

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'Ingénieur d'Etat en Automatique*

***Thème***

**Identification des systèmes dynamiques  
par Optimisation Globale**

Proposé et dirigé par : **Mr.A.MAIDI**

Présenté par :

**BAKIRI Farroudja**  
**TITOUCHE Kahina**  
**YAHMI Lamia**

Soutenu le : 06 / 07 /2010

*Promotion 2010*

# *Remerciements :*

*Nous remercions en premier lieu DIEU le tout puissant qui nous a donné le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Nous sommes très heureuses d'exprimer nos remerciements et notre profonde gratitude à notre promoteur M<sup>r</sup> **A.MAIDI**.*

*Nous remercions tous les membres du Jury d'avoir acceptés de porter un avis sur ce mémoire.*

*C'est le moment aussi pour dire merci à tous les professeurs qui nous ont suivi du primaire jusqu'à ce jour.*

*Un très grand merci à nos parents qui ont toujours été à nos cotés.*

*Nous remercions chaleureusement le chef du département automatique M<sup>r</sup> **BENSIDHOUM** pour ses conseils.*

*Enfin, merci à tous nos amis (es) pour leurs soutiens.*

# *Dédicace :*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- *Mes très chers parents.*
- *Mes grands parents.*
- *Mes chers frères et ma sœur Malika.*
- *Mes oncles et tentes et leurs enfants.*
- *Mes chers binômes et leurs familles.*
- *Tous mes amis (es).*
- *Tous ceux que je connais.*

**TITUCHE KAHINA**

# *Dédicace :*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- *Mes très chers parents.*
- *Mes grands parents.*
- *Mes chers frères et sœurs.*
- *Ma chère famille.*
- *Mes chers binômes et leurs familles.*
- *Tous mes amis (es).*
- *Tous ceux que je connais.*

**YAHMI LAMIA**

# Dédicace :

Je dédie ce modeste travail :

- ✓ A mes parents que j'aime beaucoup.
- ✓ A mon mari.
- ✓ A mon cher et unique frère Alilou.
- ✓ A mes sœurs et leurs maris.
- ✓ A mes nièces et neveux.
- ✓ A mes beaux parents.
- ✓ A mes beaux frères, ma belle sœur et son époux.
- ✓ A mes chers binômes et leurs familles.
- ✓ A tous mes amis (es) et tous ceux que j'aime.

**FARROUDJA BAKIRI.**

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
 <b>Chapitre 1 : généralités sur l'identification des systèmes dynamiques</b>	
<b>I.1</b> Introduction.....	<b>3</b>
<b>I.2</b> Notion d'identification.....	<b>3</b>
<b>I.2.1</b> Principe de l'identification.....	<b>3</b>
<b>I.2.1.1</b> Modélisation.....	<b>3</b>
<b>I.2.1.2</b> Identification.....	<b>3</b>
<b>I.2.2</b> Notion d'un modèle.....	<b>4</b>
<b>I.2.2.1</b> Types de modèle.....	<b>4</b>
<b>I.2.2.1.1</b> modèle de connaissance .....	<b>4</b>
<b>I.2.2.1.2</b> modèle de comportement.....	<b>4</b>
<b>I.2.2.1.3</b> modèle intermédiaire.....	<b>4</b>
<b>I.3</b> Etapes de l'identification.....	<b>5</b>
<b>I.3.1</b> Acquisition des données.....	<b>6</b>
<b>I.3.1.1</b> Illustration de l'importance du signal d'excitation.....	<b>6</b>
<b>I.3.2</b> Choix de la structure du modèle.....	<b>7</b>
<b>I.3.3</b> Choix de la méthode d'identification.....	<b>8</b>
<b>I.3.4</b> Validation du modèle.....	<b>8</b>
<b>I.4</b> Classement des méthodes d'identification.....	<b>8</b>
<b>I.4.1</b> Méthodes graphiques.....	<b>9</b>
<b>I.4.2</b> Méthodes numériques.....	<b>9</b>
<b>I.4.2.1</b> Méthodes non récursives.....	<b>9</b>
<b>I.4.2.2</b> Méthodes récursives.....	<b>9</b>
<b>I.4.3</b> Méthode du modèle.....	<b>10</b>
<b>I.5</b> Conclusion.....	<b>10</b>

## Chapitre 2: méthodes d'identification

<b>II.1</b> Introduction.....	<b>11</b>
<b>II.2</b> Méthodes graphiques.....	<b>11</b>
<b>II.2.1</b> Méthodes basées sur des réponses temporelles.....	<b>11</b>
<b>II.2.1.1</b> Modèle à deux paramètres.....	<b>11</b>
<b>II.2.1.1.1</b> Système du 1 <sup>er</sup> ordre sans retard .....	<b>11</b>
<b>II.2.1.1.2</b> Système intégrateur.....	<b>12</b>
<b>II.2.1.2</b> Modèle à trois paramètres .....	<b>13</b>
<b>II.2.1.3</b> Méthode de Strejc.....	<b>14</b>
<b>II.2.1.4</b> Méthode de Broïda.....	<b>16</b>
<b>II.2.2</b> Méthodes pour systèmes avec intégration.....	<b>17</b>
<b>II.2.3</b> Modèle des systèmes oscillatoires.....	<b>18</b>
<b>II.3</b> Méthode des moindres carrés.....	<b>19</b>
<b>II.3.1</b> Principe de la méthode.....	<b>19</b>
<b>II.3.2</b> Problème.....	<b>20</b>
<b>II.3.3</b> Application des moindres carrés à l'identification des systèmes.....	<b>20</b>
<b>II.4</b> La méthode des moindres carrés récursifs .....	<b>23</b>
<b>II.5</b> Méthode du modèle .....	<b>26</b>
<b>II.5.1</b> Principe de la méthode.....	<b>26</b>
<b>II.6</b> Conclusion.....	<b>27</b>

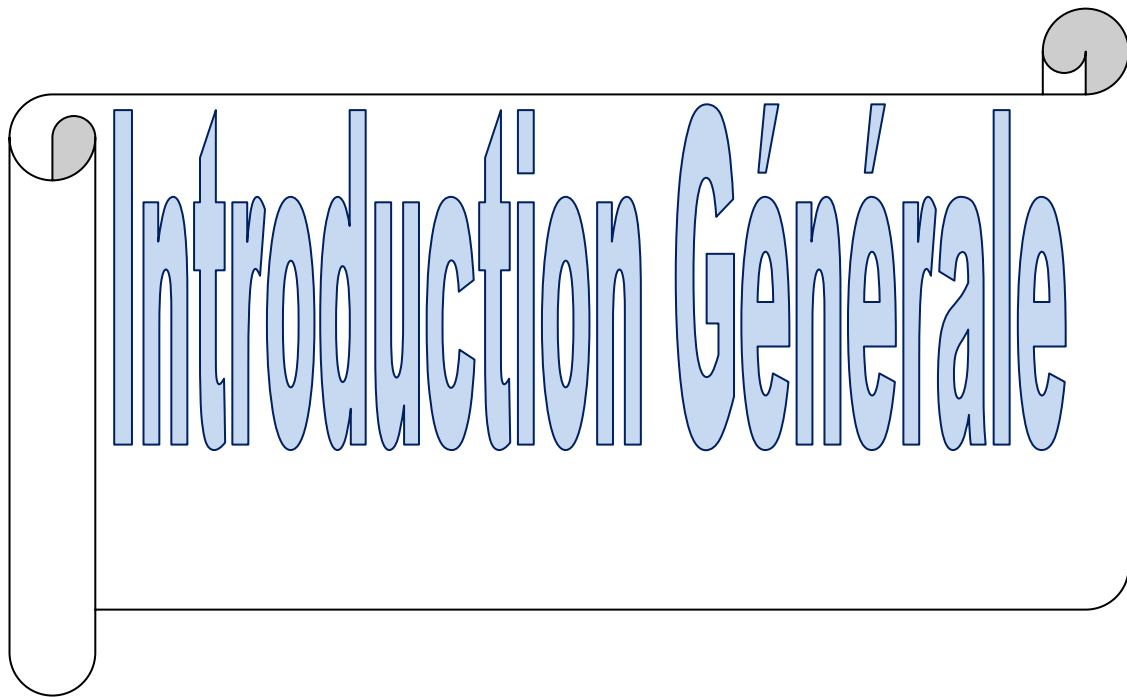
## Chapitre 3 : Optimisation Globale: méthode d'Alienor

<b>III.1</b> Introduction.....	<b>28</b>
<b>III.2</b> Généralités sur l'optimisation.....	<b>28</b>
<b>III.2.1</b> Principe de l'optimisation.....	<b>28</b>
<b>III.2.2</b> Objectif de l'optimisation.....	<b>29</b>
<b>III.2.3</b> Formulation d'un problème d'optimisation.....	<b>30</b>
<b>III.2.4</b> Conditions d'optimalité.....	<b>31</b>
<b>III.3</b> Méthodes d'optimisation.....	<b>33</b>
<b>III.3.1</b> Optimisation sans contraintes.....	<b>33</b>
<b>III.3.1.1</b> Classification des méthodes de recherche de l'optimum.....	<b>33</b>

<b>III.3.1.1.1</b> Méthodes graphiques.....	33
<b>III.3.1.1.2</b> Méthodes analytiques.....	33
<b>III.3.1.1.3</b> Méthodes numériques.....	34
<b>III.3.1.1.3.1</b> Méthodes directes.....	34
<b>III.3.1.1.3.2</b> Méthodes du premier ordre.....	34
<b>III.3.1.1.3.3</b> Méthodes du second ordre.....	34
<b>III.3.2</b> Optimisation en présence de contraintes.....	35
<b>III.3.3</b> Optimisation locale.....	35
<b>III.3.4</b> Optimisation globale.....	36
<b>III.4</b> Méthode d'ALIENOR.....	36
<b>III.4.1</b> Optimisation globale par la méthode d'Alienor.....	38
<b>III.4.2</b> Choix de la transformation réductrice.....	39
<b>III.4.3</b> Opérateur qui Préserve l'Optimisation (O.P.O).....	40
<b>III.4.4</b> Exemple illustratif.....	40
<b>III.5</b> Conclusion.....	43

## **Chapitre 4 : Identification du modèle d'un bac de stockage par la méthode d'Alienor**

<b>IV.1</b> Introduction.....	44
<b>IV.2</b> Description du procédé.....	44
<b>IV.3</b> Modèle du bac de stockage.....	45
<b>IV.3.1</b> La linéarisation autour d'un point d'équilibre .....	45
<b>IV.3.2</b> Calcul de la fonction de transfert .....	48
<b>IV.4</b> Résolution analytique du modèle du bac de stockage.....	50
<b>IV.5</b> Formulation du problème d'identification.....	51
<b>IV.6</b> Formulation du problème d'optimisation et résolution.....	53
<b>IV.6.1</b> Mesures non bruitées.....	54
<b>IV.6.2</b> Mesures bruitées .....	56
<b>IV.6.3</b> Interprétation des résultats.....	57
<b>IV.7</b> Conclusion.....	58
<b>Conclusion générale</b> .....	59



Introduction Générale

Le domaine de l'automatique est basé sur l'utilisation d'un modèle mathématique. Ce dernier est obtenu par la modélisation du système qui consiste à représenter les différentes relations existantes entre les variables caractéristiques du système par des équations mathématiques. Le modèle est utilisé généralement, pour l'analyse, la synthèse, le diagnostic, et l'optimisation du système. Cependant, plusieurs inconvénients sont rencontrés dans l'obtention d'un modèle complet des processus par la modélisation. En effet, il est très difficile voir impossible, pour certains systèmes, d'écrire toutes les équations mathématiques (lois de la physique). C'est dans l'optique de surmonter cette difficulté que l'identification s'est apparut pour simplifier l'obtention d'un modèle acceptable.

Identifier un système revient à proposer une structure d'un modèle à partir des mesures obtenues et à déterminer ses paramètres de telle sorte que le comportement du modèle suit celui du système réel lorsque ces derniers sont soumis à une même entrée. Ainsi, différentes méthodes d'identification ont été proposées. Les différentes méthodes développées peuvent être classées en trois catégories : les méthodes graphiques (Strejc, Broïda, ...), les méthodes non récursives (méthodes des moindres carrés) et méthodes récursives (méthodes des moindres carrés récursifs).

De manière générale, le principe des méthodes d'identification consiste à minimiser l'écart observé entre la sortie prédite par le modèle et celle mesurée en définissant un critère. Ce principe est connu par la méthode du modèle. Cette dernière est très utilisée en pratique car le problème d'identification est formulé sous forme d'un problème d'optimisation dont les paramètres à identifier sont les variables de décision.

De nombreuses méthodes d'optimisation peuvent être appliquées pour résoudre ce type de problème mais la plupart de ces méthodes sont très difficiles à mettre en œuvre et généralement convergent vers les optimums locaux. De plus lorsque le nombre de paramètres à identifier (variables de décision) est élevé, la résolution devient compliquée.

Dans ce travail, on abordera une résolution d'un problème d'identification par la méthode du modèle en utilisant une technique d'optimisation globale appelée Alienor. Cette dernière, en utilisant des transformations réductrices, permet de ramener le nombre de variables de décision (paramètres à identifier) à une seule variable de décision, ce qui permet de simplifier la résolution du problème d'optimisation. De plus la méthode d'Alienor permet

de localiser un optimum global. La démarche globale proposée sera adoptée pour l'identification du bac de stockage dont la dynamique est décrite par un modèle à trois paramètres (élément du premier ordre avec retard).

Ainsi, le présent mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des notions de base concernant l'identification paramétrique des systèmes dynamiques. Ce chapitre débute par le principe d'identification, puis la définition des différents types de modèle et se termine par les différentes étapes de l'identification.

