

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou

Faculté du génie de la construction

Département de Travaux Publics

Polycopié de cours :

Théorie de l'Élasticité
Cours et applications

Auteur : Dr BELHOCINE Malika ; Ep : IDIRI

Destiné aux étudiants du Master I

Département : Travaux Publics

Spécialité : Voies et Ouvrages d'Art (VOA)

Année : 2024-2025

Pérambule

Le présent polycopié de cours intitulé « **Théorie de l'Élasticité** », s'adresse aux étudiants de **Master I Travaux Publics, spécialité : Voies et Ouvrages d'Art (VOA)**.

Ce document se divise en six chapitres :

Dans le chapitre 1, une brève définition, un historique et plusieurs hypothèses fondamentales sur la théorie d'élasticité ont été présentés, on a situé la théorie d'élasticité vis à vis de la MMC et RDM (Résistance Des Matériaux). Plusieurs lois de conservations sont présentées, à savoir conservation de la masse, lois du mouvement et la conservation de l'énergie, ainsi que la théorie d'élasticité au centre des disciplines de l'ingénieur et son intérêt.

Le deuxième chapitre, présente des préliminaires et notions mathématiques, dans lequel nous avons présenté les règles et les conventions des calculs indiciaux, les tenseurs et l'algèbre vectorielle, en coordonnées curvilignes, cylindriques et sphériques.

Le troisième chapitre présente la théorie de l'état des contraintes, des éléments principaux nécessaires pour l'étude de la théorie des contraintes sont bien détaillés, à savoir la définition des contraintes dans le solide, le principe des contraintes de Cauchy, étude du tenseur des contraintes en un point, contraintes principales et directions principales. Il présente aussi, les équations différentielles de l'équilibre en coordonnées cartésiennes et les conditions aux limites d'un solide.

Le quatrième chapitre concerne la théorie de l'état des déformations, cette unité traite la description cinématique Lagrangienne et Eulérienne et la relation entre déformations et déplacements (petits et grands déplacements), l'étude du tenseur linéarisé en un point est bien détaillée. Les équations de compatibilité de déformation en petits déplacements et les relations entre déformations et déplacements en coordonnées cylindriques sont présentées et détaillé.

Le cinquième chapitre est consacré à la relation entre les contraintes et les déformations, il s'agit de donner un aperçu sur le comportement d'un corps élastique linéaire et présenter des lois de comportement élastique linéaire isotrope. L'influence de la température et quelques modèles rhéologiques en MMC, ont été intégrés.

Le sixième chapitre intitulé, formulation classique des problèmes en élasticité linéaire permet de décrire les problèmes de type I, II et III, donner les équations générales de l'élasticité solutions en fonction des déplacements (Équations de Lamé), solutions en fonction des contraintes (équations de Beltrami-Mitchell).

Table des matières

Chapitre 1 : Généralités sur la mécanique des milieux continus (MMC)

1.1 Introduction	1
1.2 Historique	2
1.3 Hypothèses de base de la théorie d'élasticité.....	2
1.4 Classification des corps	3
1.5 Position des problèmes de calculs d'une structure	3
1.6 Mécanique des milieux continus au centre des disciplines de l'ingénieur.....	4
1.7 Lois de conservation	4
1.7.1 Conservation de masse.....	4
1.7.2 Lois du mouvement (Euler 1776).....	5
1.7.3 Energie cinétique.....	5

Chapitre 2 : Analyses tensorielles

2.1 Vecteurs et tenseurs.....	7
2.1.1 Vecteur.....	7
2.1.1.1 Permutations	8
2.1.2 Opérations vectorielles.....	9
2.1.2.1 Somme vectorielle.....	8
2.1.2.2 Produit scalaire de deux vecteurs	8
2.1.2.3 Produit vectoriel	9
2.1.2.4 Produit mixte	9
2.1.3 Application linéaire de E dans E	10
2.1.4 Tenseurs.....	10
2.1.4.1 Tenseur du second ordre	10
2.1.4.2 Trace d'un tenseur	10
2.1.4.3 Produit tensoriel	11
2.2 Changement de repère	11
2.2.1 Matrice de passage	11

2.3 Polynôme caractéristique	11
2.4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle	12
2.4.1 Analyse vectoriel	12
2.5 Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus	13
2.5.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées	13
2.5.2 Coordonnées cylindriques	14
2.5.3 Coordonnées sphériques	15
2.6. Applications.....	17

Chapitre 3 : Théorie de l'état de contrainte

3. 1 Etude du tenseur des contraintes en un point	23
3.1.1 Vecteur contraintes	23
3.1.2 Tenseur de contraintes	24
3.1.2.1 Théorème de Cauchy	24
3.1.3. Propriétés du tenseur $\bar{\sigma}$	25
3.1.3.1 Représentation de Mohr	26
3.1.3.1.1 Principe de représentation de Mohr	26
3.1.3.1.2 Cercle de Mohr à partir des contraintes principales σ_I et σ_{II}	27
3.1.3.1.3 Tri-cercle de Mohr	29
3.2 Equation différentielle de l'équilibre en coordonnées cartésiennes	30
3.3 Conditions aux limites	30
3.4 Tenseur de contraintes particuliers	31
a. État de contraintes uni axial (traction ou compression simple).....	31
b. État plan de contrainte	32
c. État de cisaillement simple	33
3.4 Applications	33

Chapitre 4 : Théorie de l'état de déformation

4.1 Description cinématique (Lagrangienne et Eulérienne)	38
4.1.1 Configuration d'un milieu continu	38
4.1.2 Description Lagrangienne	38
4.1.3 Description Eulérienne	39
4.2 Etude des déformations en variable de Lagrange	39
4.2.1 Tenseur gradient de déformation	39
4.2.2 Tenseur de déformation de Green Lagrange	40
4.2.3 Relation entre le champ de déplacement $\vec{U}(\vec{X}, t)$ et $\vec{E}(\vec{X}, t)$	41
4.2.4 Changement de longueur, allongement dans la direction \vec{n}	41
4.2.5 Variation d'angle de glissement dans deux directions	41
4.2.6 Signification des composantes de \vec{E}	42
4.3 Tenseur des déformations linéaires	43
4.3.1 Hypothèse des petites perturbations (H.P.P)	43
4.3.2 Etude du tenseur de déformation linéaire en un point	44
a) Déformations principales	44
b) Décomposition en déviateur et partie sphérique	45
c) Directions principales	45
4.4 Equations de compatibilité de déformation en petits déplacements	45
4.5 Cinématique des déformations en variables Eulériennes	45
4.5.1 Dérivée /t de $d\vec{x}$	45
4.5.2 Tenseur taux de déformation ou bien tenseur de vitesse	46
4.6 Relation entre déformation et déplacement en coordonnées cylindriques	46
4.7 Applications	47

Chapitre 5 : Relation entre les contraintes et les déformations

5.1 Lois de comportement	53
5.1.1 Nécessité des lois de comportement	53
5.1.2 Aperçu sur le comportement expérimental des solides	54
5.2 Elasticité linéaire	56
5.2.1 Tenseur d'élasticité	56

5.2.2 Isotropie, anisotropie	56
5.2.3 Loi de comportement élastique linéaire isotrope	56
5.3 Influence de la température	58
5.3.1 Loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope	58
5.4 Aperçu sur les modèles rhéologiques	58
5.5 Applications	60

Chapitre 6 : Formulation classique des problèmes en élasticité linéaire

6.1 Positions du problème	64
6.2 Méthode de résolution analytique	65
6.3 Méthode de déplacements	65
6.4 Méthode des contraintes	66
6.5 Applications	66
Références bibliographiques	73

Chapitre 1 :

**Généralités sur la mécanique des milieux
continus (MMC)**

Objectifs du chapitre 1

Les objectifs tracés pour ce chapitre sont :

- Comprendre la position de la théorie d'élasticité vis à vis de la mécanique des milieux continus et de la résistance des matériaux.
- Connaître les hypothèses de base de la théorie d'élasticité.
- Distinguer les problèmes de calculs des structures.
- Donner un aperçu sur la mécanique des milieux continus au centre des disciplines de l'ingénieur.
- Connaître les lois de conservations.

1.1 Introduction

La mécanique des milieux continus, est une branche de la mécanique qui a pour objectifs l'étude dynamique (en mouvement) ou statique des milieux continus. Cette branche peut être considéré comme étant la science de l'ingénieur par excellence, elle permet de décrire et comprendre le monde matériel qui nous entoure et les phénomènes courants qui se déroulent. Elle s'intéresse aux solides déformables, aux fluides (liquides et gaz) et aux matériaux présentant des comportements intermédiaires. La MMC englobe l'élasticité, la plasticité, la mécanique des fluides et la résistance des matériaux (RDM). La théorie de l'élasticité est l'étude du comportement des solides déformables homogènes isotropes et parfaitement élastiques avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. La théorie de l'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures. Les actions extérieures se classent en deux catégories :

▪ Les forces de volume

Ce sont des forces réparties dans tout le volume du corps solide. Il peut s'agir :

- Des forces de pesanteur (poids propre du corps solide).
- Des forces magnétiques (électromagnétiques).
- Des forces d'inertie en cas de mouvement du corps solide.

▪ Les forces de surfaces

Ce sont des forces qui agissent en surface du corps solide. Il s'agit :

- Des actions de contact produites par un corps sur un autre.

- La pression atmosphérique.

1.2 Historique

Le développement de la théorie d'élasticité à travers le temps a connu un progrès important durant des années, tout a commencé par l'étude de **Galilei Galileo**, qui a considéré en 1638 pour la première fois la nature de la résistance des solides à la rupture. Puis vient la découverte de la loi de **Hooke** en 1660, traduisant la proportionnalité entre les contraintes et les déformations. Suivie de la formulation des équations générales de **Navier** en 1821, qui permet de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématiques linéaire. En 1705 **James Bernoulli** dans son expérience a constaté que la résistance à la flexion des poutres n'est autre qu'un couple proportionnel à la courbure. **Euler et Bernoulli en 1751** ont abouti à l'équation différentielle de vibration latérale des barres travaillant en flexion, en faisant varier les fonctions énergétiques. En 1776 **Coulomb** a étudié la flexion des poutres à petites sections pour déterminer la position de l'axe neutre. **Thomas Young** a pu définir la différence entre la résistance au cisaillement et la résistance à la traction ou compression. C'est à partir de 1920 que les travaux ont été conduits dans le but de découvrir les lois générales traduisant les phénomènes physiques réels et processus analytiques de résolution. En 1822, **Cauchy** a pu introduire la notion de contrainte en un point d'un solide, définie la relation entre les contraintes et les déformations et découvre les équations d'équilibres ou les composantes de contraintes sont reliées aux forces distribuées sur le volume d'un solide. En 1921, en partant de la conception **Newtonienne** concernant la constitution des corps et en supposant que les réactions sont dues au forces intermoléculaire, **Navier** a pu définir l'équation du mouvement au point matériel [1].

1.3 Hypothèses de base de la théorie d'élasticité

Les matériaux envisagés sont supposés homogènes, continus et isotropes [2] :

- **Homogénéité** : On admet que tous les éléments constituant le matériau ont une structure identique (mêmes propriétés physiques, en n'importe quel point tel que : la masse volumique, densité).
- **Continuité** : C'est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient de façon continue d'un point à un autre.
- **Isotropie** : Un solide est isotrope lorsque tous les points de la structure ont les mêmes propriétés élastiques (E et ν) dans toutes les directions, généralement assurée à l'échelle macroscopique.

- **Linéarité** : Les matériaux sont utilisés dans le domaine élastique, ce qui se traduit par une relation linéaire entre les efforts et les allongements (Loi de Hooke)

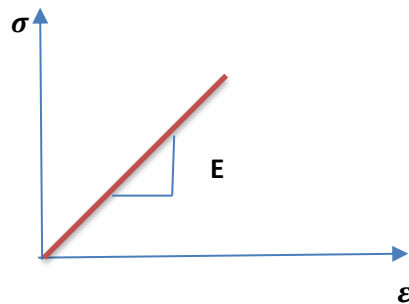


Figure 1.1 : Loi de Hooke.

1.4 Classification des corps

Il existe trois modèles de corps solides :

- *Corps unidimensionnelles* : Il s'agit des corps solides ayant une dimension prépondérante par rapport aux deux autres dimensions, comme les barres, les câbles, les poutres et les ressorts.
- *Corps à deux dimensions* : Il s'agit des corps solides ayant deux dimensions prépondérantes par rapport à la troisième dimension, les plaques, les dalles et les corps mince.
- *Corps à 3 dimensions* : Il s'agit des corps solides ayant les trois dimensions comparables, on distingue : Barrage, murs de soutènement, les fondations.

1.5 Position des problèmes de calcul d'une structure

Les données relatives aux calculs d'une structure sont de trois types :

- La géométrie de la structure qu'elle soit locale ou globale.
- Le ou les matériaux constituant la structure.
- Les conditions aux limites, qui constitue le chargement auquel la structure est soumise (conditions aux limites en forces) et les attaches de cette structure (conditions aux limites en déplacement).

A partir de ces données, il faut arriver à une solution de cette structure c.à.d. la connaissance en tous points de la structure du tenseur de contraintes, de déformation et de déplacement, cette solution est possible grâce à l'existence de trois systèmes d'équations :

- Equation d'équilibre dans l'élément de volume.

- Les équations de la cinématique.
- Des lois de comportement.

1.6 Mécanique des milieux continus au centre des disciplines de l'ingénieur

La mécanique des milieux continus se trouve au centre des disciplines suivantes : le génie civil (calcul des structures), génie mécanique, la biomécanique, la mécanique des fluides, le design de nouveaux matériaux. Les préoccupations de l'ingénieur pour le calcul des structures sont [3] :

- *Résistance*. La structure doit pouvoir supporter et transmettre les charges externes qui lui sont appliqués ;
- *Rigidité*. La structure ne doit pas subir des déformations excessives lorsqu'elle est sollicitée à des charges extérieures ;
- *Stabilité*. Un léger changement des conditions extérieures ne doit pas conduire à une réponse disproportionnée de la structure ;
- *Endurance*. La structure soumise à un chargement cyclique (répété) doit pouvoir supporter sans rupture un nombre important de cycles.

1.7 Lois de conservation

Les ingrédients essentiels de la mécanique des milieux continus sont les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et dans une moindre mesure de l'énergie [4].

1.7.1 Conservation de masse

Soit ρ la masse volumique (densité de masse), V le volume, t le temps. La masse totale est [3]:

$$m = \int_V \rho \, dV \quad \dots\dots\dots (1.1)$$

Et la loi postule qu'elle reste constante :

$$\frac{d m}{d t} = \frac{d}{d t} \int_V \rho \, dV = 0 \quad \dots\dots\dots (1.2)$$

1.7.2. Lois du mouvement (Euler 1776)

En appelant \vec{v} la vitesse, $\rho\vec{v}$ la densité de quantité de mouvement et \vec{F}_R la résultante des forces extérieures (Figure 1.2), la loi de la quantité de mouvement s'écrit [3] :

$$\frac{d}{d t} \int_V \rho \vec{v} \, dV = \vec{F}_R \quad \dots\dots\dots (1.3)$$

Si \vec{x} est un vecteur issu de l'origine (fig1.2), $\rho \vec{v}$ la densité du moment cinétique et \vec{M}_R le moment résultant, la loi du moment cinétique est :

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{x} \wedge \rho \vec{v} dV = \vec{M}_R \quad \dots\dots\dots (1.4)$$

Dans (1.3) et (1.4), on peut exprimer \vec{F}_R et \vec{M}_R à l'aide des forces de volume \vec{f} et des forces de surface \vec{t} (A désigne la surface englobant le volume V) ; dans le terme de gauche, on peut dériver sous le signe intégral, en tenant compte de (1.2) et de ce que les limites d'intégration sont fixes, en appelant $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ l'accélération, on obtient :

$$\int_V \rho \vec{a} dV = \int_V \vec{f} dV + \int_A \vec{t} dA = \vec{F}_R \quad \dots\dots\dots (1.5)$$

$$\int_V \vec{x} \wedge \rho \vec{a} dV = \int_V \vec{x} \wedge \vec{f} dV + \int_A \vec{x} \wedge \vec{t} dA = \vec{M}_R \quad \dots\dots\dots (1.6)$$

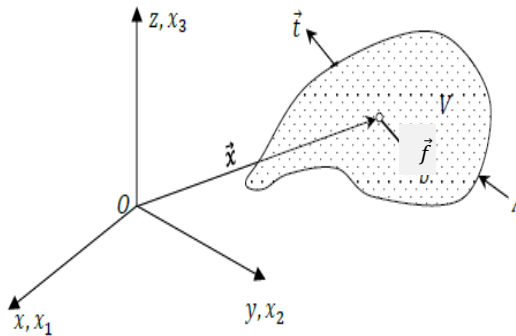


Figure 1.2 : Lois du mouvement.

1.7.3. Energie cinétique

L'énergie cinétique E_{cin} , l'énergie interne E_{int} , la puissance des forces extérieures P et les puissances d'autres sources extérieures (thermiques, électrique...) pouvant contribuer à l'énergie, groupées dans la notation Q , sont liées par la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{dE_{int}}{dt} + \frac{dE_{cin}}{dt} = P + Q \quad \dots\dots\dots (1.7)$$

Pour un milieu continu, l'énergie cinétique s'exprime par :

$$E_{cin} = \int_V \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV \quad \dots\dots\dots (1.8)$$

Et l'énergie interne peut s'écrire :

$$E_{int} = \int_V e_0 dV \quad \dots\dots\dots (1.9)$$

A l'aide de l'énergie interne par unité de volume e_0 ; enfin, la puissance des forces extérieures vaut, avec \vec{f} et \vec{t} :

Chapitre 1 : Généralités sur la mécanique des milieux continus (MMC)

$$P = \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} \, dV + \int_A \vec{t} \cdot \vec{v} \, dA \quad \dots\dots\dots (1.10)$$

e_0 : densité d'énergie interne.

Chapitre 2 :

Analyses tensorielles

Objectifs du chapitre 2

Les objectifs tracés pour ce chapitre sont :

- Connaître les notions vectorielles et tensoriels
- Maitriser la notation indicielle.
- Apprendre à effectuer les opérations vectorielles et tensorielles (produit scalaire, produit vectoriel produit mixte, changement de repère...)
- Maîtriser le calcul vectoriel et analyses tensorielles.

2.1 Vecteurs et tenseurs

La mécanique des milieux continus fait un usage important des champs scalaires, vectoriels et tensoriels, grâce aux opérations vectorielles et tensorielles on peut écrire les équations de la mécanique de manière intrinsèque. Une grandeur physique peut être représentée mathématiquement par [3] :

- Un scalaire (masse volumique, température, concentration d'un polluant, etc.).
- Un vecteur (accélération, forces volumiques, couples volumiques, etc.).
- Un tenseur d'ordre 2 (déformations, contraintes, etc.).
- Un tenseur d'ordre supérieur à 2 comme par exemple le tenseur d'élasticité qui est d'ordre 4.

