

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI
TIZI-OUZOU



FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques

Mémoire de master en mathématiques

Option : Probabilité-Statistiques

Thème

Estimateur de type géométrique Pour l'indice des extrêmes

Présenté par

M^{elle} **BATATACHE Baya**

Devant le jury composé de

Président

Examineur

Encadreur

Soutenu octobre 2019

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Dieu pour la persévérance, la santé, l'ouverture d'esprit et l'inspiration dont il m'a gratifié.

*Aussi, le présent mémoire n'aurait pas vu le jour sans l'aide bienveillante, la compréhension et le dévouement d'un certain nombre de personnes à qui j'adresse mes vifs remerciements : Ma promotrice et enseignante M^{me} **Boualam Karima** pour sa grande disponibilité et d'avoir accepté de diriger ce travail.*

Je suis extrêmement reconnaissante aux membres de jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de juger ce travail.

*Un merci bien particulier adressé également à M. **Fellag Hocine** et tous mes enseignants. Enfin un grand merci à toute personne qui a contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

Table des matières

Table des matières	2
Introduction générale	5
1 Théorie des valeurs extrêmes	7
1.1 Introduction	7
1.2 Comportement asymptotique des extrêmes	8
1.2.1 Distribution des valeurs extrêmes généralisée (GEV)	11
1.3 Domaine d'attraction	12
1.3.1 Domaine d'attraction de Fréchet $DA(\Phi_\alpha)$	13
1.3.2 Domaine d'attraction de Weibull $DA(\Psi_\alpha)$	14
1.3.3 Domaine d'attraction de Gumbel $DA(\Lambda)$	15
1.4 Etude de la théorie des valeurs extrêmes pour des suites stationnaires . . .	17
1.4.1 Introduction	17
1.4.2 Convergence du maximum sous le mélange fort	17
1.4.3 Convergence du maximum sous la m-dépendance	18
1.4.4 Convergence du maximum sous la condition D	19
1.5 Estimation de l'indice des valeurs extrêmes	20
1.5.1 Estimateur de Hill	21
1.5.2 Estimateur des moments	22
1.5.3 Estimateur de Pickands	23
1.5.4 Autres estimateurs	24

1.5.4.1	Estimateur de Hill négatif	24
1.5.4.2	Estimateur à noyau	25
1.5.4.3	Estimateur de Zipf	25
2	Estimateur de type géométrique	27
2.1	Introduction	27
2.2	Estimateurs de Schultze-Steinebach	28
2.2.1	Construction des estimateurs de Schultze-Steinebach	28
2.2.2	Propriétés	30
2.3	Estimateur de type géométrique	32
2.4	Propriétés de l'estimateur de type géométrique	33
2.5	Estimateur de type géométrique sous le mélange fort	36
2.6	Exemple d'application	42
	Conclusion générale	50
	Bibliographie	50

Introduction générale

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est l'étude des événements rares, *i.e.*, des événements dont la probabilité d'occurrence est très faible, comme les krachs boursiers et les crises monétaires ou les bouleversements climatiques tels que les tremblements de terre de forte intensité et les ouragans. Ces événements ont un impact considérable sur la vie humaine et sur l'économie des états, d'où l'intérêt de cette théorie qui contribue à prévenir ces risques et à prévoir ces phénomènes.

La probabilité de réalisation de ces événements est calculée en utilisant une distribution appelée GEV " generalised extremes values " dépendante d'un paramètre appelé l'indice des valeurs extrêmes (où l'indice de queue).

