

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

OPTION : MATHEMATIQUE APPLIQUEES ET RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présenté par :

Mlle Ouazna OUKACHA

Sujet :

Méthode directe d'optimisation de problèmes de contrôle

Devant le jury d'examen composé :

Mr. Djamal Hammadouche	Professeur	U.M.M.T.O	Président
Mr. Mohamed Aidene	Professeur	U.M.M.T.O	Rapporteur
Mr. Jean-Paul Gauthier	Professeur, IUF	Université de Toulon	Co-Directeur
Mr Said Djennoune	Professeur	U.M.M.T.O	Examineur
Mr. Meziane Aider	Professeur	U.S.T.H.B	Examineur
Mr. Abdelkader Merakeb	Maître de Conférence A	U.M.M.T.O	Examineur

Remerciements

J'exprime mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, le professeur **Mohamed AIDENE** du laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi ouzou pour l'aide qu'il m'a apportée, pour sa patience et son encouragement tout au long de ce travail qui a commencé en novembre 2011.

Je souhaite remercier mon co-directeur de thèse, le professeur **Jean-Paul GAUTHIER** (membre honoraire de l'Institut Universitaire de France) du laboratoire des Sciences de l'Information et Systèmes (LSIS, UMR 7296) de l'Université de Toulon, de m'avoir accueillie au sein de son équipe. Je lui suis très reconnaissante pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je tiens à remercier le professeur **Djamel HAMADOUCHE** (LMPA, UMMTO) d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie également le professeur **Said DJENOUN** (L2CSP, UMMTO), le professeur **Meziane AIDER** (LaROMaD, USTHB) et *Mr* **Abdekader MERAKEB**, maître de conférences classe A (L2CSP, UMMTO) d'avoir accepté de juger mon travail en tant qu'examineurs.

Je souhaite remercier tout particulièrement *Mr* **Nicolas BOIZOT**, maître de conférences du laboratoire LSIS de l'université de Toulon pour son soutien, ses conseils et le temps qu'il m'a consacré, notamment pour lire mon manuscrit et sans oublier *Mme* **Amandine BOIZOT** pour sa bonne humeur, son soutien et son accueil.

Un grand merci à *Mme* **Francesca CARLOTTA CHITTARO**, maître de conférences du laboratoire LSIS de l'université de Toulon pour son soutien, son accueil et ses précieux conseils et sans oublier son mari **Andrea**.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du laboratoire LSIS pour leur accueil chaleureux et je remercie plus particulièrement le directeur **Mustapha OULAD-SINE**, professeur de l'Université d'Aix-Marseille et le professeur **Élisabeth MURISASCO** de l'Université de Toulon.

Je tiens aussi à remercier les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'UMMTO, spécialement **Naima** et **Hassina**.

Je souhaite remercier le Campus France ainsi que l'Université de Tizi ouzou pour le financement de cette thèse, la bourse de finalisation (Bourse PROFAS B^+) et le projet Tassili.

Je souhaite remercier aussi mes cousins *Dada Mustapha*, *Dada Brahim*, *Mehdi* et *Mr. Youcef TALEB* pour tout ce qu'ils m'ont apporté tout au long de ces années. Ainsi, j'adresse mes remerciements personnels à *Mr. Rachid MEHADDENE*, à *Mr. Omar AIDENE*, à *Mr. Kesri* et à *Mr. Salhi*.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à mon amie **Fazia** pour tout le soutien qu'elle m'a apporté et je suis très reconnaissante pour le temps qu'elle a pris pour m'aider à réaliser ce manuscrit. Ainsi, je remercie ma cousine **Wafia** et mes amies **Cécile** et **Xuan** pour l'aide et le soutien qu'elles m'ont apporté.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille, et en particulier à ma maman qui a fait beaucoup pour que je puisse réaliser ce travail, merci pour ton soutien et ton encouragement durant toutes ces années. Je tiens également à remercier mes deux sœurs, mon frère et mon beau-frère.

Dédicaces

Je dédie ce travail à l'âme de mon cher père.

Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	vi
Liste des tableaux	vii
1 Généralités sur le contrôle optimal	5
1.1 Introduction	5
1.2 Position du problème	5
1.3 Contrôlabilité des Systèmes linéaires	7
1.3.1 Ensemble accessible	8
1.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes	9
1.3.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes	10
1.4 L'existence de trajectoires optimales	12
1.5 Principe du Maximum de Pontryagin	12
1.5.1 Condition de transversalité	14
1.5.2 Problème en temps minimal	16
1.5.3 Nature des solutions	17
1.6 Méthode de tir simple	19
1.7 Méthode de discrétisation totale	21
1.8 Conclusion	22
2 Nouvelle méthode directe de résolution	23
2.1 Introduction	23
2.2 Position du problème	23
2.2.1 Concepts de base	24
2.2.2 Notion de support-contrôle	25
2.2.3 Accroissement de la fonctionnelle	26
2.2.4 Critère d'optimalité	28
2.2.5 Principe du maximum	29
2.3 Détermination d'un support-contrôle de départ	33
2.4 Méthode Adaptée	33

TABLE DES MATIÈRES

2.4.1	Changement de contrôle	34
2.4.2	Changement du support	36
2.4.3	Procédure finale	37
2.5	Méthode du Support	40
2.5.1	Changement de contrôle	40
2.5.2	Changement du support	42
2.6	Nouvelle version de la méthode Adaptée	43
2.6.1	Principe de discrétisation	44
2.6.2	Méthode adaptée pour PPL	44
2.7	Approche entre le PMP et les méthodes directes	44
2.8	Conclusion	48
3	Implémentation numérique	49
3.1	Introduction	49
3.2	Exemple numérique	49
3.3	Problème en temps minimal	51
3.4	Résolution par le principe du maximum	54
3.5	Résolution par la méthode de tir simple	60
3.6	Résolution par la méthode de discrétisation totale	62
3.7	Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée	65
3.8	Comparaison numérique	70
3.8.1	Nouvelle version de la <i>MA</i> et PMP	70
3.8.2	Nouvelle version de la <i>MA</i> et méthode de discrétisation totale	72
3.9	Conclusion	74
A	Résolution d'un PPL à variable bornée par la méthode adaptée	77
A.1	Position du problème	77
A.2	Critère d'optimalité et de Suboptimalité	79
A.3	Détermination d'un support-plan de départ	80
A.4	Méthode de résolution	81
A.4.1	Changement de plan	81
A.4.2	Changement du support	82
A.5	Itération de l'algorithme	84
A.6	Covergence de la méthode adaptée	85
A.7	Exemple numérique	85
B	Annexe Code	89
B.1	Code du problème en temps minimal	89
B.2	Code de la méthode de tir	91
B.3	Code de la méthode de discretisation totale	93
B.4	Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée	96
	Références	107

Table des figures

1.1	Contrôlabilité.	8
1.2	$Acc(x_0, t_f)$: Ensemble accessible.	9
1.3	Nature des solutions.	18
3.1	Résultats du problème en temps minimal.	53
3.2	Vecteur adjoint $(t, p_3(t))$ et le contrôle $u(t) = \text{sign}(p_3(t))$	58
3.3	Trajectoires optimales : $(t, x_1(t))$, $(t, x_2(t))$ et $(t, x_3(t))$	59
3.4	Représentation graphique du Hamiltonien $\mathcal{H}(t)$	59
3.5	Diagramme des phases $(x_1(t), x_2(t))$	60
3.6	Résultats de la méthode de tir.	62
3.7	Solutions non-optimales.	63
3.8	Solutions très éloignées.	64
3.9	Solutions proches.	64
3.10	Solutions très proches.	64
3.11	Représentation graphique de $p_3(t)$ et de $\Delta(t)$	71
3.12	Comparaison numérique entre la NM et la MDT	73
3.13	Représentation de la NM du τ_B en fonction N	73

Liste des tableaux

3.1	Simulation numérique de la nouvelle version de la méthode Adaptée. . .	70
3.2	Temps d'exécution de la NM et de la MDT en fonction de N	74

Introduction générale

Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines. Elle intervient pratiquement dans tous les processus de modélisation actuels et elle joue un rôle très important dans beaucoup de domaines. Qu'il s'agisse de problèmes de la recherche opérationnelle, de mathématiques appliquées, d'analyse, d'analyse numérique, de statistiques, de théorie des jeux, de programmation linéaire, ou encore en théorie du contrôle.

Le problème d'optimisation consiste à déterminer une solution qui maximise ou minimise l'objectif quantitatif, tout en respectant éventuellement certaines contraintes. Il existe plusieurs types de problèmes d'optimisations qui sont classés selon leurs fonctions objectifs et leurs contraintes : optimisation linéaire, optimisation non-linéaire, optimisation linéaire quadratique et optimisation convexe, etc.

Les problèmes d'optimisation sont très divers par leurs natures et leurs structures, alors chaque type de ces problèmes sera résolu d'une manière différente [19, 39, 45].

Le premier algorithme qui permet de résoudre un problème d'optimisation linéaire (programmation linéaire) s'appelle la méthode du simplexe, cette méthode a été introduite par George Dantzig à partir de 1947 [11], et en 1970 Klee et Minty prouvent que l'algorithme du simplexe est de complexité exponentielle [23]. Au début des années 80, et en 1984, Karmarkar a mis au point une nouvelle méthode appelée méthode de point intérieur de complexité polynomiale. Il a montré que celle-ci a des performances supérieures à celles de l'algorithme du simplexe [22]. Depuis, il y a eu beaucoup des travaux de recherche portant sur les méthodes de point intérieur dont la méthode adaptée introduite par R.Gabasov et F.M.Kirillova, des articles ont également été publiés dans des journaux scientifiques, et ainsi que quelques ouvrages [4, 12, 14, 26, 30, 31, 38, 44]. Au début de son invention, elle a été appliquée à différents types de problèmes de programmation mathématique [26, 27], par la suite à des problèmes de contrôle optimal [5, 30, 35].

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser.

Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'application, par exemple : un ingénieur qui désire contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un économiste qui veut agir sur un équilibre financier en modélisant un taux, un chimiste qui cherche à améliorer son procédé en régulant la température, et ainsi d'autres applications dans les domaines : électricité, électronique, biologie, etc.

La théorie du contrôle optimal est une généralisation du calcul des variations qui a été développé au milieu du dix-huitième siècle.

Le but de la théorie du contrôle optimal est de conduire un système dynamique contrôlé d'une configuration donnée à une configuration visitée à attendre, tout en minimisant (ou maximisant) un certain coût et en respectant certaines contraintes.

La modélisation du problème du contrôle optimal est obtenue par divers outils mathématiques : équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations discrètes, équations intégrales, équations stochastiques, etc.

Généralement, la théorie du contrôle optimal traite des systèmes dont la dynamique est décrite par une équation différentielle ordinaire. Les différents types de modèles mathématiques résultant dépendent fortement de la nature du problème à traiter, et il peut être exprimé sous différentes formes : linéaire, non linéaire, convexe ou non convexe, etc.

Selon la nature du problème, plusieurs méthodes ou approches existent en littérature qui permet d'obtenir des décisions optimales ou sous-optimales en temps de calcul qui dépend de la complexité du modèle mathématique.

La théorie du contrôle optimal moderne a commencé dans les années 50, par la découverte du fameux principe du maximum de Lev Pontryagin [28]. Ce principe donne une condition nécessaire de premier ordre et il permet de donner une solution optimale locale. Généralement, les problèmes du contrôle optimal n'admettent pas de solution analytique (i.e. par ce principe), car la modélisation mathématique d'un phénomène pratique conduit très souvent à un modèle non-linéaire, non-convexe et parfois non-lisse. En se basant sur ce principe, plusieurs méthodes numériques sont développées afin de résoudre ces problèmes. On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les méthodes directes sont basées sur la discrétisation partielle ou bien totale de l'intervalle de temps, elles transforment le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire). Ces méthodes donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour l'optimalité de la solution. Ainsi, elles fournissent des solutions sous-optimales, i.e. approchées [3, 12, 13, 18, 32, 36, 40].

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin [1, 24, 28]. Celles-ci donnent seulement une condition nécessaire.

Actuellement, l'outil principal utilisé dans la résolution des problèmes de contrôle optimal est la mise en oeuvre ces méthodes numériques à l'aide de logiciels (Matlab, Mathematica et etc.), puisque la plupart des problèmes ne peuvent pas produire une

solution analytique.

Structure de thèse

Ce manuscrit de thèse propose une nouvelle méthode directe de résolution de problèmes de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques linéaires. Il sera organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre porte sur la description générale du problème du contrôle optimal, il présente les différentes techniques utilisées dans ce travail de thèse.

Nous commençons par une présentation générale de la forme de problème du contrôle optimal, ce type de problème s'appelle problème Bolza ou bien Mayer-Lagrange.

Par la suite, nous étudions la notion de contrôlabilité des systèmes. Nous limitons notre étude aux systèmes dynamiques linéaires autonomes et non autonomes. La contrôlabilité des systèmes linéaires est développée par Kalman [21].

Enfin, nous terminons ce chapitre par la présentation de deux méthodes indirectes : le principe du maximum de Pontryagin, la méthode de tir et une méthode directe qui est la méthode de discrétisation totale.

Dans le principe du maximum de Pontryagin, nous donnons ainsi la condition de transversalité pour différents cas, ensuite, nous étudions le problème en temps minimal [8, 24, 28, 37].

Le second chapitre est dédié à la description d'autres méthodes de résolution de problèmes de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques linéaires.

Tout d'abord, nous présentons deux méthodes directes classiques : La méthode Adaptée et la méthode du Support. Celles-ci sont développées par R.Gabasov durant les années 80 [13]. La méthode Adaptée est issue de la programmation linéaire. Par contre, la méthode du Support est une autre variété de la méthode Adaptée qui est basée sur la discrétisation partielle de l'intervalle de temps.

Ensuite, nous développons une nouvelle méthode en transformant la méthode Adaptée de Gabasov. Contrairement à la méthode Adaptée où la discrétisation se fait à l'intérieur de l'ensemble des indices hors base, cette nouvelle approche basée sur la discrétisation totale de l'ensemble des indices. Elle est constituée de trois étapes. Premièrement, nous transformons le problème du contrôle optimal au problème de la programmation linéaire par le principe de discrétisation, c'est-à-dire discrétisation totale de l'intervalle de temps. Deuxièmement, nous résolvons ce problème par la méthode de point intérieur. Troisièmement, nous appliquons la procédure finale pour la solution obtenue dans la deuxième étape, afin de trouver une solution optimale du problème initial. Cette troisième procédure est basée sur la méthode de Netwon.

Nous terminons ce chapitre par le principe du maximum de Pontryagin sur lequel est basée notre approche. Ainsi, nous développons une proposition qui montre qu'une solution optimale de ce type de problème est donnée par un contrôle qui sature ses

bornes (i.e. contrôle bang-bang). Le nombre de changements du contrôle optimal est supérieur ou égal au nombre des variables d'états finales fixées du système dynamique.

Le dernier chapitre expose les résultats numériques d'un exemple académique.

Tout d'abord, nous résolvons le problème en temps minimal qui correspond au problème du départ, afin de calculer le temps nécessaire pour joindre la cible à partir des conditions initiales données.

Ensuite, nous traitons cet exemple numérique par quatre méthodes : le principe du maximum de Pontryagin (PMP), la méthode de tir, la méthode de discrétisation totale et par notre nouvelle méthode. Nous résolvons ce problème analytiquement par le PMP et ainsi nous présentons quelques simulations qui ont été obtenus à l'aide du logiciel numérique Mathematica. Nous implémentons les trois dernières méthodes à l'aide de logiciel Matlab, afin de résoudre cet exemple numérique.

Finalement, Nous comparons cette méthode avec d'autres méthodes directes et indirectes à l'aide de simulations numériques.

Travaux réalisés

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à une publication et des présentations indiquées comme suit :

Articles

- Ouazna Oukacha, M.Aidene, *Direct Method of solving optimal control problems*, ACTA Universitatis Apulensis , N°.40, pp. 123-134, 2014.

Communications Internationales

- Ouazna Oukacha, M.Aidene, *Optimisation d'un problème de contrôle*, 8ème rencontres RAMA, Alger (Algérie), 26-29 novembre 2012.
- Ouazna Oukacha, M.Aidene, *Optimisation d'un problème de contrôle*, 14ème conférence ROADEF, Troyes (France), 13-15 février 2013.
- Ouazna Oukacha, M.Aidene, *Méthode directe de résolution d'un problème de contrôle optimal*, International Conference ICSIP'13, Guelma (Algeria), may 12-14, 2013.

Chapitre 1

Généralités sur le contrôle optimal

1.1 Introduction

Ce chapitre est donc structuré de la manière suivante : la section 1.2 est dédiée à la description d'un modèle général de problème du contrôle optimal. Dans la section 1.3, nous étudions la contrôlabilité des systèmes linéaires. La contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes est décrite dans la section 1.3.2 et pour les systèmes linéaires non-autonomes dans la section 1.3.2. Dans la section 1.4, nous présentons le théorème d'existence de trajectoires optimales pour un problème général du contrôle optimal. La section 1.5 est consacrée au principe du maximum de Pontryagin. La méthode de tir est décrite dans la section 1.6. La méthode de discrétisation totale est représenté dans la section 1.7.

1.2 Position du problème

La problématique générale d'un problème de contrôle optimal est donnée par un système d'équations différentielles dont le comportement dépend de variables extérieures dites variables de contrôle (ou commande). Pour un contrôle donné, on définit la trajectoire associée, ainsi qu'un critère à optimiser.

Nous considérons un problème dit de Bolza suivant :

$$\text{Minimiser } J(u(t_f), t_f) = g^\circ(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} f^\circ(u(t), x(t), t) dt, \quad (1.1)$$

$$\text{Sous les contraintes : } \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \in M_0, \quad (1.3)$$

$$x(t_f) = x_f \in M_f, \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U, t \in T = [0, t_f], \quad (1.5)$$

où

- $J(u(t_f), t_f)$ est le critère à optimiser (autrement appelé coût, critère de qualité, fonctionnelle),
avec $f^\circ : U \times V \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 , U ouvert de \mathbb{R}^m , V ouvert de \mathbb{R}^n , T est un intervalle temps. Cette fonction dépend de $x(\cdot)$ appelée équation d'état et de $u(\cdot)$ qui est la variable de contrôle sur le système.
 $g^\circ : V \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Elle dépend de t_f qui est le temps final (fixé ou libre) et de l'état final $x(t_f)$.
- $f : U \times V \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^1 . L'équation (1.2) appelée état contrôlé du système, ou trajectoire contrôlée du système.
- x_0 est la position initiale du système, x_f est la position finale du système, et M_0 et M_f sont deux variétés de \mathbb{R}^n .
- U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur T à valeurs dans l'ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Remarque 1.1

1. Le nom du problème est donné par la forme du coût et on distingue trois autres types de problèmes de contrôle optimal :

- (a) Si $g^\circ(x(t_f), t_f) = 0$, alors le problème est dit problème de Lagrange.
- (b) Si $f^\circ(x(t), u(t), t) = 0$, alors le problème est dit problème de Mayer.
- (c) Si ($g^\circ(x(t_f), t_f) = 0$ et $f^\circ(u(t), x(t), t) = 1$) ou bien ($g^\circ(x(t_f), t_f) = t_f$ et $f^\circ(u(t), x(t), t) = 0$), alors le problème correspond au problème en temps minimal.

On remarque que le problème de Bolza est un problème qui regroupe la forme Lagrange et la forme Mayer. Par conséquent, ce problème s'appelle aussi problème de Mayer-Lagrange.

On peut toujours ramener le problème de Lagrange à un problème de Mayer. Il suffit de définir un état x_{n+1} tel que :

$$\dot{x}_{n+1}(t) = f^\circ(u(t), x(t), t), \quad x_{n+1}(0) = 0.$$

Ainsi, on peut le transformer à un problème en temps minimal sur certaines conditions, en utilisant le lemme suivant :

Lemme 1.1 [8]

Considérons le problème du contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min \int_0^\tau L(x(t))dt, \\ \dot{x} = F(x) + uG(x), x \in \mathbb{R}^2, F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), F(0) = 0, \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases} \quad (1.6)$$

Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de C^3 (lisse) bornée, telle qu'il existe $\delta > 0$ satisfaisant $L(x) > \delta, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^2$, le problème (1.6) est équivalent au problème de la forme :

$$\begin{cases} \min \int_0^\tau dt = \tau, \\ \dot{x} = \frac{F(x)}{L(x)} + u \frac{G(x)}{L(x)}, x(0) = 0, x(\tau) = x_0, \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

2. Lorsqu'il s'agit d'un problème du contrôle optimal en temps final fixé, il faut tout d'abord résoudre le problème en temps minimal, afin de calculer le temps minimum qui permet d'atteindre la cible.

Le problème du contrôle optimal consiste à déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_f de sorte à minimiser ou maximiser le coût. Pour résoudre un problème de ce type, la première question à se poser est :

Existe-t-il un contrôle $u(t)$ tel que la trajectoire $x(t)$ associée relie un point de l'ensemble de départ $x_0 \in M_0$ à la cible terminal $x_f \in M_f$ en un temps fini ?

La notion qui nous permet de répondre à cette question est l'étude de la contrôlabilité du système.

1.3 Contrôlabilité des Systèmes linéaires

La contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes et non autonomes est donnée par la condition de Kalman développée en 1960 [21]. Les systèmes linéaires non-stationnaires (non autonomes) et les systèmes non linéaires sont très difficiles à étudier, car on ne peut pas étudier la contrôlabilité globale du système. Par contre, il faut souvent étudier la contrôlabilité locale du système.

Définition 1.1 Un système différentiel est dit autonome si la variable temporelle (variable de temps t) n'apparaît pas explicitement dans les fonctions f et f° . Dans le cas contraire, le système est dit non autonome.

Définition 1.2 *Le système (1.2) est dit contrôlable si pour tous points (1.3) et (1.4), il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée joint x_0 à x_f en un temps fini.*

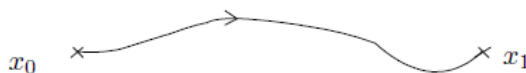


FIGURE 1.1 – Contrôlabilité.

La deuxième question qu'on peut poser :
 Quels sont tous les états qui sont atteignables depuis un état initial particulier ?
 L'existence d'un chemin entre deux états est relié à une notion dite d'accessibilité.

1.3.1 Ensemble accessible

Soient A et B deux applications L^∞ sur l'intervalle I de \mathbb{R} à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{M}_{r,p}$ est l'ensemble des matrices à r lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

Considérons le système contrôlé (1.2) sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (1.8)$$

La solution du système différentiel (1.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)\left(x_0 + \int_0^t (F(\tau))^{-1} B(\tau)u(\tau)d\tau\right), \quad t \in T, \quad (1.9)$$

où $F(t)$ est la résolvante du système : $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$, $F(0) = I_n$, I_n : matrice identité.

Définition 1.3 *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :*

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f), \quad u \in L^\infty([0, t_f], \Omega)\},$$

où $L^\infty([0, t_f], \Omega)$ est l'ensemble des applications mesurables u de $[0, t_f]$ essentiellement bornées et $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.2) associée à u .

Ainsi, $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1.2), en temps t_f pour différentes valeurs de u .

Théorème 1.1 [24] *Considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^m$ est compact. Soient $t_f > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $t \in [0, t_f]$, $Acc(x_0, t)$ est compact, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, t_f]$.

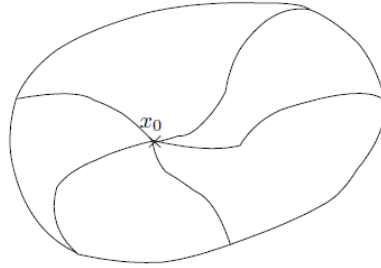


FIGURE 1.2 – $Acc(x_0, t_f)$: Ensemble accessible.

Définition 1.4 *Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener, en temps fini, d'un état initial vers un état final désiré au moyen d'un contrôle. Autrement dit, le système contrôlé (1.2) est dit contrôlable en temps t_f si*

$$Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n, \quad \text{pour tout } x_0 \in M_0,$$

c'est-à-dire pour tout $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe

$$u(\cdot) : [0, t_f] \longrightarrow U, \quad \text{tel que : } x_f = x(t_f, x_0, u(\cdot)).$$

Le système contrôlé (1.2) est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f \geq 0} Acc(x_0, t_f).$$

1.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Théorème 1.2 [21] *Un système linéaire autonome de \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

est contrôlable en temps t_f si et seulement si le rang de la $n \times n$ matrice

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B),$$

est égal à n .

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

Lemme 1.2 [21]

La matrice K est de rang n si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi^\circ : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} Bu(t) dt \end{aligned} \quad \text{est surjective.}$$

1.3 Contrôlabilité des Systèmes linéaires

Remarque 1.2 La matrice K est appelée matrice de Kalman et la condition $\text{rang}(K) = n$ est appelée condition de Kalman, elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 , ni de temps final t_f . Ceci signifie que si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Ce théorème donne ainsi une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où les matrices A et B ne dépendent pas de la variable de temps t .

Exemple 1.1 Considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \\ \dot{x}_2(t) = x_1 - u, \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman.

Par conséquent, la matrice de Kalman K est donnée par :

$$K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de K est égal à : $\det(K) = -1 \neq 0$, donc le $\text{rang}(K) = 2$, d'où le système est contrôlable.

1.3.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes

Théorème 1.3 [21] Un système linéaire non-autonome de \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice

$$C = \int_0^{t_f} (F(t))^{-1} B(t)B'(t) (F'(t))^{-1} dt,$$

est inversible.

Remarque 1.3 La matrice C est appelée matrice de contrôlabilité. Elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 , mais elle dépend du temps final t_f .

Exemple 1.2 Considérons le système dynamique linéaire non-autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t)\cos(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t)\sin(t), \end{cases}$$

1.3 Contrôlabilité des Systèmes linéaires

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

La résolvante du système $\dot{F}(t) = AF(t)$, avec $F(0) = I_2$ est :

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) & \dot{f}_2(t) \\ \dot{f}_3(t) & \dot{f}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}, \quad F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{f}_1(t) = -f_3(t), \\ \dot{f}_2(t) = -f_4(t), \\ \dot{f}_3(t) = f_1(t), \\ \dot{f}_4(t) = f_2(t). \end{cases}$$

La résolution de ce système revient à résoudre :

$$\ddot{f}_1(t) = -\dot{f}_3(t) = -f_1(t) \quad \text{et} \quad \ddot{f}_2(t) = -\dot{f}_4(t) = -f_2(t).$$

La solution est de la forme :

$$f_1(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = \alpha_3 \cos(t) + \alpha_4 \sin(t), \quad \text{avec} \quad f_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_2(0) = 0.$$

Par conséquent :

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (F(t))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice de contrôlabilité C est donnée par :

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{t_f} (F(t))^{-1} B(t) B'(t) (F'(t))^{-1} dt, \\ &= \int_0^{t_f} \left(\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \right) dt \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$C = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t_f & t_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice C est égal à : $\det(C) = 0$, donc la matrice n'est pas inversible. Par conséquent, le système n'est pas contrôlable.

1.4 L'existence de trajectoires optimales

L'existence de trajectoires optimales d'un problème du contrôle optimal revient à vérifier certaines conditions, qui sont généralement formulées sans recourir à l'hypothèse usuelle de convexité du domaine des valeurs de commande.

Le théorème suivant garantit l'existence de trajectoires optimales pour le problème de Mayer-Lagandre.

Théorème 1.4 [24] *Considérons le système de contrôle*

$$\dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t),$$

où $f : \mathbb{R}^{m+n+1}$ dans \mathbb{R}^n est une application de C^1 de et les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Soient f° une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^{m+n+1} , et g° une fonction continue sur \mathbb{R}^n . On considère le coût :

$$J(u) = g^\circ(x(t(u))) + \int_0^{t(u)} f^\circ(u(t), x(t), t) dt,$$

où $t(u) \geq 0$, tel que $x(t(u)) \in M_f$.