2.1.1 Vecteur

Dans un espace Euclidien à trois dimensions, sur les corps des réels \mathbb{R}^3 , nous distinguerons trois vecteurs unitaires notés $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, associés respectivement aux axes x_1, x_2, x_3 . Soit B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) une base orthonormée (figure 2.1). Un vecteur \vec{V} est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3 [5] :

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V_i\vec{e}_i \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

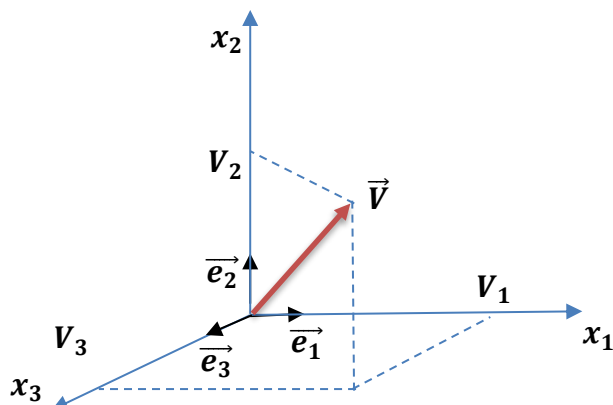


Figure 2.1 : Coordonnés d'un vecteur

Les vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ont respectivement pour composantes : (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

En utilisant la convention de sommation, ou convention d'Einstein, on écrit : $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$

En notation matricielle on écrira : $\vec{V} = \{\vec{V}\} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$

Le vecteur transposé : $\vec{V}^T = \{\vec{V}\}^T = \langle \vec{V} \rangle = \langle V_1 \ V_2 \ V_3 \rangle$

Le module d'un vecteur \vec{V} de composantes (V₁, V₂, V₃) quelconques relatives au repère orthonormé (O, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), est notée $\|\vec{V}\|$.

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \dots\dots\dots (2.2)$$

2.1.1.1 Permutations

On introduit les symboles de permutation de **Lévi Civita** comme suit [5] :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \text{ si } i, j, k \text{ est une permutation paire de } 1,2,3 \\ -1 \text{ si } i, j, k \text{ est une permutation impaire de } 1,2,3 \\ 0 \text{ si deux indices sont répétés} \end{cases}$$

Les permutations paires de 1,2,3 sont donc : (1, 2, 3), (3, 1, 2) et (2, 3, 1) et les permutations impaires : (2, 1, 3), (1, 3, 2) et (3, 2, 1).

ϵ_{ijk} : Sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre qui représente par exemple, la forme tri linéaire produit mixte : $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \epsilon_{ijk} U_i V_j W_k$

2.1.2 Opérations vectorielles

2.1.2.1 Somme vectorielle

La somme vectorielle analytique (\vec{U}, \vec{V}) est un vecteur \vec{W} exprimé analytiquement par la relation suivante :

$$\vec{W} = \vec{U} + \vec{V} = (U_1 + V_1) \vec{e}_1 + (U_2 + V_2) \vec{e}_2 + (U_3 + V_3) \vec{e}_3 \dots\dots (2.3)$$

2.1.2.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{U}, \vec{V} est un nombre réel égal au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle θ qu'ils forment entre eux [6] :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos(\vec{U}; \vec{V})$$

En notation matricielle :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \langle \vec{v} \rangle \{W\}$$

En notation indicielle :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = V_i W_i$$

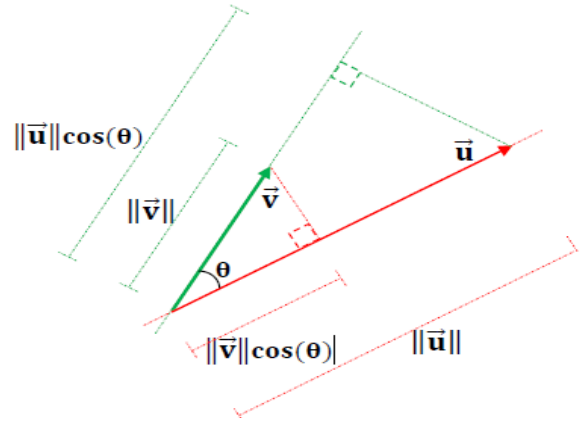


Figure 2.2 : Produit scalaire de deux vecteurs [6].

2.1.2.3 Produit vectoriel

Soit \vec{p} le produit vectoriel des deux vecteurs \vec{V} et \vec{W} , il s'écrit comme suit [7] :

Notation indicielle :

$$\vec{p} = \vec{V} \wedge \vec{W} = \epsilon_{ijk} V_j W_k \vec{e}_i \quad i, j, k = 1 \text{ à } 3$$

En notation vectoriel :

$$\vec{p} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.6)$$

NB : $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

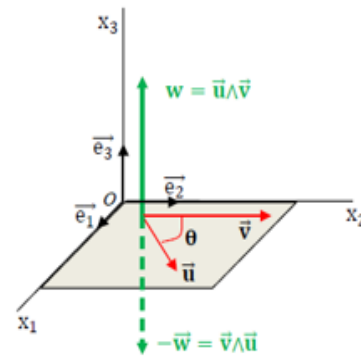


Figure 2.3 : Produit vectoriel de deux vecteurs [7].

On a aussi : $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{A}$

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

2.1.2.4 Produit mixte

Soit \vec{U}, \vec{V} et \vec{W} trois vecteurs appartenant à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, leur produit mixte est comme suit :

$$\text{En notation indiciel : } \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \epsilon_{ijk} U_i V_j W_k \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\text{On notation vectorielle : } \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \det \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix}$$

Où : ϵ_{ijk} : est le symbole de permutation.

2.1.3 Application linéaire de E dans E

Soit A une application linéaire dans la base orthonormée B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) ; elle est représentée par une matrice 3x3 notée [A] [7] :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Si \vec{W} est un vecteur tel que $\vec{W} = [A]\{V\}$, alors les composantes de \vec{W} sont données par :

$$\begin{aligned} W_1 &= A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 \\ W_2 &= A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 \\ W_3 &= A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 \end{aligned}$$

En utilisant les conventions de sommation : $W_i = A_{ij}V_j$

En notation vectorielle : $\{W\} = [A]\{V\}$

On définit les symboles de **Kronecker** [7] par : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

En particulier l'application identité \bar{I} est représentée par la matrice : $[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{I}$

\bar{I} : est une matrice appelée matrice identité.

2.1.4 Tenseurs

2.1.4.1 Tenseur du second ordre

Un tenseur du second ordre \bar{T} est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur \vec{V} de l'espace Euclidien un vecteur \vec{W} de ce même espace : $\vec{W} = \bar{T}(\vec{V})$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice 3x3, notée [T] ou \bar{T} , telle que : $W_i = T_{ij}V_j$

En notation matricielle [5] : $\{\vec{W}\} = [T]\{\vec{V}\}$ ou $\vec{W} = \bar{T} \vec{V}$

- Un tenseur est dit symétrique si $T_{ij} = T_{ji}$
- Un tenseur est dit Antisymétrique si $T_{ij} = -T_{ji}$
- Un tenseur est dit isotrope si $T_{ij} = t \delta_{ij}$; $t \in \mathbb{R}$.

On peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique :

$$\bar{T} = \bar{T}^S + \bar{T}^A \text{ ou } T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A$$

$$\bar{T}^S = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}); \bar{T}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

2.1.4.2 Trace d'un tenseur

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est la somme de ses termes diagonaux :

$$Tr(\bar{T}) = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} \dots\dots\dots (2.7)$$

2.1.4.3 Produit tensoriel

On définit le produit tensoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , noté $\vec{U} \otimes \vec{V}$ comme le tenseur d'ordre deux, défini par la forme suivante [7] :

Notation indicielle : $\vec{U} \otimes \vec{V} = U_i V_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \quad ; \quad i, j = 1 \text{ à } 3 \dots\dots\dots (2.8)$

Notation tensorielle :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = \begin{bmatrix} U_1V_1 & U_1V_2 & U_1V_3 \\ U_2V_1 & U_2V_2 & U_2V_3 \\ U_3V_1 & U_3V_2 & U_3V_3 \end{bmatrix}$$

2.2 Changement de repère

2. 2.1 Matrice de passage

Soit **E** un espace vectoriel muni d'une base orthonormée $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $B'(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, une nouvelle base orthonormée dans cette espace, Soit $\vec{V} \in E$.

Dans B : $\vec{V} = V_i \vec{e}_i$

Dans B' : $\vec{V}' = V'_i \vec{e}'_i$

Exprimons le vecteur \vec{e}'_1 dans B :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= (\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 \\ &= \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_2) \vec{e}_2 + \cos(\vec{e}'_1, \vec{e}_3) \vec{e}_3 \\ &= Q_{11} \vec{e}_1 + Q_{12} \vec{e}_2 + Q_{13} \vec{e}_3 \\ &= Q_{1j} \vec{e}_j \quad (j = 1 \text{ à } 3). \end{aligned}$$

On définit la matrice de passage [Q] telle que [7] :

$$\vec{e}'_1 = Q_{11} \vec{e}_1 + Q_{12} \vec{e}_2 + Q_{13} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_2 = Q_{21} \vec{e}_1 + Q_{22} \vec{e}_2 + Q_{23} \vec{e}_3$$

$$\vec{e}'_3 = Q_{31} \vec{e}_1 + Q_{32} \vec{e}_2 + Q_{33} \vec{e}_3$$

Ou encore, en notations indicielles : $\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j$

En notation matricielle : $\{\vec{e}'\} = [Q] \{\vec{e}\}$

2.3 Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre (dimension 3x3) sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique [5] :

$$P(\lambda) = Det(A - \lambda I) \dots\dots\dots (2.9)$$

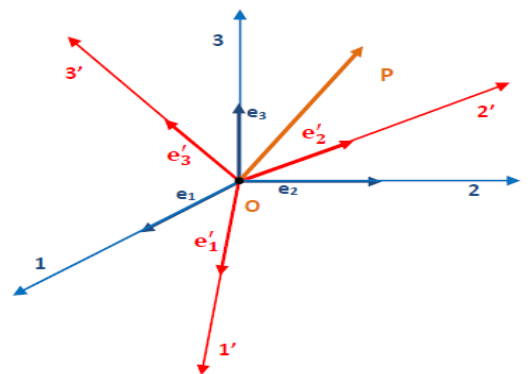


Figure 2.4 : Changement de base.

Soit en développant : $P(\lambda) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3$

Avec : $I_1 = \text{Det}(A)$

$$I_2 = \frac{1}{2} (A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}) = \frac{1}{2} ((\text{Tr}A)^2 - \text{Tr}(A^2))$$

$$I_3 = A_{ii} = \text{Tr}(A)$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés les invariants fondamentaux du tenseur A .

2.4 Calcul vectoriel et analyse vectorielle

2.4.1 Analyse vectorielle

On note d'une virgule la dérivée partielle, soit $i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé [7].

Soit f une fonction scalaire des variables x_1, x_2 et x_3 .

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{array} \right\} ; f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire

$$\Delta f = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Soit \vec{V} une fonction vectorielle, la divergence d'un vecteur est un scalaire :

$$\text{div } \vec{V} = V_{,i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{array} \right\}$$

Le gradient d'un vecteur est une matrice

$$\overline{\text{grad}}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Le laplacien d'un vecteur est un vecteur

$$\Delta \vec{V} = T_{ij,j} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{array} \right\}$$

2.5 Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus

2.5.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

Soit [7][4] : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$$\vec{V} = V_x\vec{e}_x + V_y\vec{e}_y + V_z\vec{e}_z \text{ un vecteur}$$

Alors :

$$\vec{\nabla}(\vec{V}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = V_{i,i} = \text{Tr}(\vec{\nabla}(\vec{V})) = \vec{\nabla}(\vec{V}) : \vec{I} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{V} = \text{div } \vec{\nabla}(\vec{V}) = \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} \vec{e}_i = V_{i,jj} \vec{e}_i = \Delta \vec{V} = \Delta V_x \vec{e}_x + \Delta V_y \vec{e}_y + \Delta V_z \vec{e}_z$$

Soit f une fonction scalaire, alors :

$$\overline{\text{grad}}f = \nabla f = f_{,i} \vec{e}_i = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right\}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial n_j \partial n_j} \vec{e}_i = f_{,jj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit \vec{T} un tenseur d'ordre 2

$$\bar{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \bar{T} = T_{ij,j} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{T} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k^2} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{ij,KK} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

2.5.2 Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques [7] [4] :

Soit : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + r\theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r$; $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e}_\theta$; $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$

$$d(\overrightarrow{OM}) = dr\vec{e}_r + r(d\vec{e}_r) + dr\theta\vec{e}_\theta + r d\theta\vec{e}_\theta + r\theta d\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0$$

Soit un vecteur : $\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_z\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{\text{grad}V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - V_r \right) & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div } \vec{V} = \text{Tr}(\vec{\nabla}(\vec{V})) = \vec{\nabla}(\vec{V}) : \vec{I} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\Delta \vec{V} = \text{div} \vec{\nabla}(\vec{V}) = \left(\Delta V_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta V_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \Delta V_z \vec{e}_z$$

Soit f une fonction scalaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \vec{\nabla} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\nabla} \cdot f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Soit un tenseur $\bar{\bar{T}}$ symétrique du deuxième ordre :

$$\bar{\bar{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\text{div}(\bar{\bar{T}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{pmatrix}$$

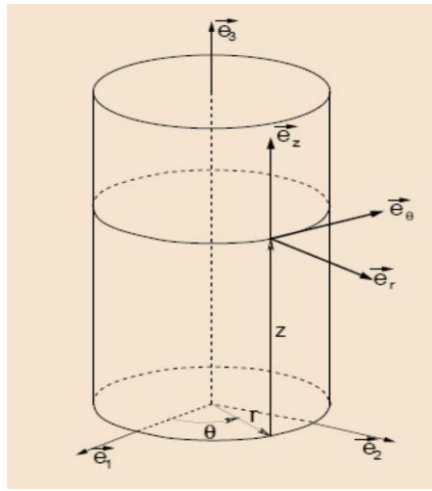


Figure 2.5 : Coordonnés cylindriques

2.5.3 Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques [7] :

$$\text{Soit : } \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \text{ ; } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \text{ ; } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Soit un vecteur : } \vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - V_\varphi \right) \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \cot g \theta V_\varphi \right) \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \cot g \theta V_\theta + V_r \right) \end{bmatrix}$$

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{V}) : \vec{I} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + 2 \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \cot g \theta \frac{V_\theta}{r}$$

$$\Delta \vec{V} = \text{div} \vec{\nabla}(\vec{V}) \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_r + \frac{2}{r^2} \left(V_r \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\partial(\sin \theta \cdot V_\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta V_\theta + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \Delta V_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \cot g \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \end{array} \right\}$$

NB : $\Delta V_r, \Delta V_\theta, \Delta V_\varphi$ voir Δf ci après.

- Soit f une fonction scalaire, alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \cdot f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\rangle$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cot g \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- Soit un tenseur $\vec{\vec{T}}$ symétrique du deuxième ordre :

$$\vec{\vec{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\varphi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\varphi} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\theta} & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\text{div}(\vec{\vec{T}}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2 T_{rr} - T_{\theta\theta} + T_{r\theta} \cot g \theta) \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} ((T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot g \theta + 3 T_{r\theta}) \\ \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2 T_{\theta\varphi} \cot g \theta + 3 T_{r\varphi}) \end{array} \right\}$$

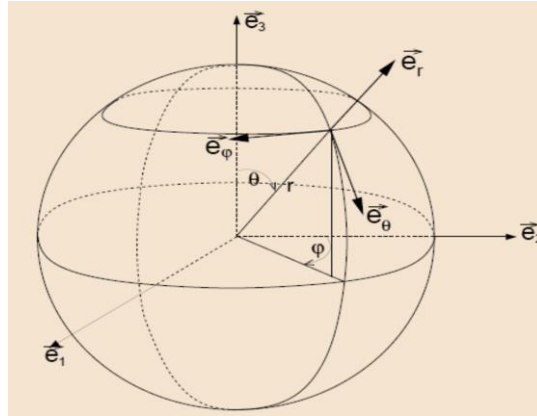


Figure 2.6 : Coordonnés sphériques.

2.6. Applications

Exercice 1

Ecrire sous forme indicielles les expressions suivantes :

a) $K_{11}X_1X_1 + K_{12}X_1X_2 + K_{13}X_1X_3 + K_{21}X_2X_1 + K_{22}X_2X_2 + K_{23}X_2X_3 + K_{31}X_3X_1 + K_{32}X_3X_2 + K_{33}X_3X_3$

b) $\frac{\partial y_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_j}{\partial y_1} + \frac{\partial y_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_j}{\partial y_2} + \frac{\partial y_i}{\partial y_3} \frac{\partial y_j}{\partial y_3}$

c) $\begin{cases} y_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 \\ y_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ y_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 \end{cases}$

Exercice 2

Dans une base orthonormée B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer : $|\vec{U}|; |\vec{V}|; \vec{U} \cdot \vec{V}; \vec{U} \wedge \vec{W}; (\vec{U}; \vec{V}; \vec{W})$

Exemple 3

Soient : $f = Ax_1^2 + Bx_2^2$; $\vec{V} = \begin{pmatrix} Ax_1^2 \\ Bx_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Effectuer les développements suivants : $div \vec{V}$; $div(\overline{grad} f)$; $\overline{div}(\overline{grad} \vec{V})$;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma x_3^2 \end{bmatrix}; \vec{A} = \begin{pmatrix} \alpha x_1^2 \\ \beta x_2^2 \\ \gamma x_3^2 \end{pmatrix}$$

- Effectuer les développements suivants : $\overline{\text{grad}(\text{div}\bar{A})}$; $\overline{\text{grad}}(\text{div}\vec{V})$

Exercice 4

Dans une base orthonormée B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 12/25 \\ -9/25 \\ 4/5 \end{pmatrix}; \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} -16/25 \\ 12/25 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer le vecteur unitaire \vec{n} tel que :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\| \vec{n}$$

- b) Vérifiez que les vecteurs unitaires $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ forme une base B' orthonormée.
 c) Ecrire la matrice de passage [T] de B vers B'
 d) Déterminez les composantes de \vec{V} dans la nouvelle base B'.