Les premiers travaux dans ce domaine sont apparus entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet [12], Fisher, Tippet [11] et Gnedenko [13] qui ont montré que sous certaines conditions et dans le contexte des variables aléatoires indépendantes, les seules lois limites des extrêmes sont les distributions de Fréchet, Gumbel et Weibull. L'indépendance des observations n'est pas toujours vérifiée dans la pratique ce qui amené à la remplacer par des conditions de dépendance comme le mélange, l'association, la condition D et la m-dépendance. Sous la dépendance, Loynes [29] et Leadbetter [19] ont obtenu des résultats similaires à ceux montrés dans le cas i.i.d. Divers travaux ont été consacrés à l'estimation de l'indice des extrêmes dont l'objectif revient à construire des estimateurs et à étudier leur consistance et leur comportement asymptotique. Parmi ces estimateurs, on peut citer l'estimateur de Pickands [25], l'estimateur de Hill [16], l'estimateur des moments et d'autres définis plus récemment comme l'estimateur de Schultze -Steinebach [27] et Brito-Freitas [21].

Nous nous intéressons dans ce document aux propriétés de l'estimateur de type géométrique construit par Brito et Freitas en 2001. Notre objectif est de revenir sur la consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur pour des variables aléatoires indépendantes

(voir [21]) puis dans le cas d'observations fortement mélangentes (voir [22]).

Ce mémoire est composé de deux chapitres :

Chapitre 1 : Nous commençons par donner un aperçu sur la théorie des valeurs extrêmes en rappelant le théorème fondamental de cette théorie, puis nous présentons quelques estimateurs de l'indice de queue et leurs propriétés.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les estimateurs donnés par Schultze et Steinebach [27] et leurs propriétés. Puis on s'intéresse à la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de type géométrique dans le cas d'observations indépendantes et sous l'hypothèse du mélange fort. Nous terminons cette partie par un exemple pratique appliqué sur des données en assurance.

Chapitre 1

Théorie des valeurs extrêmes

1.1 Introduction

La théorie des valeurs extrêmes est une branche de la théorie des probabilités et des statistiques mathématiques qui se concentre sur l'analyse et l'inférence des événements extrêmes, *i.e.*, les événements avec une très faible probabilité d'occurrence.

L'étude de la loi de probabilité du maximum d'un échantillon de variables aléatoires a été la première approche pour décrire les événements extrêmes. En 1928, Fisher et Tippett [11] établissent un résultat fondamental qui spécifie la forme de la distribution limite du maximum convenablement normalisé d'une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi avant que Gnedenko [13] obtienne rigoureusement la convergence dont la preuve fut simplifiée par De Haan [7]. Les travaux de Von Mises [28] et Jenkinson [18] ont permis de donner une forme unifiée à ce résultat.

La théorie des valeurs extrêmes repose sur la convergence en loi du maxima ou du minima des variables aléatoires indépendantes convenablement normalisée.

Les applications de la théorie des valeurs extrêmes, ainsi que les avancées théoriques, sont de plus en plus nombreuses et touchent des domaines variés comme la météorologie, l'hydrologie, la finance et les assurances.

1.2 Comportement asymptotique des extrêmes

Nous considérons n variables aléatoires X_1, \dots, X_n i.i.d de fonction de répartition F . Deux statistiques sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements extrêmes ; ce sont le minimum $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et le maximum $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ de l'échantillon. On notera qu'il est très facile de passer de l'un à l'autre à l'aide de la relation :

$$\max_{1 \leq i \leq n} (X_i) = - \min_{1 \leq i \leq n} (-X_i)$$

La fonction de distribution de M_n est donnée par

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = [F(x)]^n \quad (1.1)$$

La formule (1.1) présente un intérêt très limité car la loi d'une variable aléatoire parente X est rarement connue avec précision, et même si la loi de cette variable parente X est connue avec exactitude, la loi du maximum n'est pas toujours facilement calculable.

Comme les valeurs extrêmes se trouvent à droite et à la fin du support de la distribution, intuitivement le comportement asymptotique de M_n doit permettre de rendre compte de queue de la distribution.

Notons par $x_f = \sup\{x \in \mathbb{R}; F(x) < 1\} \leq \infty$, le point terminal à droite (right-end point) de la fonction de répartition F . Ce point terminal peut être infini ou fini.

