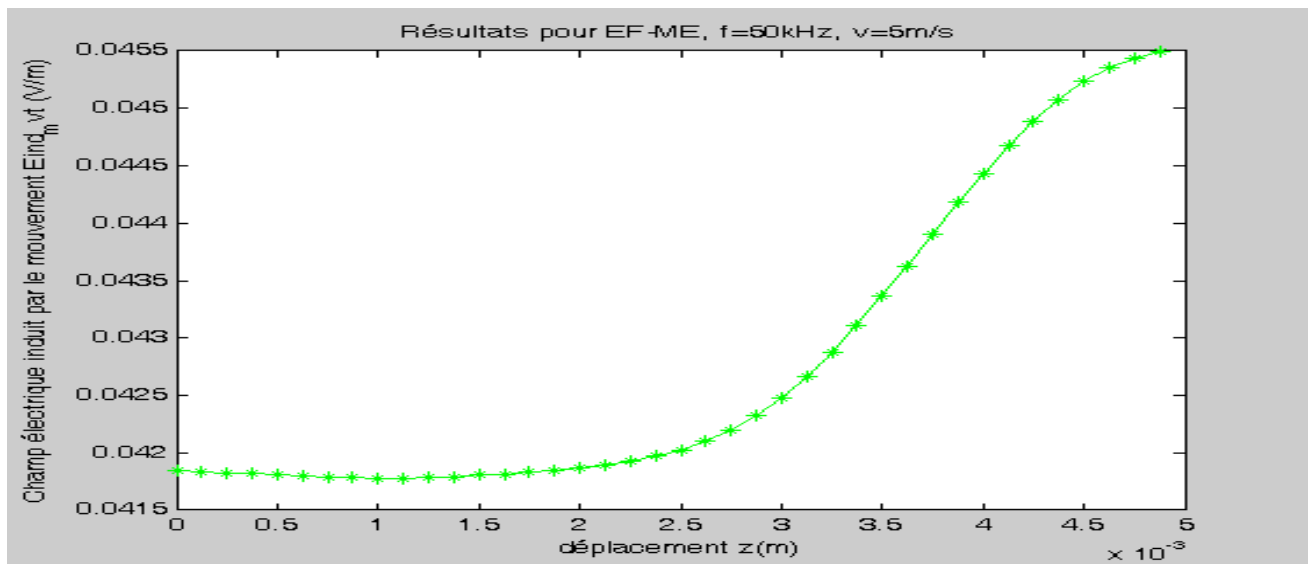


Figure. 4.24 : Allure du champ électrique induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=5m/s, 40 pas de calcul

4-Vitesse de déplacement de 2.5 m /s

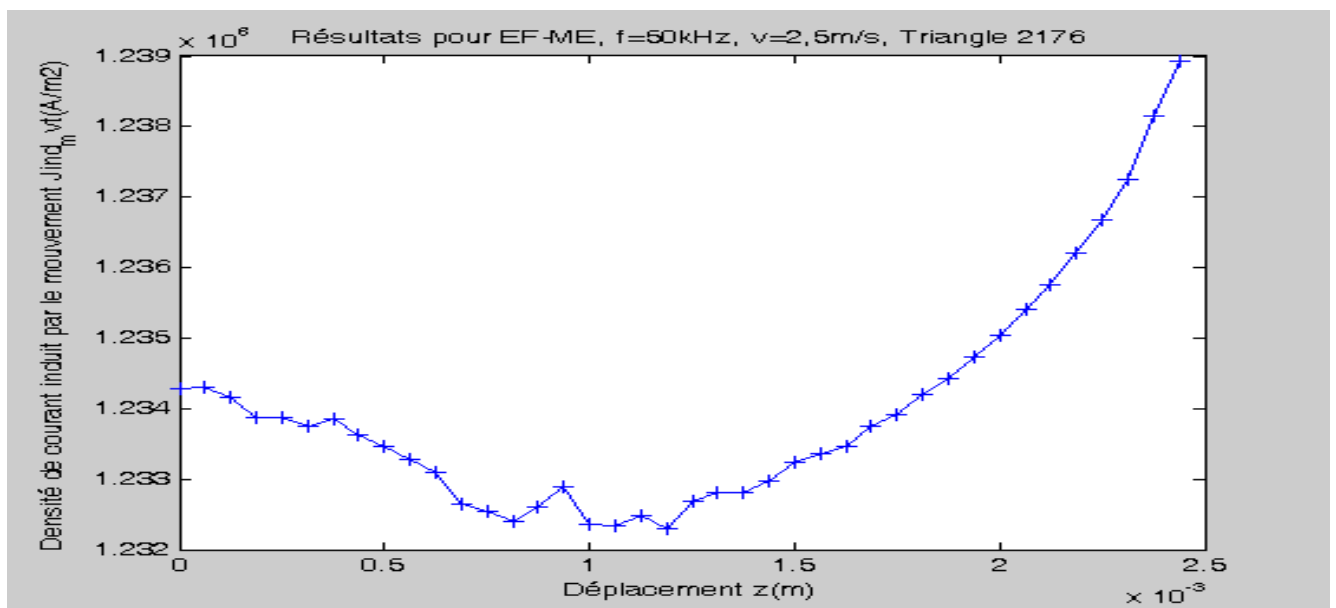


Figure. 4.25 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=2.5m/s, 40 pas de calcul

e- Comparaison des résultats concernant l'allure de la densité de courants induit en fonction de la position du capteur pour différentes valeur de la vitesse de déplacement :

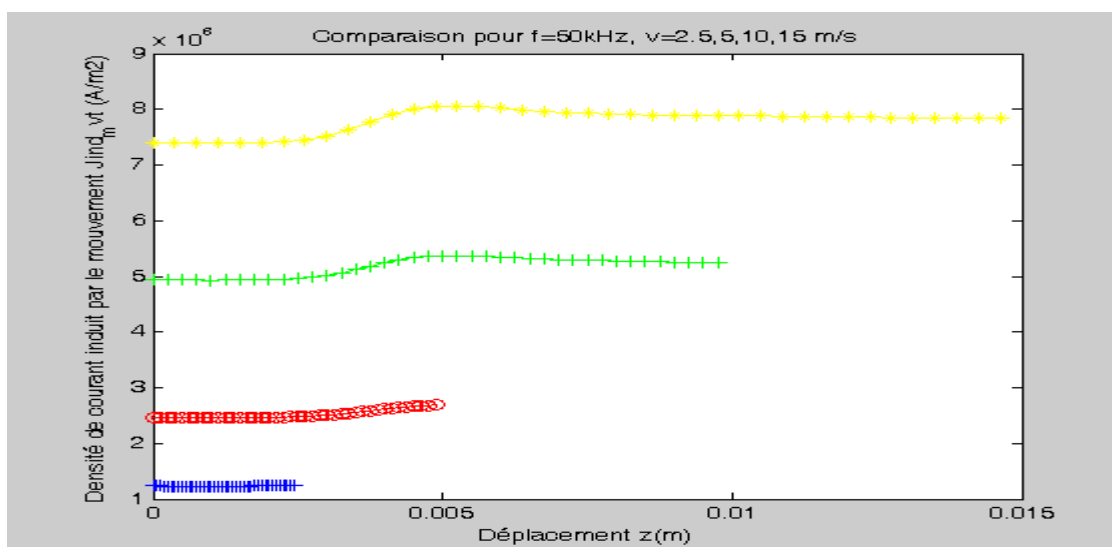


Figure. 4.26 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=2.5, 5, 10, 15 m/s, 40 pas de calcul
Les résultats obtenus montrent que le pas de calcul à considérer doit varier en fonction de la vitesse de déplacement du capteur.

La vitesse de déplacement influence les courants induits dans l'inducteur d'où il est nécessaire de les prendre en considération lorsque la détection se fait à des vitesses supérieures.

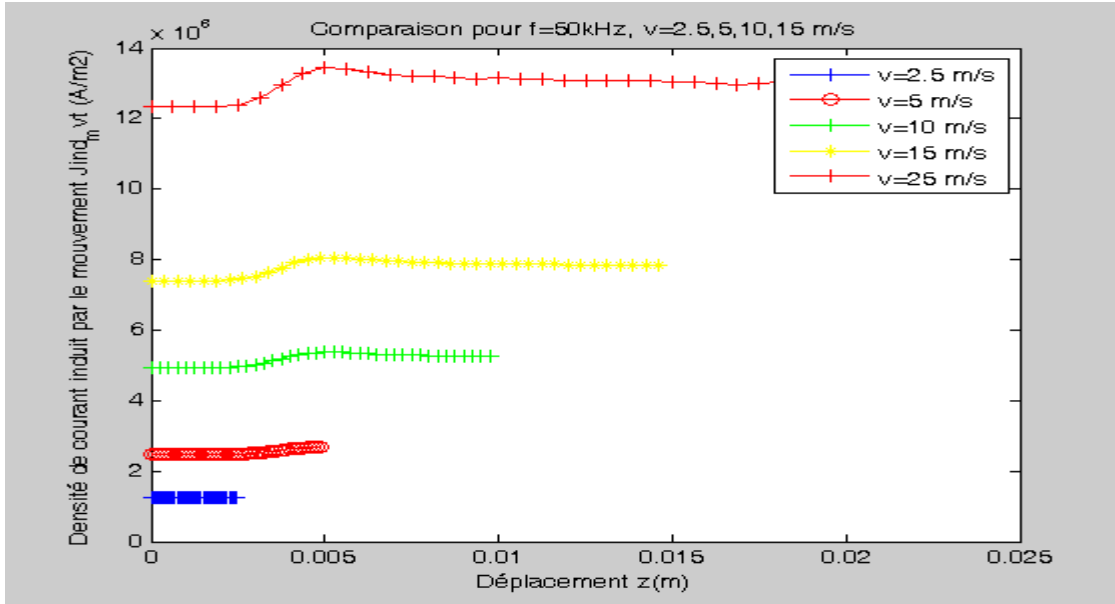


Figure. 4. 27 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=2.5, 5, 10, 15, 25\text{ m/s}$, 40 pas de calcul
-Comparaison des résultats pour différentes vitesses avec la densité de courant source

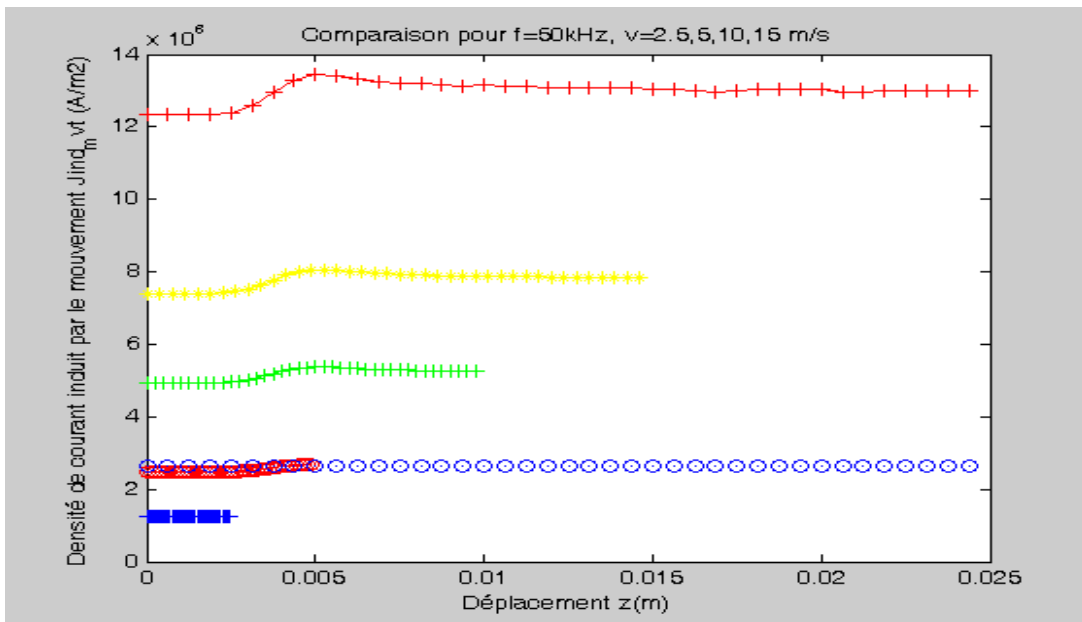


Figure. 4. 28 : Comparaison de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=2.5, 5, 10, 15, 25\text{ m/s}$, avec la valeur de la densité de courant source (s). On constate que lorsque la vitesse de déplacement du capteur est de 5m/s cela conduit à une densité de courant induit équivalente avec celle de la source, d'où la nécessité de

prendre ne considération l'effet de la vitesse de déplacement du capteur lors du contrôle de matériaux conducteurs.

Pour une vitesse de déplacement du capteur correspondant à 2.5 m/s, la densité de courant induit est faible de l'ordre de 10 fois inférieure à la valeur de la densité de courant source, ce qui peut justifié de négliger cet effet dans ce cas.

f. Étude de l'effet de la fréquence sur la répartition de la densité de courant induit (v=25m/s) Cas axisymétrique

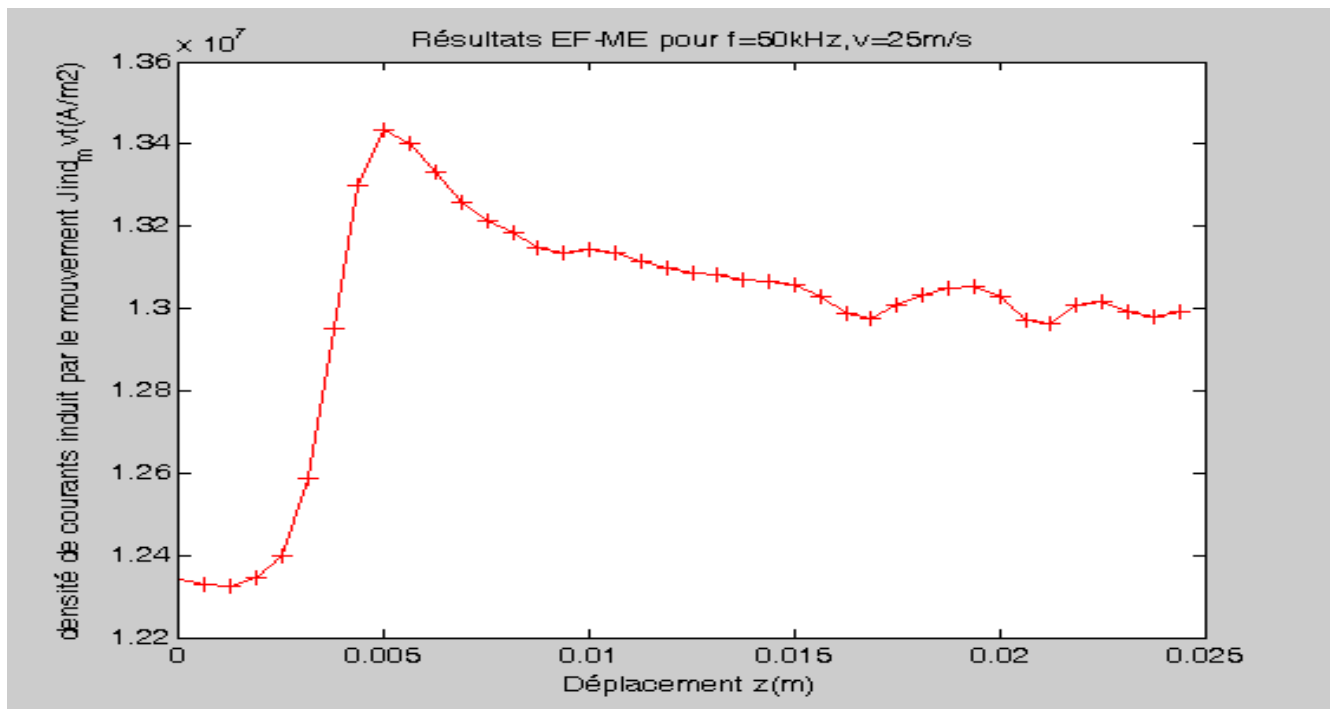


Figure.4.29 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), f=50kHz, EF-ME, axisymétrique, v=25m/s, 40 pas de calcul

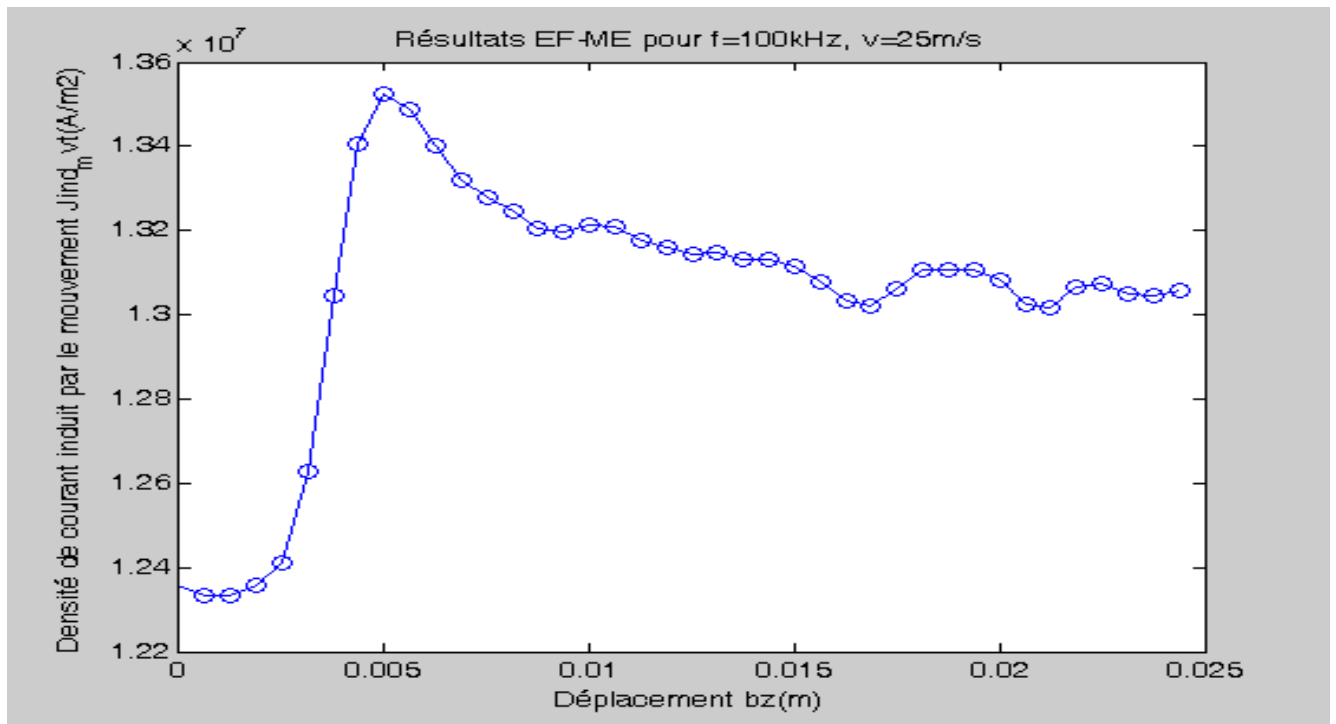


Figura. 4.30 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=100\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=25\text{m/s}$, 40 pas de calcul

