==

N°d'ordre: ....

République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LAROMAD

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

Brahimi amelia

Belkadi Djouher

Etude algorithmique de quelques problémes dans les graphes

Soutenue le Septembre 2022 devant le jury :

Mr.	Talem Djamel	UMMTO	Président du jury
Dr.	Kheffache Razika	UMMTO	Examinateur
Mr.	Aouane Mohouhand	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu, le Dieu, le tout puissant, le tout clément, de nous avoir ouvert la porte du savoir, et qui a récompensé nos efforts et nos prières, et qui nous a donné la force et le courage pour achever nos études et à élaborer ce modeste travail.
Nous remercions chaleureusement notre encadreur monsieur Aouane, qui nous a orienté et initié à la recherche, et qui nous a accompagné et conseillé tout au long de ce trajet, pour son aide consistante. Votre disponibilité, gentillesse et sympathie nous ont permis d'évoluer ce mémoire à terme.
Nos vifs remerciements vont également aux membres de jury : pour le temps qu'ils ont consacré pour examiner et évaluer ce modeste travail.
Nous adressons également notre sincère gratitude tous les professeurs, enseignant, tout citoyens de notre université UMMTO qui ont collaboré de pré ou de loin à notre formation dés le début de notre cycle d'étude.
Nous tenons également à exprimer chaleureusement notre vive reconnaissance à nos très chers parents qui nous ont toujours appuyés dans les moments difficiles, et pour leurs sacrifices, soutien, aides, encouragement.
Nous les distinguons également à nos adorables frères et sœurs pour leur gentillesse et disponibilité à tout moment.
Enfin, Nous remercions toute personne nous ayant soutenue durant notre parcours et ayant collaboré de prés ou de loin à réaliser ce mémoire

Tizi-Ouzou, le 15 janvier 2023.

Dédicaces

A mes très chers parents, source de vie, d'amour et d'affection, Vous avez toujours été à mes cotés pour me soutenir et m'encourager. Aucune dédicace ne saurait exprimer tout le respect et l'amour que nous vous portons, que Dieu leur procure bonne santé et longe vie.
Mes chers frère et sœurs, Je vous réserve la plus grande partie de ce travaille à vous. Très cher frère, qui m'a été le garant d'une existence paisible, chères sœurs qui m'ont été toujours sources d'espoir et de motivation, je ne vous remercie jamais assez.
A ma chère famille,
Qui m'a été une aide précieuse à savoir résoudre mes problèmes, et qui a toujours fait confiance en moi.
A ceux qui m'ont été toujours le bras droit et qui m'assurent l'ambiance joyeuse et l'atmosphère joviale pour me donner envie pour travailler, mes très chers amis.

Amelia...

Dédicaces

Je tiens c'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travaille :

A ma Mère pour son amour ses encouragement et ses sacrifices

A mon Père pour son soutien son affectation et la confiance qu'il m'a accordé

A mes proches ,mes Soeurs ,mon Frère et Nordiine

A tous les membres de ma famille

A tous mes amies et mes camarades de la promotion 2*éme année Master RO.*

Djouher. . .

Table des matières

Introduction générale

Là recherche opérationnelle peut être définie comme une discipline carrefour associant les mathématiques appliquées, l'économie et l'informatique et du génie industriel, elle a pour but d'orienter le chercheur vers le meilleur choix et d'aboutir à un meilleur résultat final possible dit un résultat optimal.
Elle sert à proposer des méthodes conceptuelles afin de pouvoir étudier , d'analyser, de résoudre des problèmes assez complexes et de mettre fin à des situations difficiles en choisissant les choix les plus efficaces qui permettent de gagner du temps en général et beaucoup d'autres paramètres, à savoir le problème à résoudre, en particulier, tel que l'argent, la matière, l'effort, le matériel ... ect , de sorte d'améliorer l'efficacité et de diminuer les coûts.
Ce domaine d'étude a un vaste intérêt dans divers secteurs en général, à titre d'exemple : dans le domaine du transport par l'organisation des lignes de circulation de véhicules , la planification des missions spatiales et temporelles, dans le domaine économiquepar l'optimisation des portefeuilles bancaires, dans le domaine medical par le sequence de l'ADN et aussi pour gérer les soins de santé dans les hôpitaux, dans le domaine de l'éducation par l'organisation des ramassages scolaires, et en astronomie dans la couverture satellite, des téléphones portables, comme il est utilisé quotidiennement dans l'organisation des produits recyclable ... etc.
La recherche opérationnelle , lors de sa résolution des problèmes complexes et l'analyse des situations et l'élaboration des meilleurs décisions, utilise plusieurs outils mathématiques, dont «les graphes» qu'on traite dans le premier chapitre de ce mémoire. Autrement dit, la théorie des graphes peut être définie comme étant la discipline mathématique et informatique qui sert à l'étude et l'élaboration des modèles abstraits de dessins de reseaux dits «Graphes». Un graphe G est défini par un couple de deux ensembles (V, E), où V est l'ensemble des sommets de G et E est l'ensemble des arrêtes de G, on écrit $G = (V, E)$. Le concept de graphe utilisé au cours de l'élaboration des algorithmes n'est donc pas le même que le graphe d'une fonction, il est par contre à peu prés equivalent à celui de la relation binaire. Un algorithme peut être vu comme étant un ensemble d'instructions composées d'opérations élémentaires manipulant les données du problème dites instances. La complexité algorithmique s'interesse à l'étude de la difficulté intrinsèque des problèmes dits problèmes algorithmiques elle sera abordée tout au long du deuxième chapitre. Elle vise à classer les problèmes en fonction de leurs difficultés à savoir le temps et l'espace mémoire (complexité temporelle et spaciale) qu'un algorithme nécessite pour résoudre un problème, on site à titre d'exemple des problèmes de classe P, NP, $NP - complet$ qu'on traitera largement au sein de ce mémoire.

Au cours du dernier chapitre, nous focalisons notre intérêt sur la domination, plus précisément le nombre domatique, à la classe des graphes 2- section des hydrographes des intervalles des posets, et aussi on traitera largement les divers opération qui peuvent être appliquées sur deux ou plusieurs posets, nous citerons la somme directe, la somme linéaire et le produit cartésien, en déterminant le nombre domatique du graphe $2 - section$ de l'hypergraphe associé pour le sous- poset résultant de l'union des niveaux consécutifs $N_1 \cup ... \cup N_u$ du produit cartésien de deux chaînes notés $C_{n1} * C_{n2}$ on lui associant une partition domatique en fonction de l, u, n_1, n_2, en donnant un intérêt sur son $NP - completude$.

Définition de base et notation 1

1.1 Introduction

La théorie des graphes est la discipline qui sert à résoudre des problèmes varies, c'est une méthode mathématiques et informatique qui sert à simplifier et à schématiser les obstacles ou des situations complexes sous formes d'un graphe qui peut prendre plusieurs aspectes : courbe, ligne,...ect. On dit souvent qu'un graphe vaut mieux qu'un long discourt, d'où l'intérêt de cette branche des mathématiques pour la comprehension et la résolution de plusieurs problèmes socio-industriels de la vie quotidienne.
Ces modelés sont constituée par la donner de deux ensembles $V \neq \emptyset$ dits ensembles des sommets qui appelée aussi noeuds et E dit ensemble d'arêtes aussi appelée ligne entre ces sommets ; ces arêtes son parfois non-symétriques ils ont dites des arecs .
Historiquement, cette théorie prends son origine lors de la satisfaction du savant *Euler* à sa curiosité lors d'une de ses promenade nocturnes.
Il a voulue tracer un itinéraire circulaire dans la ville de königsberg partant d'un point donné, il voulut visiter les sept ponts de cette ville une seule fois seulement, puis revenir à son point de départ.Nous présentons dans ce chapitre quelque définitions et concepts du langage de la théorie des graphes qu'on aura besoin tout au long de notre mémoire. Nous référons donc le lecteur aux références [1, 7, 6] pour plus de détaille.

1.2 Concepts généraux sur les graphes

1.2.1 Définitions générales

Un graphe G est défini par un couple $(V(G), E(G))$, formé de deux ensembles ; $V(G)$ est un ensemble non vide d'éléments, appelés **sommets** et $E(G)$ représente un ensemble de parties à deux éléments de $V(G)$ appelées **arêtes**.
On distingue deux types de graphes :

a- Graphe orienté :

Un graphe orienté est le couple $G(V, U)$, telle que V est l'ensemble des sommets du graphe et U est l'ensemble de ses arcs.
L'arc est une relation qui joint deux sommets, accompagnée d'une orientation : Si $e(x, y)$ est un arc de G, avec $x, y \in V$, la relation est orientée de x vers y .

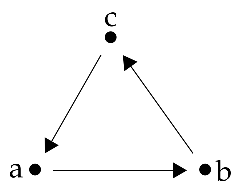


Figure1.1-Graphe orienté

b- Graphes non orienté :

Théoriquement un graphe non orienté $G(V, E)$ est un couple formé de V un ensemble de sommets et E un ensemble d'arête, chaque arête représente une paire de sommets.

Exemple :

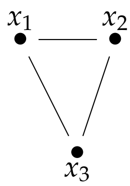


Figure1.2-Graphe non orienté

Si V est fini alors le graphe G est dit **fini**.
On appelle **ordre** d'un graphe G, le nombre de ses sommets, noté n.
S'il existe une arête ou arc qui relie deux sommets u et v de V dans G, ces derniers sont alors dites **adjacents** ou **voisins**, et noté uv, tel que u, v représentent les extrémités de cette arête (resp : arc) uv, qui est soit incidente à u ou à v.
Une **boucle** est une arête (reps : arc) dont les extrémités sont confondues.
Un graphe est dit **simple** s'il n'admet pas plus d'une arêtes entre chaque couple de sommets et s'il est sans boucle.
Par la suite on s'intéresse qu'au graphes simples est finis.

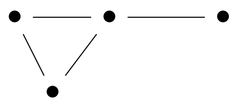


Figure1.3-Graphe simple

Voisinage

Le voisinage du sommet v c'est l'ensemble de tous les sommets qui lui sont adjacents, et il est noté $N_G(v)$ ou brièvement $N(v)$.
Voisinage fermé aussi appelé voisinage close de v est donnée par la relation $N_G[v] = N_G(v) \cup v$.

Degré

Le degré de v est le nombre d'arêtes qui lui sont incidents, si G est simple le degré d'un sommet est le nombre des sommets qui lui sont adjacents, il est noté $d_G(v)$ chaque graphe est caractériser par un degré maximum $\Delta(G)$ et un

degré minimum $\sigma(G)$.
Quand le sommet est de degré 0, il est di sommet **isolé** .
Quand le sommet est de degré 1, il est dit sommet **pendant**.
Quand le sommet est de degré $n > 1$, il est dit sommet **interne**.