Le second chapitre illustre les méthodes d'identification les plus souvent rencontrées et leurs mises en œuvre. Ces approches sont classées en plusieurs catégories dont on essaiera de donner quelques définitions, à savoir les méthodes graphiques, la méthode des moindres carrés et la méthode du modèle.

Le troisième chapitre constitue une introduction à la théorie d'optimisation, dont on présente la forme générale d'un problème d'optimisation, puis on citera les conditions d'optimalités et enfin on abordera les différentes méthodes d'optimisation en mettant l'accent sur la méthode d'optimisation globale d'Alienor.

Le dernier chapitre est consacré à l'identification paramétrique d'un bac de stockage en appliquant la méthode du modèle. Dans un premier lieu, on formule le problème d'optimisation permettant d'identifier ses paramètres, puis on passe à la résolution du problème par la méthode d'Alienor suivie de l'étape de validation.

Enfin, on termine notre travail par une conclusion générale sur l'étude menée.



## Chapitre I :

# Identification des systèmes dynamiques

**I.1 Introduction :**

Généralement, l'objectif de l'identification se résume en pratique, par la détermination des modèles de conduite, qui sont utilisés dans la simulation, la commande ou la régulation des processus plutôt que de modèles de connaissance. En effet, les diverses méthodes d'identification traitent l'ensemble de relevés expérimentaux effectués sur un processus donné afin de déterminer par la suite les valeurs inconnues des paramètres du modèle pour divers types de sollicitation.

Ce chapitre est consacré à des notions générales sur l'identification des systèmes.

**I.2 Notion d'identification :****I.2.1 Principe d'identification :**

Identifier un système consiste à proposer une structure entre son entrée et sa sortie, ainsi de déterminer à partir du couple (entrée / sortie) les valeurs des paramètres de son modèle. La connaissance du modèle est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système de régulateur performant.

Deux approches sont possibles pour déterminer un modèle :

**I.2.1.1 Modélisation :**

C'est une méthode basée sur la traduction de toutes les lois physiques accompagnées au système en équations mathématiques.

**I.2.1.2 Identification :**

C'est l'opération de détermination du modèle dynamique d'un procédé (système) à partir des mesures entrées / sorties. L'identification est une technique expérimentale qui s'appuie sur l'utilisation des procédures et des algorithmes manipulant les mesures

expérimentales. Il existe différentes méthodes d'identification (Méthodes graphiques, méthodes récursives, et méthodes non récursives).

### **I.2.2 Notion d'un modèle :**

Un modèle est une représentation mathématique qui exprime les relations entre les variables caractéristiques du système. Il est donné sous forme d'équations mathématiques (différentielles et algébriques) où les paramètres du système interviennent. [4]

#### **I.2.2.1 Types de modèle : [4]**

##### **I.2.2.1.1 Modèle de connaissance :**

Il est élaboré à partir des lois de la physique et de la chimie, dont l'objectif principal est d'expliquer un phénomène par des relations mathématiques comportant de nombreux paramètres ayant un sens physique (résistances, inductances, masse, coefficient de frottement,...). Ce type de modèle est appelé aussi « boîte blanche ».

##### **I.2.2.1.2 Modèle de comportement :**

C'est un modèle généralement linéaire, sa validité reste limitée à des petites variations autour du point de fonctionnement qui est appelé aussi fonction de transfert ou modèle ARMAX.

Les coefficients du modèle présentent ses paramètres qui peuvent avoir un sens physique ou non. Ce modèle est aussi appelé « boîte noire ».

##### **I.2.2.1.3 Modèle intermédiaire :**

Constitue un hybride entre les deux modèles précédents. On peut les considérer comme des modèles de connaissance simplifiés. La structure est déterminée par des lois

physiques (modèle de connaissance), cependant les paramètres sont déterminés à partir des mesures (modélisation semi-physique).

### I.3 Etapes de l'identification :

Afin de pouvoir réussir une bonne identification d'un système dynamique, on doit toujours suivre un chemin structuré bien déterminé. Il consiste à respecter les différentes étapes données par le schéma de la figure 1.1 : [1]

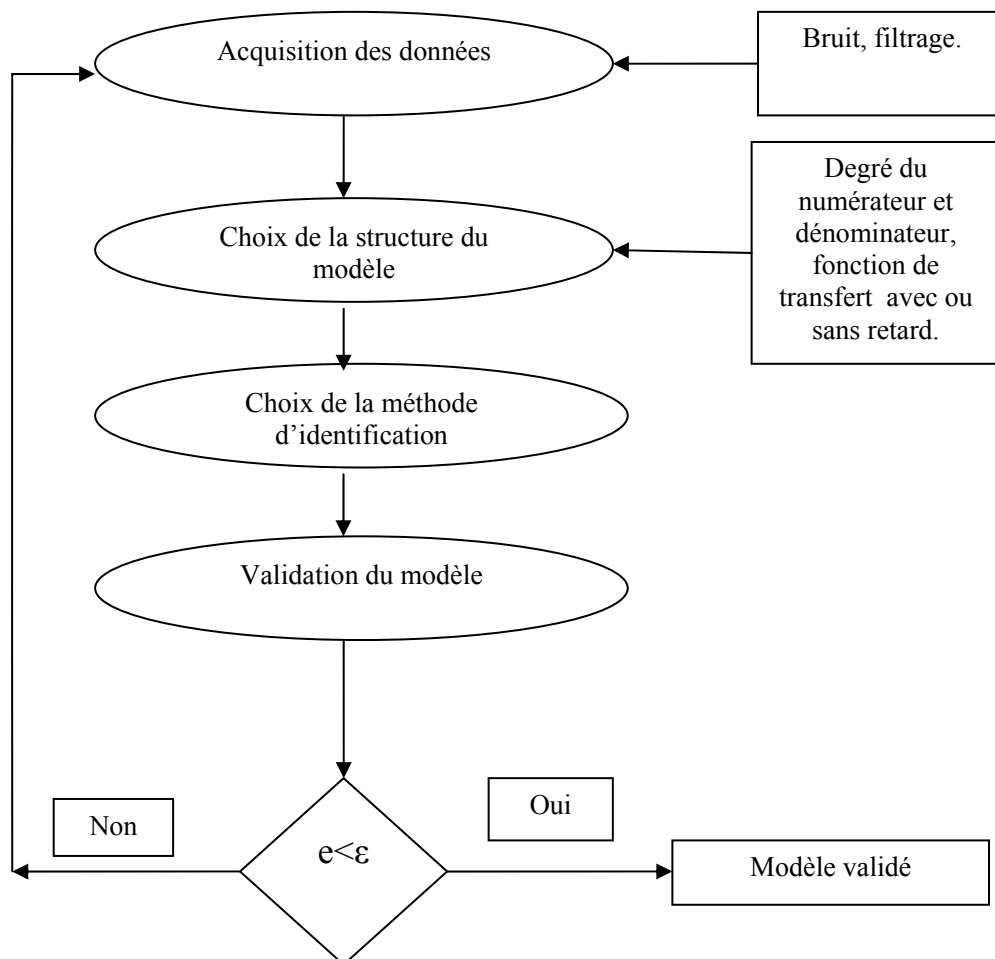


Figure 1.1 Différentes étapes d'identification

### I.3.1 Acquisition des données :

Cette première étape consiste au choix de l'entrée comme signal d'excitation possédant une densité spectrale homogène pouvant couvrir l'ensemble de la bande passante du procédé à identifier.

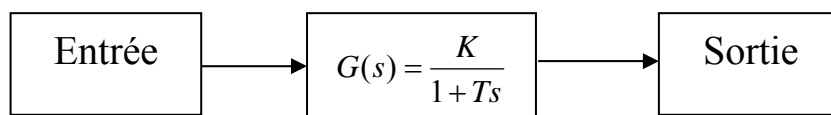
Avant de commencer l'identification, il faudra éliminer le bruit qui consiste à traiter toutes les données.

$$\text{La sortie mesurée} = \text{la sortie réelle} + \text{le bruit}$$

Le rapport signal / bruit doit être très grand, ce qui signifie que le signal d'excitation injecté au procédé doit être très important.

#### I.3.1.1 Illustration de l'importance du signal d'excitation :

Soit un système réel de gain statique  $K=1$  et d'une constante de temps  $T=8$ secondes (**Figure 1.2**). On fait injecter à ce procédé différents types pour l'entrée :



**Figure 1.2** Représentation du procédé

Les résultats obtenus pour chaque signal sont représentés dans le tableau suivant :

Signal	Gain (K)	Constante de temps (T)
Constante	1.0048	3.3098
Impulsion	1.6826	4.4800
Echelon	1.0033	7.6879
Rectangulaire	0.9980	8.0671
SBPA (Séquence Binaire Pseudo Aléatoire)	1	7.98
Système réel	1	8

**Tableau 1.1** Différents résultats des signaux d'excitation

**Remarque 1.1:**

*Le meilleur résultat est celui obtenu par une entrée SBPA. [4]*

**I.3.2 Choix de la structure du modèle :**

Cette étape concerne les modèles de comportement (fonction de transfert) et consiste à choisir l'ordre du polynôme (numérateur et dénominateur) de la fonction de transfert.

Cependant une modélisation, une expérience humaine ou un algorithme peuvent être utilisés comme procédures pour fixer l'ordre de la fonction de transfert à partir des mesures. [1]

**I.3.3 Choix de la méthode d'identification:**

Pour les signaux d'excitation possédant de faibles amplitudes, la sortie mesurée sera accompagnée d'un bruit. En effet, ce dernier introduit des biais (erreur d'estimation paramétrique) et généralement il est très difficile de caractériser le type du bruit d'où la nécessité d'introduire à chaque fois une hypothèse sur ces structures puis choisir un algorithme d'estimation approprié et enfin tester la validation du modèle obtenu. [2]

De différentes méthodes sont utilisées pour l'identification des procédés, on peut citer :

- Méthodes graphiques.
- Méthodes non récursives.
- Méthodes récursives.
- Méthode du modèle.

**I.3.4 Validation du modèle :**

La dernière étape d'identification est l'étape de validation du modèle. Parmi les procédures les plus utilisées, on trouve celles de type statistique. Le but recherché est de montrer que la sortie du modèle excité par le même signal que le système reproduit les variations de la sortie causées par le signal de commande en s'affranchissant de l'effet du bruit de mesure. [1]

**I.4 Méthodes d'identification :**

Plusieurs méthodes ont été développées pour l'identification des systèmes, on peut citer à titre d'exemple :

- méthodes graphiques.
- méthodes numériques.
- méthode du modèle.

**I.4.1 Méthodes graphiques :**

Elles sont basées sur la réponse indicielle du système, elles ne permettent pas d'avoir des résultats bien précis mais elles donnent seulement des renseignements intéressants sur la dynamique de ce système.

Le choix de la structure du modèle s'effectue selon le type de cette dernière : si elle possède un retard ou non, si elle possède un dépassement ou elle est apériodique, si le processus est stable ou contient un intégrateur... etc. Suivant ce type on choisit le modèle et la méthode associée.

Généralement, on utilise les méthodes graphiques pour identifier des modèles simples (typiquement du premier ordre avec retard). [2]

**I.4.2 Méthodes numériques :**

Sont des méthodes basées sur l'utilisation des algorithmes, on trouve deux types de méthode: méthodes récursives et méthodes non récursives. [1]

**I.4.2.1 Méthodes non récursives :**

Elles traitent les données (entrées-sorties) obtenues sur un horizon de temps et calculent les paramètres du modèle. [1]

**I.4.2.2 Méthodes récursives :**

Traitent les données (entrées-sorties) à chaque instant, elles permettent de calculer à chaque instant le nouvel estimé du vecteur des paramètres du système. [1]

### I.4.3 Méthode du modèle :

La méthode du modèle suit dans son déroulement le principe de base de la modélisation.

Cette méthode, permet de minimiser l'écart quadratique  $J(t)$  entre la sortie du système  $y(t)$  mesurée aux différents instants de l'expérience et la sortie du modèle  $y_m(t)$  (expression mathématique).

Le critère à minimiser est donc :

$$J(t) = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad \text{avec} \quad e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (1.1)$$

La structure du modèle se déduit à partir de la réponse  $y_m(t)$ . [2]

### I.5 Conclusion :

Pour l'automaticien, tous les modèles sont de nature dynamique. Cependant, les modèles paramétriques sont les mieux adaptés à l'obtention de la loi de commande des systèmes numériques. En outre, l'informatique peut aider à exécuter la tâche d'identification par la génération des signaux de test, l'acquisition des données et mesures, leur traitement en temps différé ou en temps réel, et enfin la validation du modèle.

Dans le chapitre prochain on va étudier les différentes méthodes utilisées pour identifier un système dynamique.



**Chapitre II :**

**Méthodes d'identification**

## II.1 Introduction :

Dans le chapitre précédent on a présenté l'objectif de l'identification et sa nécessité dans le domaine de l'automatique. En effet, de diverses études ont été consacrées à l'identification des systèmes dynamiques et les nombreux résultats obtenus sont utilisés en pratique.

Ce chapitre présente les différentes méthodes de calcul des paramètres d'un modèle de comportement. On peut classer les différentes approches en plusieurs catégories, où on trouve les méthodes classiques basées sur une réponse indicielle, qui sont le plus souvent graphiques, la méthode des moindres carrés et la méthode du modèle.

## II.2 Méthodes graphiques :

Ce sont des méthodes basées sur des réponses (graphes) à partir de lesquelles, on peut identifier les paramètres du système, il existe plusieurs méthodes graphiques, on peut citer :

- Méthodes basées sur des réponses temporelles (méthode de Strejc, méthode de Broïda et d'autres).
- Méthodes pour un système avec intégration.
- Modèle des systèmes oscillatoires.