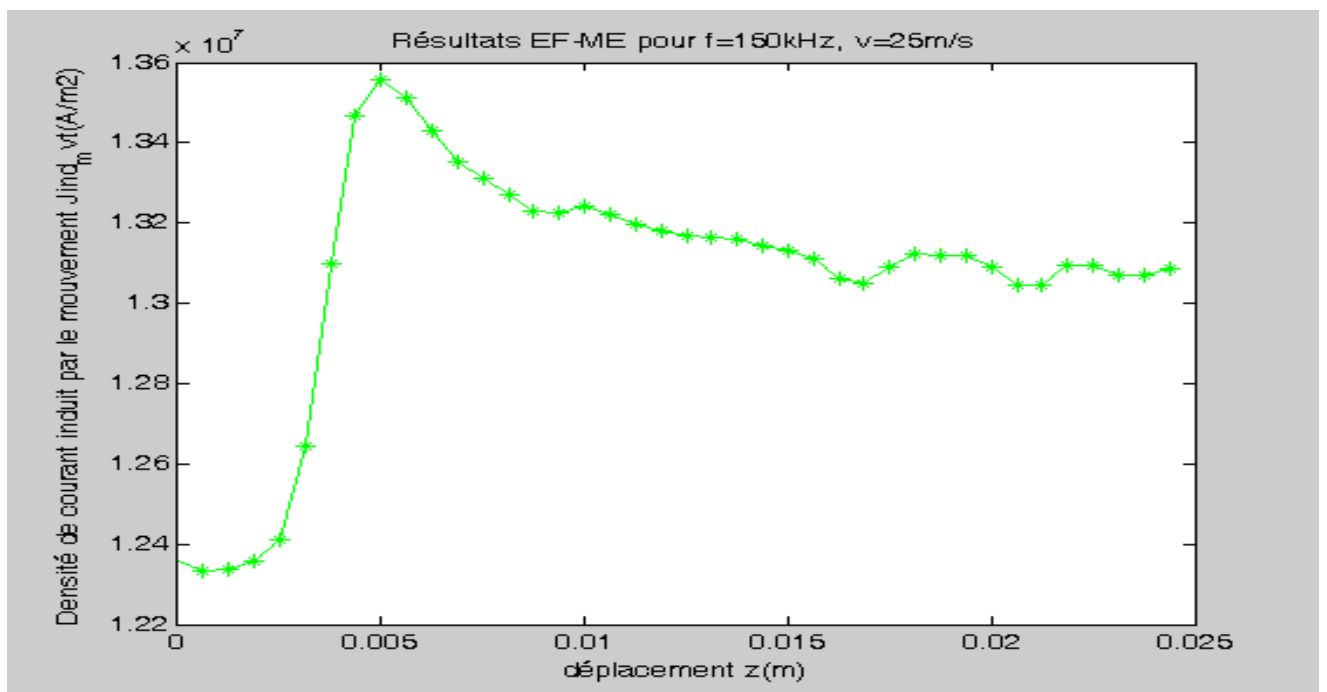


Figure. 4.31 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=150\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=25\text{m/s}$, 40 pas de calcul

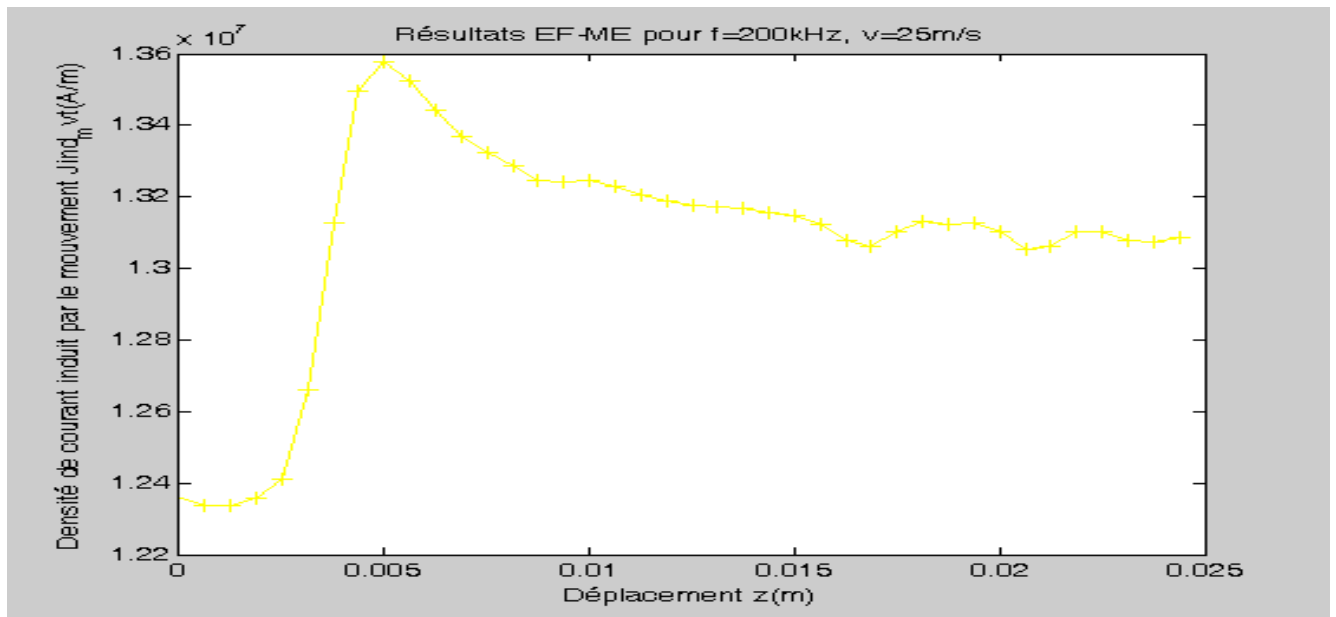


Figure. 4. 32 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=200\text{kHz}$, EF-ME, axisymétrique, $v=25\text{m/s}$, 40 pas de calcul

-Comparaison des résultats pour différentes fréquences

Les résultats obtenus montrent que la densité de courant induit augmente avec la fréquence puis tend à se stabiliser malgré l'augmentation de cette dernière. On pourra affirmer que l'inducteur a atteint une valeur limite de l'effet de peau.

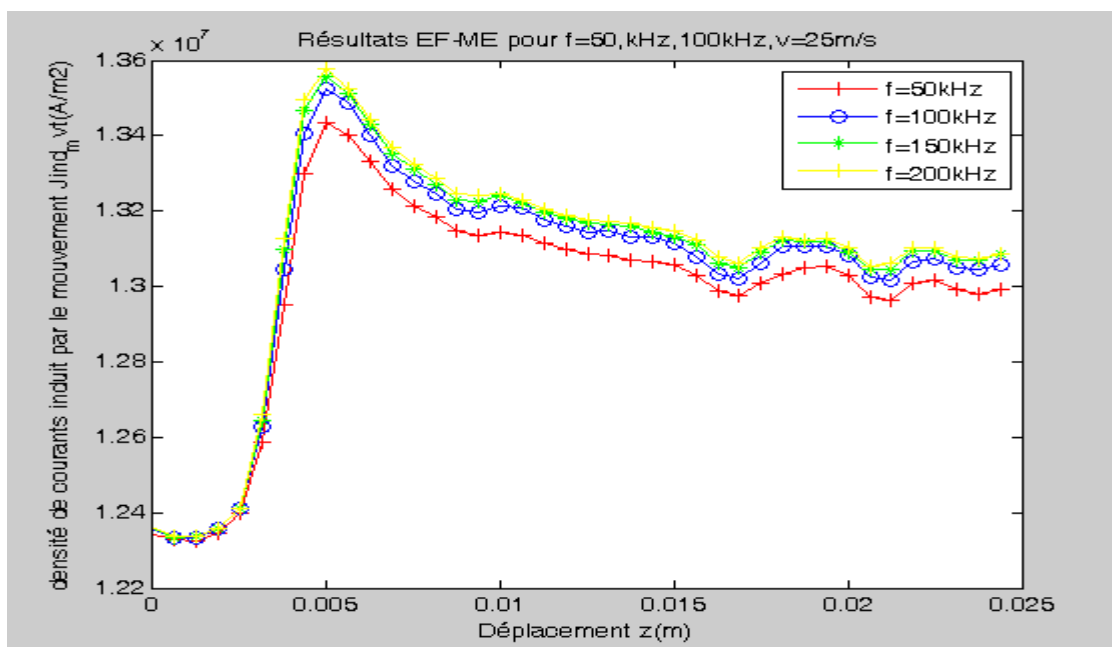


Figure.4.33 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 2176), $f=50\text{kHz}$, 100, 150 et 200kHz , EF-ME, axisymétrique, $v=25\text{m/s}$, 40 pas de calcul

g-Comparaison en termes de temps de résolution

La résolution du problème en utilisant les deux modèles mis en œuvre sous environnement Matlab en considérant un nombre de pas de déplacements de 40 a donné les résultats en termes de temps de calcul CPU suivants :

Modèle	Temps CPU (s)
Modèle Eléments finis	1682,47
Modèle couplé EF-ME	840,64

Les calculs ont été effectués sur un PC de 2G RAM et une fréquence de 1GHz.

Le temps de calcul obtenu en exploitant le modèle couplé analytique-numérique représente approximativement la moitié de celui obtenu à partir du modèle éléments finis. Cette différence est due au fait que :

- Le nombre de points de calcul dans le modèle éléments finis est plus important.
- Le remaillage pour chaque point de déplacement engendre un temps de calcul supplémentaire lorsque le module du maillage est ré-exécuté

IV. 2. Etude d'un dispositif de contrôle non destructif en coordonnées cartésiennes

La deuxième application considérée concerne la détection de défauts dans les rails de train [58]. La détection de défauts dans les rails de train fait l'objet de travaux intenses et plusieurs techniques sont utilisées telles que la détection par ultrasons, courants de Foucault ou par caméra magnétique [59, 63]. Pour notre part nous avons utilisé la méthode de contrôle non destructif par courants de Foucault à laquelle la technique de prise en compte de mouvement s'associe à une résolution par éléments finis [62]. Les études entreprises par des chercheurs ont montrées les limites de la technique à ultrasons lorsqu'il s'agit de réaliser le contrôle des rails à des vitesses importantes de l'ordre de 90 à 100 km/h.

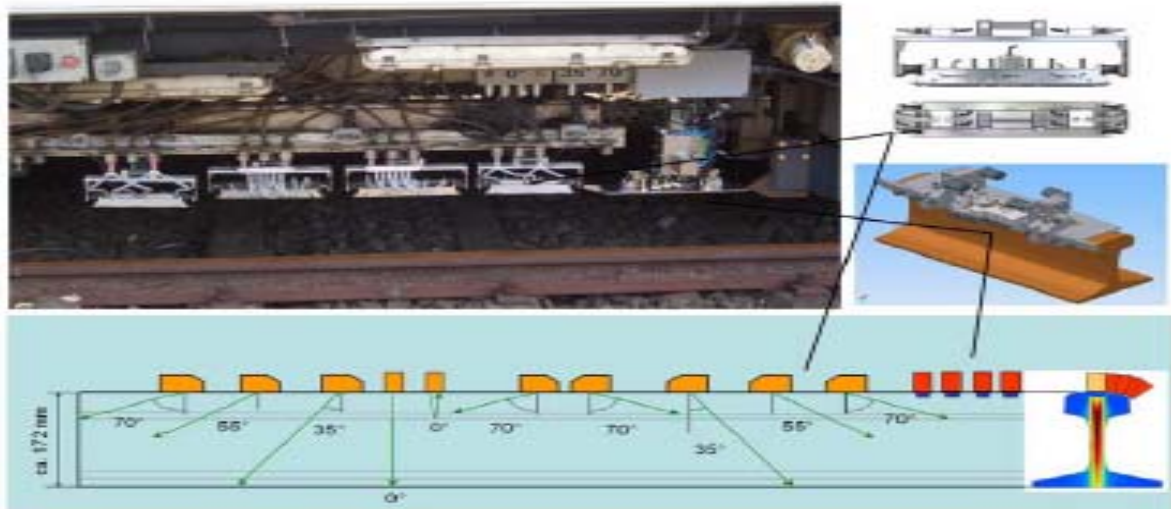


Figure.4.34: Système de sondes pour l'inspection du rail

IV. 2.1. Structure géométrique

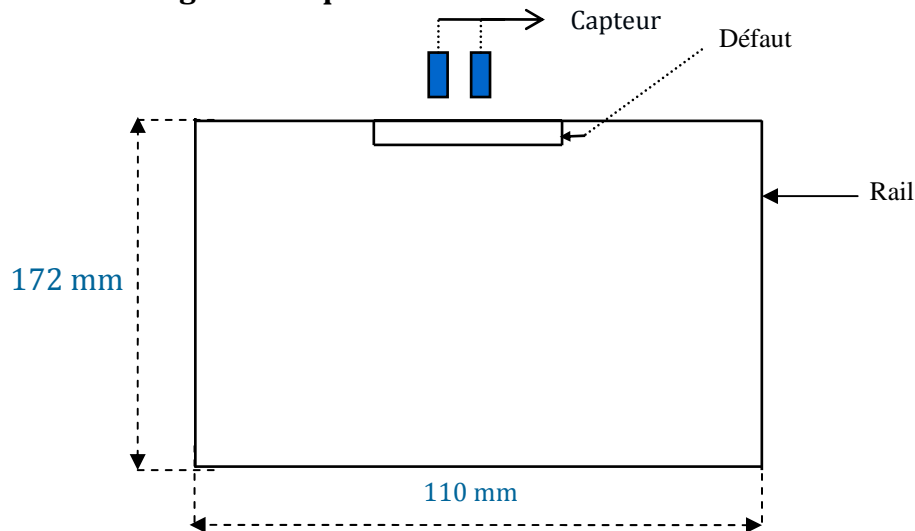


Figure.4.35: géométrie de problème cartésiennes

IV. 2.2. Caractéristiques géométriques

➤ capteur

Épaisseur du capteur : 1.2 mm

Diamètre intérieur capteur : 3.2 mm

Hauteur de la bobine d'excitation=0.0022 m;

Nombre de spires : 170

➤ charge

Hauteur de la charge=0.172 m;

Longueur de la charge=0.11 m

➤ défaut

Épaisseur de défaut=0.0013;

Largeur de défaut=0.012;

Entrefer : 1 mm ;

IV. 2.3. Propriété physiques :

Inducteur en cuivre : $\mu=\mu_0$

Densité de courant d'excitation : $J_{exc}=2.66*1e+6$

Charge : conductivité électrique : $\sigma_2=1e+6$;

Perméabilité magnétique : $\mu=\mu_0$

IV.2.4. Domaine d'étude et conditions aux limites

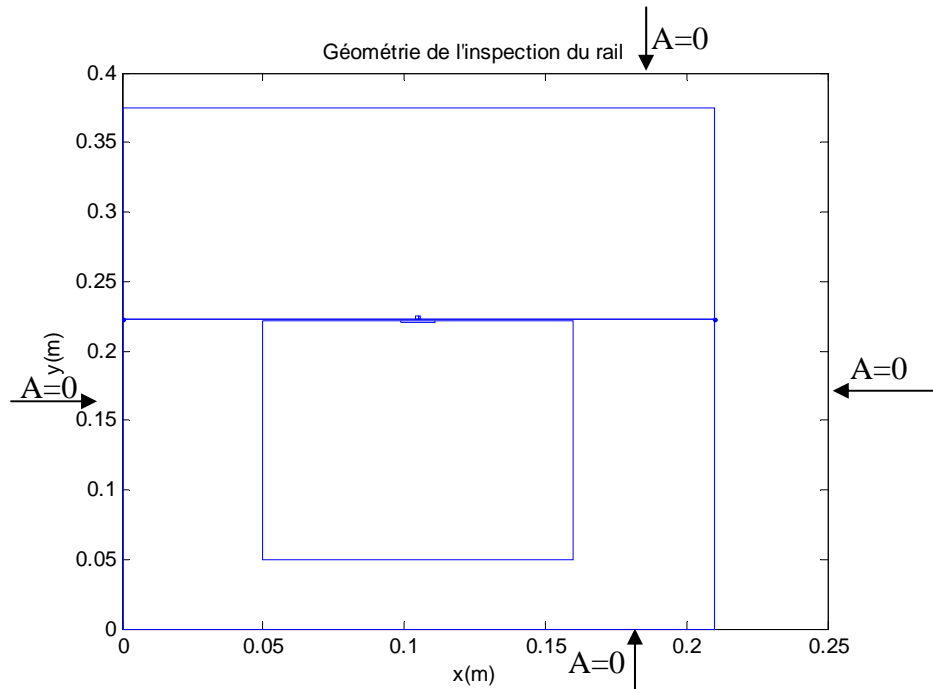


Figure 4.36 : Géométrie du problème 2D pour l'inspection du

IV.2. 5 Maillage du domaine d'étude

Le maillage du domaine d'étude est représenté par la figure ci-après

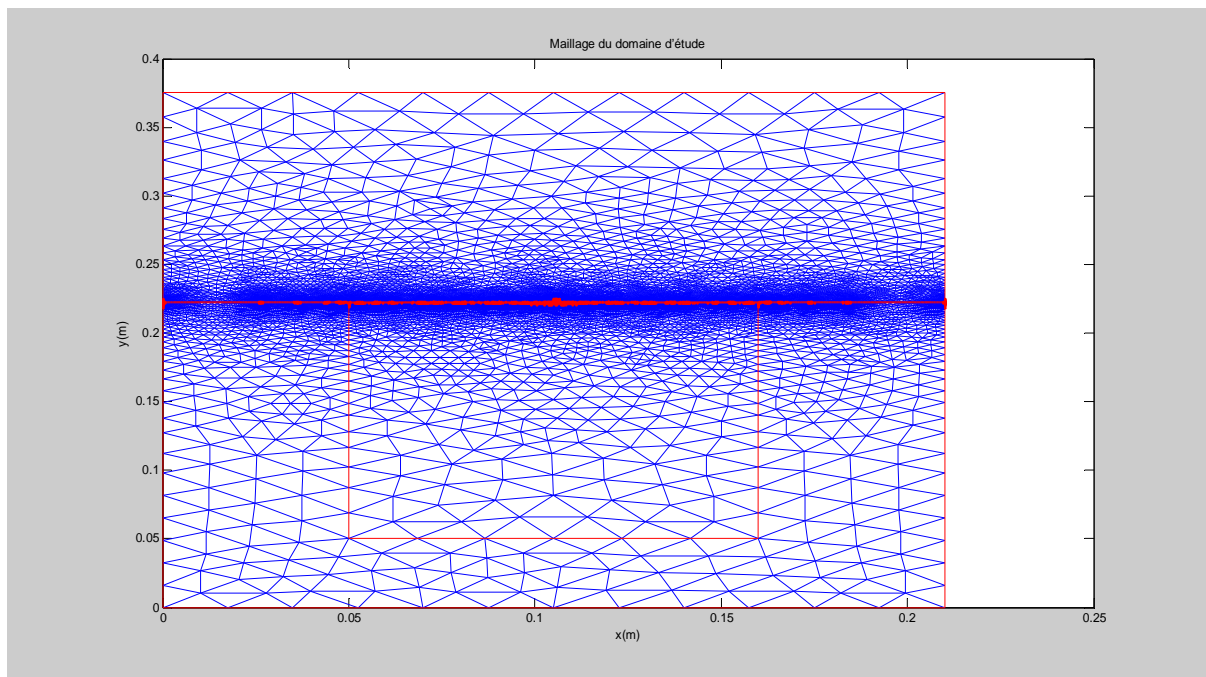


Figure. 4.37 : Maillage du domaine d'étude

IV. 2.6. Résultats

Les résultats obtenus sont fournis en termes de potentiel vecteur magnétique et du capteur en fonction de la position de ce dernier.

a. Résultats en terme de potentiel vecteur magnétique A

Les figures représentant la distribution du potentiel vecteur magnétique sont obtenues pour différentes positions relatives du capteur par rapport à la cible. Le changement de position est obtenu en faisant déplacer les nœuds de la frontière du macro-élément.