2.7 Correction

Exercice 1

Ecrire sous forme indicielles :

- a) $K_{ij} X_i X_j$, i et j : indices muets
 b) $\frac{\partial y_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_j}{\partial y_k}$, k : indice muet
 c) $y_i = A_{ij} X_j$, j : indice muet

Exercice 2

Nous avons : $\vec{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Calculer $|\vec{U}|$: $|\vec{U}| = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} = \sqrt{0^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
- Calculer $|\vec{V}|$: $|\vec{V}| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

- Calculer $\vec{U} \cdot \vec{V}$:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \langle U_1 \ U_2 \ U_3 \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \langle 0 \ \sqrt{2} \ 1 \rangle \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

- Calculer $\vec{U} \wedge \vec{W}$:

$$\vec{p} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_1 [(0.1 - 1.0)] - \vec{e}_2 [(\sqrt{2}.1 - 0.0)] + \vec{e}_3 [(\sqrt{2}.1 - 0.0)] = 0 \vec{e}_1 - \sqrt{2} \vec{e}_2 + \sqrt{2} \vec{e}_3$$

- Calculer $(\vec{U}; \vec{V}; \vec{W})$:

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \det \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0[(0.1 - 1.0)] - \sqrt{2}[(\sqrt{2}.1 - 0.0)] + 1[(\sqrt{2}.1 - 0.0)] = -2 + \sqrt{2}$$

Exercice 3

Soient : $f = Ax_1^2 + Bx_2^2$; $\vec{V} = \begin{Bmatrix} Ax_1^2 \\ Bx_2^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

- Calculer $\text{div} \vec{V}$:

$$\text{div} \vec{V} = V_{i,i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial Ax_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial Bx_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial 0}{\partial x_3} = 2Ax_1 + 2Bx_2$$

- Calculer $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2Ax_1 \\ 2Bx_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ V'_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial V'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V'_3}{\partial x_3} = \frac{\partial 2Ax_1}{\partial x_1} + \frac{\partial 2Bx_2}{\partial x_2} + \frac{\partial 0}{\partial x_3} = 2A + 2B = 2(A+B)$$

- Calculer $\overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V})$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Ax_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2Ax_2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A \\ 2B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \alpha x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma x_3^2 \end{bmatrix}; \vec{A} = \begin{bmatrix} \alpha x_1^2 \\ \beta x_2^2 \\ \gamma x_3^2 \end{bmatrix}$$

- Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}}\vec{A})$;

$$\overrightarrow{\text{div}}\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 + 0 + 0 \\ 0 + 2\beta x_2 + 0 \\ 0 + 0 + 2\gamma x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_1 \\ 2\beta x_2 \\ 2\gamma x_3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}}\vec{A}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v'_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{bmatrix}$$

- Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}}\vec{V})$:

$$\overrightarrow{\text{div}}\vec{V} = V_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial \alpha x_1^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta x_2^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma x_3^2}{\partial x_3} = 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + 2\gamma x_3$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}}\vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}f' = \nabla f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f'}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f'}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{bmatrix}$$

Exercice 4

Dans une base orthonormée B ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} 12/25 \\ -9/25 \\ 4/5 \end{pmatrix}; \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} -16/25 \\ 12/25 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le vecteur unitaire \vec{n} tel que : $\vec{V} = \|\vec{V}\| \vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}; \|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{n} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{-1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

b) Vérifiez que les vecteurs unitaires $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ forme une base B' orthonormée :

$$\vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 12/25 & -9/25 & 4/5 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{16}{25} \vec{e}_1 + \frac{12}{25} \vec{e}_2 + \frac{3}{5} \vec{e}_3 = \vec{e}'_3$$

$$\vec{e}'_2 \wedge \vec{e}'_3 = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ -16/25 & 12/25 & 3/5 \end{bmatrix} = \frac{12}{25} \vec{e}_1 - \frac{9}{25} \vec{e}_2 + \frac{4}{5} \vec{e}_3 = \vec{e}'_1$$

$$\vec{e}'_3 \wedge \vec{e}'_1 = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -16/25 & 12/25 & 3/5 \\ 12/25 & -9/25 & 3/5 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \vec{e}_1 + \frac{4}{5} \vec{e}_2 + 0 \vec{e}_3 = \vec{e}'_2$$

Résumé : $\begin{cases} \vec{e}'_1 \wedge \vec{e}'_2 = \vec{e}'_3 \\ \vec{e}'_2 \wedge \vec{e}'_3 = \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_3 \wedge \vec{e}'_1 = \vec{e}'_2 \end{cases} \rightarrow$ Les vecteurs $\vec{e}'_1; \vec{e}'_2$ et \vec{e}'_3 forme une base B' orthonormée.

c) Ecrire la matrice de passage $[T]$ de B vers B' : On la déduit de la réponse b)

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{12}{25} & \frac{-9}{25} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{-16}{25} & \frac{12}{25} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

d) Déterminez les composantes de \vec{V} dans la nouvelle base $B'(\vec{V}')$:

$$\vec{V}' = \langle V \rangle [T] = \langle 2 \quad 1 \quad -1 \rangle \begin{bmatrix} \frac{12}{25} & \frac{-9}{25} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{-16}{25} & \frac{12}{25} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ -10/25 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3 :

Théorie de l'état de contrainte

$$\sigma_n = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\tau = \sqrt{\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \sigma^2}$$

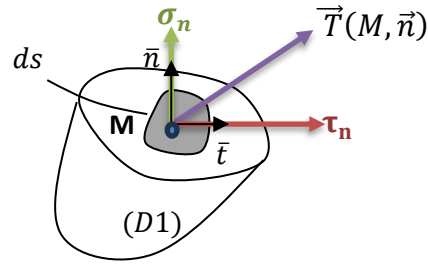


Figure 3.2 : Contrainte normale et tangentielle.

3.1.2 Tenseur de contraintes

Pour connaître un état de contraintes en un point M, du domaine (D), il faut connaître le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$, pour toutes facette passant par le point M (quel que soit \vec{n}), ce problème est résolu par le théorème de Cauchy.

3.1.2.1 Théorème de Cauchy

Nous écrivons l'équilibre d'un tétraèdre MABC infiniment petit défini autour d'un point M du solide, appuyé sur les axes x_1, x_2 et x_3 . Soit \vec{n} un vecteur normal au plan (ABC), unitaire et de composantes (n_1, n_2, n_3) , dirigée vers l'extérieur du tétraèdre. Désignons par (dS) l'aire du triangle ABC. Sur la facette ABC agit une force $d\vec{F}$, sur les trois autres facettes agissent les forces $d\vec{F}_1, d\vec{F}_2$ et $d\vec{F}_3$ [2][4].

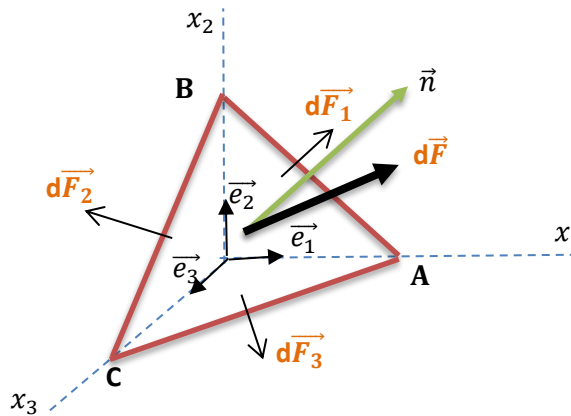


Figure 3.3 : Tétraèdre sous l'action des forces de surface

Equilibre des forces [6] :

$$d\vec{F} + d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + d\vec{F}_3 = 0 \rightarrow dS \vec{T}(M, \vec{n}) + dS_1 \vec{T}(M, -\vec{e}_1) + dS_2 \vec{T}(M, -\vec{e}_2) + dS_3 \vec{T}(M, -\vec{e}_3) = 0$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} dS_1 = n_1 dS \\ dS_2 = n_2 dS \\ dS_3 = n_3 dS \end{cases} ; \vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$$

$$\text{Donc : } dS \vec{T}(M, \vec{n}) + n_1 dS \vec{T}(M, -\vec{e}_1) + n_2 dS \vec{T}(M, -\vec{e}_2) + n_3 dS \vec{T}(M, -\vec{e}_3) = 0$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_1 \vec{T}(M, \vec{e}_1) + n_2 \vec{T}(M, \vec{e}_2) + n_3 \vec{T}(M, \vec{e}_3) = 0$$

Sous forme matricielle : $\{\vec{T}(M, \vec{n})\} = \langle \vec{T}(M, \vec{e}_1) \quad \vec{T}(M, \vec{e}_2) \quad \vec{T}(M, \vec{e}_3) \rangle \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$

En tout point M, il existe un tenseur d'ordre 2, appelé tenseurs des contraintes de Cauchy, définissant une application linéaire, qui a tous vecteurs \vec{n} , le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ et quel

que soit $\vec{n} : \vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n} ; \bar{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

$$T_i(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} \cdot n_j \dots\dots\dots (3.2)$$

Le tenseur de Cauchy $\bar{\sigma}(M)$ est symétrique.

3.1.3. Propriétés du tenseur $\bar{\sigma}$

D'un point de vue mécanique, Il serait très intéressant de trouver au point M, une facette \vec{n} telle que le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ soit colinéaire avec la normale \vec{n} . Dans ce cas le vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$ devient nul sur cette facette, et le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ satisfait la relation suivante : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n} = \sigma_n \cdot \vec{n} ; \tau_n = 0$.

La contrainte σ_n est alors une valeur propre du tenseur de contraintes $\bar{\sigma}(M)$ et \vec{n} le vecteur propre qui lui est associé. $\bar{\sigma}$ est symétrique donc, on peut le diagonaliser dans le repère E ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) comme suit [3][6] :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

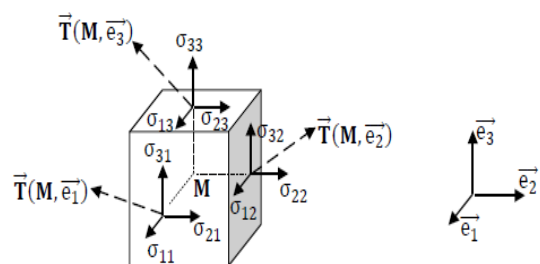


Figure 3.4 : Les contraintes dans le repère normal.

Nous sommes en mesure d'admettre qu'il existe une base orthonormée ($\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$) tel que le vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$ soit nul sur chacune des facettes de normale $\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$.

$\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$: Représentent les directions principales de $\bar{\sigma}(M)$, ainsi le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ dans la base ($\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III}$) s'écrit :

$$\bar{\sigma}_{(M, \bar{e}_I, \bar{e}_{II}, \bar{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

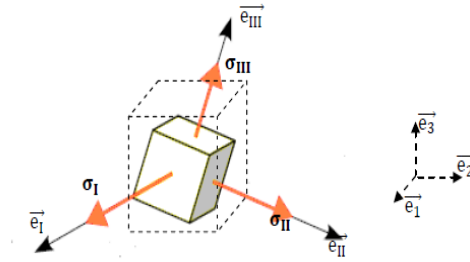


Figure 3.5 : Les contraintes dans le repère principale.

$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$: les contraintes principales. Si \vec{n} définit une direction principale :

$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{n}$: la projection de $\bar{\sigma}$ sur \vec{n} est égale à σ selon \vec{n} .

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma \cdot \vec{I} \cdot \vec{n} \rightarrow (\bar{\sigma} - \sigma \vec{I}) \cdot \vec{n} = 0$$

C'est un système linéaire de trois équations qui possède une solution si et seulement si [1] :

$$\det(\bar{\sigma} - \sigma \vec{I}) = 0 \dots\dots\dots (3.3)$$

Donc les contraintes principales, sont les valeurs propres de $\bar{\sigma}$.

$$\sigma_I = \lambda_1 > \sigma_{II} = \lambda_2 > \sigma_{III} = \lambda_3 : \text{solution de l'équation (3.3).}$$

Où $[\vec{I}]$ représente la matrice unité de dimension 3. Le scalaire λ désigne la variable du polynôme caractéristique, dont les racines correspondent aux contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III} . Le polynôme caractéristique se présente sous la forme suivante [1] :

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

Les scalaires I_1, I_2 et I_3 sont des quantités invariables qui ne dépendent pas de la base dans laquelle est formulé le tenseur $\bar{\sigma}(M)$. Les invariants principaux I_1, I_2 et I_3 sont définis comme suit :

- Invariant linéaire nommé trace de $\bar{\sigma}(M)$: $I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$
- Invariant quadratique : $I_2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}$
- Invariant cubique : $I_3 = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$

Les directions des contraintes principales sont calculées à l'aide de l'équation suivante :

$$(\bar{\sigma} - \sigma_i \vec{I}) \vec{X} = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

\vec{X} : Présente la direction principale de σ_i ($i=1$ à 3)

3.1.3.1 Représentation de Mohr

3.1.3.1.1 Principe de représentation de Mohr

Elle consiste à représenter le vecteur contrainte $\vec{T}(M)$ dans un plan lié à la facette de normale \vec{n} (Figure 3.6) : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}$

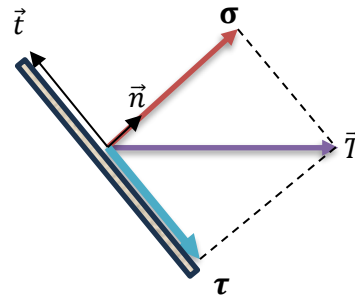


Figure 3.6 : principe de la représentation de Mohr.

On considère le plan défini par \vec{n} et $\vec{T}(M)$ et on l'oriente de sorte que $(\vec{n}, \vec{t}) = \frac{\pi}{2}$, on introduit alors un plan auxiliaire défini par les axes 0σ et $o\tau$, avec $(0\sigma, o\tau) = \frac{\pi}{2}$ dans lequel, on introduit pour chaque vecteur $\vec{T}(M)$ les composantes σ et τ [4].

3.1.3.1.2 Cercle de Mohr à partir des contraintes principales σ_I et σ_{II}

Supposons connues les facettes et contraintes principales d'un état plan de contrainte. On désire trouver les composantes σ et τ du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ agissant sur une facette quelconque (composantes perpendiculaire et parallèle à la facette). Prenons les axes principaux (x_1, x_2) comme référence. La facette est repérée par l'angle θ de sa normale avec x_1 (figure 3.7), angle qui se retrouve entre les facettes du triangle. Soit ensuite (x_I, x_{II}) des axes locaux attachés à la facette, obtenus par une rotation d'angle θ à partir des axes (x_1, x_2) . Ces axes permettent de fixer les sens positifs de σ et τ [2][10].

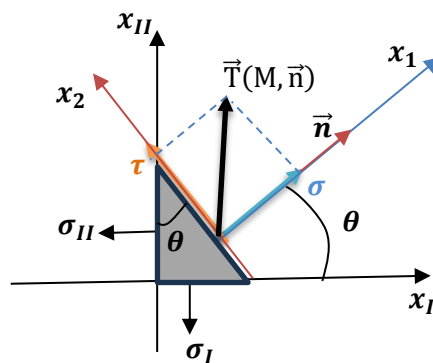


Figure 3.7 : Recherche de σ et τ (contraintes principales connues).

Le tenseur contraint dans les axes (x_1, x_2) s'obtient à partir du tenseur contraint dans les axes (x_I, x_{II}) par [3] :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La première ligne de $[\sigma]$ donne les composantes σ et τ cherchées :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_I \cos^2\theta + \sigma_{II} \sin^2\theta \\ \tau = (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos\theta \sin\theta \end{cases}$$

Ces formules sont les équations paramétriques d'une courbe plane $(\sigma, \tau) = 0$, dont on obtient l'équation en éliminant θ . Par les relations trigonométriques :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) ; \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) ; \sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$$

Donc :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\theta \\ \tau = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\theta \end{cases} \dots\dots\dots (3.5)$$

Posons $a = (\sigma_I + \sigma_{II}) / 2$ et $r = (\sigma_I - \sigma_{II}) / 2$;

$$\text{On aura : } \begin{cases} \sigma = a + r \cos 2\theta \\ \tau = -r \sin 2\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma - a = r \cos 2\theta \\ -\tau = r \sin 2\theta \end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités après les avoir élevées au carré, on obtient :

$$(\sigma - a)^2 + (-\tau)^2 = r^2$$

Dans un système $(\sigma, -\tau)$, cette équation est celle d'un cercle de rayon r , centré sur l'axe des σ à l'abscisse a .

Ce cercle (figure 3.8), dit **cercle de Mohr** (1882) [2], permet une représentation graphique très expressive de l'état de contrainte. On observe que :

- Les coordonnées d'un point quelconque P du cercle sont la contrainte normale et la contrainte tangentielle agissant sur la facette dont l'orientation est fixe par l'angle 2θ du rayon MP ;
- Deux facettes perpendiculaires sont données par deux points diamétralement opposés ; Le cercle coupe l'axe des abscisses aux points A et B donnant les contraintes principales ($\tau = 0$).

La **contrainte tangentielle maximale** est donnée par (rayon du cercle) : $\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$

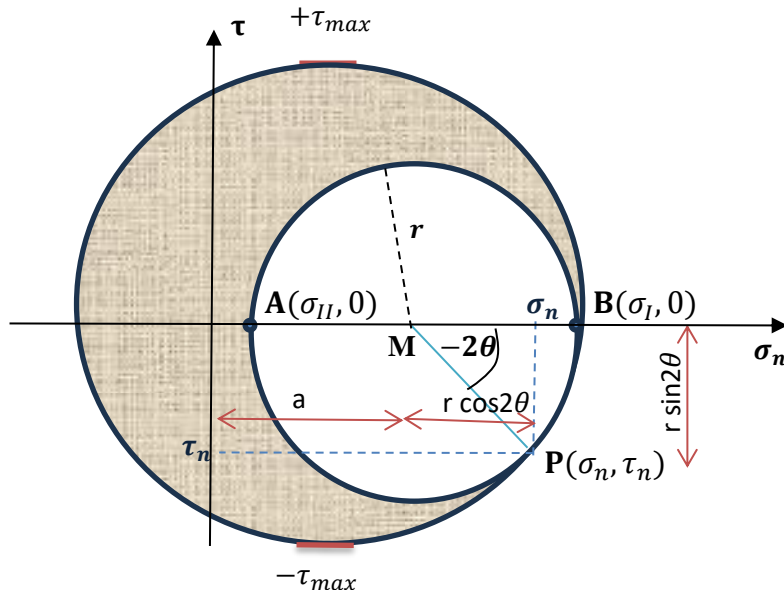


Figure 3.8 : Description Cercle de Mohr à partir des contraintes principales.

3.1.3.1.3 Tri-cercle de Mohr

On se place dans le repère principal $E_p(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$, des contraintes principales en un point M d'un solide quand notera : $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, on suppose que $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$, les expressions suivantes expriment les équations des trois cercles de Mohr [10] :

$$\begin{cases} \tau^2 + (\sigma - \sigma_{II})(\sigma - \sigma_{III}) \geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{III}) \geq 0 \\ \tau^2 + (\sigma - \sigma_I)(\sigma - \sigma_{II}) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\sigma - \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \dots\dots (a) \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \dots\dots (b) \dots\dots\dots (3.6) \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \dots\dots (c) \end{cases}$$

(a).Le point T est extérieur au cercle du centre $(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, 0)$ et de rayon $R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, idem pour (b) et (c).