### II.2.1 Méthodes basées sur des réponses temporelles :

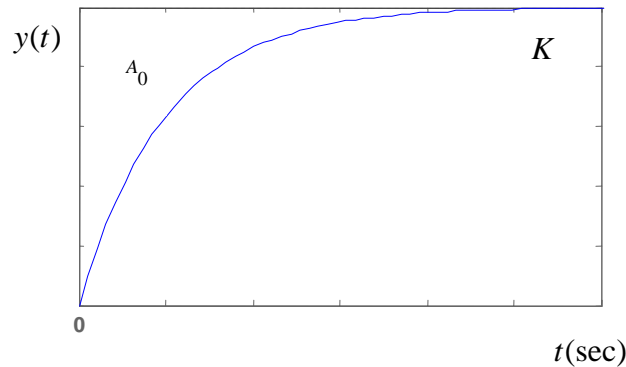
#### II.2.1.1 modèle à deux paramètres :

##### II.2.1.1.1 Un système du 1<sup>er</sup> ordre sans retard :

Dans ce cas, le modèle est donné sous forme :

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad (2.1)$$

Les deux paramètres à identifier sont : le gain statique( $K$ ) et la constante de temps( $T$ ). La figure (2.1) illustre la réponse à un échelon obtenue à partir du modèle (2.1).



**Figure 2.1** Réponse indicielle du procédé

➤ **Identification des paramètres :**

1. Le gain  $K$  se déduit directement à partir du graphe (**Figure 2.1**) ;

$$K = y(\infty) \quad (2.2)$$

2. La constante du temps  $T$  représente le temps de résidence moyen :

$$T = T_{rm} = \frac{A_0}{K} \quad (2.3)$$

Tel que,  $A_0$  est la surface située entre la droite  $K$ , la réponse  $y$  et l'axe des coordonnées ;

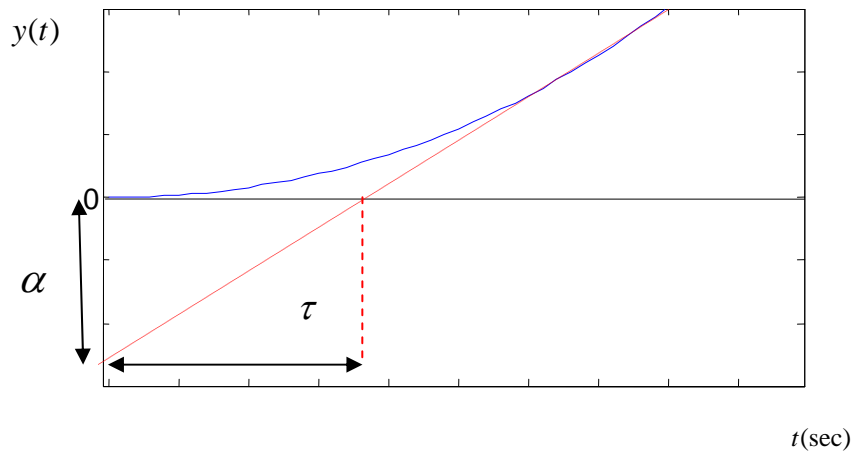
$$A_0 = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt \quad (2.4)$$

### II.2.1.1.2 Système intégrateur :

Le modèle dans un système intégrateur est donné sous forme :

$$G(s) = \frac{\alpha}{\tau s} e^{-\tau s} \quad (2.5)$$

Dans le but d'identification des paramètres désirés  $(\alpha, \tau)$ , on trace la tangente à la courbe, comme l'indique la figure suivante :



**Figure 2.2** Sortie d'un système intégrateur

L'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses représente  $\tau$  et l'intersection de la tangente avec l'axe des coordonnées représente  $\alpha$ . [4]

### II.2.1.2 Modèle à trois paramètres :

La forme de la fonction de transfert d'un modèle à trois paramètres est la suivante :

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau s} \quad (2.6)$$

Pour ce modèle, on identifie trois paramètres : le gain statique  $K$ , le retard  $\tau$  et la constante du temps  $T$ . [2]

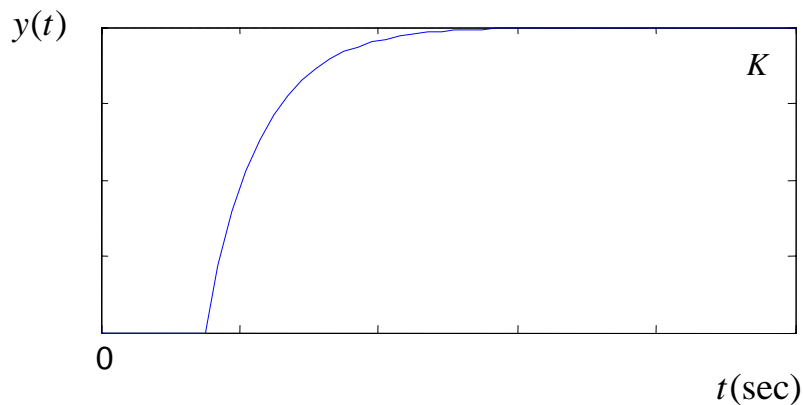
➤ **Identification des paramètres :**

- $K$  se déduit directement à partir du graphe :  $K = y(\infty)$
- Le temps de résidence moyen se calcule comme suit :

$$T_{rm} = \frac{\int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt}{K} \quad (2.7)$$

$$\text{On a : } T_{rm} = \tau + T \quad \text{donc} \quad T = T_{rm} - \tau \quad (2.8)$$

La réponse de ce système est représentée dans la figure ci-dessous :



**Figure 2.3** Réponse indicielle retardée

### II.2.1.3 Méthode de Strejc :

La méthode de Strejc est une méthode d'identification classique qui s'applique à un système dont la réponse indicielle ne présente pas de dépassement. En effet, le modèle de ce système a comme fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^n} e^{-\tau s} \quad (2.9)$$

Les paramètres à identifier sont :

- Le gain statique  $K$ .
- Le retard  $\tau$ .
- La constante du temps  $T$ .
- L'ordre du système  $n$ .

Pour ce faire, on suit les étapes suivantes :

- Le gain statique est mesuré directement à partir du graphe,  $K$  est la valeur finale de la sortie :  $K = y(\infty)$ .
- On trace la tangente au point d'inflexion, comme l'indique la figure ci-dessous, cette tangente permet de définir deux valeurs  $T_u$  et  $T_a$  (voir figure 2.4).
- On calcule le rapport  $T_u/T_a$ , ce dernier permet de calculer les valeurs de  $\tau$  et  $T$ .

A partir de la table (Tableau 2.1), on cherche la valeur la plus proche (immédiatement inférieure) au rapport calculé précédemment, le résultat obtenu permet d'identifier l'ordre  $n$ .

[2]

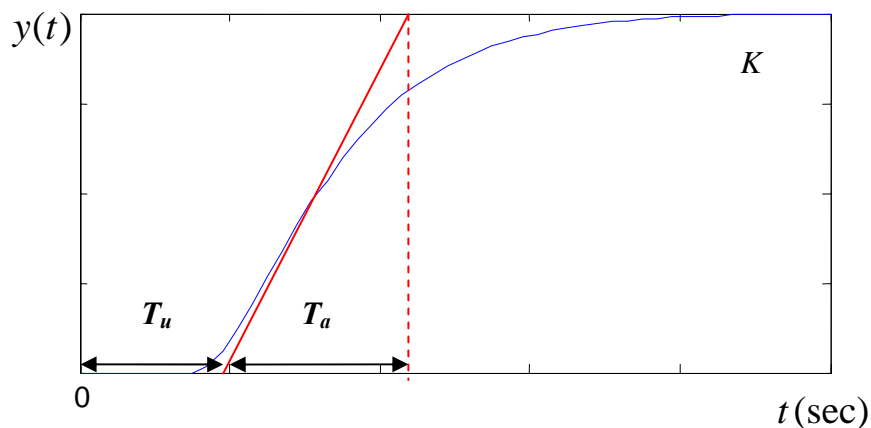


Figure 2.4 Méthode de Strejc.

La constante de temps  $T$  se calcule comme suit :

$$T = \frac{T}{T_a} \Big|_{table} \times T_{a,mesurée} \quad (2.10)$$

Et le retard  $\tau$  :

$$\tau = T_{u,mesurée} - \frac{T_u}{T_a} \Big|_{table} \times T_{a,mesurée} \quad (2.11)$$

Le tableau suivant représente les coefficients de la méthode de Strejc :

$T_u/T_a$	Ordre du modèle ( $n$ )	$T/T_a$
0	1	1
0.125	2	0.37
0.220	3	0.27
0.320	4	0.22
0.410	5	0.20
0.490	6	0.18
0.570	7	0.19
0.640	8	0.15
0.71	9	0.14

**Tableau 2.1** Coefficients de la méthode de Strejc.

#### II .2.1.4 Méthode de Broïda :

La méthode de Broïda consiste à assimiler le procédé régulé à un système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard (voir figure 2.5) :

$$G(s) = \frac{K}{1 + T s} e^{-\tau s} \quad (2.12)$$

La méthode de Broïda, consiste à mesurer les instants  $t_1$  et  $t_2$  pour lesquels la réponse atteint respectivement 28% et 40% de sa valeur finale. [2]

La constante de temps  $T$  et le retard  $\tau$  se calculent comme suit :

$$T = 2.8 t_{28\%} - 1.8 t_{40\%} \quad (2.13)$$

$$\tau = 5.5 (t_{40\%} - t_{28\%}) \quad (2.14)$$

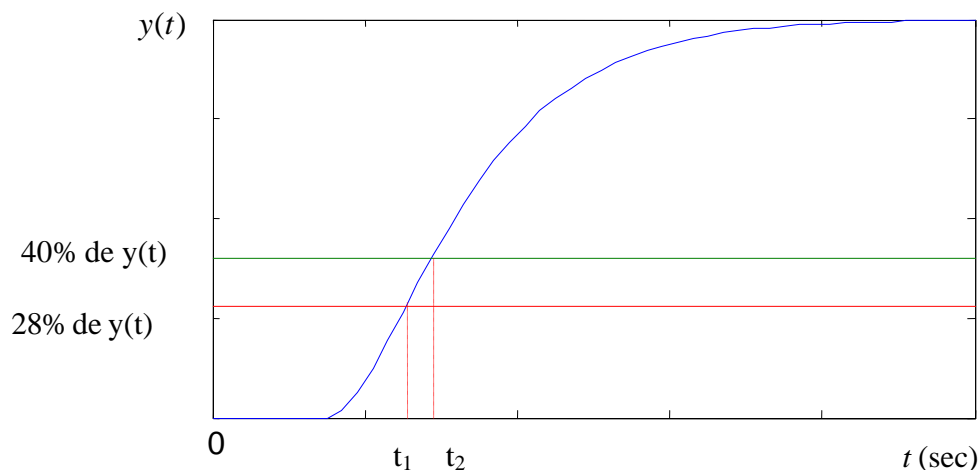


Figure 2.5 méthode de Broïda

### II.2.2 Méthodes pour systèmes avec intégration :

Un système d'intégration est un système qui possède un ou plusieurs intégrateurs dans sa fonction de transfert. La réponse de ce dernier à une entrée **échelon** n'atteint pas son régime stationnaire, pour cela on injecte une **impulsion** d'amplitude suffisante. Après l'obtention de la réponse impulsionnelle, on applique les méthodes précédentes pour identifier ces paramètres puis on multiplie le modèle obtenu par  $1/s$ . [2]

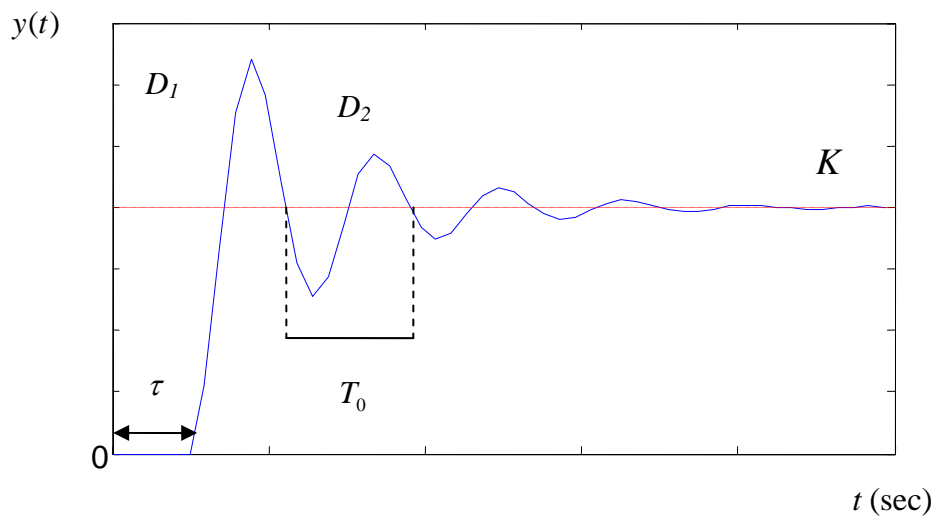
### II.2.3 Modèle des systèmes oscillatoires :

Dans ce cas la réponse indicielle du système présente un caractère oscillant, d'où le modèle est de deuxième ordre.