Chaîne et Cycle

Chaîne :

Considérant un graphe G, orienté ou non, on appelle chaîne de longueur $n-1$, toute sequence successive d'arêtes sommets notée $P_n = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, ...e_{n-1,v_n},$ autrement dit, elle corresponds à une succession de sommets $v_0....v_p$ dont les deux sommets qui se succèdent sont adjacents, v_0, v_n sont dits les extrémités de la chaîne.
Le nombre des arêtes d'une chaîne est sa taille ou longueur et de ses sommets est son ordre.
Dans une chaîne, lorsque aucune arête respectivement sommet ne se répète, elle est dite respectivement **simple** ou **élémentaire** .
Une **corde** est une arête qui relie deux sommets non consécutifs d'une chaîne.

Cycle

Un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues, sa longueur est égale au nombre de ses sommets.
On distingue deux type de cycles et donc aussi de graphes selon le cycle porté :
— *Cycle Hamiltonian* : S'il passe par tous les sommets de G une et une seule fois. Si G admet un tel cycle, il est dit hamiltonien.
— *Cycle Élémentaire* S'il passe par toutes les arêtes de G une et une seule fois. Si G admet un tel cycle, il est dit eulerien.

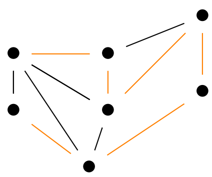
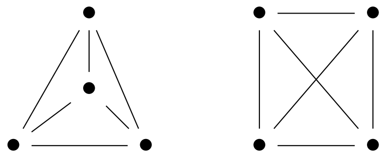


Figure1.4-Cycle Hamiltonien

1.2.2 Isomorphisms des graphes

En mathématique, un isomorphisme de graphe est une bijection f entre les sommets de deux graphes G_1 et G_2 tel que : $\forall x, y \in V(G_1)$ on a : $xy \in E(G_1) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(G_2)$, cela veut dire qu'il suffit de déplacer les sommets de G_1 par exemple pour obtenir la copie identique de G_2.

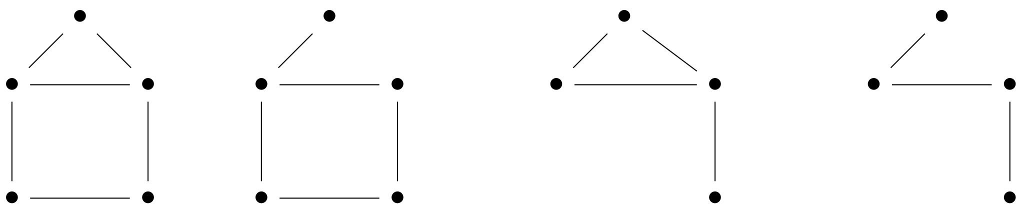


G_1 G_2

Figure1.5-Les graphes G_1 et G_2 sont isomorphes

1.2.3 Les types de sous graphes

Soit $G = (V(G), E(G))$. On dit que $H(V(H), E(H))$ est un sous-graphe de G si $E(H) \subset E(G)$ et $V(H) \subset V(G)$.
On dit que H est un graphe partiel si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subset E(G)$ c'est à dire si H est obtenu par la suppression des arêtes.
H est un sous graphes induit de G si H est obtenu par la suppression des sommets.
H est un sous-graphe partiel si H est obtenu par la suppression des sommets et des arêtes.



G graphe partiel sous-graphe induit sous-graphe partiel

1.2.4 Quelques classes particulières des graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple :

Graphe complet :

Un graphe d'ordre n est dit complet lorsque tous les sommets sont deux à deux adjacents, autrement dit, $\forall x, y \in V, xy \in E$. Un tel graphe est noté$K_n$.

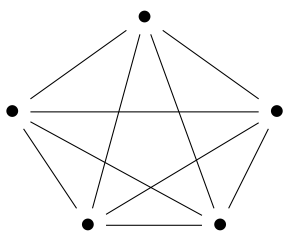


Figure1.8-K_5

Graphe complémentaire :

On dit q'un graphe $\overline{G}$ est complémentaire du graphe G, s'ils ont le même ensemble de sommets V, et si deux sommets u, v sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement si ils ne le sont pas dans G.

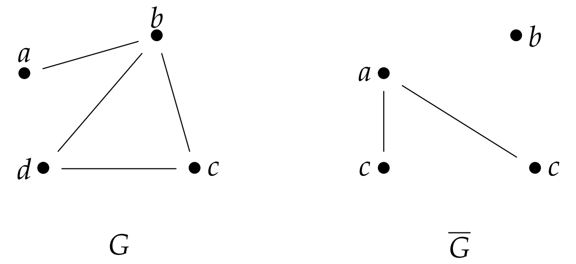


Figure1.8-$\overline{G}$ est le complémentaire de G

Graphe bipartie :

Un graphe $G = (V, E)$ est dit bipartie s'il existe une partition de l'ensemble des sommets V en deux sous ensembles $V_1 \neq \phi$ et $V_2 \neq \phi$, et toute arête de G relie exactement un sommet de V_1 à un sommet de V_2.
Si $\forall x \in V_1, \forall y \in V_2; \exists e \in E$ qui relie x et y alors le graphe et dit biparti complet et il est noté $K_{|V_1|,|V_2|}$.

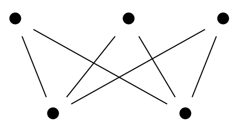


Figure1.9-Graphe bipartie $K_{3,2}$

Graphe régulier :

Un graphe k-régulier est un graphe dont tous les sommets sont de même degré, donc $\forall v \in V, d(v) = k$.
Un k-facteur d'un graphe G représente un graphe partiel noté k-régulier du graphe G.

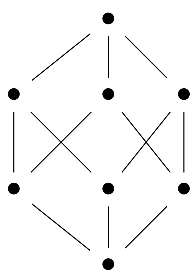


Figure1.10-Graphe 3 régulier

Graphe connexe :

Un graphe G est **connexe** s'il existe une chaîne dans G entre toute paire de sommets. Si G n'est pas connexe, il s'écrit comme l'union disjointe de graphes connexes,appelés **composante connexe de** G.

Arbre et foret :

Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle, composé de $n-1$ arêtes. Son nom rappelle son origine car sa forme évoque les ramifications d'un arbre. Il est d'une très grande importance dans divers domaines et applications.
Une **foret** est un graphe sans cycle.
Chaque graphe connexe G est composé à vrai dire, d'un sous graphe partiel sous forme d'un arbre qu'on pourra obtenir uniquement par la suppression des arêtes une par une sans décomposer le graphe G. L'arbre obtenu est alors appelé arbre couvrant.

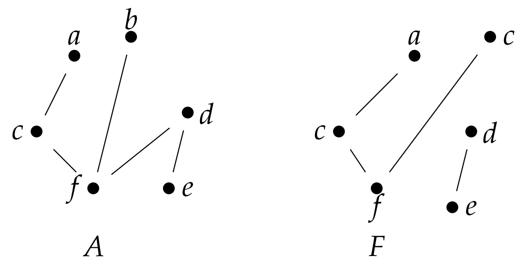


Figure1.11-(A) arbre d'ordre 6 T_6, (F) foret

1.3 Opérations sur les graphes :

Plusieurs operations peuvent être établies sur deux ou plusieurs graphes, qui permet de construire de nouveaux graphes. On distingue divers types d'opération qui sont applicables sur les graphes, dans notre étude, on prends en considération que deux de ces types d'opérations :

1.3.1 Union disjointe :

Elle s'effectue sur des graphes pour former un graphe plus grand et il est construit en faisant la somme des ensembles des graphes initiaux, tel que les sommets et arêtes du graphe obtenu correspondent respectivement aux sommes des sommets et des arêtes des graphes pris en premier lieu.
Ce type d'opération est aussi appelé somme de graphes, et il peut être schématisé soit par un signe « plus » soit par un signe « plus entouré » .
Autrement dit, l'union disjointe de n graphes, $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), ..., G_n(V_n, E_n)$ est le graphe noté $G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$ tel que :

- $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$
- $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$

1.3.2 Produit cartésien :

Soient $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2)$ deux graphes, on définit, le produit cartésien de G_1 et G_2 noté par $G_1 \square G_2$ comme étant le graphe $G(V, E)$ tel que :

1. $V = V_1 \times V_2 = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$
2. (u, v) est adjacent à (u', v') dans G si et seulement si $u = u'$ et $vv' \in E_2$ ou $v = v'$ et $uu' \in E_1$

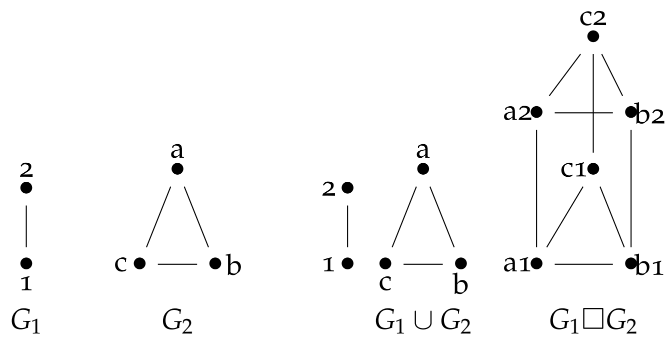


Figure1.12-L'union disjonte et le produit cartésien de G_1 et G_2

1.3.3 Representation d'un graphe en machine :

Si G est un graphe, il existe plusieurs façons de le représenter en machine, on cite ici la matrice d'adjacence, et d'incidence. La matrice d'adjacence d'un graphe G est une matrice carrée $n \times n$ matrice d'éléments $a_{ij} = 1$ si le sommet i est adjacent à j et 0 sinon, si G est orienté $a_{ij} = 1$ s'il existe un arc de i vers j et 0 sinon, il est evident qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique, ce qui n'est pas le cas pour un graphe orienté.
La matrice d'incidence d'un graphe orienté G est une $n \times m$ matrice d'éléments $a_{ij} = 1$ si l'initial de l'arc j est i, -1 si la terminale de j est i et 0 sinon. Si le graphe est non orienté $a_{ij} = 1$ si i est une extrémité de l'arête j et 0 sinon.

1.4 Stable et couplage :

1.4.1 stable :

Un stable dans un graphe G est un sous graphe de G sans arêtes, autrement dit, c'est un sous ensemble S de sommets deux à deux non adjacents :
$\forall x, y \in S; x, y \notin E$
On appelle $\alpha(G)$ le nombre de stabilité ou d'indépendance qui est le nombre de sommets du plus grand stable de G. Autrement dit, $\alpha(G) = \max\{|S|, S \text{ stalbe de } G\}$.

1.4.2 Couplage :

C'est un sous ensemble d'arêtes d'un graphe qui n'ont pas de sommets en commun, veut dire non adjacents deux à deux.