➤ Cas de la solution couplé EF-ME

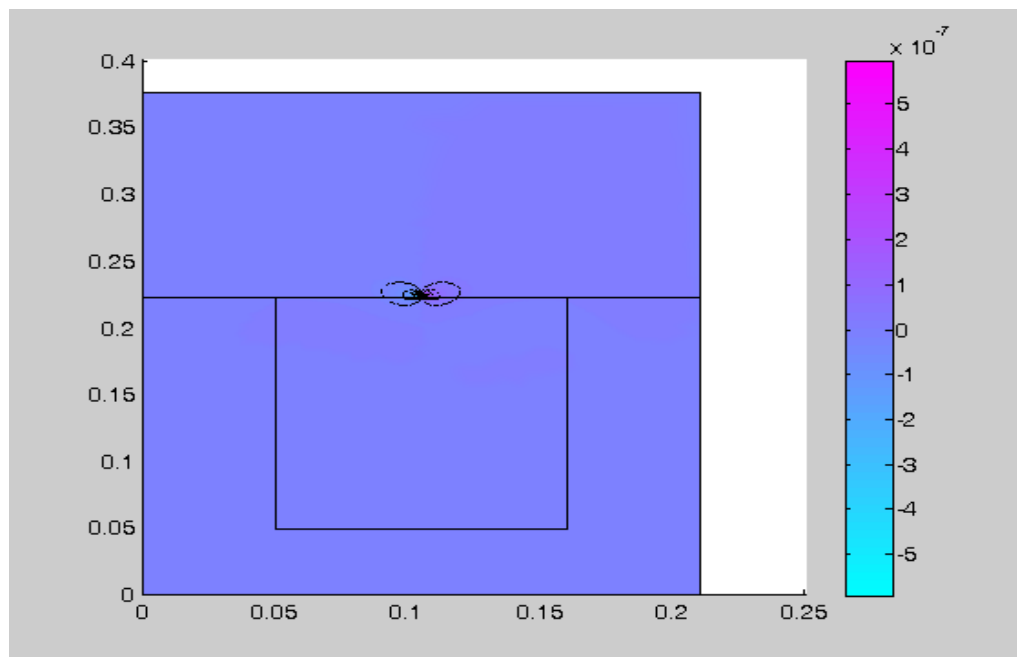


Figure.4.38 : Distribution du potentiel vecteur magnétique pour la solution couplé EF-ME

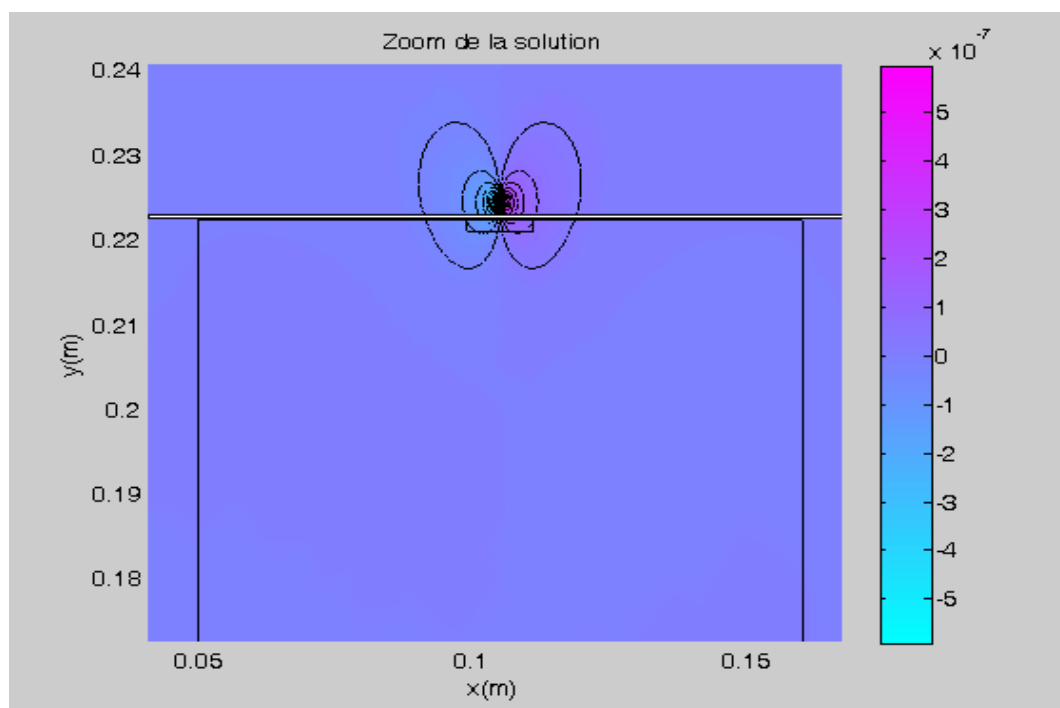


Figure.4.39 : Zoom de la distribution du potentiel vecteur magnétique pour la solution couplé EF-ME Pour une fréquence $f=2.5$ kHz

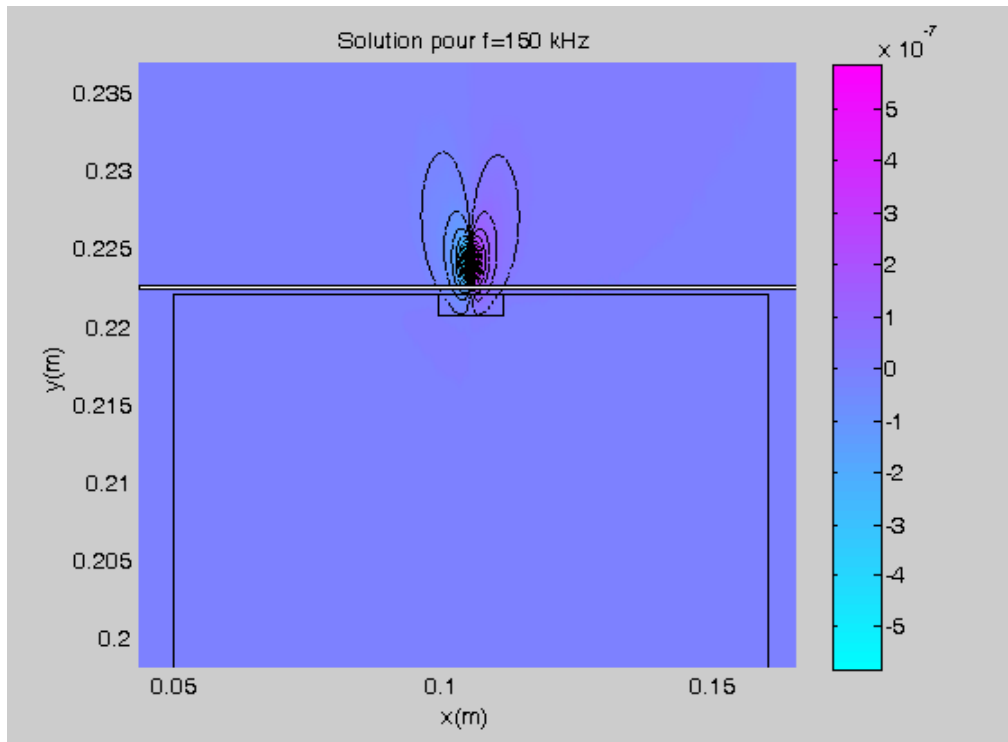
Solutions pour $f=150$ kHz

Figure.4.40 : Zoom de la distribution du potentiel vecteur magnétique pour la solution couplée EF-ME Pour une fréquence $f=150$ kHz

Déplacement du capteur vers le bord du défaut :

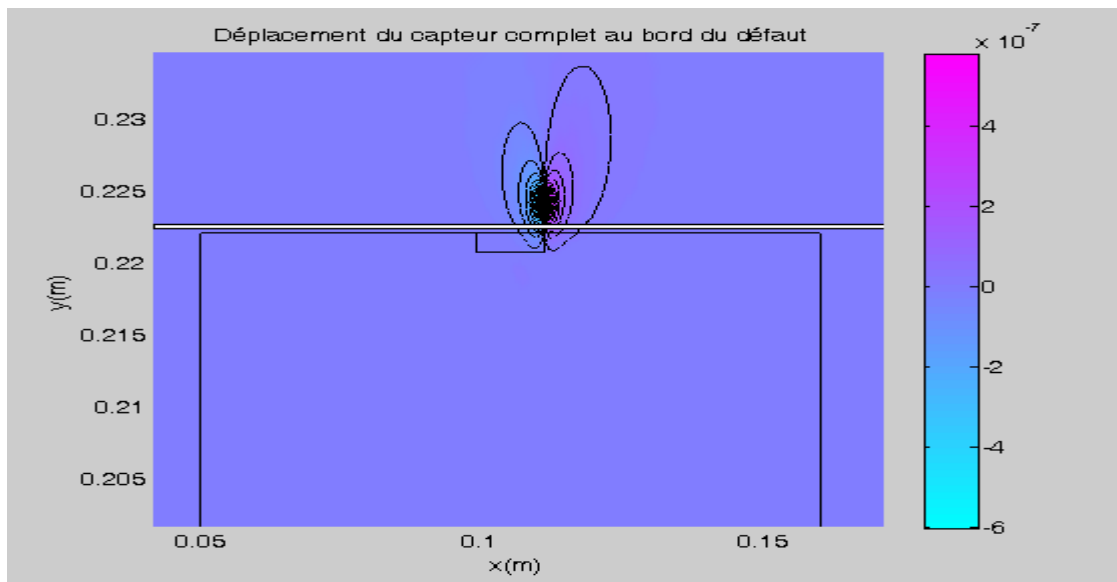


Figure.4.41 : Distribution du potentiel vecteur magnétique pour le déplacement du capteur vers le bord du défaut

Calculs refaits : on fait varier la position du capteur et on obtient
Les figures suivantes :

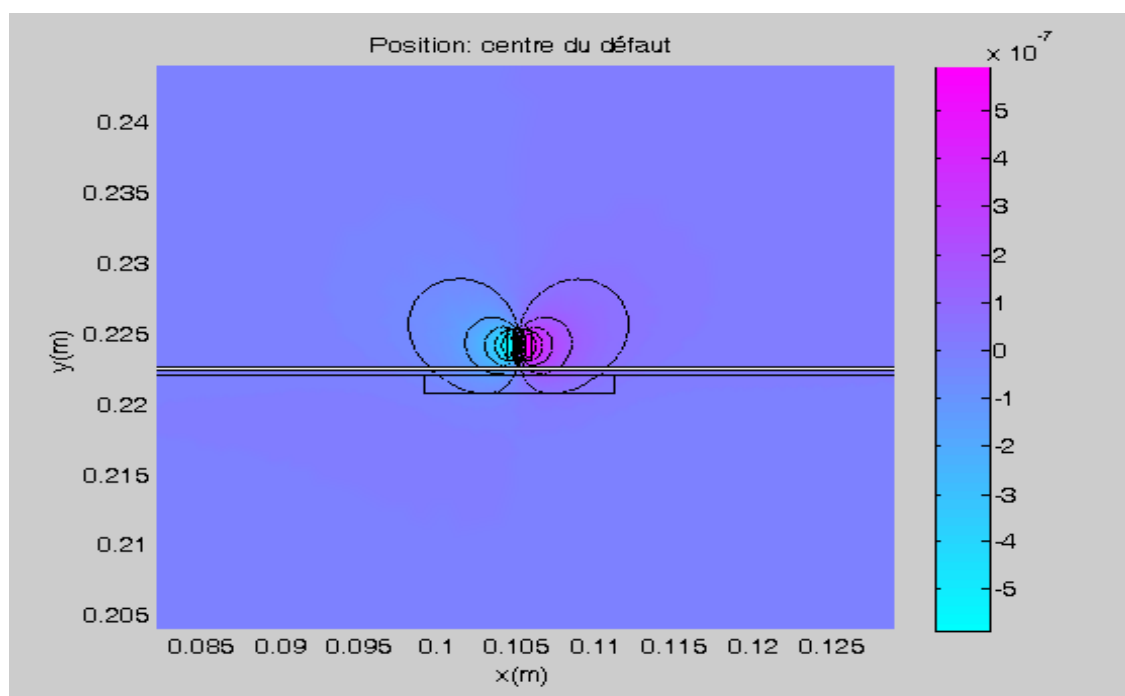


Figure.4.42 : Distribution du potentiel vecteur magnétique pour la position de centre du défaut