La fonction de transfert du système est sous forme :

$$G(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2} e^{-\tau s} \quad (2.15)$$

- Où :
- $\omega_n$  : pulsation naturelle non amortie.
  - $\xi$  : facteur d'amortissement.
  - $K$  : le gain statique.
  - $\tau$  : le retard



**Figure 2.6** Réponse indicielle oscillante

Du graphe, on mesure les valeurs du premier et de deuxième dépassement  $D_1$  et  $D_2$  (c'est la différence entre le premier (deuxième) maximum de la courbe et la valeur finale de la sortie), ainsi que la valeur de la période des oscillations est  $T_0$ . [2]

Par la suite, on calcule les coefficients de la fonction de transfert  $G(s)$  comme suit :

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_0 \sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.16)$$

$$\frac{D_1}{D_2} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2.17)$$

$$K = y(\infty) \quad (2.18)$$

### II.3 Méthode des moindres carrés :

#### II.3.1 Principe de la méthode :

Le principe de cette méthode se déduit par la proposition de Gauss, qui consiste au choix des paramètres du modèle de façon à avoir une minimisation de la somme des carrés de la différence entre les valeurs prédites pour le modèle et celles mesurées, éventuellement multipliées par un coefficient caractérisant le degré de précision.

Tout type de modèle peut être appliqué par cette approche, cependant l'obtention d'une solution analytique dépend de la linéarité du modèle en fonction des paramètres.

La formulation standard des moindres carrés consiste à supposer que la variable calculée  $\hat{y}(x)$  est donnée par le modèle suivant :

$$\hat{y}(x) = \theta_1 \phi_1(x) + \theta_2 \phi_2(x) + \dots + \theta_n \phi_n(x) \quad (2.19)$$

Où :

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  : sont des fonctions connues.

$x_1, \dots, x_n$  : sont les variables explicatives.

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  : sont des paramètres inconnus.

Les couples  $(x_i, y_i)$  des variables mesurées ( $i = 1, \dots, N$ ) sont des valeurs expérimentales.

[3]

**II.3.2 Problème :**

L'objectif est de déterminer les paramètres du modèle de telle sorte que les valeurs  $\hat{y}_i$  calculées à partir des variables  $x_i$  en utilisant le modèle soit aussi proche que possible des valeurs mesurées  $y_i$ .

Dans le cas où la précision est la même pour toutes les mesures, les paramètres  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  doivent vérifier la minimisation du critère suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^2, \quad e_i = y_i - \hat{y}_i \quad (2.20)$$

**II.3.3 Application des moindres carrés à l'identification des systèmes :**

La méthode des moindres carrés s'applique pour l'identification des systèmes (détermination des paramètres du modèle).

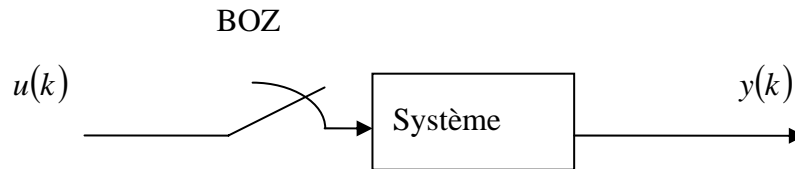
Le modèle à identifier est donné sous la forme suivante :

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z)}{u(z)} \quad (2.21)$$

Posons  $a_0 = 1$ , l'équation aux différences correspondante est :

$$\begin{aligned} y(z) + a_1 y(z)z^{-1} + a_2 y(z)z^{-2} + \dots + a_n y(z)z^{-n} &= b_0 u(z) + \dots + b_m u(z)z^{-m} \\ y(k) &= -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) \\ y(k+1) &= -a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n+1) + b_0 u(k+1) + \dots + b_m u(k-m+1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour l'application de la méthode des moindres carrés, on applique une séquence d'entrée  $\{u(1), u(2), \dots, u(N)\}$  au système et on récupère la séquence de la variable mesurée correspondante  $\{y(1), y(2), \dots, y(N)\}$ .



**Figure 2.7** Représentation du système

Les paramètres inconnus sont regroupés dans le vecteur suivant :

$$\theta = [a_1 \dots a_n \dots b_0 \dots b_m]^T \quad (2.23)$$

En introduisant le vecteur de régression  $\phi(k+1)$  tel que :

$$\phi(k+1) = [-y(k) \quad -y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n+1) \quad u(k) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-m+1)] \quad (2.24)$$

Le modèle dynamique du système s'écrit sous la forme :

$$y(k+1) = \phi(k+1)\theta \quad (2.25)$$

Dans le cadre des moindres carrés, les mesures  $y(k) \dots y(k-n+1), u(k) \dots u(k-m+1)$  sont utilisées pour calculer (ou encore prédire)  $y(k+1)$ :

$$\hat{y}(k+1) = \phi(k+1)\theta \quad (2.26)$$

En considérant les points de 1 à N, on a (on suppose  $n > m$  pour simplifier l'écriture) :

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(n+1) &= -a_1 y(n) - a_2 y(n-1) - \dots - a_n y(1) + b_0 u(n+1) + b_1 u(n) + \dots + b_m u(n-m+1) \\
 \hat{y}(n+2) &= a_1 y(n+1) - a_2 y(n) - \dots - a_n y(2) + b_0 u(n+2) + b_1 u(n+1) + \dots + b_m u(n-m+2) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \hat{y}(N) &= -a_1 y(N-1) - a_2 y(N-2) - \dots - a_n y(N-1-n) + b_0 u(N+1) + b_1 u(N) - \dots - b_m u(N-m)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(n+1) \\ \hat{y}(n+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n-1) & \dots & -y(1) & u(n+1) & \dots & u(n-m+1) \\ -y(n+1) & -y(n) & \dots & -y(2) & u(n+2) & \dots & u(n-m+2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \dots & -y(N-1-n) & u(N+1) & \dots & u(N-m) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$y_N = \begin{bmatrix} \phi(n+1) \\ \phi(n+2) \\ \vdots \\ \phi(N) \end{bmatrix} \theta_N \xrightarrow{\text{D'où}} y_N = \phi_N \theta_N \tag{2.29}$$

D'où :

$$\theta_N = (\phi_N^T \phi_N)^{-1} \phi_N^T y_N \tag{2.30}$$

• **Remarque 2.2 :**

- $(\phi_N^T \phi_N)^{-1} \phi_N^T$  est le pseudo inverse de  $\phi_N$ .
- cette approche d'identification est réalisée **hors ligne**. [4]

#### II.4 Méthode des moindres carrés récurrents :

Avec les méthodes non récurrentes, si une nouvelle mesure se présente, on doit recommencer entièrement le calcul, c'est pour cela qu'on a fait appel aux méthodes récurrentes qui permettent de calculer, à chaque nouvel instant, les nouvelles valeurs des vecteurs de paramètres d'un modèle. [4]

Soit à calculer  $\theta_{N+1}$  l'estimation des paramètres à  $(N+1)$ , on a les deux vecteurs suivant :

$$y_N = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(N)]^T \quad (2.31)$$

$$\phi_N = [\phi(1) \quad \phi(2) \quad \dots \quad \phi(N)]^T \quad (2.32)$$

En utilisant la relation non récurrente prise sur une durée N donnée, on a :

$$\theta_N = [\phi_N^T \quad \phi_N]^1 \phi_N^T y_N \quad (2.33)$$

Ainsi pour un horizon à  $N+1$  mesures, on aura la relation suivante :

$$\theta_{N+1} = [\phi_{N+1}^T \quad \phi_{N+1}]^1 \phi_{N+1}^T y_{N+1} \quad (2.34)$$

Avec :

$$y_{N+1} = [y_N \quad y(N+1)]^T \quad (2.35)$$

$$\phi_{N+1} = [\phi_N \quad \phi(N+1)]^T \quad (2.36)$$

Afin de simplifier l'écriture, on introduit par la suite la matrice  $P_{N+1}$  tel que :

$$P_{N+1} = \begin{bmatrix} \phi_{N+1}^T & \phi_{N+1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.37)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{N+1}^{-1} &= \begin{bmatrix} \phi_N^T & \phi^T(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_N & \phi(N+1) \end{bmatrix}^T \\ &= \phi_N^T \phi_N + \phi^T(N+1) \phi(N+1) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si on pose :

$$P_N^{-1} = \phi_N^T \phi_N \quad (2.39)$$

On aura la relation suivante :

$$P_{N+1}^{-1} = P_N^{-1} + \phi^T(N+1) \phi(N+1) \quad (2.40)$$

En inversant ces matrices :

$$\left[ P_{N+1}^{-1} \right]^{-1} = \left[ P_N^{-1} + \phi^T(N+1) \phi(N+1) \right]^{-1} \quad (2.41)$$

On obtient :

$$P_{N+1} = P_N - \frac{P_N \phi^T(N+1) \phi(N+1) P_N}{I + \phi(N+1) P_N \phi^T(N+1)} \quad (2.42)$$

Pour le calcul de  $\theta_{N+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \theta_{N+1} &= P_{N+1} \begin{bmatrix} \phi_{N+1}^T & y_{N+1} \end{bmatrix} \\ &= P_{N+1} \begin{bmatrix} \phi_N^T & \phi^T(N+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_N & y(N+1) \end{bmatrix}^T \\ &= P_{N+1} \left[ \phi_N^T y_N + \phi^T(N+1) y(N+1) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Avec :

$$\theta_N = P_N \phi_N^T y_N \quad (2.44)$$

On peut écrire alors :

$$P_N^{-1} \theta_N = \phi_N^T y_N \quad (2.45)$$

D'où :

$$\theta_{N+1} = P_{N+1} [P_N^{-1} \theta_N + \phi^T(N+1) y(N+1)] \quad (2.46)$$

Remplaçons  $P_N^{-1}$  par ce qu'on a trouvé précédemment, on aura :

$$\begin{aligned} \theta_{N+1} &= P_{N+1} [ [P_{N+1}^{-1} - \phi^T(N+1) \phi(N+1)] \theta_N + \phi^T(N+1) y(N+1) ] \\ &= \theta_N - P_{N+1} \phi^T(N+1) \phi(N+1) \theta_N + P_{N+1} \phi^T(N+1) y(N+1) \\ &= \theta_N + P_{N+1} \phi^T(N+1) [y(N+1) - \phi(N+1) \theta_N] \end{aligned} \quad (2.47)$$

Donc on obtient la relation suivante :

$$\theta_{N+1} = \theta_N + K_{N+1} [y(N+1) - \phi(N+1) \theta_N] \quad (2.48)$$

Où :

$\theta_{N+1}$  : Nouvelle estimation des paramètres

$\theta_N$  : Estimation précédente des paramètres

$K_{N+1}$  : Gain d'adaptation

Avec :

$$K_{N+1} = P_{N+1} \phi^T(N+1) \quad (2.49)$$

$y(N+1)$  : Vecteur des dérivations à  $N+1$

$\phi(N+1) \theta_N$  : Vecteur des dérivations précédentes.

## II.5 Méthode du modèle :

### II.5.1 Principe de la méthode:

La méthode du modèle est basée sur la comparaison des comportements du modèle et du système à identifier suite à une même excitation. C'est l'une des méthodes puissante appliquée aux systèmes non linéaires. [2]

Le principe de cette méthode est résumé par la figure suivante (Figure 2.8) :

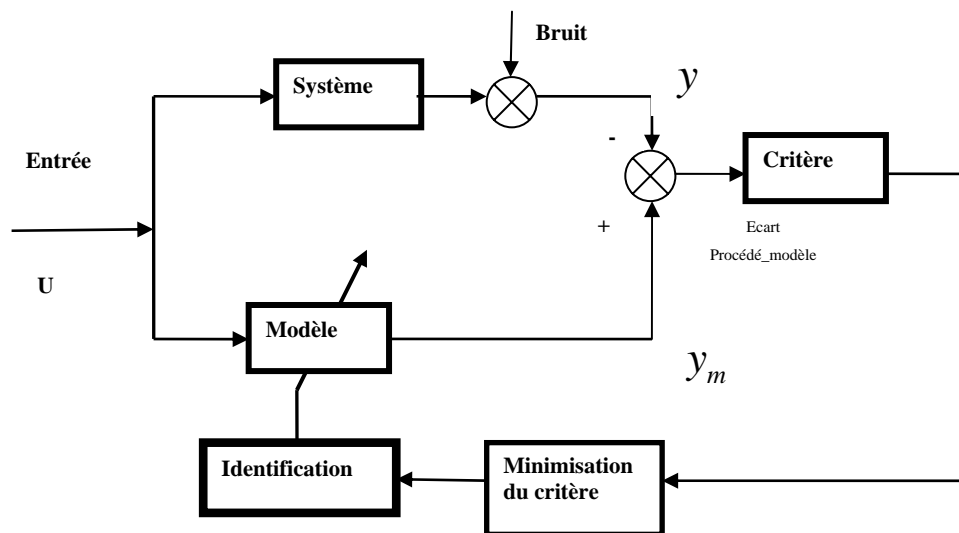


Figure 2.8 Schéma synoptique de la méthode du modèle.

Dans le cas d'un système représenté par un modèle de comportement discret, l'écart modèle procédé s'écrit sous forme :

$$e(k) = y(k) - y_m(k) \quad (2.50)$$

Avec :

$$y_m(k) = f(\theta, y_m(k-1), y_m(k-2), \dots, y_m(k-n), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-m)) \quad (2.51)$$

Le principe de la méthode consiste donc à déterminer les paramètres  $\theta$  de telle sorte que l'erreur modèle-procédé soit minimale, ce qu'on peut formuler comme un problème de minimisation du critère suivant :

$$J(\theta) = 1/2 \sum_{k=1}^N e(k)^2 = 1/2 \sum_{k=1}^N [y(k) - y_m(k)]^2 \quad (2.52)$$

Il n'est pas possible d'établir une solution analytique à ce problème. Le vecteur de paramètres devra donc être calculé en utilisant un algorithme de minimisation numérique.

## II.6 Conclusion :

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont basées sur un ensemble de relevé expérimental de la sortie d'un système soumis à une excitation.