On suppose que :

- Il existe un réel positif s tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément bornée par s sur $[0, t(u)]$, i.e.,

$$\exists s > 0 | \forall u \in U, \quad \forall t \in [0, t(u)], \quad \|x_u(t)\| \leq s. \quad (1.10)$$

- Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés :

$$\bar{V}(t, x) = \{(f^\circ(u, x, t), f(u, x, t)) | u \in \Omega\} \quad (1.11)$$

est convexe.

Alors, il existe un contrôle optimal u sur $[0, t(u)]$, minimisant $J(u)$.

Bien entendu pour un problème de contrôle optimal en temps final fixé on impose $t(u) = t_f$ (et en particulier on suppose que la cible M_f est accessible depuis M_0 en temps t_f).

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

En 1962, Lev Pontryagin et ses collègues ont développé le Principe du Maximum [28]. Ce résultat mathématique est appelé principe, car il peut être transformé en

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

de nombreux théorèmes différents en fonction des contraintes du problème considéré. Le PMP permet de donner un formalisme puissant pour résoudre une grande famille de problèmes de contrôle optimal, mais ce principe donne une condition nécessaire d'optimalité et non suffisante.

Définition 1.5 *Le contrôle u est dit extrémal sur $[0, t_f]$, si la trajectoire du système (1.2) du problème de Mayer-Lagrange associée au contrôle u vérifie*

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t), \quad t \in [0, t_f].$$

où $\partial \text{Acc}(x_0, t)$ est la frontière de $\text{Acc}(x_0, t)$.

Définition 1.6 *Un contrôle $u^\circ(t)$, $t \in [0, t_f]$ est dit optimal si $u^\circ(\cdot)$ est extrémal et $J(u^\circ(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, t_f]$.*

Définition 1.7 *Le Hamiltonien du problème Bolza est la fonction :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda_0, u, x, p, t) &\mapsto \mathcal{H}(\lambda_0, u, x, p, t) = \lambda_0 f^\circ(u, x, t) + \langle p, f(u, x, t) \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

où \langle, \rangle est le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^n et $p(t)$ est un vecteur ligne et appelé vecteur adjoint.

Enoncé général

Théorème 1.5 [28] *Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t),$$

où $f(u(t), x(t), t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_f deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_f en temps $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$:

$$J(u(t_f), t_f) = g^\circ(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} f^\circ(u(t), x(t), t) dt$$

où $f^\circ(u(t), x(t), t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g^\circ(x(t_f), t_f) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (1.2) associée au contrôle u .

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Le but est de déterminer une trajectoire joignant M_0 à M_f et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $\lambda_o \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), \lambda_o)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, t_f]$, on a :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\lambda_o, u(t), x(t), p(t), t)}{\partial p(t)}, \quad (1.13)$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\lambda_o, u(t), x(t), p(t), t)}{\partial x(t)}, \quad (1.14)$$

le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\mathcal{H}(\lambda_o, u^*(t), x(t), p(t), t) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(\lambda_o, u(t), x(t), p(t), t). \quad (1.15)$$

1.5.1 Condition de transversalité

La condition de transversalité indique le comportement que doit avoir le contrôle quand on arrive à l'horizon fini (ou infini) : La manière dont le contrôle doit traverser la ligne d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir la trajectoire optimale parmi toutes les trajectoires possibles. Cette condition est donnée par les équations provenant des conditions dites aux deux bords, en t_0 (temps initial) d'une part et en t_f d'autre part sont appelées équations de transversalités.

Dans le cas de problème point-point, cette condition est donnée par les deux équations :

— à l'origine

$$\left(-\mathcal{H}(t_0) + \lambda_o \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial t_0} \right) \delta t_0 + \left(p'(t_0) + \lambda_o \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial x_0} \right)' \delta x_0 = 0, \quad (1.16)$$

— à l'arrivée

$$\left(\mathcal{H}(t_f) + \lambda_o \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left(-p'(t_f) + \lambda_o \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial x_f} \right)' \delta x_f = 0, \quad (1.17)$$

où δt_0 , δt_f , δx_0 et δx_f sont des variations des trajectoires, aux instants initial et final et sont indépendantes, et le symbole ($'$) représente la transposition .

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Puisque, le temps initial t_0 du problème (1.1)-(1.5) est fixé à zéro et ainsi x_0 fixé, alors nous nous intéressons seulement à l'équation (1.17). Par conséquent, on en déduit qu'il y a 6 cas possibles selon t_f et x_f :

1. Si t_f fixé et x_f fixé : $\delta t_f = 0$, $\delta x_f = 0$, $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$.
2. Si t_f fixé et x_f libre : $\delta t_f = 0$, $\delta x_f \neq 0$, $x(t_0) = x_0$ et $-p'(t_f) + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f))}{\partial x_f} = 0$.
3. Si t_f fixé et x_f contraint $\Phi(x(t_f)) = 0$, $\Phi(\cdot) \in \mathbb{R}^r$: $\delta t_f = 0$, $x(t_0) = x_0$ et $-p'(t_f) + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f))}{\partial x_f} + \frac{\partial \Phi'(x(t_f))}{\partial x_f} \nu = 0$, où ν est un scalaire.
4. Si t_f libre et x_f fixé : $\delta t_f \neq 0$, $\delta x_f = 0$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$ et $\mathcal{H}(t_f) + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} = 0$.
5. Si t_f libre et x_f libre : $\delta t_f \neq 0$, $\delta x_f \neq 0$, $x(t_0) = x_0$ et $\left(\mathcal{H}(t_f) + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left(-p'(t_f) + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial x_f} \right)' \delta x_f = 0$.
6. Si t_f libre et x_f contraint $\Phi(x(t_f), t_f) = 0$, $\Phi(\cdot) \in \mathbb{R}^r$: $\left(\mathcal{H}(t_f) + \nu' \frac{\partial \Phi(t_f, x(t_f))}{\partial t_f} + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ}{\partial t_f} \right) \delta t_f + \left(-p'(t_f) + \frac{\partial \Phi'(t_f, x(t_f))}{\partial x_f} \nu + \lambda_0 \frac{\partial g^\circ}{\partial x_f} \right)' \delta x_f = 0$,
où $g^\circ = g^\circ(x(t_f), t_f)$.

Si l'un des deux ensembles M_0 et M_f sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x_0 \in M_0$ et $x_f \in M_f$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités suivantes :

$$p(0) \perp T_{x_0} M_0, \quad (1.18)$$

$$p(t_f) - \lambda_0 \frac{\partial g^\circ(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \perp T_{x_f} M_f, \quad (1.19)$$

où $T_{(\cdot)} M$ désigne l'espace tangent.

Remarque 1.4

1. λ_0 est appelée variable duale du coût et on déduit deux principes :
 - Si $\lambda_0 < 0$, alors ce principe est le principe du maximum.
 - Si $\lambda_0 > 0$ c'est le principe du minimum (minimiser le Hamiltonien).

On choisit en général $|\lambda_0| = \frac{1}{2}$ pour les coûts quadratiques et $\lambda_0 = -1$ ou $+1$ pour les autres coûts.
2. Si le système est autonome, alors le Hamiltonien $\mathcal{H}(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)$ est constant le long de la trajectoire, i.e. f et f° ne dépendent pas de t , alors, le Hamiltonien \mathcal{H} ne dépend pas de t , $\mathcal{H} = cste$.

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

3. Lorsque l'ensemble des valeurs possibles de u est un ouvert (contrôle non borné), la condition de maximisation (1.15) peut se mettre sous une forme de dérivée

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(\lambda_o, u(t), x(t), p(t), t) = 0.$$

4. Dans un problème de type Lagrange, si le point final libre (non fixé), alors le vecteur adjoint au temps final doit être nul $p(t_f) = 0$. Le problème est alors un problème avec des conditions aux deux bords. Nous verrons plus loin dans la définition de la méthode de tir.

Définition 1.8 Une extrémale $(\lambda_o, x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot))$ solution des équations (1.13), (1.14) et (1.15) est dite anormale si $\lambda_o = 0$, et normale dans le cas contraire (i.e. $\lambda_o \neq 0$). Une extrémale est dite singulière si $\partial_u \mathcal{H} = 0$, i.e. lorsque le Hamiltonien \mathcal{H} est indépendant du contrôle le long d'une trajectoire.

1.5.2 Problème en temps minimal

Un problème en temps minimal consiste à minimiser le temps final qui représente le critère du problème et avec les contraintes standard du problème. Il s'agit de trouver, parmi l'ensemble des trajectoires reliant x_0 à x_f en un temps fini, celle ayant le temps de parcours le plus petit.

Par conséquent, le problème en temps minimal est de la forme :

$$\begin{cases} t_f = \int_0^{t_f} d\tau \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t)u, \quad x(0) = x_0 \\ u(t) \in U, \quad t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (1.20)$$

Le Hamiltonien du problème en temps minimal est :

$$\mathcal{H}(-1, u(t), x(t), p(t), t) = p(t) (Ax(t) + B(t)u) - 1. \quad (1.21)$$

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\mathcal{H}(-1, u^*(t), x(t), p(t), t) = p(t)Ax(t) - 1 + \max_{u(t) \in U} p(t)Bu(t). \quad (1.22)$$

Existence de trajectoires temps minimal

Supposons que x_f soit accessible depuis x_0 , i.e. il existe au moins une trajectoire reliant x_0 à x_f . Nous cherchons à caractériser la trajectoire qui réalise un temps de parcours minimal, parmi toutes les trajectoires joignant x_0 à x_f .

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Notons par T_{min} le temps minimal qui joint x_0 à x_f . Pour tout $t < T_{min}$, $x_f \notin Acc(x_0, t)$ (sinon x_f serait accessible à partir de x_0 en temps inférieur à T_{min}). Par conséquent :

$$T_{min} = \inf\{t > 0 | x_f \in Acc(x_0, t)\}.$$

Ce temps T_{min} est bien défini d'après le théorème 1.1.

Le théorème suivant garantit l'existence de trajectoire en temps minimal.

Théorème 1.6 [24] *Si le point x_f est accessible depuis x_0 , alors il existe une trajectoire temps minimal reliant x_0 à x_f .*

Remarque 1.5 *Dans le cas où le contrôle est un scalaire, et son domaine des contraintes est borné $U = [-M, M]$, avec $M > 0$, la condition de maximisation (1.22) implique :*

$$u(t) = M \operatorname{sign}(p(t)B)$$

La fonction $\Psi(t) = p(t)B$ est appelée fonction de commutation, et le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$, $t \in [0, t_f]$ change de signe est appelé temps de commutation (le zéro de la fonction $\Psi(t)$).

Théorème 1.7 [24] *Considérons le système de contrôle linéaire autonome dans \mathbb{R}^n :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ avec } B \in \mathbb{R}^n,$$

et où la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman.

1. *Si toute valeur propre de la matrice A est réelle, alors tout contrôle extrémal a au plus $n - 1$ commutations sur \mathbb{R}^+ .*
2. *Si toute valeur propre de la matrice A a une partie imaginaire non nulle, alors tout contrôle extrémal a un nombre infini de commutations sur \mathbb{R}^+ .*

1.5.3 Nature des solutions

La nature des solutions optimales dépend de la structure du contrôle. Il existe plusieurs types de solutions d'un problème de contrôle optimal. Les plus classiques sont :

1. **Solution bang-bang** : la solution de type bang-bang est la trajectoire où la norme du contrôle n'est pas continue et commute entre les valeurs des bornes du contrôle.
2. **Solution bang-singulier** : la solution de type bang-singulière est la trajectoire où le contrôle n'est pas continu et il existe des arcs saturant la contrainte sur le contrôle et d'autres non saturants, elle commute entre les valeurs de la borne inférieure ou bien de la borne supérieure du contrôle et appartient à l'intérieur de l'intervalle.

1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Autrement dit, si on suppose que le contrôle est borné $|u(t)| \leq 1$ et on peut d'écrire le Hamiltonien de cette forme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + u(t)\mathcal{H}_2,$$

avec $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\lambda_o, u(t), x(t), p(t), t)$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(\lambda_o, x(t), p(t), t)$ et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}(\lambda_o, x(t), p(t), t)$. Notons par $\Psi(t) = \mathcal{H}_2$:

1. Si dans le voisinage de t_c , le contrôle est constant par morceaux avec $u(t) = +1/ -1$ ou $u(t) = -1/ +1$, cette commande est dite du type bang-bang ou régulière.
2. S'il existe un intervalle de temps $[a, b]$, $b > a$ non réduit à t_c tel que la fonction de commutation est identiquement nulle sur cet intervalle, i.e. pour tout $t \in [a, b]$, $\Psi(t) = 0$. Cette situation fait référence à ce qui est connu sous le vocable d'arc singulier.

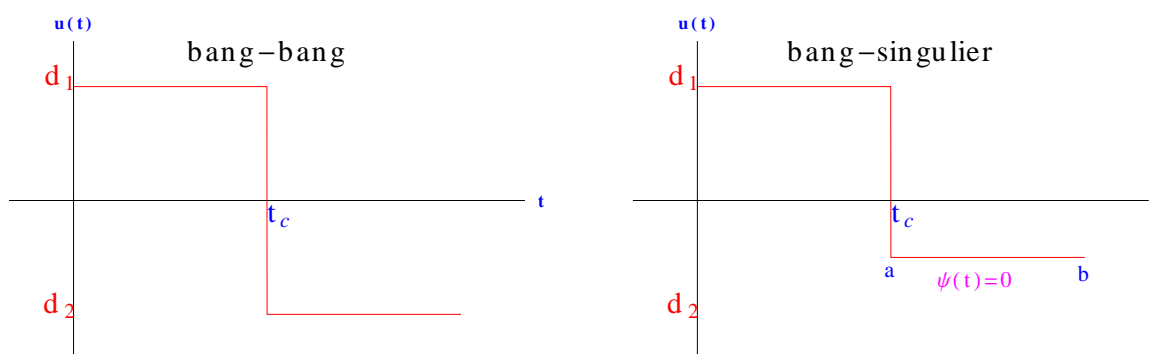


FIGURE 1.3 – Nature des solutions.

Lemme 1.3 *Le problème en temps minimal n'admet pas de contrôle singulier.*

Preuve 1.1 *Le problème admet des trajectoires singulières si :*

$$\partial_u \mathcal{H} = 0.$$

D'après l'équation de Hamiltonien (1.21), on obtient :

$$p(t)B = 0.$$

Ensuite, en dérivant par rapport à t , on obtient : $\dot{p}(t)B = 0$, sachant que $\dot{p}(t) = Ap(t)$, del à on obtient :

$$p(t)AB = 0.$$

Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement :

$$p(t)B = p(t)AB = \dots = p(t)A^{n-1}B = 0.$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k ,

$$p(t)A^k B = 0, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Par conséquent, $p(t)$ est orthogonal à la matrice de contrôlabilité du système qui est de rang n pour un système contrôlable, ce qui implique $p(t) = 0$.

Par conséquent :

$$\mathcal{H}(-1, u(t), x(t), p(t), t) = -1. \quad (1.23)$$

D'autre part, nous avons le temps final est libre, d'après la condition de transversalité, on obtient :

$$\mathcal{H}(-1, u(t), x(t), p(t), t) = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'équation (1.23). □

1.6 Méthode de tir simple

La méthode de tir simple est basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Elle consiste à trouver un zéro de la fonction de tir associée au problème original. Il s'agit d'une méthode rapide et de haute précision, qui ne requiert pas d'hypothèses sur la structure du contrôle.

Considérons un problème du contrôle optimal de type Bolza. La méthode de tir se décompose en trois étapes principales :

- L'écriture du problème aux deux bouts.
- La programmation de la fonction de tir.
- La résolution d'un système d'équations non linéaire.

1. Problème aux deux bouts :

Le principe du maximum de Pontryagin affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Ceci nous conduit à un système différentiel à deux équations, à deux conditions initiales et à deux conditions terminales. En d'autre terme à un problème aux deux bouts (Two Points Boundary Value Problem) :

$$TPBVP = \begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)}{\partial x(t)}, \\ u(t) \in U, t \in T, \\ x(0) = x_0, p(0) = p_0, \\ x(t_f) = x_f, p(t_f) = p_f, \end{cases} \quad (1.24)$$

où $u(t)$ est donné par la condition de maximum (1.15).

Si l'on est capable, à partir de l'équation (1.15), d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système

différentiel de la forme :

$$\dot{z}(t) = \kappa(t, z(t)), \text{ où } z(t) = (x(t), p(t)).$$

Alors le problème (1.24) devient :

$$TPBVP = \begin{cases} \dot{z}(t) = \kappa(t, z(t)), \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

où $R(z(0), z(t_f))$ est donné par les conditions initiales, finales et les conditions de transversalité.

2. Fonction de tir :

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\dot{z}(t) = \kappa(t, z(t)), \quad z(0) = z_0$$

On définit la fonction de tir \mathcal{S} par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z_0 &\longmapsto \mathcal{S}(z_0) = R(t_f, z(t_f, z_0)). \end{aligned}$$

Le problème aux deux bouts (TPBVP) est alors équivalent à

$$\mathcal{S}(z_0) = 0,$$

avec $R(., z_0)$ solution du problème à valeur initiale (Initial Value Problem) :

$$IVP = \begin{cases} \dot{z}(t) = \kappa(t, z(t)), \\ u(t) \in U, t \in T, \\ z(0) = z_0, \\ z(t_f) = z_f. \end{cases}$$

3. Résolution d'un système d'équations non linéaires :

Il s'agit de déterminer un zéro de la fonction non linéaire $\mathcal{S}(z_0) = 0$, pour cela, on utilise une méthode de type Newton.

Difficulté de la méthode

La méthode de tir est basée sur la méthode de Newton. La convergence de la méthode de Newton est très liée aux conditions initiales. Il faut localiser la valeur cherchée dans un intervalle, suffisamment petit pour que la fonction soit dérivable et que la dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle. Cela implique que la convergence de la méthode de tir est attachée au choix des valeurs initiales. Par conséquent, la difficulté de la méthode de tir simple est de trouver les conditions initiales des vecteurs adjoints p_0 . Cette difficulté dépend de la nature du problème :

- Problème Bolza ou bien Lagrange ou bien Mayer.
- Système linéaire ou bien non-linéaire.
- Système autonome ou bien non autonome.
- Temps final fixé ou bien libre .
- Conditions aux deux bouts fixées ou bien libres.

À partir de la nature de ce problème, on peut utiliser les propriétés de la remarque 1.4, afin de déduire des conditions sur les valeurs de p_0 . Dans certains cas, on peut introduire l'équation du Hamiltonien aux conditions initiales et finales.

Certains problèmes du contrôle optimal peuvent être résolus avec la fusion entre la méthode de discrétisation totale décrite dans la section 1.7 et la méthode de tir. Tout d'abord, on cherche les valeurs de p_0 par la méthode de discrétisation totale, car cette méthode donne des solutions sous-optimales (approchées). Par la suite, nous utilisons ces valeurs de p_0 comme des conditions initiales de la méthode de tir.

1.7 Méthode de discrétisation totale

La méthode de discrétisation totale consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie ou problème de programmation non linéaire. Cette transformation est basée sur la discrétisation de l'état et du contrôle, qui deviennent alors les inconnus du problème.

L'idée de la méthode consiste tout simplement à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.

Considérons un problème de Mayer-Lagrange. On discrétise la solution du système et le contrôle en un vecteur $v = (x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)$, et on se ramène à résoudre un problème d'optimisation non-linéaire de la forme :

$$\min_{v \in \mathcal{D}} \mathcal{F}(v) \tag{1.26}$$

où $\mathcal{D} = \{v | \xi_i(v) = 0, i \in \{1, \dots, r\}, \xi_j(v) \leq 0, j \in \{r + 1, \dots, m\}\}$.

On se donne donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$. On peut choisir par exemple des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, on choisit une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple, si on choisit la méthode d'Euler explicite, on obtient :

$$x_{i+1} = x_i + \gamma_i f(t_i, x_i, u_i), \text{ où } \gamma_i = t_{i+1} - t_i.$$

L'ensemble \mathcal{D} représente les conditions initiales, finales, les contraintes sur la solution et les contraintes sur le contrôle. \mathcal{F} est la fonction à optimiser. Dans le cas du problème en temps minimal, on prend $\mathcal{F}(v) = t_f$.

Remarque 1.6 1. Si le temps final t_f n'est pas connu (libre), on rajoute une variable t_f au vecteur v et une équation supplémentaire $t_f \neq 0$ à l'ensemble de contraintes \mathcal{D} .

On se ramène à résoudre un problème de la programmation non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \gamma_i f(t_i, x_i, u_i), & i = 0, \dots, N - 1, \\ \min \mathcal{D}(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_N), \\ u_i \in \Omega, & i = 0, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu, par exemple, par la méthode de Sequential Quadratic Programming (SQP) [42].

2. Il existe un grand nombre de variantes pour les méthodes directes selon le choix de l'approximation du contrôle (contrôle constant par morceaux, affine par morceaux, spline, etc.) sur chaque subdivision du temps (subdivision totale ou partielle de l'intervalle de temps), le choix de la méthode d'intégration de l'équation différentielle et le choix de la méthode de la discrétisation de l'équation différentielle : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Runge-Kutta, etc. (voir [29]), et le choix de la méthode dépend de la nature du problème abordé.

1.8 Conclusion

Les problèmes de contrôle optimal sont très variés et selon leurs natures plusieurs méthodes de résolution existent en littérature. Parmi celles-ci, on trouve les méthodes directes et indirectes. Dans le chapitre suivant, on présentera d'autres méthodes directes.

Chapitre 2

Nouvelle méthode directe de résolution

2.1 Introduction

Le deuxième chapitre est organisé comme suit : la section 2.2 est dédié à la présentation du problème que nous avons étudié et ainsi, elle porte quelques définitions et théorèmes concernant ce problème. Dans la section 2.3, nous écrivons un outil permettant de déterminer une solution initiale. Les sections 2.4 et 2.5 sont consacrées à la description de deux méthodes directes de résolution, qui s'appellent respectivement Adaptée et Support. Dans la section 2.6, nous développons une nouvelle méthode de résolution de ce problème. Dans la section 2.7, nous développons une approche entre ces méthodes directes et le principe du maximum de Pontryagin.

2.2 Position du problème

Considérons un problème de contrôle optimal de la forme suivante :

$$\text{Maximiser } J_c(u(t_f)) = c'x(t_f), \quad (2.1)$$

$$\text{Sous les contraintes : } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0, t_f], \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0, \text{ et } Hx(t_f) = g, \quad (2.3)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \forall t \in T = [0, t_f], \quad (2.4)$$

$$t_f > 0 \text{ fixé}, \quad (2.5)$$

où

- $J_c(u(t))$ est un coût terminal linéaire en $x(t) \in \mathbb{R}^n$, défini par la matrice $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système linéaire autonome (2.2) avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

- $u(t) \in \mathbb{R}$ est le signal de contrôle, supposé constant par morceaux.
- $Hx(t)$ est le signal de sortie, avec $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang maximal, $\text{rang}(H) = m < n$;
- l'état final $x(t_f)$ est contraint par la relation $Hx(t_f) = g$, $g \in \mathbb{R}^m$.

2.2.1 Concepts de base

Définition 2.1

1. Un contrôle $u(t)$, $t \in T$, est dit admissible si $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ solution de (2.2) correspondante, vérifient les contraintes (2.3) et (2.4).
2. Un contrôle admissible $u^\circ(t)$, est dit optimal si

$$J_c(u^\circ) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} J_c(u).$$

3. Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Un contrôle admissible $u^\varepsilon(t)$ est dit ε -optimal si et seulement si :

$$J_c(u^\circ) - J_c(u^\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

La solution du système différentiel (2.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)(F(\tau))^{-1}Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T, \quad (2.6)$$

où $F(t)$ est la résolvante du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec I_n la matrice identité.

En utilisant cette dernière solution, le problème (2.1)-(2.5) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Maximiser :} \quad & J_c(u(t_f)) = c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt, \\ \text{Sous les contraintes :} \quad & \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \\ & d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T, \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $C(t) = c'F(t_f)(F(t))^{-1}B$, $\varphi(t) = HF(t_f)(F(t))^{-1}B$ et $\bar{g} = g - HF(t_f)x_0$.

2.2.2 Notion de support-contrôle

Définition 2.2 Soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ m points isolés de T , et $\tau_B = \{\tau_j, j = 1, \dots, m\}$. A chaque τ_j , on associe un intervalle de la forme $T_j = [\underline{\tau}_j, \bar{\tau}_j]$ tel que :

- $\underline{\tau}_j = \tau_j$ ou $\bar{\tau}_j = \tau_j$;
- $T_j \cap T_i = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

L'ensemble T_B et son complémentaire T_H sont définis par :

$$T_B = \bigcup_{j=1}^m T_j \quad \text{et} \quad T_H = T/T_B.$$

1. Support du problème

Soit $\phi_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice dont les colonnes sont définies par $(\phi_B)_j = \varphi(\tau_j)$, $j = 1, \dots, m$. L'ensemble τ_B est appelé support du problème si

$$\det(\phi_B) \neq 0.$$

2. Support généralisé du problème

L'ensemble T_B est appelé support généralisé du problème (2.1)-(2.5) si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \\ Hx(t_f) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

n'admet pour $u(t) \equiv 0$, $t \in T_H$ que la solution triviale $u(t) \equiv 0$, $t \in T_B$, mais pour tout intervalle $T^* = [\tau_*, \tau^*]$, $T^* \subset T_H$, $\tau_* \neq \tau^*$ et

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in T_H/T^*, \\ u^*, & \text{pour } t \in T_B \cup T^*, \end{cases} \quad (2.10)$$

le système (2.9) admet une solution non triviale, i.e.

$$u(t) \neq 0, \quad t \in T_B \cup T^*,$$

dans la classe des contrôles constants sur T_j , $j = 1, \dots, m$.

Lemme 2.1 [15] Soit la matrice $\Phi(T_B) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ dont les colonnes sont définies par :

$$(\Phi(T_B))_j = \int_{\underline{\tau}_j}^{\bar{\tau}_j} \varphi(t) dt, \quad (2.11)$$

Alors, l'ensemble T_B est un support généralisé pour le problème (2.1)-(2.5) si et seulement si la matrice $\Phi(T_B)$ est non dégénérée.

Définition 2.3

- La paire $\{u, \tau_B\}$ formée par le contrôle admissible $u = (u(t), t \in T)$ et le support τ_B est appelée support-contrôle.
- Le support-contrôle $\{u, \tau_B\}$ est dit non dégénéré s'il existe $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0, \mu_j^\lambda, j = 1, \dots, m$, tels que pour tous $\lambda, 0 < \lambda < \lambda_0$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \mu_j^\lambda \int_{\tau_j-\lambda}^{\tau_j+\lambda} \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^m \int_{\tau_j-\lambda}^{\tau_j+\lambda} \varphi(t) u(t) dt, \\ d_1 + \mu_0 \leq \mu_j^\lambda \leq d_2 - \mu_0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

2.2.3 Accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénéré, et $x(t), t \in T$ la trajectoire (2.2) correspondante, on construit le vecteur de potentiel y' tel que :

$$y' = C_B \phi_B^{-1}, \tag{2.12}$$

et ainsi le vecteur des estimations (co-contrôle) $\Delta(t)$ tel que :

$$\Delta(t) = -\psi'(t)B, \quad t \in T, \tag{2.13}$$

avec $C_B \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ égale à $(C_B)_j = C(\tau_j)$ et $\psi(t)$ est la solution du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A'\psi, \\ \psi(t_f) = c - H'y. \end{cases} \tag{2.14}$$

La solution $\psi(t)$ est donnée par :

$$\psi'(t) = (c' - y'H)F(t_f) (F(t))^{-1}.$$

Le co-contrôle peut être écrit sous la forme :

$$\Delta(t) = -(c' - y'H)F(t_f) (F(t))^{-1} B,$$

Par conséquent :

$$\Delta(t) = y'\varphi(t) - C(t), \quad t \in T. \tag{2.15}$$

2.2 Position du problème

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ un autre contrôle admissible et $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$ sa trajectoire correspondante. Delà, l'accroissement de la fonctionnelle sera :

$$\begin{aligned}
 \Delta J_c(u) &= J_c(\bar{u}) - J_c(u), \\
 &= c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} C(t)\bar{u}(t)dt - c'F(t_f)x_0 - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt, \\
 &= \int_0^{t_f} C(t)\bar{u}(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt, \\
 &= \int_0^{t_f} C(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt, \\
 &= \int_0^{t_f} C(t)\Delta u(t)dt, \\
 &= \int_0^{t_f} (y'\varphi(t) - \Delta(t))\Delta u(t)dt, \\
 &= \int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t)dt,
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta J_c(u) = - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t)dt, \tag{2.16}$$

car $\int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt = 0$.