On s'intéresse alors à la distribution asymptotique du maximum en faisant tendre n vers l'infini ; on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_f \\ 1 & \text{si } x \geq x_f \end{cases}$$

On constate que la distribution asymptotique du maximum donne une loi dégénérée, une masse de Dirac en x_f , puisque pour certaines valeurs de x , la probabilité peut être égale à 1 dans le cas où x_f est fini. Ce fait ne fournit pas assez d'informations, d'où l'idée d'utiliser une transformation afin d'obtenir des résultats plus exploitables pour les lois limites du maximum M_n . Pour cette raison, on essaie de trouver des constantes (a_n) et (b_n) de telle sorte que la loi du maximum normalisée $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)$ ne soit pas dégénérée.

Concernant le comportement du maximum d'une suite de variables aléatoires i.i.d, le résultat le plus important est le théorème de Fisher-Tippett [11] donné pour des maximums normalisés, un théorème analogue est aussi disponible pour le minimum de l'échantillon.

Théorème 1.1. (Fisher-Tippett [11], Gnedenko [13]) Soit $(X_n)_n$ une suite de n variables aléatoires réelles i.i.d de loi F et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. S'il existe deux suites réelles $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que ;

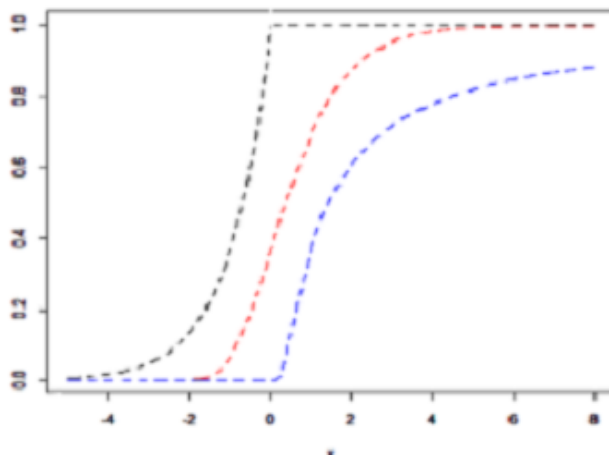
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

où G est une fonction de distribution non dégénérée, alors G est du même type que l'une des familles suivantes :

Gumbel (type I) : $\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\}$; $x \in \mathbb{R}$

Fréchet (type II) : $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp(-(x)^{-\alpha}) & \text{si } x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$

Weibull (type III) : $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \exp(-(-x)^\alpha) & \text{si } x \leq 0, \alpha > 0 \end{cases}$



Graphe-1- Graphe des distributions standards des valeurs extrêmes (le bleu pour Fréchet, le rouge pour Gumbel et le noir pour Weibull).

Les trois types de distribution extrêmes s'appellent les lois standards ou traditionnelles des valeurs extrêmes et α est le paramètre de forme appelé indice des valeurs extrêmes ou indice de queue.

Remarques.

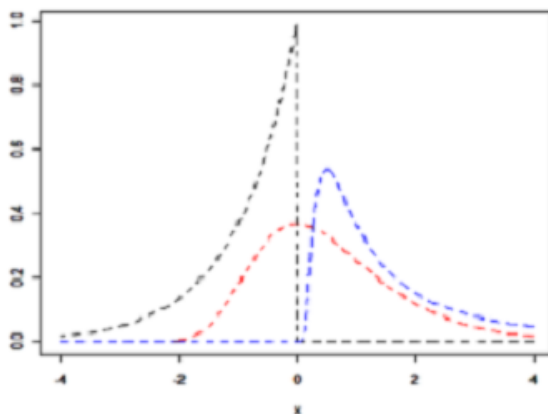
1. Le théorème 1.1 a un intérêt important car si l'ensemble des distributions est grand, l'ensemble des distributions des valeurs extrêmes est très petit.
2. Les suites de normalisation (a_n) et (b_n) ne sont pas uniques.
3. Gnedenko [13] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des constantes de normalisation si la loi de la variable parente X est connue, ces conditions peuvent être utilisées pour déterminer le type de la loi limite.