Ainsi, les méthodes graphiques ne permettent pas d'obtenir des résultats très précis, mais peuvent donner une idée sur les paramètres essentiels de la réponse à savoir le gain, le retard et la constante de temps principale. Cependant, la méthode des moindres carrés n'est pas la meilleure, mais elle reste la plus simple car elle fournit une solution analytique. En outre, la méthode du modèle est nettement meilleure que la précédente, et nécessite moins de précautions pour celui qui l'utilise. D'autre part, sa solution se calcule par l'optimisation numérique ce qui rend sa tâche de mise en œuvre difficile. Pour terminer, il est très intéressant de connaître le principe des méthodes récursives puisque elles sont considérées comme une base de la plupart des régulations adaptatives modernes.

Dans le chapitre suivant, on va présenter une méthode d'optimisation globale.

## Chapitre III :

Optimisation globale : méthode d'Alienor

### III.1 Introduction :

Le domaine de l'optimisation est un domaine de recherche immense. En effet, elle est devenue une discipline incontournable dans la vie quotidienne vue son large utilisation dans la résolution des divers problèmes provenant de la physique, de la mécanique, de l'économie ainsi de l'automatique.

Dans ce présent chapitre, on définit les notions de l'optimisation de manière générale, puis on présente les méthodes d'optimisation avec ou sans contraintes, les méthodes locales et globales. A la fin, on s'intéresse à la méthode d'Alienor qui représente une des méthodes d'optimisation globale.

### III.2 Généralités sur l'optimisation :

#### III.2.1 Principe de l'optimisation :

L'optimisation occupe un domaine important dans les recherches mathématiques pures et appliquées. Cependant, avant d'accéder aux méthodes de résolutions d'un problème d'optimisation, on doit d'abord se rappeler de quelques notions sur l'optimisation.

Considérons une fonction scalaire  $f(x)$  de plusieurs variables (**variables de décision**)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , définies sur un domaine  $E \subset \mathfrak{R}^n$  et à valeur dans  $\mathfrak{R}$ . On appelle  $f(x)$  fonction **objectif** ou **économique** ou encore **critère** (le plus souvent c'est une fonction fortement non linéaire). Soit  $D_a$  un domaine inclus dans  $E$ , si la variable  $x$  appartient à ce domaine,  $x$  est dite **admissible**, le domaine  $D_a$  est défini par des relations de contrainte de type **égalités** :

$$g_i(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_p(x) \end{bmatrix} = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.1)$$

Ou encore de type **inégalités** :

$$h_j(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_q(x) \end{bmatrix} \leq 0, \quad j = 1, \dots, q \quad (3.2)$$

Selon la nature de la fonction  $f(x)$  et des différentes contraintes, on distingue plusieurs types de programmation, on parle de :

- Programmation linéaire si toutes les fonctions  $f(x)$ ,  $h(x)$  et  $g(x)$  sont linéaires.
- Programmation non linéaire si l'une ou toutes les fonctions et contraintes  $f(x)$ ,  $h(x)$  et  $g(x)$  sont non linéaires.
- Programmation convexe si toutes les fonctions  $f(x)$ ,  $h(x)$  et  $g(x)$  sont convexes. [3]

### III.2.2 Objectif de l'optimisation:

Optimiser la fonction  $f$  consiste à déterminer les éléments particuliers  $x \in D_a$  tel que  $f$  atteint sa valeur minimale (resp. Maximale) en  $x$  ; on parle alors de minimisation (resp. Maximisation).

En effet un problème de maximisation se ramène à un problème de minimisation par la relation suivante :

$$\max_{x \in D_a} f(x) = - \left( \min_{x \in D_a} -f(x) \right) \quad (3.3)$$

Ces éléments sont appelés :

1. les minimums **absolus** ou **globaux** :  $x^*$ , tel que :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D_a \quad (3.4)$$

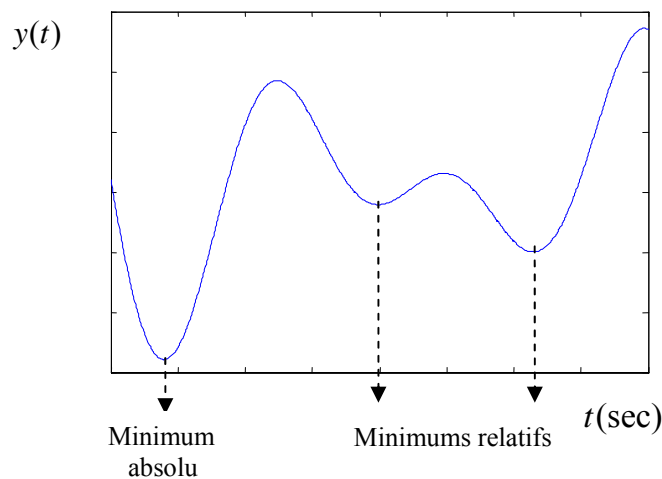
2. Les minimums **relatifs** ou **locaux** :  $\hat{x}$ , tel que :

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \forall x \in V(\hat{x}) \subset D_a \quad (3.5)$$

**Remarque 3.1 :**

- *Le minimum absolu n'est pas obligatoirement unique.*
- *Le minimum est dit strict si l'inégalité est satisfaite strictement pour tout  $x$  différent de  $x^*$  ou  $\hat{x}$ .*

La figure suivante illustre ces différentes notions :



**Figure 3.1** illustration de la nature de l'optimum

### III.2.3 Formulation d'un problème d'optimisation :

Mathématiquement un problème d'optimisation s'écrit :

- **Dans le cas de minimisation :**

$$\text{Sujet à : } \begin{cases} \min_x f(x) \\ g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \\ h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.6)$$

- **Dans le cas de maximisation :**

$$\text{Sujet à : } \begin{cases} \max_x f(x) \\ g_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \\ h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, q \end{cases} \quad (3.7)$$

### III.2.4 Conditions d'optimalité :

Pour que  $x$  soit un minimum de  $f$ , ce dernier doit satisfaire les conditions d'optimalité suivantes :

- **Condition du 1<sup>er</sup> ordre :**

Supposons que  $f(x)$  est continue et continûment dérivable sur le domaine  $D_a$ , et  $x^*$  la solution du problème. La condition nécessaire dans ce cas consiste l'annulation du gradient en ce point :

$$\nabla_x f(x^*) = 0 \quad (3.8)$$

Le gradient se calcule comme suit :

$$\nabla_x f(x) = \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right] \quad (3.9)$$

• **Condition du 2<sup>ème</sup> ordre :**

Soit  $f(x)$  une fonction deux fois continûment dérivable. La condition suffisante du minimum est d'avoir la matrice Hésienne définie positive i.e. :

$$\nabla_x^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

**Remarque 3.2 :**

- ✓ Une matrice est dite positive si l'une des conditions suivantes est satisfaite :
  - Les valeurs propres de la matrice sont toutes positives.
  - Les déterminants de la matrice pris en chaîne sont tous positifs.
- ✓ La matrice Hésienne nous permet d'étudier la nature des points critiques, selon le tableau suivant :

Matrice	commentaire	Nature du point critique
$\nabla^2 f(x^*) > 0$	Définie positive	Minimum
$\nabla^2 f(x^*) < 0$	Définie négative	Maximum
$\nabla^2 f(x^*) \geq 0$	Semi-définie positive	Point singulier (on ne pas préciser sa nature)
$\nabla^2 f(x^*) \leq 0$	Semi-définie négative	Point singulier
$\nabla^2 f(x^*) = 0$	Possède des valeurs propres négatives et positives	Point selle

**Tableau 3.1** Nature du point critique.

### III.3 Méthodes d'optimisation :

On peut distinguer deux types d'optimisation : locale et globale. En outre, l'optimisation peut se faire avec ou sans contraintes; on parle alors d'optimisation sans contraintes ou d'optimisation avec contraintes.

#### III.3.1 Optimisation sans contraintes :

L'objectif est de trouver  $x \in \mathcal{R}^n$  minimisant la fonction objectif  $f(x)$  en absence de contraintes ( $p=q=0$ ). La forme générale du problème est :

$$\min_{x \in \mathcal{R}^n} f(x) \quad (3.11)$$

L'utilisation des conditions d'optimalité du premier et deuxième ordre pour la détermination du minimum global en utilisant des méthodes algébriques est souvent impossible, vu la non linéarité de la fonction objectif. Par conséquent, l'usage d'autres méthodes qui sont généralement du type itératif est recommandé.

#### III.3.1.1 Classification des méthodes de recherche de l'optimum :

##### III.3.1.1.1 Méthodes graphiques :

Ce type de méthodes s'applique aux problèmes d'optimisation ayant deux variables de décision. Pour ce faire, on représente le domaine admissible  $D_a$  en traçant les contraintes et la fonction objectif, puis on détermine la solution qui minimise  $f(x)$ .

##### III.3.1.1.2 Méthodes analytiques :

La recherche analytique de l'optimum consiste à calculer le gradient  $\nabla_x f(x)$  et à résoudre analytiquement  $\nabla_x f(x) = 0$  ce qui est rarement vrai en pratique.

**III.3.1.1.3 Méthodes numériques :**

D'autre part, la recherche numérique de l'optimum exige l'utilisation des méthodes itératives. Le principe consiste à calculer une suite des valeurs  $x^{(1)}$   $x^{(2)}$  ...  $x^{(i)}$ , à partir d'une valeur initiale  $x^{(0)}$  de façon à avoir dans le cas d'un minimum :

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > f(x^{(2)}) > \dots > f(x^{(i)}) > \dots \quad (3.12)$$

Tandis que cette suite est bornée inférieurement par  $f(x^*)$ , elle convergera vers l'optimum global s'il est unique ou vers l'un des optimums locaux s'il existe plusieurs optimums.

On distingue de différentes méthodes pour la résolution de ce type de problème :

**III.3.1.1.3.1 Méthodes directes :**

Ces méthodes sont des algorithmes d'optimisation qui n'utilisent pas les dérivées et permettent de les résoudre. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de Puwel et la méthode de simplexe.

**III.3.1.1.3.2 Méthodes du premier ordre :**

Ces méthodes nécessitent l'évaluation des fonctions  $f(x)$  et  $\nabla_x f(x)$  à chaque pas. Le plus souvent, on utilise dans ce cas la méthode du Gradient et celle du gradient conjuguée.

**III.3.1.1.3.3 Méthodes du second ordre :**

Le principe de la méthode est le même que celui du premier ordre, mais nécessitant également l'évaluation de  $\nabla_x^2 f(x)$ . Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de Newton et celle de Newton modifié. [4]

**Remarque 3.3 :**

*La résolution des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre ne garantit pas que la solution identifiée soit un minimum. La méthode de Newton ne dispose d'aucun mécanisme permettant de distinguer les minimas des maximas et des points selles.*

**III.3.2 Optimisation en présence de contraintes :**

Le principe de l'optimisation sous contraintes est de transformer les problèmes avec contraintes en problèmes sans contraintes. En effet, cette transformation consiste l'ajout des coefficients de pénalisation qui fait augmenter le nombre d'inconnus. Cependant, la convergence de la méthode vers l'optimum global n'est pas assurée du fait que le nombre de contrainte est supérieur aux nombres de paramètre. En outre, la convergence de la méthode impose la dérivabilité des contraintes. Parmi les méthodes d'optimisation en présence de contrainte, on retrouve la méthode de Lagrange.

**Remarque 3.4:**

*La plupart des méthodes citées précédemment convergent vers des minimas locaux, d'autre part l'obtention du minimum global rencontre des difficultés numériques dès que la dimension du problème est supérieure à trois. [6]*

**III.3.3 Optimisation locale :**

Le but de l'optimisation locale d'une fonction  $f$  à partir d'un élément  $x_0 \in X$  est de trouver l'élément  $x \in X$  proche de  $x_0$  qui minimise la fonction  $f(x)$  parmi les éléments appartenant au voisinage de  $x_0$ , comme l'indique la relation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } \hat{x} \in X \\ \exists V \in V_{x_0} / \hat{x} \in V \text{ et } f(\hat{x}) = \min_{x \in V} f(x) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

On appelle  $\hat{x}$  le minimiseur local de  $f$  et  $f(\hat{x})$  le minimum local de  $f$  autour de  $x_0$ .

### III.3.4 Optimisation globale :

On définit l'optimisation globale par la détermination de l'élément  $x^* \in X$  minimisant la fonction  $f(x)$  dans ce domaine. Cette notion est donnée sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } x^* \in X \\ f(x^*) = \min_{x \in X} f(x) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

On appelle  $x^*$  le minimiseur global de  $f$  et  $f(x^*)$  le minimum global de  $f$  sur  $X$ .

Parmi les méthodes d'optimisation globale utilisées dans différents domaines, on retrouve **la méthode d'Alienor** dont ses bases mathématiques ont été développées par **Yves Cherruault et Arthur Guillez** en 1980.

### III.4 Méthode d'ALIENOR

C'est une méthode récente qui consiste à approcher l'espace  $\mathfrak{R}^n$  par  $\mathfrak{R}$  à l'aide d'une transformation réductrice. C'est-à-dire ramener un problème d'optimisation de plusieurs variables à un problème d'optimisation d'une seule variable.