En effet, de l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, nous avons :

$$\int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt = y'(HF(t_f)(F(t))^{-1}B(\bar{u}(t) - u(t)))dt.$$

D'après l'équation (2.6), on obtient :

$$\int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt = y'(H\bar{x}(t_f) - Hx(t_f)) = y'(g - g) = 0.$$

Valeur de suboptimalité :

Le contrôle $\bar{u}(t)$, $t \in T$ est admissible, alors

$$d_1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d_2 - u(t). \quad (2.17)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (2.16) sous la contrainte (2.17) est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.18)$$

et est égal à :

$$\beta(u, \tau_B) = \sum_{t \in T^+} \Delta(t) (u(t) - d_1) + \sum_{t \in T^-} \Delta(t) (u(t) - d_2),$$

$\beta(u, \tau_B)$ appelée valeur de suboptimalité de support-contrôle $\{u, \tau_B\}$, où $J^+ = \{j \in J_H, \Delta_j \geq 0\}$ et $J^- = \{j \in J_H, \Delta_j < 0\}$.

Delà,

$$\Delta J_c(u) = J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B), \quad \forall \bar{u},$$

et pour $\bar{u} = u^\circ$, on aura :

$$\Delta J_c(u) = J_c(u^\circ) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B).$$

2.2.4 Critère d'optimalité

Théorème 2.1 [15] *Les relations suivantes*

$$\begin{cases} u(t) = d_1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ u(t) = d_2, & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.19)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$.

Preuve 2.1

1. Condition suffisante :

Si les relations (2.19) sont vérifiées, alors $\beta(u, \tau_B) = 0$.

Comme $J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B)$, $\forall \bar{u}$, ce qui implique $J_c(\bar{u}) \leq J_c(u)$, $\forall \bar{u}$.

Par conséquent, la paire $\{u, \tau_B\}$ est un support-contrôle optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (2.19) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire :

$$\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1 \quad \text{ou bien} \quad \exists t_* \in T, \Delta(t_*) < 0, u(t_*) < d_2.$$

(a) Supposons que $\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1$

Construisons le contrôle $\Delta u(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta, & \text{si } t = t_*, \theta > 0, \\ 0, & \text{si } t \in T_H/t_*. \end{cases}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \Delta J_c(u(t)) &= J_c(\bar{u}(t)) - J_c(u(t)), \\ &= - \int_0^{t_f} \Delta(t) \Delta u(t) dt, \\ &= - \Delta(t_*) \Delta u(t_*) - \int_{T/t_*} \Delta(t) \Delta u(t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Delta J_c(u(t)) = \theta \Delta(t_*) > 0$, ce qui implique :

$$J_c(\bar{u}(t)) > J_c(u(t))$$

et ceci contredit l'optimalité de $u(t)$.

(b) La preuve du deuxième cas est similaire au premier cas.

□

2.2.5 Principe du maximum

Le critère d'optimalité peut être écrit sous forme traditionnelle du principe du maximum [28] en utilisant la fonction Hamiltonienne

$$\mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) = \psi'(t) (Ax(t) + Bu(t)),$$

où $\psi(t)$, $t \in T$, est la solution du système conjugué (2.14).

La condition suivante :

$$\mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t), \quad t \in T,$$

est suffisante et dans le cas de non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u(t), \tau_B\}$.

Principe du ε -maximum

Théorème 2.2 [15] (*Critère de Suboptimalité ou Critère ε -optimalité*)

Soit $\varepsilon > 0$, donné. Le contrôle admissible $u(t), t \in T$, est ε -optimal si et seulement s'il existe un tel support τ_B tel que $u(t)$ et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$ vérifient la condition ε -maximum :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), t \in T, \\ \text{avec } \int_0^{t_f} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.20)$$

Preuve 2.2

1. Condition suffisante :

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t) (u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (u(t) - d_2) dt, \\ &= \int_{T^+} \psi(t)' B (d_1 - u(t)) dt + \int_{T^-} \psi(t)' B (d_2 - u(t)) dt, \\ &= \int_{T^+} (\psi(t)' Ax + \psi(t)' B d_1 - \psi(t)' Ax - \psi(t)' B u(t)) dt, \\ &\quad + \int_{T^-} (\psi(t)' Ax + \psi(t)' B d_2 - \psi(t)' Ax - \psi(t)' B u(t)) dt, \\ &= \int_{T^+} \psi(t)' (Ax + B d_1) dt + \int_{T^-} \psi(t)' (Ax + B d_2) dt - \int_0^{t_f} \psi(t)' (Ax - B u(t)) dt, \\ &= \int_0^{t_f} \left(\max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) - \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) \right) dt, \\ &= \int_0^{t_f} \varepsilon(t) dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (2.20), on obtient :

$$\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon.$$

2.2 Position du problème

Comme $J_c(\bar{u}) - J_c(u) < \beta(u, \tau_B)$, $\forall \bar{u}$, alors pour $\bar{u} = u^\circ$:

$$J_c(\bar{u}) - J_c(u) < \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon.$$

Donc le contrôle $\bar{u}(t)$ est ε -optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $u(t)$ un contrôle ε -optimal, faisons une décomposition de la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$. Pour cela nous introduisons le problème dual du problème primal (2.8) :

$$\begin{cases} D(\vartheta, v(t), \omega(t)) = c'F(t_f)x_0 + \bar{g}\vartheta - \int_0^{t_f} v(t)d_1 + \int_0^{t_f} \omega(t)d_2 \longrightarrow \min, \\ \vartheta' \varphi(t) - v(t) + \omega(t) = C(t), \\ v(t) \leq 0, \omega(t) \leq 0, t \in T, \end{cases} \quad (2.21)$$

L'ensemble $(\vartheta, v(t), \omega(t), t \in T)$ défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vartheta = y' \\ v(t) = \Delta(t), \quad \omega(t) = 0, \quad \text{si } \Delta(t) > 0, \\ v(t) = 0, \quad \omega(t) = -\Delta(t), \quad \text{si } \Delta(t) < 0, \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.22)$$

vérifie les contraintes du problème (2.19), c'est-à-dire un plan dual.

Dans la suite $(y^0, v^0, \omega^0, t \in T)$ désigne une solution optimale.

Remplaçons les relations $\Delta(t) = y' \varphi(t) - C(t)$ et $\psi(t)' = (c' - y'H)F(t_f) (F(t))^{-1}$ dans la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$:

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2)dt, \\ &= \int_0^{t_f} \Delta(t)u(t)dt - \int_{T^+} \Delta(t)d_1dt - \int_{T^-} \Delta(t)d_2dt, \\ &= \int_0^{t_f} (y' \varphi(t) - C(t))u(t)dt - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt, \\ &= \int_0^{t_f} y' \varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt. \end{aligned}$$

D'après le problème du primal (2.8), on obtient :

$$(a) \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \text{ ce qui implique } \int_0^{t_f} y'\varphi(t)u(t)dt = y'\bar{g}.$$

$$(b) \int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt = y^0\bar{g} - \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt.$$

En ajoutant la quantité $\int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt + c'F(t_f)x_0 - c'F(t_f)x_0$, alors la valeur $\beta(u, \tau_B)$ devient :

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt + \int_0^{t_f} y'\varphi(t)u(t)dt \\ &\quad - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt + c'F(t_f)x_0 - c'F(t_f)x_0, \\ &= \left(\int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \right) \\ &\quad + \left(c'F(t_f)x_0 + y'\bar{g} - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt \right) \\ &\quad - \left(c'F(t_f)x_0 + y^0\bar{g} - \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt \right), \\ &= (J_c(u^0) - J_c(u)) + (D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0(t), v^0(t), \omega^0(t))), \end{aligned}$$

Posons :

$$\beta(u, \tau_B) = \beta_u + \beta_B,$$

où :

$\beta_u = J_c(u^0) - J_c(u)$ est appelée la mesure de la non optimalité du contrôle $u(t)$, $t \in T$.

$\beta_B = D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0(t), v^0(t), \omega^0(t))$ est appelée la mesure de la non optimalité du support τ_B , $t \in T$.

Si on associe au contrôle $u(t)$, $t \in T$, un support τ^0 tel que l'ensemble $\{y(t), v(t), \omega(t)\}$ défini d'après la relation (2.22) devient la solution du problème (2.21), alors :

$$\beta_B = 0, \quad \beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon.$$

2.3 Détermination d'un support-contrôle de départ

Posons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \Delta(t)(u(t) - d_1), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \Delta(t)(u(t) - d_2), & \text{si } \delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T. \end{cases}$$

Delà, en utilisant la définition du co-contrôle $\Delta(t)$, $t \in T$, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi'(t)(Ax(t) + Bd_1) - \psi'(t)(Ax(t) + Bu(t)), & \text{si } \psi'(t)B < 0, \\ \psi'(t)(Ax(t) + Bd_2) - \psi'(t)(Ax(t) + Bu(t)), & \text{si } \psi'(t)B > 0, \\ 0, & \text{si } \psi'(t)B = 0, t \in T. \end{cases}$$

En introduisant la fonction Hamiltonienne, $\varepsilon(t)$ sera égal à :

$$\varepsilon(t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) - \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t).$$

Cela implique la condition ε -maximum suivante :

$$\mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \mathcal{H}(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), \quad t \in T.$$

□

2.3 Détermination d'un support-contrôle de départ

La construction d'un contrôle de départ admissible doit respecter deux conditions. En ce qui concerne le support, une seule condition est à vérifier.

Tout d'abord, on choisit un contrôle qui vérifie la contrainte $d_1 \leq u(t) \leq d_2$, et on calcule la trajectoire correspondante. Après, on utilise cette solution pour tester la quantité $Hx(t_f) = g$:

1. Si $Hx(t_f) = g$, alors le contrôle est admissible.
2. Si $Hx(t_f) \neq g$, alors le contrôle n'est pas admissible et pour atteindre g , on ajoute des variables des écarts pour transformer la contrainte inégalité en égalité.

Après la vérification des deux conditions, on choisit un support $\tau_B = \{\tau_j, j = 1, \dots, m\}$, tel que $\det(\phi_B) \neq 0$.

2.4 Méthode Adaptée

La méthode Adaptée a été développée durant les années 80 par R.Gabasov et son équipe [15]. Elle est seulement élaborée pour les systèmes dynamiques linéaires, car elle est issue de la programmation linéaire.

Soit $\{u(t), \tau_B\}$ un support-contrôle admissible de départ ne vérifiant pas la condition du principe du ε -maximum. La transformation $\{u(t), \tau_B\}$ vers $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est constituée de trois procédures :

1. Changement de contrôle $u(t) \rightsquigarrow \bar{u}(t)$,
2. Changement du support $\tau_B \rightsquigarrow \bar{\tau}_B$,
3. La procédure finale.

2.4.1 Changement de contrôle

On construit un nouveau contrôle admissible sous la forme :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t), \quad t \in T,$$

où $l(t)$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t)$, $t \in T$ et θ est le pas maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible $l(t)$

Sur T_H , on pose $\theta = 1$.

La direction est définie de sorte à maximiser l'accroissement de la fonctionnelle :

$$l(t) = \begin{cases} d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

De l'admissibilité $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, on obtient :

$$\theta \int_0^{t_f} \varphi(t) l(t) dt = 0, \quad \text{avec } \theta \neq 0.$$

Alors :

$$\int_{T_B} \varphi(t) l(t) dt + \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt = 0.$$

Ce qui implique :

$$\int_{T_B} \varphi(t) l(t) dt = - \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt.$$

Comme $l(T_B)$ est constante et $\Phi(T_B)$ est inversible, donc :

$$l(T_B) = -\Phi(T_B)^{-1} \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt. \quad (2.24)$$

Détermination du pas maximal :

Nous avons $d_1 \leq \bar{u}(t) \leq d_2$, ce qui implique :

$$d_1 \leq u(t) + \theta l(t) \leq d_2, \quad t \in T.$$

D'où :

$$d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), \quad t \in T. \quad (2.25)$$

Pour que la condition (2.25) soit vérifiée, il faut chercher un pas de la forme :

$$\theta(t_o) = \min_{t \in T_B} \theta(t),$$

et tel que :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_2 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) > 0, \\ \frac{d_1 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) < 0, \\ \infty, & \text{si } l(t) = 0, \quad t \in T_B. \end{cases} \quad (2.26)$$

Par conséquent, le pas maximal est donné par :

$$\theta^\circ = \min_{t \in T} (1, \theta(t_o)).$$

Calculons le nouveau contrôle :

La direction et le pas maximal calculés précédemment, nous permettent d'aboutir au nouveau contrôle :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta^\circ l(t), \quad t \in T.$$

Calculons la nouvelle valeur du suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}(t), \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (\bar{u}(t) - d_2) dt, \\ &= \int_{T^+} \Delta(t) (u(t) + \theta^\circ l(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (u(t) + \theta^\circ l(t) - d_2) dt, \\ &= \int_{T^+} \Delta(t) (u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (u(t) - d_2) dt + \int_{T^+} \Delta(t) \theta^\circ l(t) dt + \int_{T^-} \Delta(t) \theta^\circ l(t) dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^\circ \int_{T^+} \Delta(t) (u(t) - d_1) dt - \theta^\circ \int_{T^-} \Delta(t) (u(t) - d_2) dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^\circ \beta(u(t), \tau_B). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = (1 - \theta^\circ) \beta(u(t), \tau_B).$$

Test :

À partir de la valeur de suboptimalité, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

1. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ n'est pas optimal.

2.4.2 Changement du support

Le changement du support consiste à remplacer le $t_o \in T_B$ par un autre $t_1 \in T_H$. Le passage de τ_B vers $\bar{\tau}_B$ entraîne le changement du vecteur des potentiels et des estimations (co-contrôle) :

$$\bar{y} = y + \sigma z(I) \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma z(t), \quad t \in T, \quad (2.27)$$

où $z(t)$ est la direction admissible du changement de le co-contrôle et σ est le pas dual maximal.

Construction de la direction admissible $z(t)$:

Posons

$$z(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_1, \quad t = t_o, \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_2, \quad t = t_o, \\ 0, & \text{si } t \in T_B/t_o. \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous avons :

$$\bar{\Delta}(t) = \bar{y}'\varphi(t) - C(t) \text{ et ainsi } \bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma z(t) = y'\varphi(t) - C(t) + \sigma z(t).$$

Delà, on obtient : $\sigma z(I)\varphi(t) = \sigma z(t)$, puisque $\sigma \neq 0$ alors : $z(I)\varphi(t) = z(t)$.

Sur T_B , on a :

$$z(I) = z'(T_B)\phi_B^{-1}.$$

Par conséquent :

$$z'(t) = z'(T_B)\phi_B^{-1}\varphi(t), \quad t \in T. \quad (2.29)$$

Construction du pas dual maximal σ :

Le pas dual maximal $\sigma(t_1) = \sigma^\circ$ est donné par :

$$\sigma^\circ = \min_{t \in T_H} \sigma(t),$$

où

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{z(t)}, & \text{si } \Delta(t)z(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad z(t) > 0 \text{ et } u = d_1, \text{ ou } \Delta(t) = 0, \quad z(t) < 0 \text{ et } u = d_2, \\ \infty, & \text{sinon, } t \in T_H. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donc, t_o sera remplacé par t_1 dans l'ensemble T_B . Par conséquent, le nouveau support est :

$$\bar{\tau} = (\tau_B / \{t_o\}) \cup t_1.$$

Calculons la nouvelle valeur de la suboptimalité du support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$.

$$\begin{aligned}
 \beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) &= \int_{\bar{T}^+} \bar{\Delta}(t) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{\bar{T}^-} \bar{\Delta}(t) (\bar{u}(t) - d_2) dt, \\
 &= \int_{T^+} (\Delta(t) + \sigma^\circ z(t)) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} (\Delta(t) + \sigma^\circ z(t)) (\bar{u}(t) - d_2) dt, \\
 &= \int_{T^+} \Delta(t) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (\bar{u}(t) - d_2) dt, \\
 &\quad + \sigma^\circ \left(\int_{T^+} z(t) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} z(t) (\bar{u}(t) - d_2) dt \right), \\
 &= \beta(\bar{u}, \tau_B) + \sigma^\circ \left(\int_{T^+} z(t) (\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} z(t) (\bar{u}(t) - d_2) dt \right).
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = (1 - \theta^\circ) \beta(u(t), \tau_B) - \sigma^\circ \kappa_\circ,$$

$$\text{avec } \kappa_\circ = -(1 - \theta^\circ) \left(\int_{T^+} z(t) (u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} z(t) (u(t) - d_2) dt \right).$$

Test :

1. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ n'est pas optimal et nous passons à l'étape suivante de notre méthode.

2.4.3 Procédure finale

À partir du support τ_B obtenu à l'étape d'avant, on construit le co-contrôle

$$\Delta(t) = -\psi'(t)B, \quad t \in T,$$

où $\psi(t)$ est donnée par la formule (2.14). Ainsi, construisons le quasi-contrôle $\omega(t)$, $t \in T$

$$\omega(t) = \begin{cases} d_1, & \Delta(t) \geq 0, \\ d_2, & \Delta(t) < 0, \end{cases} \quad t \in T, \quad (2.31)$$

et sa quasi-tajectoire correspondante $\chi(t)$ solution de (2.6).

La quantité $g - H\chi(t_f)$, nous permet de voir si l'on passe à la dernière étape de la méthode ou non.

- Si $H\chi(t_f) = g$, alors le contrôle $\omega(t), t \in T$ est optimal pour le problème (2.1)-(2.5).
- Si $H\chi(t_f) \neq g$, alors on construit le vecteur :

$$\lambda(\tau_B) = \phi(\tau_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)). \quad (2.32)$$

À partir de ce vecteur, un test est effectué en comparant la norme pondérée de $g - H\chi(t_f)$, i.e. $\|\lambda(\tau_B)\|$ avec une valeur seuil μ , où $\mu > 0$, donnée et qui représente le paramètre de la méthode :

1. Si $\|\lambda(\tau_B)\| > \mu$, alors on change τ_B en $\bar{\tau}_B$ par **la méthode duale**.
2. Si $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, alors on passe à **l'étape finale**.

Méthode duale

La méthode duale consiste à modifier le support τ_B , de telle sorte que la quantité $\lambda(\tau_B)$ diminue jusqu'au point où le test sera négatif.

Soit $t^\circ \in \tau_B$, tel que :

$$|\lambda(t^\circ)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)| > \mu.$$

Le changement du support τ_B à $\bar{\tau}_B$ consiste à changer le co-contrôle $\Delta(t)$ par le co-contrôle $\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \gamma\delta(t), t \in T$,

où $\delta(t)$ est la direction et γ le pas dual le long de cette direction.

Pour cela cherchons la fonction :

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{\delta(t)}, & \text{si } \Delta(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.33)$$

avec $\delta(t) = -\text{sign}(\lambda) (\phi(\tau_B))^{-1} \varphi(t)$.

Construisons l'ensemble : $T_g(\gamma) = \{t \in T, \gamma(t) < \gamma\}$. Delà la vitesse de décroissance de la fonctionnelle du dual est égale à :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^\circ)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

Par construction $\alpha(0) < 0$ et $\alpha(\gamma) \leq \alpha(\bar{\gamma})$ si $\gamma < \bar{\gamma}$. Si $\alpha(\gamma) < 0$ pour $\gamma > 0$, alors le problème (2.1)-(2.5) ne possède pas de contrôle admissible, dans le cas contraire cherchons $\gamma_\circ \geq 0$ tel que

$$\alpha(\gamma_\circ - \gamma) < 0, \quad \alpha(\gamma_\circ + 0) \geq 0$$

pour tout γ tel que $0 < \gamma \leq \gamma_\circ$.

Cherchons $t^* \in T \setminus \tau_B$ tel que :

$$\Delta(t^*) + \gamma_\circ \delta(t^*) = 0, \quad \delta(t^*) \neq 0.$$

On obtient alors le nouveau support $\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus t^\circ) \cup t^*$.

Étape finale

L'étape finale consiste à modifier le support τ_B obtenu à l'étape précédente avec $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, jusqu'à la réalisation du test $H\chi(t_f) = g$. Elle est basée sur la méthode de Newton.

Désignons par $T^\circ = \{t \in T : \Delta(t) = 0\}$ l'ensemble des points isolés t_j et supposons que $\dot{\Delta}(t_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, m$. Cette étape consiste à déterminer $\tau_B^\circ = \{\tau_j^\circ, j = 1, \dots, m\}$ à partir des équations :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{signe} \left(\dot{\Delta}(t_j) \right) \int_{\tau_j^\circ}^{t_j} \varphi(t) dt = g - H\chi(t_f). \quad (2.34)$$

C'est-à-dire, trouver un τ_B° de sorte que $H\chi(t_f) = g$.

En effet, l'équation (2.34) est obtenue à partir de la formule du Cauchy (2.6). Nous avons :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_f) &= g - H \left[F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} F(t_f) (F(t))^{-1} B\omega(t) dt \right], \\ &= g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t) dt - \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t) dt. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En identifiant la partie $g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t) dt$ à zéro, ce qui implique :

$$H\chi(t_f) - g = \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t) dt.$$

Subdivisons l'ensemble T_B en deux sous-ensembles :

$$T_B^+ = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) > 0\} \quad \text{et} \quad T_B^- = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) < 0\}.$$

Notons par $T_B = \{[t_j - \eta, t_j + \eta], j = 1, \dots, m\}$ et par $\tau_j = |t_j - \eta|$, on aura ainsi :

$$H\chi(t_f) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) < 0, \\ \sum_{j=1}^m -(d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) > 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour la résolution des équations (2.34), on prend comme approximation initiale de $\tau_B^\circ = \{\tau_j^{(0)}, j = 1, \dots, m\}$, avec $\tau_B^\circ = \tau_B$. Supposons connue la k -ème approximation $\tau_B^{(k)} = \{\tau_j^{(k)}, j = 1, \dots, m\}$, On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{ \text{signe} \left(\dot{\Delta}(t_j) \right) \left(\lambda \left(\tau_B^{(k)} \right)_j \right), j = 1, \dots, m \},$$

où $\lambda_j (\tau_B^{(k)})$ est un vecteur calculé par la relation (2.32).

Alors, la fonction $\omega^\circ(t) = \omega(t), t \in T$, est calculée par le support τ_B° qui est un contrôle optimal pour le problème (2.1)-(2.5).

2.5 Méthode du Support

La méthode du Support est une autre version de la méthode Adaptée, elle a été aussi développée par R.Gabasov et F.M.Kirrillov [15]. Cette méthode se différencie au niveau de la procédure du changement du contrôle par rapport à la méthode Adaptée. Dans cette étape, nous discrétisons une partie de l'intervalle de temps, ce qui nous donne un problème discret. Ce problème est résolu par la méthode adaptée de problème de la programmation linéaire (voir Annexe A). Ensuite, nous effectuons un changement du support. Enfin, nous appliquons la procédure finale décrite dans la section 2.4.3.

2.5.1 Changement de contrôle

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t)$, un autre contrôle admissible, où $l(t)$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t)$, $t \in T$ et θ est le pas maximal admissible le long de cette direction.

La direction $l(t)$ et le pas maximal θ seront cherchés comme solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta J_c(u) = -\theta \int_0^{t_f} \Delta(t) l(t) dt \longrightarrow \max_{\theta, l(t)} \\ \theta \int_0^{t_f} \varphi(t) l(t) dt = 0, \\ d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.37)$$

En effet, ce problème est obtenu à partir de la formule (2.16) et de l'admissibilité des contrôles $\bar{u}(t)$ et $u(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \theta \int_0^{t_f} \varphi(t) l(t) dt &= \int_0^{t_f} \varphi(t) \bar{u}(t) dt - \int_0^{t_f} \varphi(t) u(t) dt, \\ &= \bar{g} - g, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Choisissons les paramètres de la méthode $\alpha^\circ > 0$, $h^\circ > 0$ avec $\Delta_{min} \leq \alpha^\circ \leq \Delta_{max}$ et $h^\circ \geq \frac{|T_B|}{N}$, où N est le nombre de subdivision de l'intervalle, Δ_{min} et Δ_{max} sont les valeurs minimale et maximale de la fonction $\Delta(t)$.

En utilisant la fonction $\Delta(t) = -\psi'(t)B$, $t \in T_H$, on construit les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| < \alpha^\circ\} \quad \text{et} \quad T_1 = \{t \in T : |\Delta(t)| \geq \alpha^\circ\}.$$

Par conséquent, le problème (2.37) devient :

$$\begin{cases} \Delta J_c(u) = -\theta \int_{T_0} \Delta(t)l(t)dt - \theta \int_{T_1} \Delta(t)l(t)dt \longrightarrow \max_{\theta, l(t)}, \\ \theta \int_{T_0} \varphi(t)l(t)dt + \theta \int_{T_1} \varphi(t)l(t)dt = 0, \\ d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.38)$$

Par construction, nous avons $\Delta(t) = 0 < \alpha^\circ$, $t \in T_B$, ce qui implique $T_B \in T_0$. Subdivisons l'ensemble T_0 en sous ensembles :

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[, \quad j = 1, \dots, N,$$

tels que :

$$[\tau_j, \tau^j[\cap [\tau_i, \tau^i[= \emptyset, \quad \forall i \neq j \text{ et } \tau_j - \tau^j \leq h^\circ.$$

Ainsi, nous posons sur T_0 :

$$u(t) = u_j, \quad t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = 1, \dots, N,$$

et sur T_1 :

$$l(t) = \begin{cases} d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) \leq -\alpha^\circ \\ d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) \geq \alpha^\circ \end{cases} \quad (2.39)$$

Alors, le problème (2.37) devient :

$$\begin{cases} \Delta J_c(u) = -\theta \sum_{j=1}^N l_j \int_{\tau_j}^{\tau^j} \Delta(t)dt - \theta \int_{T_1} \Delta(t)l(t)dt \longrightarrow \max_{\theta, l(t)}, \\ \theta \sum_{j=1}^N l_j \int_{T_0} \varphi(t)dt + \theta \int_{T_1} \varphi(t)l(t)dt = 0, \\ d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.40)$$

Faisons le changement de variables suivantes :

$$w_j = \begin{cases} \theta l_j & \text{pour } j = 1, \dots, N, \\ \theta & \text{pour } j = N + 1. \end{cases} \quad (2.41)$$

Calculons ensuite les quantités suivantes :

$$k_j = - \int_{\tau_j}^{\tau^j} \Delta(t)dt, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad k_{N+1} = \int_{T_1} \Delta(t)l(t)dt.$$

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t) dt \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad q_{N+1} = \int_{T_1} \varphi(t) l(t) dt.$$

où $j = N + 1$ est l'indice supplémentaire correspondant à l'ensemble T_1 .
Ainsi

$$d_{1j} = d_1 - u_j, \quad d_{2j} = d_2 - u_j, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad d_{1N+1} = 0, \quad d_{2N+1} = 1$$

Les dernières quantités, nous permettent de transformmer le problème (2.40) en un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \Delta J_c(u) = \sum_{j=1}^{N+1} k_j w_j \longrightarrow \max_{w_j}, \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j w_j = 0, \\ d_{1j} \leq w_j \leq d_{2j}, \quad j = 1, \dots, N + 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Ce problème s'appelle problème du support qu'on va résoudre par la méthode adaptée (voir Annexe A).