N.B : Equation d'un cercle $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2$ de centre (n_0, y_0) et de rayon R.

Soit : $R_I = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}$; $R_{II} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$; $R_{III} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$

$A_I = \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}$; $A_{II} = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}$; $A_{III} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$

Conséquence : Pour toute facette l'expression T du vecteur contrainte \vec{T} se trouve à l'extérieur des deux petits cercles et à l'intérieur du grand cercle. On en déduit aussi que la **contrainte tangentielle maximale** est représentée par le rayon du plus grand des trois cercles, soit :

$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$

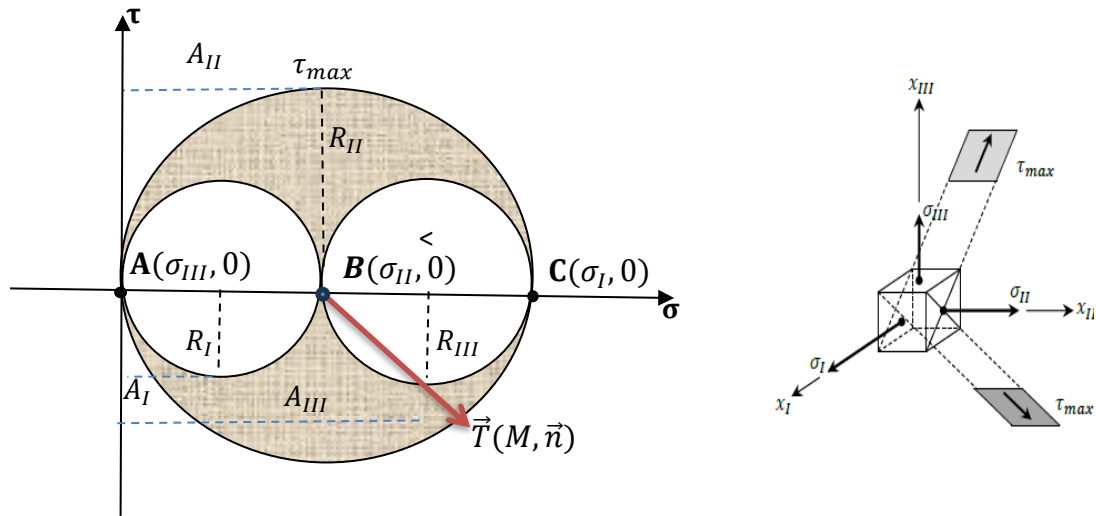


Figure 3.9 : Tri-cercles de Mhor.

3.2 Equation différentielle de l'équilibre en coordonnées cartésiennes

On considère un corps déformable (S) (figure 3.10), soumis à des sollicitations imposées [3] :

- Forces volumique $\vec{f}(\vec{x}, t)$ dans Ω
- Conditions aux limites :
 - ✓ Forces surfaciques imposées : $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_T$.
 - ✓ Déplacèrent imposés $\vec{U} = \vec{U}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_U$.

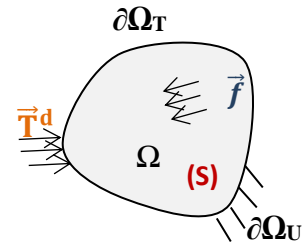


Figure 3.10 : les sollicitations appliquées sur (S).

L'équilibre du mouvement s'écrit en termes de contrainte comme suit :

$$\vec{\text{div}} \vec{\sigma} + \vec{f} = \mathbf{0} \text{ soit : } \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \dots\dots\dots (3.7) \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases}$$

En notation indicielle : $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$

3.3 Conditions aux limites

On considère un solide (S) élastique linéaire, isotrope et homogène de volume Ω et de frontière $\partial\Omega$ dans l'état d'équilibre (figure 3.10) :

- On lui impose des forces volumiques $\vec{f}(\vec{x})$
- Des conditions aux limites :
 - ✓ Forces surfaciques imposées : $\vec{T}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_T$.
 - ✓ Déplacement imposés $\vec{U}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_U$.

Comme conditions aux limites on a :

Problème de type I

Les déplacements sont imposés sur toute la frontière Ω .

$$\vec{U} = \vec{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U$$

Problème de type II

Les efforts surfaciques sont appliqués sur $\partial\Omega_T$.

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_T$$

Problème mixte

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d \text{ sur } \partial\Omega_T$$

$$\vec{U} = \vec{U}^d \text{ sur } \partial\Omega_U$$

Si les conditions aux limites ne dépendent pas de la solution, le problème est dit régulier (problème linéaire), il admet alors une solution unique.

3.4 Tenseur de contraintes particuliers

a. État de contraintes uni axial (traction ou compression simple)

L'état de contraintes en un point (M) est dit uni axial (figure 3.11), si le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme suivante [5]

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

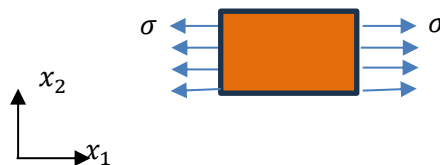


Figure 3.11 : État de contraintes uni-axial

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif. Si $\sigma > 0$, il s'agit d'une traction et si $\sigma < 0$ c'est une compression.

$$\mathbf{I}_1 = \sigma ; \mathbf{I}_2 = 0 ; \mathbf{I}_3 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \sigma \lambda^2 = 0 \Rightarrow \sigma_I = \sigma, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

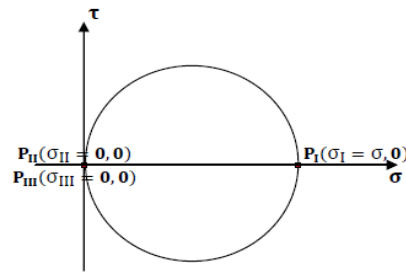


Figure 3.12 : Représentation d'un état de contraintes uni-axial

b. État plan de contrainte

En un point M, l'état de contrainte est plan (figure 3.13), si le tenseur des contraintes est de la forme [5]:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

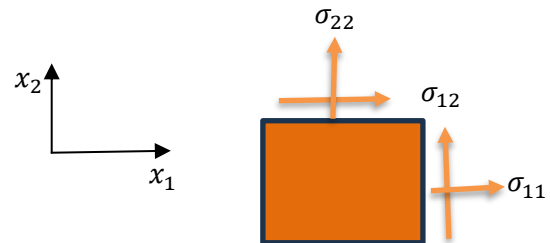


Figure 3.13 : État plan de contraintes

Les contraintes principales sont données par :

$$\sigma_I = \lambda_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{II} = \lambda_2 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \sigma_{12}^2}$$

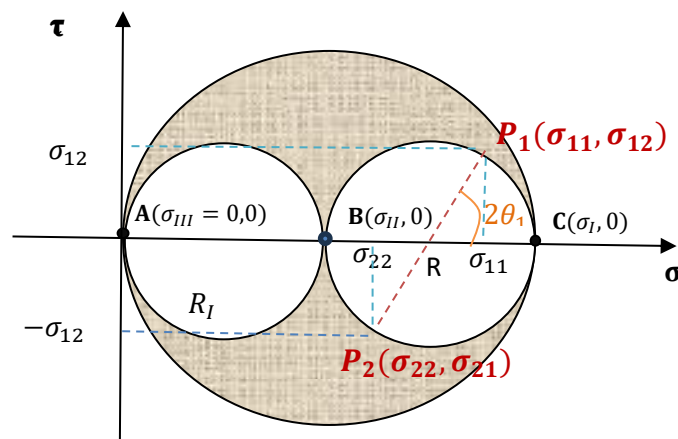


Figure 3.14 : Représentation d'un état de contraintes plan.

c. État de cisaillement simple

Si l'état de contraintes en M est un état de cisaillement simple (figure3. 10) par rapport aux deux directions, le tenseur des contraintes se réduit à [5] :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

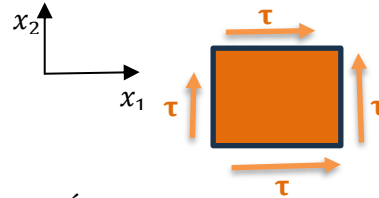


Figure 3.15 : État de cisaillement simple

$$I_1 = 0 ; I_2 = -\tau^2 ; I_3 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - (-\tau^2)\lambda^2 = 0 \Rightarrow \sigma_I = \tau, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = -\tau$$

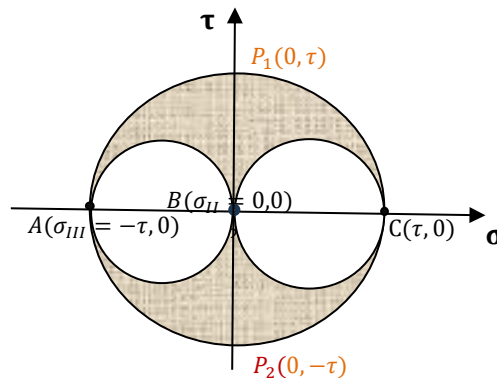


Figure 3.16 : Représentation d'un état de contraintes de cisaillement pur.

3.4 Applications

Exercice n°1

L'état de contrainte en un point d'un solide est défini par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ (Mpa)}$$

- 1- Déterminer les contraintes principales de $\bar{\sigma}$.
- 2- Déterminer le vecteur contraint appliqué en M, sur la facette définie par la normale $\vec{n}(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, déduire la contrainte normale et tangentielle.

Exercice n°2

Dans un solide élastique, le champ des contraintes est donné par le tenseur suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4x_1^3 x_3 & x_1 - x_3 & 4x_2^2 \\ x_1 - x_3 & -4x_2^2 & 0 \\ 4x_2^2 & 0 & 4x_1 x_3^3 \end{bmatrix} (\text{Mpa})$$

1. En utilisant l'équation d'équilibre, trouvez l'expressions de la force volumique $\vec{f} = \{f_1 \ f_2 \ f_3\}$.
2. Ecrire le tenseur de contrainte σ au point M (1,1,1).

Exercice n°3

On considère un solide en équilibre, constitué d'un matériau élastique linéaire et isotrope, soumis sur tout son contour à des efforts de surfaces de la forme : $\vec{T}_d = -P \vec{n}$.

1. Déterminez l'état de contrainte de ce solide.

Exercice n° 4

L'état de contrainte en un point d'un solide est défini par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} (\text{Mpa}), a : \text{est une constante réelle.}$$

1. Déterminer l'état de contrainte pour $a = 0$.
2. Déterminer en fonction de « a » les contraintes principales.
3. Tracer le cercle de Mohr pour $a = 1$.

3.5 Correction

Exercice n°1

Nous avons :
$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} (\text{Mpa})$$

1. Déterminer les contraintes principales de $\bar{\sigma}$.

$$\det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{I}) = 0 \rightarrow \text{Det} \left(\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

D'après le tenseur de contrainte, on remarque que 8 est une contrainte principale de direction \vec{e}_3 , donc on peut réduire le tenseur de contrainte pour calculer les deux autres comme suit :

$$\det \left(\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (6-\lambda)(6-\lambda) - 3 \cdot 3 = 0 \rightarrow (6-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$(6-\lambda+3)(6-\lambda-3) = 0 \rightarrow \text{donc soit: } \begin{cases} \lambda = 9 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Classement des contraintes principales : $\sigma_I = 9 \text{ Mpa}$; $\sigma_{II} = 8 \text{ Mpa}$; $\sigma_{III} = 3 \text{ Mpa}$

2. Déterminer le vecteur contraint appliqué en M, sur la facette définie par la normale $\vec{n} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$:

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9/\sqrt{3} \\ 9/\sqrt{3} \\ 8/\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

3. Dédurre la contrainte σ normale et tangentielle τ :

$$\sigma = \vec{T}(\vec{x}, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \left\langle \begin{matrix} 9/\sqrt{3} & 9/\sqrt{3} & 8/\sqrt{3} \end{matrix} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \frac{26}{3} = 8.66 \text{ Mpa}$$

$$\tau = \sqrt{\|\vec{T}(\vec{x}, \vec{n})\|^2 - \sigma^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right)^2 - \left(\frac{26}{3} \right)^2} = 0.45 \text{ Mpa}$$

Exercice n°2

$$\text{Nous avons : } \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4x_1^2 x_3 & x_1 - x_3 & 4x_2^2 \\ x_1 - x_3 & -4x_2^2 & 0 \\ 4x_2^2 & 0 & 4x_1 x_3^2 \end{bmatrix} (\text{Mpa})$$

1. En utilisant l'équation d'équilibre, trouvez l'expressions de la force volumique

$$\vec{f} = \{f_1 \quad f_2 \quad f_3\}.$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \mathbf{0} ; \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x_1x_3 + 0 + 0 + f_1 = 0 \\ 1 - 8x_2 + 0 + f_2 = 0 \\ 0 + 0 + 8x_3x_1 + f_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{f}_1 = -8x_1x_3 \\ \vec{f}_2 = 8x_2 - 1 \\ \vec{f}_3 = -8x_3x_1 \end{cases}$$

$$\vec{f} = \{-8x_1x_3 \quad 8x_2 - 1 \quad -8x_3x_1\}$$

2. Ecrire le tenseur de contrainte σ au point $M(1,1,1)$.

$$\overline{\overline{\sigma}}_M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} (\text{Mpa})$$

Exercice n°3

Nous avons : $\overrightarrow{T}_d = -P \vec{n}$.

1. Déterminez l'état de contrainte de ce solide.

$$\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{T}_d \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = -p \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = -p n_1 \dots (1) \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 = -p n_2 \dots (2) \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 = -p n_3 \dots (3) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow \sigma_{11} = -p ; \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$$

$$(2) \rightarrow \sigma_{22} = -p ; \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0 ; \text{Donc : } \overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \text{Mpa}$$

$$(3) \rightarrow \sigma_{33} = -p ; \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

Exercice n° 4

L'état de contrainte en un point d'un solide est défini par :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} (\text{Mpa}), a : \text{est une constante réelle.}$$

1. Déterminer l'état de contrainte pour $a = 0$.

$$\text{Pour } a = 0 \text{ le tenseur de contrainte } \overline{\overline{\sigma}} \text{ vaut : } \overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est l'état de contrainte uni axial suivant la première direction (elle peut être une traction ou compression).

2. Déterminer en fonction de « a » les contraintes principales :

$$\det(\bar{\sigma} - \sigma \bar{I}) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

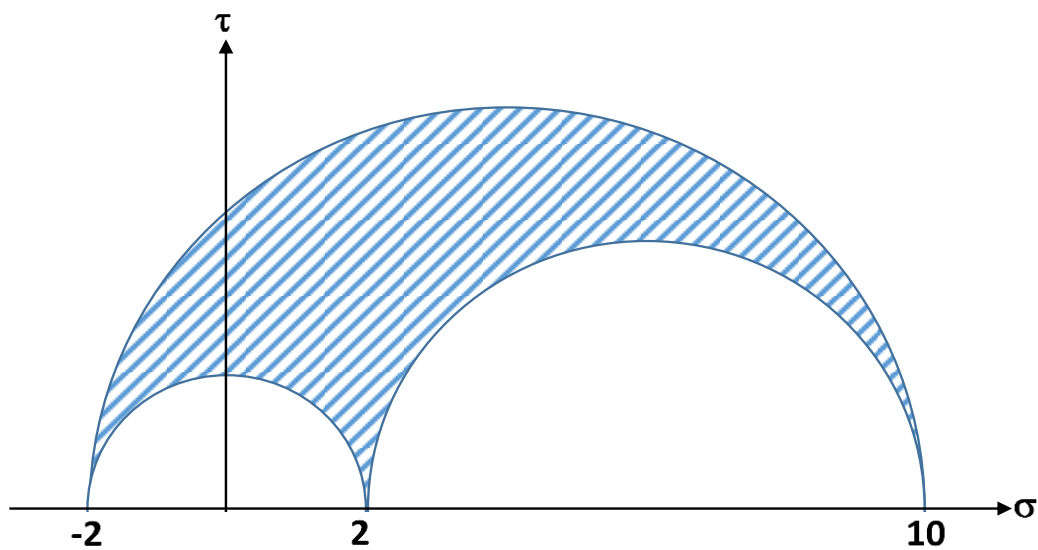
$$\det \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 6a \\ 0 & 6a & 4a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow (2 - \lambda)[(4a - \lambda)^2 - (6a)^2] = 0$$

$$\text{donc soit: } \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 10a \\ \lambda = -2a \end{cases}$$

Classement des contraintes principales : $\sigma_I = 10a \text{ Mpa}$; $\sigma_{II} = 2 \text{ Mpa}$; $\sigma_{III} = -2a \text{ Mpa}$

3. Tracer le cercle de Mohr pour $a = 1$:

Pour $a = 1$: Les contraintes principales : $\sigma_I = 10 \text{ Mpa}$; $\sigma_{II} = 2 \text{ Mpa}$; $\sigma_{III} = -2 \text{ Mpa}$



Tricercle de Mohr

Chapitre 4 :

Théorie de l'état de déformation

Objectifs du chapitre 4

Les objectifs tracés pour ce chapitre sont :

- Maitriser la description cinématique (Lagrangienne et Eulérienne) des déformations.
- Savoir la relation entre déformations et déplacements (petits et grands déplacements)
- Étude du tenseur de déformation en un point.
- Comprendre les équations de compatibilité de déformation en petits déplacements.
- Découvrir la relation entre déformations et déplacements en coordonnées cylindriques.

4.1 Description cinématique (Lagrangienne et Eulérienne)

4.1.1 Configuration d'un milieu continu

On se place dans l'espace Euclidien \mathbf{E} , un milieu continu est un ensemble (\mathbf{S}) de points matériels qui occupe à chaque instant (t) un domaine \mathbf{D} de \mathbf{E} . On appelle configuration (\mathbf{C}) de (\mathbf{S}) l'ensemble des positions occupées par les particules de (\mathbf{S}) à l'instant (t) . On appelle transformation entre deux instants t_0 et t , le changement de configuration entre \mathbf{C}_0 et \mathbf{C} , on choisit (\mathbf{C}_0) comme configuration de référence [2].

On se place dans $\mathbf{R}(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et on considère une particule dans (s) :

$$\mathbf{C}_0 : \vec{X} = \overrightarrow{OM}_0 \text{ à } t_0.$$

$$\mathbf{C} : \vec{x} = \overrightarrow{OM} \text{ à } t.$$

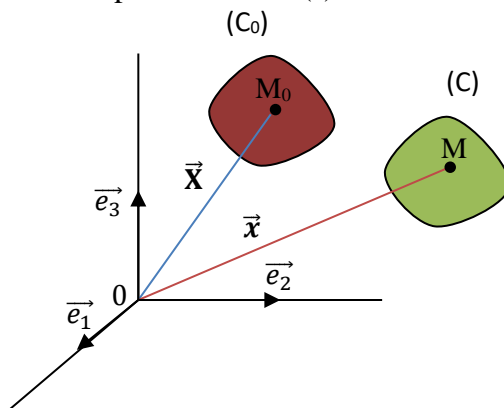


Figure 4.1 : Changement de Configuration de (\mathbf{S}) .