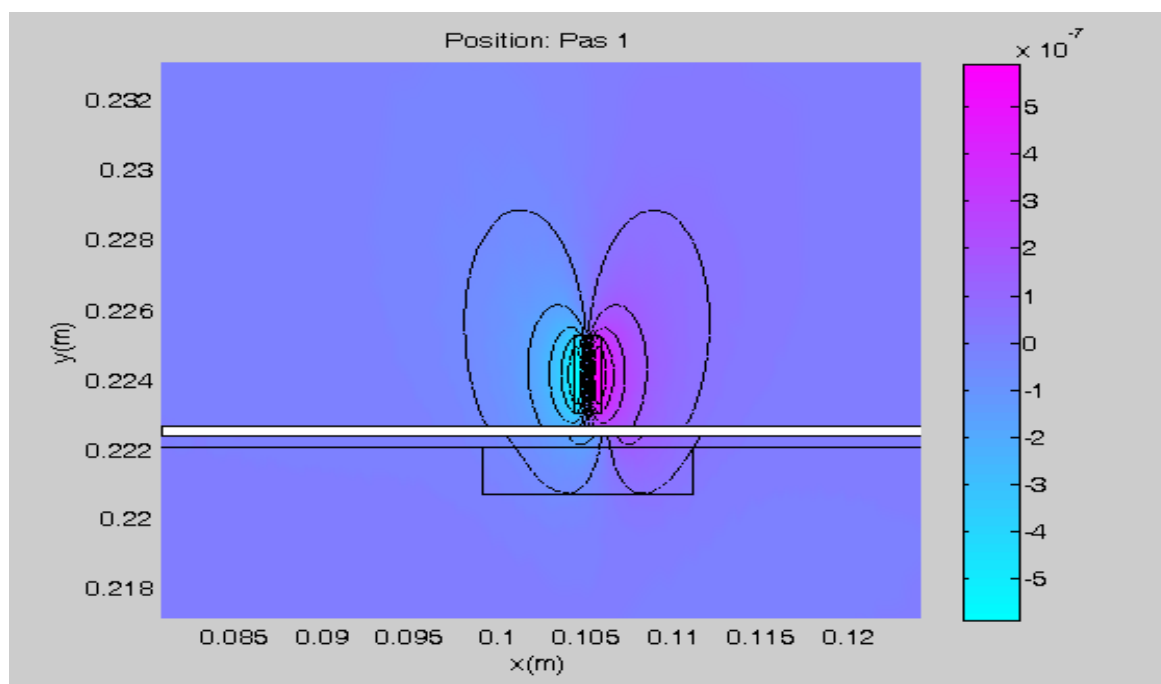


Figure.4.43: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 1 mm

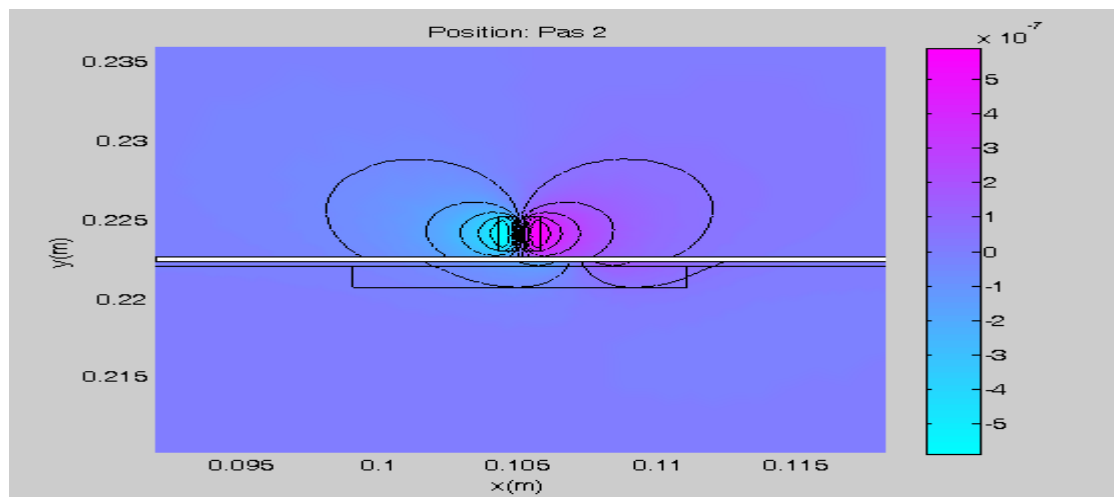


Figure.4.44: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 2 mm

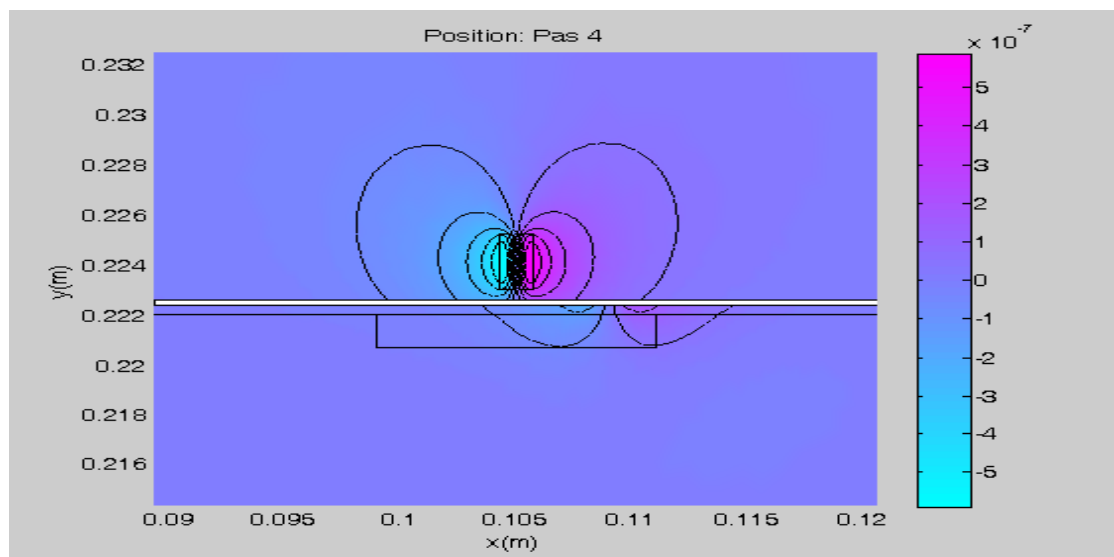


Figure.4.45: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 4 mm

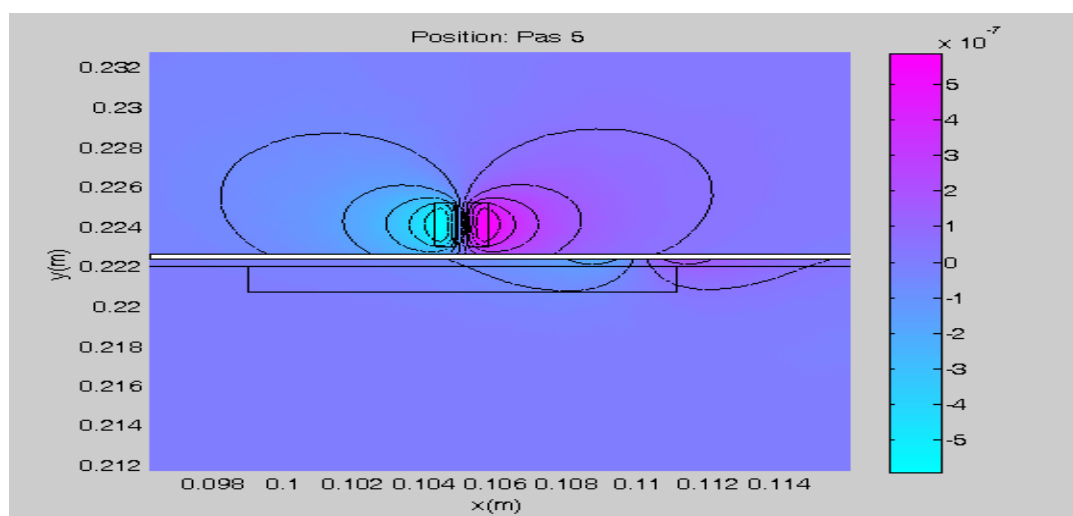


Figure.4.46: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 5 mm

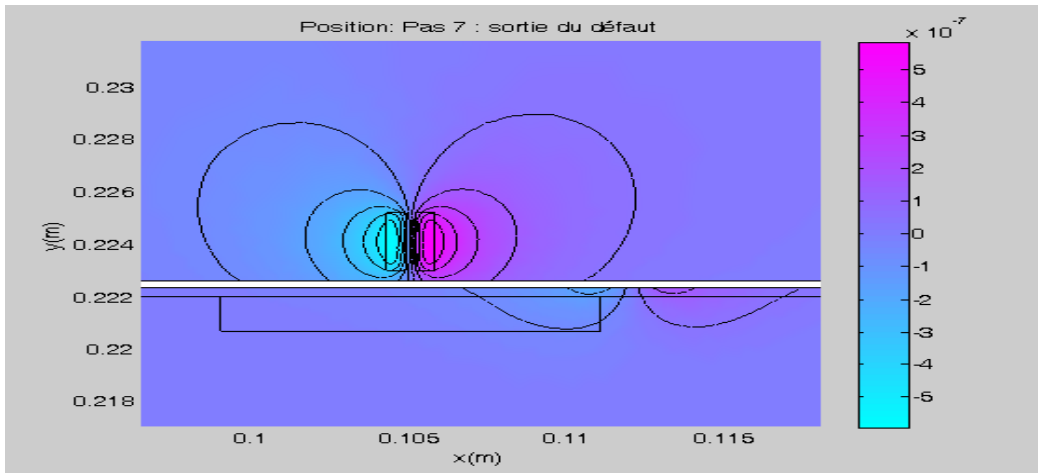


Figure.4.47: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 7 mm

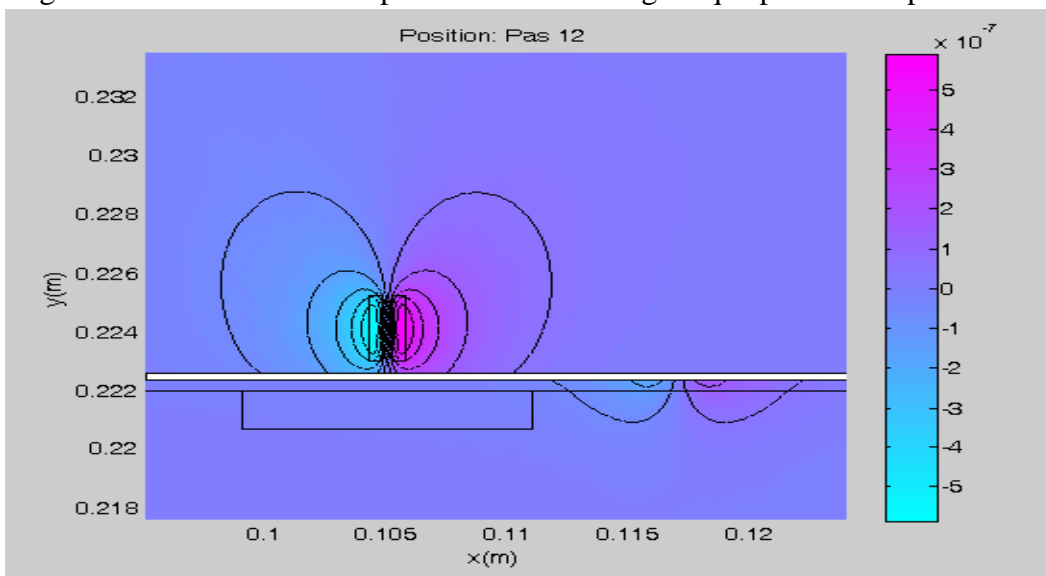


Figure.4.48: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 12 mm

➤ **Cas de la solution EF**

on fait varier la position du capteur et on obtient Les figures suivantes :

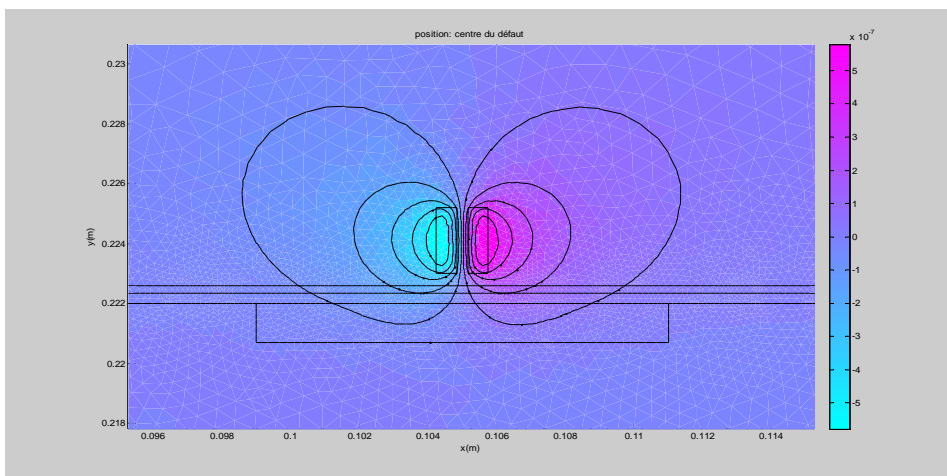


Figure.4.49: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour la position de centre du défaut

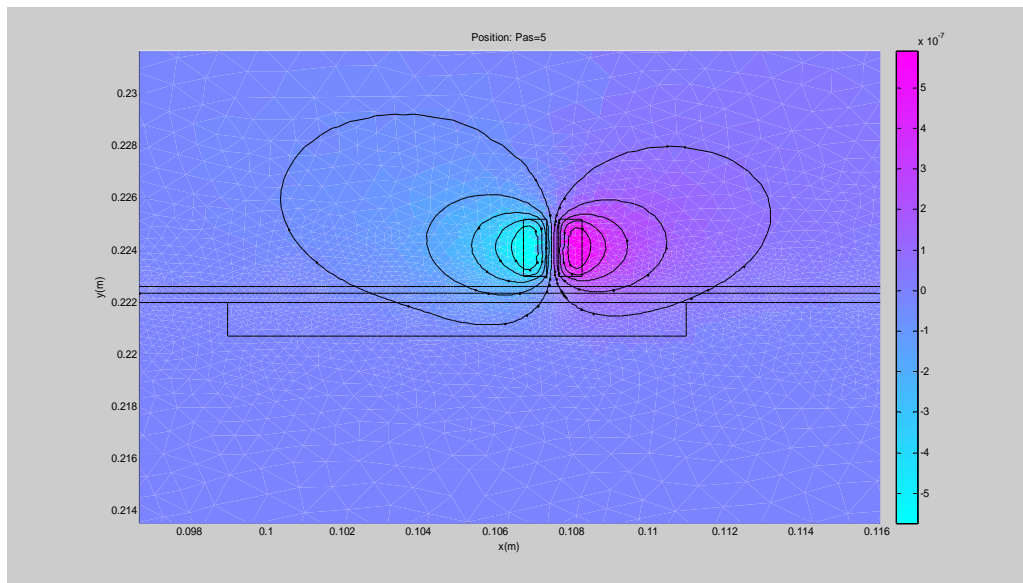


Figure.4.50: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 5 mm

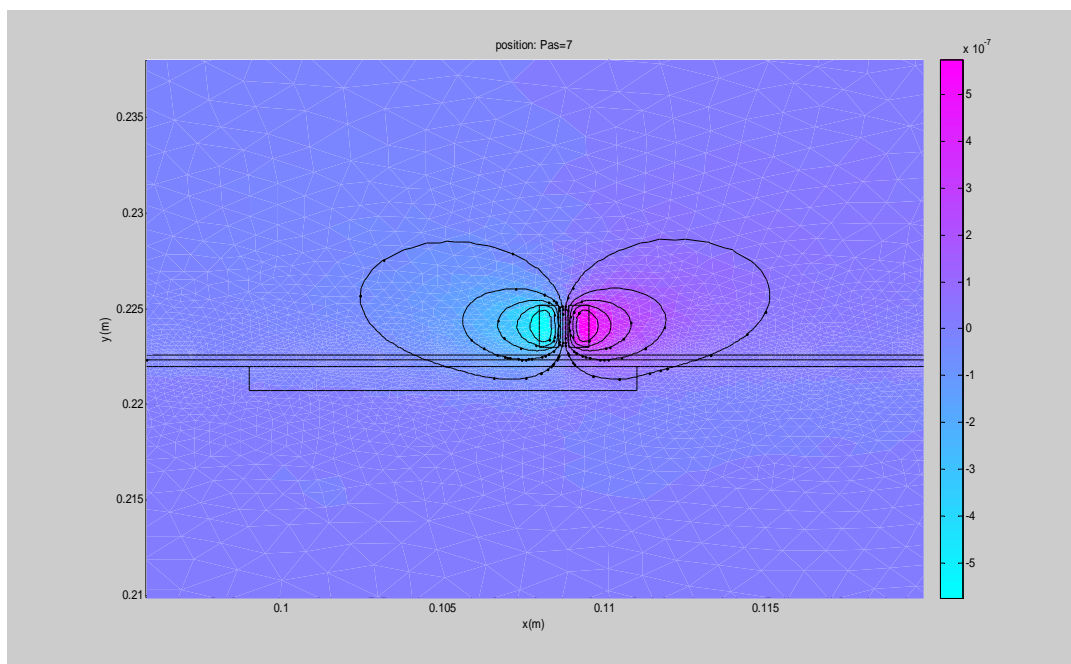


Figure.4.51: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 7 mm

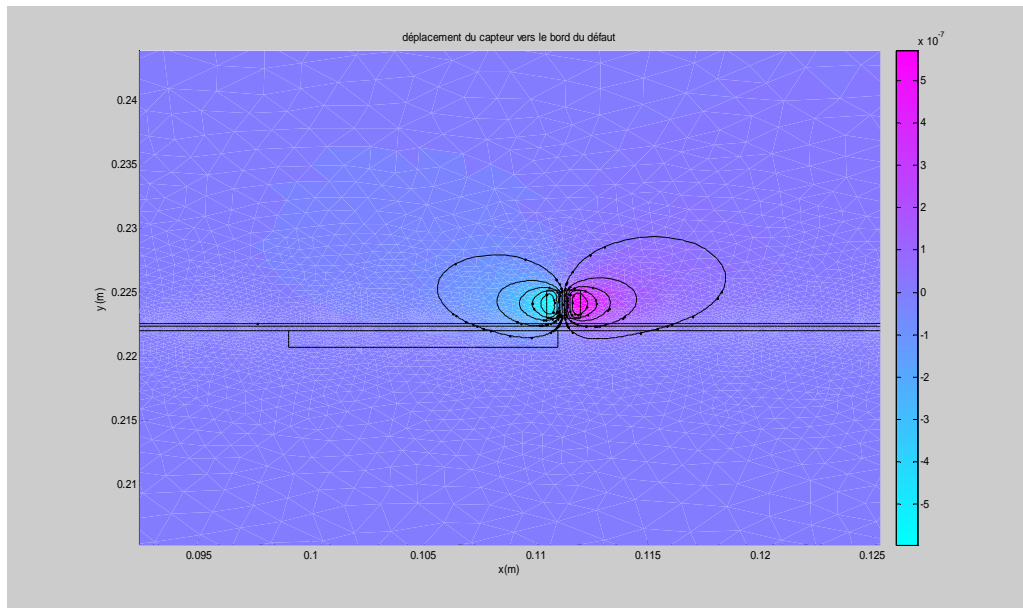


Figure.4.52 : Distribution du potentiel vecteur magnétique pour le déplacement du capteur vers le bord du défaut

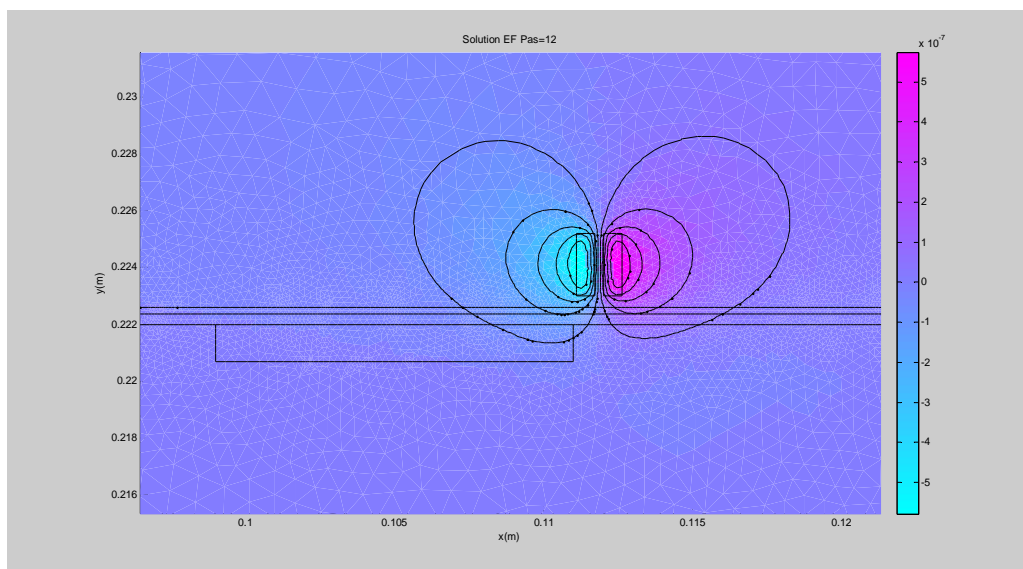


Figure.4.53: Distribution du potentiel vecteur magnétique pour des déplacements de 12 mm

b. Effet de la position du capteur sur la répartition du potentiel vecteur magnétique

Pour une fréquence $f=2.5$ kHz

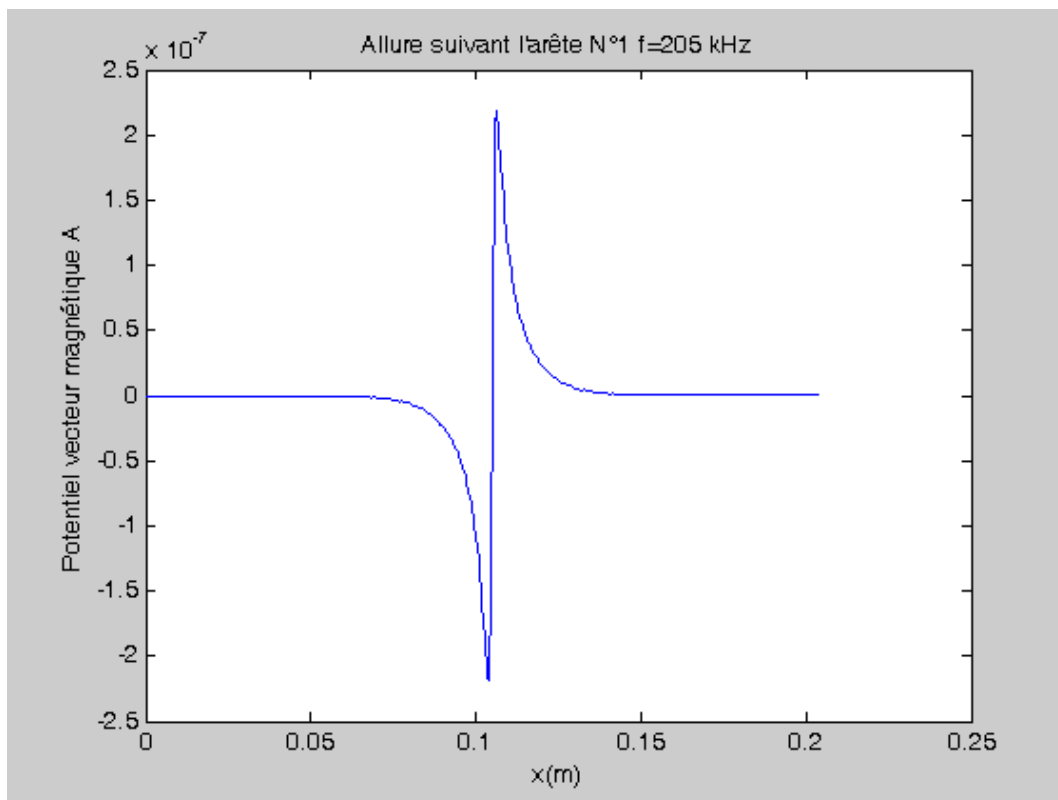


Figure. 4.54 : Allure du potentiel vecteur magnétique suivant l'arête inférieure du ME