Prenons un plan de départ $\{w = 0, J_B\}$ où

$$J_B = \{j \in \{1, \dots, N + 1\} / T_j \in T_B\}$$

Ainsi, $Q_B = Q(T_B) = (q_j, j \in J_B)$ avec $q_j = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+h}} \varphi(t) dt, \quad j = 1, \dots, N + 1.$

Soit $\{\bar{w}, \bar{J}_B\}$ solution optimale du problème (2.42), le nouveau contrôle sera construit de sorte à vérifier l'inégalité $J(\bar{u}) \geq J(u)$, et qui est donné par :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{w}_{N+1} \Delta u(t), & t \in T_1, \\ u(t) + \bar{w}_j, & t \in [\tau_j, \tau^j[, j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.43)$$

Le choix de l'étape suivante est lié à l'indice de l'ensemble T_1 , alors nous avons deux cas possibles :

1. Si l'indice $N + 1 \notin \bar{J}_B$, alors on pose $\tilde{J}_B = \bar{J}_B$ et on passe à la procédure finale, avec $\tau_B = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_B\}$ (voir section (2.4.3)).
2. Si l'indice $N + 1 \in \bar{J}_B$, alors on l'exclut du support $\bar{J}_B \rightsquigarrow \tilde{J}_B$.

2.5.2 Changement du support

Cette étape consiste à construire le co-contrôle

$$\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma \delta(t)$$

2.6 Nouvelle version de la méthode Adaptée

où $\delta(t)$ est la direction de changement de support et σ le pas le long de cette direction.

Déterminons j^* tel que :

$$\sigma_{j^*} = \min_{j \in J \setminus \bar{J}_B}$$

avec :

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\Delta_j}{\tau_j}, & \text{si } \Delta_j \tau_j < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, \tau_j > 0, \text{ ou } \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, \tau_j < 0, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La direction sera calculée de la manière suivante :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{u}(t_{N+1}) = d_1, \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t_{N+1}) = d_2, \\ 0, & \text{si } t \in T_B \setminus t_{N+1}, \end{cases}$$

et ainsi

$$\delta_j = (k_j, j \in \bar{J}_B)' (Q(\bar{J}_B))^{-1} q_j - k_j, \quad j \in J \setminus \bar{J}_B$$

Le nouveau support sera donné par :

$$\tilde{J}_B = (\bar{J}_B \setminus N + 1) \cup \{j^*\}.$$

Posons $\tilde{\tau}_B = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_B\}$ et construisons la matrice $\phi(\tilde{\tau}_B)$ qui vérifie

$$\det(\phi(\tilde{\tau}_B)) \neq 0.$$

Calculons la nouvelle valeur de suboptimalité correspondante $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B)$.

Test :

1. Si $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) = 0$, alors $\bar{u}(t)$, $t \in T$, est un contrôle optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) \leq \varepsilon$, alors $\bar{u}(t)$, $t \in T$, est un contrôle ε -optimal.
3. Sinon on effectue une nouvelle itération en démarrant avec : $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$, $\bar{\alpha}^\circ < \alpha^\circ$, $\bar{h}^\circ < h^\circ$, ou on utilise la procédure finale (présentée dans la section (2.4.3)).

2.6 Nouvelle version de la méthode Adaptée

Cette méthode appartient à la classe des méthodes directes. Celle-ci est basée sur les méthodes Adaptée et Support. Contrairement à la méthode du Support, la méthode que nous proposons est basée sur la discrétisation totale de l'intervalle de temps. Cette méthode est constituée de trois procédures : La première procédure est basée sur le principe de discrétisation, la seconde sur la résolution du problème discret par une méthode de points intérieurs (méthode adaptée [14]). Enfin, nous appliquons la procédure finale décrite dans la section (2.4.3) à la solution optimale obtenue dans la seconde étape, afin de trouver une solution optimale du problème (2.1)-(2.5).

2.6.1 Principe de discrétisation

Ce principe consiste à transformer le problème du contrôle optimal (problème initial) au Problème de la Programmation Linéaire : PPL (problème discret).

Nous subdivisons l'intervalle T en N sous-intervalles $[\tau_j, \tau^j]$, avec $\tau^j - \tau_j = h$, $h = \frac{(t_f - 0)}{N}$, $N \leq m$ et $T = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j]$. Comme le contrôle $u(t)$ est constant par morceaux, alors posons

$$u(t) \equiv u(\tau_j), \quad t \in [\tau_j, \tau^j], \quad j = 1, \dots, N.$$

De ce qui précède, le problème (2.8) devient le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J_d(u) = \sum_{j=1}^N C_j u_j \longrightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^N X_j u_j = g, \\ d_1 \leq u_j \leq d_2, j = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.44)$$

où $C_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C(t) dt$ et $X_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t) dt, t \in T$.

2.6.2 Méthode adaptée pour PPL

Cette étape consiste à résoudre le problème discret (2.44) par la méthode adaptée du problème de la programmation linéaire.

Soit $\{u^\circ, J_B^\circ = \{j = 1, \dots, m\}\}$, une solution optimale du problème (2.44) donnée par la méthode adaptée (voir Annexe A). En utilisant cette solution, on construit une solution du problème initial. Pour cela posons $\tau_B = \{\tau_j, j \in J_B^\circ\}$ et appliquons la procédure finale (présentée dans la section (2.4.3)).

Remarque 2.1 *Si le problème (1.1)-(1.5) est linéaire et lisse, alors on peut le résoudre par ces méthodes directes, il suffit le transformer à un problème de type Mayer.*

2.7 Approche entre le PMP et les méthodes directes

Dans cette partie, nous exhibons les points communs entre le principe du maximum de Pontryagin et ces trois méthodes directes.

Principe du maximum de Pontryagin

Avant d'appliquer le principe du maximum au problème (2.1)-(2.5), nous le transformons tout d'abord en un problème de minimisation :

$$\text{Minimiser } \tilde{J}_c(u(t_f)) = -c'x(t_f), \quad (2.45)$$

$$\text{Sous les contraintes : } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \text{ pour } t \in [0, t_f], \quad (2.46)$$

$$x(0) = x_0, \text{ et } Hx(t_f) = g, \quad (2.47)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \forall t \in [0, t_f], \quad (2.48)$$

$$t_f > 0, \text{ fixé}, \quad (2.49)$$

avec : $\tilde{J}_c(u) = -J_c(u)$.

Le Hamiltonien de ce nouveau problème est de la forme :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, u(t), x(t), \varphi(t), t) = p'(t)(Ax(t) + Bu(t)), \quad (2.50)$$

et le vecteur adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^n$ associé est :

$$\dot{p}(t) = -A'p(t).$$

La solution de cette dernière équation est égale à :

$$p(t) = p_0 (F(t))^{-1}, \quad (2.51)$$

où $(F(t))^{-1}$ est l'inverse de la résolvante $F(t)$ qui est donnée par le système (2.7).

Le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\mathcal{H}(\lambda_0, u^*(t), x(t), p(t), t) = p'(t)Ax(t) + \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \{p'(t)Bu(t)\}. \quad (2.52)$$

Notons par $\Psi(t) = p'(t)B$ la fonction de commutation et t_c le temps de commutation de cette fonction.

La condition de maximisation (2.52) implique :

$$\begin{cases} u(t) = d_2, & \text{si } \Psi(t) > 0, \\ u(t) = d_1, & \text{si } \Psi(t) < 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, & \text{si } \Psi(t) = 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

Condition de transversalité :

Nous avons, t_f fixé et x_f contraint $g - Hx(t_f) = 0$, par conséquent la condition de transversalité est donnée par :

$$-p(t_f) + \lambda_o \frac{\partial g^\circ(x(t_f))}{\partial x_f} + \frac{\partial \Phi'(x(t_f))}{\partial x_f} \nu = 0,$$

avec $\Phi(x(t_f)) = g - Hx(t_f)$ et ν est un vecteur de dimension m .

Cela implique :

$$p(t_f) = c - H'\nu, \quad (2.54)$$

où $\lambda_o = -1$ et $\frac{\partial g^\circ(x(t_f))}{\partial x_f} = -c$.

De la dernière équation et de l'équation (2.51) au temps final $t = t_f$, on obtient :

$$p_0 = (c - H'\nu)F(t_f).$$

Par conséquent, le vecteur adjoint est donné par :

$$p(t) = (c - H'\nu)F(t_f) (F(t))^{-1}. \quad (2.55)$$

Approche entre PMP et les méthodes directes :

D'après ce dernier paragraphe, on en déduit que le vecteur adjoint $p(t)$ représente le vecteur $\psi(t)$ qui est donné par la solution du système conjugué (2.14), la fonction de commutation égale au signe opposé du vecteur d'estimation $\Delta(t)$ qui est donné par l'équation (2.13) et ν donné par le vecteur de potentiel y , c'est-à-dire $p(t) = \psi(t)$, $\Psi(t) = -\Delta(t)$ et $\nu = y$. Les temps de commutation t_c sont donnés par τ_B .

Réellement, la méthode Adaptée du problème du contrôle optimal est basée sur le principe du maximum de Pontryagin. La contrainte $Hx(t_f) = g$, nous permet de fixer m variables d'états, alors, il reste $n - m$ variables non fixés (libre).

Le maximum de la fonction Hamiltonien \mathcal{H} , nous donne :

$$\mathcal{H}(\lambda_o, u^*(t), x(t), p(t), t) = p'(t)Ax(t) + \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} \{p'(t)Bu(t)\} \quad (2.56)$$

Posons : $\psi(t) = p(t)$ et $\Delta(t) = -\psi'(t)B$.

Le contrôle optimal maximisant le Hamiltonien (2.56) à chaque instant est donné par :

$$\begin{cases} u(t) = d_2, & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ u(t) = d_1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, & \text{si } \Delta(t) = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

La condition de transversalité, nous permet de donner des conditions finales sur le vecteur adjoint $p(t) = \psi(t)$, avec $\psi(t_f) = c - H'\nu$.

2.7 Approche entre le PMP et les méthodes directes

Proposition 2.1 *Si le problème est sous la forme (2.1)-(2.5), alors nous avons ses deux propriétés :*

1. *Il n'y a pas de trajectoire singulière.*
2. *Le nombre de commutations est supérieur ou égal à m .*

Preuve 2.3

1. *On procède de la même façon que le problème en temps minimal, lemme(1.3). Par conséquent, on obtient :*

$$p(t) = 0 \text{ sur } t \in [a, b]$$

D'après le principe du maximum de Pontryagin, le vecteur adjoint n'est pas trivialement nul, i.e. $p(t) \neq 0$ (voir proposition 5.3.4, page 94, [37]).

2. *Le nombre de commutations est égal au cardinal de temps de commutations. Les temps de commutations représentent les zéros de la fonction de commutation $\Psi(t) = p'(t)B$. D'autre part, nous avons $\Delta(t) = -\Psi(t)$. Calculons les zéros de la fonction de commutation revient à chercher les moments d'annulations de vecteurs d'estimations $\Delta(t) = 0$, avec $\Delta(t) = y'\varphi(t) - C(t)$.*

Le vecteur $\Delta(t)$ s'annule au moins sur $t = \tau_B$, et le cardinal de τ_B est égal à m , i.e. $|\tau_B| = m$.

Par conséquent, le nombre de commutations est supérieur ou égal à m .

En effet, nous avons $C(t) = c'F(t_f)(F(t))^{-1}B$, $\varphi(t) = HF(t_f)(F(t))^{-1}B$, $(C_B)_j = C(\tau_j)$ et $(\phi_{\tau_B})_j = \varphi(\tau_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Le vecteur $\Delta(t)$ est donné par :

$$\Delta(t) = y'\varphi(t) - C(t)$$

Au temps $t = \tau_B$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= y'\varphi(\tau_B) - C(\tau_B), \\ &= C_B \phi_B^{-1} \phi_B - C_B, \\ &= C_B - C_B, \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2

1. *Si toute valeur propre de la matrice A est réelle, alors le nombre de commutations du problème (2.1)-(2.5) est entre m et $n - 1$, i.e. $m \leq |t_c| \leq n - 1$*

2. *Le principe du maximum de Pontryagin donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal de problèmes en temps minimal, car le système dynamique linéaire est convexe, ce qui implique l'unicité de la solution [24]. Par conséquent, le PMP devient aussi une condition suffisante du problème (2.1)-(2.5).*

2.8 Conclusion

D'un point de vue numérique, calculer une somme plus simple est moins coûteux que de calculer une intégrale. Cela implique que, la résolution d'un problème de contrôle optimal continu est plus complexe que la résolution d'un problème discret.

Par conséquent, la méthode Adaptée est plus coûteuse que les deux autres méthodes (Support et la nouvelle méthode). D'autre part, la méthode du Support admet une étape de plus (paragraphe (2.5.2)) que la nouvelle méthode que nous avons présentée.

Chapitre 3

Implémentation numérique

3.1 Introduction

Ce chapitre porte les résultats numériques d'un exemple académique présenté dans la section 3.2, et il est ordonné de la manière suivante : la section 3.2 est dédiée à l'étude de la contrôlabilité de cet exemple. Dans la section 3.2, nous résolvons le problème en temps minimal. Les sections 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7 sont consacrées à la résolution de cet exemple par quatre manières : Le principe du maximum du Pontryagin, la méthode de tir, méthode de discrétisation totale et la nouvelle méthode respectivement. Dans la section 3.8, nous développons une approche numérique entre la nouvelle méthode et le principe du maximum de Pontryagin et ainsi nous comparons la nouvelle méthode avec la méthode de discrétisation totale pour différentes valeurs de nombre de subdivisions de l'intervalle de temps.

3.2 Exemple numérique

Considérons le système linéaire autonome au temps final t_f fixé et aux conditions initiales nulles :

$$\ddot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3.1)$$

Supposons que le contrôle $u(t)$, $t \in [0, t_f]$ est borné : $|u(t)| \leq 1$. Le critère est de type Mayer, avec une contrainte terminale donnée.

Soit le vecteur d'état $x = (x_1, x_2, x_3)$ et en transformant le système (3.1), le problème est donné par :

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \text{Maximiser} & J(u(t_f)) = x_2(t_f), \\ \text{Sous les contraintes :} & \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) &= u(t), \quad x_3(0) = 0, \\ x_1(t_f) &= 1, \\ -1 \leq u(t) &\leq 1, \quad t \in [0, t_f], \\ t_f &> 0 : \text{fixé.} \end{aligned} \end{cases}$$

Pour ce problème le système dynamique peut être écrit sous la forme : $\dot{x} = Ax + Bu$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = (0, 1, 0), \quad H = (1, 0, 0), \quad g = 1.$$

Étude de la contrôlabilité du système

Le système est linéaire et de plus les deux matrices A et B sont indépendantes de la variable de temps t , cela implique que le système linéaire est autonome. Par conséquent, la contrôlabilité du système est donnée par le rang de la matrice de Kalman qui est de la forme :

$$K = (B; AB; A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang d'une matrice est donné par le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Les vecteurs lignes (ou colonnes) forment la matrice K sont linéairement dépendants si et seulement s'ils vérifient la relation suivante :

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \quad (3.2)$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des scalaires, non tous nuls et l_1, l_2 et l_3 sont les vecteurs colonnes forment la matrice K . D'après l'équation (3.2), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 0 + a_2 0 + a_3 1 = 0, \\ a_1 0 + a_2 1 + a_3 0 = 0, \\ a_1 1 + a_2 0 + a_3 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 0. \\ a_2 = 0. \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Les scalaires a_1, a_2 et a_3 sont tous nuls, alors les trois vecteurs l_1, l_2 et l_3 sont linéairement indépendants. Cela implique que le rang de la matrice K est égal à trois, i.e. $\text{rang}(K) = 3$, donc le système est contrôlable.

Autrement, le déterminant de la matrice K égal à -1 , i.e. $\det(K) = -1$, ce qui implique $\text{rang}(K) = 3$. Alors le système est contrôlable.

3.3 Problème en temps minimal

Puisque le problème est en temps final fixé, alors il faut tout d'abord calculer le temps nécessaire pour atteindre la cible.

Quel temps faut-il pour ramener un système de l'état initial à l'état final ?

Le problème en temps minimal est décrit par :

$$(\mathcal{P}_{min}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad J(u(t_f), t_f) = t_f, \\ \text{Sous les contraintes} : \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \\ \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad x_2(0) = 0, \\ \quad \dot{x}_3(t) = u(t), \quad x_3(0) = 0, \\ \quad x_1(t_f) = 1, \\ \quad -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, t_f], \\ \quad t_f > 0 : \text{ libre.} \end{array} \right.$$

Notons par $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ le vecteur adjoint associé au problème (\mathcal{P}) . Le Hamiltonien du problème (\mathcal{P}_{min}) est :

$$\mathcal{H}(-1, x(t), p(t), u(t), t) = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)x_3(t) + p_3(t)u(t) - 1,$$

et ainsi le système adjoint du Hamiltonien associé est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1(t), \\ \dot{p}_3(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} = -p_2(t), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où $\mathcal{H} = \mathcal{H}(-1, x(t), p(t), u(t), t)$.

Le système dynamique est autonome, alors le Hamiltonien est constant le long d'une extrémale. Ce qui donne :

$$\mathcal{H}(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = \mathcal{H}(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f),$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = p_3(0)u(0) - 1, \\ \mathcal{H}(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = p_1(t_f)x_2(t_f) + p_2(t_f)x_3(t_f) + p_3(t_f)u(t_f) - 1. \end{array} \right.$$

De plus, le temps final t_f est libre, d'après la condition de transversalité :

$$\mathcal{H}(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = 0$$

Ce qui implique :

$$p_3(0)u(0) = 1. \quad (3.4)$$

3.3 Problème en temps minimal

Puisque le contrôle est borné, le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(-1, x(t), p(t), u^*(t), t) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} \mathcal{H}(-1, x(t), p(t), u(t), t), \\ &= p_1(t)x_2(t) + p_2(t)x_3(t) - 1 + \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} (p_3(t)u(t)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le contrôle optimal maximisant le Hamiltonien à chaque instant est égal à :

$$u^*(t) = \text{sign}(p_3(t)). \quad (3.6)$$

Du système (3.3), on en déduit que :

$$\begin{cases} p_1(t) = p_{10}, \\ p_2(t) = -p_{10}t + p_{20}, \\ p_3(t) = \frac{1}{2}p_{10}t^2 - p_{20}t + p_{30}, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $p_{10} = p_1(0)$, $p_{20} = p_2(0)$ et $p_{30} = p_3(0)$.

D'après le théorème (1.7), i.e. toutes les valeurs propres de la matrice A sont réels, le problème admet au plus une commutation, i.e. $(n - 1)$ commutations. Alors, on en déduit quatre stratégies possibles :

1. $u(t) = 1$,
2. $u(t) = -1$,
3. $u(t) = 1$ puis $u(t) = -1$,
4. $u(t) = -1$ puis $u(t) = 1$.

Cet exemple du problème en temps minimal est déjà traité d'une manière générale pour le système $\ddot{x} = u(t)$, $x(0) = x_0$ dans le livre Lee-Markus, exemple 2, page 139 [24]. Nous limitons de donner la stratégie optimale qui nous permet d'aller de $(0, 0, 0)$ à $(1, x_2(3), x_3(3))$ en temps de parcours minimal, et ainsi les résultats obtenus à l'aide de logiciel Matlab (voir Annexe (B.1)). Les trajectoires optimales sont tracées dans la figure (3.11).

Stratégie optimale : $u = +1$ sur $[0, t_f]$:

Nous avons, $\dot{x}_3(t) = 1$, ce qui implique :

$$\begin{cases} x_3(t) = t + c_3, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_3t + c_2, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{c_3}{2}t^2 + c_2t + c_1. \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_3(t) = t, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2}, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

3.3 Problème en temps minimal

Calculons t_f tel que $x(t_f) = 1$:

$$x_1(t_f) = \frac{t_f^3}{6} = 1, \text{ donc } t_f = \sqrt[3]{6}.$$

Par conséquent, le temps minimal du problème (\mathcal{P}) est égal à :

$$T_{min} = 1,817. \quad (3.8)$$

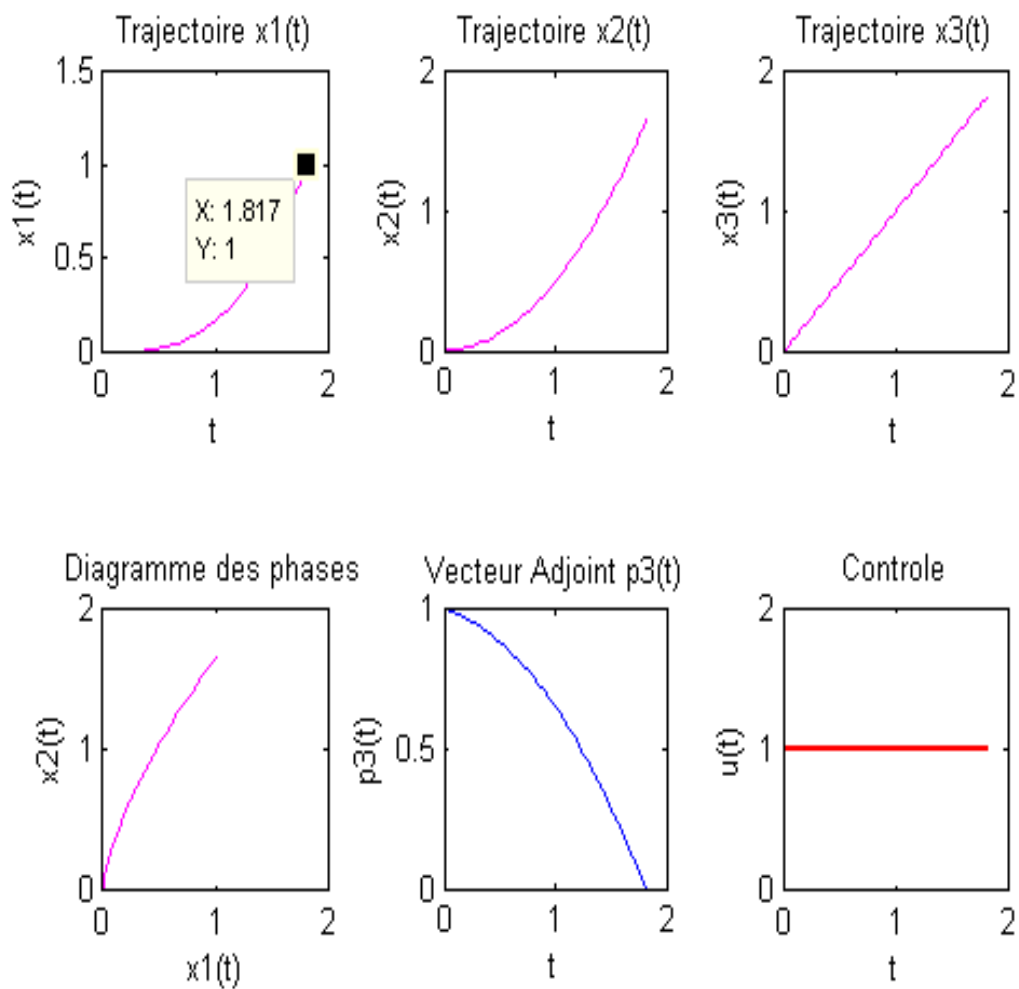


FIGURE 3.1 – Résultats du problème en temps minimal.

Connaissant ce temps minimal, donc notre temps final doit toujours être choisi plus grand que $T_{min} = 1,817$. Pour cela dans le problème (\mathcal{P}), on a choisi $t_f = 3 > T_{min}$.

3.4 Résolution par le principe du maximum

Dans cette section, nous résolvons le problème (\mathcal{P}) avec le principe du maximum. Tout d'abord, nous transformons le problème (\mathcal{P}) sous forme d'un problème de minimisation. Ensuite, nous trouvons la stratégie optimale et finalement, nous présentons ces résultats analytiquement et numériquement.

Transformer le problème (\mathcal{P}) :

$$(\tilde{\mathcal{P}}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ \text{Sous les contraintes :} \end{array} \right. \begin{array}{l} \tilde{J}(u(t_f)) = -x_2(t_f), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3(t) = u(t), \quad x_3(0) = 0, \\ x_1(t_f) = 1, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, t_f], \\ t_f > 0 : \text{fixé.} \end{array}$$

avec : $\tilde{J}(u) = -J(u)$.

Le Hamiltonien du problème $(\tilde{\mathcal{P}})$ est :

$$\mathcal{H}(u(t), x(t), p(t), t) = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)x_3(t) + p_3(t)u(t).$$

D'après la section 3.3, le maximum du Hamiltonien est donné par l'équation (3.5) et ainsi le contrôle optimal par l'équation (3.6).

Le système adjoint est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1(t), \\ \dot{p}_3(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_3} = -p_2(t). \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} p_1(t) = p_{10}, \\ p_2(t) = -p_{10}t + p_{20}, \\ p_3(t) = \frac{1}{2}p_{10}t^2 - p_{20}t + p_{30}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Conditions de transversalité :

Les conditions de transversalité permettent d'avoir des conditions sur les vecteurs adjoints, et dans notre cas, elles sont des conditions finales. Nous avons, t_f fixé et $x(t_f)$ contraint par l'équation $g - Hx(t_f) = 0$, alors la condition de transversalité est donnée par :

$$-p(t_f) - \frac{\partial g^\circ(x(t_f))}{\partial x_f} + \frac{\partial (g - Hx(t_f))'}{\partial x_f} \nu = 0,$$

où $g - Hx(t_f) = 1 - x_1(t_f)$ et $g^\circ(x(t_f)) = -x_2(t_f)$.

Delà on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(t_f) = -\nu, \\ p_2(t_f) = 1, \\ p_3(t_f) = 0. \end{array} \right.$$

3.4 Résolution par le principe du maximum

Par suite, le système (3.9) devient :

$$\begin{cases} p_1(t) = -\nu, \\ p_2(t) = \nu(t-3) + 1, \\ p_3(t) = -\frac{\nu}{2}t^2 - (1-3\nu)t - \frac{9}{2}\nu + 3, \end{cases}$$

avec $\nu = -p_{10}$.

Puisque le contrôle optimal est donné par le signe du vecteur adjoint $p_3(t)$, alors les temps de commutation sont donnés par les racines de $p_3(t)$.

Calculons le discriminant D :

$$D = (1-3\nu)^2 - 4\frac{\nu}{2}\left(\frac{9}{2}\nu - 3\right) = 1,$$

alors le $p_3(t)$ a deux racines distinctes :

$$t_1 = \frac{3\nu - 2}{\nu} \quad \text{et} \quad t_2 = 3. \quad (3.10)$$

Par conséquent, le contrôle a au plus une commutation. Alors, on en déduit quatre stratégies possibles :

1. **Stratégie 1** : $u(t) = +1$ sur $[0, t_f]$,
 $\dot{x}_3(t) = 1$, ce qui implique :

$$\begin{cases} x_3(t) = t + c_3, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_3t + c_2, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{c_3}{2}t^2 + c_2t + c_1. \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_3(t) = t, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2}, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

Calculons $x_1(t_f)$:

$x_1(t_f) = \frac{9}{2} \neq 1$, donc la stratégie 1 n'est pas optimale.

2. **Stratégie 2** : $u(t) = -1$ sur $[0, t_f]$,
 $\dot{x}_3(t) = -1$, ce qui implique :

$$\begin{cases} x_3(t) = -t + c_3, \\ x_2(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3t + c_2, \\ x_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{c_3}{2}t^2 + c_2t + c_1. \end{cases}$$

3.4 Résolution par le principe du maximum

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_3(t) = -t, \\ x_2(t) = -\frac{t^2}{2}, \\ x_1(t) = -\frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

Calculons $x_1(t_f)$:

$x_1(t_f) = -\frac{9}{2} \neq 1$, donc la stratégie 2 n'est pas optimale.

