

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D' AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par

Malika BIRKOUICHE

Souad HAMADOUCHE

Thème

Commande par mode glissant d'ordre deux d'un pendule inversé

Mémoire soutenu publiquement le 17/07/2016 devant le jury composé de :

Mme A. NAIT ABDESSELAM

Maitre assistant, UMMTO, Présidente

Mme K. KHERRAZ

Maitre de Conférences, UMMTO, Promotrice

Mme O. Boukendour

Maitre assistant, UMMTO, Examinatrice

Mme S. YOUSFI

Maitre assistant, UMMTO, Examinatrice

Remerciements

Nous remercions avant tout le bon Dieu de nous avoir permis de réaliser ce travail.

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promotrice **Mme KHERRAZ** pour avoir dirigé ce travail, pour son suivi, ses conseils et sa disponibilité à chaque instant.*

Notre gratitude et reconnaissance vont s'adresser à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation pendant notre cursus universitaire.

Nos remerciements vont s'adresser également au président et membres de jury qui nous feront l'honneur d'évaluer notre travail.

Sans oublier tous les amis et camarades qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste projet.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

❖ *A ma chère maman que dieu me la protège.*

❖ *A la mémoire de mon père.*

❖ *A mes frères et ma sœur.*

Je dédie ce travail également à mon binôme et à toute sa famille.

Souad HAMADOUCHE

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

- ❖ *A la plus chère pour moi ; ma mère, pour l'amour qu'elle m'apporté depuis ma naissance.*

- ❖ *A le plus cher a mon cœur ; mon père que dieu le guérit.*

- ❖ *A ma chère petite sœur Chafia.*

- ❖ *A toute ma famille.*

Je dédie ce travail également à mon binôme et à toute sa famille.

Malika BIRKOUCHE

Liste des figures

❖ Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Pendule inversé.

Figure 1.2 : Représentation des forces auxquelles soumis le système.

❖ Chapitre 2 :

Figure 2.1 : la trajectoire du système dans l'espace d'état et surface de glissement.

Figure 2.2 : Différents modes de convergence pour la trajectoire.

Figure 2.3 : attractivité de la surface de glissement.

Figure 2.4 : Mode de glissement avec chattering.

Figure 2.5 : Représentation de fonction saturation.

Figure 2.6 : schéma bloc qui représente la solution basé sur un observateur.

❖ Chapitre 3 :

Figure 3.1 : mode glissant d'ordre deux.

Figure 3.2 : algorithme de Twisting.

Figure 3.3 : algorithme de Super-Twisting.

Figure 3.4 : algorithme sous-optimale avec perturbation.

Liste des figures

Figure 3.5 : algorithme de sous- optimal sans perturbations.

❖ Chapitre 4 :

Figure 4.1 : schéma de commande de mode glissant classique.

Figure 4.2 : Position de chariot ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.3 : L'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.4 : Zoom sur l'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.5 : Signal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.6 : Zoom de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.7 : Schéma de commande par l'algorithme de super-Twisting.

Figure 4.8 : Position du chariot ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.9 : L'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.10 : zoom de l'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.11 : Singal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Figure 4.12 : Zoom de Singal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$).

Sommaire

Sommaire

	Introduction générale.....	1
Chapitre 1	Modélisation et description d'un pendule inversé	
1.1	Introduction.....	4
1.2	Définition d'un pendule inversé	4
1.3	Principe du fonctionnement.....	5
1.4	Modélisation dynamique du système pendule – chariot	6
1.4.1	Énergie cinétique.....	7
1.4.1.1	L'énergie cinétique du pendule.....	8
1.4.1.2	Énergie cinétique du chariot.....	8
1.4.2	Énergie potentielle.....	9
1.4.3	Équation de Lagrange.....	9
1.4.3.1	Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_1 = x(t)$	10
1.4.3.2	Équation de <i>Lagrange</i> pour le degré de liberté $q_2 = \theta(t)$	11
1.5	Calcul du modèle d'état.....	12
1.5.1	Calcul de \ddot{x} et $\ddot{\theta}$	12
1.5.2	Le modèle d'état.....	13
1.6	Conclusion.....	15
Chapitre 2	Théorie de la commande par mode glissant d'ordre un	
2.1	Introduction.....	16
2.2	Principe et concepts de base.....	16
2.3	Définition de régime glissant.....	18
2.3.1	Méthode de Fillipov.....	19
2.3.2	Méthode de la commande équivalente.....	21
2.4	Propriété de la convergence.....	22
2.5	Choix de la surface de glissement.....	24
2.6	Phénomène de réticence (chattering).....	25
2.7	Solution pour la suppression de chattering.....	26
2.7.1	Remplacement de la fonction signe par une fonction continue.....	26
2.7.2	Solution basé sur un observateur.....	27
2.7.3	Solution par des modes glissants d'ordre supérieur.....	28
2.8	Conclusion.....	29

Chapitre 3 Mode glissant d'ordre supérieur

3.1	Introduction.....	30
3.2	Principe.....	30
3.3	Régime glissant idéal.....	31
3.4	Régime glissant réel.....	32
3.5	Mode glissant d'ordre deux.....	32
3.6	Propriété de convergence en temps fini.....	34
3.7	Quelques exemples de mode glissant de second ordre.....	35
3.7.1	Algorithme de Twisting	35
3.7.2	Algorithme de super-Twisting.....	36
3.7.3	Algorithme sous-optimal.....	38
3.7	Conclusion.....	40

Chapitre 4 Application et résultats de simulation

4.1	Introduction.....	41
4.2	Commande par mode glissant d'ordre un.....	42
4.2.1	Schéma de la commande	44
4.2.2	Simulation et interprétation	44
4.3	Application de l'algorithme de super twisting.....	50
4.3.1	Schéma de la commande	51
4.3.2	Simulations et interprétation.....	51
4.4	Conclusion.....	57
	Conclusion générale.....	60

Introduction générale

Introduction générale

L'automatique consiste à étudier des systèmes réels de différentes disciplines scientifiques (électronique, mécanique, thermique, chimie, écologie, biologie, économie, physique,.....), en vue de les analyser, les surveiller, les diagnostiquer, et les commander. Cela nécessite la disponibilité d'un modèle mathématique de ce système réel. Celui-ci est un objet dans lequel des variables de différents types interagissent et produisent des signaux observables. Lorsque le modèle du système n'est pas connu, il est nécessaire de procéder à son identification. L'identification consiste à rechercher des modèles mathématiques de système fiable et proche de la « réalité physique » à partir des données expérimentales et de connaissances disponibles à priori. Ces modèles doivent fournir une approximation fidèle du comportement du système physique dans le but d'estimer des paramètres physiques ou de concevoir des algorithmes de simulation, de prévision, de surveillance ou de commande. L'utilisation des données expérimentales pour déterminer les paramètres de modèle mathématique du système représente une identification paramétrique.

Le pendule inversé a fait l'objet de nombreuses études de recherche tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes, tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [1]. Le pendule inversé est un système SIMO (Single Input Multiple Output); sous- actionné, à plus d'un degré de liberté, très sensible aux retard et aux frottements.

En plus, le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques intéressantes entre autre la non linéarité, le couplage et l'instabilité intrinsèque [1].

La synthèse d'une loi de commande pour un système non linéaire est un important problème rencontré en automatique. Dans ce cadre, plusieurs techniques de commande réputées robustes ont été élaborées ; à titre d'exemple, la technique de commande par régime glissant.

Introduction générale

La commande à structure variable est un sujet qui a attiré l'attention de plusieurs chercheurs depuis longtemps. Le principe de cette technique de commande est de forcer la dynamique du système à suivre, au mieux, une dynamique désirée, imposée par des systèmes autonomes stables, ce qu'on appelle les surfaces de glissement. Dans la littérature, les surfaces de glissement se trouvent comme des systèmes autonomes stables et souvent linéaires [2].

Les commandes à modes glissants procèdent de manière discontinue, ce qui conduit à exciter toutes les fréquences du système à contrôler et donc des modes pas forcément pris en compte dans la modélisation. En second lieu, dans la plupart des cas, les discontinuités de l'algorithme de contrôle interviennent directement sur l'actionneur. Si cet organe n'est pas conçu pour ce type de sollicitations, cela risque de conduire à son vieillissement prématuré et le système sera soumis à chaque instant à une commande élevée, afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré.

La commande par mode glissant d'ordre un se synthétise en deux étapes : on détermine une sortie fictive $s(x)$, appelée surface de glissement sur laquelle les objectifs des contrôles sont réalisés, ensuite on calcule la loi de commande afin de ramener la trajectoire des états à cette sortie et de la maintenir sur cette surface tout le temps jusqu'à l'équilibre [3]. Malheureusement, cette loi de commande présente un problème majeur, le "chattering", en anglais, ou phénomène de réticence en français. Celle-ci se caractérise par des oscillations persistantes de hautes fréquences qui sont dues à la partie discontinue. Plusieurs techniques ont été proposées par des chercheurs russes tel que M. Levantovsky et M. Emel'yanov pour réduire ou éliminer ce phénomène. Parmi ces stratégies, on cite la commande par mode glissant d'ordre supérieur. Ce dernier est basé sur le déplacement du problème de discontinuité qui est dû à l'élément de commutation de la loi en régime glissant sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement, au lieu d'agir sur la première dérivée.

Le travail présenté dans ce mémoire s'appuie sur la commande par mode glissant de second ordre d'un pendule inversé à deux degrés de liberté. Il s'agit de l'algorithme de super Twisting. Son objectif est de remédier au phénomène de chattering de la commande par mode glissant d'ordre un, tout en gardant ses avantages.

Introduction générale

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres dont le contenu est brièvement résumé de la manière qui suit

Chapitre 1 :

Le premier chapitre est destiné à la description d'un système sous-actionné qui est le pendule inversé et à l'élaboration de son modèle mathématique, en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange.

Chapitre 2 :

Ce chapitre est consacré pour la présentation des notions de base de la commande par régime glissant classique. Des méthodes de calcul des grandeurs de commande telles que la méthode de Phillipov et la méthode de commande équivalentes sont abordées. Ensuite, l'inconvénient majeur de cette approche qui est le phénomène de chattering est présenté, en proposant quelques solutions pour le réduire.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, nous exposons un bref rappel théorique sur le mode glissant d'ordre supérieur et son principe de fonctionnement, avec ses deux principaux régime (idéal et réel). Ensuite, nous présentons le mode glissant d'ordre deux et ses propriétés de convergence, en citant quelques algorithmes qui s'appliquent pour éliminer le phénomène de réticence.

Chapitre 4 :

Après avoir élaboré le modèle dynamique du système pendulaire étudié dans le premier chapitre par le formalisme d'Euler-Lagrange, nous l'exploitons pour tester la commande par mode glissant d'ordre un et illustrer son inconvénient majeur qui est le phénomène de broutement. Ensuite pour remédier à ce problème, nous optons pour l'algorithme de super Twisting, une des techniques de commande par mode glissant de second ordre. Une série de tests par simulations est effectuée pour mettre en évidence l'efficacité de ces deux lois de commande.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale résumant les différents résultats obtenus et les perspectives qui découlent de l'étude effectuée.

Chapitre 1

Modélisation et description d'un pendule inversé

1.1 Introduction

Nous avons déjà presque tous un jour joué avec un bâton de bois (manche à balai), le jeu consiste à faire tenir en équilibre ce bâton sur notre index le plus longtemps possible. Afin d'éviter la chute de celui-ci, nous devons déplacer notre doigt de façon à contrecarrer en permanence son basculement.

C'est exactement le même défi que propose la commande d'un pendule inversé. Celui-ci est un outil didactique puissant utilisé en automatique depuis maintenant plus de 50 ans. Nous pouvons d'ailleurs retrouver une vaste littérature à son sujet, puisque de nombreux services universitaires d'automatique ou de mécatronique l'ont exploité pour tester des nouvelles techniques de commandes.

Ce présent chapitre est consacré à la présentation du système pendulaire et à sa modélisation dynamique.

1.2 Définition d'un pendule inversé

Un pendule inversé est un pendule simple, cependant la masse est située en l'air. Le pendule présente une position d'équilibre instable que l'on cherche à stabiliser en position verticale, relié par une liaison rotule à un chariot mobile qui se déplace le long d'un rail de guidage horizontale [4].

Le dispositif pendule – chariot possède deux degré de liberté exprimés en x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation de pendule au tour de l'articulation de rotation. Le système est schématisé par la figure (1.1).

Le schéma de l'ensemble pendule inversé - chariot est représenté par la figure suivante.

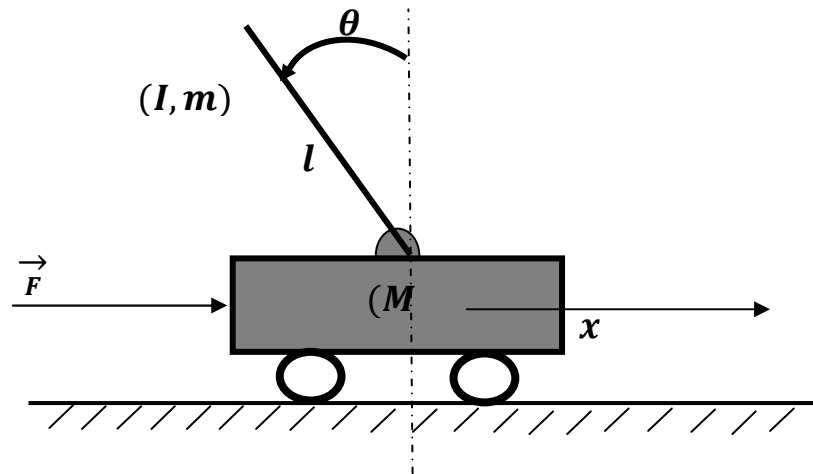


Figure (1.2) : Pendule inversé

1.3 Principe du fonctionnement

Le principe de fonctionnement du système est très simple en théorie :

Quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite, et inversement.