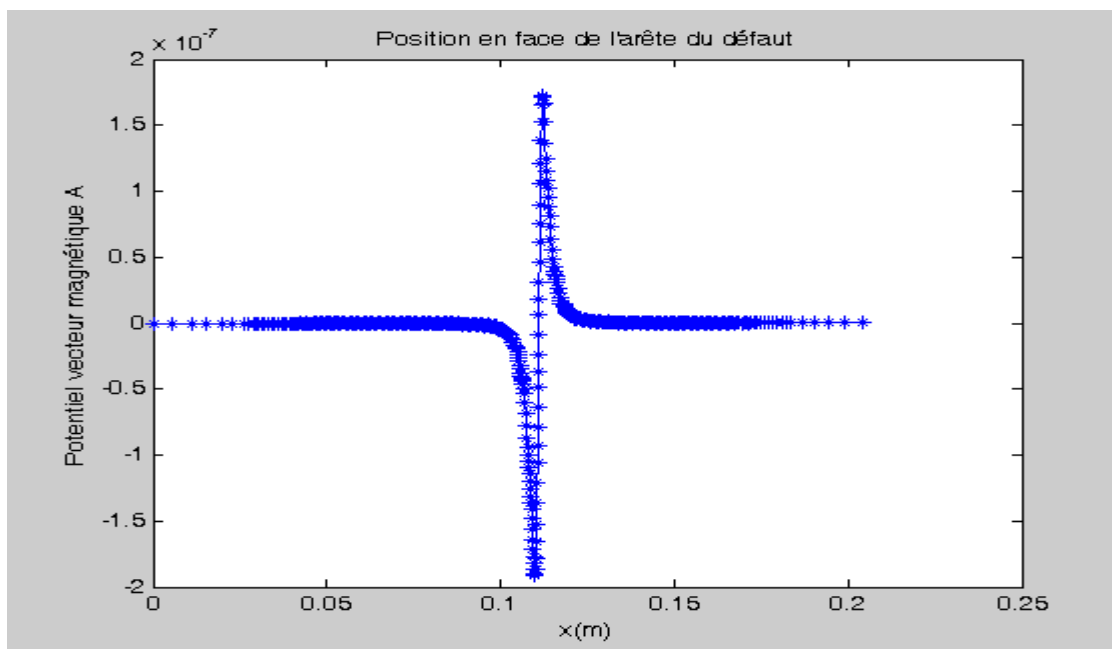
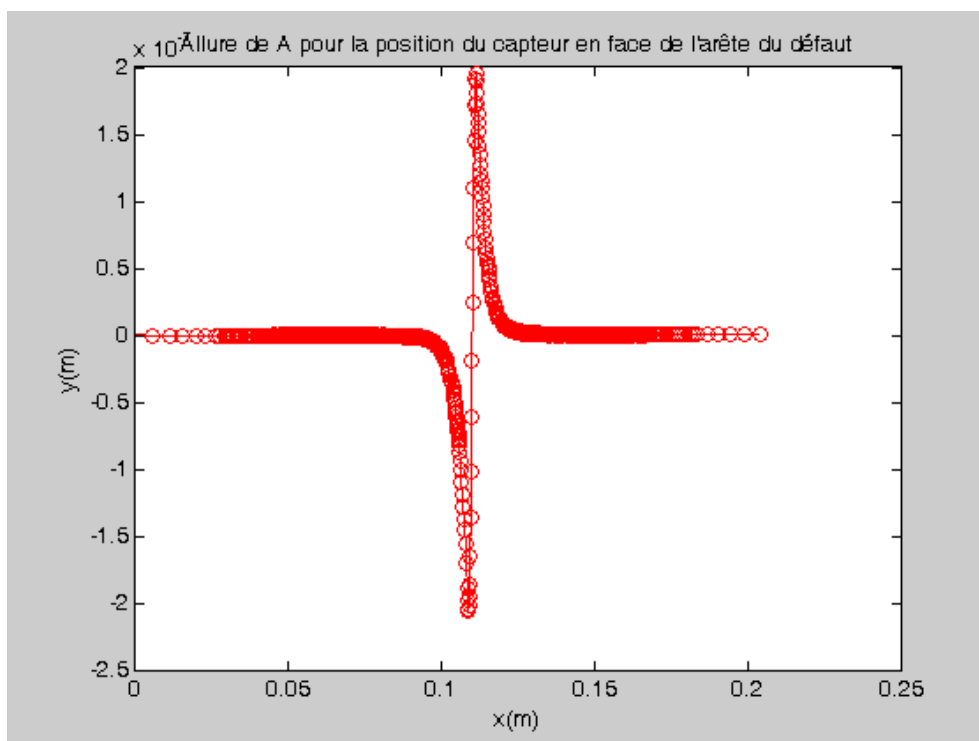
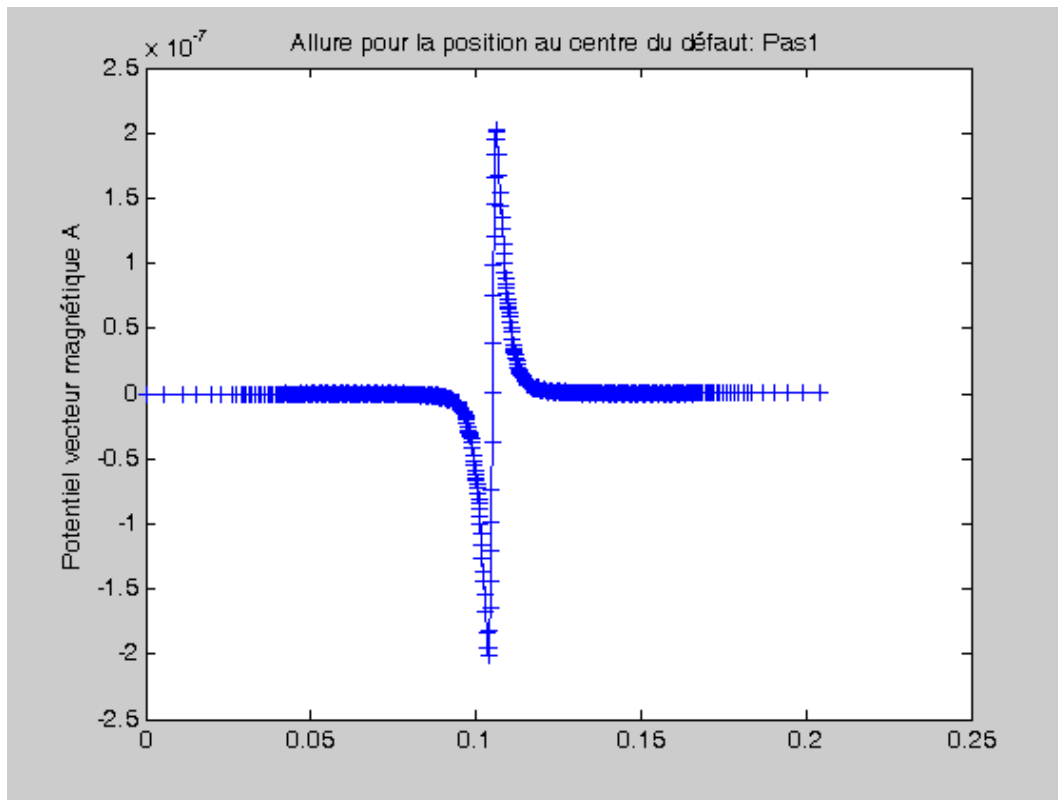


Figure. 4.55 : Allure du potentiel vecteur suivant l'arête inférieure du défaut



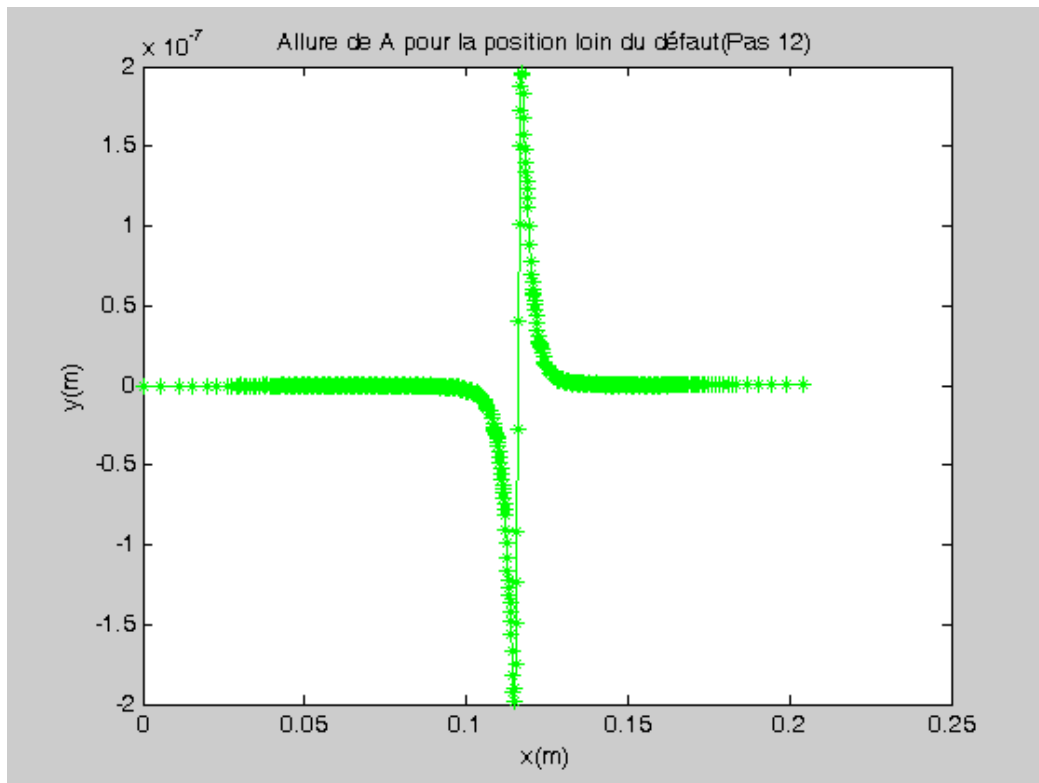


Figure. 4.58 : Allure du potentiel vecteur magnétique A pour la position du capteur loin du défaut (pas=12)

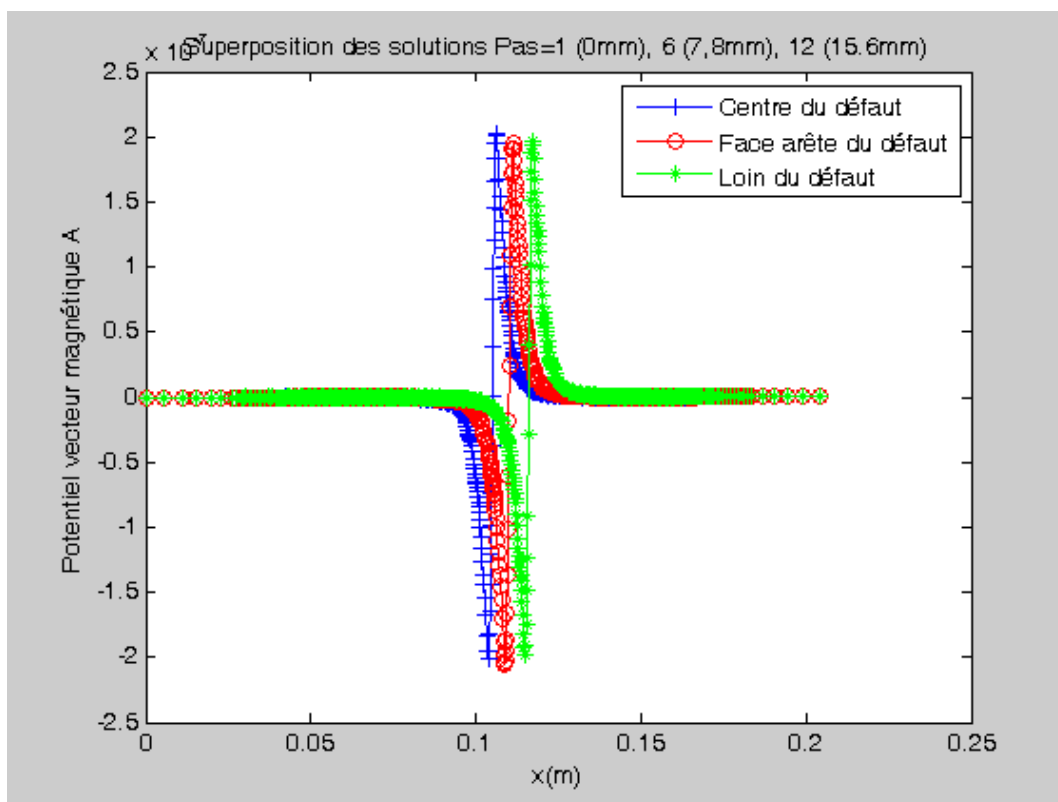


Figure. 4.59 : Allure du potentiel vecteur magnétique A pour les positions correspondantes aux pas= 1, 6, 12

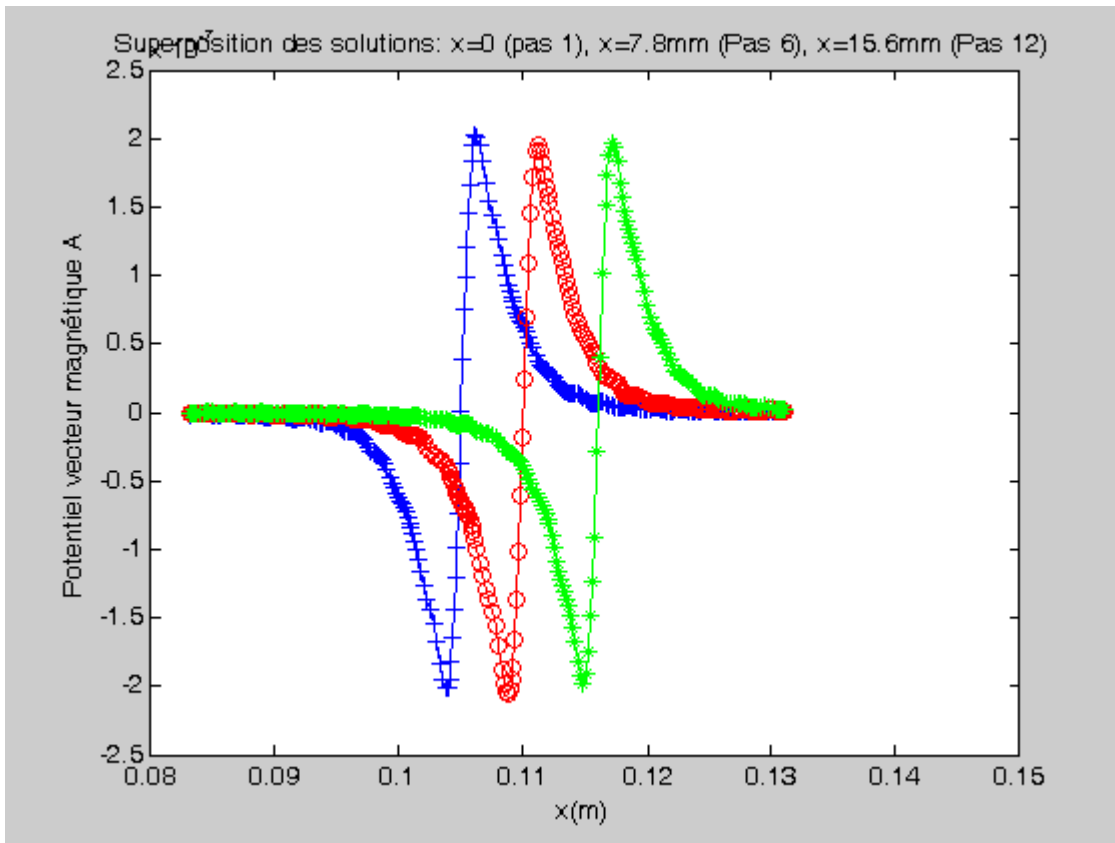


Figure. 4.60 : Zoom de l'allure du potentiel vecteur magnétique A pour les positions correspondantes aux pas= 1, 6, 12

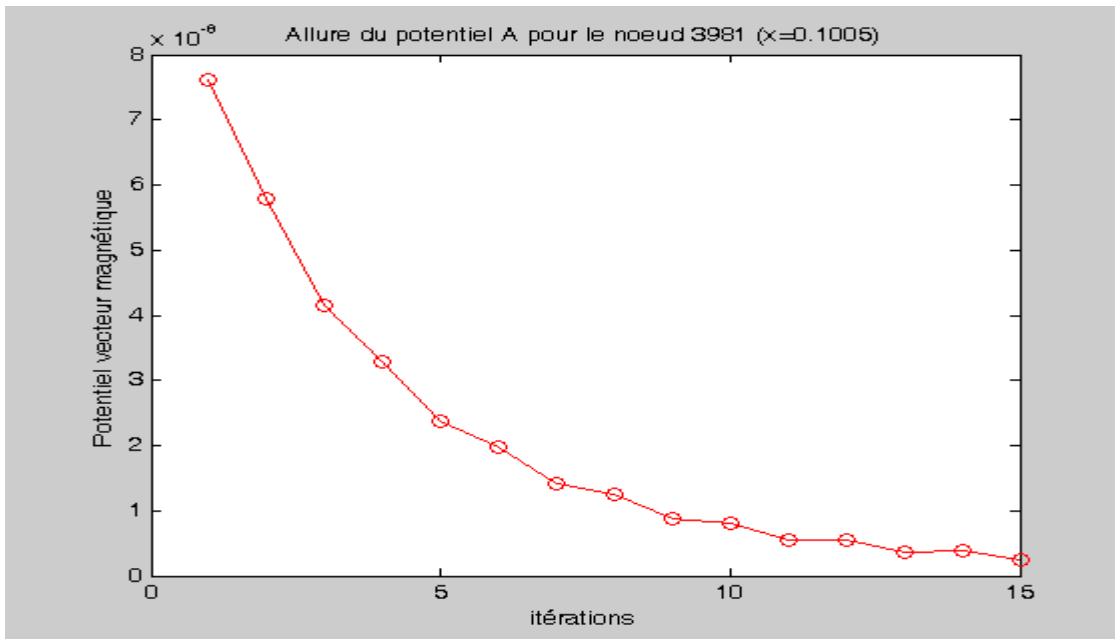


Figure. 4.61 : Allure du potentiel vecteur magnétique A en fonction de la position pour 15 itérations

c. Allure de la densité de courant induit par le mouvement en fonction du déplacement