3. Stratégie 3 :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{sur } [0, t_c[, \\ -1, & \text{sur } [t_c, t_f]. \end{cases}$$

Les équations du premier morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [0, t_c[$, sont :

$$\begin{cases} x_3(t) = t, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2}, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

Les équations du deuxième morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [t_c, t_f[$, sont :

$$\begin{cases} x_3(t) = -t + c_3, \\ x_2(t) = -\frac{t^2}{2} + c_3t + c_2, \\ x_1(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{c_3}{2}t^2 + c_2t + c_1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons :

$$c_3 = 2t_c, \quad c_2 = -t_c^2, \quad \text{et } c_1 = \frac{t_c^3}{3}.$$

Substituons ces dernières constantes dans le système (3.11), les trajectoires sont données par :

$$\begin{cases} x_3(t) = -t + 2t_c, \\ x_2(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t_ct - t_c^2, \\ x_1(t) = -\frac{t^3}{6} + t_ct^2 - t_c^2t + \frac{t_c^3}{3}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Calculons t_c tel que $x_1(3) = 1$:

Cette dernière condition, nous permet d'obtenir cette équation :

$$\frac{t_c^3}{3} - 3t_c^2 + 9t_c - \frac{11}{2} = 0.$$

La solution de cette dernière équation est donnée par :

$$t_c = 3 - \left(\frac{21}{3}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad t_c = 3 + \left(\frac{21}{3}\right)^{1/3} (1 \pm i\sqrt{3}).$$

3.4 Résolution par le principe du maximum

Donc :

$$t_c = 3 - \left(\frac{21}{3}\right)^{1/3}.$$

Calculons $\tilde{J}(u)$:

D'après le système (3.12), nous avons : $x_2(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t_c t - t_c^2$, alors le coût du problème ($\tilde{\mathcal{P}}$) est égal à :

$$\tilde{J}(u) = -x_2(3) = \frac{9}{2} - 6\left(3 - \left(\frac{21}{3}\right)^{1/3}\right) + \left(3 - \left(\frac{21}{3}\right)^{1/3}\right)^2 = -0,840694.$$

Par conséquent, le coût du problème (\mathcal{P}) est égal à :

$$J(u) = 0,840694.$$

4. Stratégie 4 :

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{sur } [0, t_c], \\ 1, & \text{sur } [t_c, t_f]. \end{cases}$$

Les équations du premier morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [0, t_c[$, sont :

$$\begin{cases} x_3(t) = -t, \\ x_2(t) = -\frac{t^2}{2}, \\ x_1(t) = -\frac{t^3}{6}. \end{cases}$$

Les équations du deuxième morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [t_c, t_f[$, sont :

$$\begin{cases} x_3(t) = t + c_3, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_2, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{c_3}{2} t^2 + c_2 t + c_1. \end{cases} \quad (3.13)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons :

$$c_3 = -2t_c, \quad c_2 = t_c^2, \quad \text{et } c_1 = -\frac{t_c^3}{3}.$$

Substituons ces dernières constantes dans le système (3.13),

$$\begin{cases} x_3(t) = t - 2t_c, \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2} - 2t_c t + t_c^2, \\ x_1(t) = \frac{t^3}{6} - t_c t^2 + t_c^2 t - \frac{t_c^3}{3}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Calculons le temps de commutation t_c à partir de $x_1(3) = 1$:

$$-\frac{t_c^3}{3} + 3t_c^2 - 9t_c + \frac{7}{2} = 0.$$

La solution de cette dernière équation est :

$$t_1 = 3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad t_2 = 3 + \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} (1 \pm i\sqrt{3}).$$

3.4 Résolution par le principe du maximum

Par conséquent :

$$t_c = 3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} = 0,454178. \quad (3.15)$$

Calculons $\tilde{J}(u)$:

D'après le système (3.14), nous avons : $x_2(t) = \frac{t^2}{2} - 2t_c t + t_c^2$.

Le coût du problème ($\tilde{\mathcal{P}}$) est égal à :

$$\tilde{J}(u) = -x_2(3) = -\frac{9}{2} + 6\left(3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3}\right) - \left(3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3}\right)^2 = -1.98121.$$

Par conséquent, le coût du problème (\mathcal{P}) est égal à :

$$J(u) = 1.9812.$$

Remarquons que le coût donné par la stratégie 4 est supérieur à celle de la stratégie 3. De là, on en déduit que la solution optimale est décrite par le contrôle de la stratégie 4 et qui est de type bang-bang.

Le temps de commutation est donné par : $t_c = 3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3}$.

De l'équation (3.10), on obtient :

$$\begin{cases} 3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} = 3 & \Rightarrow -\left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} = 0, \\ 3 - \left(\frac{33}{2}\right)^{1/3} = 3 - \frac{2}{\nu} & \Rightarrow \nu = 2\left(\frac{2}{33}\right)^{1/3}. \end{cases}$$

Par conséquent :

$$p_{10} = -0,7856.$$

Ainsi le vecteur $p_3(t)$ est donné par :

$$p_3(t) = -0,3928t^2 + 1,3568t - 0,5352. \quad (3.16)$$

Les résultats obtenus sont tracés dans les figures suivantes :

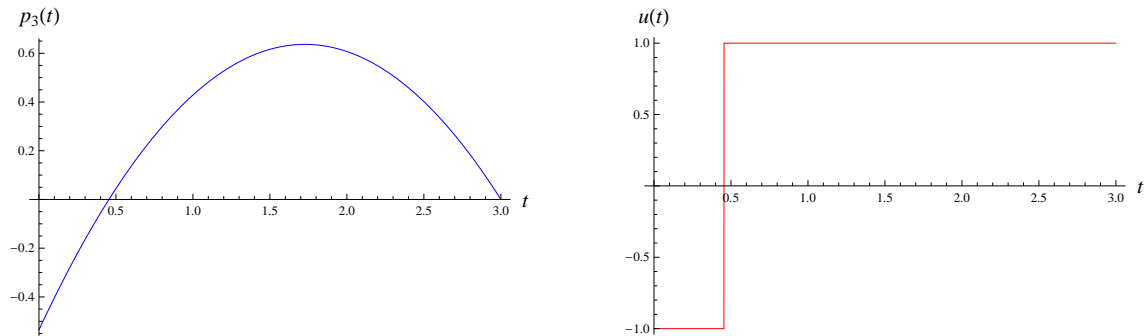


FIGURE 3.2 – Vecteur adjoint $(t, p_3(t))$ et le contrôle $u(t) = \text{sign}(p_3(t))$.

Nous avons donc déterminé par le PMP une trajectoire optimale qui maximise $x_2(t_f)$ et qui vérifie la condition aux limites $x_1(t_f) = 1$.

3.4 Résolution par le principe du maximum

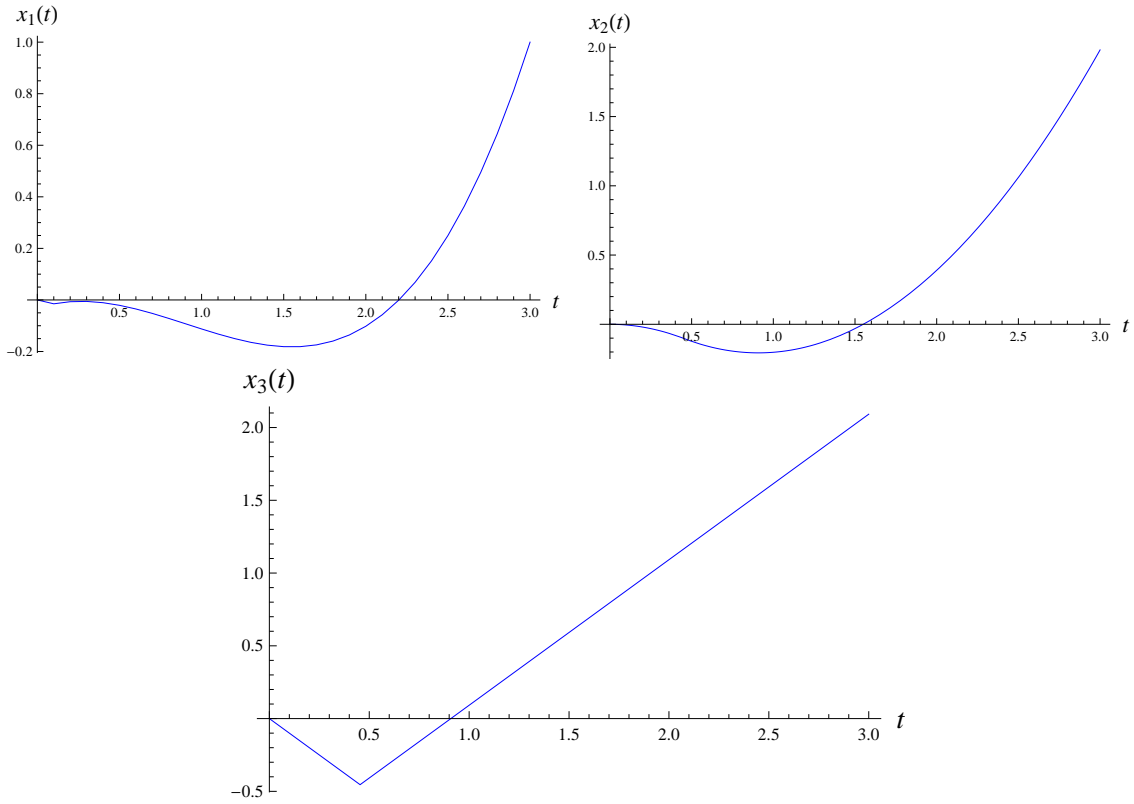


FIGURE 3.3 – Trajectoires optimales : $(t, x_1(t))$, $(t, x_2(t))$ et $(t, x_3(t))$.

Le système est autonome, alors la fonction Hamiltonienne est constante le long de la trajectoire qui est représentée par la figure (3.4).

$$\mathcal{H} = u(0)p_{30} = p_{10}x_2(t_f) + x_3(t_f) = 0,5353.$$

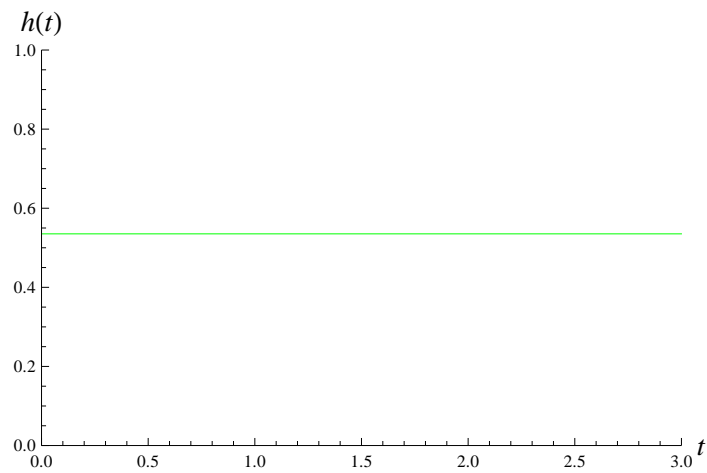


FIGURE 3.4 – Représentation graphique du Hamiltonien $\mathcal{H}(t)$.

3.5 Résolution par la méthode de tir simple

Le diagramme des phases est donné par la figure suivante :

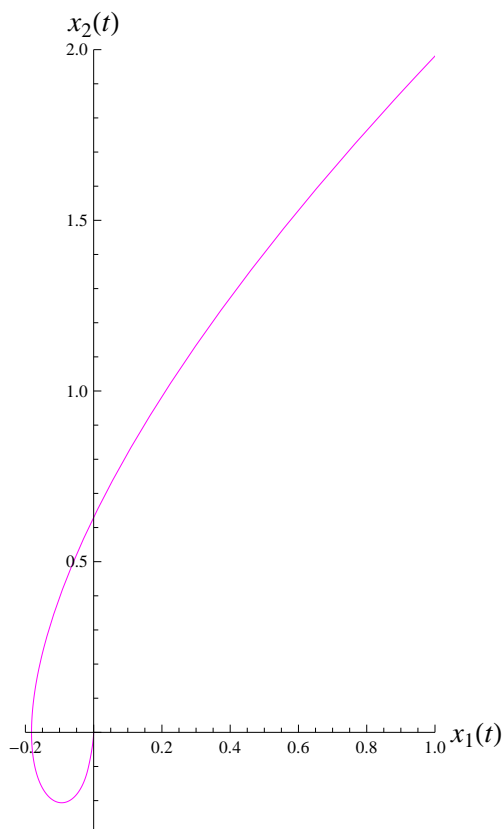


FIGURE 3.5 – Diagramme des phases $(x_1(t), x_2(t))$.

3.5 Résolution par la méthode de tir simple

Le principe du maximum de Pontryagin donné dans la section précédente (3.4), nous permet d'obtenir le problème aux deux bouts *TPBVP* suivant :

$$(TPBVP) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = \text{sign}(p_3(t)), \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_3(t) = -p_2(t), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, \\ p_1(0) = p_{10}, p_2(0) = p_{20}, p_3(0) = p_{30}, \\ x_1(3) = 1, x_2(3) : \text{libre}, x_3(3) : \text{libre}, \\ p_1(3) = p_{1f}, p_2(3) = 1, p_3(3) = 0. \end{cases}$$

Détermination de la fonction de tir :

Notons par $z(t) = (x(t), p(t))$. Le problème IVP est donné par :

$$(IVP) = \begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t), \\ \dot{z}_3(t) = \text{sign}(z_6(t)), \\ \dot{z}_4(t) = 0, \\ \dot{z}_5(t) = -z_1(t), \\ \dot{z}_6(t) = -z_2(t), \\ z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0, \quad z_3(0) = 0, \\ z_4(0) = p_{10}, \quad z_5(0) = p_{20}, \quad z_6(0) = p_{30}, \\ z_1(3) = 1, \quad z_2(3) : \text{libre}, \quad z_3(3) : \text{libre}, \\ z_4(3) = p_{1f}, \quad z_5(3) = 1, \quad z_6(3) = 0. \end{cases}$$

Implémentation de la méthode de tir sous Matlab (Voir Annexe (B.2)) :

On crée une fonction *Tir-Method.m* afin de trouver le zéro de la fonction de tir, en utilisant la fonction *fsolve.m*. Cette fonction permet de résoudre le problème : $\mathcal{F}(X) = 0$, où $\mathcal{F}(\cdot)$ est codée sous la forme d'une fonction Matlab *Fonction*, $Ip0$ est le point de départ de l'algorithme et $p0$ est le résultat.

Ainsi, nous introduisons la fonction *Xzero* afin de prendre en compte les conditions finales et elle utilise la fonction *ode113.m*, cette fonction permet de résoudre le système décrit par la fonction *System*, avec $X = Ip0$ est la valeur donnée par la fonction *Fonction*, c'est l'entrée de la fonction *Xzero*. Enfin, nous utilisons la fonction *ode45.m* pour calculer une solution optimale du système.

Remarque 3.1 La fonction *ode45.m* utilise la méthode de type Runge Kutta [9] et par contre, la fonction *ode113.m* utilise la méthode d'Adams-Bashforth-Moulton PECE d'ordre variable plus précise [20, 41].

Finalement, l'exécution de ce code (B.2) nous permet d'obtenir la solution de vecteur adjoint : $p0 = (-0, 7856; -1, 3568; -0, 5352)$ et la solution optimale qui est donnée par le contrôle bang-bang suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1, & \text{sur } [0; 0, 4542] \\ 1, & \text{sur } [0, 4542; 3] \end{cases}$$

Ainsi, les états, états adjoints, contrôle et le diagramme des phases sont illustrés par la figure (3.6) :

Le temps d'exécution de la méthode de tir est égal à 2, 8076.

3.6 Résolution par la méthode de discrétisation totale

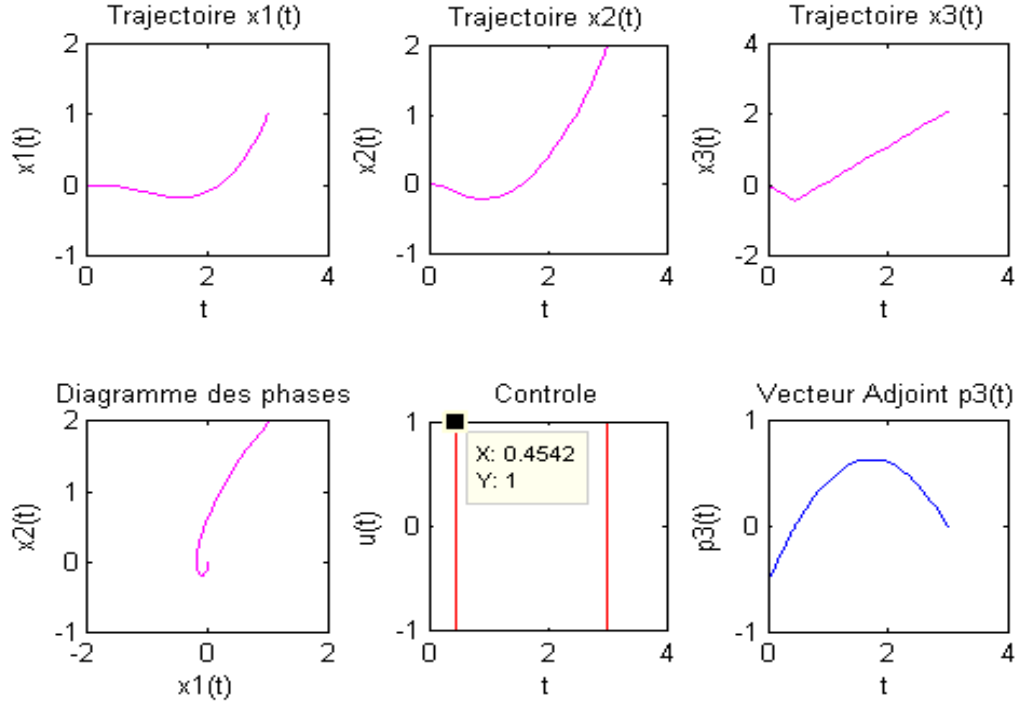


FIGURE 3.6 – Résultats de la méthode de tir.

3.6 Résolution par la méthode de discrétisation totale

Tout d'abord, nous choisissons N , le nombre de discrétisation, et en suite, nous discrétisons le contrôle $u(\cdot)$ et le système d'état selon la subdivision de l'intervalle $[0, t_f]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f.$$

Le problème initial discret devient :

$$\text{Minimiser } \tilde{J} = -x_2(t_N)$$

$$\text{Sous les contraintes : } x_1(t_{i+1}) = x_1(t_i) + \frac{t_N}{N} x_2(t_i), \quad x_1(0) = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$x_2(t_{i+1}) = x_2(t_i) + \frac{t_N}{N} x_3(t_i), \quad x_2(0) = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$x_3(t_{i+1}) = x_3(t_i) + \frac{t_N}{N} u(t_i), \quad x_3(0) = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$x_1(t_N) = 1.$$

3.6 Résolution par la méthode de discrétisation totale

Implémentation de la Méthode de discrétisation totale sous Matlab (voir l'Annexe B.3) :

On crée une fonction *Discretization-Method.m* qui permet de résoudre ce problème. Le principe est d'utiliser la fonction *fmincon.m*, cette fonction permet de trouver le minimum d'un problème avec contraintes non linéaire et multi-variable et elle utilise la méthode SQP pour résoudre ce problème. Le coût à minimiser est représenté par la fonction *Cost* et les contraintes par la fonction *Condition*.

L'exécution de ce code pour différentes valeurs de N , nous permet d'obtenir les résultats suivantes :

- pour $N \leq 200$, la solution de type bang-bang-singulier, alors elle est non optimale (voir figure (3.7)).
- pour $200 \leq N < 500$, la solution est très éloignée de la solution optimale (voir figure (3.8)).
- pour $500 \leq N < 900$, la solution est proche de la solution optimale (voir figure (3.9)).
- pour $N \geq 900$, la solution est très proche de la solution optimale (voir figure (3.10)).

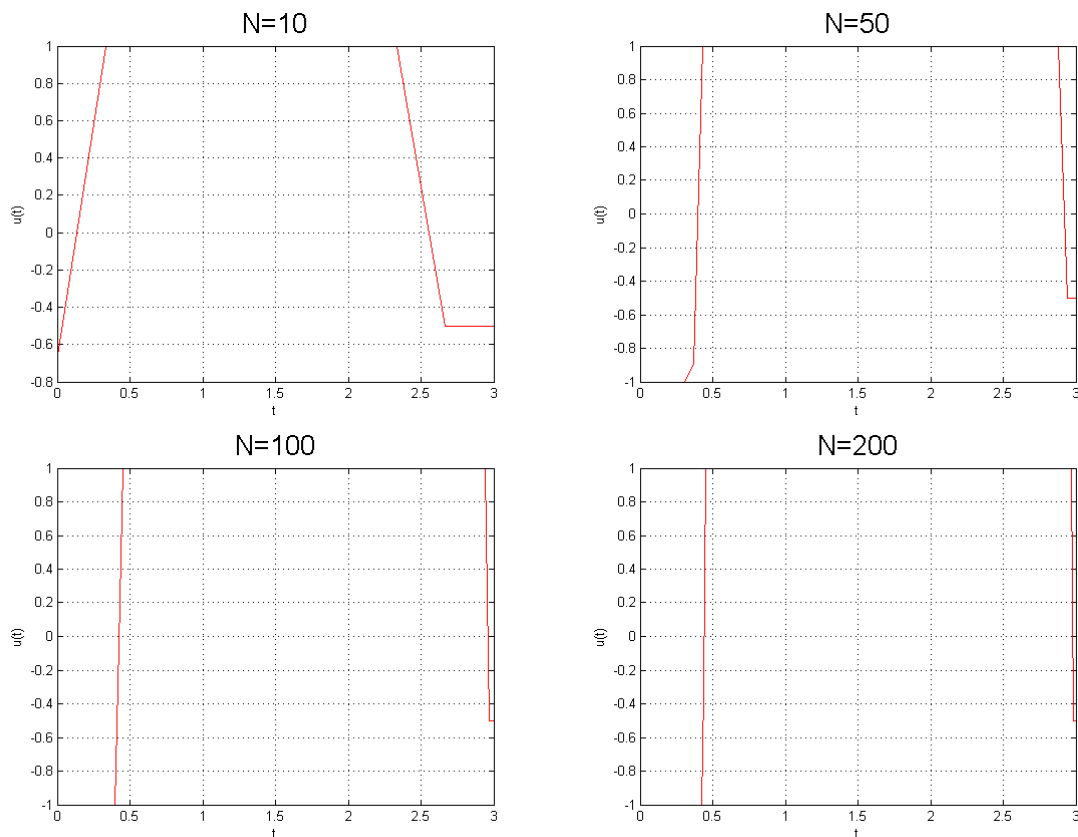


FIGURE 3.7 – Solutions non-optimales.

3.6 Résolution par la méthode de discrétisation totale

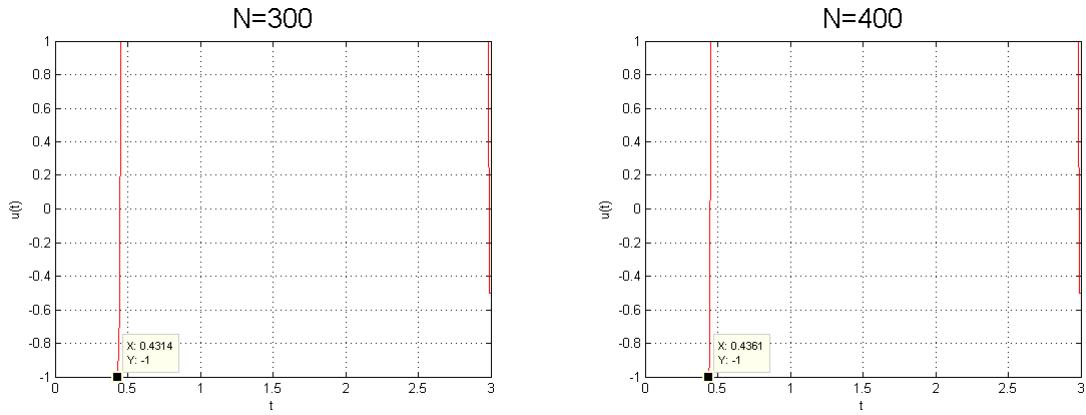


FIGURE 3.8 – Solutions très éloignées.

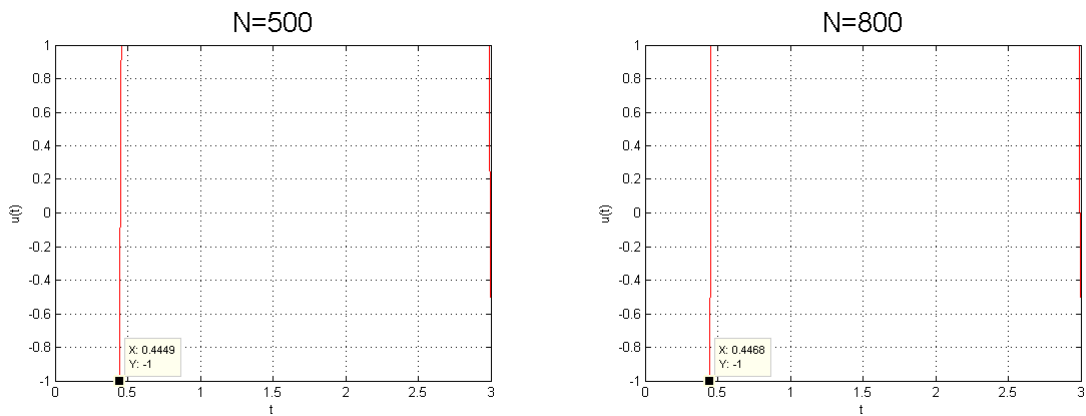


FIGURE 3.9 – Solutions proches.

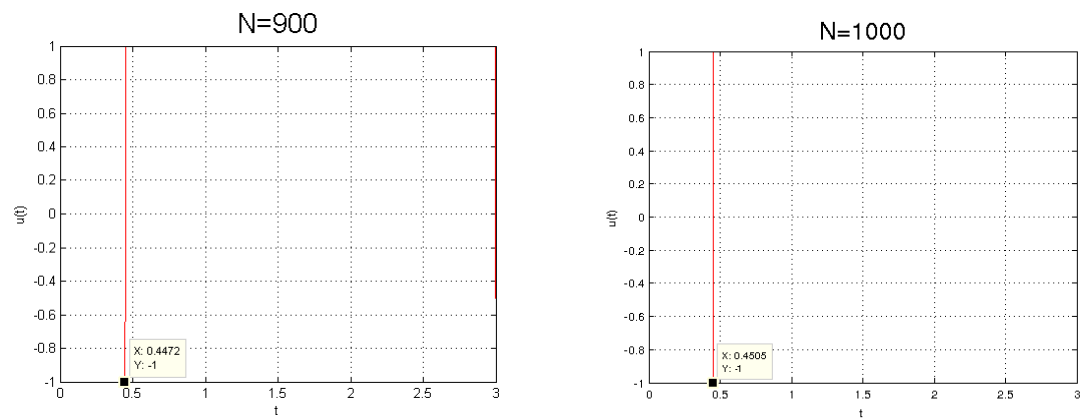


FIGURE 3.10 – Solutions très proches.

3.7 Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée

Choisissons le nombre de discrétisation $N = 4$ et le contrôle initial admissible, non dégénéré u_0 bornée entre $d_1 = -1$ et $d_2 = 1$: $u_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\varepsilon = 10^{-3}$, et le pas $h = \frac{t_f - 0}{N} = \frac{3}{4}$.