La difficulté c'est de régler l'intensité et la forme de la réaction du chariot en fonction de l'angle que le pendule fait avec la verticale [4].

1.4 Modélisation dynamique du système pendule – chariot

Toute formulation d'un modèle mathématique des systèmes mécaniques nécessite la représentation des forces subies par ces systèmes. Cela est représenté par la figure ci-dessous.

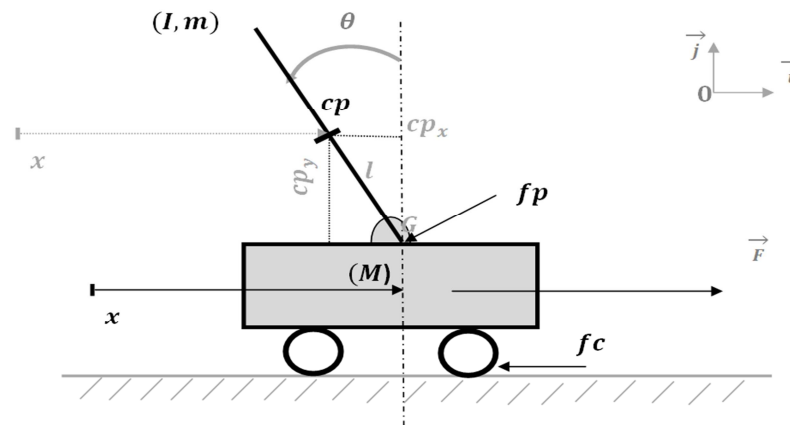


Figure (1.3) : représentation des force aux quelles soumis le système

Les paramètres du système pendulaire sont donnés dans le tableau suivant :

paramètres	unités	description
l	m	Demi-longueur de pendule
m	kg	Masse de pendule
M	kg	Masse de chariot
J	$Kg.m^2$	Inertie de pendule par rapport à son centre de gravité
fp	N	Frottement de pendule
fc	N	Frottement de déplacement de chariot
$x(t)$	m	Position longitudinale de chariot
$\theta(t)$	rad	Position angulaire de Pendule
$F(t)$	N	Force appliquée au chariot

Tableau (1. 1) : variables et paramètres du pendule inversé

Le système possède deux degrés de liberté $x(t)$ et $\theta(t)$, pour le modéliser nous utilisons la méthode de d'Euler-Lagrange, définie par les équations suivantes :

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial E_f}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.1)$$

Le Lagrangien étant défini par :

$$L = E_c - E_p \quad (1.2)$$

Avec :

E_c : C'est l'énergie cinétique.

E_p : C'est l'énergie potentielle.

Afin d'obtenir ces équations, on isole l'ensemble (Chariot + pendule) pour calculer les différentes énergies liées à l'ensemble du système.

Soit E_c l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle.

1.4.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique se calcule par la somme des différentes énergies cinétiques liées au système.

$$E_c = E_{cp} + E_{cc} \quad (1.3)$$

L'énergie cinétique de pendule est exprimée par l'équation (1.4).

L'énergie cinétique de chariot est donnée par l'équation (1.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{cp} = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{cc} = \frac{1}{2} M v_c^2 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

1.4.1.1 L'énergie cinétique du pendule

La position du centre de gravité du pendule à partir de ses coordonnées est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{C}_p &= \vec{x}_{px} + \vec{C}_{py} \\ &= C_{px}\vec{i} + C_{py}\vec{j}\end{aligned}$$

Donc :

$$\vec{C}_p = [x + l \sin(\theta)] \vec{i} + l \cos(\theta) \vec{j} \quad (1.6)$$

Le vecteur de vitesse du centre de gravité du pendule est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{C}_p \\ &= v_{px}\vec{i} + v_{py}\vec{j}\end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{v}_p = [\dot{x} - l\dot{\theta} \cos(\theta)] \vec{i} - [l\dot{\theta} \sin(\theta)] \vec{j} \quad (1.7)$$

Le module de vecteur de vitesse du centre de gravité du pendule est calculé comme suit :

$$\begin{aligned}\left\{ v_p = \|\vec{v}_p\| = \sqrt{(v_{px})^2 + (v_{py})^2} \right\} \\ \Rightarrow \left\{ v_p^2 = [\dot{x} + l\dot{\theta} \cos(\theta)]^2 + [l\dot{\theta} \sin(\theta)]^2 \right\}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$v_p^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (1.8)$$

On remplace l'équation (1.8) dans l'équation (1.4), on obtient l'expression de l'énergie cinétique du pendule:

$$\begin{aligned}E_{cp} &= \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta)] + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 \\ E_{cp} &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2\end{aligned} \quad (1.9)$$

1.4.1.2 Énergie cinétique du chariot

La vitesse de chariot v_c est donnée par la dérivé partielle de $x(t)$ par rapport au temps.

$$E_{cc} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (1.10)$$

On substituant les équations (1.9) et (1.10) dans (1.3), on aura l'expression de l'équation de l'énergie cinétique du système pendule - chariot.

$$E_c = \frac{1}{2} (m + M) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 \quad (1.11)$$

1.4.2 Énergie potentielle

L'énergie potentielle du système pendule – chariot est donnée par la somme des deux énergies potentielles de chacun des deux éléments du système.

$$E_p = E_{pp} + E_{pc} = 0 + mgl \cos(\theta)$$

Ce qui donne :

$$E_p = mgl \cos(\theta) \quad (1.12)$$

1.4.3 Équation de Lagrange

Le Lagrangien est défini par :

$$L = E_c - E_p$$

On substituant les équations (1.11) et (1.12) dans (1.2) on aura :

$$L = \frac{1}{2} (m + M) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \quad (1.13)$$

Le système a deux degrés de liberté, $q_1 = x(t)$ et $q_2 = \theta(t)$

1.4.3.1 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_1 = x(t)$

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial E_f}{\partial \dot{x}} \quad (1.14)$$

Où: F est la force à appliquer sur le chariot.

La dérivée partielle de *Lagrangien* suivant (t) , $\dot{x}(t)$ et t s'exprime par les équations de l'accolade suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{array} \right. = (m + M)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos(\theta) \quad (1.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial E_f}{\partial t} \end{array} \right. = (m + M)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \quad (1.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial E_f}{\partial t} \end{array} \right. = 0 \quad (1.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial E_f}{\partial t} \end{array} \right. = f_c \dot{x} \quad (1.18)$$

On substituant les équations (1.16), (1.17) et (1.18) dans l'équation (1.14), on aura la première équation de Lagrange.

$$F_1 = (m + M)\ddot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + ml\ddot{\theta} \cos(\theta) + f_c \dot{x} = F \quad (1.19)$$

1.4.3.2 Équation de Lagrange pour le degré de liberté $q_2 = \theta(t)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \dot{\theta}} \quad (1.20)$$

La dérivée partielle de *Lagrangien* suivant (t) , $\dot{\theta}(t)$ et t s'exprime de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) \end{array} \right. = m l^2 \dot{\theta} + ml\dot{x} \cos(\theta) + I\dot{\theta} \quad (1.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E_p}{\partial t} \end{array} \right. = m l^2 \ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos(\theta) - ml\dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + I\ddot{\theta} \quad (1.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E_p}{\partial t} \end{array} \right. = -ml\dot{x} \dot{\theta} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta) \quad (1.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E_p}{\partial t} \end{array} \right. = f_p \dot{\theta} \quad (1.24)$$

On substituant les équations (1. 22), (1.23) et (1.24) dans l'équation (1.18), on aura la deuxième équation de *Lagrange*.

$$(m l^2 + I)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} \cos(\theta) - mgl \sin(\theta) + f_p \dot{\theta} = 0 \quad (1.23)$$

Dans le but de simplifier les calculs, on néglige les forces de frottement f_c, f_p et l'inertie dans les équations (1.19) et (1.23). On obtient les deux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = F \\ ml \cos(\theta)\ddot{x} + m l^2 \ddot{\theta} - ml g \sin(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (1.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = F \\ ml \cos(\theta)\ddot{x} + m l^2 \ddot{\theta} - ml g \sin(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

En multipliant l'équation (1.25) par $\frac{1}{ml}$ et en remplaçant F par u , on obtient l'équation dynamique décrivant le mouvement du système pendulaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = u \\ \cos(\theta)\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (1.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = u \\ \cos(\theta)\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) = 0 \end{array} \right. \quad (1.27)$$

1.5 Calcul du modèle d'état

Le modèle d'état non linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad (1.28)$$

On pose les variables d'état :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{x} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

Tel que :

$x_1 = x$ (Position rectiligne du chariot).

$x_2 = \dot{x}$ (vitesse du chariot).

$x_3 = \theta$ (Position angulaire de la tige).

$x_4 = \dot{\theta}$ (vitesse angulaire de la tige).

1.5.1 Calcul de \ddot{x} et $\ddot{\theta}$

De l'équation (1.27), on aura la valeur de $\ddot{\theta}$ en fonction de \ddot{x}

$$\ddot{\theta} = -\frac{\cos(\theta)\ddot{x}}{l} + \frac{g\sin(\theta)}{l} \quad (1.29)$$

En substituant l'équation (1.28) dans (1.26), on aura la valeur de \ddot{x} en fonction des variables d'état.

$$\ddot{x} = \frac{ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 - g\cos(\theta)\sin(\theta)}{M + m\sin(\theta)^2} + \frac{1}{M + m\sin(\theta)^2}u \quad (1.30)$$

En substituant l'équation (1.29) dans (1.28), on aura la valeur de $\ddot{\theta}$ en fonction des variables d'état.

$$\ddot{\theta} = \frac{g[M + m]\sin(\theta) - ml\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2}{l[M + m\sin(\theta)^2]} - \frac{\cos(\theta)}{l[M + m\sin(\theta)^2]}u \quad (1.31)$$

1.5.2 Le modèle d'état

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{ml \cos(x_3) x_4^2 - g \cos(x_3) \sin(x_3)}{M + m \sin(x_3)^2} \\ x_4 \\ \frac{g[M + m] \sin(x_3) - ml \sin(x_3) \cos(x_3) x_4^2}{l[M + m \sin(x_3)^2]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M + m \sin(x_3)^2} \\ 0 \\ \frac{\cos(x_3)}{l[M + m \sin(x_3)^2]} \end{pmatrix} u \quad (1.32)$$

Les paramètres utilisés lors de la modélisation sont résumés dans ce tableau.

paramètres	description
L	L'équation de Lagrange
E_c	Énergie cinétique
E_{cp}	Énergie cinétique de pendule
E_{cc}	Énergie cinétique de chariot
E_p	Énergie potentielle
E_{pp}	Énergie potentielle de Pendule
E_{pc}	Énergie potentielle de Chariot
v_p	Vitesse de pendule
v_c	Vitesse de chariot
t	Le temps
$q(t)$	Degré de liberté
$\theta(t)$	Position Angulaire de Pendule
$x(t)$	Variable d'état
$F(t)$	Force Appliquer Au Chariot
G	La gravité
u	La commande de système

Tableau 1. 2: variables et paramètres du pendule inversé.

1.6 Conclusion

Le pendule inversé est un système non linéaire et instable. Il est souvent utilisé pour tester l'efficacité de nouvelles commandes. C'est pour cette raison que nous l'avons choisi comme application, afin de mettre en évidence l'efficacité de notre stratégie de commande.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la structure du système pendulaire ainsi que sa modélisation dynamique qui est déduite à partir du formalisme d'Euler-Lagrange.

Chapitre 2

Théorie de la commande par mode glissant d'ordre un

2.1 Introduction

Dans toute formulation d'un problème de commande, le modèle mathématique développé dans le but d'établir la loi de commande ne reflète pas exactement le processus réel. Ces différences peuvent par exemple être dues à des dynamiques non modélisées, à des variations des paramètres du système, aux perturbations et aux non linéarités.

La commande par mode glissant relève le défi à ce problème, voire sa propriété de convergence rapide et en temps fini des erreurs, ainsi, que la grande robustesse par rapport aux erreurs de modélisation et certains types de perturbations extérieures. Alors c'est une commande adéquate à mettre en œuvre.

Tous ces aspects positifs n'empêchent pas la présence de certains inconvénients. Les commandes à modes glissants procèdent de manière discontinue, ce qui conduit à exciter toutes les fréquences du système à contrôler et donc des modes pas forcément pris en compte dans la modélisation, appelé le (phénomène du chattering).

Le mode de glissement est un mode particulier de fonctionnement des systèmes à structure variable. Basé essentiellement sur la résolution des équations différentielles discontinues initiée par Phillipov [6] telle que la théorie originellement introduite par Utkin[7]et Emelyanov[8].

2.2 Principe et concepts de base

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement en temps fini et d'y demeurer jusqu'à l'équilibre. Alors c'est la convergence vers la surface glissant et ensuite le glissement le long de celle-ci.

Cette surface étant une relation entre les variables d'état du système, elle définit une équation différentielle, et donc détermine totalement la dynamique du système, pourvu qu'il reste sur cette surface. L'évolution d'un système soumis à une loi de commande qui le fait rester sur une surface donnée ne dépend donc plus du tout du système lui même ou des

perturbations auxquelles il peut être soumis, mais uniquement des propriétés de cette surface. Le système bouclé est robuste vis à vis des incertitudes (propres au système) et perturbations (extérieures au système), aussi est totalement insensible à ces incertitudes et perturbations, moyennant qu'elles puissent effectivement être rejetées par la commande. [9]



Figure 2.1 : À gauche : commande,
À droite : trajectoire dans l'espace d'état et surface de glissement

Cette commande se fait en deux étapes :

- ✓ Détermination d'une région d'espace d'état telle qu'une fois que le système se trouve dans cette région, il ait le comportement désiré.
- ✓ Définition d'une loi de commande qui conduise le système jusqu'à cette région d'espace d'état. voire (Figure 2.2) [10].