4.1.2 Description Lagrangienne

A l'instant (t) la position actuelle d'un point matériel quelconque de (\mathbf{S}) est définie par sa position initiale à (t_0) [11].

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}_0, t).$$

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) = \vec{\varphi}(X_1, X_2, X_3, t).$$

$\vec{\varphi}$: fonction vectorielle bijective définie $\forall M_0 \in D_0$ à t_0 , dans ce cas X_1, X_2, X_3 et t sont des variables Lagrangienne ou variables matérielles.

4.1.3 Description Eulérienne

En description Eulérienne, on définit les grandeurs physiques en fonction de la position actuelle à l'instant (t) en particulier le vecteur vitesse [11] :

$$\vec{V} = \vec{V}(\overrightarrow{OM}, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$$

x_1, x_2, x_3 et t sont appelés variables *Eulériennes*, variables géométriques ou spéciales, elles sont utilisées en Mécanique des Fluides.

4.2 Etude des déformations en variable de Lagrange

4.2.1 Tenseur gradient de déformation

Considérons le vecteur matériel élémentaire (figure 4.2) [3] :

$$d\vec{X}: d\vec{X} = \overrightarrow{M_0M'_0} \text{ dans } (C_0).$$

$$d\vec{x} = \overrightarrow{MM'} \text{ dans } (C).$$

$\overrightarrow{M_0M}$ Traduit le déplacement de particules entre M_0 et M.

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \overrightarrow{M_0M} = (\vec{x} - \vec{X})$$

$$M'_0 \in (C_0) \rightarrow M' \in (C); \overrightarrow{OM}'_0 = \overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{M_0M}'_0$$

$$\vec{X}' = \vec{X} + d\vec{X}; \overrightarrow{OM}' = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}'_0, t);$$

Ou bien $\overrightarrow{OM}' = \vec{\varphi}(\vec{X} + d\vec{X}, t)$

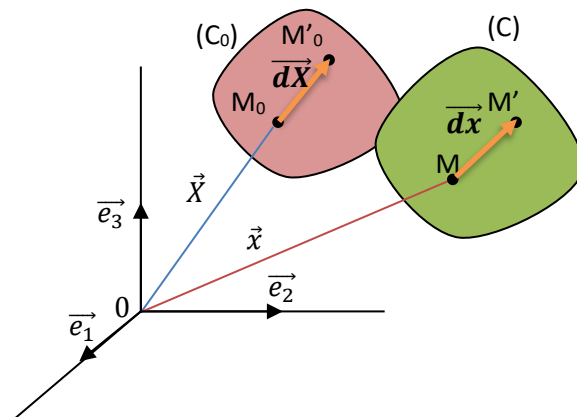


Figure 4.2 : Déplacement de particule (S)

En notation indicielle : $\vec{x}_i = \varphi_i(\vec{X} + d\vec{X}, t) = \varphi_i(\vec{X}, t) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(\vec{X}, t) dX_j$ ($i, j = 1 \text{ à } 3$).

En notation vectorielle : $\vec{x}' = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) + \overline{\text{grad}} \vec{\varphi}(\vec{X}, t) d\vec{X}$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \overline{\text{grad}} \vec{\varphi}(\vec{X}, t) d\vec{X}$$

Où : $d\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x}$; $d\vec{x} = \overline{\text{grad}} \vec{\varphi}(\vec{X}, t) d\vec{X}$,

On pose : $\vec{F}(\vec{X}, t) = \overline{\text{grad}} \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$

$$F_{ij}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\vec{X}, t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}(\vec{X}, t) = x_{ij} ; \text{ Donc } d\vec{x} = \vec{F}(\vec{X}, t) d\vec{X} \dots \dots \dots (4.1)$$

$\vec{F}(\vec{X}, t)$: est appelé **tenseur gradient de déformation**, il caractérise les déformations locales au voisinage du point M_0 à t .

4.2.2 Tenseur de déformation de Green Lagrange

La déformation traduit la variation de longueur ou d'angle, elle est définie par la variation du produit scalaire de deux vecteurs matriciels entre deux configurations C_0 et C [2][3].

$$\overline{dx} \cdot \overline{\delta x} - \overline{dX} \cdot \overline{\delta X} = 2 \overline{dX} \cdot \vec{E}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\delta X}$$

Pour caractériser la variation du produit scalaire des vecteurs \overline{dx} et $\overline{\delta x}$ entre (C_0) et (C) , on introduit le tenseur de déformation de **Green Lagrange** définie comme suit :

$$\overline{dX} \rightarrow \overline{dx}; \text{ Tel que : } \overline{dx} = \vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \overline{dX}.$$

$$\overline{\delta X} \rightarrow \overline{\delta x}; \text{ Tel que : } \overline{\delta x} = \vec{F}(\vec{X}, t) \overline{\delta X}.$$

$$\overline{dx} \cdot \overline{\delta x} = {}^t(\vec{F}(\vec{X}, t)) \cdot (\vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\delta X}) = \overline{dX} \cdot {}^t\vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\delta X} .$$

On pose : ${}^t\vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \vec{F}(\vec{X}, t) = \vec{C}(\vec{X}, t)$.

$$\overline{dx} \cdot \overline{\delta x} = \overline{dX} \cdot \vec{C}(\vec{X}, t) \overline{\delta X}.$$

En notation indicielle : $C_{ij}(\vec{X}, t) = F_{ki}(\vec{X}, t) \cdot F_{kj}(\vec{X}, t)$.

$$\overline{dx} \cdot \overline{\delta x} = \overline{dX} \vec{C}(\vec{X}, t) \overline{\delta X} ; \vec{C}(\vec{X}, t) : \text{ tenseur de dilatation.}$$

$$\overline{dX} \cdot \overline{\delta X} = \overline{dX} \vec{I} \cdot \overline{\delta X} ; \text{ Ou } \vec{I} : \text{ Tenseur identité.}$$

$$\overline{dX} \vec{C} \overline{\delta X} - \overline{dX} \vec{I} \overline{\delta X} = 2 \overline{dX} \vec{E}(\vec{X}, t) \overline{\delta X}$$

$$\overline{dX} (\vec{C} - \vec{I}) \overline{\delta X} = 2 \overline{dX} \vec{E}(\vec{X}, t) \overline{\delta X}.$$

$$\vec{E}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} (\vec{C}(\vec{X}, t) - \vec{I}) = \frac{1}{2} [{}^t\vec{F}(\vec{X}, t) \cdot \vec{F}(\vec{X}, t) - \vec{I}] \dots \dots \dots (4.2)$$

$$\bar{E}_{ij}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} [F_{ki}(\vec{X}, t) \cdot F_{kj}(\vec{X}, t) \cdot \delta_{ij}] ; E_{ij}(\vec{X}, t) : \text{tenseur de déformation.}$$

4.2.3 Relation entre le champ de déplacement $\vec{U}(\vec{X}, t)$ et $\bar{E}(\vec{X}, t)$

Entre la configuration (C₀) et (C) (M₀ → M), on a : $\vec{U}(\vec{X}, t) = \overline{M_0 M} = \vec{x} - \vec{X}$

En notation indicielle : $U_i(X, t) = x_i - X_i$ en dérive par rapport à X_j :

$$\frac{\partial U(X, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \rightarrow U_{ij} = x_{ij} - X_{ij} = x_{ij} - \delta_{ij}$$

En notation tensorielle : $\overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t) = \overline{\text{grad}}\vec{\varphi}(\vec{X}, t) - \bar{I} = \bar{F}(\vec{X}, t) - \bar{I}$

$$\bar{F}(\vec{X}, t) = \overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t) + \bar{I}$$

On a : $\bar{E}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} [{}^t\bar{F}(\vec{X}, t) \cdot \bar{F}(\vec{X}, t) - \bar{I}]$

$$E_{ij}(\vec{X}, t) = \frac{1}{2} [F_{ki}(\vec{X}, t) \cdot F_{kj}(\vec{X}, t) - \delta_{ij}] = \frac{1}{2} [(U_{ki} + \delta_{ki})(U_{kj} + \delta_{kj}) - \delta_{ij}]$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t) + {}^t\overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t) + {}^t\overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t) \cdot \overline{\text{grad}}\vec{U}(\vec{X}, t)] \dots\dots\dots (4.3)$$

La relation entre le tenseur \bar{E} et le champ de déplacement \vec{U} est non linéaire.

4.2.4 Changement de longueur allongement dans la direction \vec{n}

Dans la configuration (C₀), le vecteur élémentaire $\overline{dX} = dl_0 \vec{n}_0$ et dans la configuration (C) : $\overline{dx} = dl \cdot \vec{n}$

$$\overline{dx} \cdot \overline{dx} - \overline{dX} \cdot \overline{dX} = 2 \overline{dX} \cdot \bar{E} \cdot \overline{dX}$$

$$dl^2 - dl_0^2 = 2 \overline{dX}_i \bar{E}_{ij} \overline{dX}_j = 2 dl_0 n_{0i} E_{ij} dl_0 n_{0j}$$

$$\frac{dl^2 - dl_0^2}{dl_0^2} = 2 n_{0i} E_{ij} n_{0j}$$

$$\frac{dl^2}{dl_0^2} = 1 + 2 n_{0i} E_{ij} n_{0j}$$

L'allongement subit par le vecteur élémentaire \overline{dX} de longueur dl_0 dans la direction \vec{n}_0 est :

$$\varepsilon(\vec{n}_0) = \sqrt{1 + 2 n_{0i} E_{ij} n_{0j}} - 1 \dots\dots\dots (4.4)$$

4.2.5 Variation d'angle de glissement dans deux directions

On définit le glissement dans deux direction \vec{n}_0 et \vec{m}_0 comme étant la différence d'angle [2][3].

$$\gamma(\vec{n}_0, \vec{m}_0) = \theta_0 - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\overrightarrow{dx\delta x} - \overrightarrow{dX\delta X} = 2\overrightarrow{dX}\overline{\overline{E}}\delta\overrightarrow{X}$$

$$dl \delta l \cos\theta - dl_0\delta l_0 \cos\frac{\pi}{2} = 2 dX_i E_{ij} \delta X_j$$

$$dl \delta l \cos\theta = 2 dl_0 m_{0i} E_{ij} \delta l_0 n_{0j} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2 m_{0i} E_{ij} n_{0j}}{dl/dl_0 \cdot \delta l/\delta l_0}$$

Comme $\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ donc $\cos\theta = \sin\gamma$

$$\cos\theta = \frac{2 m_{0i} E_{ij} n_{0j}}{[\varepsilon(\overrightarrow{m}_0) + 1] \cdot [\varepsilon(\overrightarrow{n}_0) + 1]}$$

$$\sin\gamma = \frac{2 m_{0i} E_{ij} n_{0j}}{[\varepsilon(\overrightarrow{m}_0) + 1][\varepsilon(\overrightarrow{n}_0) + 1]}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{2 m_{0i} E_{ij} n_{0j}}{[\varepsilon(\overrightarrow{m}_0) + 1][\varepsilon(\overrightarrow{n}_0) + 1]}$$

$$\gamma = \arcsin \frac{2 m_{0i} E_{ij} n_{0j}}{\sqrt{1+2n_{0i}E_{ij}n_{0j}}\sqrt{1+2m_{0i}E_{ij}m_{0j}}} \dots\dots\dots (4.5)$$

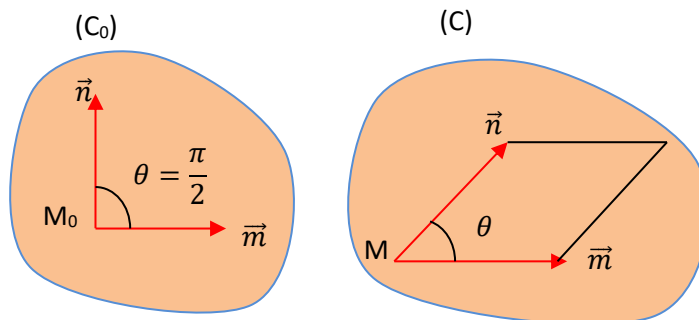


Figure 3 : Variation d'angle de glissement.

4.2.6 Signification des composantes de $\overline{\overline{E}}$

L'allongement subit par le vecteur élémentaire \overrightarrow{dX} de longueur dl_0 dans la direction \overrightarrow{e}_1 est [2][3] :

$$\overrightarrow{dX} = dl_0 \overrightarrow{e}_1 \ ; \ \delta\overrightarrow{X} = \delta l_0 \overrightarrow{e}_2 \ .$$

$$\varepsilon(\overrightarrow{e}_1) = \frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{dl}{dl_0} - 1$$

$$\varepsilon(\overrightarrow{e}_1) = \sqrt{1 + 2\overrightarrow{e}_1 E_{11} \overrightarrow{e}_1} - 1$$

$$1 + 2E_{11} = \left(\frac{dl}{dl_0}\right)^2 \Rightarrow E_{11} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dl}{dl_0}\right)^2 - 1 \right]$$

Ou bien : $\sqrt{1 + 2E_{11}} = 1 + \varepsilon(\vec{e}_1) \Rightarrow 1 + 2E_{11} = [1 + \varepsilon(\vec{e}_1)]^2 \Rightarrow$

$$E_{11} = \frac{1}{2} ([1 + \varepsilon(\vec{e}_1)]^2 - 1)$$

Idem pour :

$$E_{22} = \frac{1}{2} ([1 + \varepsilon(\vec{e}_2)]^2 - 1)$$

$$E_{33} = \frac{1}{2} ([1 + \varepsilon(\vec{e}_3)]^2 - 1)$$

Le glissement selon la direction \vec{e}_1 et \vec{e}_2 :

$$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \arcsin \frac{2\vec{e}_1 \cdot E \cdot \vec{e}_2}{[1 + \varepsilon(\vec{e}_1)][1 + \varepsilon(\vec{e}_2)]} = \arcsin \frac{2E_{12}}{[1 + \varepsilon(\vec{e}_1)][1 + \varepsilon(\vec{e}_2)]}$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} [[1 + \varepsilon(\vec{e}_1)][1 + \varepsilon(\vec{e}_2)] \sin \gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2)] = E_{21}$$

E_{11}, E_{22}, E_{33} : caractérisent les allongements dans les directions des axes.

E_{12}, E_{13}, E_{23} : caractérisent les glissements selon les axes.

\bar{E} : Tenseur d'ordre deux de Green Lagrange.

4.3 Tenseur des déformations linéaires

4.3.1 Hypothèse des petites perturbations (H.P.P)

Le système s'écarte très peu de sa position initiale $C \approx C_0$ les déformations et les déplacements restent très petites par rapport a l'unité $\|\vec{U}\| \ll 1$ et $\|\overline{\text{grad}}\vec{U}\| \ll 1$; $\|U_i\| \ll 1$ et $\|U_{ij}\| \ll 1$ [2][3].

- $\vec{x} \approx \vec{X}$
- On néglige les termes non linéaires de E.

Le tenseur \bar{E} sera linéaire $\Rightarrow \bar{E} \rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overline{\text{grad}}\vec{U} + {}^t\overline{\text{grad}}\vec{U}) \dots \dots \dots (4.6)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Les expressions des allongements vont se simplifier :

$$\varepsilon(\vec{n}_0) = \sqrt{1 + 2 n_{0i} E_{ij} n_{0j}} - 1 = \sqrt{1 + n_{0i} \varepsilon_{ij} n_{0j}} - 1 = 1 + \frac{1}{2} n_{0i} \varepsilon_{ij} n_{0j} - 1$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\vec{n}_0) = n_{0i} \varepsilon_{ij} n_{0j} \dots \dots \dots (4.7)$$

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \varepsilon_{11} ; \varepsilon(\vec{e}_2) = \varepsilon_{22} ; \varepsilon(\vec{e}_3) = \varepsilon_{33}$$

$$\gamma((\vec{n}_0, \vec{m}_0)) = \sin \gamma(\vec{n}_0, \vec{m}_0) = \frac{2 n_{0i} \varepsilon_{ij} m_{0j}}{\sqrt{1 + n_{0i} \varepsilon_{ij} n_{0j}} \sqrt{1 + m_{0i} \varepsilon_{ij} m_{0j}}} \approx 2 m_{0i} \varepsilon_{ij} m_{0j}$$

$$\gamma((\vec{n}_0, \vec{m}_0)) = 2 n_{0i} \varepsilon_{ij} m_{0j} \dots \dots \dots (4.8)$$

$$\gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2\varepsilon_{12} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) ; \gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2\varepsilon_{13} ; \gamma(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2\varepsilon_{23}$$

4.3.2 Etude du tenseur de déformation linéaire en un point

a) Déformations principales

Soit $B(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée dans le repaire normale le tenseur de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$

symétrique est donné par [5] : $\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

Dans le repaire principale $R_p((0, \vec{e}_{1p}, \vec{e}_{2p}, \vec{e}_{3p}))$ $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est donné par :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les déformations principales obtenus par la résolution de l'équation caractéristique [5] : $\det(\bar{\bar{\varepsilon}} - \lambda \bar{\bar{I}}) = 0 \dots \dots \dots (4.9)$

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0 \text{ Avec } I_1, I_2, I_3 \text{ invariants de } \bar{\bar{\varepsilon}}$$

Avec : $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

b) Décomposition en déviateur et partie sphérique

Le tenseur de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est décomposé en partie déviateur et partie sphérique tel que [5] :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{e}} \quad \varepsilon : \text{Partie sphérique (scalaire)}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij} \quad \varepsilon = \frac{1}{3} tr \bar{\bar{\varepsilon}}$$

$\bar{\bar{e}}$: Tenseur déviateur

$$\bar{\bar{e}} = \bar{\bar{\varepsilon}} - \varepsilon \bar{\bar{I}}$$

c) Directions principales

Elles sont obtenues par la résolution de l'équation : $(\bar{\varepsilon} - \lambda \bar{I})(\vec{X}) = 0$

\vec{X} : Direction principale.

4.4 Equations de compatibilité de déformation en petits déplacements

Soit le tenseur de déformation $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{U} + {}^t\overline{\text{grad}} \vec{U}); \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}).$$

Si on donne les déplacements $\vec{U}(\vec{X}, t)$ entre (C_0) et (C) , on peut calculer $\bar{\varepsilon}$, inversement si on connaît $\bar{\varepsilon}$ peut-on calculer \vec{U} ?

Ce n'est pas toujours possible c'est le problème de compatibilité et de déformation linéaire $\bar{\varepsilon}$.

Théorème

Pour que le champ de déplacement $\bar{\varepsilon}$ soit compatible c.-à-d intégrable, il faut et il suffit que les équations de compatibilité soient vérifiées [4].