La solution du système dynamique de (\mathcal{P}) à condition initiale nulle est donnée par :

$$x(t) = \int_0^t F(t)F^{-1}(s)Bu(s)ds, t \in T, \quad (3.17)$$

où $F(t)$ est la résolvante, solution du système : $\dot{F}(t) = AF(t)$, $F(0) = I_3$, qui est égale à :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F(t_f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in T.$$

En utilisant cette dernière solution, le problème initial (\mathcal{P}) prend la forme suivante :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \longrightarrow \max_{u(t)}, \\ \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = g, \\ -1 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, 3], \end{cases} \quad (3.18)$$

où $C(t) = c'F(t_f)F(t)^{-1}B = -t + 3$ et $\varphi(t) = HF(t_f)F(t)^{-1}B = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$,

Principe de discrétisation :

Posons $\tau_{j+1} = \tau^j$, avec $\tau^j = \tau_j + h$, ce qui implique :

$$T = [0, \frac{3}{4}[\cup[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]] \cup [\frac{3}{2}, \frac{9}{4}[\cup[\frac{9}{4}, 3]].$$

Calculons C_j et X_j :

$$C_j = \int_{\tau_j}^{\tau_j} C(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau_j} (-t + 3) dt, j = 1, \dots, N.$$

$$X_j = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \varphi(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \left(\frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} \right) dt, j = 1, \dots, N.$$

3.7 Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée

En utilisant les dernières quantités, le problème (3.18) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \frac{63}{32}u_1 + \frac{45}{32}u_2 + \frac{27}{32}u_3 + \frac{9}{32}u_4 \longrightarrow \max_u, \\ \frac{333}{128}u_1 + \frac{171}{128}u_2 + \frac{63}{128}u_3 + \frac{9}{128}u_4 = 1, \\ -1 \leq u_j \leq 1, j = 1, 4. \end{cases} \quad (3.19)$$

Méthode adaptée :

Choisissons un ensemble des indices initiaux $J_B = [2]$ et appliquons la méthode adaptée du PPL pour le problème (3.19).

Après deux itérations (Voir la solution en détaille dans l'exemple (A.7)), on obtient la solution optimale suivante :

1. Le plan optimal est $u = [-\frac{115}{333}, 1, 1, 1]$.
2. Le support optimal est $J_B^o = 1$.

Procédure finale :

En utilisant J_B^o , on construit τ_B , tel que : $\tau_B = \{\tau_j, j \in J_B^o\} = \frac{3}{4}$. Le support τ_B permet de calculer $\phi_B = \frac{81}{32}$, $\phi_B^{-1} = \frac{32}{81}$, $C_B = \frac{9}{4}$ et de construire $y' = C_B \phi_B^{-1} = \frac{8}{9}$, et ainsi $\Delta(t) = -\psi'(t)B = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{3}t + 1$ où $\psi(t)$ est donnée par la formule (2.14).

Construisons la quasi-commande $\omega(t), t \in T$:

$$\omega(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ 1, & \text{si } \Delta(t) < 0, \end{cases} \quad t \in [0, 3]. \quad (3.20)$$

Calculons $\chi(t_f)$ la trajectoire correspondante à $\omega(t)$:

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \sum_{j=0}^N F(s)^{-1} B u(s) ds = \begin{pmatrix} -0,7031 \\ 0,5625 \\ 1,5000 \end{pmatrix}.$$

$H\chi(3) = -0,7031 \neq 1$, alors on construit le vecteur $\lambda(\tau_B)$:

$$\lambda(\tau_B) = \phi_B^{-1} (g - H\chi(t_f)) = \frac{8}{9} (1 - (-0,7031)) = 0,6728.$$

Par conséquent, $\|\lambda(\tau_B)\| = 0,6728 > \mu$, alors on change τ_B en $\bar{\tau}_B$ par la méthode duale ($\mu = 0,2$, paramètre de la méthode).

Méthode duale :

Soit $t^\circ \in \tau_B$ tel que $\lambda(t^\circ) = \max(|\lambda(\tau_B)|) = 0,6728$, ce qui implique $t^\circ = \frac{3}{4}$. Le changement du support τ_B à $\bar{\tau}_B$ consiste à changer le co-contrôle $\Delta(t) = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{3}t + 1$ à $\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \gamma(t)\delta(t), t \in T$. Pour cela cherchons la fonction :

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{\delta(t)}, & \text{si } \Delta(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si non,} \end{cases} \quad (3.21)$$

3.7 Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée

avec $\delta(t) = -\text{sign}(\lambda)\phi_B^{-1}\varphi(t) = -\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}$.

Construisons l'ensemble :

$$T_g(\gamma) = \{t \in [0, 3], \gamma(t) < \gamma\}.$$

Nous avons $\Delta(t)\delta(t) < 0$ sur l'intervalle $[0, t_c]$, ce qui implique

$$\gamma(t) = \frac{-\frac{4}{9}t^2 + \frac{5}{3}t - 1}{-\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}} < \gamma. \quad (3.22)$$

La résolution de l'inégalité (3.22) revient à résoudre cette égalité :

$$-\frac{4}{9} \left(1 + \frac{4}{9}\gamma\right) t^2 + \frac{1}{3} \left(5 + \frac{32}{9}\gamma\right) t - \left(1 + \frac{16}{9}\gamma\right) \gamma = 0.$$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$t_1 = 3 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{3(16\gamma - 9)}{4(4\gamma - 9)}$$

Par conséquent :

$$T_g(\gamma) = \left\{t \in \left[0, \frac{3(16\gamma - 9)}{4(4\gamma - 9)}\right]\right\},$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma) &= -|\lambda(t^\circ)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt, \\ \alpha(\gamma) &= -0,6728 + (1 - (-1)) \int_0^{\frac{3(16\gamma-9)}{4(4\gamma-9)}} \left| -\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9} \right| dt. \end{aligned}$$

D'où :

$$\alpha(\gamma) = \frac{2(7472\gamma^3 - 50436\gamma^2 + 113481\gamma - 40824)}{81(4\gamma - 9)^3}.$$

Delà : $\gamma_1 = 0,4403$, $\gamma_2 = 3,1549 + 1,5673i$, $\gamma_3 = 3,1549 - 1,5673i$.

Nous calculons t_* à partir de l'équation $\Delta(t_*) + \gamma\delta(t_*) = 0$ tel que $\delta(t_*) \neq 0$, et qui implique :

$$\frac{4}{9}t_*^2 - \frac{5}{3}t_* + 1 + \gamma_1 \left(-\frac{16}{81}t_*^2 + \frac{32}{27}t_* - \frac{16}{9} \right) = 0. \quad (3.23)$$

La solution de l'équation (3.23) est :

$$t_1 = \frac{3666}{18097} \quad \text{et} \quad t_2 = 3.$$

3.7 Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée

Puisque $\delta(t_2) = 0$, alors $t_* = 0, 2026$.

Le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus t^\circ) \cup t_* = 0, 2026.$$

Ce nouveau support permet de recalculer $\phi(\bar{\tau}_B) = 3, 9127$, $\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 2555$, $C(\bar{\tau}_B) = 2, 7974$ et ainsi de reconstruire $y' = C(\bar{\tau}_B)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 7149$, et $\bar{\Delta}(t) = -\psi'(t)B = 0, 3574t^2 - 1, 1448t + 0, 2172$ où $\psi(t)$ est donné par la formule (2.14).

Reconstruisons la quasi-commande $\omega(t)$, $t \in T$:

$$\omega(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \bar{\Delta}(t) > 0, \\ 1, & \text{si } \bar{\Delta}(t) < 0, \end{cases} \quad t \in [0, 3]. \quad (3.24)$$

Calculons $\chi(t_f)$:

$$\chi(3) = \int_{\bar{\tau}_j}^{\bar{\tau}^j} \sum_{j=0}^N F^{-1}(s)Bu(s)ds = \begin{pmatrix} 2, 7968 \\ 3, 3253 \\ 2, 5947 \end{pmatrix}.$$

$H\chi(3) = 2, 7968 \neq 1$, alors on reconstruit le vecteur $\lambda(\bar{\tau}_B)$:

$$\lambda(\bar{\tau}_B) = \phi(\bar{\tau}_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)) = 0, 2555(1 - 2, 7968) = -0, 4592.$$

Par conséquent, $\|\lambda(\bar{\tau}_B)\| = 0, 4592 > \mu$, alors on change $\bar{\tau}_B$ en $\bar{\bar{\tau}}_B$ par la méthode duale.

Méthode duale :

Soit $t^\circ \in \bar{\tau}_B$ tel que $\lambda(t^\circ) = \max(|\lambda(\bar{\tau}_B)|) = 0, 4592$, ce qui implique $t^\circ = 0, 2026$. Le changement du support $\bar{\tau}_B$ à $\bar{\bar{\tau}}_B$ consiste à changer le co-contrôle $\bar{\Delta}(t) = 0, 3574t^2 - 1, 1448t + 0, 2172$ à $\bar{\bar{\Delta}}(t) = \bar{\Delta}(t) + \bar{\gamma}(t)\bar{\delta}(t)$, $t \in T$. Pour cela cherchons la fonction :

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} -\frac{\bar{\Delta}(t)}{\bar{\delta}(t)}, & \text{si } \bar{\Delta}(t)\bar{\delta}(t) < 0, \\ 0, & \text{si non,} \end{cases} \quad (3.25)$$

avec $\bar{\delta}(t) = -\text{sign}(\lambda)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1}\varphi(t) = 0, 1277t^2 - 0, 7667t + 1, 1501$.

Reonstruisons l'ensemble :

$$T_g(\gamma) = \{t \in [0, 3], \gamma(t) < \gamma\}.$$

Nous avons $\bar{\Delta}(t)\bar{\delta}(t) < 0$ sur l'intervalle $[t_c, t_f]$, ce qui implique :

$$\gamma(t) = -\frac{\bar{\Delta}(t)}{\bar{\delta}(t)} = \frac{0, 3574t^2 - 1, 1448t + 0, 2172}{0, 1277t^2 - 0, 7667t + 1, 1501}.$$

3.7 Résolution par la nouvelle version de la méthode Adaptée

Par conséquent :

$$T_g(\gamma) = \left\{ t \in \left[0, 2026, \frac{(4, 8901s + 92, 3888)}{0, 61347s + 0, 2193} \right] \right\},$$

et ainsi :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^o)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt,$$

$$\alpha(\gamma) = 0, 4592 + (1 - (-1)) \int_{0, 2026}^{\frac{(4, 8901s + 92, 3888)}{0, 61347s + 0, 2193}} |0, 1277t^2 - 0, 7667t + 1, 1501| dt.$$

D'où :

$$\alpha(\gamma) = \frac{(6, 0882\gamma^3 + 51, 0937\gamma^2 + 142, 9289\gamma - 43, 5418)10^{48}}{(16300543533549461s + 45598946227126272)^3}.$$

Delà : $\gamma_1 = 0, 2764$, $\gamma_2 = -4, 3342 - 2, 6620i$, $\gamma_3 = -4, 3342 + 2, 6620i$.

On calcule t_* à partir de l'équation $\Delta(t_*) + \gamma\delta(t_*) = 0$, ce qui implique $t_* = 0, 4541$.

Alors, le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\bar{\tau}_B \setminus t^o) \cup t_* = 0, 4541.$$

Ce nouveau support permet de recalculer $\phi(\bar{\tau}_B) = 3, 2406$, $\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 3085$, $C(\bar{\tau}_B) = 2, 5458$ et ainsi de reconstruire $y' = C(\bar{\tau}_B)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 7856$, et $(\bar{\Delta}(t) = -\psi'(t)B = 0, 3928t^2 - 1, 3568t + 0, 5352$ où $\psi(t)$ est donnée par la formule (2.14).

Reconstruisons la quasi-commande $\omega(t)$, $t \in T$

$$\omega(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } \bar{\Delta}(t) > 0, \\ 1, & \text{si } (\bar{\Delta}(t), t \in [0, 3]). \end{cases} \quad (3.26)$$

Calculons $\chi(t_f)$:

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \sum_{j=0}^N F(s)^{-1} B u(s) ds = \begin{pmatrix} 1, 0000 \\ 1, 9812 \\ 2, 0916 \end{pmatrix}.$$

$H\chi(3) = 1$, alors $\omega(t)$ est le contrôle optimal :

1. Le support optimal $\tau_B = 0, 454178315170256 \approx 0, 4542$.
2. La valeur optimale de la fonction du critère est $J_d(u) = 1, 8513$.
3. La valeur optimale de la fonction du critère est $J_c(u) = 1, 9812$.
4. Le temps d'exécution de l'algorithme $t = 1, 9608$.

L'exécution du code (B.4) pour différentes valeurs de N , nous permet d'obtenir le tableau (3.1) suivant :

N	J_B°	$J_d(u)$	τ_B	$J_c(u)$	$H\chi(t_f)$	$Time(s)$
10	2	1,9588	0,6000	1,2600	0,1080	2,4836
100	16	1,9810	0,4800	1,8504	0,8343	3,2062
1000	152	1,9812	0,4560	1,9719	0,9882	19,1502
2000	303	1,9812	0,4545	1,9796	0,9882	45,0102
10000	1514	1,9812	0,4542	1,9811	0,9999	944,8169
20000	3028	1,9812	0,4542	1,9811	0,9999	3370,5000

TABLE 3.1 – Simulation numérique de la nouvelle version de la méthode Adaptée.

D'après ce tableau, on déduit :

- pour N petit, la méthode adaptée donne un résultat très éloigné du résultat optimal. Ce résultat est amélioré par notre stratégie.
- pour N très grand ($N \geq 10000$), la méthode adaptée donne de bons résultats au prix d'un temps de calcul accru.

3.8 Comparaison numérique

La résolution de l'exemple académique par quatre manières différentes, soit avec des méthodes directes ou bien avec des méthodes indirectes, nous permettons d'étudier les points communs entre ces méthodes. Dans cette partie, nous présentons une approche numérique entre la nouvelle méthode et le principe du maximum de Pontryagin et ainsi une comparaison numérique entre cette nouvelle méthode et la méthode de discrétisation totale.

3.8.1 Nouvelle version de la MA et PMP

La solution optimale donnée par le principe du maximum de Pontryagin est représentée par le signe du vecteur adjoint $p_3(t)$, i.e. $u^\circ(t) = \text{sign}(p_3(t))$, avec

$$p_3(t) = \frac{1}{2}p_{10}t^2 - (3p_{10} + 1)t + \frac{9}{2}p_{10} + 3,$$

ou bien,

$$p_3(t) = p_{10} \left(\frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} \right) - t + 3. \tag{3.27}$$

3.8 Comparaison numérique

D'autre part, nous avons : $C(t) = -t + 3$ et $\varphi(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$ d'après la nouvelle méthode. De là, l'équation (3.27) devient :

$$p_3(t) = -(p_{10}\varphi(t) - C(t)),$$

En posant $p_{10} = -y'$ (y : vecteur des potentiels), on obtient :

$$p_3(t) = -\Delta(t). \tag{3.28}$$

Le temps de commutation t_c égal à $\tau_B = 0,4542$, et ainsi, le nombre de commutation est égale à 1, et ceci confirme la remarque (2.2) $m \leq |\tau_B| \leq (n - 1)$, i.e. $1 \leq |\tau_B| \leq 1$.

La solution optimale est donnée par le contrôle de type bang-bang :

$$u^\circ(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \Delta(t) \geq 0, t \in [0; 0,4542[, \\ 1 & \text{si } \Delta(t) < 0, t \in [0,4542; 3]. \end{cases} \tag{3.29}$$

La valeur optimale de la fonction du critère $J^\circ(u^\circ) = x_2(t_f) = 1,9812$.

L'étude générale de l'exemple académique par le principe du maximum, nous permet de confirmer tous les résultats obtenus dans le chapitre 3 par rapport à la nouvelle méthode directe.

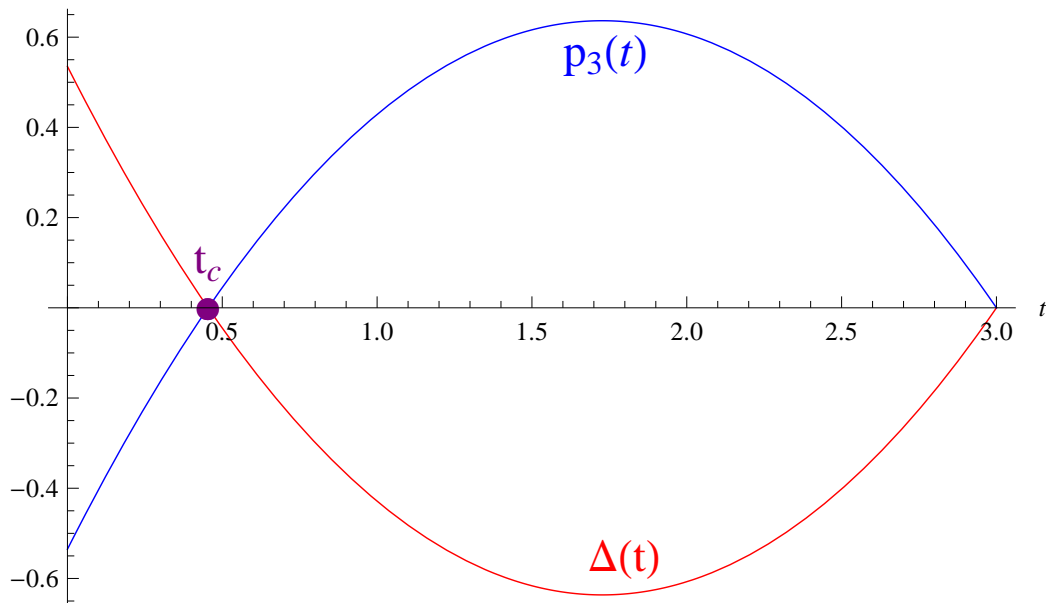


FIGURE 3.11 – Représentation graphique de $p_3(t)$ et de $\Delta(t)$.

3.8.2 Nouvelle version de la *MA* et méthode de discrétisation totale

Le but de cette partie est de comparer les deux méthodes directes qui sont basées sur la discrétisation totale de l'intervalle de temps. La méthode de discrétisation totale qui utilise la méthode d'Euler pour transformer directement un problème du contrôle optimal à un problème de la programmation non linéaire. Ce problème résultant sera résolu par la méthode de Sequential Quadratic Programming (SQP) [42].

La nouvelle méthode qui utilise la formule de Cauchy (2.6) pour transformer le problème initial au problème (2.8). Ensuite, elle utilise le principe de discrétisation pour ramener le problème (2.8) au problème de la programmation linéaire et enfin on résout ce problème par la méthode adaptée de PPL.

Conformément aux simulations faites dans la section (3.6), on remarque que la méthode de discrétisation totale donne des solutions non-opimales pour un nombre de discrétisation inférieure à 300, i.e, $N < 300$, car les trajectoires qui correspondent représentent deux temps de commutations et de plus, elles admettent un arc singulier. Contrairement à la nouvelle méthode qui donne un seul temps de commutation pour une petite valeur du nombre de discrétisation, par exemple pour $N = 4$, le temps de commutation est égal à : $t_c = 0,75$.

La figure (3.12) illustre les résultats obtenus par les deux méthodes pour $300 \leq N \leq 1000$, avec **NM**, **MDT** et **Tco** désignent respectivement : Nouvelle Méthode, Méthode de Discrétisation Totale et Temps de commutation optimal, i.e. $t_c = 0,454178315170256$. On observe que chaque courbe de **NM** et de **MDT** peut être découpé en trois morceaux différents.

Le graphe **NM** est représenté par une courbe monotone par morceaux. Tout d'abord, il décroît sur l'intervalle $N \in [300; 700]$ jusqu'à atteindre presque la valeur optimale. Ensuite, il croît sur l'intervalle $N \in]700; 800]$. Enfin, il décroît sur l'intervalle $N \in]800; 1000]$ jusqu'à ce qu'il soit proche de la valeur optimale.

Contrairement à la courbe **NM**, le graphe **MDT** est représenté par une courbe croissante avec trois périodes. Tout d'abord, il croît rapidement sur l'intervalle $N \in [300; 500]$. Ensuite, il croît lentement sur l'intervalle $N \in]500; 900]$. Enfin, il croît rapidement sur l'intervalle $N \in]900; 1000]$.

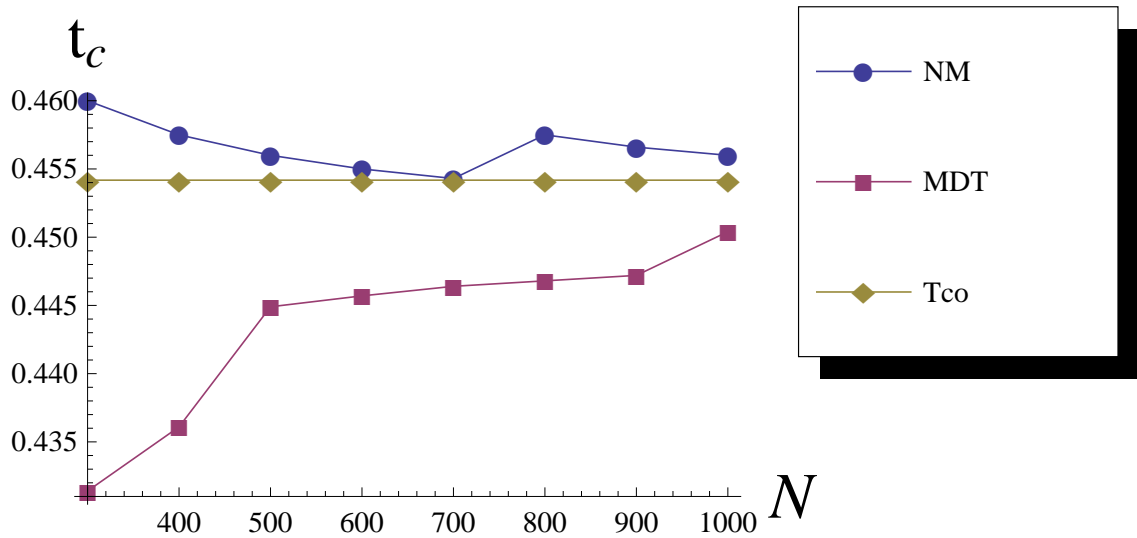
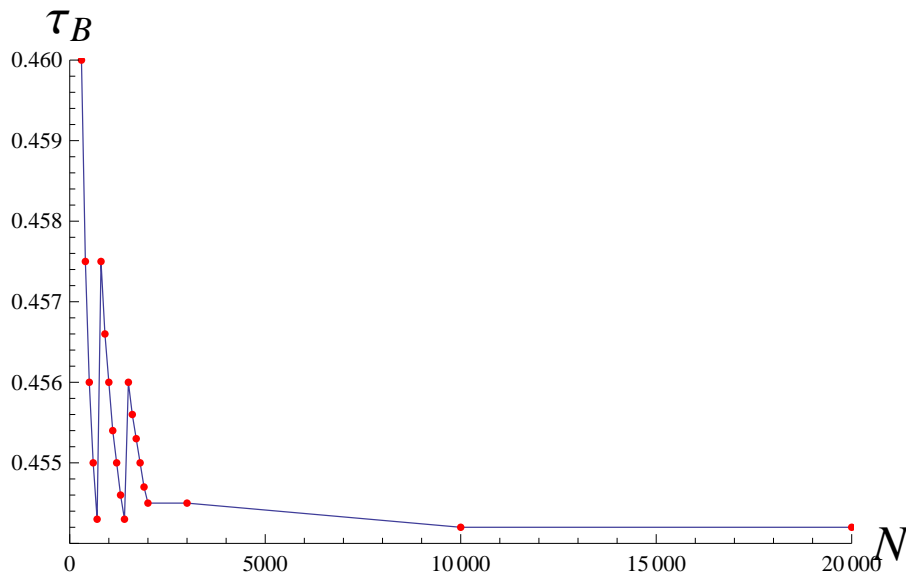


FIGURE 3.12 – Comparaison numérique entre la NM et la MDT

On conclut que la précision de la solution est proportionnelle à la valeur N . On remarque que la courbe qui est donnée par la méthode de discrétisation totale (MDT) se rapproche d'une manière progressive de la solution optimale et la courbe tracée par la nouvelle méthode (NM) se rapproche d'une manière aléatoire de la solution optimale comme le montre la figure (3.13) jusqu'à $N = 2000$ et à partir de cette valeur, elle décroît vers la solution optimale.

FIGURE 3.13 – Représentation de la NM du τ_B en fonction N .

3.9 Conclusion

Le tableau (3.2) présente les temps d'exécution de ces deux méthodes, on remarque que la méthode de discrétisation totale plus coûteuse en temps par rapport à la nouvelle méthode.

Le temps écoulé par la **NM** est négligeable devant celle de la **MDT** et de plus ce temps fournis par la **NM** représente le temps globale, i.e. la durée des trois procédures de la méthode.

N	Temps d'exécution de la NM	Temps d'exécution de la MDT
300	5,2543	318,874
400	6,7415	399,7060
500	8,4516	1298,36
600	10,6460	2504,10
700	11,2198	3838,05
800	16,7850	5012,34
900	17,9143	7990,00
1000	19,1502	23761,7

TABLE 3.2 – Temps d'exécution de la NM et de la MDT en fonction de N .

Remarque 3.2 *On remarque que le temps d'exécution de la méthode de tir est supérieur à celle de la nouvelle méthode pour $N = 4$ et $N = 10$. Ainsi, les deux méthodes possèdent un point commun qui est l'initialisation arbitraire de la condition initiale.*

3.9 Conclusion

La solution optimale de cet exemple académique est donnée par :

- un contrôle de type bang-bang, i.e. $u(t) = -1$ puis $u(t) = 1$ si $t_f > T_{min}$.
- un contrôle de type bang, i.e. $u(t) = 1$ si $t_f = T_{min}$.
- le problème n'admet pas de solution si $t_f < T_{min}$.

Conclusion et Perspectives

Conclusion

Ce travail de thèse a permis d'introduire et d'appliquer une nouvelle méthode directe de résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire et à un coût terminal linéaire. Ainsi, il a permis de fusionner la méthode de point intérieur qui appartient à la classe des méthodes de programmation linéaire avec la méthode de Newton qui appartient à la classe des méthodes de programmation non linéaire.

Dans ce manuscrit, on montre que ce type de problème n'admet pas d'arc singulier. Par conséquent, la solution optimale est donnée par un contrôle bang-bang. Ainsi, ce problème admet au moins m commutations, où m représente le nombre des états finaux fixés et de plus, il admet au plus $n - 1$ commutations sur certaines conditions, où n représente la dimension du vecteur d'état. Ce qui implique que le nombre de commutation est borné entre m et $n - 1$. Nous avons vu que ces types des méthodes directes sont développés à partir du principe du maximum de Pontryagin, contrairement, à la méthode directe de la discrétisation totale.

L'implémentation de la nouvelle méthode, nous a permis de réaliser des simulations qui montrent que la précision de la solution dépend du nombre de subdivisions de l'intervalle de temps. L'intérêt de celle-ci est une méthode directe qui donne toujours une solution approchée (suivant les vœux de l'utilisateur) ou une solution optimale comparativement au principe du maximum qui est une méthode indirecte.

Perspectives

De nombreuses pistes sont envisageables pour poursuivre ce travail. Dans la suite de ce sujet, les deux points prioritaires à aborder sont :

La première piste est d'implémenter la méthode Adaptée décrite dans la (2.4) afin de confirmer les résultats de la conclusion du chapitre 2

La deuxième piste est mise en œuvre la méthode du Support afin de faire des comparaisons numériques avec la nouvelle méthode. Cette implémentation, nous permet de voir si la discrétisation totale est meilleure que la discrétisation partielle de l'intervalle

ou bien le contraire.

Ce manuscrit porté sur l'introduction d'une nouvelle méthode directe pour un système et une fonction coût linéaire. Le travail de cette thèse peut être appliqué pour les problèmes au coût quadratique, au coût min-max, au problème multicritère et ainsi pour le problème en temps minimal.