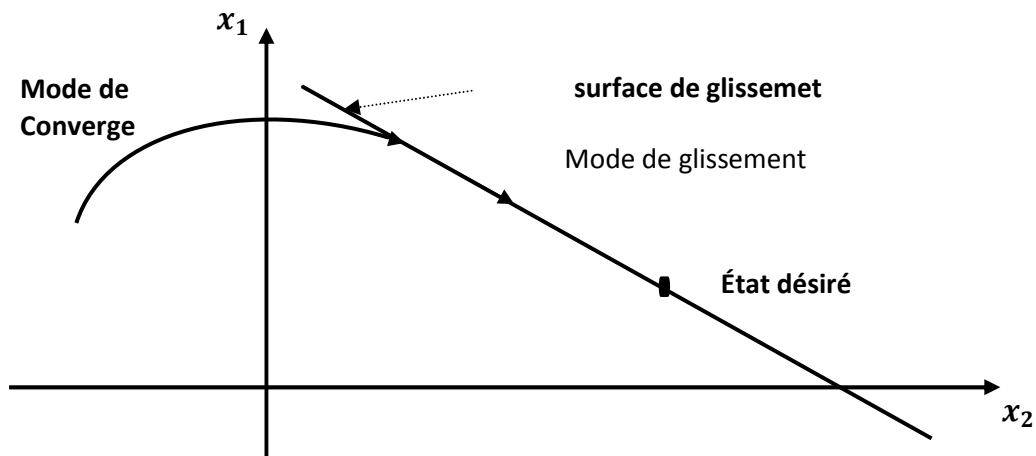


Figure 2.2 : différents mode de convergence pour la trajectoire

2.3 Définition de régime glissant.

Considérant le système non linéaire suivant [11]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t, u) & \text{avec } x(t_0) = x_0 \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

On souhaite que cette équation d'évolution suis la surface définie par :

$$s(x, t) = 0 \quad s: \mathfrak{R}^n * \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

f le champ de vecteur suffisamment différentiable.

x le vecteur d'état.

x_0 l'état initial.

y la sortie de système.

$$x(t, u) = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad u^+ \neq u^- \quad (2.2)$$

$u \in \Omega \subset \mathfrak{R}$: est la commande de système.

u^+ et u^- étant des fonctions continues.

Il est à noter que c'est le caractère discontinu de la loi de commande qui permet d'obtenir une convergence en temps fini sur la surface ainsi que des propriétés de robustesse vis-à-vis de certaines perturbations [12].

Où x l'état de système de dimension n .

Le système (2.1) est intrinsèquement à structure variable avec la loi de commande (2.2).

En revanche le système rendu discontinu par le choix d'une commande discontinu, u est dite à discontinuité artificielle.

On peut ramener le système variable (2.1) et loi de commande (2.2) à l'écriture suivante :

$$\dot{x} = f(x, t, u) = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{si } s(x, t) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{si } s(x, t) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Où $f^+(x, t)$ et $f^-(x, t)$ sont des champs des vecteurs complets dans \mathbb{R}^n .

$s(x, t)$: est une surface dans qui divise l'espace en deux parties disjointes $s(x, t) < 0$
 $s(x, t) > 0$ qu'on notera respectivement ε^+ et ε^- [11,13].

Remarque (2.1) :

Certaines systèmes comme les circuits électroniques contenant des commutations et les systèmes mécaniques contenant des frottements secs, sont de conception naturellement discontinue [11].

Les systèmes à structure variable de type (2.1) peuvent tous se ramener à la forme (2.3).
 Qu'il soit à discontinuité artificielle ou naturelle.

En dehors de la surface de la discontinuité, les vecteurs vitesses f^+ et f^- peuvent avoir différents comportements.

2.3.1 Méthode de Fillipov

Considérant le système non-linéaire défini dans (2.1) et (2.2). Les trajectoires du système sur la surface s ne sont pas clairement définies puisque le vecteur de commande u n'est pas défini pour $s = 0$. *Fillipov* [6] a proposé une solution à ce problème en termes d'inclusion différentielle [11,14].

La surface de glissement sépare l'espace d'état en deux régions $f^+ = f(x, u^+)$, $f^- = f(x, u^-)$

La résolution de *Fillipov* assume ces deux régions constantes dans un petit intervalle

$(t, t + \Delta t)$ pour un point x sur la surface de glissement $s = 0$.

On a qu'un intervalle de temps Δt est formé par deux intervalles Δt_1 et Δt_2 de la façon suivante $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, avec $u = u^+$ pour le premier intervalle Δt_1 et $u = u^-$ pour le deuxième Δt_2 .

Alors l'incrément du vecteur d'états après l'intervalle de temps Δt est calculé comme suit [10].

$$\Delta x = f^+ \Delta t_1 + f^- \Delta t_2$$

La moyenne du vecteur d'états est presque

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x} = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^- \quad (2.4)$$

Où $\alpha = \frac{\Delta t_1}{\Delta t}$ est le temps relatif que la commande prend pour atteindre la valeur u^+ et $(1 - \alpha)$ est le temps relatif pour atteindre la valeur u^- .

L'équation (2.3) représente l'expression du mouvement pendant le régime glissant. Puisque, la trajectoire des états pendant le régime glissant est sur la surface $s = 0$, le paramètre α doit être sélectionné de sorte que le vecteur vitesse du système (2.3) soit sur le plan tangent à la surface de glissement où,

$$\dot{s} = \nabla_x(s) \dot{x} = \nabla_x(s) [\alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-] \quad (2.5)$$

Avec $\nabla_x(s) = \left[\frac{\partial s}{\partial x_1} \dots \frac{\partial s}{\partial x_n} \right]$, c'est le gradient de s par rapport à x .

La solution de (2.4) est donné par :

$$\alpha = \frac{\nabla_x(s) f^-}{\nabla_x(s) (f^- - f^+)} \quad (2.6)$$

Si, on fait le remplacement de (2.5) dans (2.3) nous avons l'équation suivante de glissement :

$$\dot{x} = \frac{\nabla_x(s) f^-}{\nabla_x(s) [f^+ - f^-]} f^+ - \frac{\nabla_x(s) f^+}{\nabla_x(s) [f^+ - f^-]} f^- \quad (2.7)$$

Par la solution x reste sur la surface s . Les valeurs que prend $f(x, t)$ dans un voisinage de s

génèrent des solutions contraintes à glisser sur la surface de glissement, voire la figure (2.3).

2.3.2 Méthode de la commande équivalente

Pendant le régime glissant, la commande a une fréquence de commutation en théorie infinie ; autrement dit, la commande est discontinue à chaque instant. Ce cas de figure n'est absolument pas abordé par la théorie classique des équations différentielles [11],[9].

L'étude de systèmes soumis à de telles commandes est beaucoup plus complexe. Utkin a proposé une méthode dite méthode à commande équivalente. Cette dernière consiste à admettre qu'en mode glissant tout ce passe comme si le système était piloté par une commande dite commande équivalente u_{eq} [15],[16],[17].

La commande équivalente est définie comme étant une commande obtenue par la résolution de l'équation $\dot{s} = 0$. Cette commande permet donc de maintenir l'état de système sur la surface de discontinuité $s = 0$ cela. Donne l'équation de mode glissant.

$$\dot{x} = f(x, t, u_{eq}) \quad (2.8)$$

Aussi on a la commande qui maintient l'état de système sur la surface de glissement :

$$\dot{s}(x, t) = \frac{\partial s}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

On remplace (2.8) dans (2.9) on aura :

$$\dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, t, u_{eq}) + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

La résolution analytique de l'équation (2.10) est difficile .mais les systèmes non linéaires affines en u définis par l'équation qui suit :

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t) u_{eq} \quad (2.11)$$

L'équation (2.10) possède une solution explicite exprime de la façon suivante :

$$u_{eq}(x, t) = - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} f + \frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (2.12)$$

Quand le terme $\frac{\partial s}{\partial x} g \neq 0$, on remplace dans (2.11) le terme de la commande équivalente par sa valeur trouvée dans (2.12). Comme ça on aura l'équation de mode glissant :

$$\dot{x} = f(x, t) - g(x, t) \left(\frac{\partial s}{\partial x} g \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial x} f + \frac{\partial s}{\partial t} \right) \quad (2.13)$$

La méthode de la commande équivalente est très convenable au traitement des problèmes de la commande par mode glissant voire ses solutions explicites pour les systèmes non linéaires affines. Pour ces derniers, d'après Utkin [17] cette commande équivalente n'est rien d'autre que une composante basse fréquence de la commande commettante réellement appliquer aux systèmes physiques, Ce que veut dire qu'en le système réagisse comme s'il piloté par u_{eq} .

La loi de commande discontinue u_{eq} consiste en la somme d'une composante haute fréquence (u_{hf}) et d'une composante basse fréquence (u_d) : $u_{eq} = fu_{hf} + u_d$. u_{hf} est filtrée par la bande passante du système et le régime sur s n'est affecté que par u_d qui peut être vue comme étant la sortie du filtre passe-bas [12].

Donc la commande équivalente joue le rôle d'un filtre passe bas en en filtrant les hautes fréquences dus aux incertitudes et perturbations inconnues.

2.4 Propriété de la convergence

Cette propriété est la condition à laquelle le mode glissant existe et sous laquelle la trajectoire d'état atteint la surface de glissement en temps fini.

Pour faire la loi de la commutation on peut appliquer la méthode de Lyapunov :

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (2.14)$$

Pour déterminer une loi de commande qui soit capable de satisfaire la condition qui garantit la convergence de l'état vers la surface de glissement. Selon le théorème de la stabilité de cette théorie on aura [18]:

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} < -k|s| \quad (2.15)$$

Où K est une constante strictement positive. Cette condition est appelée condition d'attractivité. Si on fait l'intégration de l'expression (2.14) $s\dot{s} < 0$ entre le temps initial $t = 0$ et le temps de convergence et $t = t_{\text{att}}$, on aura :

$$s(t_{\text{att}}) - s(0) \leq -K(t_{\text{att}} - 0) \quad (2.16)$$

Finalement la surface s sera atteinte dans un temps fini t_{att} tel que :

$$t_{\text{att}} \leq \frac{s(0)}{K} \quad (2.17)$$

La figure suivante représente l'attractivité de la surface de glissement

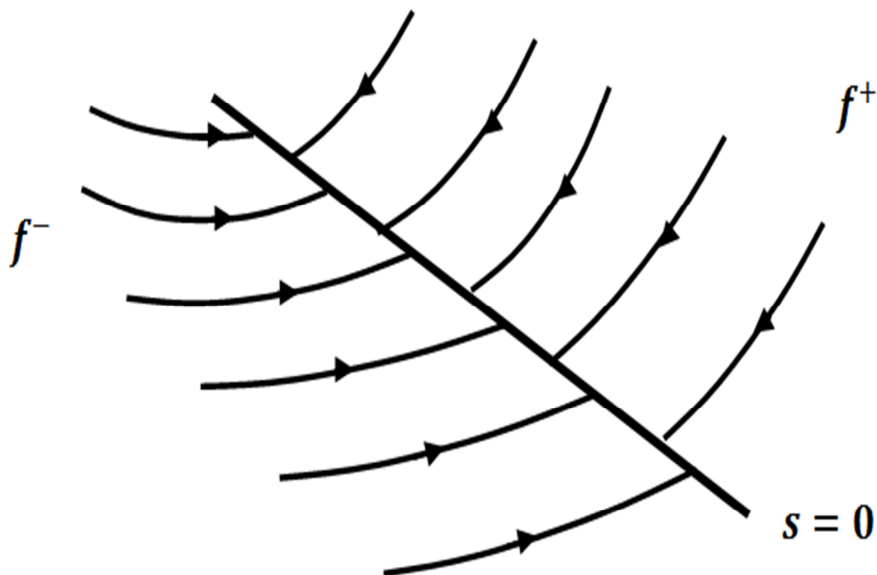


Figure 2.3 : attractivité de la surface de glissement

2.5 Choix de la surface de glissement

Le comportement du système ne dépend plus du système d'origine ni des perturbations, mais est entièrement déterminé par le choix de la surface de glissement. Cela n'est vrai que si l'amplitude de la commande est suffisante et/ou que la dynamique exigée par la surface de glissement n'est pas trop différente de celle du système d'origine. Si cela n'est pas le cas, le système quitte la surface de glissement.

La surface la plus simple est un hyperplan passant par l'origine de l'espace d'état, autrement dit, une surface linéaire en chacune des variables d'état. Le système réduit est donc dans ce cas un système linéaire. S'il est stable, sa convergence vers l'objectif final, l'origine du plan de phase, est nécessairement exponentielle (sauf si le système réduit est d'ordre 0).

Pour obtenir d'autres propriétés, il faut choisir une structure de la surface de glissement différente, plus complexe.

Alors on va écrire le système par l'équation différentiel suivante :

$$\dot{x}^n = f(x, t) + g(x, t)u \quad (2.18)$$

Où f et g des fonctions non linéaires. g supposée inversible.

x : l'état du système.

u : l'entrée de système.

Soit x_d la consigne désirée et e l'erreur de poursuite définie par :

$$e = x - x_d \quad (2.19)$$

Alors la forme générale de système soit définie en fonction de l'ordre de système par la fonction suivante :

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{n-1} e(x) \quad (2.20)$$

Où n est le degré relatif du système par rapport à la sortie du système qui est $y(t)$.

Ce n représente le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie $y(t)$, par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée x .

2.6 Phénomène de réticence (chattering)

Malgré les différents avantages de la commande par modes de glissement, son utilisation a été entravée par un inconvénient majeur lié au phénomène de réticence (broutement ou encore chattering).

Ce phénomène est caractérisé par des fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. Les raisons principales à l'origine de ce phénomène sont :

- _ Les retards de commutation au niveau de la commande,
- _ Les dynamiques non modélisées des capteurs et observateurs, qui retardent le moment où le régulateur prend conscience qu'il faut inverser la commande,
- _ Les dynamiques non modélisées des actionneurs et autres dynamiques rapides du système, qui retardent le moment où la commande est suffisamment forte pour rapprocher le système de la surface de glissement.