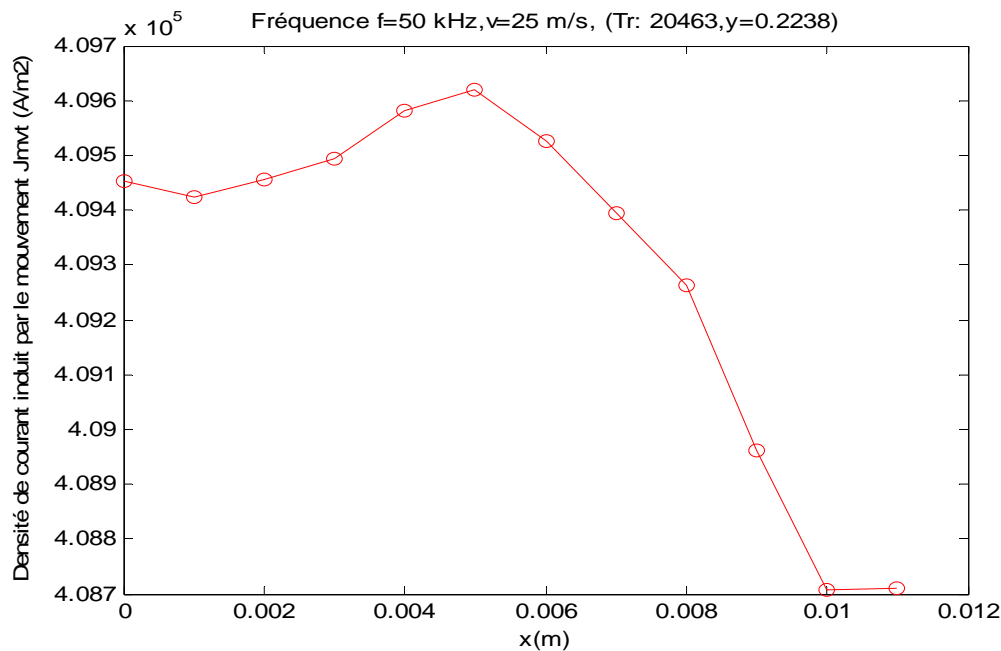


Figure. 4.62 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement en fonction de la position du capteur (triangle 20463, $y=0.2238$)

-Comparaison avec la densité de courant source :

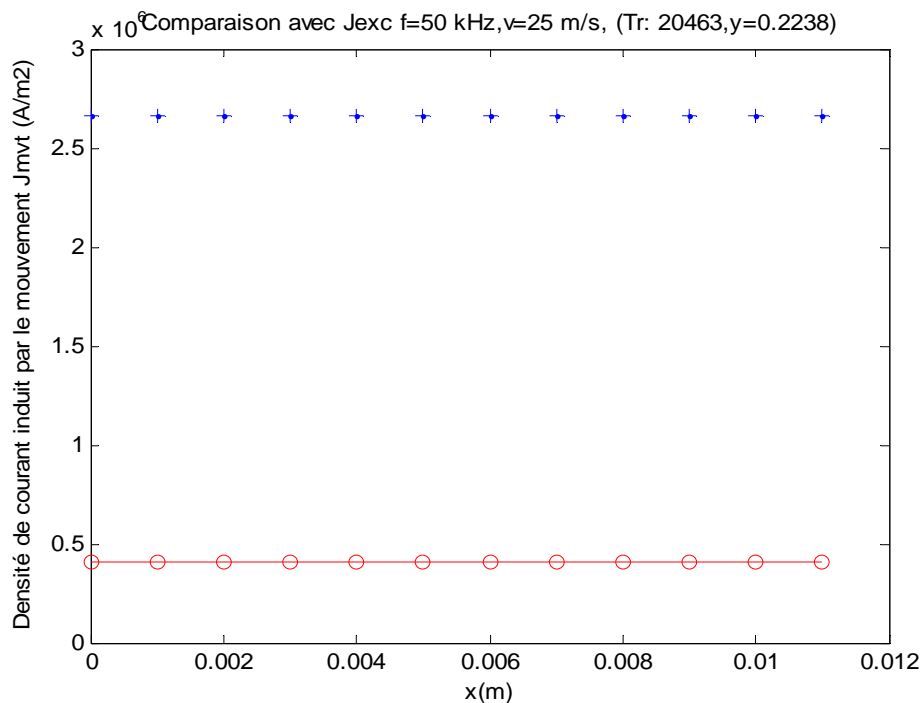


Figure. 4.63 : Comparaison de l'allure de la densité de courant induite par le mouvement (triangle 20463, $y=0.228$) en fonction de la position du capteur et de la densité de courant source

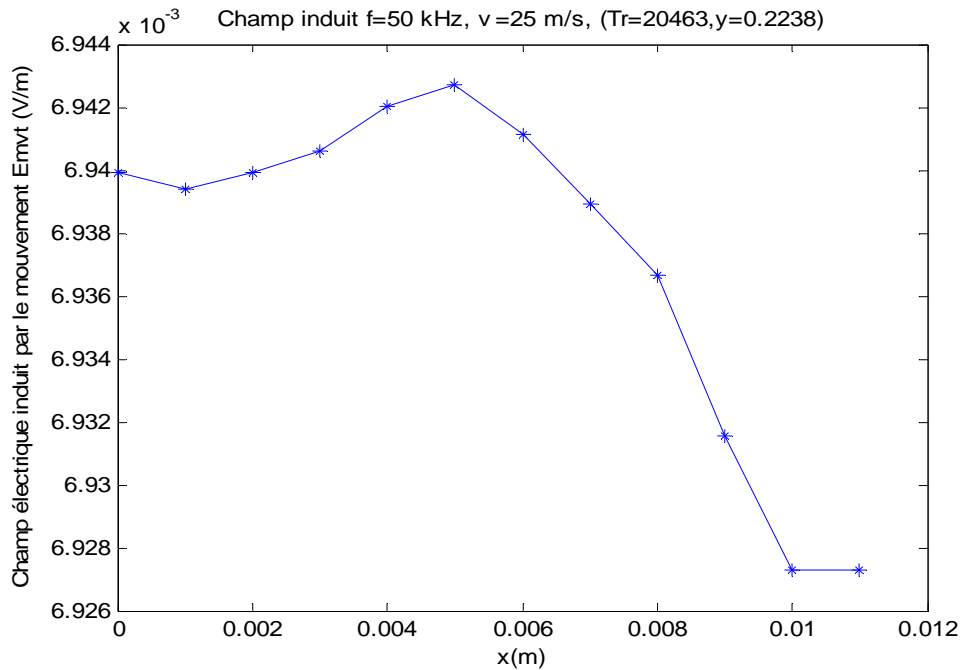
-Allure du champ électrique : cas cartésien

Figure. 4.64 : Allure du champ électrique induit par le mouvement en fonction de la position du capteur ($T_r=20463, y=0.2238$)

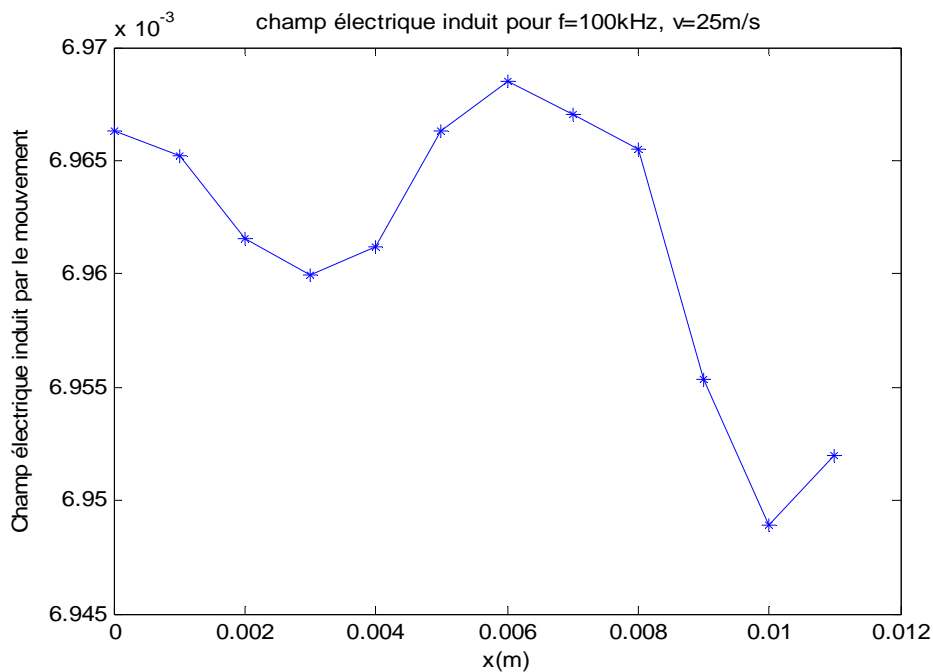
d. Effet de la fréquence sur la répartition de la densité de courant induit :**Résultats pour 100 kHz**

Figure. 4.65 : Allure du champ électrique induit en fonction du déplacement ($f=100$ kHz)

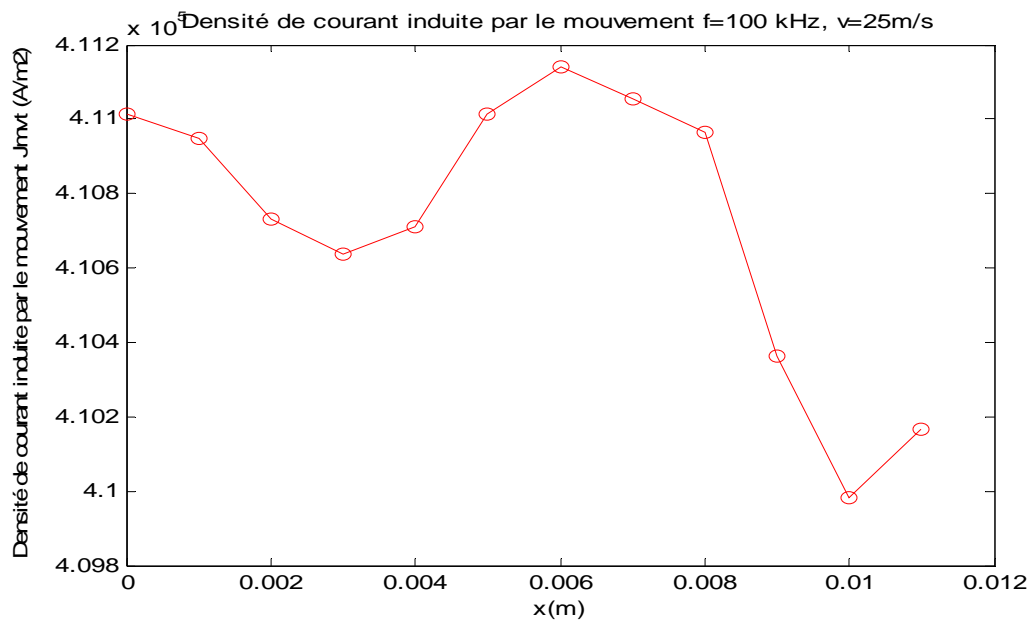


Figure. 4.66 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement en fonction de la position du capteur (triangle 20463, $y=0.2238$) pour $f=100$ kHz et $v=25$ m/s

Résultats pour 150 kHz.

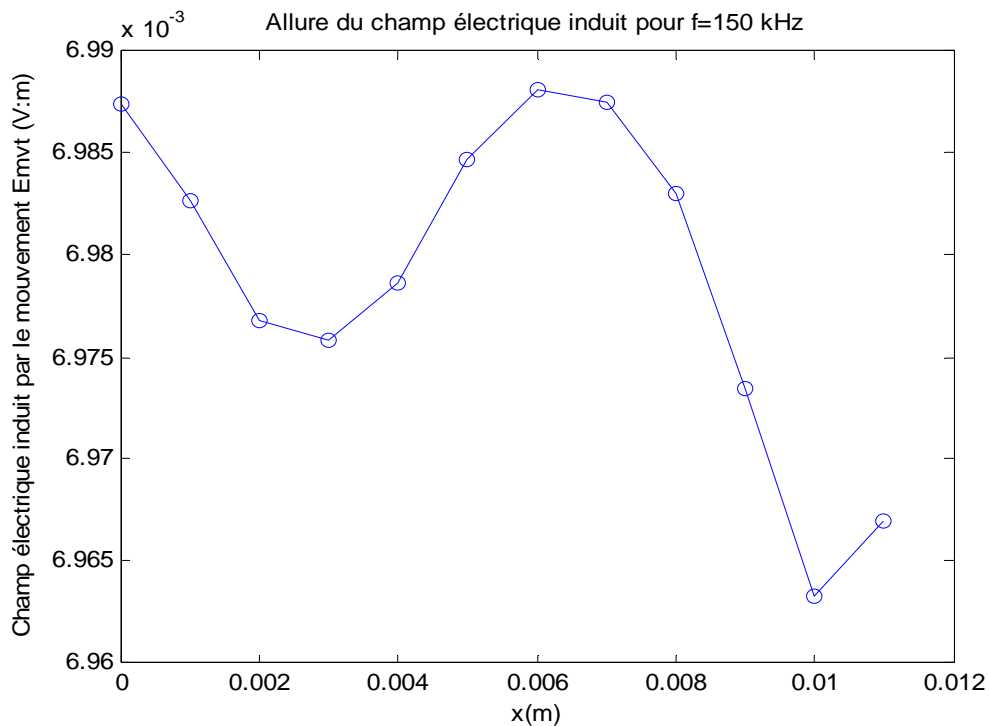


Figure. 4.67 : Allure du champ électrique induit en fonction du déplacement ($f=150$ kHz)

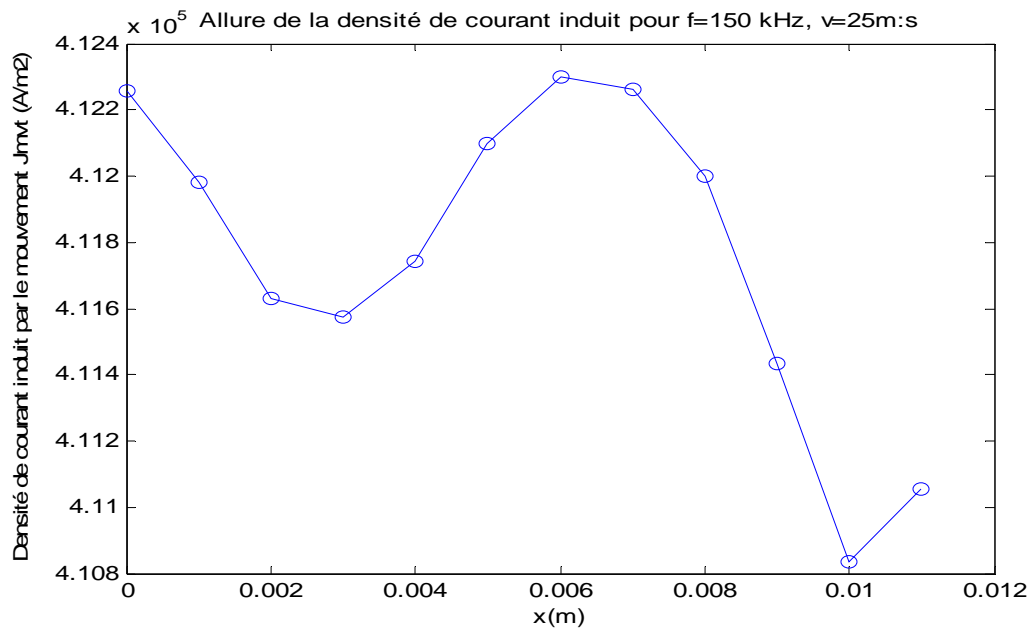


Figure. 4.68 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement en fonction de la position du capteur (triangle 20463, $y=0.2238$) pour $f= 150$ kHz et $v=25$ m/s

Variation avec la fréquence : $f=150$ kHz et $f=100$ kHz

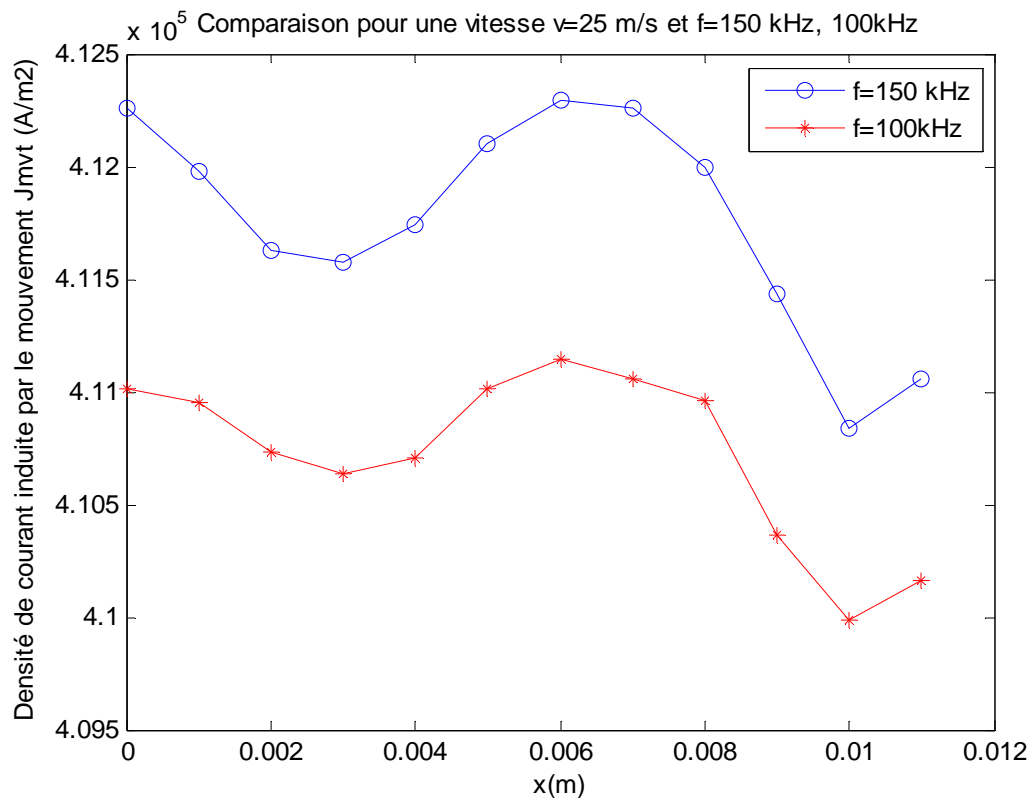


Figure. 4.69 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement en fonction de la position du capteur (triangle 20463, $y=0.2238$) pour: $f=150$ kHz et $f=100$ kHz

Comparaison pour trois fréquences : $f=150\text{ kHz}$, $f=100\text{ kHz}$, $f=50\text{ kHz}$

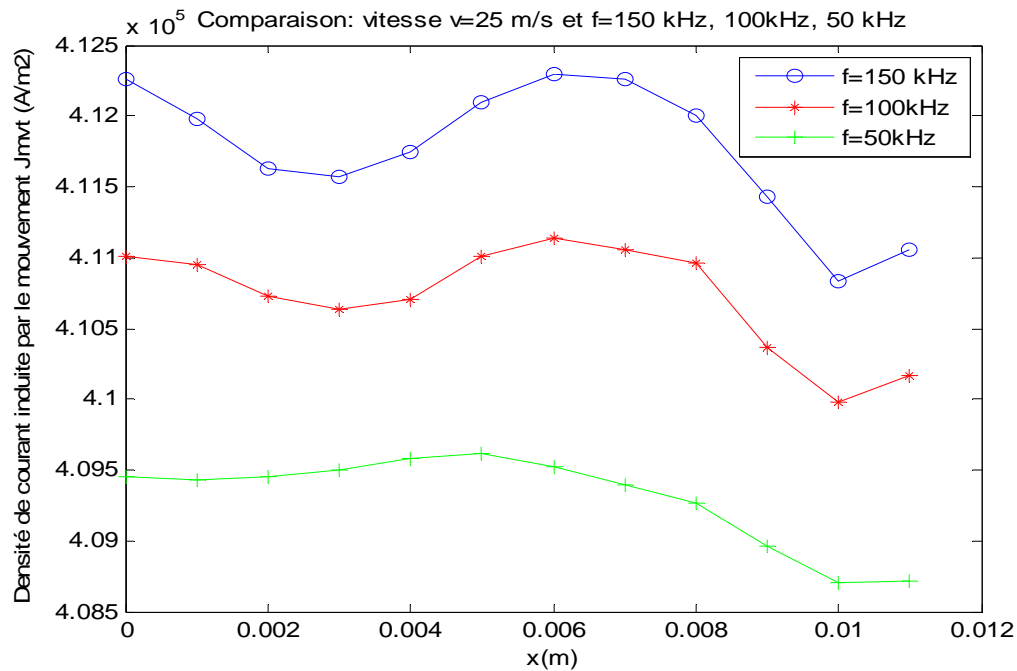


Figure.