La procédure finale joue un rôle décisif dans la résolution du problème (2.1)-(2.5) par les trois méthodes directes (Adaptée, Support et Nouvelle méthode). Cette procédure cherche à vérifier la contrainte $Hx(t_f) = g$, puisque nous avons transformé le problème initial au problème (2.8), en utilisant la formule de Cauchy donnée par l'équation (2.6). Dans ce cadre, il est très intéressant de construire une procédure finale pour la méthode de discrétisation totale, afin de trouver la solution optimale du problème de départ à partir de la solution approchée.

Dans ce manuscrit, nous avons traité un exemple académique, mais il est très intéressant d'aborder un exemple concret, i.e. un problème pratique.

Annexe A

Résolution d'un PPL à variable bornée par la méthode adaptée

A.1 Position du problème

Considérons le problème classique de la programmation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } J_d(x) = c'x, \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Sous les contraintes : } Qx = b, \quad (\text{A.2})$$

$$d_1 \leq x \leq d_2, \quad (\text{A.3})$$

où

- $J(u)$ est le critère de qualité, ou bien le coût,
- x, c, d_1, d_2 sont des n -vecteurs réels,
- b est un m -vecteur réel,
- $Q = Q[I, J]$ est une $m \times n$ -matrice,
- $I = \{1, \dots, m\}$: l'ensemble des indices des lignes de la matrice Q ,
- $J = \{1, \dots, n\}$: l'ensemble des indices des colonnes de la matrice Q , avec le $\text{rang}(Q) = m \leq n$,
- c' est le transposé du vecteur c .

Notons par M la région réalisable(admissible) :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx = b, d_1 \leq x \leq d_2\}.$$

Remarque A.1 Lorsque, il s'agit d'un problème de programmation linéaire avec des contraintes inégalités $Qx \neq b$. Tout d'abord, il faut le transformer au problème avec des contraintes égalités, il suffit de rajouter des variables d'écart.

La plus simple manière de traiter ce problème consiste à introduire des variables d'écart x_1 et x_2 , on obtient ainsi les contraintes $x + x_1 = d_2$ et $x - x_2 = d_1$ et le résoudre

par la méthode du simplexe (Méthode deux phases ou M-Méthode)[10, 43, 47]. Dans ce cas le nombre de contraintes du problème de programmation linéaire à variable bornées passe de m à $m + 2n$, et le nombre de variables de n à $3n$, il est clair que la taille du problème (complexité) augmente considérablement si les contraintes simples sont transformées en introduisant des variables d'écart.

Une méthode adaptée du simplexe pour résolution d'un problème de programmation linéaire à variables bornées, sans introduire de variables d'écart.

Définition A.1

1. Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les contraintes (A.2) et (A.3) est appelé solution (plan) réalisable du problème (A.1)-(A.3).

2. Un plan x^0 est optimal si :

$$c'x^0 = \max_x c'x.$$

3. Soit $\varepsilon \geq 0$ donné, un plan x^ε (solution approchée) est ε -optimal si :

$$c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Définition A.2 L'ensemble des m indices $J_B \subset J$, $|J_B| = m$ est dit support (appui) du problème (A.1)-(A.3) et $Q_B = Q(I, J_B)$ matrice de support (matrice d'appui) si $\det(Q_B) \neq 0$.

Delà en choisissant un support J_B et tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme

$$x(J) = (x(J_B), x(J_H)), \quad J_H = J \setminus J_B,$$

où $x(J_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support,

$x(J_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support.

De la même manière, la matrice Q peut être décomposée de la manière suivante :

$$Q(I, J) = (Q(I, J_B), Q(I, J_H)).$$

En utilisant cette dernière décomposition, le système $Qx = b$ prend la forme :

$$Qx = (Q(I, J_B), Q(I, J_H)) \cdot (x(J_B), x(J_H)),$$

$$Qx = Q(I, J_B)x(J_B) + Q(I, J_H)x(J_H).$$

Comme Q_B est inversible, donc on peut calculer les composantes $x_B = x(J_B)$ en fonction de $x_H = x(J_H)$:

$$x_B = Q_B^{-1}(b - Q_H x_H),$$

où $Q_H = Q(I, J_H)$.

Définition A.3 La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B , est appelée support-plan (plan-appui) du problème (A.1)-(A.3).

Définition A.4 Un support-plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad j \in J_B.$$

A.2 Critère d'optimalité et de Suboptimalité

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan non dégénéré de départ. Construisant les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} y' &= y'(I) = c'_B Q_B^{-1}, \\ \Delta' &= y'Q - c', \end{aligned}$$

où y' et Δ' sont appelés respectivement vecteurs des potentiels et des estimations.

Par construction, les composantes de support du vecteur Δ sont nulles :

$$\Delta_B = \Delta(J_B) = 0.$$

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta J_d(x) &= J_d(\bar{x}) - J_d(x), \\ &= c' \bar{x} - c' x, \\ &= c' \Delta x \\ &= c'(J_B) \Delta x(J_B) + c'(J_H) \Delta x(J_H), \\ &= c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H. \end{aligned}$$

Comme $Qx = b$ et $Q\bar{x} = b$, alors $Q\Delta x = 0$, ce qui implique $Q_B \Delta x_B + Q_H \Delta x_H = 0$ et finalement, on obtient :

$$\Delta x_B = -Q_B^{-1} Q_H \Delta x_H.$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta J_d(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta J_d(x) &= (-c'_B Q_B^{-1} Q_H + c'_H) \Delta x_H J_d(x), \\ &= -\Delta'_H \Delta x_H. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Delta J_d(x) = - \sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j. \tag{A.4}$$

Comme \bar{x} est un plan admissible, alors Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \quad j \in J. \tag{A.5}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (A.4) sous les contraintes (A.5) :

$$\Delta J_d(x) = - \sum_{j \in J_H} \Delta_j \Delta x_j \longrightarrow \max,$$

A.3 Détermination d'un support-plan de départ

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \quad j \in J_H,$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j, & \text{si } \Delta_j > 0, \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j, & \text{si } \Delta_j < 0, \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, & \text{si } \Delta_j = 0, \quad j \in J_H, \end{cases}$$

est égal à :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}), \quad (\text{A.6})$$

où $J_H^+ = \{j \in J_H, \Delta_j \geq 0\}$ et $J_H^- = \{j \in J_H, \Delta_j < 0\}$.

La quantité $\beta(x, J_B)$ est appelée valeur de suboptimalité.

La valeur de suboptimalité est finie si $d_{1j} > -\infty$ pour $\Delta_j > 0$ et $d_{2j} > \infty$ pour $\Delta_j < 0$. Nous considérons les problèmes quand $\beta(x, J_B) < \infty$.

L'inégalité suivante est toujours vérifiée : $\Delta J_d(x) = J_d(\bar{x}) - J_d(x) \leq \beta(x, J_B), \forall \bar{x} \in M$ et pour $\bar{x} = x^0$, on obtient :

$$J_d(x^0) - J_d(x) \leq \beta(x, J_B).$$

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

Théorème A.1 [14] (*Critère d'optimalité*)

Les relations :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j}, & \text{si } \Delta_j > 0, \\ x_j = d_{2j}, & \text{si } \Delta_j < 0, \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, & \text{si } \Delta_j = 0, \quad j \in J_H, \end{cases}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support-plan $\{x, J_B\}$.

Théorème A.2 [14] (*Critère de Suboptimalité ou Critère ε -optimalité*)

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Pour l' ε -optimalité du plan x , il est nécessaire et suffisant de trouver un tel support J_B , pour laquelle la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon.$$

A.3 Détermination d'un support-plan de départ

Pour trouver un support-plan admissible, on choisit tout d'abord un plan x qui vérifie la condition $d_1 \leq x \leq d_2$, et on calcule la quantité Qx .

1. Si $Qx = b$, alors le plan x est admissible.
2. Si $Qx \neq b$, alors on ajoute des variables d'écart.

Ensuite, on choisit un support J_B de telle sorte que $\det(Q_B) \neq 0$.

A.4 Méthode de résolution

La méthode adaptée a été développée par R.Gabassov et F.M.Kirrilov durant les années 70-80 [12, 14]. Cette méthode est une méthode itérative, à chaque itération de l'algorithme le transfert $\{x, J_B\} \rightsquigarrow \{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est exécuté d'un support-plan à un autre tel que :

$$\beta(x, J_B) \leq \beta(\bar{x}, \bar{J}_B).$$

En d'autres termes une itération de la méthode adaptée est basée sur la décroissance de la valeur du suboptimalité. Cette itération est constituée de deux procédures :

1. La procédure de la transformation $x \rightsquigarrow \bar{x}$ qui diminue l'écart de non optimalité du plan.
2. La procédure de la transformation $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$ qui diminue l'écart de non optimalité du support.

A.4.1 Changement de plan

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan non dégénéré et $\varepsilon \geq 0$ donné, tel que :

$$\beta(x, J_B) > \varepsilon.$$

Le nouveau plan \bar{x} sera construit de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où l est la direction admissible, θ (un réel positif) est le pas admissible maximal le long de la direction l , tel que : $J(\bar{x}) \geq J(x)$.

Le vecteur de direction $l = (l(J_B), l(J_H))$ est construit comme suit :
Sur J_H , on pose $\theta = 1$ et

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, & \text{si } \Delta_j > 0, \\ d_{2j} - x_j, & \text{si } \Delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, j \in J_H, \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

et $l(J_B) = -Q_B^{-1}Q_H l(J_H)$ pour avoir $Q\bar{x} = b$.

Pour que \bar{x} vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut calculer le pas admissible maximal le long de la direction l qu'est calculé de la manière suivante :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j < 0, \\ \frac{d_{2j} - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j > 0, \\ \infty, & \text{si } l_j = 0, j \in J_B, \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

D'où :

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_j\} \text{ pour } j \in J_B,$$

et le pas maximal sera :

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_0}\}.$$

Delà, le nouveau plan sera $\bar{x} = x + \theta^0 l$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(\bar{x}_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(x_j + \theta^0 \cdot l_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(x_j + \theta^0 \cdot l_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(x_j - d_{2j}) + \theta^0 \left(\sum_{j \in J_H^+} \Delta_j l_j + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j l_j \right). \end{aligned}$$

D'après les équations (A.6) et (A.7) , on obtient :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B), \\ &= (1 - \theta^0) \beta(x, J_B). \end{aligned}$$

De cette dernière expression, on conclut :

1. Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$.

A.4.2 Changement du support

Le changement du support de J_B vers \bar{J}_B consiste à changer le vecteur de potentiel y vers \bar{y} , ce qui implique de changer le vecteur d'estimation Δ à $\bar{\Delta}$ de telle sorte que :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B).$$

Pour cela posons :

$$\bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma^0 \tau(J), \tag{A.9}$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma^0 \tau(I), \tag{A.10}$$

où τ est la direction de diminution de la fonction duale, σ^0 le pas maximal le long de cette direction.

Calcul de τ et σ^0 :

En utilisant la définition de Δ et y , on obtient :

$$\bar{\Delta} = \bar{y}Q - c' = (y' + \sigma^0 \tau'(I))Q - c' = \Delta' + \sigma^0 \tau'(I)Q.$$

Delà :

$\tau'(J) = \tau'(I)Q(I, J)$, ce qui implique : $\tau'(J_B) = \tau'(I)Q(I, J_B)$, donc : $\tau'(I) = \tau'(J_B)Q_B^{-1}$, ce qui donne :

$$\tau'(J_H) = \tau'(J_B)Q_B^{-1}Q(I, J_H).$$

La procédure de changement de plan consiste à chercher l'indice $j_0 \in J_B$ qui va sortir de la base, par contre la procédure de changement du support consiste à chercher l'indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de j_0 .

Pour cela posons :

$$\tau_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{j_0} = d_{1j_0}, \\ -1, & \text{si } x_{j_0} = d_{2j_0}, \\ 0, & \text{si } j \in J_B \setminus j_0, \end{cases}$$

Le pas dual est donné par :

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_H} \{\sigma_j\},$$

où

$$\sigma_j = \begin{cases} -\frac{\Delta_j}{\tau_j}, & \text{si } \Delta_j \tau_j < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, \tau_j > 0, \text{ ou } \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, \tau_j < 0, \\ \infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

◇ Le calcul de σ_0 satisfait $\bar{\Delta}_j \Delta_j \geq 0, \forall j \in J$,

◇ $\bar{\Delta}(j_1) = 0$.

Cherchons j_1 tel que $\sigma_{j_1} = \sigma^0$.

Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$.

On peut facilement calculer la quantité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ qui est égale à :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{\Delta}_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{\Delta}_j (\bar{x}_j - d_{2j}),$$

où $\bar{J}_H^+ = \{j \in \bar{J}_H, \bar{\Delta}_j \geq 0\}$, $\bar{J}_H^- = \{j \in \bar{J}_H, \bar{\Delta}_j < 0\}$.

Utilisant l'équation (A.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, \bar{J}_B) &= \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{2j}) + \sigma_0 \left(\sum_{j \in \bar{J}_H^+} \tau_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \tau_j (\bar{x}_j - d_{2j}) \right), \\ &= (1 - \theta^0) \beta(x, J_B) + \sigma_0 \left(\sum_{j \in \bar{J}_H^+} \tau_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \tau_j (\bar{x}_j - d_{2j}) \right). \end{aligned}$$

Nous avons : $Q\bar{x} = Qx + \theta^0 Ql$, ce qui implique : $Ql = 0$.

Par conséquent : $\tau l = 0$, puisque $\tau'(J) = \tau'(I)Q$, de plus par construction toutes les composantes de $\tau'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0 .

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j(\bar{x}_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j(x_j + \theta^0 l_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j(x_j + \theta^0 l_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j(x_j - d_{2j}) + \theta^0 \left(\sum_{j \in J_H^+} \tau_j \cdot l_j + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j \cdot l_j \right). \end{aligned}$$

D'après l'équation (A.7), on déduit :

$$\alpha_0 = -(1 - \theta^0) \sum_{j \in J} \tau_j \cdot l_j = -(1 - \theta^0) \tau_{j_0} \cdot l_{j_0}.$$

Donc :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B) - \sigma_0 |\alpha_0|.$$

De cette dernière expression, on conclut :

1. Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement de plan $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{\bar{x}}$.

A.5 Itération de l'algorithme

I Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ.

II Calculer :

1. $y' = c'(J_B)Q_B^{-1}$.
2. $\Delta' = y'Q - c$.
3. $\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_B^+} \Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_B^-} \Delta_j(x_j - d_{2j})$.
 - ▷ Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors $\{x, J_B\}$ est optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{x, J_B\}$ est ε -optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, **Aller à III**.

III Changement de plan $x \rightsquigarrow \bar{x}$

1. Déterminer le vecteur $l(J)$.

2. Calculer le vecteur $\bar{x}(J)$.
3. Calculer la quantité $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε -optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, **Aller à IV**.
- IV** Changement du support $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$
 1. Calculer le vecteur τ .
 2. Calculer $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} \{\sigma_j\}$.
 3. Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$.
 4. Calculer la quantité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \sigma_0|\alpha_0|$.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est ε -optimal, **Stop**.
 - ▷ Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, **Aller à II**.

A.6 Couvergence de la méthode adaptée

Une méthode d'optimisation est dite finie si elle va résoudre un problème en un nombre fini d'itération. Chaque itération de la méthode adaptée décrite dans les sections précédentes consiste à un nombre fini d'opérations.

Théorème A.3 [14] *L'algorithme de la méthode adaptée du problème (A.1)-(A.3) est dit fini, si à chaque itération le support-plan résultant est non dégénéré.*

A.7 Exemple numérique

Considérons le problème de la programmation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } J(x) = \frac{63}{32}x_1 + \frac{45}{32}x_2 + \frac{27}{32}x_3 + \frac{9}{32}x_4, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Sous les contraintes : } \frac{333}{128}x_1 + \frac{171}{128}x_2 + \frac{63}{128}x_3 + \frac{9}{128}x_4 = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$-1 \leq x_j \leq 1, j = 1, 4, \quad (\text{A.13})$$

où $Q = [\frac{333}{128}, \frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}]$, $c = [-\frac{63}{32}, -\frac{45}{32}x_2, -\frac{27}{32}, -\frac{9}{32}]$, $b = 1$, $d_1 = -1$ et $d_2 = 1$.

Détermination d'un support-plan de départ

Choisissons le plan initial non dégénéré qui vérifie la condition $d_1 < x < d_2$. $x_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et le support initiale $J_B = 2$.

A.7 Exemple numérique

Appliquons l'algorithme de la méthode adaptée décrite dans la section (A.5) et en utilisant le code décrit dans l'annexe B.

Calculons la quantité $Qx = \frac{59}{32} \neq 1$, alors la solution initiale n'est pas admissible. On ajoute des variables d'écart.

Ce qui implique :

1. L'ensemble des indices du support $J_B = 2$.
2. L'ensemble des indices du hors-support $J_H = [1, 3, 4, 5]$.
3. La matrice du support est $Q_B = \frac{171}{128}$.
4. La matrice du hors-support est $Q_H = [\frac{333}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}, 1]$.
5. Le coût du support $C_B = \frac{45}{32}$.
6. Le coût du hors-support $C_H = [\frac{63}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}, -1000]$.
7. Le déterminant de la matrice du support est $\det(Q_B) = \frac{171}{128}$.
8. L'inverse de matrice du support est $Q_B^{-1} = \frac{128}{171}$.

Calculons :

1. Le vecteur des potentiels $y' = \frac{20}{19}$.
2. Le vecteur des estimations $\Delta = [\frac{117}{152}, -\frac{99}{304}, -\frac{63}{304}, \frac{19020}{19}]$.
3. Le plan $x = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{59}{32}]$.
4. La valeur de suboptimalité est $\beta(x, J_B) = \frac{561387}{304}$.

Test : $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement de plan.

Changement de plan $x \rightsquigarrow \bar{x}$

Déterminer le vecteur $l(J)$

1. Le vecteur de direction $l(J_H) = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{59}{32}]$.
2. Le vecteur de direction $l(J_B) = \frac{607}{342}$.

Calculons

1. Le pas admissible maximal $\theta^\circ : \theta^\circ = \min(1, \frac{171}{607}) = \frac{171}{607}$. Ce qui implique : $J_\circ = 2$.
2. Le nouveau plan $\bar{x} = [-\frac{389}{607}, 1, -\frac{47}{607}, \frac{389}{607}, \frac{6431}{4856}]$.
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan $B(\bar{x}, J_B) = \frac{61191183}{46132}$.

Test : $B(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support.

Changement du support $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$

Calculons

1. Le vecteur $\tau : \tau(J_B) = -1$ et $\tau(J_H) = [-\frac{37}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{1}{19}, -\frac{128}{171}]$.

2. Le pas dual $\sigma : \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} (0.3952, 1337.3437, \infty, \infty)$. Alors $J_1 = 1$.

Par conséquent :

1. L'ensemble des indices du nouveau support $\bar{J}_B = 1$.
2. L'ensemble des indices du nouveau hors-support $\bar{J}_H = [2, 3, 4, 5]$.
3. La matrice du nouveau support est $Q_{\bar{B}} = \frac{333}{128}$.
4. La matrice du nouveau hors-support est $Q_{\bar{H}} = [\frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}, 1]$.
5. Le coût du nouveau support $C_{\bar{B}} = \frac{63}{32}$.
6. Le coût du nouveau hors-support $C_{\bar{H}} = [\frac{45}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}, -1000]$.
7. Le déterminant de la matrice du nouveau support est $\det(Q_{\bar{B}}) = \frac{333}{128}$.
8. L'inverse de matrice du nouveau support est $Q_{\bar{B}}^{-1} = \frac{128}{333}$.
9. Le nouveau vecteur de potentiels $\bar{y}' = \frac{28}{37}$.
10. Le nouveau vecteur d'estimations $\bar{\Delta} = [-\frac{117}{296}, -\frac{279}{592}, -\frac{135}{592}, \frac{37028}{37}]$.
11. Le nouveau plan $\tilde{x} = [-\frac{389}{607}, 1, -\frac{47}{607}, \frac{389}{607}, \frac{6431}{4856}]$.
12. La valeur de suboptimalité est $\beta(\tilde{x}, \bar{J}_B) = \frac{29779127}{22459}$.

Test : $\beta(\tilde{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement de plan.

Changement de plan $\tilde{x} \rightsquigarrow \tilde{x}$

Déterminer le vecteur $l(J)$

1. Le nouveau vecteur de direction $l(\bar{J}_H) = [0, \frac{654}{607}, \frac{218}{607}, -\frac{6431}{4856}]$.
2. Le vecteur nouveau de direction $l(\bar{J}_B) = \frac{59732}{202131}$.

Calculons :

1. Le nouveau pas admissible maximal $\bar{\theta}^\circ : \theta^\circ = \min(1, \frac{82917}{14933}) = 1$, ce qui implique $J_1 = 2$.
2. Le nouveau plan $\tilde{x} = [-\frac{115}{333}, 1, 1, 1, 0]$.
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan $B(\tilde{x}, \bar{J}_B) = 0$.

Test : $B(\tilde{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors le support-plan $\{\tilde{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal :

1. La solution optimale est $x^\circ = [-0.3453, 1, 1, 1]$ et $J_B^\circ = 1$.
2. La valeur optimale de la fonction du critère est $J(x) = 1.8514$.
3. Le nombre des itérations de l'algorithme est $nb = 2$.
4. Le temps d'exécution de l'algorithme $t = 0.0245$ seconds.

Résolution par la commande *linprog* sous Matlab :

$$[x, J_d, exit\ flag, output, lambda] = \text{linprog}(c, [], [], Q, b, d_1, d_2)$$

Optimization terminated.

Elapsed time is 0.597276 seconds.

A.7 Exemple numérique

$x = [-0.3453; 1.0000; 1.0000; 1.0000]$

$J_d = 1.8514$

$\text{exitflag} = 1$

$$\text{output} = \begin{cases} \text{iterations} : 5 \\ \text{algorithm} : \text{'large-scale : interior point'} \\ \text{cgiterations} : 0 \\ \text{message} : \text{'Optimization terminated.'} \end{cases} \quad \text{lambda} = \begin{cases} \text{ineqlin} : [0 \times 1 \text{ double}] \\ \text{eqlin} : 0.7568 \\ \text{upper} : [4 \times 1 \text{ double}] \\ \text{lower} : [4 \times 1 \text{ double}] \end{cases}$$

La méthode permet de donner la solution optimale au bout de deux itérations et en temps réel. Par contre, la méthode qui consiste à introduire directement des variables d'écart (la commande *linprog* sous Matlab), donne une solution au bout de cinq itérations et en temps plus grand.

B.1 Code du problème en temps minimal

```
% Si EXITFLAG=1, alors la methode converge, sinon la methode diverge
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Resolution du systeme, en utilisant la fonction ode45.m
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
%
[t,z] = ode45(@systeme,[0;ValP0(4)],[x0;ValP0(1);ValP0(2);ValP0(3)],..
    options);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Representation graphiques
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
uo=sign(z(:,6));
%
subplot(231); plot(t,z(:,1),'m'); axis square;
title('Trajectoire x1(t)'); xlabel('t'); ylabel('x1(t)');
%
subplot(232); plot(t,z(:,2),'m'); axis square;
title('Trajectoire x2(t)'); xlabel('t'); ylabel('x2(t)');
%
subplot(233); plot(t,z(:,3),'m'); axis square;
title('Trajectoire x3(t)'); xlabel('t'); ylabel('x3(t)');
%
subplot(234); plot(z(:,1),z(:,2),'m'); axis square;
title('Diagramme des phases'); xlabel('x1(t)'); ylabel('x2(t)');
%
subplot(235); plot(t,z(:,6),'MarkerSize',10); axis square;
title('Vecteur Adjoint p3(t)'); xlabel('t'); ylabel('p3(t)');
%
subplot(236); plot(t,uo,'r','LineWidth',2); axis square ;
title('Controle'); xlabel('t'); ylabel('u(t)');
%
Time=toc
fprintf('Temps d\'execution de l\'algorithme =g/s', Time)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%-----
function Xzero=Fonction(X)
%
% Definition de la fonction dont on cherche un zero
%
global x0;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode113(@systeme,[0;X(4)],[x0;X(1);X(2);X(3)],options) ;
```

B.2 Code de la méthode de tir

```

%
HamEnd=z(end,4).*z(end,2)+z(end,5).*z(end,3)+z(end,6).*sign(z(end,6))-1;
%
Xzero = [ z(end,1)-1 % Condition finale : x1(tf)=1
          z(end,5)-1 % Condition de transversalite : p2(tf)=1
          z(end,6) % Condition de transversalite : p3(tf)=0
          HamEnd % tf libre => Hamiltonien(tf)=0
        ] ;
%
function zdot=systeme(t,z)
%
% Representation du systeme des etats et des vecteurs adjoints
%
u=sign(z(6)) ;
zdot = [ z(2)
          z(3)
          u
          0
          -z(4)
          -z(5) ] ; % systeme extremal
%

```

B.2 Code de la méthode de tir

```

function Tir_Method.m
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Methode de tir simple, en utilisant fsolve.m, pour resoudre le systeme :
%
%     x1dot=x2,
%     x2dot=x3,
%     x3dot=u,
%     |u|<=1,
%     tf : temps final fixe,
% On veut aller de (0,0,0) a (0,libre, libre) en maximisant x2(tf).
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all ; clf ; clc;
tic; % Initialiser le temps d'execution
%
%*****
global x0 tf ;
%
x0=[0;0;0] ; % Condition initiale des variables d'etats
Ip0=[-1;1;1]; % Condition initiale des vecteurs d'adjoints
tf=3 ; % Temps finle fixe

```

B.2 Code de la méthode de tir

```
%*****
%
% Calculons de P0 avec la fonction fsolve.m
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
options=optimset('Display','iter','LargeScale','off');
%
[P0,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@Fonction,Ip0,options)
% Si EXITFLAG=1, alors la methode converge, sinon la methode diverge
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Resolution du systeme en utilisant la fonction ode45.m
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
%
[t,z] = ode45(@systeme,[0;tf],[x0;P0(1);P0(2);P0(3)],options);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% Representation graphiques
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
subplot(231); plot(t,z(:,1),'m'); axis square;
title('Trajectoire x1(t)'); xlabel('t'); ylabel('x1(t)');
%
subplot(232); plot(t,z(:,2),'m'); axis square;
title('Trajectoire x2(t)'); xlabel('t'); ylabel('x2(t)');
%
subplot(233); plot(t,z(:,3),'m'); axis square;
title('Trajectoire x3(t)'); xlabel('t'); ylabel('x3(t)');
%
subplot(234); plot(z(:,1),z(:,2),'m'); axis square;
title('Diagramme des phases'); xlabel('x1(t)'); ylabel('x2(t)');
%
subplot(235); plot(t,sign(z(:,6)),'r'); axis square;
title('Controle'); xlabel('t'); ylabel('u(t)');
%
subplot(236); plot(t,z(:,6)); axis square;
title('Vecteur Adjoint p3(t)'); xlabel('t'); ylabel('p3(t)');
%
Time=toc
fprintf('Temps d\'execution de l\'algorithme =g/s', Time)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%
function Xzero=Fonction(X)
%
```

B.3 Code de la méthode de discretisation totale

```
% Definition de la fonction dont on cherche un zero
%
global x0 tf;
options = odeset( 'AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode113(@systeme,[0;tf],[x0;X(1);X(2);X(3)],options) ;
%
Xzero = [ z(end,1)-1 % Condition finale : x1(tf)=1
          z(end,5)-1 % Condition de transversalite : p2(tf)=1
          z(end,6) % Condition de transversalite : p3(tf)=0
        ];
%
function zdot=systeme(t,z)
%
% Representation du systeme des etats et des vecteurs adjoints
%
u=sign(z(6)) ;
zdot = [ z(2)
         z(3)
         u
         0
        -z(4)
        -z(5) ] ; % Systeme extremal
%
```