Cela conduit le système à quitter la surface de glissement sans que la commande ne puisse réagir. Ainsi peut dégrader les performances et même conduire à l'instabilité. [22], [12] Le chattering est illustré par la figure suivante :

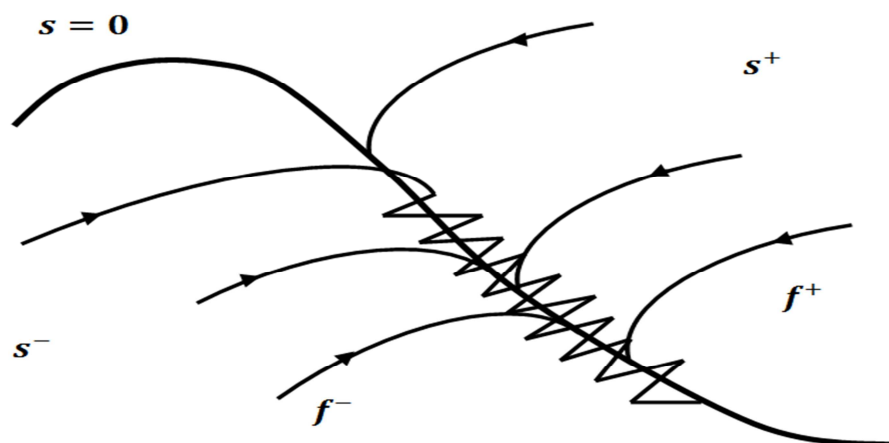


Figure 2.4 : Mode de glissement avec chattering

2.7 Solution pour la suppression de chattering

De nombreuses études ont été effectuées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. Parmi eux on peut distinguer.

- ✓ Solution de couche limite.
- ✓ Solution par des modes glissants d'ordre supérieur.
- ✓ Solution basé sur un observateur

2.7.1 Remplacement de la fonction signe par une fonction continue

Cette solution porte aussi le nom de couche limite (boundary layer), elle consiste à remplacer la fonction « sign » de la loi de commande par une approximation continue à gain élevé [11].

Cette méthode est paramétrée par une constante positive à réglée pour avoir un bon accordement entre réduction du chattering et conservation de la robustesse. Dans la méthode présentée ici, plus ε est petit, plus l'approximation tend vers la fonction signe, est meilleure et la robustesse de la commande réduite [9].

Alors la commande discontinue qui provoque le phénomène de chattering est supposée comme suit :

$$u(t) = -k \operatorname{sige}(s(t)) \quad (2.21)$$

k: constante positive

Cette fonction $\operatorname{sige}(s(t))$ soit remplacer par une fonction plus lisse dans la couche limite de $(t) = 0$. Y en a plusieurs fonctions à utiliser, parmi celle-ci la fonction de saturation voir la figure (2.5).

La fonction saturation illustré par la figure suivante.

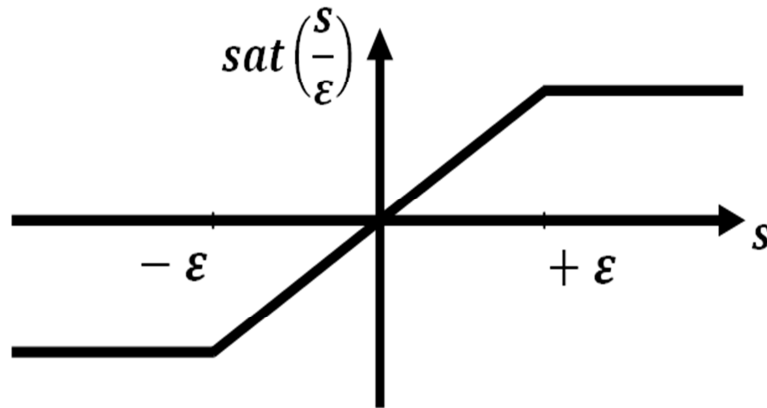


Figure 2.5 :fonction saturation

Son expression donnée par :

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sing}(s) & \text{si } \left| \frac{s}{\epsilon} \right| > 1 \\ \frac{s}{\epsilon} & \text{si } \left| \frac{s}{\epsilon} \right| \leq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Le système ne converge plus vers la valeur désirée, mais vers un voisinage de cette dernière dans ce cas, le système est dit en régime pseudo-glissant. Bien que cela permette d'atténuer le phénomène de réticence, la précision par rapport à l'objectif fixé, la robustesse de la commande et le temps de réponse s'en trouvent critiques.

2.7.2 Solution basé sur un observateur

La commande du système discontinue mise en œuvre disposé des modèles non linéaires, ces modèles d'états sont discontinus dans leurs majorités. Cela rend les capteurs inaccessibles à la mesure de certains états du système [11].

La résolution de problème du à cette discontinuité, effectuer par le faite qu'un observateur asymptotique par mode de glissement soit placer à l'entré de la boucle de régulation voire la figure (2.6). Cet observateur est un capteur aussi un système dynamique.

Alors La boucle principale est poursuivie de la boucle d'observateur telle que cette dernière n'intègre aucune dynamique non modélisée. Cet observateur fournit en sortie un état estimé $\hat{x}(t)$ qui va tendre vers l'état désiré de système. Donc ce système évolue comme si la commande équivalente continue est appliquée, et le problème du chattering sera exclu.

Le schéma fonctionnel qui convint illustre le placement de l'observateur asymptotique par mode de glissement dans la boucle de régulation.

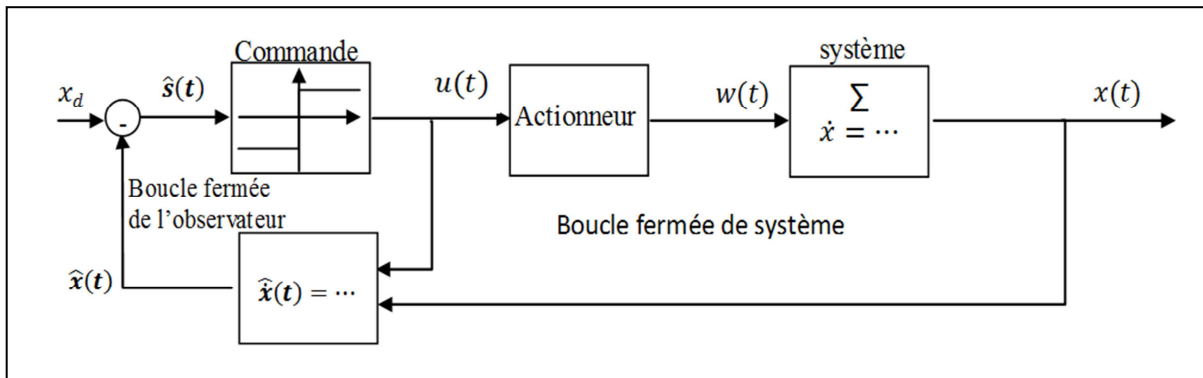


Figure 2.6 : Solution basé sur un observateur

2.7.3 Solution par des modes glissants d'ordre supérieur

Pour contourner cet obstacle, des chercheurs russes ont proposé une nouvelle façon de glisser. Il est alors possible de réduire ou même d'exclure tout phénomène de chattering, tout en conservant les propriétés de robustesse et de convergence en temps fini [12].

Dans cette approche, le terme discontinu n'apparaît plus directement dans l'expression de la commande synthétisée mais dans une de ses dérivées supérieures ce qui a le mérite de réduire le Chattering.

2.8 Conclusion

Au cours de ce chapitre on a présenté les idées clés de la commande par modes glissants. Les principes ont été donnés dans le cas des régimes glissants classiques (d'ordre un), on a procédé à la définition de ce régime glissant en introduisant la méthode de Phillipov, de commande équivalente, les propriétés de la convergence, et le choix de la surface du glissement.

L'inconvénient majeur des modes glissants est l'apparition du phénomène de réticence, pour la réduction ou la suppression de ce phénomène des solutions ont été proposées tel que la solution basé sur un observateur, le remplacement de la fonction signe par une fonction continue, l'augmentation de l'ordre du système qui est l'objectif de chapitre suivant.

Chapitre 3

Mode glissant d'ordre supérieur

3.1 Introduction

Dans le but de réduire ou d'éliminer le phénomène de réticence de la commande par mode glissant d'ordre un, de nombreuses solutions ont été proposées [2], comme la solution de couche limite, la solution basée sur un observateur et d'autres solutions. Une nouvelle solution basée sur la théorie des modes glissants d'ordre supérieur a été proposée par les chercheurs Levantovsky, Emelyanov et Korovin dans les années 80. Elle conduit à des lois de commande relativement simples et permet de réduire le phénomène de réticence tout en conservant les performances du système. Celles-ci sont caractérisées par une commande discontinue agissant sur les dérivées d'ordre

supérieur de la variable de glissement, préservant les principaux avantages de la précédente approche. Ils réduisent le phénomène de réticence en garantissant même une meilleure précision de convergence par rapport aux imperfections du modèle ou d'organes de commande. L'ordre de glissement caractérise en particulier le degré de continuité des dynamiques du système au voisinage de la surface de glissement et correspond au nombre de dérivées continues de la variable à contraindre.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le principe de mode glissant d'ordre supérieur particulièrement, la notion du mode glissant d'ordre deux, et la propriété de convergence en temps fini, en introduisant quelques exemples de mode glissant en second ordre comme l'algorithme de Twisting, super-Twisting et l'algorithme de sous-optimale.

3.2 Principe

Durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement appelé chattering. Ce dernier se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. Afin d'éliminer cet inconvénient et en même temps sauvegarder les propriétés principales du mode glissant d'ordre un (convergence en temps fini et robustesse), plusieurs solutions ont été proposées. Le moyen le plus intéressant consiste en l'application des modes de glissements d'ordre supérieur [2].

Cette stratégie est basée sur le calcul des dérivées successives de la surface de glissement s le long d'une trajectoire d'un système discontinu, elle aboutit à un ordre donné à une discontinuité. Il est alors possible de classifier les régimes glissant d'ordre supérieur par le numéro de r dérivées successives de la surface s^r , tel que r est l'ordre de glissement. Le r - ème ordre du système est déterminé par l'équation suivante:

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \ddot{\ddot{s}} = \dots = s^{(r-1)} = 0 \tag{3.1}$$

Ce type de lois de commande est caractérisé par une commande discontinue qui agit sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement au lieu de première dérivée et c'est l'inconvénient majeur des algorithmes d'ordre supérieur car le nombre d'informations nécessaires à connaître sur l'entrée augmente avec l'ordre du régime glissant [10].

3.3 Régime glissant idéal

Nous disons qu'une trajectoire $(t, x(t))$ ayant pour conditions initiales $(0, x_0)$ est une trajectoire à mode glissant *idéal* d'ordre r par rapport à la surface $s = 0$, s'il existe $t_1 > 0$ tel que : $\forall t \geq t_1$ les égalités suivantes soient vérifiées :

$$s(t, x(t)) = \dot{s}(t, x(t)) = \dots = s^{(r-1)}(t, x(t)) = 0 \tag{3.2}$$

Le régime glissant idéal n'est pas réalisable pratiquement, car les trajectoires du système ne peuvent pas être confinées à la surface de glissement.

La notion de mode glissant idéal permet d'atteindre de façon plus lisse la surface de contrainte [12], [20].

3.4 Régime glissant réel

Une commande par modes glissants réels sur $S = 0$ est dite d'ordre $r > 0$ par rapport à une fonction à valeur réelle $\gamma(\varepsilon)$, tels que $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$, si pour

n'importe quel ensemble appartenant au domaine de définition, il existe $t_1 > 0$, une constante $C > 0$ telle que $\forall t > t_1$ l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$|s(t, x(t, \varepsilon))| \leq C |\gamma(\varepsilon)|^r.$$

La notion de modes glissants réels permet d'exprimer la dépendance de l'algorithme à modes glissants par rapport aux imperfections physiques du système réel est classiquement soit un retard ou une dynamique négligée [20].

3.5 Mode glissant d'ordre deux

Considérons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{3.3}$$

Et la surface de commutation :

$$s = s(t, x) \tag{3.4}$$

Où : $x \in \mathfrak{R}$ est l'état du système, $u \in \mathfrak{R}$ est la commande, $u \in \mathfrak{R}$ et f sont deux fonctions continues en $(x$ et $t)$.

Par dérivation successive de la fonction s , on peut définir le degré relatif r du système (3.4) par rapport à la variable u , soit :

$$\frac{ds^i}{du} = 0 \quad (i=1,2,\dots,r-1) \text{ et } \frac{ds^r}{du} \neq 0. \tag{3.5}$$

L'objectif de la commande par mode glissant du second ordre est de contraindre la trajectoire du système à atteindre la surface de glissement s en imposant aux trajectoires d'état du système a évoluer au bout d'un temps fini en satisfaisant la condition suivante :

$$s = \dot{s} = 0 \tag{3.6}$$

La commande par modes glissants d'ordre deux est appliquée afin de maintenir la commande continue et réduire le phénomène de réticence [21],[22].

La figure (3.7) fait apparaître la trajectoire de convergence du système dans le sens de la surface de glissement s .