4.70 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement en fonction de la position du capteur (triangle 20463, $y=0.2238$) pour: $f=150\text{ kHz}$ et $f=100\text{ kHz}$

e. Etude de l'effet de la vitesse Cas cartésienne ($f=50\text{ kHz}$)

1-Vitesse de déplacement de 10m /s

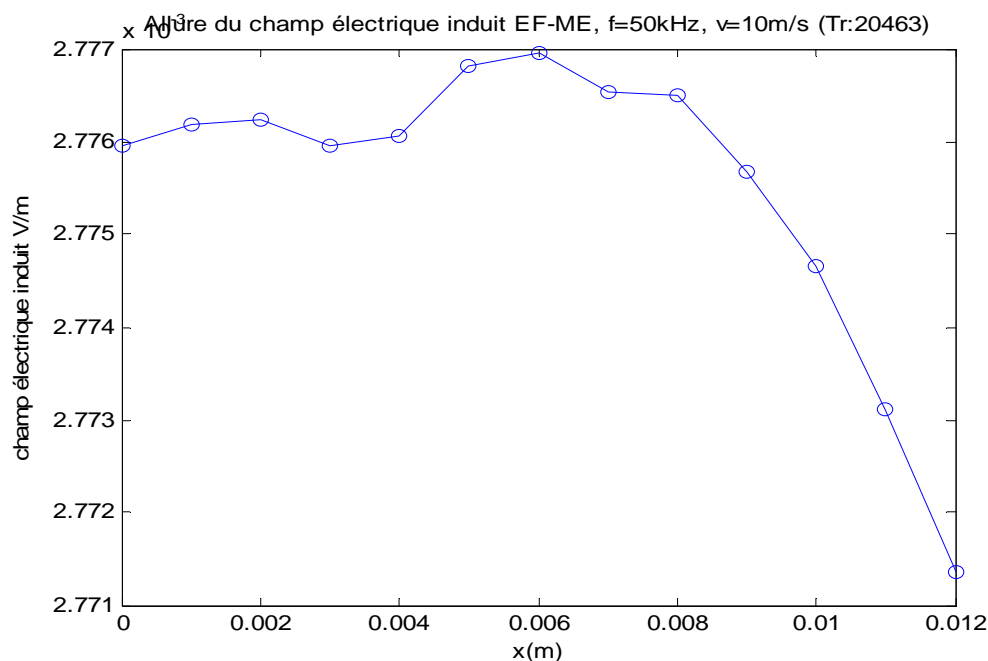


Figure. 4.71 : Allure du champ électrique induit par le mouvement (triangle 20463), $f=50\text{ kHz}$, EF-ME, cartésien, $v=10\text{ m/s}$

2-Vitesse de déplacement de 15m /s

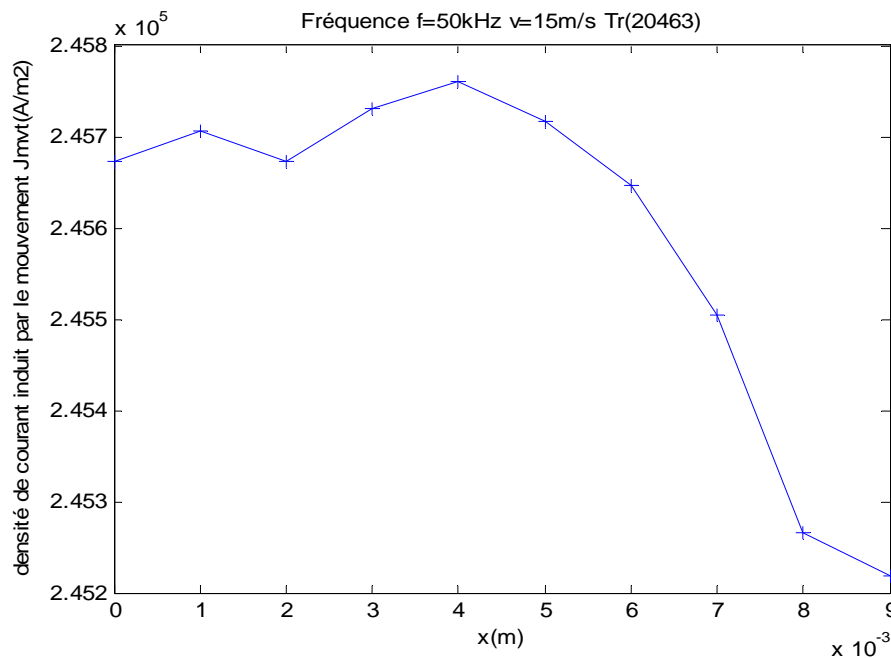


Figure. 4.72 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 20463), f=50kHz, EF-ME, cartésien, v=15m/s

Comparaison des résultats pour différentes vitesses avec la densité de courant source

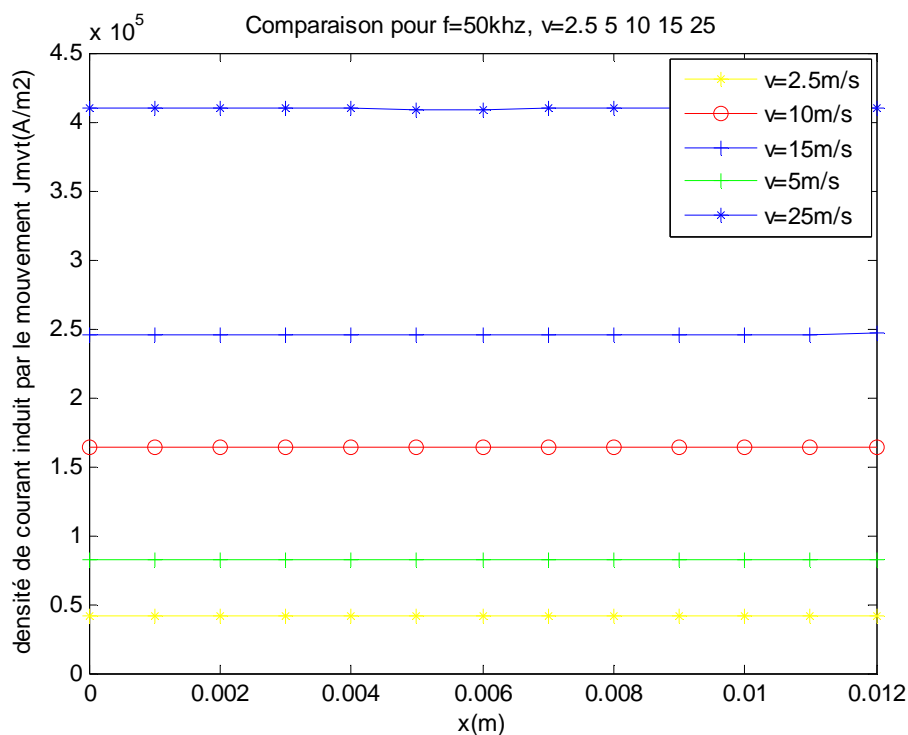


Figure. 4.73 : Allure de la densité de courant induit par le mouvement (triangle 20463), f=50kHz, EF-ME, cartésien, v=2.5, 5, 10, 15, 25 m/s, 20 pas de calcul

f. Comparaison des résultats pour différents triangle de l'inducteur :

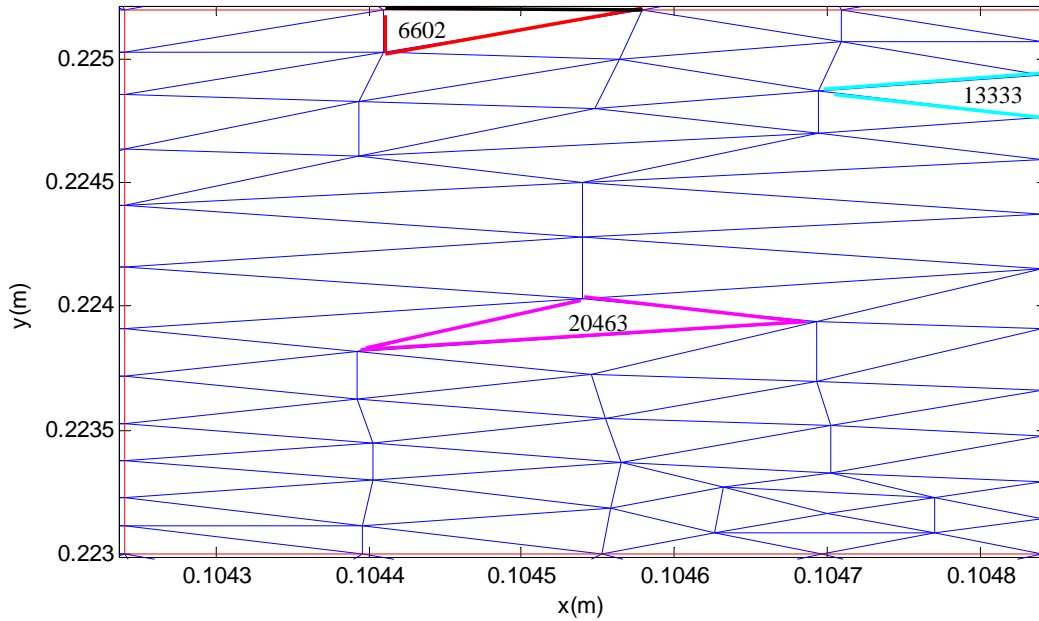


Figure.4.74 : Zoom sur la partie du capteur

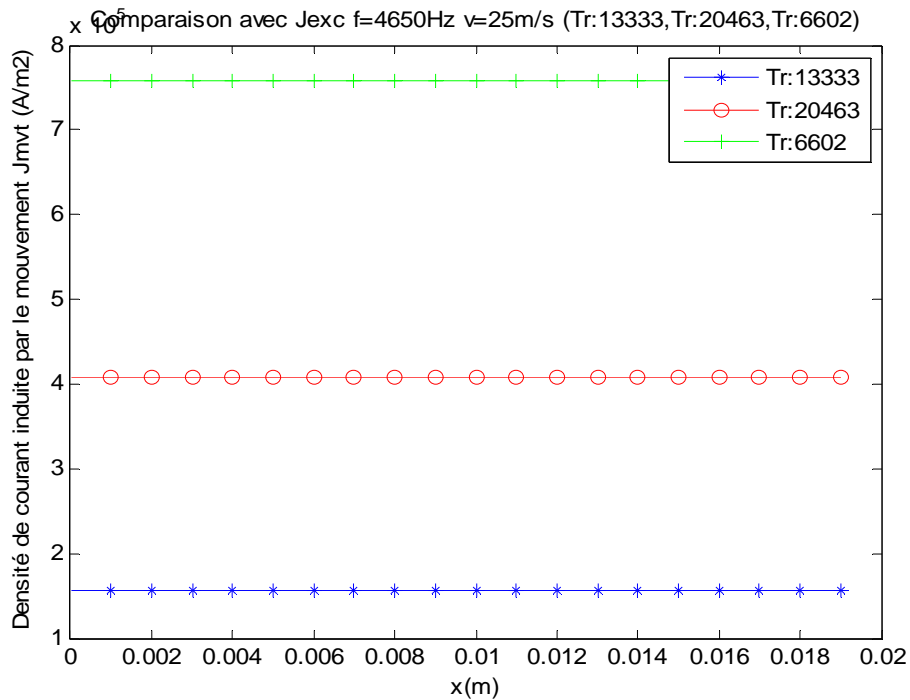


Figure. 4. 75 : Allure de la densité de courant induite par le mouvement, (triangle 20463,13333 et 6602), $f=4650\text{Hz}$, EF-ME, cartésien, $v=25\text{ m/s}$, 20 pas de calcul

Conclusion Générale

Conclusion générale

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire a concerné la mise en œuvre informatique du couplage numérique-analytique. Le modèle couplé consiste en l'association d'une solution éléments finis avec une solution analytique représentant une région de l'entrefer. Deux modèles de couplages ont été considérés l'un en coordonnées cylindriques et l'autre en coordonnées cartésiennes. Le modèle axisymétrique a été appliqué à une structure cylindrique représentant un tube de pipeline comportant un défaut. Les résultats obtenus après résolution du modèle couplé axisymétrique analytique-numérique sont fournis en termes de distribution du potentiel vecteur magnétique en considérant différentes positions relatives du capteur sachant que la simulation du mouvement consiste à réaliser le déplacement des nœuds situés sur la frontière du macro-élément. On constate que la solution analytique associée au calcul par éléments finis assure la continuité du champ entre la partie fixe et la partie mobile en maintenant la topologie constante c.a.d le maillage reste inchangé. Une distribution du potentiel vecteur magnétique le long de la frontière du macro-élément a été aussi fournie pour différentes positions relatives du capteur. L'évolution de la densité de courant induit résultant du mouvement a été représentée en fonction de la position ainsi que celle du champ électrique. Différentes fréquences ont été considérées afin de mettre en évidence l'effet de cette dernière sur la densité de courant induit. La simulation de la détection du défaut a été réalisée aussi en considérant des vitesses de déplacements linéaires variant de 2.5 m/s à 25 m/s (correspondant à une vitesse de 90 km/h). Il apparaît au vu des résultats obtenus que l'effet du mouvement sur la densité de courant dans l'inducteur est important et donc rend sa prise en compte nécessaire.

Le modèle cartésien développé est appliqué à une structure de rail de train comportant un défaut. Les résultats obtenus après résolution du modèle couplé cartésien analytique-numérique sont fournis en termes de distribution du potentiel vecteur magnétique en considérant différentes positions relatives du capteur sachant que la simulation du mouvement est réalisée en procédant à un déplacement des nœuds situés sur la frontière du macro-élément cartésien. Le comportement de la densité de courant induit pour différentes positions est représenté et une comparaison pour différentes valeurs de la vitesse et de la fréquence est effectuée. Des résultats sont obtenus pour un triangle choisi à l'intérieur de la surface de l'inducteur. L'effet de la position du triangle dans l'inducteur sur les résultats a fait l'objet d'analyse. Des résultats en termes de comportement du champ électrique sont aussi fournis.

Conclusion générale

Les travaux réalisés ont montrés que la détection de défauts par courants de Foucault lorsque la sonde est en mouvement est altérée par le phénomène des courants induits par le mouvement à vitesse élevée. Ceci préconise la prise en compte de ce phénomène dans la conception des sondes à courants de Foucault.

Les perspectives de l'étude peuvent concerner : La réalisation expérimentale, la confrontation des résultats, la prise en compte de terme de vitesse dans la formulation élément finis et l'extension à une étude 3D

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Y. Choua, « Application de la Méthode des Eléments Finis pour la Modélisation de Configurations de Contrôle non Destructif par Courants de Foucault », Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes », France, 2009
- [2] D. Lavanchy, « Simulation d'impédance pour des matériaux conducteurs stratifiés utilisant la troncation de domaine », Travail de Master of Science HES-SO en Engineering, University of Applied Sciences, Switzerland, 2012.
- [3] J. Dumont-Fillon « Contrôle non Destructif (CND) », Technique de l'ingénieur, Réf. R1400, 1996.
- [4] J. Blitz, "Electrical and Magnetic Methods of Nondestructive Testing", Adam Hilger, Bristol, UK, 1991.
- [5] J. Dumont-Fillon, « Contrôle non Destructif ». Technique de l'ingénieur. Traité, Mesure et contrôle, 1992.
- [6] B. Maouche, « Elaboration de Modèles Couplés Basés sur la Méthode des Moments pour la Modélisation de Structures Electromagnétiques - Application à l'Etude du Contrôle Non Destructif par Induction », Thèse de Doctorat, Université Ferhat Abbas, Sétif, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Algérie, 2006.
- [7] H. Zaidi, « Méthodologies pour la Modélisation des Couches Fines et du Déplacement en Contrôle non Destructif par Courants de Foucault : Application aux Capteurs Souples », Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud, France, 2012
- [8] D. Stifter, M. Wurn, K. Wiesauer, K. Nagel, M. Pircher, E. Gotzinger, C. Hitzenberger. « Spectral Domain Optical Coherence Tomography: A Novel and Fast Tool for NDT », NDT in progress, Prague, 2007.
- [9] Y. Y. Hunga, H.P. Hob, « Shearography: An Optical Measurement Technique and Applications », Materials Science and Engineering: R: Reports, 49(3):61-87, avril 2005.
- [10] J. Dumont-Fillon, "Contrôle non Destructif (CND)", Technique de l'Ingénieur R1400, 1996
- [11] Paul E. Mix, "Introduction to Nondestructive Testing: a Training Guide", John Wiley & Sons, 2nd edition, United States of America, 2005.
- [12] B. Ramdane, « Contribution à la Modélisation Tridimensionnelle de la Technique Thermo-Inductive de Contrôle non Destructif : Développement d'un Outil de Conception, d'Analyse et d'Aide à la Décision », Thèse de Doctorat, Spécialité électrotechnique et génie électrique, Université de Nantes, France, 2009.