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2 \varepsilon_{12,12} = 0$$

$$\varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} - \varepsilon_{31,21} + \varepsilon_{12,31} = 0$$

$$\varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} - 2 \varepsilon_{23,23} = 0$$

$$\varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22} - \varepsilon_{12,32} - \varepsilon_{23,12} = 0$$

$$\varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} - 2 \varepsilon_{31,31} = 0$$

$$\varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{23,13} - \varepsilon_{31,23} = 0$$

4.5 Cinématique des déformations en variables Eulériennes

4.5.1 Dérivée par rapport à t de $d\vec{x}$

En variable Eulérienne [2] :

$$x_i = x_i(X, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \Rightarrow dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$$

$$\hat{d}\vec{x}_i = \frac{d(dx_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) dX_j ; \quad \frac{dx_i}{dt} = V_i(X, t)$$

Donc : $\hat{d}\vec{x}_i = \frac{\partial V_i}{\partial X_j}(\vec{X}, t) dX_j = \frac{\partial V_i}{\partial x_k}(\vec{x}, t) \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j$, V_i : est exprimée en fonction de X et t

$$\hat{d}\vec{x}_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_k}(\vec{x}, t) dx_k \Rightarrow \hat{d}\vec{x}_i = V_{i,j} dx_k$$

En notation tensorielle : $\hat{d}\vec{x}_i = \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \overline{\overline{d}\vec{x}}$.

4.5.2 Tenseur taux de déformation ou bien tenseur de vitesse

Le tenseur de vitesse exprime la vitesse des déformations en variables **Eulériennes** [2], la variation par rapport au temps (t) du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires $\overline{\overline{d}\vec{x}}\overline{\overline{d}\vec{x}}$ est de :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\overline{\overline{d}\vec{x}}\overline{\overline{d}\vec{x}}) &= 2\overline{\overline{d}\vec{x}} \cdot \overline{\overline{D}} \cdot \overline{\overline{d}\vec{x}} = \frac{d}{dt}(\overline{\overline{d}\vec{x}})\overline{\overline{d}\vec{x}} + \overline{\overline{d}\vec{x}} \frac{d}{dt}(\overline{\overline{d}\vec{x}}) = \hat{d}\vec{x}\overline{\overline{d}\vec{x}} + \overline{\overline{d}\vec{x}}\hat{d}\vec{x} \\ &= {}^t(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \overline{\overline{d}\vec{x}})\overline{\overline{d}\vec{x}} + \overline{\overline{d}\vec{x}}(\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) \cdot \overline{\overline{d}\vec{x}}) = \\ &dx \ {}^t\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t)\overline{\overline{d}\vec{x}} + \overline{\overline{d}\vec{x}} \cdot \overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t)\overline{\overline{d}\vec{x}} = \overline{\overline{d}\vec{x}}[\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) + {}^t\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t)]\overline{\overline{d}\vec{x}} = 2\overline{\overline{d}\vec{x}} \overline{\overline{D}} \overline{\overline{d}\vec{x}} \\ \text{D'où : } D &= \frac{1}{2}[\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t) + {}^t\overline{\overline{\text{grad}}} \vec{V}(\vec{x}, t)] \dots\dots\dots (4.10) \end{aligned}$$

En variables Eulériennes la relation entre le tenseur $\overline{\overline{D}}$ de déformation et le champ de vitesse est linéaire, donc $\overline{\overline{D}}$ est symétrique.

4.6 Relation entre déformation et déplacement en coordonnées cylindriques

La relation entre les déformations et les déplacements en coordonnées cylindriques est exprimée par les relations suivantes [5] :

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left(U_r + \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} \right) \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right) \\ \epsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

4.7 Applications

Exercice n° 1

En tout point M du solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

$$\{\vec{U}\} = \begin{cases} U_1 = x_1^2 + 10 \\ U_2 = 2x_2x_3 \\ U_3 = x_3^2 - x_1x_2 \end{cases} \quad (10)^{-2}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation correspondant $\bar{\epsilon}$.
2. Déterminer le tenseur de déformation au point M (0,2,1).

Exercice n° 2

En tout point M du solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

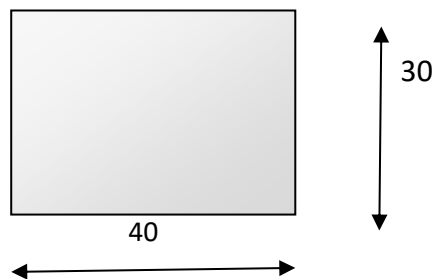
$$\begin{cases} U_1 = 5x_1 - x_2 - x_3 \\ U_2 = -x_1 + 4x_2 \\ U_3 = -x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation correspondant.
2. Déterminer les déformations principales.
3. Déterminer l'allongement unitaire suivant la direction $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
4. Déterminer le glissement selon \vec{n} et $\vec{m} = (\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

Exercice n° 3

Calculer la variation de la longueur selon la diagonale d'une plaque de 30 x 40 cm², sachant que le champ de déformation est défini par l'état plan de déformation suivant :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= -1 \times 10^{-3}, \\ \epsilon_{12} &= -2 \times 10^{-3} \\ \epsilon_{22} &= 5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

**Exercice n° 4**

En tout point M d'un solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

$$\begin{cases} U_1 = x_1 + 2x_2x_3 \\ U_2 = x_2 - 2x_1x_3 \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation au point M (1,1,0).
2. Déterminer les déformations principales au point M.

4.8 Solutions

Exercice n° 1

On définit le vecteur déplacement suivant :

$$\{\vec{U}\} = \begin{cases} U_1 = x_1^2 + 10 \\ U_2 = 2x_2x_3 \\ U_3 = x_3^2 - x_1x_2 \end{cases} (10)^{-2}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation correspondant $\bar{\bar{\epsilon}}$.

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{U} + {}^t\overline{\text{grad}} \vec{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & \frac{1}{2}(0+0) & \frac{1}{2}(0-x_2) \\ \frac{1}{2}(0+0) & 2x_3 & \frac{1}{2}(2x_2-x_1) \\ \frac{1}{2}(0-x_2) & \frac{1}{2}(2x_2-x_1) & 2x_3 \end{bmatrix} (10)^{-2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & \frac{-x_2}{2} \\ 0 & 2x_3 & \frac{1}{2}(2x_2-x_1) \\ \frac{-x_2}{2} & \frac{1}{2}(2x_2-x_1) & 2x_3 \end{bmatrix} (10)^{-2}$$

2. Déterminer le tenseur de déformation au point M (0,2,1) :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} (10)^{-2}$$

Exercice n° 2

En tout point M du solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

$$\begin{cases} U_1 = 5x_1 - x_2 - x_3 \\ U_2 = -x_1 + 4x_2 \\ U_3 = -x_1 + 4x_3 \end{cases}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation correspondant :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\overline{\text{grad}} \vec{U} + {}^t\overline{\text{grad}} \vec{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2}(-1-1) & \frac{1}{2}(-1-1) \\ \frac{1}{2}(-1-1) & 4 & \frac{1}{2}(0+0) \\ \frac{1}{2}(-1-1) & \frac{1}{2}(0+0) & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer les déformations principales.

$$\text{Nous avons : } \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\bar{\varepsilon} - \lambda \bar{I}) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(5 - \lambda)[(4 - \lambda)(4 - \lambda) - 0] + 1[(-1)(4 - \lambda) - 0] + 1[(4 - \lambda)] = 0$$

$$(4 - \lambda)[(5 - \lambda)(4 - \lambda) - 1 - 1] = 0 \rightarrow (4 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 6 \end{cases}$$

Classement des déformations principales : $\varepsilon_I = 6$; $\varepsilon_{II} = 4$; $\varepsilon_{III} = 3$

3. Déterminer l'allongement unitaire suivant la direction $\vec{n} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

$$\varepsilon(\vec{n}) = \vec{n} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{n} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

$$= \left\langle \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = 3$$

5. Calculez le glissement selon \vec{n} et $\vec{m} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

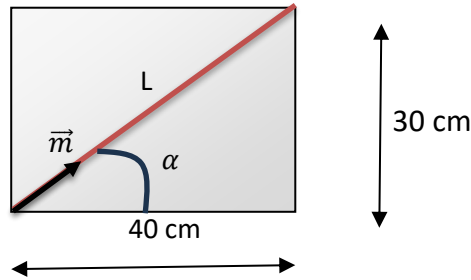
$$\gamma(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 2 \vec{n} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{m} = 2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{Bmatrix}$$

$$= 2 \left\langle \frac{-1.5}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{Bmatrix} = 0$$

Exercice n° 3

Calculer la valeur de la longueur (ΔL) selon la diagonale d'une plaque de 30 x 40 cm² :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -1 \times 10^{-3}, \\ \varepsilon_{12} &= -2 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{22} &= 5 \times 10^{-3} \end{aligned}$$



Nous avons :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$L = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ cm}$$

$$\vec{m} = \begin{cases} \cos \alpha = \frac{40}{50} = 0.8 \\ \sin \alpha = \frac{30}{50} = 0.6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{m}) &= \vec{m} \cdot \bar{\varepsilon} \cdot \vec{m} = \langle 0.8 \quad 0.6 \rangle \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \\ &= \langle -2 \quad 1.4 \rangle \begin{Bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} = -0.76 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\varepsilon(\vec{m}) = \frac{\Delta L}{L} \leftrightarrow \Delta L = \varepsilon(\vec{m}) \cdot L = -0.76 \cdot 10^{-3} \cdot 50 = -0.038 \text{ cm.}$$

Exercice n° 4

En tout point M d'un solide, on définit le vecteur déplacement suivant :

$$\begin{cases} U_1 = x_1 + 2x_2x_3 \\ U_2 = x_2 - 2x_1x_3 \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le tenseur de déformation au point M (1,1,0).

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} + {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(2x_3 - 2x_3) & \frac{1}{2}(2x_2 + 0) \\ \frac{1}{2}(2x_3 - 2x_3) & 1 & \frac{1}{2}(-2x_1 + 0) \\ \frac{1}{2}(2x_2 + 0) & \frac{1}{2}(-2x_1 + 0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 1 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Au point M (1,1,0) : $\varepsilon_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Déterminer les déformations principales et leur directions principales correspondantes au point M

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\bar{\varepsilon} - \lambda \bar{I}) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow \det \left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(1 - \lambda)[(1 - \lambda)(-\lambda) - 1] - 0 + 1[0 - (1)(1 - \lambda)] = 0$$

$$(1 - \lambda)[(1 - \lambda) - \lambda - 1 - 1] = 0 \rightarrow (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3; \begin{cases} \lambda_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda_3 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Classement des déformations principales : $\varepsilon_I = 2$; $\varepsilon_{II} = 1$; $\varepsilon_{III} = -1$

▪ Les directions principales :

Soit \vec{X} la direction principale de la déformation principale $\varepsilon_I = 2$

$$\det(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_I \bar{I}). \vec{X} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -X_1 + X_3 = 0 \Leftrightarrow X_1 = X_3 \\ -X_2 - X_3 = 0 \Leftrightarrow X_2 = -X_3 = -X_1 \\ X_1 - X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases}$$

Nous avons : $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1 \Leftrightarrow X_1^2 + (X_1)^2 + X_1^2 = 1 \Leftrightarrow 3X_1^2 = 1 \Leftrightarrow X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = X_3$

Donc : $\vec{X} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

Soit \vec{Y} la direction principale de la déformation principale $\varepsilon_{II} = 1$

$$\det(\vec{\varepsilon} - \varepsilon_{II} \vec{I}) \cdot \vec{X} = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \mathbf{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Y_3 = 0 \\ -Y_3 = 0 \\ Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0 \Leftrightarrow Y_1 = Y_2 \end{cases}$$

Nous avons : $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1$; $Y_1 = Y_2$

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 = 1 \Leftrightarrow 2 Y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc : } \vec{Y} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right\rangle$$

Pour avoir la troisième direction principale \vec{Z} correspondante à la contrainte $\varepsilon_{III} = -1$, on effectue le produit vectoriel des deux vecteur \vec{X} et \vec{Y} , soit

$$\begin{aligned} \vec{Z} = \vec{X} \wedge \vec{Y} &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \vec{e}_1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{6}} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \vec{e}_3 = \frac{-1}{\sqrt{6}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} \vec{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \vec{Z} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

Chapitre 5 :

Relation entre les contraintes et les déformations

Objectifs du chapitre 5

Les objectifs tracés dans ce chapitre sont :

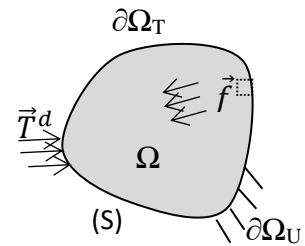
- Connaître les lois de comportement et la relation entre les contraintes et les déformations d'un solide.
- Donner un aperçu sur le comportement expérimental des solides.
- Éditer loi de Hooke généralisée.
- Introduire l'influence de la température sur le tenseur de contrainte et de déformation.
- Donner un aperçu sur les modèles rhéologiques décrivant les comportements réels des corps solides.

5.1 Lois de comportement

5.1.1 Nécessité des lois de comportement

On considère un corps solide déformable (S), soumis à des sollicitations imposées [2][78] :

- Forces volumique $f(\vec{x}, t)$ sur Ω .
- Conditions aux limites :
 - ✓ Forces surfaciques imposées : $\vec{T}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_T$.
 - ✓ Déplacements imposés $\vec{U}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_U$.



Avec : $\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_U = \partial\Omega$

Figure 5.1 : corps déformable (S)

La résolution d'un problème de mécanique des milieux continus du corps (S), consiste à déterminer en tout point M (\vec{x}) de (S), à partir des sollicitations imposées à (S) et des conditions initiales (position et vitesse initiales) :

- Le champ des déplacements (en variables Lagrangiennes) ($\vec{U}(\vec{x}, t)$).
- Le champ des vitesses (en variables Eulériennes) ($\vec{V}(\vec{x}, t)$).
- Le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}(\vec{x}, t)$.
- La masse volumique $\rho(\vec{x}, t)$.

Pour cela on utilise les équations suivantes :

- Equation de conservation de la masse ou équation de continuité : $\text{div } \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- Les lois fondamentales de la dynamique :

- ✓ Equation de mouvement ou d'équilibre : $\text{div } \bar{\sigma} + \vec{f} = \rho \vec{y}$ dans Ω_u .
- ✓ Les conditions aux limites: $\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d$ sur $\partial\Omega_T$

Pour un problème de mécanique des solides, on a 9 inconnues (3 composantes de \vec{U} et 6 composantes de $(\bar{\sigma})$ pour 3 équations seulement \rightarrow il manque 6 équations.

Il manque une relation exprimant la manière dont le corps (S) se déforme, sous l'action des contraintes qui y règnent, c'est la loi de comportement mécanique du corps (S).

Une loi de comportement entre le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$, est déterminée expérimentalement à partir d'un certain nombre d'essais.

5.1.2 Aperçu sur le comportement expérimental des solides

La loi de comportement est une relation locale entre les tenseurs des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformation $\bar{\epsilon}$, en utilisant un élément volumique infinitésimal $d\Omega$ du solide (S).

Pour y remédier, on réalise des essais homogènes où $\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}$, ont les mêmes valeurs en tous points de l'éprouvette considérée. ($\bar{\sigma}(\vec{x}, t) = \bar{\sigma}(t)$ et $\bar{\epsilon}(\vec{x}, t) = \bar{\epsilon}(t)$). On cherche à obtenir des états de contraintes et déformations simples [4].

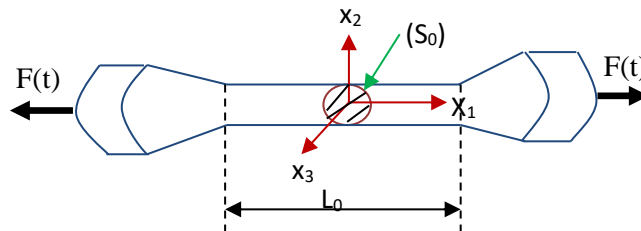


Figure 5.2 : Essai de traction simple d'un corps déformable (S).

L'état de contraintes et de déformation réalisée, est la suivante :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Les grandeurs mesurables sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{F(t)}{S_0} \\ \epsilon_{11} = \frac{\Delta l(t)}{l_0} \\ \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \frac{\Delta r}{r_0} = V \epsilon_{11} \end{array} \right.$$

Avec r_0 : rayon initial de la section transversale,

ν : coefficient de poisson.

Les résultats enregistrés de σ_{11} en fonction de ϵ_{11} , décrit le comportement en traction simple du matériau (comportement de l'acier).

• **Interprétation des résultats**

Dans le domaine OB, les déformations sont réversibles.

Le comportement est élastique.

OA : comportement élastique-linéaire.

AB : comportement élastique non linéaire.

B : représente la limite d'élasticité.

Au-delà du point B, le comportement devient plastique.

Si on décharge au point C puis on recharge à nouveau, la limite B passe en C

Ceci met en évidence le phénomène d'écrouissage.

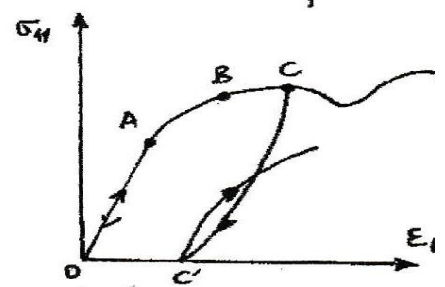


Figure 5.3 : Résultats d'essai de traction simple.

Si on maintient $F(t)$ constante et on mesure $\Delta L(t) / L_0$ en fonction du temps. On obtient les courbes suivantes :

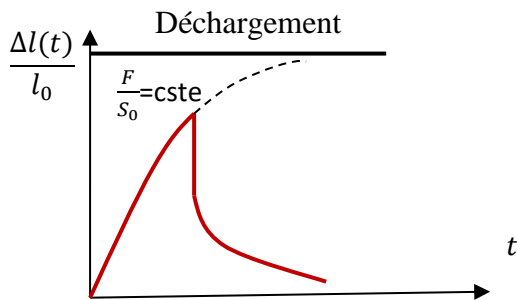


Figure 5.4 : Phénomène fluage.

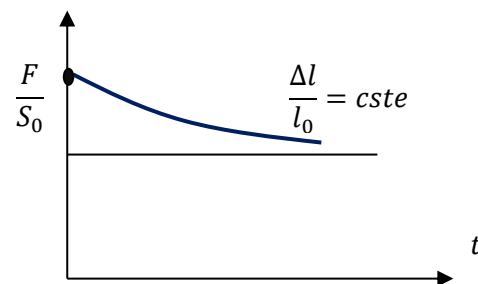


Figure 5.5 : Phénomène relaxation.

L'augmentation de $\Delta L(t) / l_0$ en fonction du temps pour $F(t)$ constante décrit le phénomène de fluage. Par contre, si on travaille avec $\Delta L(t) / L_0$ constante, on constate que la force $F(t)$ nécessaire pour la réaliser décroît avec le temps. On n'est en face du phénomène de relaxation. Le fluage et la relaxation, dépendant du temps, caractérisent des comportements visqueux.