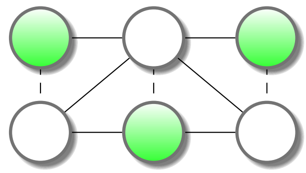


Figure1.13-Les sommets en vert forme un stable et les arétes en blanc forme un couplage $\alpha(G) = 3$

1.5 Quelque concepts sur les hypergraphes

1.5.1 Hypergraphe et hypergraphe duale

En 1960, *Claude Berge*[1] a généralisée le concept de graphes en vu d'aborder de nouveaux problèmes d'optimisation combinatoire. L'idée était d'étudier une famille d'ensembles avec la même optique, en l'appelant **hypergraphe**. Soit $X = x_1...x_n$ un ensemble fini d'éléments. Un hypergraphe sur X est une famille $H = (E_1...E_m)$ de parties non vide de X dont l'union forme X.
Les éléments de X sont les sommets et les ensembles $E_1...E_m$ sont les arêtes de l'hypergraphe .
Un hypergraphe simple sur X est un hypergraphe $H = E_1...E_m$ dont aucune arête n'en contient une autre, cela veut dire $E_i \subset E_j$ alors $i = j$.
Deux sommets x et y de H sont adjacents s'il existe une arête de E qui les contienne et deux arêtes sont dites adjacentes si leur intersection est non vide.
Le **duale** de l'hypergraphe $H = (E_1, E_2, ...E_m)$ est un hypergraphe $H^* = (X_1, ..., X_n)$ dont les sommets $e_1, ...e_m$ sont des points correspondants respectivement aux arêtes de H et dont les arêtes sont $X_i = e_j / E_j \ni x_i$ dans H.

1.5.2 Propriété de könig et duale de könig :

Le graphe représentatif des arêtes de l'hypergraphe H est un graphe simple noté $L(H)$ dont les sommes $e_1, ..., e_m$ represent respectivement les ensembles $E_1, ..., E_m$ et deux sommet e_i et e_j sont adjacents dans $L(H)$ si et seulement si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$.
Dans l'hypergraphe H, un sous ensemble A (resp : T) de X est appelé ensemble stable ou ensemble indépendant (resp : recouvrement par sommet ou ensemble transversale) de H, si chaque arête de H contient au plus un sommet de A (resp : au moins un sommet de T).
Un sous ensemble M (resp : R) d'arêtes de H est appelé couplage (resp :recouvrement par arêtes de H) si chaque sommet de X appartient à au plus une arête de M (resp :au moins une arête de R) .
Une famille de sous ensembles C de X est une $k-coloration$ des sommets de H si C est une partition de X en k ensembles stables. Un hypergraphe pour lequel il existe une $k-coloration$ est dite $k-colorables$.
Posons :

— `Nombre de stabilité`: $\alpha(H)$=max$|A|$, A est ensemble stable de H.

— `Nombre de recouvrement par sommets:` $\tau(H) = \min |T|, T$ est un recouvrement par sommet de H.
— `Nombre de couplage:` $v(H) = \max |M|, M$ est un couplage de H.
— `Nombre de recouvrement par arêtes:` $\rho(H) = \min |R|, R$ est un recouvrement par arêtes de H.
— `Nombre chromatique:` $\chi(H) = \min k, H$ admet une $k - coloration$ de H.

Notons que tout hypergarphe H vérifie $\alpha(H) \leq \rho(H)$ et $v(H) \leq \tau(H)$ puisque chaque arête d'un recouvrement par arêtes contient au maximum un élément d'un stable et chaque sommet d'un recouvrement par sommets appartient à au plus une arête d'un couplage.

— Si $\rho(H) = \tau(H)$ alors H est la propriété de könig.
— Si $\alpha(H) = \rho(H)$ alors H est la propriété duale de könig.

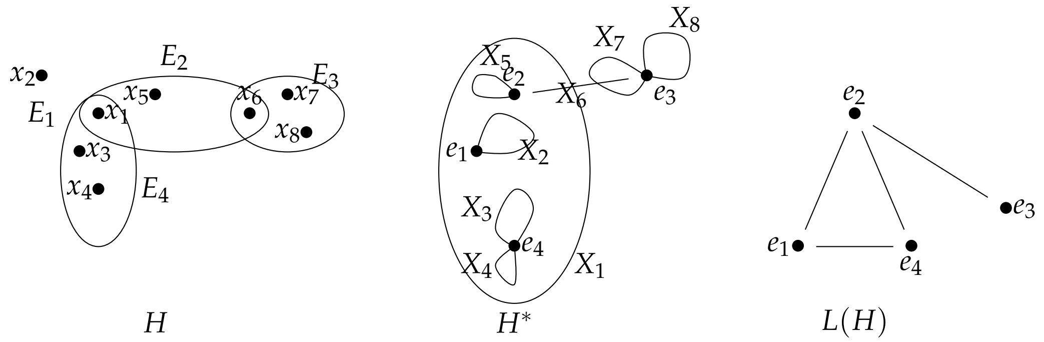
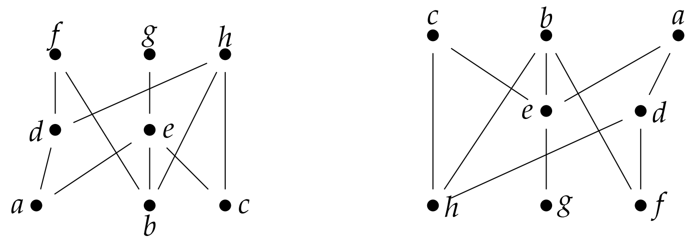


Figure1.14-L'Hypergraphe H , sont duale H^* et sont graphe représentatif de ses intervalles $L(H)$

1.6 Concepts généraux sur les posets :

1.6.1 Poset :

[18]
Un ensemble partiellement ordonné ou **poset** (de l'anglais partial ordred set), est un ensemble P où la relation $\leq$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Dans tout ce qui suivra, nous nous intéresserons uniquement au cas où P est fini.
Si $u \leq v$ et $u \notin v$ nous écrivons $u < v$.
Si u et v sont dans P alors v **couvre** u dans P si $u < v$ et s'il n'existe pas un élément $w \in P$ tel que : $u < w < v$. Nous notons alors : $v \succ u$.
En utilisant la relations de couverture, on peut obtenir une représentation graphique de P, dit **diagramme de Hasse** de P, en associant à chaque élément de P, un point du plan et si v couvre u alors u sera lié au point v par un segment de droite ascendant. Le **dual** de P, noté P^*, est un poset ayant les mêmes sommets que P mais ordonnés par la relation d'ordre " $\leq_{P^*}$ " définit par : $u \leq_{P^*} v \Leftrightarrow u \geq_P v$.
Nous donnons ci-dessous le diagramme de Hasse d'un poset P et son duale P^*.



P $\qquad\qquad$ $p*$

Figure1.15- Un poset et sont dual.

Soit A un sous ensemble de P. Un **minorant**(resp. **majorant**) de A dans P est un élément u de P tel que : $u \leq a$ (resp. $u \geq a$), $\forall \alpha \in A$.
La **borne inférieure** (resp. **supérieure**) de A est le plus grand (resp. petit) des minorants (resp. majorants) de A. Nous appelons **treillis** un poset dans lequel toute paire d'élément possède une borne inférieure et une borne supérieure.

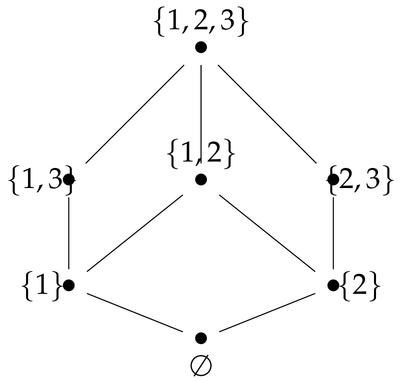


Figure1.16-Treillis

Un sous ensemble C de P est dit **chaîne** de P, si pour toute paire d'éléments a,a' de C, $a \leq a'$ ou $a' \leq a$.Une **antichaîne** est un sous-ensemble de P dont les éléments sont deux à deux incomparables.
Un **intervalle** de P est un sous ensemble I, noté par $[p, q]$ de la forme $\{v \in P : p \leq v \leq q\}$.$I$ est dit maximale si p est un élément minimale et q est un élément maximale de P.

1.6.2 Isomorphisme, fonction de rang

Deux posets P et Q sont dits **homomorphe** s'il existe une application φ de P dans Q vérifiant $x \leq_P y$ si et seulement si $\varphi(x) \leq_Q \varphi(y)$. Ils sont dits **isomorphes** si et seulement si est bijective, φ et φ^{-1} sont des homomorphismes.
Une **fonction de rang** est une fonction r définie de P dans $\mathbb{N}$ et vérifiant $r(u) = 0$ si u est un élément minimale et $r(v) = r(u) + 1$ si $v \succ u$.S'il existe une tel fonction de rang, nous disons que P est **rongé** ou **gradué** et la valeur $r(P) = \max r(x)$ represente le rang de P.Si P est rongé, nous définissons son

niveau i par $N_i(P) = \{u \in P : r(u) = i\}$ et le i $^{\text{éme}}$ nombre de Whitney par $W_i(P) = |N_i(P)|, \forall i = 1, ..., r(P)$ .Pour un poset rongé, soit $P_{l,u}$ le sous-poset induit par l'union de nivaux consécutifs $\bigcup_{i=l}^{u}(N_i)$ de P où l et u sont deux entiers tel que : $0 \leq l \leq u \leq r(P)$.

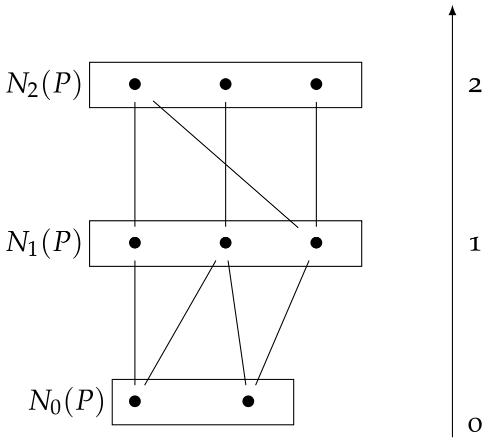


Figure1.17-Niveaux d'un poset rangé

1.6.3 Exemple de poset

Treillis booléen

Le treillis booléen est le poset définit par $B_n = (\{0,1\}^n, \leq)$, où la relation d'ordre est telle que $\underline{a} = (a_1, ...a_n) \leq \underline{b} = b_1, ..., b_n$ si et seulement si $a_i \leq b_i$ pour tout i.

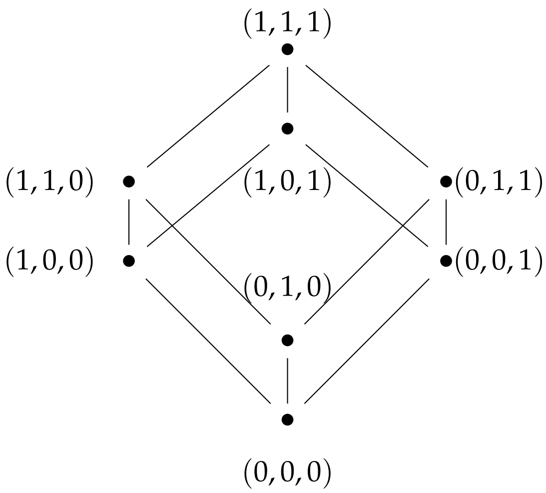


Figure1.18-Treillit booléen B_3

En considérant l'application $\varphi(a) = \{i, a_i = 1\}$, nous remarquent bien que $B_n = (\{0,1\}, \leq)$ et $P(1,..,n), \subseteq)$ sont isomorphes, où $P(1,...,n)$ est l'ensemble des sous-ensemble de l'ensemble $\{1,...n\}$.D'où la possibilité de définir le treillis booléen comme étant le treillis de tous les sous-ensembles de $\{1,...,n\}$ ordonnés par inclusion. L'application qui à un élément de B_n associe son cardinal définit la fonction de rang sur B_n.