Proposition 1.1. *Les fonctions de densité des distributions des valeurs extrêmes standards, sont les suivantes.*

$$\Lambda(x) = \exp\{-(x + \exp(-x))\}; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x^{-(\alpha+1)} \exp(-x^{-\alpha}); & x > 0, \quad \alpha > 0 \\ 0; & \text{si non} \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha); & x \leq 0, \quad \alpha > 0 \\ 0; & \text{si non} \end{cases}$$



Graphe-2- Graphe des densités des trois lois standards (le bleu pour Fréchet, le rouge pour Gumbel et le noir pour Weibull).

Bien que les trois lois Λ , Φ_α et Ψ_α soient différentes, elles sont étroitement liées.

Proposition 1.2 (Relation entre Λ , Φ_α et Ψ_α). *Soit Y une variable aléatoire positive. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- a) $Y \sim \Phi_\alpha$
- b) $\ln Y^\alpha \sim \Lambda$
- c) $-Y^{-1} \sim \Psi_\alpha$

1.2.1 Distribution des valeurs extrêmes généralisée (GEV)

Le comportement des lois Λ , Φ_α et Ψ_α est complètement différent mais elles peuvent être combinées en une seule distribution dépendante d'un unique paramètre qui contrôle l'épaisseur de queue de la distribution.

Définition 1.1. *(Représentation de Von Mises-Jenkinson) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, on appelle distribution des valeurs extrêmes généralisée toute distribution H_γ telle que :*

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \gamma x)^{\frac{-1}{\gamma}}) & \text{si } \gamma \neq 0, 1 + \gamma x > 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

H_γ est une fonction non dégénérée et γ est appelé un paramètre de forme (shape parameter).

Le signe du paramètre γ est un indicateur essentiel de la forme de la queue.

- . Le cas $\gamma = 0$, correspond à la loi de Gumbel (est à décroissance exponentielle).
- . Le cas $\gamma < 0$, correspond à la loi de Weibull de paramètre $\alpha = \frac{-1}{\gamma} < 0$ (est à support borné à droite).
- . Le cas $\gamma > 0$, correspond à la loi de Fréchet de paramètre $\alpha = 1/\gamma > 0$ (est à support borné à gauche à queue lourde).

Définition 1.2 (Distribution max-stable). *Une distribution G non dégénérée est dite max-stable si pour toute suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition G , il existe deux suites $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :*

$$G^n(a_n + b_n x) \rightarrow G(x) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

en tout point de continuité de x .

Il est facile de remarquer que la fonction de répartition H_γ est max-stable, pour cela il suffit de prendre $a_n = n^\gamma$ et $b_n = \frac{n^\gamma - 1}{\gamma}$.

Le théorème 1.1 assure que les seules limites possibles pour la loi du maximum normalisé d'un échantillon sont des lois dites max-stable.

Exemple : La loi de Weibull Ψ_α est une loi max-stable, en effet,

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(n^{-\frac{1}{n}}x) &= \exp(-(-n^{-\frac{1}{n}}x)^\alpha)^n \\ &= \exp(-(-n^{-1}x^\alpha)n) \\ &\rightarrow \exp(-(-x^\alpha)), \text{ quand } n \rightarrow \infty \\ &= \Psi_\alpha(x) \end{aligned}$$

1.3 Domaine d'attraction

Dans cette section, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes d'appartenance d'une distribution à un domaine d'attraction de l'une des trois lois des extrêmes. La recherche de ce domaine d'attraction peut être considérée comme l'étude réciproque de la recherche de la distribution limite du maximum normalisée.