5.2 Elasticité linéaire

5.2.1 Tenseur d'élasticité

Le comportement élastique linéaire est modélisé par une relation linéaire, entre le tenseur de contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$ [8] : $\bar{\sigma} = \bar{A} \cdot \bar{\epsilon}$

Elle définit un tenseur d'ordre 4 de composantes A_{ijkl} telles que ; $\sigma_{ij} = A_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl}$

$i,j,k,l = 1,2,3$. $\bar{\sigma}$ et $\bar{\epsilon}$ sont symétriques.

5.2.2 Isotropie, anisotropie

Soient A_{ijkl} les composantes du tenseur d'élasticité \bar{A} dans le repère R, soient A'_{ijkl} les composantes du tenseur d'élasticité \bar{A} dans le repère R'. Le changement du repère de R vers R' est défini par la matrice de passage [T], ont à alors [8] :

$$A'_{ijkl} = T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq} \cdot A_{mnpq}$$

Le matériau est dit isotrope si le tenseur d'élasticité \bar{A} est un invariant, indépendant du repère choisi :

$$A'_{ijkl} = A_{ijkl} \quad \forall [T]$$

Mécaniquement, un matériau isotrope présente le même comportement mécanique c à d même relation $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$ dans n'importe quelle direction, dans le cas contraire, le matériau est dit anisotrope.

5.2.3 Loi de comportement élastique linéaire isotrope

Soit un tenseur d'élasticité \bar{A} , correspondant à un matériau isotrope ou : $A'_{ijkl} = A_{ijkl} \quad \forall [T]$

Dans ce cas \bar{A} contient uniquement 2 coefficients indépendants et son expression est donnée comme suit [8][9] :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \dots\dots\dots (5.1)$$

La relation (1) exprime la loi de comportement élastique linéaire isotrope.

En développant la relation (1). On obtient :

$$\begin{aligned} i = 1 ; j = 1 : \sigma_{11} &= \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu \epsilon_{11} \\ &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} + \lambda \epsilon_{22} + \lambda \epsilon_{33} \end{aligned}$$

$$i = 1 ; j = 2 : \sigma_{12} = 0 + 2\mu \epsilon_{12}$$

$$i = 1 ; j = 3 : \sigma_{13} = 0 + 2\mu \epsilon_{13}$$

$$i = 2 ; j = 2 : \sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{11} + (\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}$$

$$i = 2 ; j = 3 : \sigma_{12} = 0 + 2 \mu \varepsilon_{23}$$

$$i = 3 ; j = 3 : \sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + (\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{33}$$

Par écriture matricielle simplifiée, on obtient :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} ; \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

La loi de comportement (5.1) peut être exprimée d'une manière inverse comme suit [7] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2 \mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2 \mu(3 \lambda + 2 \mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} \dots \dots \dots (5.2)$$

La loi de comportement élastique linéaire isotrope dépend de 2 coefficients indépendants λ et μ appelés coefficients de **lamé** défini par [8][9] :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \dots \dots \dots (5.3)$$

Ou E : module de Young, ν : est le coefficient de poisson.

La loi de comportement (2) peut être exprimé comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \dots \dots \dots (5.4)$$

L'équation (4) présente la loi de **Hooke** généralisée.

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

5.3 Influence de la température

Sous l’effet de la chaleur les corps se dilatent, soit un milieu continu exposé à un champ de température. Si la variation de température (ΔT) dans ce milieu est continue et uniforme dans cet élément. Cette variation influence surtout le tenseur de déformation. La relation entre les contraintes, déformation et la température est donnée par la relation (5.3), ou les contraintes $\bar{\sigma}$ dépendent linéairement des déformations et de la variation des températures [2].

Avec :
$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{A} : \bar{\varepsilon} - \bar{K} \theta \dots\dots\dots (5.3)$$

$\bar{\sigma}_0$: Tenseur des contraintes initiales.

\bar{A} : Tenseur d’élasticité d’ordre quatre.

θ : Variation de températures entre les configurations de références à (T_0) et actuelle à (T)

$\bar{K} \theta$: Contraintes engendrées par la variation de températures.

Petites variations de températures : $T - T_0 \ll T_0$

5.3.1 Loi de comportement thermoélastique linéaire isotrope

Dans ce cas la relation (5.3) devient [2] :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{I} + 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda (tr \bar{\varepsilon}) \bar{I} - K \bar{I} \theta \dots\dots\dots (5.6)$$

μ et λ : Coefficients de Lamé,

K : coefficient thermique,

$\sigma_0 \bar{I}$: contraintes initiales.

Inversement, on a :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_0 \bar{I} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (tr \bar{\sigma}) \bar{I} - \alpha \theta \bar{I} \dots\dots\dots (5.7)$$

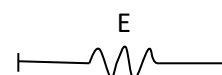
$\varepsilon_0 = -\frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_0$: Déformation initiale sous contraintes et écart de température nuls.

$\alpha = \frac{K}{3\lambda+2\mu}$: Coefficient thermique.

5.4 Aperçu sur les modèles rhéologiques

Les modèles mathématiques décrivant les comportements réels des corps solides sont obtenus par la combinaison des trois modèles élémentaires suivants [8] :

- Le ressort : modélisation du comportement élastique :



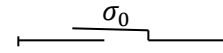
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- Le patin : modélisation du comportement élastique.

$$\dot{\varepsilon} = 0 \text{ si } |\sigma| < \sigma_0$$

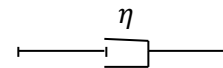
$$\dot{\varepsilon} > 0 \text{ si } |\sigma| = \sigma_0$$

$$\dot{\varepsilon} < 0 \text{ si } |\sigma| = -\sigma_0$$



- L'amortisseur : modélisation du comportement visqueux :

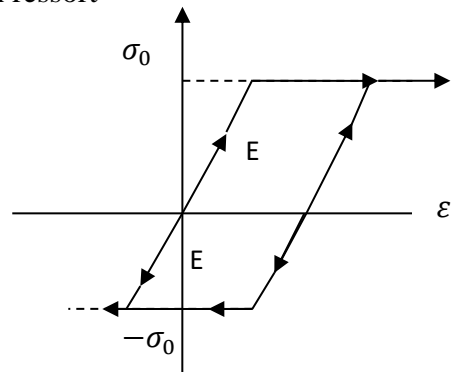
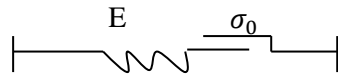
$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$$



Les modèles rhéologiques s'obtiennent par montage en parallèle (les contraintes s'additionnent, les déformations sont les mêmes) ou en série (les déformations s'additionnent, les contraintes sont les mêmes).

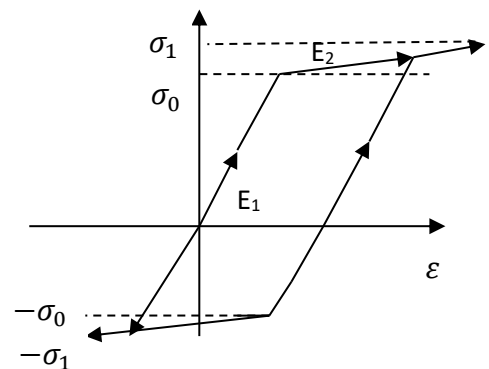
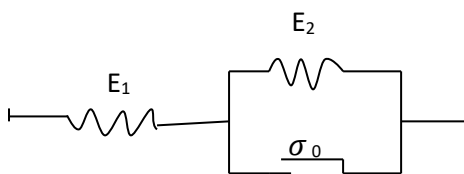
• **Modèle élasto-plastique sans écrouissage**

Ce modèle s'obtient par montage en série d'un patin et d'un ressort



• **Modèle élasto-plastique avec écrouissage linéaire**

Ce modèle s'obtient par le montage suivant :



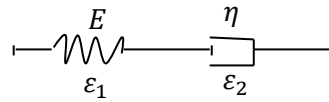
• **Modèle viscoélastique de MAXWELL (fluage, relaxation)**

Ce modèle s'obtient par montage en série d'un ressort et d'amortisseur :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_1 = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_2 \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

La loi de comportement sous forme différentielle est donnée par :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \text{ Equation d'états rhéologique.}$$



5.5 Applications

Exercice n° 1

Soit le tenseur de contraintes suivant : $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (Mpa)$

- Sachant que $E = 125 \text{ Mpa}$ et $\mu = 45 \text{ Mpa}$, déterminer les composantes du tenseur des déformations correspondant.

Exercice n° 2

On définit le tenseur de déformation suivant : $\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} (10)^{-2}$

- Dédurre le tenseur de contrainte au point M, sachant que $E = 21 \times 10^4 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.28$.

Exercice n°3

On considère un bloc constitué de deux pièces cylindriques d'axe (x-x), de section (S) de longueur l_1 et l_2 respectivement, constitué d'un même matériau thermoélastique linéaire et isotrope (E, ν, α). Ces deux pièces sont retenues entre deux plateaux fixes et séparées entre elles par un joint de dilatation d'épaisseur (Δ) (figure 5.2). A l'état initial les contraintes sont nulles (état naturel), la température est T_0 et les forces volumiques sont négligées. On impose à ces deux pièces une augmentation de température $\theta_1 = T_1 - T_0$ uniforme.

1. Déterminer la valeur de T_1 correspondant au contact entre les deux pièces.

A.N : $T_0 = 20 \text{ C}^\circ, E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Mpa}, \nu = 0.3, \alpha = 12 \cdot 10^6 \text{ C}^{-1}, l_1 = 10 \text{ m}, l_2 = 7 \text{ m}, \Delta = 5 \text{ mm}.$

2. On impose ensuite une autre augmentation de température $\theta_2 = T_2 - T_1$. Calculer la contrainte σ_{xx} résultant dans les pièces.

AN : $\theta_1 = 10 \text{ C}^\circ$

$$\bar{\sigma} = \lambda(\text{tr}\bar{\epsilon})\bar{I} + 2\mu\bar{\epsilon} - K\theta\bar{I}; \bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\bar{\sigma})\bar{I} - \alpha\theta\bar{I}$$

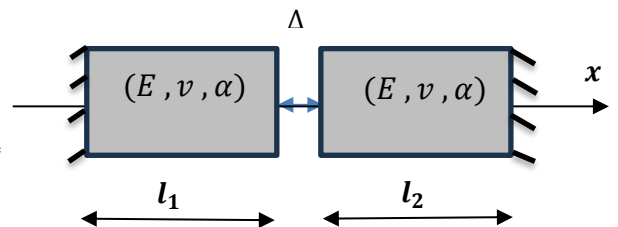


Figure 5.1

5.6 Corrections

Exercice n° 1

Soit le tenseur de contraintes suivant : $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (Mpa)$

- Déterminer les composantes du tenseur des déformations, sachant que $E = 125 Mpa$ et $\mu = 45Mpa$.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

$$\sigma_{kk} = \text{tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ Mpa}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow \nu = \frac{E}{2\mu} - 1 = \frac{125}{2 \cdot 45} - 1 = 0.39$$

$$\epsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \delta_{11} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 4 - \frac{0.39}{125} 1.8 = 1.952 \cdot 10^{-2}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \delta_{22} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 3 - \frac{0.39}{125} 1.8 = 0.84 \cdot 10^{-2}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} \delta_{33} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 1 - \frac{0.39}{125} 1.8 = -1.38 \cdot 10^{-2}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} - \frac{\nu}{E} \delta_{12} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 2 = 2,22 \cdot 10^{-2} (\delta_{12} = 0)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} - \frac{\nu}{E} \delta_{13} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 0 = 0 (\delta_{13} = 0)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} - \frac{\nu}{E} \delta_{23} \sigma_{kk} = \frac{1+0.3}{125} 0 = 0 (\delta_{23} = 0)$$

Donc : $\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1,95 & 2,22 & 0 \\ 2,22 & 0,84 & 0 \\ 0 & 0 & -138 \end{bmatrix} 10^{-2}$

Exercice n° 2

On définit le tenseur de déformation en un point M comme suit :

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} (10)^{-2}$$

- Déduire le tenseur de contrainte au point M, sachant que : $E = 21 \times 10^4 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.28$.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{21 \cdot 10^4}{2(1+0.28)} = 8.2 \cdot 10^4$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \frac{0.28 \cdot 21 \cdot 10^4}{(1-2 \cdot 0.28)(1+0.28)} = 10.44 \cdot 10^4$$

$$i = 1 ; j = 1 :$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33} = \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10,44 \cdot 10^4 = 41,76 \cdot 10^2$$

$$i = 1 ; j = 2 :$$

$$\sigma_{12} = 2 \mu \varepsilon_{12} = 0 \text{ Mpa}$$

$$i = 1 ; j = 3 :$$

$$\sigma_{13} = 2 \mu \varepsilon_{13} = 2 \cdot 8,2 \cdot 10^4 (-1) 10^{-2} = -16,4 \cdot 10^2 \text{ Mpa}$$

$$i = 2 ; j = 2 :$$

$$\sigma_{22} = \lambda \varepsilon_{11} + (\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33} = 2 \cdot 10^{-2} (10,44 \cdot 10^4 + 2 \cdot 8,2 \cdot 10^4) + 10,44 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 74,56 \cdot 10^2 \text{ Mpa}$$

$$i = 2 ; j = 3 :$$

$$\sigma_{23} = 2 \mu \varepsilon_{23} = 2 \cdot 8,2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 32,8 \cdot 10^2 \text{ Mpa}$$

$$i = 3 ; j = 3 :$$

$$\sigma_{33} = \lambda \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + (\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{33} = (2\lambda + 2 \mu) \varepsilon_{33} = 2 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 10,44 \cdot 10^4 + 2 \cdot 8,2 \cdot 10^4) = 74,56 \cdot 10^2 \text{ Mpa}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 41,76 & 0 & -16,4 \\ 0 & 74,56 & 0 \\ -16,4 & 32,8 & 74,56 \end{bmatrix} 10^2 (\text{Mpa})$$

Exercice N°3

1. Déterminer la valeur de T_1 correspondant au contact entre les deux pièces.

On a un état de contrainte uni-axial :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule des déformations :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{I} - \alpha \theta \bar{I}$$

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} + \theta \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu \cdot \sigma_{xx}}{E} + \theta \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu \cdot \sigma_{xx}}{E} + \theta \alpha \end{bmatrix}$$

Le joint de dilatation permet aux deux pièces de se déplacer librement sans contraintes :

$$\Delta \neq 0 ; \sigma_{xx} = 0.$$

Sans variation de température la déformation relative est la même dans les deux pièces.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^1 = \varepsilon_{xx}^2 = \alpha \theta_1$$

$$\text{Dans la pièce 1 : } \Delta l_1 = \varepsilon_{xx} l_1$$

$$\text{Dans la pièce 2 : } \Delta l_2 = \varepsilon_{xx} l_2$$

Le contact entre les deux pièces ce produit pour : $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta$

$$\varepsilon_{xx} (l_1 + l_2) = \Delta \leftrightarrow \alpha \theta_1 (l_1 + l_2) = \Delta \leftrightarrow \alpha (T_1 - T_0)(l_1 + l_2) = \Delta$$

$$T_1 = \frac{\Delta}{\alpha (l_1 + l_2)} + T_0 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-6} (10 + 7)} + 20 = 44.5 \text{ C}^\circ$$

2. *Contrainte résultante d'une augmentation* $\theta_2 = T_2 - T_1 :$

Après contact les deux pièces ne peuvent plus s'allonger :

$$\varepsilon_{xx} = 0 \rightarrow \frac{\sigma_{xx}}{E} + \theta_2 \alpha = 0 \rightarrow \sigma_{xx} = -E \alpha \theta_2 = -2.1 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 25.2 \text{ Mpa.}$$

Chapitre 6 :

**Formulation classique des problèmes en
élasticité linéaire**

Objectifs du chapitre 6

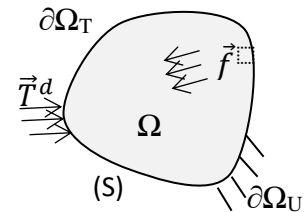
Les objectifs tracés dans ce chapitre sont :

- Déterminer le champ de déplacement et de déformation d'un solide (S).
- Avoir le tenseur de contrainte d'un solide (S).
- Vérifier les conditions au limite appliquées sur un solide (S).
- Évaluer la solution d'un problème en mécanique des milieux continus par la méthode de résolution analytiques.
- Donner la solution d'un problème en mécanique des milieux continus par la méthode de déplacement.
- Évaluer la solution d'un problème en mécanique des milieux continus par la méthode des contraintes.

6.1 Positions du problème

Soit un solide déformable (S) soumet à des sollicitations imposées de domaine (D) et de frontière ($\partial\Omega_U$ $\partial\Omega_T$), le problème d'élasticité linéaire consiste à déterminer un état élastique en tout point de (S) correspondant aux forces de volume (f) dan (D) et vérifiant les conditions aux limites [3] :

- Forces volumique $\vec{f}(\vec{x}, t)$ dans Ω ;
- Conditions aux limites :
 - ✓ Forces surfaciques imposées : $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_T$;
 - ✓ Déplacèrent imposés : $\vec{U} = \vec{U}^d(\vec{x}, t)$ sur $\partial\Omega_U$.



Avec : $\partial\Omega_T \cup \partial\Omega_U = \partial\Omega$

Figure 6.1 : les sollicitations appliquées sur (S).

(S) est élastique, linéaire, isotrope, homogènes et isotherme, il est dans un état d'équilibre initial naturel ($\vec{\sigma}_0 = 0, \vec{\varepsilon}_0 = 0$). Les déplacements et déformations dans (S) restent suffisamment petites (HPP).

Le problème posé consiste à déterminer en tout point M (\vec{x}) de (S) :

- Le champ des déplacements \vec{U} et déformations $\vec{\varepsilon}$.
- le tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$.

Vérifiant :

- Les équations d'équilibre : $\overrightarrow{div} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0$ (6.1)

- La loi de comportement élastique linéaire isotrope :

$$\bar{\sigma} = \lambda (\text{tr} \bar{\epsilon}) \bar{I} + 2 \mu \bar{\epsilon} \dots\dots\dots (6.2)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{I} \dots\dots\dots (6.3)$$

I 'hypothèse des petites perturbations HPP, relation linéaire entre les déplacements et les déformations :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad} \bar{U} + {}^t \overrightarrow{grad} \bar{U}) \dots\dots\dots (6.4)$$

- Les conditions aux limites :

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d(\vec{x}, t) \text{ sur } \partial\Omega_T \dots\dots\dots (6.5)$$

$$\bar{U} = \vec{U}^d(\vec{x}, t) \text{ sur } \partial\Omega_U \dots\dots\dots (6.6)$$

Si les conditions aux limites ne dépendent pas de la solution, le problème est dit régulier, il admet alors une solution unique. Le problème posé ci-dessus consiste à trouver trois composantes du champ de déplacement et six composantes du tenseur symétrique des contraintes.