1.6.4 Hypergraphe des intervalles d'un poset

Soit P un poset et Γ l'ensemble de ses intervalles maximaux. L'hypergraphe $H(P) = (P, \Gamma(P)$ dont les sommets sont les éléments de P et dont les arêtes sont les intervalles maximaux de P est dit l'**hypergraphe des intervalles** de P. Notons par H^* le dual de l'hypergraphe $H(P)$.

1.6.5 Graphe représentatif des intervalles d'un poset :

Soit P un poset. **Le graphe représentatifs des intervalles** P , appelé également le **graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles de** P , noté $G(P)$, est le graphes dont les sommets sont les éléments de P et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils appartiens à un même intervalle de P. Il s'agit en fait du graphe représentatif des arêtes de $H^*(P)$.

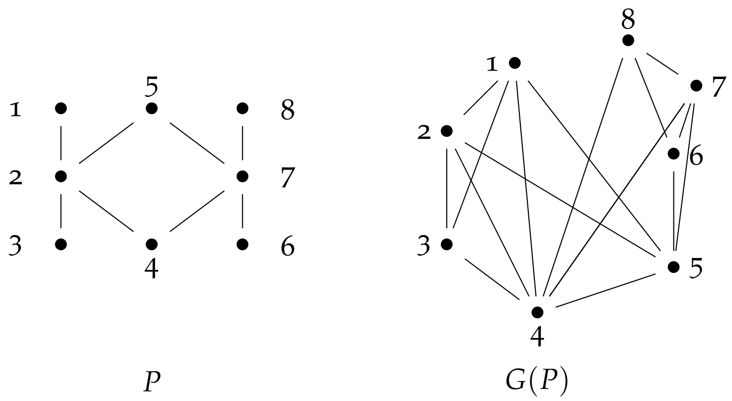


Figure1.19-$G(P) = L(H^*(P))$

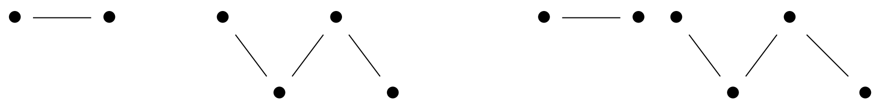
1.7 Opération sur les posets :

Plusieurs operation peuvent être définit sur deux ou plusieurs posets et diverses propriétés sont alors déduit .

1.7.1 Somme directe :

La somme directe (union disjointe) de deux poset P et Q est un poset, notée $L = P + Q$ définie sur $P \cup Q$ tel que $x \leq y$ dans $P + Q$ si $(x, y) \in P^2$ et

$x \leq_p y$ ou $(x, y) \in Q^2$, et $x \leq_Q y$.



Q $\quad$ P $\quad$ $P + Q$

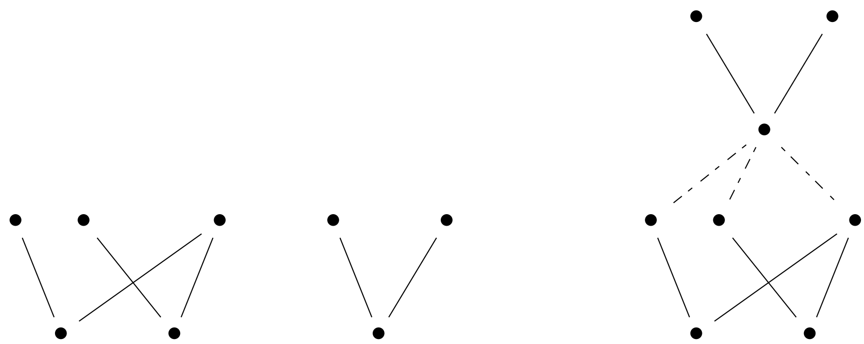
Figure1.20-P,Q et $P + Q$

1.7.2 Somme linéaire :

On appelle la somme linéaire de deux posets notés P et$Q$, le nouveau posé $P \oplus Q$ sur l'union $P \cup Q$, tel que : $x \leq y$ dans $P \oplus Q$ si :

— $x, y \in Q$ et $x \leq Qy$
— $x \in P$et $y \in Q$
— $x, y \in P$ et$x \leq Py$

Le tracement du diagramme de Hasse pour une somme linéaire , nécessite d'abord de tracer le diagramme de Hasse de P qui dois être au dessous de celui de Q , puis combiner chaque sommet maximal de P au sommet minimal de Q.



P $\quad$ Q $\quad$ $P \oplus Q$

Figure1.21-P,Q et $P + Q$

1.7.3 Produit cartésien :

Également appelé produit direct, le produit $P * Q$ défini par le couple (x, y) où $x \in P$ et $y \in Q$, entre deux posets notés P et Q est donné par la relation : $(x, y) \leq (x_0, y_0)$ dans $P \times Q \Longleftrightarrow x \leq x_0$ dans P et $y \leq y_0$ dans Q .
Schématiquement, le tracement du diagramme de Hasse du nouveau poset $P * Q$, se fait par le remplacement de chaque sommet du diagrammed Hasse de Q par une copie du diagramme de Hasse de P.

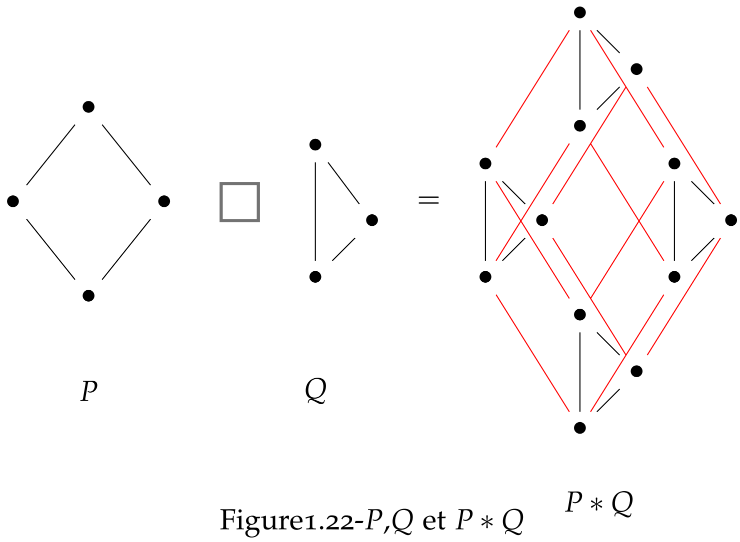


Figure1.22-P,Q et $P * Q$

complexité Algorithmique 2

2.1 Introduction

Après avoir donner dans le chapitre précèdent les principale notions de base sur la théorie des graphes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire, dans ce second chapitre, on se focalise sur la théorie de la complexité des algorithmes, on traitent simultanément les divers classes des problèmes polynomiaux P et non déterministe polynomial NP et $NP-complet$.
Mais avant de rentré dans le vif de ce chapitre, il est utile de rappeler quelques notions algorithmiques. Étant un problème donné $\mathcal{P}$, résoudre ce problème consiste à trouver une solution à celui, en répondant au questions de $\mathcal{P}$ ou de prouver que ces questions n'admettent pas de réponses. Pour ce faire, deux approches sont généralement utilisées, l'approche algébrique ou algorithmique, tandis que la première consiste en général à la recherche de la couverture convexe du polytope, la seconde consiste en la conception et l'élaboration d'un algorithme de résolution.
Pour définir la notion d'algorithme, il est nécessaire de parler de la machine de Turing, qui consiste en une bande infinie d'écriture et une tête de lecture écriture sur cette bande. Un algorithme est donc une procedure qui après avoir introduit les données du problème sur la bande, la tête va effectuer des lectures et des écritures pour enfin écrire la solution. Autrement dit, un algorithme est un ensemble de procedures composées d'opérations élémentaires (addition, soustraction, union,...) pour nous donner une solution. La complexité algorithmique peut être vue comme étant le temps et la langueur que la tête passe sur cette bande pour nous donner la solution. Il existe trois type de complexité :

— **Complexité au meilleur** :C'est le plus petit nombre d'operation qu'aura à executer l'algorithme sur un jeu de données de taille n.
— **Complexité en moyenne** :C'est la moyenne des complexité de l'algorithme sur des jeux de données de taille n.
— **Complexité au pire** :C'est le plus grand nombre d'operation qu'aura executer l'algorithme sur un jeu de données de taille n.

2.1.1 La théorie de la complexité :

Après des recherche profondes, Jack Edmonds[13], à pu mettre une base pour les fondement de la théorie de la complexité algorithmique, pour qu'ils soient developer par Stiven Cook[12] et Rechard Karp[18] pendant les années

soixante où la comparaison des algorithmes entre eux est devenue difficile car ils ne mesuraient pas leur efficacité, par contre ils rendaient compte plus de leur temps d'execution, à titre d'exemple : les algorithmes fondamentaux de Kruskal-Prim.
Autrement dit, la théorie de la complexité est considérée comme étant une branche Mathématique et Informatique qui vises à classer les problèmes algorithmique en fonction de leur difficultés, en mesurant le temps d'execution d'un algorithme en fonction du nombre d'operations élémentaires que celui-ci aura besoin pendant sa resolution du problème posé ainsi que l'espace mémoire qu'il utilise. Ces deux paramètres sont dits, la complexité temporelle et spatiale. Il est à noter qu'il existe plusieurs d'autre paramètre tel que la quantité d'information utilisée.

2.2 Problème de décision et d'optimisation

Un **problème** c'est une énoncée d'une situation suivie d'une ou plusieurs questions, possédant des paramètres dont la valeur n'est pas connue, donc il est composer de deux élément une instance(ou des données) est une question.

Une instance d'un problème est obtenue en affectant une valeur pour chacun de ces paramètres.
La taille d'une instance fait généralement référence à la quantité de cases mémoires nécessaires pour décrire les paramètres.

Parmi les types du problèmes on distingue :

— `Le problème de décision` c'est un problème dont la réponse est soit oui ou non. Autrement dit, le problème de decision consiste à chercher dans un ensemble fini X si'il y'a un élément x vérifiant une certaine propreté $\mathcal{P}$. Ainsi ce problème est une application sur X à valeur dans $\{0, 1\}$, tel que : $f(x) = 1$ si x vérifie $\mathcal{P}$, $f(x) = 0$ si non.

— `Le problème d'optimisation combinatoire` consiste à trouver la meilleur solution x^* (max ou min) d'une certaine fonction f sur un ensemble fini **X** à valeur le plus souvent entières ou réelles :

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)(resp : f(x^*) = \max_{x \in X} f(x)$$

La fonction f est une fonction-objectif ou économique, l'ensembles fini X est appelé ensemble de solutions réalisables.
Examples :

1. **Problème de décision :**
   (a) Entrée : Un couple d'entiers (a, b).
   (b) Question : a et b possèdent-ils un diviseur commun(autre que 1) ?
2. **Problème combinatoire**
   (a) Entrée : Un graphe $G(V, E)$.