Définition 1.3. *On dit qu'une variable aléatoire X appartient au domaine d'attraction de la distribution des valeurs extrêmes G , et on note $X \in DA(G)$, s'il existe des suites réelles $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ telles que la limite (1.2) soit vérifiée.*

Avant de donner les conditions nécessaires et suffisantes sur la variable aléatoire X pour qu'elle appartienne au domaine d'attraction de G , on commence par donner des définitions de quelques outils nécessaires pour cela.

La théorie des fonctions à variations régulières apparaît dans un grand nombre d'applications mathématiques, c'est un outil essentiel pour traiter les queues lourdes, la dépendance à longue portée et les domaines d'attraction.

Définition 1.4. *(Fonction à variation régulière)*

Une fonction mesurable f positive est dite à variation régulière (à l'infini) d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ (on le note $f \in RV_\alpha$), si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha, \quad \forall x > 0$$

Si $\alpha = 0$, on dit que f est à variation lente à l'infini, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = 1$$

Exemple. $f(x) = \log(x)$, $x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(tx)}{\log(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(t) + \log(x)}{\log(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\log x}{\log t}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

La fonction \log est à variation lente.

Remarque : si f est à variation régulière alors $f(x) = x^\alpha l(x)$, où l est à variation lente.

Définition 1.5. (Inverse généralisé) On appelle inverse généralisé ou fonction de quantile de la distribution F , la fonction F^{\leftarrow} définie par :

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y\}, \forall y \in]0, 1[$$

Dans le cas où F est strictement croissante, F^{\leftarrow} coïncide avec l'inverse classique F^{-1} .

Définition 1.6. (Fonction quantile de queue) On appelle fonction quantile de queue de la variable aléatoire X ou de sa distribution F , la fonction $b :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$b(t) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right), \forall t > 1.$$

1.3.1 Domaine d'attraction de Fréchet $DA(\Phi_\alpha)$

Théorème 1.2. La fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de Fréchet ($F \in DA(\Phi_\alpha)$) de paramètre $\alpha > 0$ si et seulement si

$$x_F = +\infty \text{ et } \bar{F}(x) = x^{-\alpha} l(x) \quad \forall x > 0 \tag{1.3}$$

où $l(\cdot)$ est une fonction à variation lente.

Les constantes de normalisation peuvent être choisies telles que

$$a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = 0$$

où F^{\leftarrow} est l'inverse généralisé de la fonction de distribution F .

-Les distributions du $DA(\Phi_\alpha(x))$ sont dites à queue épaisse.

On peut écrire la condition (1.3) de la manière suivante :

$$x_F = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour que $F \in DA(\Phi_\alpha)$.

Proposition 1.3. (Condition de Von Mises) Soit F une fonction de répartition absolument continue de fonction de densité f vérifiant ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{F(x)} = \alpha > 0$$

alors $F \in DA(\Phi_\alpha)$

Exemple. (Loi de Cauchy)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy, sa fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(x)}{(\pi(x))^{-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\pi^{-1}x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{\pi(1+x^2)} = 1$$

On en déduit que $\bar{F}(x) \sim (\pi x)^{-1}$ au voisinage de l'infini.

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\pi tx)^{-1}}{(\pi t)^{-1}} = x^{-1}$$

D'après le théorème 1.2 on a $F \in DA(\Phi_1)$.

On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} P(M_n \leq \frac{nx}{\pi}) &= (1 - \bar{F}(\frac{nx}{\pi}))^n \\ &= (1 - \frac{1}{n}(\frac{1}{x} + o(1)))^n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x^{-1}} = \Phi_1(x) \end{aligned}$$

1.3.2 Domaine d'attraction de Weibull $DA(\Psi_\alpha)$

Théorème 1.3. Une distribution $F \in DA(\Psi_\alpha)$ si et seulement si

$$x_F < +\infty \text{ et } 1 - F(x_F - \frac{1}{x}) = x^{-\alpha}l(x)$$

où l est une fonction à variation lente.