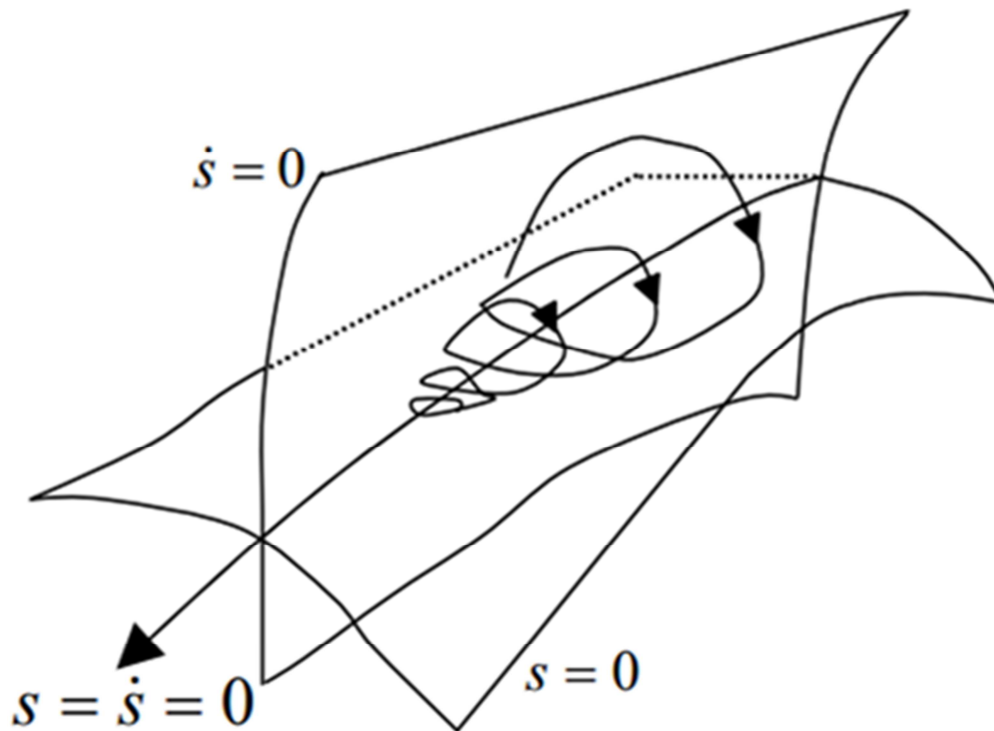


Figure 3.1 mode glissant d'ordre deux.

3.6 Propriété de convergence en temps fini

L'objectif d'une loi de commande par mode glissant du deuxième ordre est d'amener s et sa dérivée \dot{s} à zéro dans un temps fini, en utilisant la commande $u(t)$.

Afin d'atteindre ce but, les hypothèses suivantes sont considérées :

1. La commande du système est une fonction bornée et discontinue, tel que :

$$U = \{u: |u| \leq U_M\} \quad (3.7)$$

Où : U_M est une constante réelle, et la solution du système est définie sur la variable glissante de deuxième ordre ($s = \dot{s} = 0$).

2. Il existe $u_1 \in (0, 1)$ telle que pour toute fonction continue u avec $|u| > u_1$, il existe t_1 tel que $u > 0$ pour tout $t > t_1$.

Ainsi, la commande s s'exprime par :

$$u = -u_M \text{sign}[\dot{s}(t_0)] \quad (3.8)$$

Où : t_0 est l'instant initial, assure la convergence en temps fini sur $s = 0$.

Cette condition permet d'établir que, partant de n'importe quel point de l'espace d'état, il est possible de définir une commande amenant la fonction contrainte dans la région de linéarité.

3. Il existe des constantes positives s_0 , Γ_m et Γ_M , telles que dans un voisinage $|s(t, x)| < s_0$,

$$0 < \Gamma_m \leq \frac{\partial}{\partial u} \dot{s}(t, x, u) \leq \Gamma_M \quad \forall u \in U, \quad x \in X \quad (3.9)$$

Le terme $\frac{\partial \dot{s}}{\partial u}$ doit être différent de zéro pour que la commande équivalente existe en régime glissant.

4. Il existe une constante positive Φ telle que dans la région $|s| < s_0$, l'inégalité suivante est vérifiée $\forall t, x \in X, u \in U$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \dot{s}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial u} \dot{s}(t, x, u) f(t, x, u) \right| \leq \Phi \quad (3.10)$$

Les conditions 3 et 4 impliquent que la dérivée seconde de s est uniformément bornée dans certains domaines, pour l'entrée considérée [24].

3.7 Quelques exemples de mode glissant de second ordre

Il existe plusieurs techniques spécialisées d'algorithmes engendrant la convergence de s et \dot{s} vers zéro, tel que : Twisting , Super-Twisting et Sous-optimal.

3.7.1 Algorithme de Twisting

L'algorithme de Twisting a été le premier contrôleur d'ordre supérieur. Son principe de fonctionnement est basé sur la commutation de son amplitude entre deux valeurs α_M et α_m .

La trajectoire du système dans le plan de phase tourne autour de l'origine, en s'en rapprochant d'une forme spirale. Son expression pour un système de degré relatif 2 est donnée comme suit :

$$u = \begin{cases} -\alpha_m \text{sign}(s_1) & \text{si } s_1 s_2 < 0 \\ -\alpha_M \text{sign}(s_1) & \text{si } s_1 s_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Où : $s_2 = \dot{s}_1$

s_1 est la surface de glissement.

La figure (3.2) nous montre la convergence en temps fini de l'algorithme de Twisting.

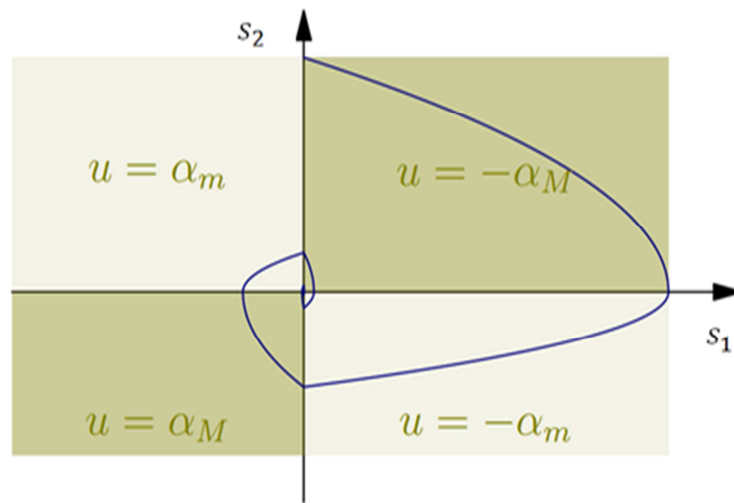


Figure 3.2 algorithme de Twisting.

Avec α_m et α_M vérifiant :

$$\alpha_M > 4 \frac{\Gamma_m}{s_{Mmax}}$$

$$\alpha_m > \frac{C}{\Gamma_m}$$

$$\gamma_m \alpha_M - C > \Gamma_M \alpha_m + C$$

On peut adapter cet algorithme pour commander un système de degré relatif 1 en augmentant le système d'un intégrateur, en contrôlant \dot{u} au lieu de u directement. L'intérêt est d'atténuer le chattering en rendant la commande continue [23].

3.7.2 Algorithme de super-Twisting

Cet algorithme a été développé pour l'asservissement de systèmes à degré relatif égal à 1 par rapport à la surface de glissement. Cette loi de commande a été proposée par Emelyanov en 1990.

Elle a été étudiée par Levant. Le Super-Twisting n'utilise pas d'informations sur s_1 ceci peut être vu comme un avantage puisque on réduit le nombre de capteurs et on aura pas besoin d'un temps ainsi long pour calculer la loi de commande qui est composé de deux parties, une partie discontinue u_2 et une partie continue u_1 .

$$u = u_1 + u_2 \quad (3.12)$$

$$u_1 = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -w \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

La partie discontinue donnée par cette équation :

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda_1 |s_0|^\rho \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |s_1| > s_0 \\ -\lambda_1 |s_0|^\rho \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |s_1| \leq s_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Les conditions de convergence en temps fini sont :

$$w > \frac{\emptyset}{\Gamma_m}$$

$$\lambda_1^2 \geq \frac{4\emptyset \Gamma_M(w + \emptyset)}{\Gamma_m^2 \Gamma_M(w + \emptyset)}$$

$$0 < \rho \leq 0.5$$

Cet algorithme s'applique à des systèmes de degré relatif 1, afin de réduire le phénomène de réticence. L'algorithme de Super Twisting présente une bonne robustesse. Cette loi de commande est continue, elle ne requiert aucune information sur la dérivée de s_1 . La convergence de cet algorithme est régie par des rotations autour de l'origine du diagramme de phase, comme le montre la figure (3.3) [24].

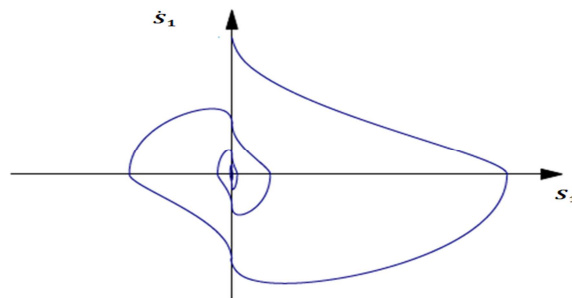


Figure 3.3 : algorithme de Super-Twisting.

3.7.3 Algorithme de sous-optimale

Cette loi de commande commence par une phase d'initialisation dont le but est d'arrêter le système, en imposant $\dot{s}_1 = 0$.

Appelons : t_M l'instant où $\dot{s}_1 = 0$ et étudions le cas $s_1(t_M) > 0$.

Si le système était un double intégrateur pur, la séquence de commande à partir t_M serait

$u = -u_M$ puis $u = u_M$ à la moitié du temps de convergence.

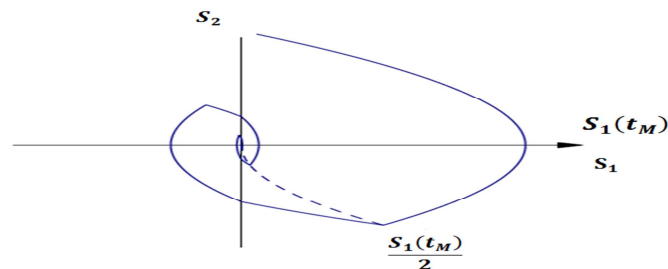


Figure 3.4 : algorithme sous-optimale avec perturbation.

Ce qui correspond à un point de commutation quand la sortie a mis chemin de 0, Soit $s_1(t_M) / 2$. Cette trajectoire théorique est indiquée en pointillés dans la figure (3.4). Mais il faut également prendre en compte la perturbation. L'algorithme diminue l'amplitude de la commande pendant la 2^{ème} phase, pour être sûr qu'au moment t_{M2} où l'état atteint une nouvelle fois l'axe des abscisses, $|s_1(t_{M2})| < |s_1(t_M)|$. $s_1(t_{M2})$, peut cependant être négatif, ce qui conduit le système à tourner autour de l'origine [24]. La loi de commande est représentée comme suit :

$$u(t) = \lambda(t) \text{sign} \left(|s_1(t)| - \frac{s_1(t_M)}{2} \right) \tag{3.15}$$

$$\text{Avec : } \lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s_1(t)| \geq \left| \frac{s_1(t_M)}{2} \right| \\ \lambda^* & \text{si } |s_1(t)| < \left| \frac{s_1(t_M)}{2} \right| \end{cases} \tag{3.16}$$

t_M est le dernier moment où l'état a atteint l'abscisse $s_2 = 0$.

Les conditions sur le gain λ^* pour atteindre une convergence en temps fini sont :

$$\lambda^* \in]0, 1] \cap \left] 0, \frac{3\Gamma_m}{\Gamma_M} \right[$$

$$u_M > \max \left(\frac{c}{\lambda^* \Gamma_m}, \frac{4c}{3\Gamma_m - \lambda^* \Gamma_M} \right)$$

La figure (3.5) Montre la convergence en temps fini de l'algorithme sous-optimal.

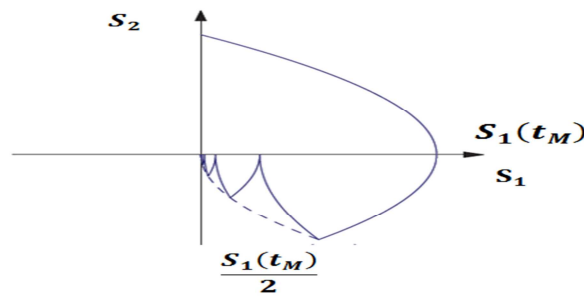


Figure 3.5 : algorithme de sous- optimal sans perturbations.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre ,après avoir présenté la commande par mode glissant d'ordre supérieur et ses deux régimes (idéal et réel), nous avons considéré la commande par mode glissant d'ordre deux avec ses propriétés de convergence en temps fini ,en identifiant quelques exemples tels que l'algorithme de Twisting , super Twisting et l'algorithme de sous- optimal. L'intérêt majeur de ces approches se situe dans la simplicité de mise en œuvre de la loi de commande en éliminant le phénomène de réticence tout en gardant la robustesse. Notre choix s'est porté sur l'algorithme de Super Twisting pour contrôler notre système pendulaire, il sera développé dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Applications et résultats de simulation

4.1 Introduction

La commande par mode glissant a connu un essor à la fin des années soixante-dix lorsque « Utkin » introduit la théorie des modes glissants. Le principe de cette technique est de contraindre le système à atteindre et ensuite à rester sur une surface dite de glissement. Le comportement dynamique résultant est appelé régime glissant. Une telle technique permet d'un côté, la réduction de l'ordre du système et de l'autre, l'insensibilité aux variations paramétriques et aux perturbations externes. Vu l'importance apportée à ce type de commande, plusieurs travaux ont été présentés dans la littérature pour la commande des systèmes non linéaires.

Des essais expérimentaux ont montré que l'inconvénient majeur de la commande par mode glissant est le phénomène de chattering qui conduit à l'instabilité du système et à la destruction des actionneurs.

Dans ce chapitre, nous présentons une solution pour remédier au problème de chattering, tout en gardant ses avantages. Cette solution est la commande par mode glissant du second ordre, qui est l'algorithme de super twisting. Cette approche est appliquée sur un pendule inversé, qui est un système non linéaire, incertain et instable.

4.2 Commande par mode glissant d'ordre un

Considérons le modèle dynamique du pendule inversé décrit par l'équation suivante :

$$\begin{cases} (m + M)\ddot{x} + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = u \\ \cos(\theta)\ddot{x} + l\ddot{\theta} - g\sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Le vecteur d'état du système pendule inversé-chariot est donné par :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T.$$

Où $x_1 = x$ représente la position du chariot, $x_3 = \theta$ est l'angle du pendule,

x_2 : La vitesse du chariot.

x_4 : La vitesse angulaire du pendule.