(b) Question : Trouver un stable maximum.

Remarque

Notons qu'à tout problème d'optimisation correspond un problème de décision et vice versa.
Par exemple pour le problème d'optimisation qui calcule la clique maximum dans un graphe, on peut lui associer un problème de décision comme suit :
Problème de la clique
Instance : Un graphe G est un entier k.
Question : G possède-t-il une clique de cardinalité k ?

2.3 Complexité Algorithmique

la complexité algorithmique consiste à résoudre les problèmes dont la solution est calculer par un algorithme. Ainsi il nous faut un algorithme pour résoudre n'importe quelle problème.

Algorithme :

Un algorithme c'est un ensemble fini d'operations élémentaires, c'est une procedure bien définie qui prend toute instance(donnée du problème $\mathcal{P}$) en entrée et renvoi un résultat en sortie, par exemple :
L'algorithme de Jarnik-Prim dont l'entrée est un graphe valué connexe G et en sortie donne un arbre de poids optimal.
Tout algorithmes et caractérisé, entre autre par deux paramètre : la complexité temporelle et la complexité spatiale.

Algorithme polynomiale :

Un algorithme est polynomiale si le nombre d'operations nécessaires pour résoudre une instance de taille n est bornée par un polynôme en n.

2.3.1 La complexité en temps et en espace

1. `La complexité temporelle` de l'algorithme correspond au nombre d'instructions élémentaires utilisée afin de résoudre le problème.

2. `La complexité spatiale` de l'algorithme correspond au nombre de cases mémoires occupées par les données que l'algorithme utilise au cours de son execution.
   En general,le temps d'execution d'un algorithme est proportionnelle à la taille de l'instance du problème à traiter.
   Cella signifie que plus une instance d'un problème est grande, plus sa résolution nécessite plus de temps. On exprime donc le temps (ou

toute autre mesure de complexité) en fonction de la taille d'une instance du problème considéré. Par exemple si on travaille sur un tableau de quelque entiers, le nombre d'instructions dont on aura besoin et l'espace mémoire utilisé vont évidement être different de ceux qu'on utilise si on travaille sur un tableau qui comporte des milliers d'entier.

Il est à noter que la complexité peut varier d'une instance à une autre, alors que ces dernières ont bien la même taille. Par exemple chercher des valeurs dans un tableau mal ordonné exige plus de temps que leur recherche dans un tableau ordonné, alors que c'est le même fait qui est en jeu chercher les même valeurs.
Exemple : Pour trouver une clique de taille maximale dans un graphe avec un nombre de sommets $n = 10$ n'a pas la même difficulté que de la chercher dans un graphe avec $n = 100$.
Si A est un algorithme de resolution du problème P et I est une instance de ce dernier, alors au couple (A, I), nous associons un entier $\tau(A, I)$ representant le nombre d'operations élémentaires (addition, multiplication, comparaison, affectation) effectuées dans l'algorithme A dans la resolution de l'instance I du problème P. Le plus grand nombre $\tau(A, I)$ sur l'ensembles de tous les instances ayant la même taille est appelé **la complexité** de l'algorithme A.

Définition :

Si x est une instance du problème P, on appelle la taille de x le paramètre taille(x) ou $|x|$ et il spécifie généralement le nombre de case mémoire nécessaire pour sa représentation.

Dans le calcule de la complexité en temps d'un algorithme, c'est pas le nombre exacte d'opération effectué par ce dernier qui importe, mais c'est la nature de la fonction de complexité produite par l'algorithme et qui s'exprime en fonction de n, la taille d'une instance ; ainsi que son comportement asymptotique, c'est à dire quand n tend vers l'infini (on ce demande souvent de savoir si cette fonction de complexité et une constante, un algorithme, un polynôme ...) . Habituellement, cette complexité est exprimée à l'aide de la notation "***Grand O***".

Définition :

Soit f et g deux fonctions strictement positives pour toutes les valeurs suffisamment grande on écrit :$f(x) = Og(x)$ (on dit aussi f est un *Grand O* de g) quand x tend vers l'infinie. si est seulement si $\exists X > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq x_0$ $|f(x)| \leq M|g(x)|$
Intuitivement cella signifie que g devient plus grand que f à partir d'un certain entier x_0, à une constante multiplicative prés.

Exemple :

Soit $f(x) = 8x^4 - 4x^3 + 2$ pour simplifier cette fonction, on utilisant la notation *grandO* pour décrire son taux de croissance lorsque x tend vers l'infinie :
$8x^4 - 4x^3 + 2$ pour $x_0 = 1$ et pour tout $x \geq x_0$
$|8x^4 - 4x^3 + 2| \leq 8x^4 - 4x^3 + 2$
$\leq 8x^4 + 4x^4 + 2x^4$
$= 14x^4$
$= 14|x^4|$
$= M|x^4|$.
on prenant $M = 14$ on a $f(x) = O(x^4)$,$f(x)$ ne croit pas plus rapidement que x^4.

2.3.2 Classes de complexité P, NP et $NP - complet$

Dans cette partie, nous allons intéresser à l'étude de la difficulté intrinsè que des problèmes de décision, ce que l'on appelle complexité des problèmes (non pas des algorithmes), et on va les classer selon la complexité des algorithmes les résolvant. Un grand nombre d'entre eux sont des problèmes facile car on connaît des algorithmes polynômiaux pour les résoudre. Cependant, il existe aussi un grand nombre de problèmes pour les quels on ne connaît pas d'algorithmes polynomiaux. On ne peut pas trouver qu'il n'existe pas, mais on peut cependant montrer que l'existence polynomial pour l'un d'entre eux impliquerait l'existence d'un algorithme polynomiale pour presque tous les problèmes. Notons qu'à tout problèmes d'optimisation correspond sa version de décision, et vis versa.

Définition :

La complexité d'un problème est la complexité du meilleur algorithme qui permet de le résoudre. Si cet algorithme est polynomiale, le problème est dit facile, autrement le problème est difficile.

Problème de classe P :

Par définition le problème de décision est dans la classe P si il existe un algorithme qui le résout et ayant une complexité temporelle $O(n^k)$, n représente la taille de ses instance et k est un réel positif.C'est à dire qu'il peut être décidé en temps polynomiale.
Les problèmes dans P sont facile est faisable dans le sens qu'on peut les résoudre rapidement.

Problème de la classe NP :

Un problème de decision $\mathcal{P}$ est dans la classe NP si toute solution proposée pour $\mathcal{P}$ peut être vérifiée et validée en temps polynomiale (se quel'on appelle un certificat du "OUI").

Exemple :

Considérons la version << décision >> du problème du stable : étant donner un graphe G et un entier positif k, existe-il un stable de taille au moins k (c'est à dire $\geq k$) ?
Ce problème est clairement dans NP : si l'on dispose d'un ensemble S de sommets, on peut verifier en temps polynomial que $\mid S \mid \geq k$ et que S est stable.
En effet, soit $S = \{s_1, s_2, ..., s_l\}$.
Pour tester si S est un stable, on teste si s_1 n'est pas adjacent au autres sommets de S, pour cela il faut $l-1$ testes, pour examiner le sommet s_2, il faut $l-2$, ainsi de suite. Au finale il faut $\sum_{i=1}^{i=l-1} i = O(l^2)$ opérations élémentaire.

Intuitivement, les problèmes de classe NP sont ceux que l'on peut résoudre en énumérant l'ensemble des solutions possibles (méthode « brutale ») et en les testant à l'aide d'un algorithme polynomiale. Naturellement, si on peut résoudre un problème avec un algorithme polynomiale, on peut aussi verifier en temps polynomiale que la solution fournie est bien une solution ; par conséquent

$$P \subseteq NP$$

La question de savoir si $P = NP$ est un problème ouvert, le plus important, de la théorie de la complexité. Cela revient à savoir si le fait de chercher une solution est aussi simple que de verifier une solution.

Classes des problèmes $NP - complet$:

Un problème est dit $NP - complet$ s'il est $NP - difficile$, c'est-à-dire c'est les problèmes NP les plus difficiles à résoudre.
Une réduction est une transformation d'un problème plus difficile noté X à un problème moins difficile noté Y, et cela est applicable si et seulement s'il existe un algorithme de résolution pour X faisant appel à la résolution de Y, et lors de la résolution de Y, l'algorithme doit être polynomial. Un problème $NP - complet$ est aussi un problème qui vérifie toutes ces conditions suivantes :

1. Il appartiens à la calasse NP ;
2. Tous les problèmes de la classe NP ce ramène à celui-ci via une reduction polynomiale.

[23] Il est à noter que dans les graphes, les problèmes $NP - complet$ fondamentaux qui se manifestent le plus souventsont : le cycle hamiltonian, stable maximum, coloration minimum, ensemble dominant, clique et stable, domination ROMAINEet couverture de sommets ...
A titre d'exemple, on site le problème $3 - SAT$, démontré indépendamment par Cook[12] et Levin en 1971.
Ce problème est défini par :
Entrée : Une formule logique en forme normale conjonctive et dont chaque

clause contient au plus 3 variable
Sortie : Existe-t-il une affectation de valeurs pour les variables rendant la formule vraie ?

Théorème :

[4,23] Le problème de la satisfaisabilité est $NP - complet$.

Ainsi, à partir de SAT, on montre progressivement la $NP - completude$ d'autre problème qui, à leur tour, peuvent être utilisés pour démontrer la $NP - completude$ de nouveaux problèmes, et ainsi de suite. Par exemple, à partir de SAT, on a montré que 3-SAT est $NP - completude$ [18] le problème 3-SAT s'énonce comme SAT avec la condition que toutes les clauses sont de cardinalité 3). Maintenant on va utiliser 3-SAT pour démontrer la $NP - completude$ du problème stable maximum.

Mais citons d'abord la démarche à suivre pour montrer la $NP - completude$ d'un problème de décision $\mathcal{P}$ quelconque. Qui est la suivante :

1. Montrer que $\mathcal{P}$ appartient on donnant un certificat, c'est à dire on devinant une solution qui doit être verifier en un temps polynomial.
2. Choisir un problème $\mathcal{Q}$ connu pour être $NP - complet$.
3. Montrer la relation $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$.

Et aussi le problème de stableet clique :
Clique et Stable

— `Problème de Clique`
  Entrée : Un graphe $G = (V; E)$; un entier k.
  Question : Existe-t-il un sous-ensemble de sommets V_1 tel que les sommets de V_1 sont deux à deux adjacents, tel que $|V_1| \geq k$?

— `Problème de Stable`
  Entrée : Un graphe $G = (V; E)$; un entier k.
  Question : Existe-t-il un sous-ensemble de sommets V_2 tel que les sommets de V_2 sont deux-à-deux non adjacents, et tel que $|V_2| \geq k$?

On admet que les deux hypothèses finissent presque par des résultats complémentaires.
Il est à noter que plus de 1000000 dollars ont été offerte par l'institut Clay en 2000 à fin de résoudre le problème suivant : "$P = NP$?" qui est considéré comme l'un des problèmes du millénaire non encore résolu.