6.2 Méthode de résolution analytique

Pour résoudre analytiquement un problème d'élasticité linéaire, on postule à priori une forme particulière de la solution et on doit vérifier les équations (6.1) à (1.6). Si on parvient, ce sera alors la solution unique du problème.

Les équations à vérifier seront donc :

$$\overrightarrow{div} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0$$

$$\bar{\sigma} = \lambda (\text{tr} \bar{\epsilon}) \bar{I} + 2 \mu \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{I}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad} \bar{U} + {}^t \overrightarrow{grad} \bar{U})$$

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}^d(\vec{x}, t) \text{ sur } \partial\Omega_T.$$

$$\bar{U} = \vec{U}^d(\vec{x}, t) \text{ sur } \partial\Omega_U.$$

6.3 Méthode de déplacements

La méthode de déplacement vise à écrire le problème en fonction des déplacements imposés puis à résoudre le système d'équations aux dérivés partiels obtenus. On choisit un champ de déplacement comme inconnue principale. Nous nous intéresserons au cas d'un matériau élastique linéaire isotrope dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. On choisit un champ \vec{U} satisfaisant les conditions aux limites (CL) sur $\partial\Omega_T$ c.à.d. cinématiquement admissible.

A partir de \vec{U} , on calcule $\bar{\epsilon}$ par (6.4), puis $\bar{\sigma}$ par (6.2) et on vérifie les équations d'équilibre (6.1) et les conditions aux limites (CL). Si c'est le cas, le champ \vec{U} est le champ solution [3].

Pour éliminer les étapes de calcul \vec{U} , $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$, on exprime les équations d'équilibre (6.1) directement en fonction de \vec{U} . On reporte (6.4) dans (6.2) puis dans (6.1), on obtient les équations de Navier [2] :

$$(\lambda + \mu)(\overline{grad\ div\vec{U}} + \mu \overline{div(\overline{grad\vec{U}})} + \vec{f} = \vec{0} \dots\dots\dots (6.7)$$

$$(\lambda + \mu)U_{j,ji} + \mu U_{i,jj} + f_i = 0$$

Le chemin de résolution devient comme suit :

- 1) Postuler un champ \vec{U}
- 2) Vérifier les équations de Navier.
- 3) Vérifier les CL.

6.4 Méthode des contraintes

On choisit d'abord un champ $\bar{\sigma}$, vérifiant les CL sur $\partial\Omega_T$, pour cela on doit calculer \vec{U} à partir de $\bar{\sigma}$ en passant par $\bar{\epsilon}$, pour calculer \vec{U} à partir de $\bar{\epsilon}$, il faut que $\bar{\sigma}$ soit compatible c.à.d. vérifier les équations de compatibilités [2][3].

$$\epsilon_{ij;ll} - \epsilon_{ll,ij} - \epsilon_{jk,ik} + \epsilon_{ik,jk} = 0 \dots\dots\dots (6.8)$$

En substituant $\bar{\sigma}$ dans les équations (6.8), on obtient les équations de Beltrami :

$$\overline{div(\overline{grad\bar{\sigma}})} + \frac{1}{1+\nu} \overline{grad(tr\bar{\sigma})} + \overline{grad\vec{f}} + \overline{grad\vec{f}} + \frac{\nu}{1-\nu} \overline{div\vec{f}} \cdot \vec{I} = \vec{0} \dots\dots\dots (6.9)$$

Le schéma de résolution est alors comme suit :

- 1) Postuler un champ $\bar{\sigma}$.
- 2) Vérifier les équations d'équilibre.
- 3) Vérifier les équations de Beltrami.

- 4) Vérifier les CL sur $\partial\Omega_T$.
- 5) Et éventuellement intégrer le champ \vec{U} .
- 6) Vérifier les CL sur $\partial\Omega_u$.

6.5 Applications

Exercice n° 1

Soit la poutre rectangulaire $b \times h$ de longueur L (figure 6.1). Elle est constituée de deux parties de mêmes dimensions. Les deux parties sont constituées respectivement de matériaux dont les propriétés élastiques sont les modules de Young E_1 et E_2 et les coefficients de poisson ν_1 et ν_2 . Le cylindre est soumis à une seule force longitudinale de traction F au point $x_3 = L$. En négligeant les forces de volume, déterminer l'expression du déplacement maximal.

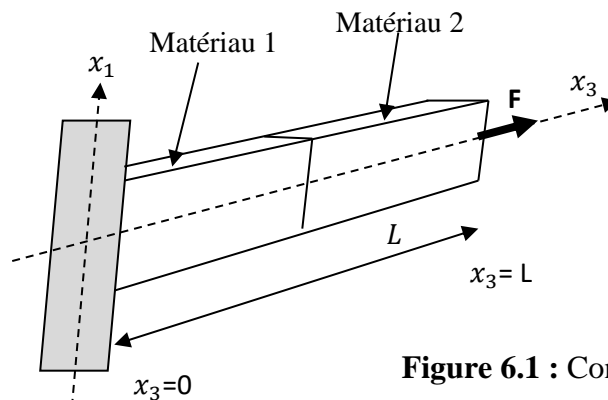


Figure 6.1 : Console encastéré.

Exercice n° 2

Soit un barrage poids dans la base $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de section triangulaire OAB (figure 6.2), encastéré à sa base. Le barrage est soumis à son poids propre $\rho_b g$ et à la poussé $\rho_e g x_2$ de l'eau, sa surface est située à une hauteur h égale à celle du barrage. Le matériau du barrage est considéré élastique linéaire et isotrope, de paramètres E et ν . La pression atmosphérique est négligée.

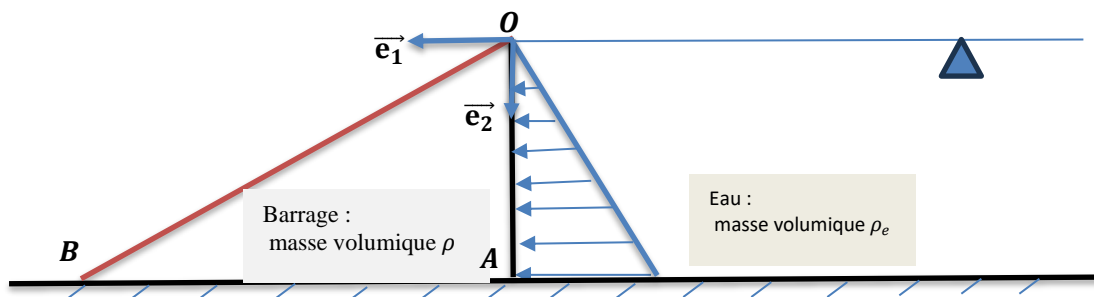


Figure 6.2 : Barrage dans le plan

1. Pourquoi il s'agit de déformation plane et donner les formes générales de \vec{U} , $\vec{\sigma}$ et $\vec{\varepsilon}$.
2. Ecrire les conditions aux limites d'une tranche du barrage et écrire les équations d'équilibres mécaniques à l'intérieur du domaine puis au niveau de ces conditions limites en contrainte. On postule que tous les termes du tenseur de contrainte sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1 et x_2 . Donner l'expression générale de la matrice d'un tel champ de contrainte. Montrer qu'il vérifie l'équation de Beltrami et donc la solution du problème élastique.

6.6 Corrections

Exercice n° 1

Déterminer l'expression du déplacement maximal :

$$S = b \times h$$

On utilise la méthode des contraintes comme suit :

- Positionner un champ de contrainte $\vec{\sigma}$.
- Vérifier les conditions aux limites sur $\partial\Omega_T$.
- Vérifier les équations de Beltrami.
- Intégrer le champ de déplacement.
- Vérifier les conditions aux limites $\partial\Omega_u$.

a) Postuler $\vec{\sigma} : \vec{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

b) Vérifier les équations d'équilibres : \vec{f} : forces volumiques négligées.

$$\vec{\text{div}} \vec{\sigma} + \vec{f} = 0 ; \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + 0 + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{33} = \text{Constante}$$

c) Conditions aux limites sur $\partial\Omega_T (X = L) : \vec{n} = \vec{e}_3$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_3 = \vec{T}_d \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{S} \end{pmatrix} = \sigma_{33} = \frac{F}{S}$$

d) Les équations de Béltrami :

$$\overline{\text{div}}(\overline{\text{grad}}\bar{\sigma}) + \frac{1}{1+\nu} \overline{\text{grad}}(\text{tr}\bar{\sigma}) + \overline{\text{grad}}\vec{f} + {}^t\overline{\text{grad}}\vec{f} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{div}\vec{f} \cdot \vec{I} = \vec{0}$$

Comme $\sigma_{33} = \text{Constante}$, les dérivées de $\bar{\sigma}$ sont nulles donc les équations de Beltrami sont nulles.

- Les déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma_{ij} - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1+\nu_1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{11} \rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 ; \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33} ; \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_1}$$

Le tenseur de déformation vaut :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E_1} \end{bmatrix}$$

On fait la même chose pour le matériau 2 :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_2}{E_2} \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E_2} \end{bmatrix}$$

e) Intégrer le champ de déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} - U_{j,i}), \text{ on cherche le déplacement maximale } U_3$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \right), \rightarrow \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \rightarrow \partial U_3 = \varepsilon_{33} \cdot \partial x_3 \rightarrow U_3 = \int_{\Omega} \varepsilon_{33} \cdot dx_3$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{33} x_3 + C^{st} = U_3$$

$$\text{Matériau 1 : } U_3^1 = \varepsilon_{33}^1 x_3 + C_1$$

$$\text{Condition à la limite : } x_3 = 0 \rightarrow U_3^1(0) = 0 \rightarrow \varepsilon_{33}^1(0) + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$U_3^1 = \varepsilon_{33}^1 x_3 + 0 \rightarrow U_3^1 = \frac{\sigma_{33}}{E_1} x_3 \rightarrow U_3^1 = \frac{F}{S \cdot E_1} x_3$$

$$\text{Matériau 2 : } U_3^2 = \varepsilon_{33}^2 x_3 + C_2$$

$$\text{Condition à la limite : } U_3^1 \left(\frac{L}{2} \right) = \varepsilon_{33}^1 \left(\frac{L}{2} \right) = U_3^2 (x_3 = 0)$$

$$= \varepsilon_{33}^1 \frac{L}{2} = \varepsilon_{33}^2 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = \varepsilon_{33}^1 \frac{L}{2} = \frac{F}{S \cdot E_1} \frac{L}{2}$$

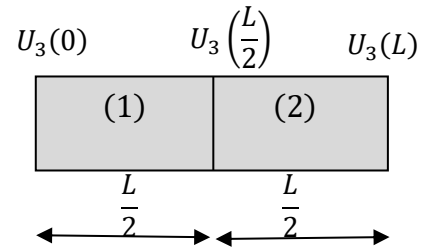
- $X_1 = \frac{\pm h}{2} ; \vec{n}_1 = \pm \vec{e}_1$

$$\vec{T}(\vec{n}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{\sigma} \cdot \vec{n}_1 = \vec{T}(\vec{n}_1) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (condition vérifiée)}$$

- Pour vérifier : $E_1 = E_2 ; U_3^2 = \frac{F}{SE} \left(x_3 + \frac{L}{2} \right)$

$$U_{3max}^1 \left(x_3 = \frac{L}{2} \right) = \frac{F}{SE} \left(\frac{L}{2E_2} + \frac{L}{2E_1} \right) \text{ pour } E_1 = E_2$$

$$U_{3max}^1 = \frac{FL}{SE} = \frac{\sigma_{33}}{E} L = \Delta l \rightarrow \frac{\sigma_{33}}{E} = \frac{\Delta l}{L} = \varepsilon_{11}$$



Exercice n° 2

1. Pourquoi déformations planes :

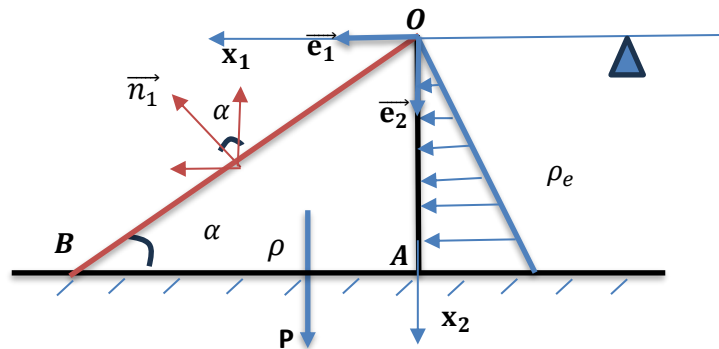


Figure 2 : Barrage dans le

La section du barrage est identique sur toute sa longueur, de même que le chargement subit, et on déduit le champ de déplacement entièrement situé dans le plan perpendiculaire à sa longueur. La déformation dans le sens de la longueur est empêchée.

Le champ \vec{U} vaut : $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1(X_1, X_2) \\ U_2(X_1, X_2) \\ U_3 = 0 \end{pmatrix}$;

Le tenseur de déformation $\bar{\varepsilon}$: $\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Le tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$: $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

2. Conditions aux limites :

$$\bar{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{T}(\vec{n})$$

a. Face immergée OA : $x_1 = 0, \vec{n} = -\vec{e}_1 = \langle -1 \ 0 \ 0 \rangle$

$$\vec{T}(-\vec{e}_1) = \begin{Bmatrix} \rho_e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b. Face OB : $x_1 = x_2 ; \vec{n}_1 = \langle \cos\alpha \ -\sin\alpha \ 0 \rangle = \langle \frac{\sqrt{2}}{2} \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \rangle ; \text{car } \alpha = 45^\circ$

$$\vec{T}(\vec{n}_1) = \langle 0 \ 0 \ 0 \rangle$$

• Equations d'équilibres : $\vec{f} = \{f_1 \ f_2 \ f_3\} = \{0 \ \rho_b g \ 0\}$

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0 ; \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + 0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \begin{cases} \sigma_{11} = A x_1 + B x_2 \\ \sigma_{22} = A' x_1 + B' x_2 \\ \sigma_{12} = C x_1 + D x_2 \end{cases} ; \quad \overrightarrow{\text{div}} \bar{\sigma} + \vec{f} = 0 \rightarrow \begin{cases} A + D = 0 \dots \dots \dots (1) \\ C + B' = -\rho_b g \dots \dots (2) \end{cases}$$

On utilise la première condition à la limite : $\bar{\sigma} \cdot (-\vec{e}_1) = \vec{T}(-\vec{e}_1) ; x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho_e g x_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\sigma_{11} = \rho_e g x_2 \\ -\sigma_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A x_1 - B x_2 = \rho_e g x_2 \\ C x_1 + D x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B = \rho_e g \\ D = 0 \end{cases}$$

De (1) : $D = 0 \rightarrow A = 0$

La deuxième condition à la limite :

$$\bar{\sigma} \cdot (\vec{n}) = \vec{T}(\vec{n}) \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = -\sigma_{12} \\ \sigma_{12} - \sigma_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A x_1 + B x_2 - C x_1 - D x_2 = 0 \\ C x_1 + D x_2 - A' x_1 - B' x_2 = 0 \end{cases}$$

Sur cette face : $x_1 = x_2 :$

$$\begin{cases} A x_1 + B x_2 - C x_1 - D x_2 = 0 \\ C x_1 + D x_2 - A' x_1 - B' x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C = B = -\rho_e g \\ A' + B' = C \end{cases}$$

De (2) : $B' = -\rho_b g - C = -\rho_b g + \rho_e g = B'$

D'où : $A' = C - B' = -\rho_e g + \rho_b g - \rho_e g = -2\rho_e g + \rho_b g$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\rho_e g x_2 \\ \sigma_{22} = (\rho_b - 2\rho_e)g \cdot x_1 + (\rho_e - \rho_b)g \cdot x_2 \\ \sigma_{12} = -\rho_e g \cdot x_1 \end{cases}$$

$\sigma_{33} = \nu[(\rho_b - 2\rho_e)g \cdot x_1 - \rho_b g \cdot x_2]$; car : $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$

N.B : Les équations de Beltrami sont vérifiées comme les composantes du tenseur de contraintes sont des fonctions linéaires en x_1 et x_2 .

Références bibliographiques

- [1] Djafour Moustapha, Megnounif Abdelatif. (1994), « Elasticité général », Office des publications universitaire, codification :2 .03. 3954..
- [2] Eric Blond. Mécanique des Milieux Continus. (2017/18). École d'ingénieur. Mécanique des Milieux Continus, Orléans, France. 2018, pp.59. ffhal-02428183
- [3] Nicolas Moes. (2011). Mécanique des milieux continus. École d'ingénieur. Nantes, France., pp.105. ffccl-00612360v2.
- [4] D. Bellet, J. J Barou, (1990), « Cours d'élasticité » , Cepadues Editions. Collection la cheveche.
- [5] Ali Bouafia, Mahamed Guenfoud, Ilhen Toumi, Amina Ben Rabah-Amar, Abdelhalim Bourouba, Younes Abed. (2016) « Élasticité, rappel de cours et de problèmes résolus » . Copyright Eurl Pages Bleues Internationales.
- [6] R. Adman, « Théorie d'élasticité cours et applications », Doi : 10.13140/RG.2.2.14806.27206.
- [7] F. Golay, Stéphane Bonelli. (2018). « Mécanique des Milieux Continus - Support de cours ». France. pp.72. ffhal-02608374.
- [8] Cristian Wielgosz, (1999), « Cours et exercices de résistance des matériaux, élasticité, plasticité elements finis ». Ellipes édition marqueting S.A. Paris codex 15.
- [9] Denis Dartus (1995), « Elasticité linéaire », Collection polytech, Sépadués éditions.
- [10] J.-P. Henry, F.Parcy (1982), « Cours d'élasticité » Bordas, Paris ISBN 2-04-010814-9.
- [11] A. Kettab, R. Mittiche, (1995), « Mécanique des Milieux Continus », Office des publications Universitaires, Codification : 2.05.4023.

Références générales

- Jean Salençon, « Mécanique des milieux continus- Elasticité et milieux curvilignes ».
- Ecole Polytechnique X, Ellipses Editions
- François Frey « Analyse des structures et milieux continues ».
- « Mécanique des milieux continus Tome 3 Plaques et coques »
- S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, Mc Graw Hill editions, « Theory of elasticity »,
- J. P. Henry, F. Parsy, Dunod Université Edition « Cours d'élasticité »,
- E. Green et W. Zerna, « Theory of elasticity »
- S.P. Timoshenko, « Theory of Elasticity », third edition,

Chapitre 6 : Formulation classique des problèmes en élasticité linéaire

- A.E. Love, « Mathematical elasticity »,
- Soliman Belkahla « Cours d'élasticité –Plasticité »
- Malvern, « Introduction to continuum mechanics ».
- G. Mase, « Continuum mechanics ».