La surface de glissement s'écrit généralement en fonction de l'écart de la sortie par rapport à sa valeur désirée. L'objectif de la commande est d'assurer la poursuite d'un signal de référence tel que l'écart e tend vers zéro.

Pour définir la surface de glissement, nous avons choisi la forme de J.J. Slotine :

$$s(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e \tag{4.2}$$

Avec : e représente la différence entre la variable mesurée (réelle) x et la valeur désirée x_d .

Elle est donnée par :

$$e = x - x_d \tag{4.3}$$

r : désigne le degré relatif du système par rapport à la surface de glissement.

λ : Constante positive.

La commande par régime glissant u est composée par deux termes u_{eq} et u_{glis} :

$$u = u_{eq} + u_{glis} \tag{4.4}$$

L'existence du régime glissant nous conduit à établir :

$$\frac{ds(x, t)}{dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^T \cdot [f(x, t) + g(x, t) \cdot u_{eq}] + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \tag{4.5}$$

Où u_{eq} est la commande équivalente donnée par :

$$u_{eq}(x, t) = - \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^T \cdot g(x, t) \right]^{-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^T \cdot f(x, t) + \frac{\partial s}{\partial t} \right\} \tag{4.6}$$

La commande équivalente est bien définie si et seulement si :

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \neq 0$$

C'est la condition de transversalité qui constitue une condition nécessaire pour l'existence d'un régime glissant. Elle signifie que le champ de vecteur $g(x,t)$ ne doit pas être tangent à la surface de glissement s .

La commande discontinue est définie par :

$$u_{glis} = -k \text{sig}(s) \tag{4.7}$$

Où k est une constante positive.

Le pendule inversé est un système sous-actionné, c.à.d. qu'il a une seule commande pour contrôler deux variables, la position du chariot et l'angle de la tige.

Le vecteur d'état du système pendule inversé-chariot est donné par :

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

Où $x_1 = x$ représente le déplacement horizontal du chariot, $x_3 = \theta$ est l'angle du pendule.

x_2 : La vitesse du chariot.

x_4 : La vitesse angulaire du pendule.

Pour calculer la commande par mode glissant d'ordre un, nous définissons la surface de glissement de la manière suivante:

$$s = \dot{e} + \lambda e = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 + \lambda_1 e_1 \\ \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Avec : $e_1 = x - x_d$ et $e_2 = \theta - \theta_d$

$$\dot{e}_1 = \dot{x} - \dot{x}_d \text{ et } \dot{e}_2 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d$$

x_d est la position désirée du chariot et θ_d est le mouvement angulaire désiré du pendule.

λ_1 et λ_2 sont des constantes positives.

Le vecteur de la commande par mode glissant appliquée sur le pendule inversé possède deux composantes u_1 et u_2 , et comme celui-ci est soumis uniquement à une seule entrée de commande qui contrôle simultanément le déplacement horizontal du chariot par rapport au centre de rail de guidage et le mouvement angulaire de la tige, nous sommes amenées à prendre la commande résultante suivante :

$$u = \delta_1 u_2 - \delta_2 u_1 \tag{4.9}$$

Où δ_1 et δ_2 sont des constantes positives.

4.2.1 Schéma de la commande

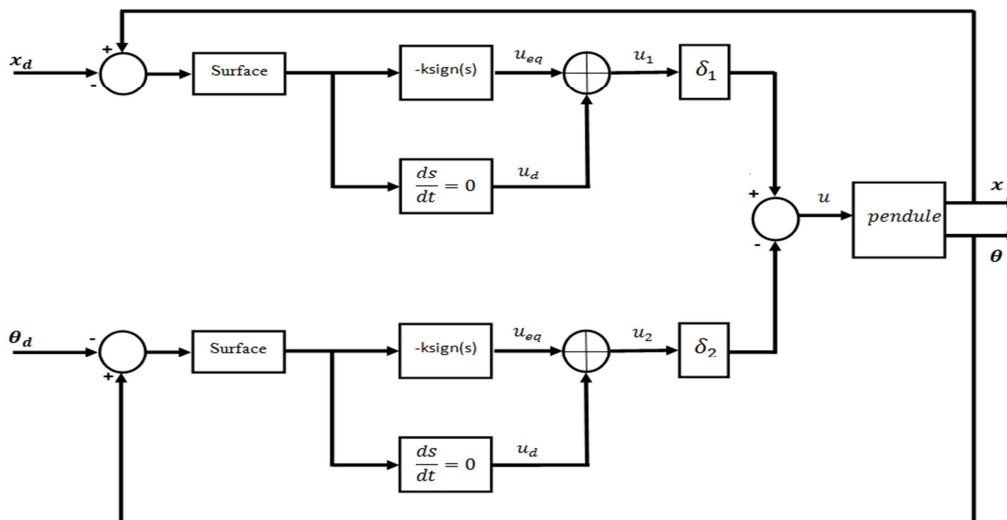


Figure4.1 : schéma de commande

4.2.2 Simulation et interprétation

Afin de montrer les performances de la commande par mode glissant simple appliquée sur un pendule inversé et d'illustrer son inconvénient, nous avons effectué des tests par simulation sur Matlab.

Nous avons pris les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 0.1 \text{ met } x_3(0) = 5.73^\circ$$

Nous avons appliqué une variation paramétrique sur la matrice d'inertie en la multipliant par 100.

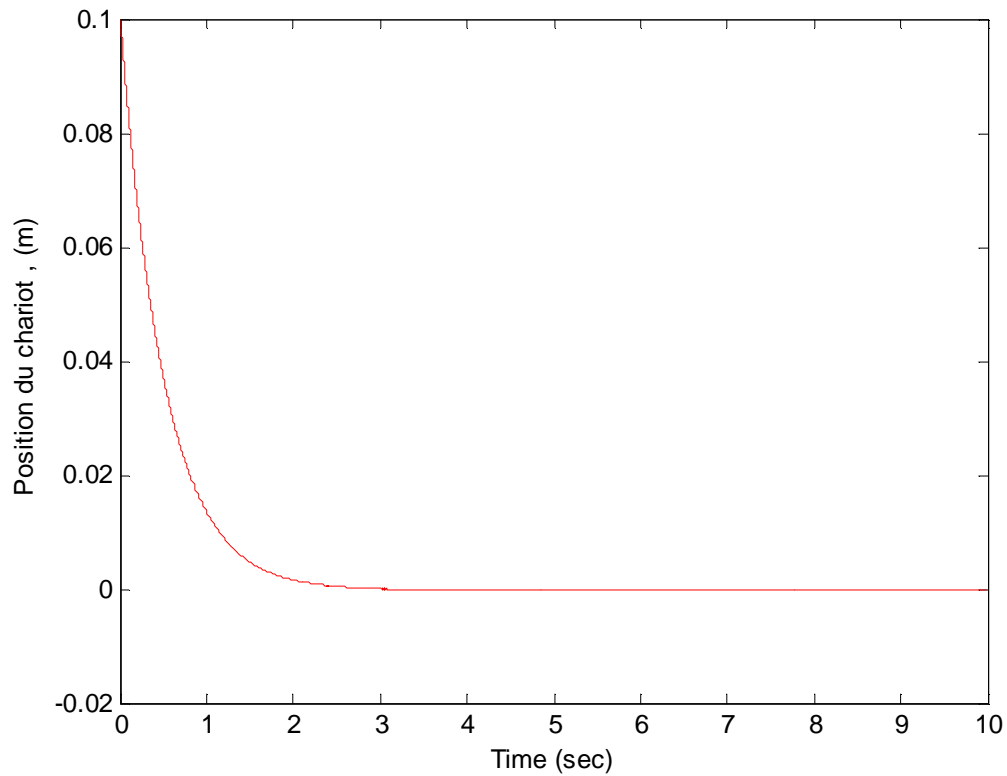


Figure 4.2: Position de chariot ($x_1(0) = 0.1 \text{ m}$ et $x_3(0) = 0.1 \text{ rad}$)