Les inventeurs de la méthode proposent une première transformation réductrice qui se base sur la spirale d'Archimède ;

Soit le point  $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$  qui s'écrit en coordonnées polaires:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.15)$$

Les deux paramètres  $r$  et  $\theta$  sont reliés par la spirale d'Archimède par :  $r = a\theta$ , tel que :

$$\begin{cases} \theta \geq 0 \\ a \text{ fixe tend vers zéro.} \end{cases} \quad (3.16)$$

On obtient alors:

$$\begin{cases} x = a\theta \cos \theta = h_1(\theta) \\ y = a\theta \sin \theta = h_2(\theta) \end{cases} \quad (3.17)$$

Si on possède trois variables  $x_1, x_2, x_3$  on relie d'abord  $x_1$  et  $x_2$  à l'aide d'une spirale d'angle  $\theta_1$  :

$$\begin{cases} x_1 = a\theta_1 \cos \theta_1 \\ x_2 = a\theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Puis on relie  $\theta_1$  et  $x_3$  à l'aide d'une spirale d'angle  $\theta$  :

$$\begin{cases} \theta_1 = a\theta \cos \theta \\ x_3 = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.19)$$

On obtient alors une courbe paramétrée  $h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), h_3(\theta))$  sous la forme :

$$\begin{cases} h_1(\theta) = a^2 \theta \cos \theta \cos(a\theta \cos \theta) \\ h_2(\theta) = a^2 \theta \cos \theta \sin(a\theta \cos \theta) \\ h_3(\theta) = a\theta \sin \theta \end{cases} \quad (3.20)$$

Pour  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la généralisation se fait en reliant deux à deux par des spirales d'angle  $\theta_i$  :

$$x_i = h_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

Avec les fonctions  $h_i(\theta)$  sont de classe infinie.

Ainsi, on déduit que l'espace  $\mathfrak{R}^n$  est approché par l'espace  $\mathfrak{R}$  à l'aide de la transformation réductrice. La précision de cette dernière est meilleure lorsque le paramètre  $a$  est petit. [6]

### III.4.1 Optimisation globale par la méthode d'Alienor :

Considérons une fonction  $f$  continue sur  $\mathfrak{R}^n$  vérifiant la condition de croissance à l'infini, c'est-à-dire :

$$\lim_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = +\infty \quad (3.22)$$

Soit à résoudre le problème suivant :

$$\mathit{Glob.Min} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.23)$$

$$x_1, \dots, x_n \in \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

On construit une transformation réductrice  $h(\theta)$  :

$$h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)), \text{ dans } \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \quad (3.24)$$

$$x_i = h_i(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.25)$$

Ce qui donne :

$$\mathit{Glob.Min}_{\theta \in [0, \theta_{\max}]} f^*(\theta) \quad (3.26)$$

$$\text{avec : } f^*(\theta) = f(h_1(\theta), \dots, h_n(\theta)) \quad (3.27)$$

La plus grande valeur que peut prendre  $\theta$  quand  $x_1, x_2, \dots, x_n$  décrivent l'ensemble  $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  est  $\theta_{\max}$ . [6]

### III.4.2 Choix de transformation réductrice :

Comme on vient de le voir, avec la transformation réductrice basée sur la spirale d'Archimède élaborée par les inventeurs de la méthode, les fonctions composantes  $h_i(\theta)$  ne s'obtiennent pas en une seule étape. En effet, afin d'obtenir une expression finale d'une seule variable  $\theta$ , on fait appel à la spirale d'Archimède pour relier les variables deux à deux, ce qui augmente le temps d'évaluation de la fonction à minimiser (resp. à maximiser). C'est dans ce contexte que d'autres transformations réductrices ont été proposées. Dont on cite :

- Transformation de **Cherruault**.
- Transformation de **Mora**.
- Transformation de **Konfe**.

Dans ce travail, on s'intéresse à la transformation de **Konfe** réputée par sa précision comparativement aux deux autres transformations.

La transformation réductrice de **Konfe** permet de réduire le temps de calcul pour un grand nombre de variables.

La forme de cette transformation est la suivante :

$$h(\theta) = (h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_n(\theta)) \quad (3.28)$$

Où les  $h_i(\theta)$  sont définies comme suit :

$$h_i(\theta) = \cos(\omega_i \theta + \varphi_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

Avec  $(\varphi_i)$  et  $(\omega_i)$  sont des suites lentement croissantes. [6]

### III.4.3 Opérateur qui Préserve l'Optimisation (O.P.O) :

Toutes les transformations vues précédemment sont justifiées sur le plan théorique, tandis qu'en pratique, elles rencontrent des difficultés dans la recherche du minimum global du fait que plusieurs minimas locaux apparaissent. Pour cela, une nouvelle méthode a été introduite par **G.Mora**, **Y.Cherruault** et **A.Benabidallah** appelée l'Opérateur qui Préserve l'Optimisation. L'objectif atteint de cet opérateur est de répertorier les minimas dans un ensemble de niveau puis de réduire cet ensemble à un élément par des coupures successives.

D'autre part, **B.O.Konfe** a également proposé un nouveau type d'Opérateur Préservant l'Optimisation défini comme suit :

Soit  $f$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $x_0$  un point dans  $I$ ,  $\varepsilon$  un réel positif petit et  $\Theta$  la fonction d'Heaviside. Pour toute fonction  $f \in C(I)$  (l'ensemble des fonctions continues), l'opérateur  $T_f^\varepsilon$  donnée par :

$$T_f^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(x_0) + |f(x) - f(x_0)|] + \frac{1}{\varepsilon} \times \Theta[f(x) - f(x_0)] \quad (3.30)$$

Cet opérateur est appelé l'**Opérateur qui Préserve l'Optimisation (OPO)**. [6]

#### Remarque 3.5 :

*Les problèmes d'optimisation sont en général résolus graphiquement, d'où l'ajout de la fonction Heaviside à l'expression de l'O.P.O.*

### III.4.4 Exemple illustratif:

La fonction à minimiser est une fonction à deux variables définie comme suit :

$$f(x, y) = -1.5x^2 e^{(1-x^2-20.25(x-y)^2)} - 0.5(0.5(x-1)(y-1))^4 e^{(2-(0.5(x-1))^4)-(y-1)^4} \quad (3.31)$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0.01((x - 2.2)^2 + (y - 1.2)^2 - 2.25) \\ g_2(x, y) = 100(1 - \frac{(x - 2)^2}{1.44} - (0.5y)^2) \\ g_3(x, y) = 10(y - 1.5 - 1.5 \sin(6.283(x - 1.75))) \end{cases} \quad (3.32)$$

Avec :

$$-1 \leq x, y \leq 1 \quad (3.33)$$

La solution de ce problème est donnée par :

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (0.942, 0.944) \\ f(x^*, y^*) &= -1.489 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ce problème se résolve en trois étapes :

#### ❖ Première étape :

Cette étape consiste à pénaliser la fonction objectif  $f$  en éliminant les contraintes.

Considérons la fonction  $L_p(x, y)$  définie comme suit :

$$L_p(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^3 (g_i(x, y) + |g_i(x, y)|) \quad (3.35)$$

#### ❖ Deuxième étape :

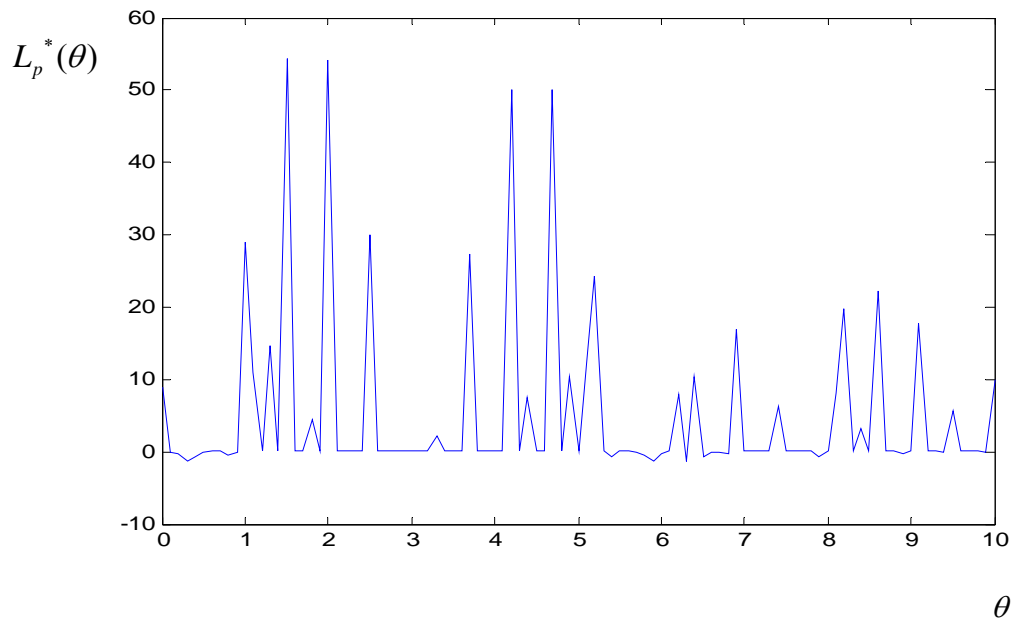
Dans cette étape, on utilise la méthode d'Alienor basée sur la nouvelle transformation réductrice de Konfe définie comme suit :

$$\begin{cases} h_1(\theta) = \cos(100\theta + 1) \\ h_2(\theta) = \cos(101\theta + 1.00005) \end{cases} \quad (3.36)$$

La fonction à une seule variable correspondante est alors donnée par :

$$L_p^*(\theta) = L_p(h_1(\theta), h_2(\theta)) \quad (3.37)$$

La courbe (**figure 3.4**) représente la fonction  $L_p^*(\theta)$ , où on constate que plusieurs minimas locaux sont apparus.



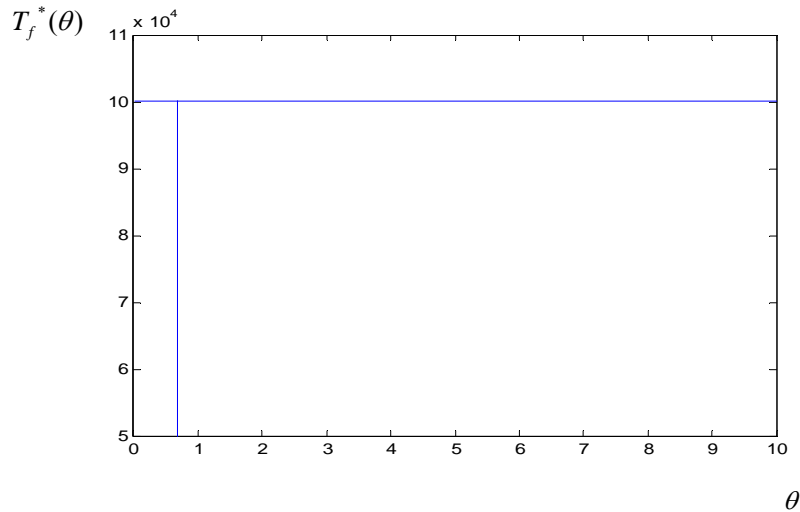
**Figure 3.2** Graphe de  $L_p^*(\theta)$

❖ **Troisième étape :**

Cette étape nécessite l'application de l'O.P.O qui donne la fonction  $T_f(\theta)$  définie par :

$$T_f(\theta) = \frac{L_p^*(\theta) + 1.489 + |L_p^*(\theta) + 1.489|}{2} + 1000 \times \text{Heaviside}(L_p^*(\theta) + 1.489) \quad (3.38)$$

La figure 3.3 qui illustre  $T_f(\theta)$  est la suivante :



**Figure 3.3** Graphe de  $T_f^*(\theta)$

D'après la figure 3.3, on trouve comme résultat :

$$\begin{aligned} (x^*, y^*) &= (0.942, 0.944) \\ f(x^*, y^*) &= -1.489 \end{aligned} \quad (3.39)$$

### III.5 Conclusion :

Dans ce troisième chapitre, on a donné un aperçu général sur l'optimisation. Pour l'optimisation globale, on a présenté la méthode d'optimisation globale d'Alienor. Cette méthode est basée sur l'utilisation des transformations réductrices pour ramener le problème d'optimisation de plusieurs variables de décision à un problème d'optimisation d'une seule variable de décision. La nouvelle transformation réductrice proposée par Konfe a été en particulier, présentée. Cette méthode permet l'obtention d'une très bonne précision tout en réduisant le temps de calcul pour un grand nombre de variables de décision.

Dans le prochain chapitre, on va s'intéresser à l'utilisation de la méthode d'Alienor pour l'identification d'un système par la méthode du modèle.

## Chapitre IV :

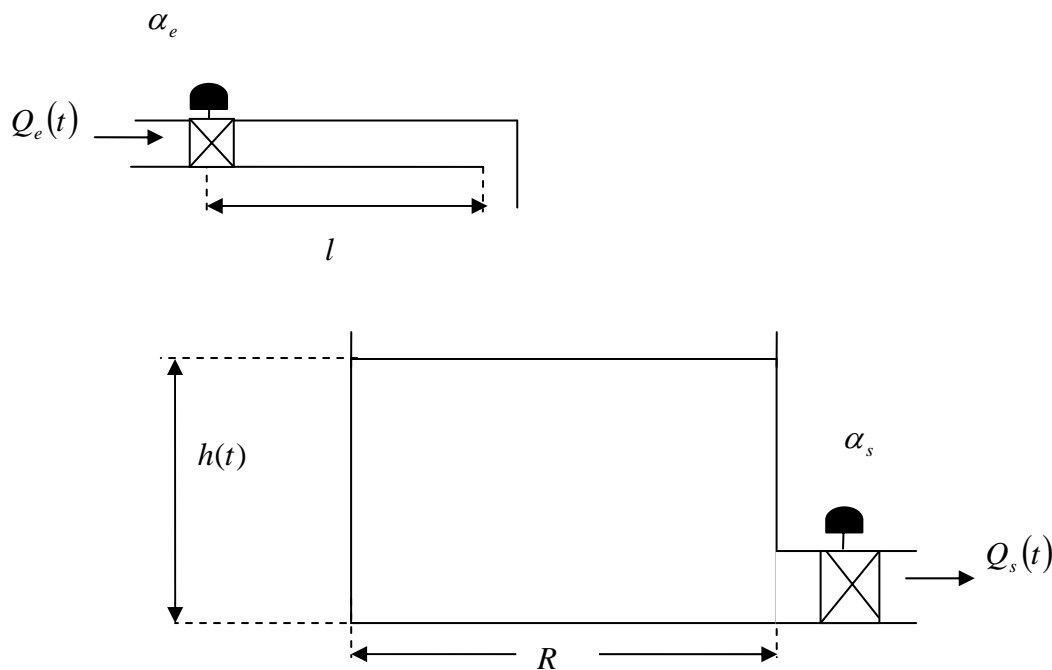
Identification du modèle d'un bac de stockage

### IV.1 Introduction :

Dans ce dernier chapitre, on applique la méthode du modèle présentée dans le 2<sup>ème</sup> chapitre à l'identification des paramètres d'un bac de stockage. Pour ce faire, on doit d'abord décrire le procédé, puis résoudre analytiquement le modèle du bac de stockage. Ensuite, on formule le problème d'identification des paramètres du bac sous forme d'un problème d'optimisation qui sera résolu par la méthode d'optimisation globale d'Alienor.