B.3 Code de la méthode de discretisation totale

```
%
function Method_Discretization.m
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Methode de discretisation totale en utilisant fmincon.m pour resoudre
% le probleme suivant :
% Minimiser  $-x_2(tf)$ 
% Sous les contraintes
%  $x_1dot=x_2$ ,  $x_1(0)=0$ ,  $x_1(tf)=1$ ,
%  $x_2dot=x_3$ ,  $x_2(0)=0$ ,  $x_2(tf)$ : libre ,
%  $x_3dot=u$ ,  $x_3(0)=0$ ,  $x_3(tf)$ : libre ,
%  $|u| \leq 1$ ,
%  $tf$  : fixe
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all; close all; clc;
%
tic; % Initialiser le temps d'execution
%
```

B.3 Code de la méthode de discretisation totale

```

%*****
global tf Dx N;
%
Dx=1;           % Condition finale x1(tf)=Dx
tf=3;          % Temps final fixe
N=100;         % Nombre de pas de discretisation
%
u0 = ones(N,1)/2; % Initialisation du controle;
                % Point de depart pour fmincon
% Contrainte sur le controle
lb=-ones(N,1); % Borne inferieur du controle u
ub=ones(N,1);  % Borne superieur du controle u
%*****
options=optimset('Display','iter','MaxFunEvals',100,'TolCon',1e-5,'..
    FunValCheck','off');
%
[u, Fval, Exitflag]=fmincon(@Cost, u0, [], [], [], [], lb, ub, @conditions..
    , options)
% Si Exitflag=1, alors la methode converge, sinon la methode diverge
%*****
%
% Appel a la fonction Euler_Method
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
[x1, x2, x3]=Euler_Method(u);
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
%#####
%
% Calculons les trajectoires optimales
%
subplot(211); plot(linspace(0,tf,N),u(1:N),'r'); title('N=10');
grid on; xlabel('t'); ylabel('u(t)');
%
subplot(212);plot(x1(1:N),x2(1:N));title('Diagramme des phases (x1(t),x2(t..
    ))');
grid on;xlabel('x1(t)');ylabel('x2(t)');
%
Time=toc
fprintf('Temps d\'execution de l\'algorithme =g/s', Time)
%#####
%
%=====
function [c, ceq] = conditions(u)
% Conditions terminales
global tf Dx N;
%

```

B.3 Code de la méthode de discretisation totale

```

c=0; % Inegalites non lineaires.
%
% Appel a la fonction Euler_Method
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
[x1,x2,x3]=Euler_Method(u);
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% Valeur finale des variables d'etats
x1f=x1(N);
x2f=x2(N);
x3f=x3(N);
%
% Calculons Les egalites non lineaires.
% On impose les condition finales : xf=1, yf=libre zf=libre
ceq= [x1f-Dx;x2f-[];x3f-[]];
%=====
function valcost = Cost(u) % fonction objectif a minimiser
global tf N;
%
% Appel a la fonction Euler_Method
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
[x1,x2,x3]=Euler_Method(u);
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% Valeur finale de l'etat x2(tf)
x2f=x2(N);
varx2=x2f;
% Valeur de la fonction cout = - Valeur finale de l'etat x2(tf)
valcost=-varx2;
%=====
function [x1,x2,x3]=Euler_Method(u)
global tf N;
%
% Conditions initiales du systeme
x1=0;
x2=0;
x3=0;
%
% Discretisation du systeme continu
for i=1:N
    x1(i+1)=x1(i) + (tf./N).*(x2(i));
    x2(i+1)=x2(i) + (tf./N).*(x3(i));
    x3(i+1)=x3(i) + (tf./N).*(u(i));
end;
%=====

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%
function New_Method(A,H,b,c,d1,d2,x0,tf,JB,N)
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%  $Pc: J(u(tf))=c'x(tf) \longrightarrow \max$            $Pd: J(u)=c'u \longrightarrow \max$ 
%  $dotx(t)=Ax(t)+B u(t),$           Discretisation
%  $Hx(tf)=g,$            $\Longrightarrow$            $Q u = g,$ 
%  $d1 \leq u(t) \leq d2,$            $\longleftarrow$ 
%  $0 \leq t \leq tf,$           Procedure finale           $d1 \leq u \leq d2,$ 
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%-----
%  $J(u)$  : Critere de qualite.
%  $A[n,n]$  : Matrice qui caracterise le systeme : Matrice d'etat.
%  $B[n,1]$  : Matrice qui caracterise le systeme : Matrice de controle.
%  $c[1,n]$  : Vecteur de poids des variables dans le critere a maximiser.
%  $H[m,n]$  : Matrice des parametres de l'appareil de la production a tf.
%  $g[m,1]$  : Vecteur des signaux sortie de l'appareil de la production a tf.
%  $x[n,1]$  : Vecteur representant l'etat du systeme a l'instant t.
%  $u[1,n]$  : Vecteur de controle constant par morceaux.
% d1 : Borne inferieur du controle.
% d2 : Borne superieur du controle.
% JB : L'ensemble des indices du support.
% tf : Temps final.
%
%-----
%
tic; % Initialiser le temps d'execution
[n,n]=size(A); % Dimension de la matrice A
F0=eye(n,n); % Dimension de la matrice identite F0
[m,n]=size(H); % Dimension de la matrice H
n=size(B); % Dimension du vecteur colonne B
m=size(g); % Dimension du vecteur colonne g
n=size(c); % Dimension du vecteur ligne c
n=size(x0); % Dimension du vecteur colonne x0
r=size(d1); % Dimension du vecteur d1
r=size(d2); % Dimension du vecteur d2
[m,mm]=size(JB); % Dimension du vecteur colonne JB
%%
global mu epsilon; % Variables globales
mu=0.01; % Parametre de la methode duale
epsilon=1e-3; % Parametre de la methode adaptee
%
%-----
%%

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%%%% Test de controlabilite du systeme %%
%%
disp('Test de controlabilite du systeme')
disp('Condition de Kalman : D=rang[B, A*B, ..., A^{n-1}*B]=rand(K)')
K=ctrb(A,B)
D=rank(K)
nK=length(K)
%
if (D==nK)
    disp('Le systeme est controlable')
else
    disp('Le systeme n''est pas controlable')
    return;
end;
%%
%%%% La resolvante du systeme %%
%%
F=[];
t=sym('t'); % Variable symbolique
% Systeme autonome => F(t)=F0 exp(A t)
F=[F expm(A*t)*F0];
FI=inv(F);
Ftf=subs(F,t,tf);
%%
%%%% Calculons p(t) et C(t) %%
%%
p=H*Ftf*FI*B;
C=c*Ftf*FI*B;
%%
%%%% *** Probleme discret *** %%
%%
%%%% Principe de discretisation %%
[tn,Q,Cd,C0,g1]=Principe_Dis(p,C,c,H,g,Ftf,x0,tf,N)
%%
%%%% Initialisation du controle %%
%%
J=1:N;
JH=setdiff(J,JB);
%
for i=1:N
    e=i;
    d11(e)=d1;
    d22(e)=d2
    u(e)=(-1).^i.*(d11(e)+d22(e))/2;
end;
%%

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%
[ jo , u ] = Adaptive_Method ( Q , g1 , d11 , d22 , u , Cd , JB , JH , nm , N )
%%
if ( N+1 ~ = 0 ) & ( u ( N+1 ) == 0 )
    disp ( 'La solution est optimale ' )
    u = u ( 1 : N )
    jb = jo + 1
else
    disp ( 'La solution n ' 'est pas optimale ' )
    return ;
end ;
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%
***      Probleme depart      ***
%%
tb = tn ( jb ) ; % Initialisation du support
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%
%%
$$$$$$$$$$$$      Test : HX ( tf ) ? g      $$$$$$$$$$$$
%%
[ Xf , Lambda , Delta ] = Compute_Xtf ( H , g , FI , Ftf , p , C , b , t , tb , tf , d1 , d2 , x0 )
%%
while ( H * Xf ~ = g )
    if H * Xf == g
        disp ( 'Le controle w ( t ) est optimal ' )
        return ;
    else
        for j = 1 : length ( Lambda )
            if sign ( abs ( Lambda ( j ) ) - mu ) == 1
                disp ( 'Methode de duale ' )
                tb = Dual_Method ( Delta , p , Lambda , tb , tf , d1 , d2 )
                [ Xf , Lambda , Delta ] = Compute_Xtf ( H , g , FI , Ftf , p , C , b , t , tb , tf , d1 , d2 , x0 )
            else if sign ( abs ( Lambda ( j ) ) - mu ) == -1
                disp ( 'Etape finale ' )
                tb = Step_Final ( H , Xf , g , FI , Ftf , p , C , tf , x0 , b , Delta , tb , Lambda , d1 , ..
                    d2 , t )
                time = toc
                return ;
            end ;
        end ;
    end ;
end ;
end ;
%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%=====
function [tn,Q,Cd,C0,g1]=Principe_Dis(p,C,c,H,g,Ftf,x0,tf,N)
%
syms t;
%
h=tf/N
tdis(1)=0
for j=1:N
    tdis(j+1)=tdis(j)+h;
    q(j,:)=int(p,t,tdis(j),tdis(j+1));
    C1(j,:)=int(C,t,tdis(j),tdis(j+1));
end;
tn=tdis;
Q=q;
Cd=C1;
C0=cd*Ftf*x0;
g1=g-H*Ftf*x0;
%=====
function [jo,u]=Adaptive_Method(Q,g1,d11,d22,u,Cd,JB,JH,nm,N)
%
global epsilon;
%
Q=double(Q');
u=double(u');
disp('Test d\'admissibilite : Qu?g')
%
if ((Q*u-g1)==0)
    disp('La solution initiale est admissible Qu=g1')
else
    disp('La solution initiale n\'est pas admissible Qu#g1')
    %
    disp('On ajoute des variables des ecartes')
    %
    M=1000; %
    n=N; %
    ua=u %
    %
    if heaviside(Q*u-g1)==1; % Si Qu>g1
        u=-g1+Q*ua;
    else
        u=g1-Q*ua;
    end;
    %
    for i=1:nm
        e=i;
        cm(e,:)=M;
    end;
end;

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```
%
Cd=[Cd' cm'];
[m,n]=size(Q);
Q=[Q eye(m,m)];
d11=[d11';0];
d22=[d22';M];
n1=n;
m1=m;
[m1,n1]=size(Q);
u=[ua;u];
%
for i=1:n1
    for j=1:n
        if i~=j
            e=i;
            ds(e,1)=e;
        end;
    end;
end;
%
JH=setdiff(ds,JB);
N=n1;
m=m1
%
end;
%
d1=d11;
d2=d22;
%
if (heaviside(u-d1)==0) & (heaviside(u-d2)==1)
    %
    disp('La solution n'est pas admissible d1<u>d2 ou d1>u<d2')
    %
else
    disp('La solution est admissible d1<=u<=d2')
    %
end;
%
disp('La matrice du support AB est')
QB=Q(:,JB);
disp(QB)
Cb=Cd(:,JB);
%
disp('La matrice du hors-support AH est')
QH=Q(:,JH);
disp(QH)
Ch=Cd(:,JH)
```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```
%
if (det(QB)==0)
    %
    disp('La matrice n''est pas inversible')
    return;
    %
else
    QI=inv(QB)
end;
% Calculons le vecteur de potentiel y
y=Cb*QI;
% Calculons le vecteur d'estimation E
E=y'*QH-Ch;
%
% Calculons la valeur de suboptimalite $ Beta $
E1=sign(E);
ub=u(JH)'-d1(JH)';
lb=u(JH)'-d2(JH)';
%
for i=1:length(JH)
%
if E1(i)==1
    BE(i)=E(i)*ub(i);
else if E1(i)==-1
    BE(i)=E(i)*lb(i);
    else
        BE(i)=0;
    end;
end;
end;
%
disp('La valeur de suboptimalite B(u,JB)=')
Beta=sum(BE);
disp(Beta)
%
if Beta==0
    %
    disp('La solution est optimale')
    return;
end;
if Beta==epsilon
    %
    disp('La solution est epsilon-optimale')
    return;
    else
        %
        disp('Passons au changement de plan')
```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%*****
[u, theta0, jo]=Changement_Plan(QI,QH,E1,JH,JB,d1,d2,u,ub,lb)
%*****
%
end;
%
if (1-theta0)*Beta==0
%
disp('La solution est optimale')
return;
end;
if (1-theta0)*Beta==epsilon
%
disp('La solution est epsilon-optimale')
return;
else
%
disp('Passons au changement du support')
%*****
j1=Changement_Support(QI,QH,E,JH,JB,d1,d2,u,jo)
%*****
%
JB=setdiff(JB,jo)
JB=union(JB,j1)
%
JH=setdiff(JH,j1)
JH=union(JH,jo)
end;
%
u=u';
Q=Q';
[jo,u]=Adaptive_Method(Q,g1,d11,d22,u,Cd,JB,JH,mm,N)
%=====
%%
%=====
function [u, theta0, jo]=Changement_Plan(QI,QH,E1,JH,JB,d1,d2,u,ub,lb)
%
% Changement de plan u --> u+theta*l
%
% Pour JH, on prend theta=1
%
% Determiner l
%
for i=1:length(E1)
if E1(i)==1
l(i)=-ub(i);
else if E1(i)==-1

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```
l(i)=-lb(i);
else
    l(i)=0;
end;
end;
end;
%
l(JH)=double(l);
% Sur JB
l(JB)=-QI*QH*l(JH)';
%
Lb=double(l(JB));
%
% Determiner theta
%
ub1=d1(JB)'+u(JB)';
lb1=d2(JB)'+u(JB)';
%
for j=1:length(Lb)
    %
    if sign(Lb(j))==-1
        %
        theta(j)=ub1(j)/Lb(j);
        %
    else if sign(Lb(j))==1
        %
        theta(j)=lb1(j)/Lb(j);
        %
    else
        %
        theta(j)=inf;
        %
    end;
end;
end;
%
[theta_jo, indice_jo]=min(theta);
jo=JB(indice_jo);
%
theta0=min(1, theta);
%
% Le nouveau plan
%
u=double(u+theta0*l');
%
%%
%
```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```
function j1=Changement_Support(QI,QH,E,JH,JB,d1,d2,u,jo)
% sur JB
if u(jo)==d1(jo)
    t1=1;
else if u(jo)==d2(jo)
    t1=-1;
    else
        t1=0;
    end;
end;
% sur JH
tb=t1*QI*QH;
%
Eg=double(E.*tb);
%
for i=1:length(Eg)
    if sign(Eg(i))== -1
        sigma(i)=-E(i)/tb(i);
    else if Eg(i)==0
        sigma(i)=0;
    else
        sigma(i)=inf;
    end;
end;
sigmad=double(sigma);
[sigma0, indice_j1]=min(sigmad);
j1=JH(indice_j1);
%
%
%
function [Xf,Lambda,Delta]=Compute_Xtf(H,g,FI,Ftf,p,C,b,t,tb,tf,d1,d2,x0)
%
Pb=double(subs(p,t,tb));
Cb=double(subs(C,t,tb));
%
if det(Pb)==0
    disp('La matrice du support n'est pas inversible')
else
    disp('La matrice du support est inversible')
end;
PbI=inv(Pb);
%
% Vecteur potentiel
y=Cb*PbI;
% Vecteur d'estimation
Delta=y*p-C;
```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

%
% Temps commutation
tc=solve(Delta),
%
        %% ** Le controle w(t) ** %%
        %
        %      d1 si Delta(t)>0
        % w(t)=
        %      d2 si Delta(t)<0
%*****
[w, ta, tc, tc1]=Controle_w(Delta, tf, tc, t, d1, d2)
%*****
%      ** Calcul X(tf) **
%
Som=0;
X=F*tf*(x0+FI*b);
%
    for i=1:length(w)
        for j=1:length(ta)
            J=j;
            I=J+1;
            if (J~=I)
                Xint=int(X);
                a=ta(J);
                b=ta(I);
                X1=(subs(Xint, t, b)-subs(Xint, t, a))*w(J);
                Som=Som+X1;
                if I==length(ta)
                    Xf=Som;
                    Lambda=PbI*(g-H*Xf);
                    return;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;

%=====
%%
%=====
function [w, ta, tc, tc1]=Controle_w(Delta, tf, tc, t, d1, d2)
%
tc1=setdiff(tc,0);
tc1=double(setdiff(tc1,tf));
ta1=[0,tc1,tf];
ta=sort(ta1);
%
ta2=[0,(tf+tc1)/2];
ta22=sort(ta2);

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

tc1=setdiff(ta,tc1);
%
Deltan=sign(subs(Delta,t,ta22));
for j=1:length(ta22)
    if (Deltan(j)==1) | (Deltan(j)==0)
        w(j)=d1;
    else
        w(j)=d2;
    end;
end;
%
%%
%%
function tb=Dual_Method(Delta,p,Lambda,tb,tf,d1,d2)
%
syms t s;
%
[lambda0,indice_t0]=max(abs(Lambda));
t0=tb(indice_t0);
Q1=subs(p,t,t0);
Sigmat=-sign(Lambda)*inv(Q1)*p;
z=simplify(Delta*Sigmat);
% temps commutations
Tc=solve(z,t);
%
Tf=[0,tf];
tc=setdiff(Tc,Tf);
% temps en fonction de sigma
T1s= solve(-Delta-Sigmat*s,t);
T1=setdiff(T1s,Tf);
%
% Signe Delta*Sigma & Ensemble : T(sigma)
%
Sz=sign(subs(z,t,0))
%
for i=1:length(tc)
    for j=1:length(T1)
        if (Sz==-1)
            t1=T1;
            Ts=[0,t1];
        else % (sign(subs(z,t,0))==1) & ((sign(subs(z,t,tf))==1))
            tcc=tc(j);
            t1=T1;
            Ts=[tcc,t1];
        end;
    end;
end;
end;

```

B.4 Code de la nouvelle version de la méthode Adaptée

```

    % Calcul alpha(sigma)
    %
    S0=sign(subs(Sigmat,t,0))
    IntegA=abs(int(S0*Sigmat,t))
    %
    alphaS=-abs(Lambda)+(d2-d1)*(subs(IntegA,t,Ts(2))-subs(IntegA,t,Ts(1)))
    Alp=simplify(alphaS)
    %
    Sigm=solve(Alp,'Real',true)
    sm=double(Sigm)
    %
    % Delta+sigma*delta
    %
    ts=solve(Delta+s*Sigmat)
    ts=subs(ts,s,sm)
    tss=double(ts')
    %
    for i=1:length(tss)
    if (sign(tss(i))==1) && (sign(tf-tss(i))==1)
        %
        e=i
        Tstar=tss(e)
    %else
        %return;
    end;
    end;
    tstar=min(Tstar)
    tbs=setdiff(tb,t0);
    tb=union(tbs,tstar)
    %
    %
    %
    function tb=Setp_Final(H,Xf,g,FI,Ftf,p,C,tf,x0,b,Delta,tb,Lambda,d1,d2,t)
    Hxf=double(H*Xf-g);
    while (Hxf~=0)
        tb=double(tb);
    DDelta=diff(Delta);
    SDelta=sign(subs(DDelta,t,tb));
    %
    tb=tb+SDelta.*(1./(d2-d1)).*(Lambda);
    %*****
    [Xf,Lambda,Delta]=Compute_Xtf(H,g,FI,Ftf,p,C,b,t,tb,tf,d1,d2,x0)
    %*****
    Hxf=vpa(H*Xf-g,4)
    end;
    %
    %

```

Références

- [1] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, volume 87 of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2004. [2](#)
- [2] M. Aidene and K.Louadj. A problem of optimal control with free initial state. *ESAIM : Proceedings*, 35 :184–190, 2012.
- [3] M. Aidene and K. Louadj. Adaptive method for solving optimal problem wiht state and control variables. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012. [2](#)
- [4] N. V. Balashevich, R. Gabasov, and F. M. Kirillova. Numerical methods for open loop and closed loop optimization of piecewise linear systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 41(11) :1578–1593, 2001. [1](#)
- [5] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires : cours et exercices avec solutions*. 2001. [1](#)
- [6] P. Bernhard. *La théorie de la seconde variation et le probleme linéaire quadratique*, volume 2. Springer, 1983.
- [7] R. E. Bixby. Implementing the simplex method : The initial basis. *OSRA Journal on Computing*, 4(3) :1–18, 1992.
- [8] U. Boscain and B. Piccoli. *Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds*, volume 43 of *Springer series Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 2004. [3](#), [7](#)
- [9] J.C. Butcher and J. Charles. *The numerical analysis of ordinary differential equations : Runge-Kutta and general linear methods*. Wiley-Interscience New York, NY, USA, 1987. [61](#)
- [10] G. B. Dantzig. *Activity Analysis of Production and Allocation*, chapter Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, pages 339–347. Wiley, New York, 1951. [78](#)
- [11] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1963. [1](#)

RÉFÉRENCES

- [12] R. Gabasov. Adaptive method of solving linear programming problem. Preprint series of University of Karlsruhe, Institut of statistics and mathematics, 1994. [1](#), [2](#), [81](#)
- [13] R. Gabasov, V.S. Glushenkov, F. M. Kirillova, A.V. Pokayev, A.A. Senko, and A.I. Tyatyshkin. Algorithms of optimization of linear and non-linear systems. In G.Ferrate and E.A.Puente, editors, *Software for computer control, Proceedings of the Third IFAC/IFIP Symposim, Madrid (Spain)*, 1982. [2](#), [3](#)
- [14] R. Gabasov and F. M. Kirillova. *Linear Programming Methods 1, 2 and 3*. Edition of University, Minsk (russian), 1977, 1978 and 1980. [1](#), [43](#), [80](#), [81](#), [85](#)
- [15] R. Gabasov and F. M. Kirillova. *Constructive Méthodes d'optimisation*, volume 2. Editions de l'université edition, 1984. [25](#), [28](#), [30](#), [33](#), [40](#)
- [16] R. Gabasov, F. M. Kirillova, and N. S. Pavlenok. Optimal discrete-pulse control of linear systems. *Automation and Remote Control*, 69(3) :443–462, 2008.
- [17] S. I. Gass. *Linear Programming : Methods and Applications*. McGraw-Hill Book Company Inc., New-York, 1964.
- [18] M. Z. Ghanem. Direct method for solving optimal control problems with kinks. *Journal of Optimisation Theory and Applications*, 14(4), 1974. [2](#)
- [19] J.C. Gilbert. Mise à jour de la métrique dans les méthodes de quasi-newton réduites en optimisation avec contraintes d'égalité. pages 251–288, 1988. [1](#)
- [20] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equation I : nonstiff problems*. Springer, Berlin, 1993. [61](#)
- [21] R.E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5(2) :102–119, 1960. [3](#), [7](#), [9](#), [10](#)
- [22] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 302–311, 1984. [1](#)
- [23] V. Klee and G.J. Minty. *Inequalities III*, chapter How good is the simplex algorithm ?, pages 159–175. Academic Press, New York, 1972. [1](#)
- [24] E.B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. The SIAM series in Applied Mathematics. John Wiley and Sons, New-York-London-Sydney, 1967. [2](#), [3](#), [8](#), [12](#), [17](#), [48](#), [52](#)
- [25] S. Lim and S. Park. A simplex-based linear programming program. *Optimization Methods and Software*, 17 :717–745, 2002.

- [26] I.J. Lustig, R.E. Marsten, and D.F. Shanno. On implementing mehrotra's predictor-corrector interior-point method for linear programming. *SIAM Journal of Optimization*, 2(3) :435–449, 1992. [1](#)
- [27] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, and Y. Ye. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, volume 13 of *Theory and Algorithms of Studies in Applied Mathematics*. Society for industrial and applied mathematics Publications, Philadelphia, 1994. [1](#)
- [28] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mischenko. *Mathematical theory of optimal processes*. Eds Mir, Moscou, 1962. [2](#), [3](#), [12](#), [13](#), [29](#)
- [29] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1992. [22](#)
- [30] C.V. Rao, S.J. Wright, and J.B. Rawlings. Application of interior-point methods to model predictive control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 99(3) :723–757, 1998. [1](#)
- [31] C. Roos, T. Terlaky, and J.P. Vial. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997. [1](#)
- [32] S. Sager, H.G. Bock, and G. Reinelt. Direct methods with maximal lower bound for mixed-integer optimal control problems. *Mathematical Programming*, 118(1) :109–149, 2009. [2](#)
- [33] M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire : Programmation discrète, (Vol. 2)*. Editions Hermann, 1984.
- [34] S.P. Sethi and G.L. Thompson. *Optimal Control Theory : Applications to Management Science and Economics, 2nd Edition*. Springer, 2000.
- [35] M.C. Steinbach. Structured interior point sqp methods in optimal control. *ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 76(3) :59–62, 1996. [1](#)
- [36] V. V. Ternoivskii and M. M. Khapaev. Direct numerical method for solving optimal control problems. *Doklady Mathematics*, 77(3) :428–431, 2008. [2](#)
- [37] E. Trélat. *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Collection Mathématique Concrètes. Vuibert, 2005. [3](#), [47](#)
- [38] R. J. Vanderbei. *Linear Programming : Foundations and Extensions*. Kluwer Academic Publishers Princeton University, 2001. [1](#)
- [39] J. Vignes. Implémentation des méthodes d'optimisation : Test d'arrêt optimal, contrôle et précision de la solution. *Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle*, 18(1) :1–8, 1984. [1](#)

RÉFÉRENCES

- [40] O. von Stryk and R. Bulirsch. Direct and indirect methods for trajectory optimization. *Annals of Operations Research*, 37, 1992. [2](#)
- [41] G. Wanner and E. Hairer. *Solving ordinary differential equations II*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin, 1991. [61](#)
- [42] R.B. Wilson. *A simplicial algorithm for concave programming*. PhD thesis, Graduate School of Business Administration, Harvard University (Boston, MA), 1963. [22](#), [72](#)
- [43] P. Wolfe. The composite simplex algorithm. *SIAM Review*, 7(1) :42–54, 1965. [78](#)
- [44] S.J. Wright. *Primal-dual interior-point methods*. SIAM Publications, Philadelphia, 1997. [1](#)
- [45] A. Yassine. *Etudes adaptatives et comparatives de certains algorithmes en optimisation : implémentations effectives et applications*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1989. [1](#)
- [46] Y. Ye. *Interior point algorithms : theory and analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- [47] S. Ziontns. *Linear and integer programming*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (USA), 1974. [78](#)

Résumé

Ce travail de thèse porte sur la mise au point d'une nouvelle méthode directe de problèmes terminal de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire. Cette méthode est constituée d'une fusion entre l'approche de la programmation linéaire (méthode de point intérieur) et la programmation non linéaire (méthode de Newton), et elle se décompose en trois étapes : principe de discrétisation, méthode adaptée et procédure finale. La solution optimale donnée par cette méthode est de type bang-bang.

Dans ce manuscrit, nous développons une approche entre cette nouvelle méthode et le principe du maximum de Pontryagin. Ainsi, des comparaisons numériques sont réalisées entre cette méthode et d'autres méthodes numériques directes et indirectes.

Mots Clés : Contrôle optimal, Programmation linéaire, Méthode de point intérieur, Méthode de Newton, Principe du Maximum de Pontryagin, Contrôle bang-bang.

Abstract

The objective of this thesis is to develop a new direct method of an optimal terminal control problem for a linear dynamic system. This method composed of a mix between the linear programming approach (interior points method) and the nonlinear programming one (Newton's method), it proceeds in three steps : principle of discretization, adaptive method and final step. The optimal given this is a bang-bang type.

In this manuscript, we developed an approach between this new method and the Pontryagin's maximum principle. To achieve this, comparisons between this method and more classical direct and indirect numerical methods are performed.

Key Words : Optimal control, Linear programming, Interior points methods, Newton's Method, Pontryagin's Maximum Principle, bang-bang control.