Le nombre Domatique et le nombre Domatique Total dans $G(P * Q)$ 3

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons deux paramètres de domination à savoir le nombre domatique et le nombre domatique totale, [26] dans le graphe 2-section $G(P)$ de l'hypergraphe des intervalles d'un poset P.Nous nous intéresserons d'abord à l'étude de $G(P * Q)$ où $*$ est l'une des opérations suivantes (**Somme directe, Somme linéaire, Produit cartésien**). L'interet d'étudier ces opérations est en partie *dû* au fait qu'avec leur aide, de nombreux posets peuvent être obtenus, à titre d'exemple le treillis booléen qui est isomorphe au produit directe de plusieurs chaînes de même longueur, encore le treillis des faces de $n - cub\ C_n$ qui est isomorphe au produit de n sous posets[14], treillis de Shuffles $W_{m,n}$[1], les posets serie-parallèles...
Notons que d'autres paramétres de domination ont été également étudié dans $G(P)$ dans[16], il s'agit de domination double et le nombre domatique double. Dans le cas où P est le treillis booléen, le nombre domatique ainsi que le nombre de domination ont été étudié dans $G(P)$.

3.2 Notion de domination

3.2.1 Quelques concepts de base sur la domination :

L'ensemble dominant dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets D de V tel que tout sommet $V - D$, est adjacents à au moins un sommet de D.
Un Sommet dominant est un sommet qui forme à lui seule un ensemble dominant, c'est à dire, un sommet qui adjacent à tout les autres sommets.
Une partition domatique est une partition des sommets de G en ensembles dominants.
Le nombre de domination, noté $\gamma(G)$ est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant.

En 1977, Cockayne et Hedetniemi [11] ont défini pour la première fois le concept du **Nombre domatique** $d(G)$ d'un graphe G, comme étant le nombre

maximum d'ensembles dominants dans une partition domatique du graphe, où d'une fonction équivalente, le nombre maximum d'ensembles domi- nants disjoints deux à deux et dont l'union est V (G).
Nombre domatique totale $d_t(G)$ [9] est le nombre maximum de classes de la partition de V en ensembles dominants totaux disjoints où un sous ensemble D de V est dit ensemble dominant total, si pour tout sommet de V, il existe un sommet de D, qu'il lui soit adjacent.

Pour tout graphe$G = (V, E)$, il a été montré dans [11] que le nombre domatique $d(G)$ (resp. le nombre domatique total $d_t(G)$) est au plus égal à $\delta(G) + 1$ (resp. à $\delta(G)$).
Un graphe **domatiquement plein** si $d(G) = \delta(G) + 1$.

Le problème de partition domatique apparaît dans les réseaux de communication . Le réseau est modélisé par un graphe non orienté où les arêtes représentent les lignes de communication et les sommets représentent les cités. Un groupe de transmission est un ensemble de cités qui activent comme des stations de transmission, c'est-à-dire qui peut transmettre des messages à chaque cité dans le réseau. Donc, un groupe de transmission dans le réseau de communication, est un ensemble dominant dans le graphe. Trouver le nombre maximum de groupes de transmission disjoints et dont l'union est l'ensemble des cités dans un réseau de communication est équivalent au problème de partition domatique dans le graphe correspondant.

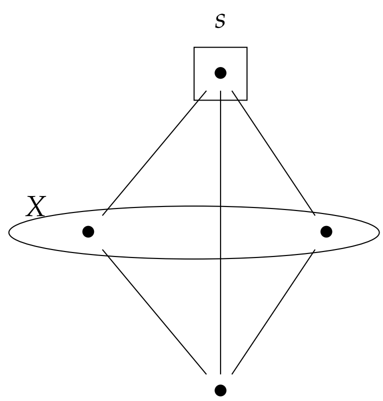


Figure3.1-X est un ensemble des sommets dominant, s sommet dominant

3.3 Le nombre domatique et domatique total de quelque graphes :

3.3.1 Des graphes $G(P + Q)$ et $G(P \oplus Q)$:

Proposition 1 :[6]

Soient P et$Q$ deux posets. Nous avons :

1. $d(G(P + Q)) = \min d(G(P)), d(G(Q))$.
2. $d_t(G(P + Q)) = \min d_t(G(P)), d_t(G(Q))$.

Preuve 1 :

1. Soit D un ensemble dominant $G(P+Q)$ si et seulement si D s'écrit sous la forme $D = D_1 \cup D_2$ où D_1 est un ensemble dominant non vide de $G(p)$, et D_2 est un ensemble dominant non vide de $G(Q)$.
   Par consequence $d(G(P+Q)) \leq \min d(G(P)), d(G(Q))$.
   Inversement :

   Si $D_1, D_2, \ldots, D_{d(G(P))}$ respectivement.$D'_1, D'_2, \ldots, D'_{d(G(Q))}$ une partition domatique de $G(P)$ Respectivement $G(Q)$; où nous supposons sans perte de généralité que $d(G(P)) \leq d(G(Q))$, alors :
   $D_i \cup D^{'}_i, i = 1...d(G(P)) - 1 \cup (D_{d(G(p))\cup} \bigcup\limits_{i \geq d(G(p))} D^{'}_i)$ est une partition domatique de $G(P+Q)$ c-à-d $d(G(P+Q)) \geq \min d(G(P)), d(G(Q)$.
2. La démonstration (2) est identique à la démonstration (1).

Proposition 02 :[6]

Soit P et Q deux posets :

1. $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + d(G(Q))$.
2. $d_t(G(P \oplus Q)) \geq d_t(G(P)) + d_t(G(Q))$.

Preuve 2 :

1. Il suffit de montrer que chaque ensemble dominant de $G(P)$ respectivement de $G(Q)$ est un ensemble dominant de $G(P \oplus Q)$. Soit D un ensemble dominant de $G(P)$ et $x \in V(G(Q))$ dans le poset Q. Il existe une chaîne qui joint le sommet x a l'un des éléments minimaux de Q.
   Par l'opération $\oplus$ cet élément minimal est comparable à tous les sommets de P et en particulier à ceux de D. Il s'ensuit que dans $G(P \oplus Q)$, le sommet x est adjacent à l'un des sommets de D. Par dualité, chaque ensemble dominant de $G(Q)$ est aussi un ensemble de $G(P \oplus Q)$.

2. La démonstration (2) est identique à la démonstration (1).

Dans cette exemple :
$d(G(P)) = |\{5,7\}, \{9,1\}, \{6,8\}, \{2,3,4\}| = 4$ et $d(G(Q)) = |\{a\}, \{b,c\}| = 2$ et $d(G \oplus Q)) = |\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{7\}, \{8\}\{9\}, \{5,3\}, \{4,2\}, \{6,1\}| = 9$

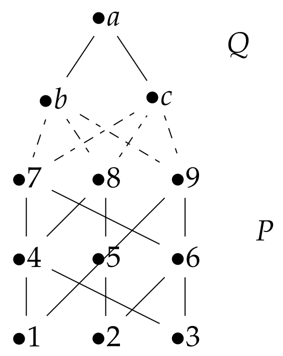


Figure3.2-$P \oplus Q$

Remarque :

Notons que dans les posets série-parallèles connexes, chaque élément maximal est plus grand que chaque élément minimal. Dans $P \oplus Q$, cette propriété implique que chaque élément maximal (resp. minimal) de P (resp. de Q) appartient à tous les intervalles maximaux de $P \oplus Q$ quand P et Q sont des posets série-parallèles connexes. Ainsi, dans$G(P \oplus Q)$, l'ensemble des éléments maximaux (resp. minimaux) $\max(P)$ (resp. $min(Q)$) de P (resp.Q) est un ensemble de sommets dominants.

Proposition 3 :[6]

Soient P et Q deux posets :

1. Si P est un ordre série parallèle connexe, alors $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(Q)) + \max(P) + d(G(P_r))$, où P_r signifie le sous poset de P induit par $P - \max(P)$.
2. Si Q est un ordre série parallèle connexe, alors $d(G(P \oplus Q)) \geq d(G(P)) + \min(Q) + d(G(Q_0))$, où Q_0 est le sous poset de Q induit par $Q - \min(Q)$.

3.3.2 Du graphe $G(P \times Q)$:

Proposition 4 :[6]

Soient P et Q deux posets :
— a)$d(G(P \times Q)) \geq d(G(P))d(G(Q))$.
— b)$d_t(G(P \times Q)) \geq d_t(G(P))d_t(G(Q))$.

Démonstration :

Soit $D = D_i, i = 1, ..., d(G(P))$ une partition domatique de$G(P)$.
Et : $D' = D'_j, j = 1, ..., d(G(Q)))$ une partition domatique de $G(Q)$.
On cherche à montrer que $D \times D' = D_i \times D'_j, 1 \leq i \leq d(G(P)), 1 \leq j \leq d(G(Q))$ forment une partition domatique de $G(P \times Q)$.

Soit $(x,y) \in P \times Q, 1 \leq i \leq d(G(P))$ et $1 \leq j \leq d(G(Q))$.
Si $(x,y) \notin D_i \times D_j^{'}$, alors $x \notin D_i$ ou $y \notin D_j^{'}$.
Dans le premiére cas, il existe un élément $x_0 \in D_i$ et un intervalle $[p,q]$ de P tel que $x, x_0 \in [p,q]$.
Dans le deuxième cas, il existe un élément $y_0 \in D_j^{'}$ et un intervalle $[P^{'}, Q^{'}]$ de Q tel que $y, y_0 \in [p^{'}, q^{'}]$.
Alors, on obtient :$(x,y),(x_0,y) \in [(p,y),(q,y)]$
Si $x \notin D_i$ et $y \in D_j^{'}$, $(x,y),(x,y_0) \in [(x,p^{'}),(x,q^{'})]$. Si $x \in D_i$ et $y \notin D_j^{'}$
Alors : $(x,y),(x_0,y) \in [(p,y),(q,y)]$ et $(x,y),(x_0,y_0) \in [(p,p^{'}),(q,q^{'})]$. Si $x \notin D_i$et $y \notin D_j^{'}$.
D'ou $D_i \times D_j^{'}$ est un ensemble dominant de $P \times Q$ et $D \times D^{'}$ est une partition domatique de $P \times Q$.

2) La proposition (b) est identique à la proposition (a).

Théoréme1 :[6]

Soient P et Q deux posets.
Si $G(P)$ et $G(Q)$ sont domatiquement pleins, cela réalise que :
$d(G(P \times Q)) = d(G(P))d(G(Q))$.

Démonstration :

De la Proposition 4, nous avons :
$d(G(P \times Q)) \geq d(G(P))d(G(Q))$.
A fin de prouver l'absence de la réciprocité, On prends : $(x,y) \in P \times Q$.
On a $deg_{G(P \times Q)}(x,y) = deg_{G(P)}(x)(deg_{G(Q)}(y) + 1) + deg_{G(Q)}(y)$
Puisque P et Q sont domatiquement pleins :
$d(G(P \times Q)) \leq \delta(G(P \times Q)) + 1 = \delta(G(P))(\delta(G(Q)) + 1) + \delta(G(Q)) + 1 = (\delta(G(P)) + 1)(\delta(G(Q)) + 1) = d(G(P))d(G(Q))$.