Bibliographie

- [13] J. Rivenez, A Lambert « Les contrôles non destructifs. Généralités » 3^{ème} Edition Revue et Corrigée, CETIM, 1994.
- [14] <http://www.cofrend.com/controles-non-destructifs/> Consulté le 10 Octobre 2014
- [15] <http://www.ndt-ed.org/EducationResources/CommunityCollege>, NDT Resource Center, Consulté le 15 Octobre 2014
- [16] <http://www.zetec.com>, the World Leader in non Destructive (NDE) Inspection Solution, Consulté le 01 Octobre 2014.
- [17] <http://www.smarteddy.com/smart.html>, Consulté le 10 Octobre 2014.
- [18] M. Enokizono, Y. Tsuchida, T. Chady « Crack Size and Shape Determination by Moving Magnetic Field Type Sensor » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 34, Issue 4, Pages 1252-1254, July 1998.
- [19] C.Dezhi, K.R. Shao, Sheng Jianni, Yan Weili « Eddy Current Interaction With a Thin-Opening Crack in a Plate Conductor » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 36, Issue 4, Pages 1745-1749, July 2000.
- [20] N. C. Haywood, J. R. Bowler « Eddy-Current Imaging of Buried Cracks, by Inverting Field Data » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 28, Issue 2, Pages 1336-1339, March 1992
- [21] J. DeFuria, B. Probasco, S. Mandayam, J. Schmalzel « Versatile Multipurpose Modular Instrument for Conductivity Measurements » Proceeding of the 17th IEEE, Pages 1614-1615, Volume 3, May 2000.
- [22] E. Uzal, I. Ozkol, M.O. Kaya « Impedance of a Coil Surrounding an Infinite Cylinder With an Arbitrary Radial Conductivity Profile » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 34, Issue 1, Pages 213-217, January 1998.
- [23] A.A. Kolyshkin, R. Vaillancourt « Series Solution of an Eddy Current Problem for a Sphere With Varying Conductivity and Permeability profiles» IEEE Transactions on Magnetics, Volume 35, Issue 6, Pages 4445-4451, November 1999.
- [24] T. P. Theodoulidis, E. E. Kriezis « Coil Impedance Due to a Sphere of Arbitrary Radial Conductivity and Permeability Profiles » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 38, Issue 3, Pages 1452-1460, May 2002.
- [25] L. Bavall « Determination of Coating Thickness of a Copper-Plated Steel Wire by Measurement of the Internal Wire Impedance » IEEE Transactions on Magnetics, Volume 47, Issue 4, Pages 1013-1019, August 1998.
- [26] Y. Danon and C. Lee « Characterisation of Ta Thin Coating Using the Eddy Current Method » ASNT Spring Conference, Pages 40-41, 2003.

Bibliographie

- [27] Hocking NDT, St Albans Herts, UK: <http://www.hocking.com>
- [28] Rémy La «Modélisation Phénoménologique des Signaux Courants de Foucault en vue de la Caractérisation des Défauts des Tubes de Générateurs de Vapeur » Thèse de doctorat, Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay, France, 1997.
- [29] Cung T.L.« Evaluation Non-Destructive Quantitative de Structures Aéronautiques par la Méthode des Courants de Foucault » Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2012.
- [30]S. Yamada, K. Chomsuwan, T. Hagino, H. Tian, K. Minamide and M. Iwahara « Conductive Microbead Array Detection by High-Frequency Eddy-Current Testing Technique With SV-GMR Sensor», IEEE Transactions on Magnetics, Volume 41, Issue 10, Pages 3622-3624, October 2005.
- [31] C. Ravat «Conception de Multicapteurs à Courants de Foucault et inversion des signaux Associés pour le Contrôle non Destructif » Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, Paris, France, 2008.
- [32] M. Bensetti « Etude et Modélisation de Capteurs Destinés au Contrôle non Destructif par Courant de Foucault. Mise en Oeuvre de Méthodes d'Inversion », Thèse de Docteur en Sciences de l'Université Paris Sud-XI, France, 14 décembre 2004.
- [33] Bensetti M., Le Bihan Y., Marchand C., Tassiti C., Lissorgues G., Dufour E., Gilles J.P., «A Hybrid Finite-Element Method for the Modeling of Microcoils », IEEE Transactions on Magnetics,. 1868-1871, May 2005.
- [34] Chiara Zorni. « Contrôle non destructif par courants de Foucault de milieux ferromagnétiques : De l'expérience au modèle d'interaction », Université Paris Sud-Paris XI, 2012. France.
- [35] H. Mohellebi, « Elaboration de Modèles 2D Analytico-Numériques Pour l'Etude de Systèmes Electromagnétiques Comportant des Pièces en Mouvement », Thèse de Doctorat d'état, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie, 2001
- [36] H. Mohellebi, «Modèle Analytico-Numérique de Calcul de Courants de Foucault dans des Dispositifs Axisymétriques », Thèse de Magister, Université de Tizi- Ouzou, Algérie, 1996.
- [37]. H. Mohellebi, M. Féliachi, K. Srairi, «Coupled 2D-Analytical and Finite Element Analysis for the Eddy Current Computation », Third International Workshop on Magnetic Field, Belgium, 3-6 Mai 1996.

Bibliographie

- [38]. M. Rachek, « Modélisation Analytico-Numérique d'Inducteurs Axisymétriques Alimentés en Tension Moyenne Fréquence » Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie, 2001.
- [39]. N. O. Sadiku, «Numerical Techniques in Electromagnetic», PRC Press, Tokyo, 1992.
- [40]. J. R. F. Ayres, «Théorie et Application des Equations Différentielles», Dickinson College, Groupe Mc Graw Hill, 1984.
- [41]. A. Angot, «Complément de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electrotechnique et des Télécommunications», Sixième Edition, Masson et Cie, 1972.
- [42]. M. Artola, M. Cessenat, «Sur la Propagation des Ondes Electromagnétiques dans un Milieu Composite», Académie des Sciences, Paris, 310, Série I, p. 375-380, 1990.
- [43]. J-L. Lions, «Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et au Contrôle Optimal», Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, No. 323, 1973.
- [44]M.Hamel, « Etude et Réalisation d'un Dispositif de Détection de Défauts par Méthodes Electromagnétiques » Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, 2012.
- [45] H. Mohellebi, M. E. Latrèche, M. Féliachi, «Coupled Axisymmetrical-Analytical and Finite Element Analysis for Induction Devices Having Moving Parts», IEEE Transactions On Magnetics, Vol. 34, No 5, p -p 3308-3310, September 1998.
- [46] M. Féliachi, «Contribution au Calcul du Champ Electromagnétique par la Méthode des Eléments Finis en vue d'une Modélisation Dynamique de Machines Electriques», Thèse de Docteur Ingénieur, Ecole Nationale des Arts et Métiers, Paris, 1981.
- [47] B. Bendjima, «Contribution à la Modélisation par Eléments Finis des Phénomènes Electromagnétiques relatifs au Magnétoformage», Thèse de Doctorat, Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Nantes, IUT Saint-Nazaire, 1997.
- [48]. K. Srairi, «Modélisation des Actionneurs Electromagnétiques en Régime Transitoire», Thèse de Doctorat, Université de Nantes, Novembre 1996.
- [49]. N. Labbe, Y. Maréchal, G. Meunier, H. Ben Harara, «2D Nonlinear Finite Element Modelling of Electromagnetic Retarders Using Time-Stepping Algorithms, and the Petrov-Galerkin with Homogeneization Techniques», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No.3, May 1996.

Bibliographie

- [50]. P. S. Shanga, D. Rodger, «Design and Analysis of Voltage Axisymmetric Actuators», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, September 1994.
- [51]. D.S. Smith, M. K. Jenkins and D. Howe, «The Transient Time Domain Analysis of Non-Linear Electro-Mechanical Systems», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, September 1994.
- [52]. N. Takahashi, T. Nakata, Suhartamo and H. Morishige, «Investigation of a Model to Verify Software for 3D Static force Calculation», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No.5, September 1999.
- [53]. K. Tani and T. Yamada, «Dynamic Analysis of Linear Oscillatory Actuator Driven by Voltage Source Using FEM With Edge Elements and 3-D Mesh Coupling Method», Compumag'99, Sapporo October 1999, pp. 418-419, Japan.
- [54]. K. Muramatsu, T. Nakata, N. Takahashi and K. Fujiwara, «Comparison of Coordinate Systems For Eddy Current Analysis in Moving Conductors», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, No. 2, pp. 1186-1189, March 1992.
- [55]. K. Yamazaki, «Generalization of 3D eddy Current Analysis for Moving Conductors Due to Coordinate Systems and Gauge Conditions», IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No.25, pp. 1259-1262, March 1992.
- [56]. S-M. Jang, H-C. Park, T-Y. Chung, Y-S. Son, S-J. Moon, «Active Control of Structural Vibration Using Linear Oscillating Actuator (L O A) », Elsevier Science B.V, Advanced Computational and Design Techniques in Applied Electromagnetic Systems, 1995.
- [57] A. Zaoui, « Contribution à la Modélisation du CND par la Matrice de Capteurs à Courants de Foucault», Thèse de Doctorat EMP Alger-Université de Nantes, 2008.
- [58] Th. Heckel, H-M Thomas, M. Kreutzbruck & S. RÜhe, 'High Speed Non-Destructive Rail Testing With Advanced Ultrasound and Eddy-Current Testing Techniques», Indian National Seminar & Exhibition on Non-Destructive Evaluation NDE 2009, December 10-12, 2009.
- [59] J. Hwang and J. Lee, «The Application of a Differential Type Hall Sensors Array to the Non Destructive Testing of Express Train Wheels», NDT & E, Vol. 42, no 1, pp. 34-41, 2009
- [60] H. Mohellebi, M. Féliachi, «Analytical Element Coupled to Finite Elements for Simulation of Probe Movement in Non Destructive Testing», ICCCT2012, 2-3 December 2012, Seoul, Korea .
- [61] G. Dhatt Et G. Touzot, «Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis», Edition Maloine 1984.

Bibliographie

- [62] O.C Zienkiewicz, ‘‘La Méthode des Eléments Finis», 3^{ème} Edition Mc Graw Hill, 1979
- [63] Wuliang Yin, Anthony J. Peyton, «Sensitivity Formulation Including Velocity Effects For Electromagnetic Induction Systems», IEEE Transactions On Magnetics. Vol. 46, No.5, 2010.
- [64] F.Gardiol , «Electromagnétisme», Edition Dunod.1987.
- [65] A. Vorst, «Electromagnétisme, Champ, Forces et Circuits», Université Catholique de Louvain, 1983.
- [66] P. P. Silvester, M.V.K. Chari, «Finite Element in Electrical and Magnetic Field Problems», John Wiley & Sons, New-York, 1980.

ANNEXE

ANNEXE I

Calcul des coefficients de Fourier:

Les expressions des coefficients de Fourier déduits à partir des conditions aux limites sur les frontières du macro-élément aux coordonnées respectives $r = r_1$ et $r = r_2$ sont telles que:

$$C_{1n} = \frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \int_0^T f(z) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz$$

$$C_{2n} = \frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \int_0^T g(z) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz$$

Calcul des coefficients C_{1n} :

$$C_{1n} = \frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \int_0^T f(z) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz = \frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \int_{z_{i-1}^{z_i}} \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz +$$

$$\frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \int_{z_i^{z_{i+1}}} \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz$$

$$C_{1n} = \frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \left[\frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1}) \right\} + \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1}) \right\} \right]$$

$$+ \frac{2}{T S_1(r_1 \lambda_n)} \left[\frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{z_i - z_{i+1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_{i+1}) - \sin(\lambda_n z_i) \right\} + \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \frac{1}{z_i - z_{i+1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_{i+1}) - \sin(\lambda_n z_i) \right\} \right]$$

Calcul des coefficients C_{2n} :

$$C_{2n} = \frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \int_0^T g(z) \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz = \frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \int_{z_{i-1}^{z_i}} \frac{z - z_{i-1}}{z_i - z_{i-1}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz +$$

$$\frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \int_{z_i^{z_{i+1}}} \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} \sin\left(\frac{n\pi}{b} z\right) dz$$

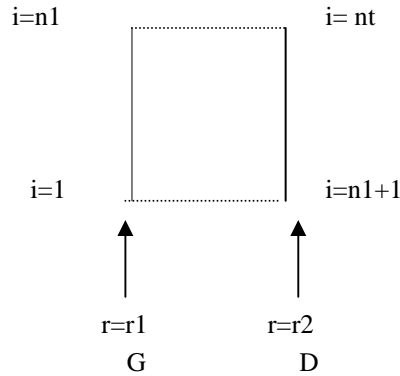
$$C_{2n} = \frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \left[\frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1}) \right\} + \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_i) - \sin(\lambda_n z_{i-1}) \right\} \right]$$

$$+ \frac{2}{T S_1(r_2 \lambda_n)} \left[\frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{z_i - z_{i+1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_{i+1}) - \sin(\lambda_n z_i) \right\} + \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \frac{1}{z_i - z_{i+1}} \left\{ \sin(\lambda_n z_{i+1}) - \sin(\lambda_n z_i) \right\} \right]$$

ANNEXE II

I. Construction de la matrice S_{ij} du macro-élément

Soit la figure 1 représentant le macro-élément dont les nœuds intervenant dans le calcul de la matrice de rigidité du macro-élément.



La procédure de construction de la matrice consiste à :

1- Définir les vecteurs V_1 et V_2 correspondant aux nœuds situés respectivement sur les frontières de coordonnées $r = r_1$ et $r=r_2$. Les vecteurs nœuds doivent être construits de telle sorte que les nœuds suivent un ordre croissant des coordonnées. V_1 est un vecteur de dimension n_1 et V_2 a pour dimension n_2 .

n_1 : nombre de nœuds sur les frontières (G) du macro-élément

n_2 : nombre de nœuds sur les frontières (D) du macro-élément

2- Calculer les matrices des coefficients $B_{ni}(N_{cal}, NNE)$ et $B_{nj}(N_{cal}, NNE)$ de dimension $NNE \times N_{cal}$

NNE : Nombre de nœuds total du macro-élément.

N_{cal} : Nombre de termes de la série de Fourier.

3- Calculer le vecteur $km(n)$ des arguments de dimension N_{cal} .

4- Calcul des éléments S_{ij} , $NNE \times NNE$ termes.

Les éléments S_{ij} sont calculés selon l'appartenance des nœuds aux frontières G ou D. Ainsi pour :

$$i = 1, 2, 3, \dots, n_1 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_1$$

$$S_{ij}(i, j) = S_{11}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n_1 \quad \text{et} \quad j = n_1+1, n_1+2, \dots, NNE$$

$$S_{ij}(i, j) = S_{12}$$

$$i = n_1+1, n_1+2, \dots, NNE \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n_1$$

$$S_{ij}(i, j) = S_{21} \\ i = n_1+1, n_1+2, \dots, NNE \quad \text{et} \quad j = n_1+1, n_1+2, \dots, NNE$$

$$S_{ij}(i, j) = S_{22}$$

D'où la formation de la matrice de raideur du macro-élément de dimension NNE x NNE suivante :

$$\left[S_{ij}(i, j) \right] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Les matrices élémentaires sont telles que :

$$\left[S_{11} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \left[S_{12} \right] = \begin{bmatrix} a_{1n_1+1} & a_{1n_1+2} & \dots & a_{1NNE} \\ a_{2n_1+1} & a_{2n_1+2} & \dots & a_{2NNE} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 n_1+1} & a_{n_1 n_1+2} & \dots & a_{n_1 NNE} \end{bmatrix}$$

$$\left[S_{22} \right] = \begin{bmatrix} a_{n_1+1 n_1+1} & a_{n_1+1 n_1+2} & \dots & a_{n_1+1 NNE} \\ a_{n_1+2 n_1+1} & a_{n_1+2 n_1+2} & \dots & a_{n_1+2 NNE} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{NNE n_1+1} & a_{NNE n_1+2} & \dots & a_{NNE NNE} \end{bmatrix}$$

La matrice S_{21} s'obtient en calculant la transposé de la matrice S_{21}

$$\left[S_{21} \right] = \left[S_{12} \right]^t$$

- 5- Construire la matrice SS_{ij} de dimension supérieure à S_{ij} (SS_{ij} est une matrice carrée de dimension égale au nombre d'inconnues du problème).
- 6- Correspondance des nœuds du macro-élément avec ceux du maillage éléments finis.
- 7- Assemblage de la matrice macro-élément avec la matrice éléments finis.
- 8- Résolution du problème complet.

Résumé : Le travail réalisé dans le cadre de mémoire a concerné la mise en œuvre informatique du couplage numérique-analytique en vue de l'étude de l'effet de la densité de courants induits résultant du mouvement du capteur à vitesse élevée sur la détection de défauts par courants de Foucault. L'étude est menée en deux dimensions en hypothèses harmoniques pour deux configurations : axisymétrique et plane. Le modèle couplé 2D consiste en l'association d'une solution éléments finis avec une solution analytique représentant une région de l'entrefer. Le modèle axisymétrique a été appliqué à une structure cylindrique représentant un tube de pipeline comportant un défaut. La simulation du mouvement consiste à réaliser le déplacement des nœuds situés sur la frontière du macroélément (ME) représentant la région analytique en maintenant la topologie constante. L'évolution de la densité de courant induit résultant du mouvement a été étudiée en considérant des vitesses de déplacements linéaires variant de 2.5 m/s à 25 m/s (correspondant à une vitesse de 90 km/h). Le modèle cartésien développé est appliqué à l'étude d'une structure de rail de train comportant un défaut. Les travaux obtenus ont montré que la détection de défauts par courants de Foucault lorsque la sonde est en mouvement nécessite la prise en compte de ce phénomène dans la conception des sondes à courants de Foucault.

Mots Clés : Eléments Finis, Solution Analytique, Méthodes Couplées, Simulation du Mouvement, Vitesse Elevée, Densité de Courants Induits, Contrôle non Destructif

Abstract: The work carried out in the memory part concerned computer implementation of digital-analytical coupling for the study of the effect of the induced current density resulting from the movement of the high velocity sensor on the flaw detection eddy currents. The study is conducted in two dimensions harmonic assumptions for two configurations: axisymmetric and plane. The 2D coupled model consists of a combination of a finite element solution with an analytical solution representing a region of the gap. The axisymmetric model was applied to a cylindrical structure representing a pipeline tube having a defect. The simulation of the movement is to achieve the movement of nodes on the boundary of the macroelement (ME) representing the analytical region by maintaining constant topology. The evolution of the induced current density resulting from the movement was investigated by considering linear displacement speeds of 2.5 m / s to 25 m / s (corresponding to a speed of 90 km / h).

Developed the Cartesian model is applied to the study of a train track structure with a defect. Work obtained showed that the detection of defects using eddy currents when the probe is moving requires consideration of this phenomenon into the design of eddy current probes.

Keywords: Finite Elements, Analytic Solution Coupled Methods, Simulation of Motion Speed High, Induced Current Density, Non-Destructive Testing