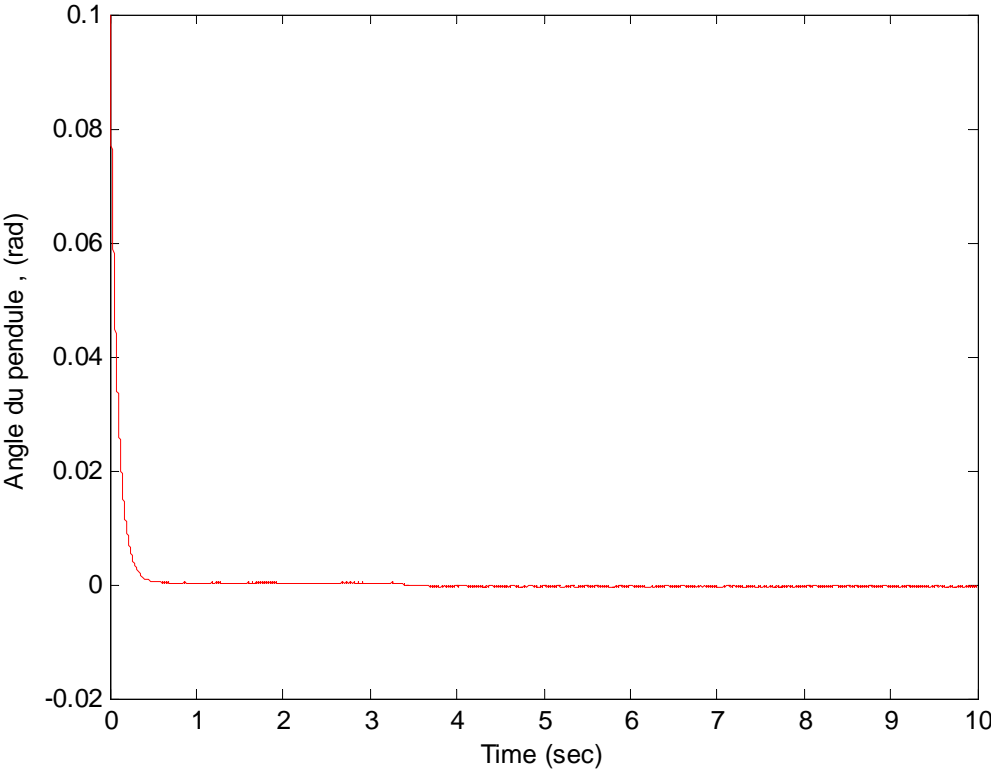


Figure 4.3: L'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

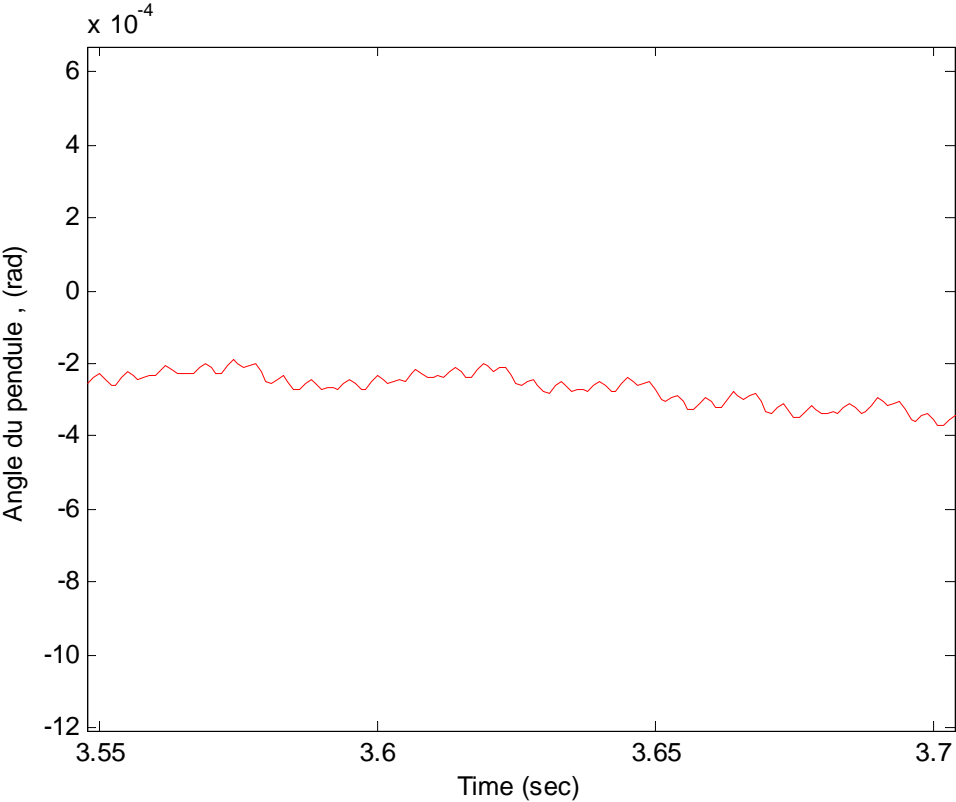


Figure 4.4: Zoom sur l'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

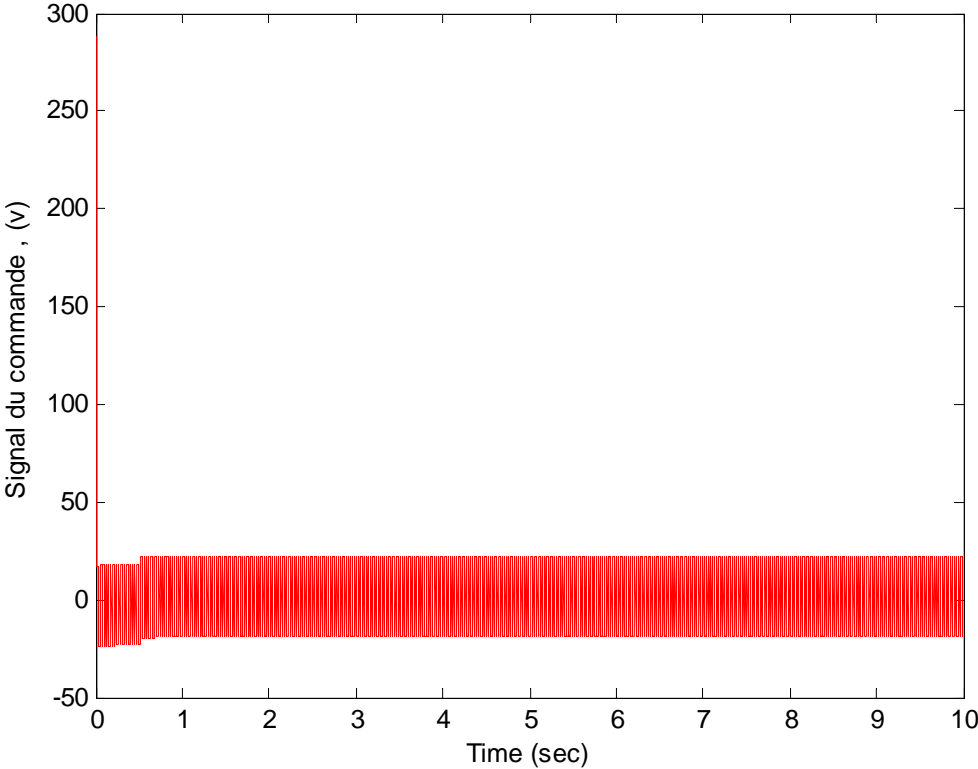


Figure 4.5 : Signal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

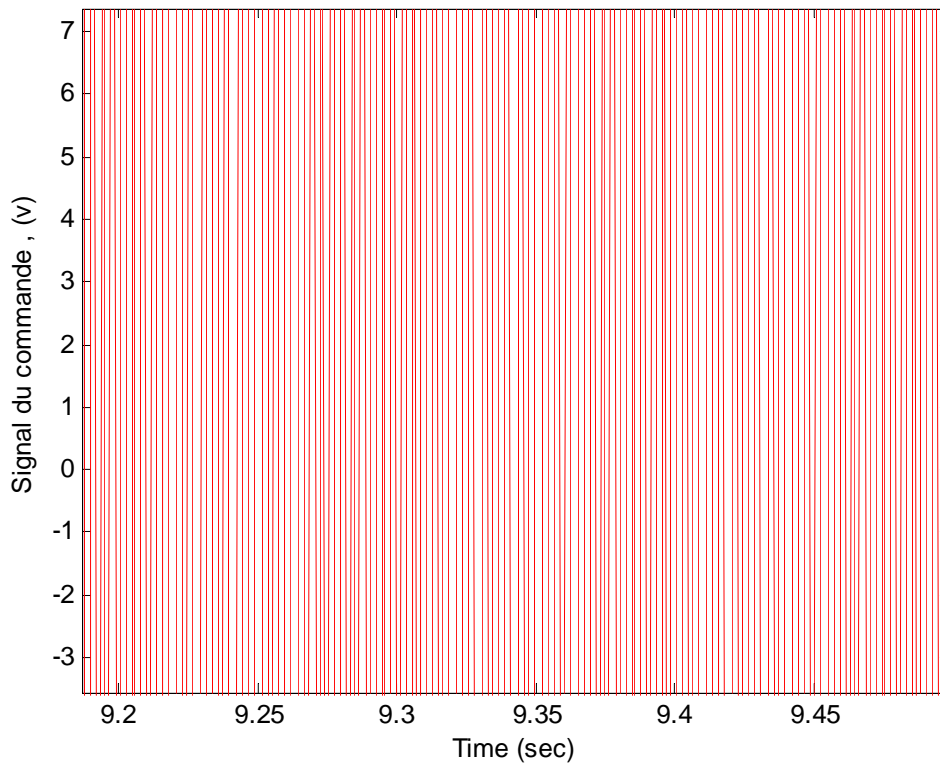


Figure 4.6 : Zoom de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$) Les résultats

Les figures ci-dessus présentent les résultats de simulation d'une loi de commande glissante classique appliquée sur un pendule inversé.

D'après ces résultats nous remarquons une présence du phénomène de broutement dans toutes les diagrammes. La figure (4.2) illustre la position du chariot qui rejoint l'origine en un temps de réponse de 1.5 s avec la présence de broutement. La figure (4.4) montre l'angle de pendule qui converge vers zéro au bout d'un temps de réponse de 0.5 s, le signal est plein de chattering. Et enfin, la figure (4.5) représente le signal de commande qui se caractérise par des commutations à haute fréquence (chattering), dont la cause est la présence de terme discontinue.

La figure (4.6) montre le zoom du signal de commande aux conditions données.

Une solution possible pour réduire ces commutations consiste à proposer l'algorithme de super-Twisting, qui une des techniques de la commande par mode glissant de second ordre.

4.3 Application de l'algorithme de super twisting

Pour réduire, voire supprimer le phénomène de réticence tout en conservant les propriétés principales du mode glissant d'ordre simple, tels que la convergence en temps fini et le rejet d'une certaine classe de perturbations, nous avons opté pour la commande par mode glissant de second ordre, particulièrement l'algorithme de super twisting.

$$u = u_1 + u_2 \tag{4.10}$$

$$u_1 = \begin{cases} -u & \text{si } |u| > 1 \\ -w \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |u| \leq 1 \end{cases} \tag{4.11}$$

Le deuxième terme de la commande est donné par cette équation :

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda_1 |s_0|^\rho \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |s_1| > s_0 \\ -\lambda_1 |s_0|^\rho \operatorname{sign}(s_1) & \text{si } |s_1| \leq s_0 \end{cases} \tag{4.12}$$

Les conditions de convergence en temps fini sont :

$$w > \frac{\varnothing}{\Gamma_m}$$

$$\lambda_1^2 \geq \frac{4\varnothing \Gamma_M(w + \varnothing)}{\Gamma_m^2 \Gamma_M(w + \varnothing)}$$

$$0 < \rho \leq 0.5$$

4.3.1 Schéma de la commande :

Le schéma bloc de la commande est donné par la figure suivante :

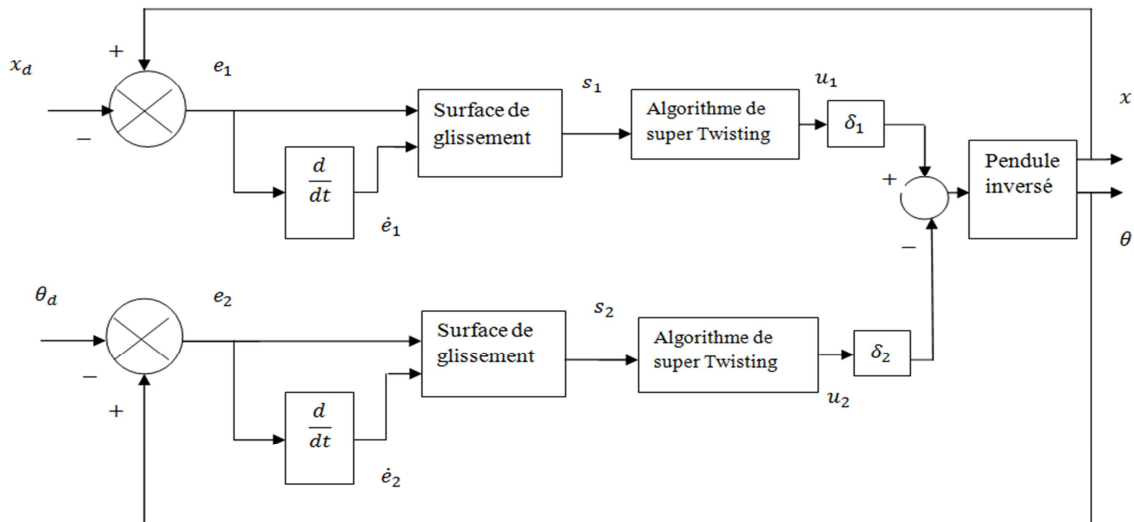


Figure 4.7 : Schéma de commande.

4.3.2 Simulations et interprétation

Dans l'objectif de mettre en évidence l'efficacité de l'algorithme de super twisting pour la commande d'un pendule inversé, nous avons considéré les mêmes conditions initiales et la même perturbation que précédemment.

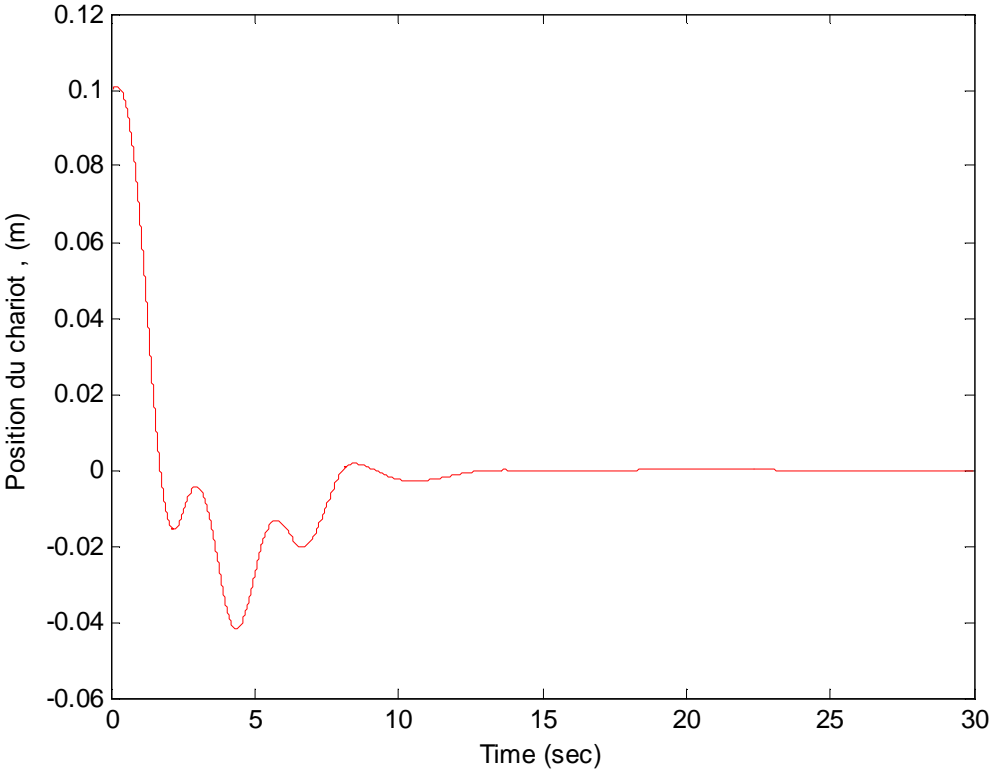


Figure 4.8 : Position du chariot ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

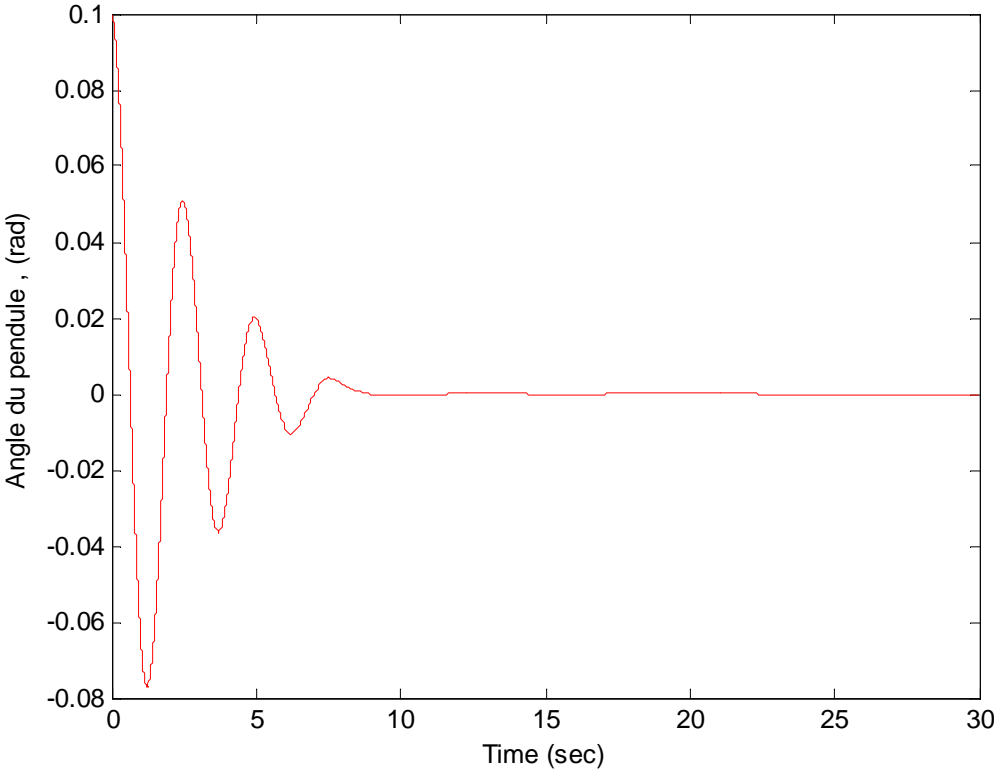


Figure 4.9 : L'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

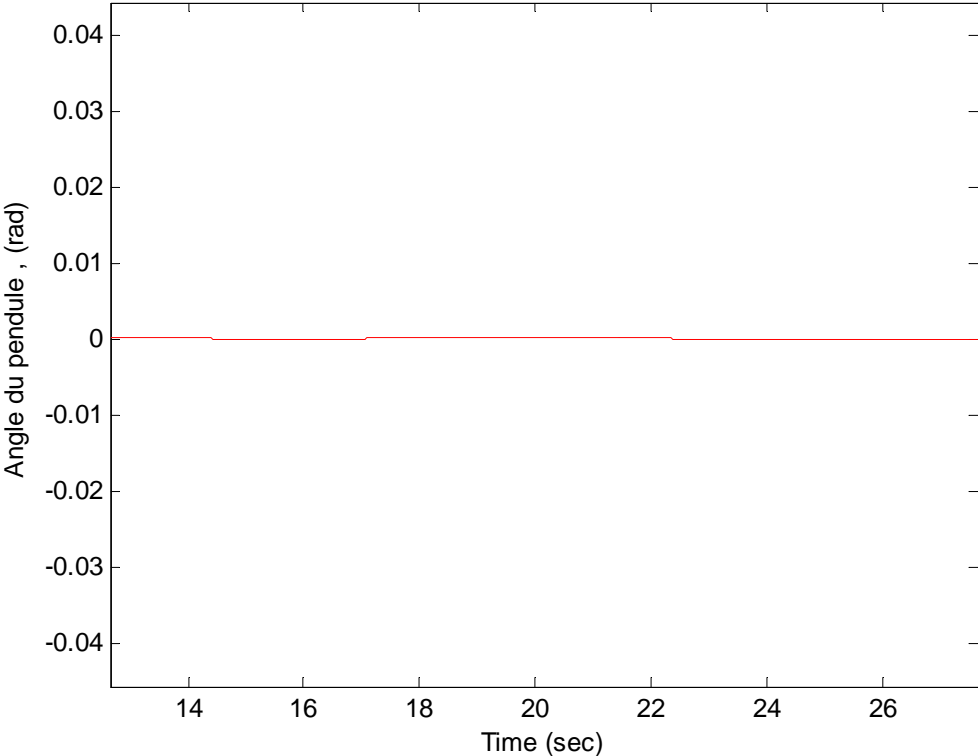


Figure 4.10 : zoom de l'angle du pendule ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