Corollaire :[6]

Soit P un poset et C_n une chaîne de longueur n. Si $G(P)$ est domatiquement plein, alors :

— a) $d(G(C_n \times P)) = (n+1)d(G(P))$.
— b) $d_t(G(C_n \times Q)) \geq (n+1)d_t(G(Q))$.

3.3.3 Du graphe $G((C_{n_1}) \times C_{n_2})_{l,u})$:

Soient deux graphes $G_1(V_1, E_1)$ et $G_2(V_2, E_2)$. Le nombre domatique du produit cartésien de ces deux graphes notés $G_1 \square G_2$ a été déjà déterminer par G.J.Chang [7] et donné par la relation suivante : $G_1 \square G_2 = (V_1 \times V_2, E)$, et que le produit cartésien de deux chaînes $P_{n_1} \times P_{n_2}$ en n_1 et n_2 deux sommets domatiquement pleins.

D'autre part, Zelinka[26] et Laborde[19] ont démontré que le produit $P_{n_1} \times ... \times P_{n_r}$ est domatiquement plein dans le cas où k est un entier positif et $r = 2^k - 1$.
On cherche dans ce passage à identifier la valeur exacte de $d(G(P_1, u))$ et sa partition domatique.
On note $G_{l,u} = G(P_{l,u})$ avec $n_1 \leq n_2$ de sorte qu'on perds pas les généralités et :

— le filtre engendré par x dans P noté : $U_p(x)$ estdonné par : $U_p(x) = \{y \in P \leq_P y\}$
— l'idéal engendré par x dans P noté : $D_p(x)$ et donné par :$D_P(x) = \{y \in P \leq_P x\}$.

Chaque sommet dans $G_0, n_1 + n_2 = G(P)$, est un sommet dominant, mais cela n'est pas toujours valable pour toutes valeur prise par u et l.

Proposition 5 :

On considère chaque éléments de l'ensemble $D = [(l, l), (u - n_2, u - n_1)]$ est un sommet dominant, si $l \leq u - n_2$.

Demonstration 5 :[6]

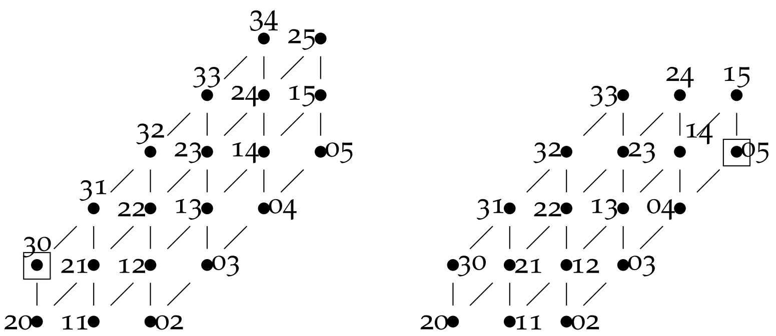
Notons par A l'ensemble des éléments minimaux de $P_{l,u}$ donné par : $A = \{(i, l - i) : 0 \leq i \leq l\}$
Et par B l'ensemble des intervalles maximaux de $P_{l,u}$ donné par :
$B = \{(n_1 - k, u - n_1 + k) : 0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u\}$.
et Γ : l'ensemble des intervalles maximaux de $C_{n_1} \times C_{n_2}(l, u)$.
Notons que $\bigcap\limits_{I \in \Gamma} I$ non vide.
On a $A \leq (l, l)$, pour tout i, tel que $0 \leq i \leq l$ ceci veut dire que (l, l) est liée par une chaîne à tout élément minimal de $C_{n_1} \times C_{n_{2_{l,u}}}$.
De même que $(l, l) < B$ pour tout k, $0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$, car $l \leq u - n_2 \leq n_1 - k$ et $l \leq u - n_2 \leq u - n_1 + k$ ceci veut dire (l, l) est lié par une chaîne à tout élément maximal de $C_{n_1} \times C_{n_2}(l, u)$.
Ainsi le couple (l, l) appartient à tous les intervalles maximaux de $P_{l,u}$,c'est-à-dire que $(l, l) \in \bigcap\limits_{I \in \Gamma} I$.

On cherche à montrer que $\bigcap\limits_{I} I$ représente l'ensemble des sommets dominants de $G_{l,u}$ il vaut exactement D. Soit $X \in \bigcap\limits_{I \in \Gamma} I$ chaque sommet de $G_{l,u}$ appartient à un intervalle maximal de $P_{l,u}$, donc dans $G_{l,u}$, X est adjacent à tous les autres sommets, ce qui veut dire que X est un sommet dominant.
Inversement, si X est un sommet dominant de $G_{l,u}$ et comme chaque sommet est dons un intervalle maximal de P, alors $X \in \bigcap\limits_{I \in \Gamma} I$.
Il reste à prouver que $\bigcap\limits_{I \in \Gamma} I = D$.
$'' \subset ''$: Si $(X, Y) \in \bigcap\limits_{I \in \Gamma} I$, alors (X, Y) est lié par une chaine dans $P_{l,u}$ à tous les

éléments maximaux ainsi qu'a tous les éléments minimaux.
Par suite, $(X,Y) \geq (i, l-i)$, pour tout i, $0 \leq i \leq l$ et donc, $(X,Y) \geq (\max_{i=0..1} i, \max_{i=0..1}(l-i)) \geq (l,l)$, ce qui conduit à $(X,Y) \geq (l,l)$.
D'autre part, $(X,Y) \leq (n_1 - k, u - n\ 1 + k)$ pour tout k, $0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$ et donc $(X,Y) \leq (\min_k(n_1 - k), \min_k(u - n1 + k)$ qui produit $(X,Y) \leq (u - n_2, u - n_1$.
Nous obtenons donc $(X,Y) \in D$.
$'' \supset ''$ Montrons que $D \subseteq (\bigcap_i I_i)_{l,u}$.
Si $X,Y) \in D$ alors $(l,l) \leq (X,Y) \leq (u - n_2, u - n_1)$.
Comme $(l,l) \geq (i, l-i)$, pour tout i, $0 \leq i \leq (u - n_2, u - n_1) \leq (n_1 - k, u - n_1 + k)$, pour tout k,$0 \leq k \leq n_1 + n_2 - u$, nous pouvons dire que (X,Y) est lié par une chaîne à tout élément de A par une autre chaîne à tout élément de B.
D'où $(X,Y) \in \bigcup_{i \in \Gamma} I$.

Exemple

Soit $P = C_3 \times C_5$
Dans cette exemple $deg(0,5) = \delta(G_{2,6}) = 7$ et $deg(3,0) = \delta(G_{2,7}) = 9$



$P_{2,7}$ $p_{2,6}$

Figure3.3

3.4 $NP - completude$ du problème de la partition domatique maximum[23] :

Beaucoup de résultats concernant l'aspecte algorithmique du problème de la partition domatique maximum existent dans la littérature [3],[15],[17],[20],[21].Pour plusieurs classes de graphes, des algorithmes en temps linéaire ont été décrit comme por les graphes fortement triangulés et les graphes d'intervalles, pour d'autre la $NP - completude$ du problème de la partition domatique maximum $d(G) \geq k$ a été prouvée, comme pour les graphes triangulés, les graphes scindés, les graphes de comparabilités et les graphes biparties (pour $k \geq 3$) .

Soit $H(P)$ l'hypergraphe des intervalles d'un poset rangé P et soit k un entier. Nous définissons les problèmes de reconnaissance suivants :

— **Le stable maximum donnée par :** $\alpha H(P)) \geq k, k \leq P$, c'est le problème qui sert à déterminer l'existante d'un ensemble stable de cardinal maximum $\geq k$.
— **Recouvrement Par arêtes minimum :** donnée par $\rho(H(P)) \leq k$,$k \leq |N_0|N_r(P)$ .C'est le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par arêtes, de cardinal$\leq k$.
— **couplage maximum** $v(H(P)) \geq k, k \leq \min\{|N0|, |Nr(P)|\}$: le problème qui consiste à déterminer s'il existe un couplage de cardinal $\geq k$.
— **Recouvrement par sommets minimum :** donnée par$\tau(H(P)) \leq k, k \leq |P|$, le problème qui consiste à déterminer s'il existe un recouvrement par sommets de cardinal $\leq k$.
— **coloration minimum**$\gamma(H(P)) \leq k, k \leq |P|$ le problème qui consiste à déterminer s'il existe une coloration des sommets de P, de cardinal $\leq k$.

I. Bouchemakh [4,5] a montré que ces problémes de reconnaissance sont tous $NP - complets$.

Théorème [4, 5]

Les problèmes de reconnaissance $\alpha(H(P)) \geq k, \rho(H(P)) \leq k, \nu(H(P)) \geq k, \tau(H(P)) \leq k et \gamma(H(P)) \leq k$ où P et k sont donnés, sont $NP - complets$. Comme le problème $d(G) \geq k$ est $NP - complet$ pour les graphes bipartis (pour $k \geq 3$), nous déduisons directement que le problème de la partition domatique maximum $d(G(P)) \geq k$ dans le graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles d'un poset P est $NP - complet$ pour $k \geq 3$.

Théorème [6]

Le probléme de la partition domatique totale maximum dans le graphe 2-section de l'hypergraphe des intervalles d'un poset fini P est $NP - complet$.

Démonstration

Il est claire que ce problème appartient à la classe NP. Nous prouvons la complétude par une réduction polynomiale de problème du nombre domatique dans un graphe à notre problème. [23]

Soit $G = (V, E)$ un graphe et k un entier. Il est connu [15] que le problème de décision $d(G) \geq k$ est $NP_complet$. Nous présentons une construction qui donne la relation $d(G) = d_t(G(P))$. Notons les sommets de G par $v_1, ...v_n$. Nous associons à G le poset $P = V \cup V'$ où $V' = \{v'_i : v_i \in V\}$ est une copie de V et l'ordre est donné de la façon suivante : pour $v_i \in V$, $v'_j \in V'$, alors $v_i < v'_j$ si est seulement si v_i est adjacent à v_j dans G ou $i = j$, V et V' forment des antichaînes.