### IV.2 Description du procédé :

Il s'agit d'un bac de stockage de forme cylindrique, le schéma de la **Figure 4.1** illustre ses différentes parties et dimensions. Les variables  $Q_e(t)$  et  $Q_s(t)$  représentent respectivement la commande et la sortie. Le débit entrant  $Q_e(t)$  traverse une conduite de longueur  $l$  avec une vitesse constante  $v$ .



**Figure 4.1.** Schéma synoptique d'un bac de stockage.

### IV.3 Modèle du bac de stockage :

Pour modéliser le système, on fait appel à l'équation du bilan de masse et la loi de Bernoulli. En effet, on a comme entrée  $Q_e(t)$  et comme sortie  $Q_s(t)$ ,  $V(t)$  est le volume de remplissage du bac, avec  $V(t) = S h(t)$  et  $S = \pi R^2$  et la variation du volume par unité de temps est  $\frac{d}{dt}V(t)$ .

En appliquant l'équation du bilan de masse à l'élément X :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'accumulation} \\ \text{de X dans} \\ \text{le système} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flux} \\ \text{entrant} \\ \text{de X} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{flux} \\ \text{sortant} \\ \text{de X} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{somme de X} \\ \text{générée} \\ \text{par le système} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{somme de} \\ \text{X consommée} \\ \text{par le système} \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

On remplace  $Q_s(t)$  par sa valeur donnée par la loi de Bernoulli ( $Q_s(t) = \alpha_s \sqrt{\frac{V(t)}{S}}$ ), on aura :

$$\frac{d}{dt}V(t) = Q_e(t - \tau) - \alpha_s \sqrt{\frac{V(t)}{S}} \quad (4.2)$$

C'est la représentation non linéaire du système. [4]

#### IV.3.1 La linéarisation autour d'un point d'équilibre :

Après le régime transitoire, le système atteint le point d'équilibre et gardera cette position tant qu'il n'y a pas de variations d'entrée et de sortie. Supposons qu'à l'équilibre, on a :

$$\begin{aligned}
 Q_e^*(t) &= Q_{e0}^* \\
 Q_s(t) &= Q_{s0} \\
 V(t) &= V_0
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

En remplaçant les valeurs de l'équation (4.3) dans l'équation (4.2), on aura:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V_0 &= Q_{e0}^* - Q_{s0} = 0 \\
 \text{D'où : } Q_{e0}^* &= Q_{s0}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Ce qui signifie que le débit sortant est identique à celui entrant quand le système est en équilibre.

Supposons l'existence de petites variations autour du point d'équilibre, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 Q_e^*(t) &= Q_{e0}^* + u^*(t) / u^*(t) = u(t - \tau) \\
 Q_s(t) &= Q_{s0} + y(t) \\
 V(t) &= V_0 + x(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 Q_{e0}^* &\gg u^*(t) \\
 Q_{s0} &\gg y(t) \\
 V_0 &\gg x(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

L'équation (4.2) sera donc :

$$\frac{d}{dt}(V_0 + x(t)) = Q_{e0}^* + u^*(t) - \alpha_s \sqrt{\frac{V_0 + x(t)}{S}}
 \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Q_{e0}^* + u^*(t) - \alpha_s \sqrt{\frac{V_0}{S}} \sqrt{1 + \frac{x(t)}{V_0}}
 \tag{4.8}$$

Avec :

$$\sqrt{1 + \frac{x(t)}{V_0}} \approx 1 + \frac{x(t)}{2V_0} \quad (4.9)$$

D'où :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Q^*_{e0} + u^*(t) - \alpha_s \sqrt{\frac{V_0}{S}} \left( 1 + \frac{x(t)}{2V_0} \right) \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Q^*_{e0} + u^*(t) - Q_{s0} \left( 1 + \frac{x(t)}{2V_0} \right) \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = Q^*_{e0} - Q_{s0} + u^*(t) - \frac{Q_{s0}}{2V_0} x(t) \quad (4.12)$$

$$\text{tel que : } Q^*_{e0} - Q_{s0} = 0 \text{ (condition d'équilibre)} \quad (4.13)$$

On pose :

$$\frac{V_0}{Q_{s0}} = \tau' \text{ (la constante du temps du système)} \quad (4.14)$$

On aura :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\frac{1}{2\tau'} x(t) + u^*(t) \quad (4.15)$$

- **L'équation de la sortie :**

La sortie du procédé  $Q_s(t)$  donnée par la loi de Bernoulli est comme suit :

$$Q_s(t) = \alpha_s \sqrt{\frac{V(t)}{S}} = \alpha_s \sqrt{\frac{V_0 + x(t)}{S}} \quad (4.16)$$

$$Q_s(t) = \alpha_s \sqrt{\frac{V_0}{S}} \sqrt{1 + \frac{x(t)}{V_0}} \quad (4.17)$$

$$Q_s(t) = Q_{s0} \left(1 + \frac{x(t)}{2V_0}\right) \quad / \quad \sqrt{1 + \frac{x(t)}{V_0}} \approx 1 + \frac{x(t)}{2V_0} \quad (4.18)$$

$$\text{D'où : } Q_s(t) = Q_{s0} + \frac{Q_{s0}}{2V_0} x(t) \quad (4.19)$$

$$Q_s(t) - Q_{s0} = \frac{1}{2\tau'} x(t) \quad (4.20)$$

$$\text{On aura donc : } y(t) = \frac{1}{2\tau'} x(t) \quad (4.21)$$

La représentation d'état du système est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u^*(t) \\ y(t) = C x(t) + D u^*(t) \end{cases} \quad (4.22)$$

Avec:

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2\tau'} \\ B = 1 \\ C = \frac{1}{2\tau'} \\ D = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

### IV.3.2 Calcul de la fonction de transfert :

Pour calculer la fonction de transfert du procédé, on applique la transformé de Laplace :

$$L\{\dot{x}(t)\} = s X(s) \quad (4.24)$$

$$L\{y(t)\} = Y(s) \quad (4.25)$$

$$L\{u^*(t)\} = U^*(s) = L\{U(t - \tau)\} = U(s)e^{-\tau s} \quad (4.26)$$

On trouve les équations suivantes :

$$L\{\dot{X}(t)\} = A X(s) + B U^*(s) \quad (4.27)$$

$$s X(s) - A X(s) = B U^*(s) \quad (4.28)$$

$$(s I_n - A)X(s) = B U^*(s) \Rightarrow X(s) = (s I_n - A)^{-1} B U^*(s) \quad (4.29)$$

$$\text{On a : } Y(s) = C X(s) + D U^*(s) \quad (4.30)$$

En remplaçant les valeurs de  $X(s)$  dans la sortie  $Y(s)$  on aura :

$$Y(s) = C(s I_n - A)^{-1} B U^*(s) + D U^*(s) \quad (4.31)$$

On met la commande  $U^*(s)$  comme facteur commun, on aura:

$$Y(s) = [C(s I_n - A)^{-1} B + D] U^*(s) \quad (4.32)$$

La fonction de transfert est donnée donc comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)} = C(s I_n - A)^{-1} B + D \quad (4.33)$$

D'où la fonction de transfert du bac de stockage :

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\tau s} e^{-\tau s} \quad (4.34)$$

Elle est sous la forme :

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-\tau s} \quad \text{avec: } K = 1 \quad (4.35)$$

$$T = 2\tau'$$

C'est un système du 1<sup>er</sup> ordre avec retard.

#### IV.4 Résolution analytique du modèle du bac de stockage :

La fonction de transfert de ce bac est donnée comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U^*(s)} = \frac{K}{(1+Ts)} e^{-\tau s} \quad (4.36)$$

Pour trouver la sortie temporelle  $y(t)$  du système soumis à un échelon unitaire ( $u^*(t) = 1$ ), on applique la transformée de Laplace Inverse ( $TL^{-1}$ ):

$$\text{On a: } Y(s) = \frac{K}{(1+Ts)} e^{-\tau s} U^*(s) \quad (4.37)$$

$$y(t) = TL^{-1}Y(s) \quad (4.38)$$

$$\text{D'où : } y(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{K}{(1+Ts)} e^{-\tau s} U^*(s) \right\} \quad (4.39)$$

$$\text{Sachant que: } U^*(s) = \frac{1}{s} \quad (4.40)$$

$$\text{On aura: } y(t) = TL^{-1} \left\{ \frac{K}{s(1+Ts)} e^{-\tau s} \right\} \quad (4.41)$$

Le système possède deux pôles simples :

$S_1 = 0$  ; pôle ramené par l'entrée.

$S_2 = -\frac{1}{T}$  ; pôle propre du système.

En appliquant la méthode des résidus, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Res}(S_1) &= \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1) G(s) e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{(1 + Ts)} e^{-\tau s} e^{st} \\ &= K \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(S_2) &= \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2) G(s) e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow -\frac{1}{T}} \left( s + \frac{1}{T} \right) \frac{K}{Ts \left( s + \frac{1}{T} \right)} e^{s(t-\tau)} \\ &= -K e^{-(t-\tau)/T} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\text{Avec: } y(t) = \text{Res}(S_1) + \text{Res}(S_2) \quad (4.44)$$

D'où :

$$y(t) = K(1 - e^{-(t-\tau)/T}) \quad (4.45)$$

#### IV.5 Formulation du problème d'identification :

Pour identifier le modèle du bac de stockage, on procède par la méthode du modèle décrite dans le chapitre II (figure 2.8). En effet, c'est une minimisation de l'erreur obtenue entre la sortie du bac de stockage et la sortie du modèle donnée par la solution analytique.

Le schéma suivant (Figure 4.2) illustre l'estimation de l'erreur donnée par la méthode du modèle :

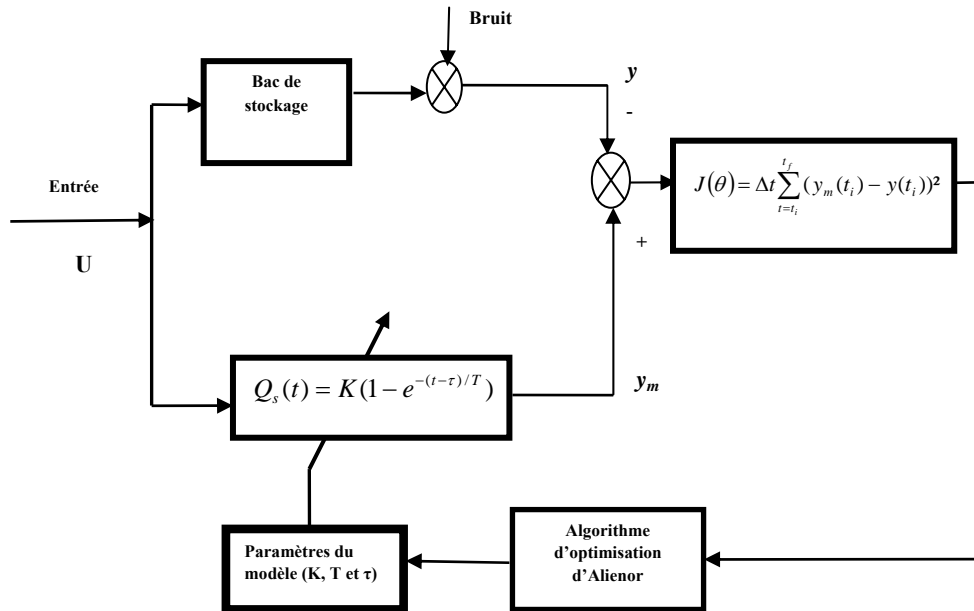


Figure 4.2 Estimation des paramètres du modèle de bac de stockage.