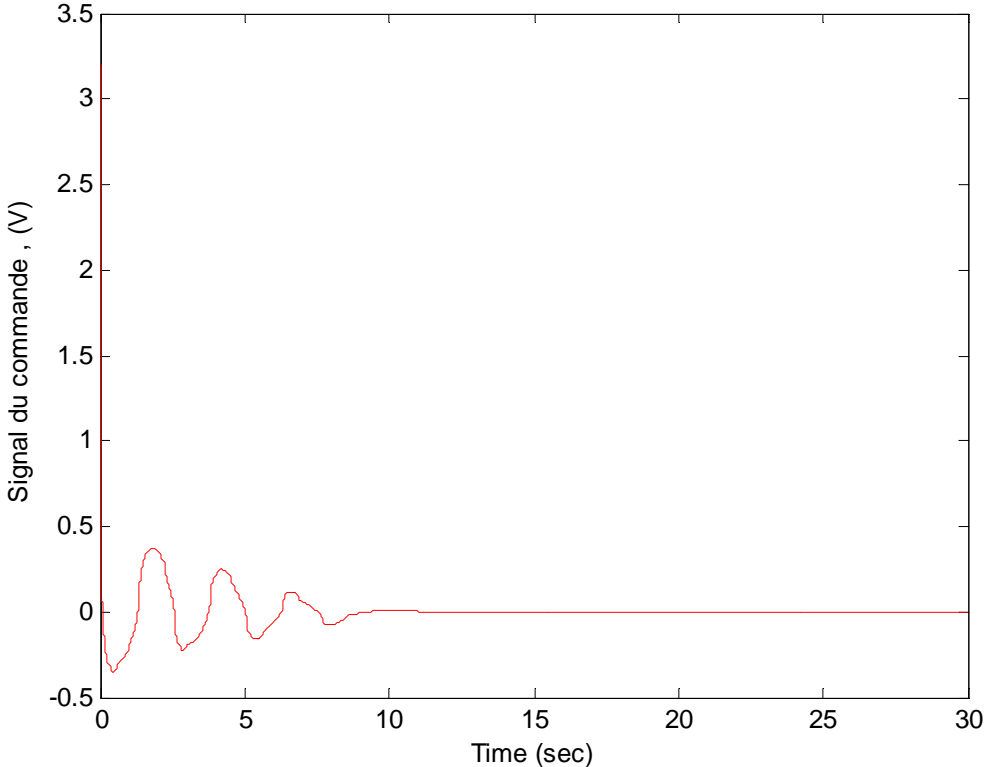


Figure 4.11 : Singal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

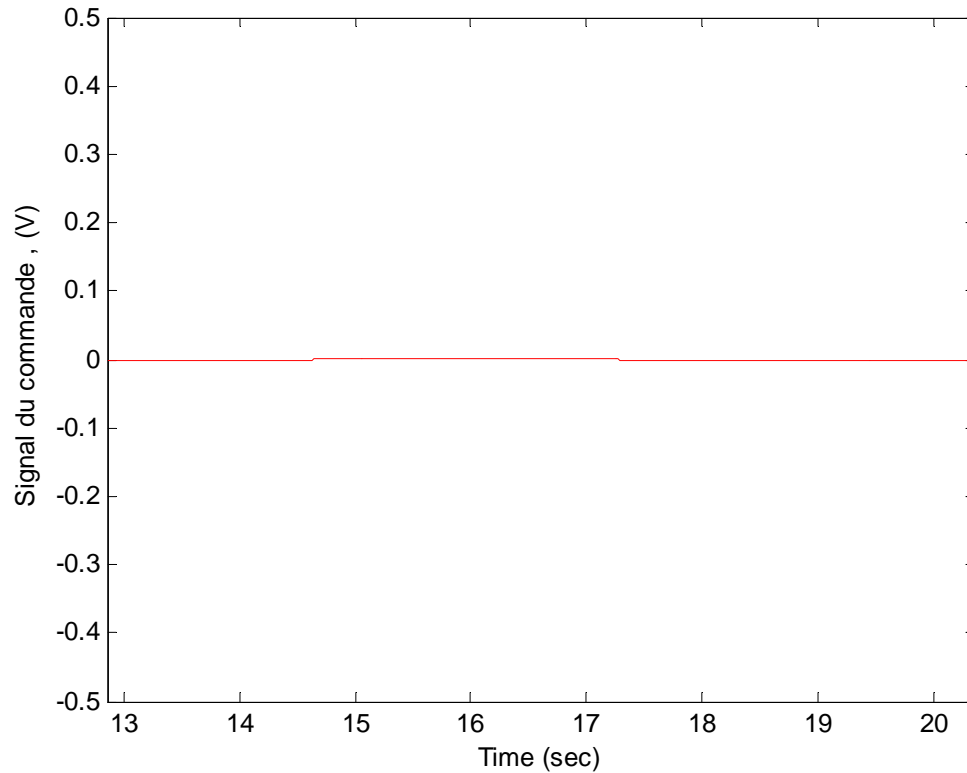


Figure 4.12 : Zoom de Singal de la commande ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$)

D'après les résultats de simulation, nous constatons :

Les résultats de simulation montrent une très bonne poursuite. La figure (4.8) nous indique la position du chariot avec un certain dépassement, en convergeant vers zéro au bout de 11 s. D'après la figure (4.9) qui représente le signal de l'angle du pendule aux conditions initiales ($x_1(0) = 0.1 m$ et $x_3(0) = 0.1 rad$), nous constatons que la réponse présente certaines oscillations au début, ce qui provoque un dépassement. Au bout de 8 s le signal commence a tendre vers zéro.

La figure(4.11) illustre le signal qui est moins énergétique. Il se stabilise en rejoignant l'origine en un temps de réponse de 8 s environ .

A travers ces résultats, nous constatons que le phénomène de réticence est complètement disparu, ce qui rend la commande lisse (continue), voire la figure(4.12).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de commande par mode glissant d'ordre un appliquée sur un pendule inversé. Le but est de montrer l'inconvénient de cette loi, qui est le phénomène de réticence (chattering).

Dans l'objectif de suivre les trajectoires de référence en temps fini, avec une grande précision, une bonne robustesse et une diminution de la réticence, nous avons introduit une autre stratégie de commande par mode glissant d'ordre deux qui est l'algorithme de super-Twisting. Cette loi supprime le chattering en rendant la commande continue (lisse) et le système plus stable.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif d'aborder les techniques de modes glissant employées en automatique, afin de répondre au mieux aux objectifs de performances et de robustesse du système. Les lois de commandes proposées sont appliquées à la stabilisation d'un pendule inversé, qui est un système instable SIMO et sous-actionné. Il possède des non-linéarités non négligeables. C'est un outil didactique souvent utilisé pour tester les caractéristiques de nouvelles lois de commande.

Dans le premier chapitre, nous sommes amenées d'abord à connaître le système et comprendre son fonctionnement. Nous avons élaboré le modèle dynamique nécessaire pour tester les lois de commandes par mode glissant d'ordre un et d'ordre deux, proposées dans notre travail.

Concernant le deuxième chapitre, nous nous sommes intéressées au principe de base de la loi de commande par mode glissant d'ordre un. Nous avons présenté les méthodes de synthèse classiques, ainsi que ses propriétés de convergence. Nous avons évoqué le problème majeur de cette commande qui est le phénomène de réticence (chattering). Certaines solutions ont été proposées pour remédier à cet inconvénient, comme la solution basée sur un observateur et celle basée sur le mode glissant d'ordre supérieur.

Dans le troisième chapitre, nous avons abordé la notion de commande par mode glissant d'ordre supérieur, qui est une solution efficace pour résoudre le problème de réticence, tout en conservant les propriétés de robustesse. Nous avons étudié quelques algorithmes de la commande par mode glissant de second ordre, comme l'algorithme de super Twisting, qui est utilisé dans notre application.

Après avoir présenté les notions fondamentales de la commande par mode glissant d'ordre un et d'ordre deux, nous avons appliqué ces deux techniques de commande sur un pendule inversé dans le quatrième chapitre. Tout d'abord, nous avons illustré le phénomène de chattering, qui est l'inconvénient majeur de la commande par mode glissant simple. Ensuite, nous avons introduit l'algorithme de super Twisting pour réduire, voire supprimer le problème de réticence. Nous avons effectué plusieurs tests par simulations pour mettre en évidence les performances et la robustesse de cet algorithme.

Conclusion générale

Les résultats de simulations obtenus montrent l'efficacité de cette technique de commande pour contrôler un pendule inversé.

Pour poursuivre ce travail, nous proposons d'appliquer la commande par mode glissant d'ordre arbitraire.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] : **SAHRAOUI Dallal**, Identification paramétrique d'un pendule inversé simple par un algorithme génétique, thèse master, Université Mohamed Khider Biskra 2014.
- [2] : **ZEGHLACHE Samir**, Commande non linéaire d'un appareil à vol vertical, thèse doctorat, université de Msila, septembre 2014.
- [3] : **O. Bethoux**, « commande sous détection de défaillance d'un convertisseur multicellulaire série », thèse de doctorat, école doctorale science et ingénieur, université de Cergy-Pontoise, 2005.
- [4] : **Ferhat LAHOUZI**, faculté de génie électrique et d'informatique département automatique, (mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : application à un pendule inversé), mémoire de magister 2011.
- [6] : **A.F. Fillipov**. Differential equations with discontinuous right-hand side.
- [7] : **V. I. Utkin**. Variable structure systems with sliding modes. IEEE, Trans.on Automatic Control, AC-22 :212-222, 1977.
- [8] : **S.V. Emelyanov**. Variable structure control système. Moscow Nauka, 1967.
- [9] : **Vincent BREGEAULT**. (quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants) École Centrale De Nantes 2010.
- [10] : **Tomàs SALGADO JIMENEZ**, (Contribution à la commande d'un robot sous-marin autonome de type torpille) Université Mont pellier II.
- [11] : **Mohammed Chakib SOSSE ALAOUI**, (Commande et Observateur par Modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur) Université Sidi Mohammed Ben Abdellah thèse juillet 2009.
- [12] : **Thierry FLOQUET**, (Contributions A La Commande Par Modes Glissants D'ordre Supérieur) Université des Sciences et Technologies de Lille 2000.
- [13] : **Cherrid, H**, (commande et observateur par mode glissant d'ordre 1et2 : application aux système robotisés). Thèse présenté à l'Université de Versailles Saint Quentin, 19 décembre 2011.

Bibliographie

- [14] :**Cherrid, H.** (Commande et Observateur par mode glissant d'ordre un et deux :Application aux systèmes robotisés).Thèse présentée à l'université de Versailles Saint Quentin,2011.
- [15] :**V. I. Utkin.** Sliding modes in control optimisation. Springer-Verlag, 1992.
- [16] :**V. I. Utkin.** Sliding mode and their application in variable structure systemsMir, Moscou, 1978.
- [17]: **U. Itkis.** Control systems of variable structure. J. Wiley: New York, 1976.
- [18]: **Abderrahmane KECHICH et Benyounes MAZARI,** (La commande par mode glissant : Application a la machine synchrone à aimants permanents (approche linéaire)),université de Bechar,2008.
- [19] : **Deghboudj Imen,** (Commande des systèmes non linéaire par mode glissant d'ordre supérieur, université Constantine, 2013.
- [20]: **G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai,** Chattering avoidance by second-order sliding mode control. IEEE Trans. On Auto. Cont, 1998.
- [21]: **L. Fridman and A. Levant,** Higher-Order Sliding Modes, in Sliding mode control in Engineering, W. Perruquetti and J.P. Barbot. Marcel Dekker 2002.
- [22]:**Khelifa BENMANSOUR,** réalisation d'un banc d'essai pour la commande et l'observation des convertisseur multicellulaire, université de Cergy Pontoise,2009.
- [24] :**Vincent BREGEAULT,** "Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants ", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France, 2010.
- [23]: **Tomàs SALGADO JIMENEZ,** Contribution μ a la commande d'un robot sous-marin autonome de type torpille, thèse de doctorat, université de Montpellier II science et techniques de LANGDUEDOC, 2004.