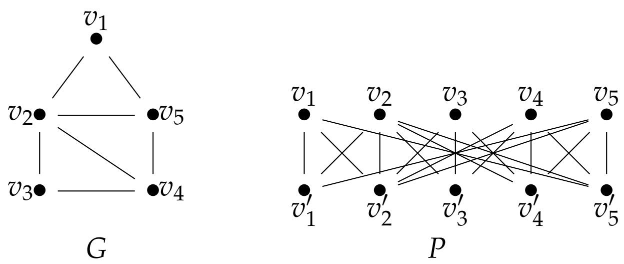


Figure3.4- le poset $P = V \cup V'$ associé au graphe $G = (V, E)$

Soit $\{D_k, k = 1, ..., q\}$ une partition domatique de G. Alors $\{D_k \cup D'_k, k = 1, ..., q\}$ est une partition domatique totale de $G(P)$. En effet, pour $x \in V - D_k$, il existe un élement $y \in D_k$ tel que xy est une arête de E et par suite dans P, $x < y'$ et $y < x'$, c-à-d, pour tout $x \in V - D_k$ (resp. $x' \in V' - D'_k$) il existe $y' \in D'_k$

3.5 Le nombre de stabilité dans une chaîne de taille n :

3.5.1 Le cas ou n est paire :

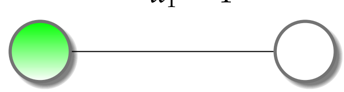
n est paire c'est-à-dire s'écrit sous forme : $n = 2 \times k$, tel que k peut être paire ou impaire.
Pour chaque deux valeurs successives de n, la parité de k change régulièrement.
$*$Si pour la première valeur de n, k est par exemple paire, pour la deuxième valeur qui la suit directement, k est certainement impaire. Et vis vers ça.

Exemples :

Soit $\alpha(G)$ la nombre de stabilité.

— Pour $n = 2$: $n = 2 \times 1$, donc $k = 1$, il est impaire.

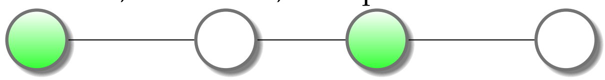
$\alpha_1 = 1$



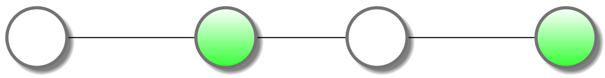
$\alpha_2(G) = 1$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 1, 1 = 1$

— Pour $n = 4$: $n = 2 * 2$, donc $k = 2$, il est paire.



$\alpha_1(G) = 2$



$\alpha_2(G) = 2$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \ min 2, 2 = 2$

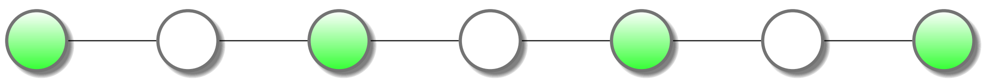
— Pour $n = 6$: $n = 2 * 3$, donc $k = 3$, il est impaire.

$\alpha_1(G) = 3$

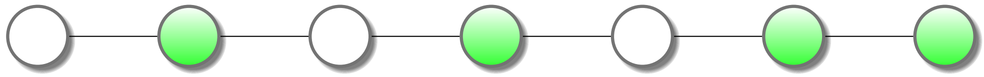
$\alpha_2(G) = 3$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), (G) = \ min 3, 3 = 3$

— Pour $n = 8$: $n = 2 * 4$, donc $k = 4$, il est paire.



$\alpha_1(G) = 4$



$$\alpha_2(G) = 4$$

$\alpha(G) =_m in\alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 4, 4 = 4$

— Pour $n = k : n = 2 * k$, la parité de k est variable selon le cas.
  $\alpha_1(G) = k$
  $\alpha_2(G) = k$
  $\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min k, k = k$

Remarque :

— Pour des valeurs paires et successives de n, la parité de k change régulièrement .

— La parité de nombre de stabilité suit celle de k, c à d : si k est paire (respectivement impaire), le nombre de stabilité est aussi paire (respectivement impaire).

— Le nombre de stabilité $\alpha(G) = k$ ou $\alpha(G) = n \div 2$

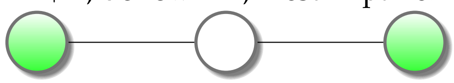
3.5.2 Le cas ou n est impaire :

n est impaire c'est-à-dire s'écrit sous forme : $n = 2 * k + 1$, tel que k peut être paire ou impaire.
Pour chaque deux valeurs successives de n, la parité de k change régulièrement.
$*$ Si pour la première valeur de n, k est par exemple paire, pour la deuxième valeur qui la suit directement, k est certainement impaire. Et vis vers ça.

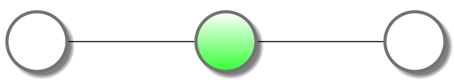
3.5.3 Exemples :

Soit $\alpha(G)$ la nombre de stabilité.

— Pour$n = 3 : n = 2 * 1 + 1$, donc $k = 1$, il est impaire.



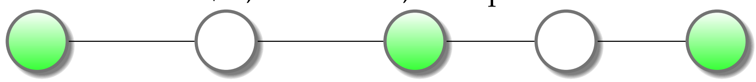
$$\alpha_1(G) = 2$$



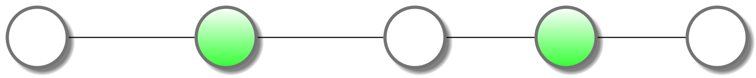
$$\alpha_2(G) = 1$$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 2, 1 = 1$

— Pour $n = 5 : n = 2 * 2 + 1$, donc $k = 2$, il est paire.



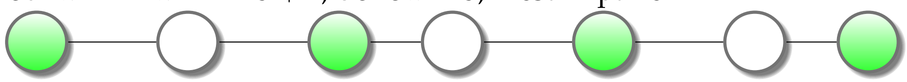
$$\alpha_1(G) = 3$$



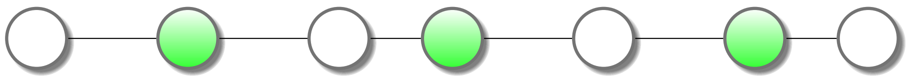
$$\alpha_2(G) = 2$$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 3, 2 = 2$

— Pour $n = 7 : n = 2 * 3 + 1$, donc $k = 3$, il est impaire.



$$\alpha_1(G) = 4$$



$$\alpha_2(G) = 3$$

$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 4, 3 = 3$

— Pour $n = 9 : n = 2 * 4 + 1$, donc $k = 4$, il est paire.
$\alpha_1(G) = 5$
$\alpha_2(G) = 4$
$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min 5, 4 = 4$

— Pour $n = k + 1 : n = 2 * k + 1$, la parité de $k + 1$ est variable selon le cas.
$\alpha_1(G) = k + 1$
$\alpha_2(G) = k$
$\alpha(G) = \min \alpha_1(G), \alpha_2(G) = \min k + 1, k = k$

Remarque :

— Pour des valeurs impaires successives de k, la parité du nombre de stabilité change régulièrement .

— Le nombre de stabilité $\alpha(G) = k$ ou $\alpha(G) = (n - 1)/2$.

Il est à noté que le rajout de deux sommets à une chaîne donnée mène au changement du nombre de stabilité par un seul degré.
Le nombre de stabilité reste constant pour un couple de chaîne paire et impaire

successif.

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié, un problème combinatoire dans la classe des hypergraphes $H(P)$ des intervalles d'un poset P,l'intérêt de cette classe est justifié par le fait de surpasser la contrainte posée en théorie des graphes qui est de ne modéliser que ce qui peut se mettre sous forme de couple. Mais, l'intérêt majeur de cette classe est qu'elle est à la frontière de la théorie des graphes et des posets par son graphe 2-section ou graphe des intervalles d'un posets. Le problème étudié dans cette dernière est l'un des problème les plus difficile de la théorie des graphes et hypergraphes, En effet, la domination et ses variantes appartiennent à la classe des problèmes $PN - durs$. Du fait de sa complexité la recherche d'un algorithme exacte et efficace et peut probable ce qui a poussé les scientifiques à des études structurelles plus qu'algorithmiques dont la motivation du sujet de ce mémoire. Au terme de notre étude il nous parait intéressant d'approfondir cette étude par l'ajout d'autres opérations comme la réduction, ...

Bibliographie

ملخص

نقترح معالجة أحد أهم محاور نظرية الرسم البياني ، فهو يتعلق بشكل أساسي بالهيمنة.
قدمنا في الجزء الأول بعض التعريفات لنظرية الرسم البياني وكنا مهتمين بمفهوم الإيجابيات ، ودرسنا مشكلة اندماجية في فئة الرسوم البيانية الزائدة $H(P)$ لفترات من P . ثم ركزنا اهتمامنا على تعقيد الخوارزمية ، حيث رأينا هذه الفئات المختلفة مثل المشكلات P و NP و $NP - complete$.
في الجزء الثاني ،كنا مهتمين باثنين من الرسوم البيانية الثابتة المتعلقة بالهيمنة ؛ إنه الرقم المحلي والعدد المحلي الإجمالي الذي درسناه في فئة معينة وهو الرسم البياني المكون من قسمين من الرسم البياني التشعبي للوضع P ، والمشار إليه $G(P)$. لقد قدمنا القيم والحدود الدقيقة لهذين الرقمين عندما يكون P هو المجموع المباشر أو الخطي أو الناتج الديكارتي لاثنين من الموجودين الآخرين. حاول استغلال عمليات أخرى على الوضعيات أو استخدام أخرى تبين أن ثوابت الرسوم البيانية مثيرة للاهتمام في هذه الفئة من الرسم البياني التي يمكن دراستها. لقد أظهرنا $NP - Compleness$ لأقصى إجمالي مشكلة التقسيم المحلي $d_t(G)\ geqk$ في هذه الفئة من الرسم البياني.

Résumé

Nous nous proposons d'abordés l'un des axes les plus important de la théorie des graphes, il s'agit essentiellement de la domination.
dans la première partie on a présentés quelque définitions sur la théorie des graphe et on s'est intéressé sur le concepts des posets, nous avons étudié, un problème combinatoire dans la classe des hypergraphes $H(P)$ des intervalles d'un poset P
Ensuite nous avons focaliser notre intérêt sur la complexité algorithmique,où on a vu ces differentes classes tel que les probléme P et NP,$NP - complet$.
En seconde partie nous nous sommes intéressés à deux invariants de graphes liés à la domination ; il s'agit du nombre domatique et du nombre domatique total que nous avons étudié sur une classe particuliére qui est le graphe 2-section de l'hypergraphe d'un poset P, noté $G(P)$. Nous avons donné des valeurs exactes et des bornes de ces deux nombres lorsque P est la somme directe ou linéaire ou le produit cartésien de deux autres posets.
Essayer d'exploiter d'autres opérations sur les posets ou d'utiliser d'autres invariants de graphes s'avére intéressant sur cette classe de graphe peut étudiée.
Nous avons montré la $NP - compltude$ du probléme de la partition domatique totale maximum $d_t(G) \geq k$ dans cette classe de graphe.

Abstract

We propose to address one of the most important axes of graph theory, it is essentially about domination. in the first part we presented some definitions on graph theory and we were interested in the concept of posets, we studied a combinatorial problem in the class of hypergraphs $H(P)$ of intervals of a poset

P. Then we focused our interest on the algorithmic complexity, where we saw these different classes such as the problems P and NP,$NP - complete$.
In the second part, we were interested in two invariants of graphs related to domination; it is the domatic number and the total domatic number that we have studied on a particular class which is the 2-section graph of the hypergraph of a poset P, denoted $G(P)$. We have given exact values and bounds of these two numbers when P is the direct or linear sum or the Cartesian product of two other posets.
Try to exploit other operations on the posets or to use other invariants of graphs turns out to be interesting on this class of graph that can be studied.
We have shown the $NP - completeness$ of the maximum total domatic partition problem $d_t(G) \geq k$ in this class of graph.