L'erreur mesurée entre la sortie du modèle et celle calculée analytiquement est donnée comme suit :

$$e(t) = y_m(t) - y(t) \tag{4.46}$$

La minimisation du critère  $J$  est défini comme suit :

$$J = \int_0^{+\infty} (y_m(t_i) - y(t_i))^2 dt \tag{4.47}$$

La discrétisation du critère donne :

$$J = \Delta t \sum_{t=t_i}^{t_f} (y_m(t_i) - y(t_i))^2 \quad (4.48)$$

Notons que ce critère dépende implicitement des paramètres du modèle à identifier donc on peut écrire :

$$J(K, T, \tau) = \Delta t \sum_{t=t_i}^{t_f} (y_m(t_i) - y(t_i))^2 \quad (4.49)$$

#### IV.6 Formulation du problème d'optimisation et résolution :

Afin d'identifier les paramètres du bac de stockage, on formule un problème d'optimisation dont la fonction objectif est le critère à minimiser  $J$  sans contraintes. Les variables de décisions sont les paramètres du bac de stockage à identifier. Le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

$$\min_{K, T, \tau} J(K, T, \tau) = \min_{K, T, \tau} \Delta t \sum_{t=t_i}^{t_f} (y_m(t_i) - K(1 - e^{-(t-\tau)/T}))^2 \quad (4.50)$$

Soit  $\rho$  le vecteur de paramètres du modèle à identifier :

$$\rho = \begin{bmatrix} K \\ T \\ \tau \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

La résolution de ce problème se fera par la méthode d'optimisation globale Alienor, basée sur la nouvelle transformation réductrice de **Konfe**. Le principe est de transformer le critère  $J(\rho)$  de plusieurs variables en un critère  $J(\theta)$  d'une seule variable. Il s'agit d'exprimer les composantes  $\rho_i$  du vecteur de paramètres  $\rho$  sous la forme :

$$\rho_i = a \cos(w_i \theta + \varphi_i) \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.52)$$

Où  $w_i$  et  $\varphi_i$  sont des suites lentement croissantes et  $a$  une constante positive :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= K = a \cos(w_1 \theta + \varphi_1) \\ \rho_2 &= T = a \cos(w_2 \theta + \varphi_2) \\ \rho_3 &= \tau = a \cos(w_3 \theta + \varphi_3) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ces expressions seront substituées dans la formule de  $J(\rho)$ , ce qui permet d'avoir le problème d'optimisation à une seule variable suivant :

$$\min_{\theta} \hat{J}(\theta) = \min_{\theta} \Delta t \sum_{t=t_i}^{t_f} (y_m(t_i) - a \cos(w_1 \theta + \varphi_1) (1 - e^{-(t - a \cos(w_3 \theta + \varphi_3)) / a \cos(w_2 \theta + \varphi_2)}))^2 \quad (4.54)$$

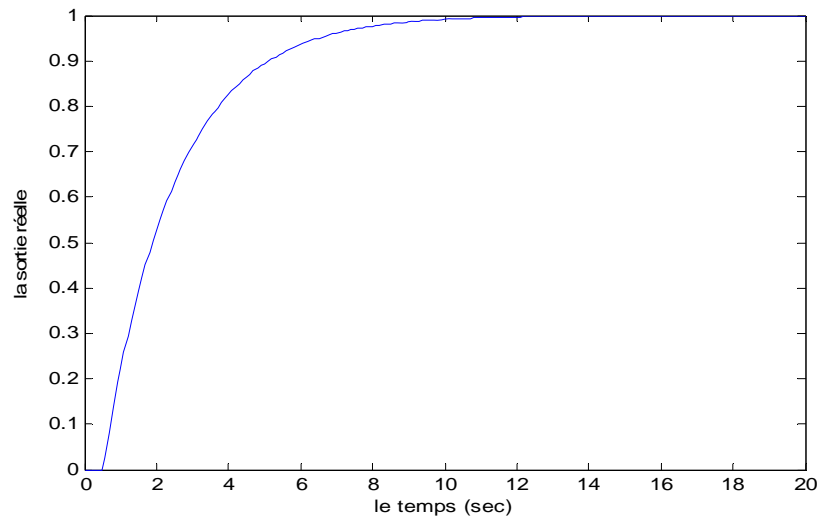
Pour illustrer cette approche, on procède à une application de la méthode au bac de stockage présentée précédemment. Deux cas seront présentés : utilisation des mesures non bruitées et mesures bruitées.

#### IV.6.1 Mesures non bruitées :

Comme le travail est théorique, c'est-à-dire les mesures sont indisponibles, on suppose une structure pour le modèle avec des paramètres connus qu'on essaie d'identifier par la suite, en prenant comme mesures la sortie obtenue par simulation du modèle considéré. Ce dernier d'après l'étape de modélisation, prend la forme suivante :

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2s} e^{-0.5s} \quad (4.55)$$

La sortie indicielle réelle du système est représentée dans la figure ci-dessous :



**Figure 4.3** Evolution de la sortie réelle du système

L'application de la méthode d'Alienor basée sur la nouvelle transformation de Konfe donne:

$$\begin{aligned}
 K &= 2 \cos(100\theta + 1) \\
 T &= 2 \cos(101\theta + 1.00005) \\
 \tau &= 2 \cos(102\theta + 1.0001)
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

On a ramené le critère  $J$  de trois variables à une seule variable  $\theta$ , en effet, minimiser le critère  $J$  revient à trouver  $\theta$  optimale. Cette dernière permet de donner les valeurs des paramètres du système, où les valeurs suivantes ont été trouvées:

$$\begin{aligned}
 K &= 0.9743 \\
 T &= 1.9829 \\
 \tau &= 0.4898
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

La figure 4.4 illustre la sortie du modèle identifié.

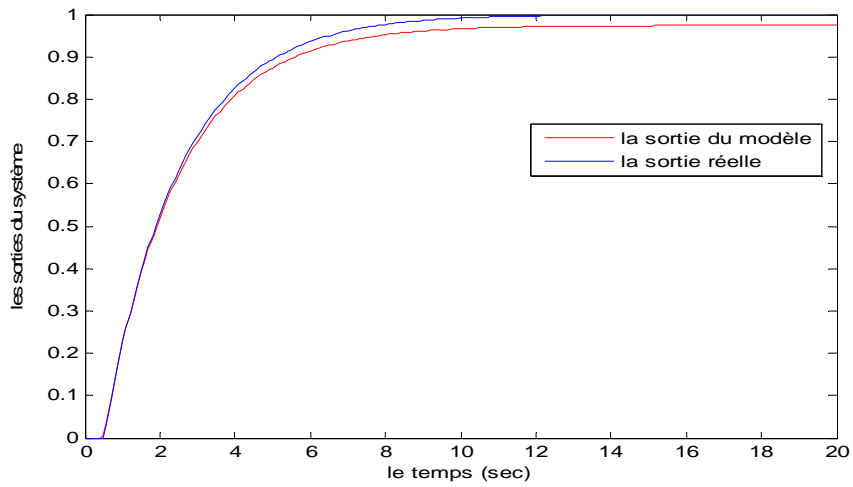


Figure 4.4 Evolution de la sortie réelle du système et la sortie du modèle

IV.6.2 Mesures bruitées :

On rajoute au système précédent un bruit, dont la sortie indicielle réelle du système est représentée dans la figure ci-dessous :

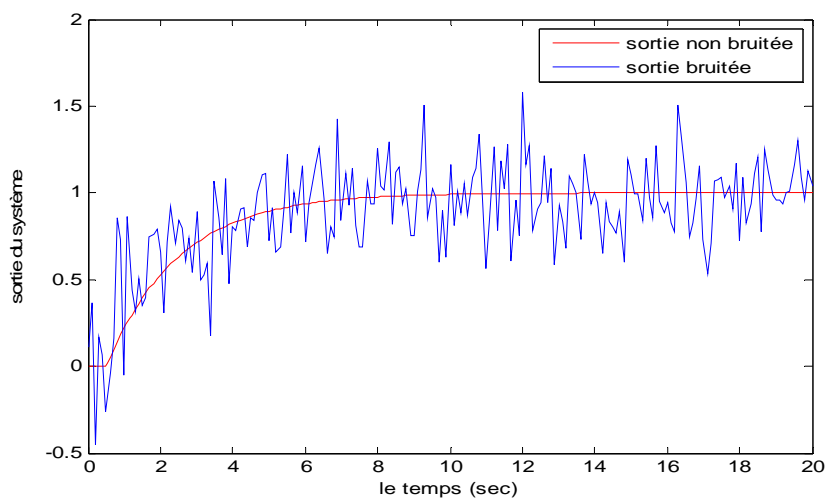
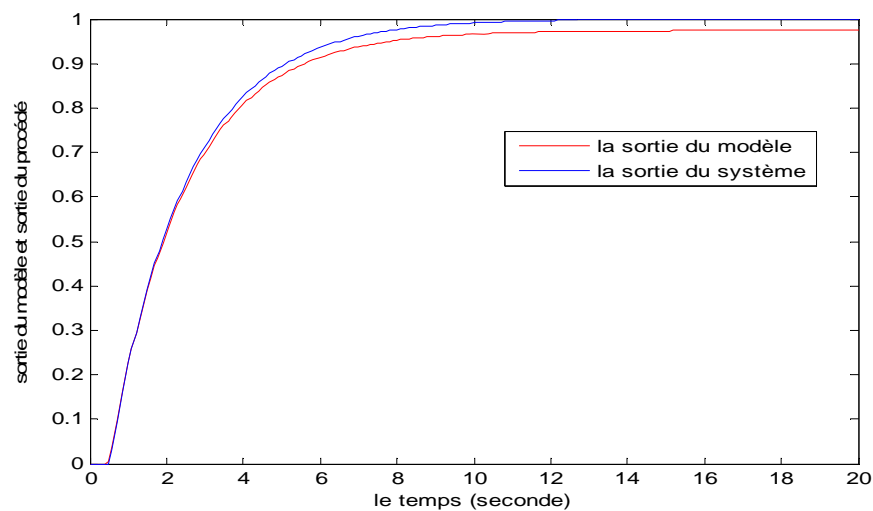


Figure 4.5 Sortie réelle et sortie bruitée du système

De même, on obtient les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}K &= 0.9743 \\T &= 1.9829 \\ \tau &= 0.4898\end{aligned}\tag{4.58}$$

La sortie du modèle est illustrée dans la figure suivante :



**Figure 4.6** Sortie du modèle et sortie du système

### IV.6.3 Interprétation des résultats :

La sortie du modèle obtenue est très proche de celle du système, ce qui valide le modèle identifié.

D'après ces résultats, on constate que les paramètres du modèle obtenus sont proches de ceux du système. Cependant, la précision de la méthode dépend du choix du paramètre  $\theta_{\max}$ , et du pas de discrétisation de l'intervalle  $[0, \theta_{\max}]$ .

**IV.7 Conclusion :**

Dans ce chapitre, on a présenté une étude concernant l'identification des paramètres d'un bac de stockage par la méthode du modèle. En effet, ce problème d'identification a été formulé sous forme d'un problème de programmation non linéaire, dont la résolution a été effectuée par la méthode d'Alienor. Le problème consiste à minimiser l'erreur obtenue entre la sortie du système et celle estimée par le modèle.

Des résultats satisfaisants ont été obtenus par la méthode d'Alienor puisque le problème d'optimisation initiale à trois variables de décisions se ramène à un autre problème à une seule variable de décision, ce qui permet l'obtention de l'optimum globale.



Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire, porte sur l'identification paramétrique d'un système par la méthode du modèle basée sur la minimisation d'un critère fonction de l'écart entre la sortie réelle du procédé et celle prédite par le modèle. La résolution du problème d'optimisation est réalisée par la méthode d'optimisation globale d'Alienor.

Ainsi, après avoir donné quelques généralités sur l'identification, on a présenté les différentes méthodes d'identification. Par la suite, on s'est intéressé aux méthodes d'optimisation en particulier la méthode d'optimisation globale Alienor. A la fin, on a appliqué la méthode du modèle à un bac de stockage pour identifier ses paramètres. Ainsi, on a montré qu'en utilisant la transformation de Konfe, le problème d'identification posé sous forme d'un problème d'optimisation à trois variables de décision se ramène aisément à un problème d'optimisation à une seule variable de décision facile à résoudre.

L'identification paramétrique par la méthode du modèle permet l'obtention des résultats efficaces qui convergent vers les paramètres réels du système. La méthode d'optimisation globale Alienor réduit le temps de calcul en ramenant le problème d'optimisation de plusieurs variables à un problème d'optimisation d'une seule variable facile à résoudre et converge vers l'optimum global. Ce constat est démontré lors de l'étape de validation du modèle. L'efficacité est démontrée même en présence du bruit de mesure.

Le travail reste ouvert et comme perspectives de continuité on peut envisager l'application de la méthode d'Alienor pour l'identification des systèmes non linéaires et multivariables.

# Bibliographie

- [1] **M. RIVOIRE, J. L. FERRIER**, « Cours d'Automatique, Tome 3 : Commande par Calculateur, Identification ». Edition Eyrolles, 1997.
- [2] **J. M. FLAUS**, « La régulation Industrielle : Régulateur PID, Prédicatifs et Flous ». Edition Hermès, Paris, 1994.
- [3] **M. BIERLAIRE**, « Introduction à l'optimisation Différentiable ». Editions Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2006.
- [4] **A. MAIDI**, « cours modélisation et identification des processus ». Département Automatique, UMMTO, 4<sup>ème</sup> Année, 2008-2009.
- [5] **A. MAIDI**, « cours de commande optimale ». Département Automatique, UMMTO, 2<sup>ème</sup> Année Master, 2009-2010.
- [6] **B. O. KONFE**, « Nouvelles méthodes mathématiques Alienor et Adomain, pour la biomédecine ». Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR d'état, Unité de Formation et de Recherche en Sciences Exactes et Appliquées, Département de Mathématiques et informatique, Université de OUAGADOUGOU, 2005.

**Résumé :**

Dans ce travail, on a abordé une résolution d'un problème d'identification par la méthode du modèle en utilisant une technique d'optimisation globale appelée Alienor. Cette dernière, en utilisant des transformations réductrices, a permet de ramener le nombre de variables de décision (paramètres à identifier) à une seule variable de décision, ce qui simplifier la résolution du problème d'optimisation. De plus la méthode d'Alienor a permet de localiser l'optimum global.

La démarche globale proposée est adoptée pour l'identification du bac de stockage dont la dynamique est décrite par un modèle à trois paramètres (élément du premier ordre avec retard).

**Mots Clés :**

Identification, Méthodes d'identification, Introduction à l'optimisation, Méthodes d'optimisation, Optimisation globale Alienor.