Dans ce cas, les suites de normalisation (a_n) et (b_n) sont données par

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = x_F$$

Proposition 1.4 (Condition de Von Mises). Soit F une fonction de répartition absolument continue, de fonction de densité f positive si

$$\lim_{x \rightarrow x_F^-} \frac{(x_F - x)f(x)}{\bar{F}(x)} = -\alpha > 0$$

alors $F \in DA(\Psi_\alpha)$.

Exemple. (Loi uniforme) On suppose que X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, on a donc

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x < 0 \\ x; & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1; & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

avec $x_F = F^{\leftarrow}(1) = 1 < \infty$

D'autre part on a $\bar{F}(x_F - \frac{1}{x}) = \bar{F}(1 - \frac{1}{x}) = 1 - (1 - \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} = x^{-1}l(x)$, avec $l(x) = 1$

Donc les conditions du théorème 1.3 sont vérifiées alors $F \in DA(\Psi_\alpha)$.

Les constantes de normalisation sont données par

$$a_n = x_F = 1, \quad \text{et} \quad b_n = F^{-1}(x_F) - F^{-1}\left(x_F - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Ce qui signifie que

$$\frac{M_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{L} e^x, \quad \text{avec } x \leq 0 \text{ et } \alpha = 1$$

1.3.3 Domaine d'attraction de Gumbel $DA(\Lambda)$

Théorème 1.4. Une distribution $F \in DA(\Lambda_\alpha)$ si et seulement si

$$E(X/X > c) < \infty \quad \text{pour } c < F^{\leftarrow}(c)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow F^{-1}} \frac{1 - F(t + xE(X - t/X > c))}{\bar{F}(t)}$$

(a_n) et (b_n) sont données par : $a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $b_n = E(X - a_n/X > a_n)$ ou bien

$$b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{nc}\right) - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Il est également possible de caractériser les fonctions de répartition du domaine d'attraction de Gumbel en terme de fonctions de Von Mises.

Définition 1.7 (Fonction de Von Mises). Soit F une fonction de distribution de point terminal x_F . S'il existe $z < x_f$ tel que ;

$$\bar{F} = c \exp\left\{-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right\}, \quad z < x < x_F, \quad c > 0$$

Où $a(\cdot)$ est une fonction positive absolument continue de densité $a'(\cdot)$ vérifiant

$\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0$, alors F est une fonction de Von Mises et $a(\cdot)$ sa fonction auxiliaire.

Proposition 1.5. Une distribution F appartient au domaine d'attraction de Gumbel ($F \in DA(\Lambda)$) si elle est une fonction de Von Mises.

Dans ce cas, un choix possible pour les suites (a_n) et (b_n) est :

$$a_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } b_n = a(a_n)$$

Exemple.

Soit X une variable aléatoire de distribution $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $\lambda > 0$.

On a $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$.

F est une fonction de Von Mises de fonction auxiliaire $a(x) = \lambda^{-1}$

Donc d'après la proposition 1.3 on a $F \in DA(\Lambda)$.

Remarque.

Si $\alpha = 0$, la loi de X présente une décroissance de type exponentielle dans la queue, on dit qu'on est alors dans le domaine d'attraction de Gumbel (c'est le cas par exemple des lois normale, exponentielle, gamma et lognormale); le domaine de Fréchet correspond à des lois non bornées à droite avec $\alpha > 0$ (c'est le cas par exemple des lois de Cauchy et Pareto) et enfin si $\alpha < 0$, la loi de X est bornée à droite et on dit qu'on est dans le domaine d'attraction de Weibull (c'est le cas par exemple des lois uniforme et béta).

1.4 Etude de la théorie des valeurs extrêmes pour des suites stationnaires

1.4.1 Introduction

Cette section est une synthèse de certains résultats classiques qui représentent une généralisation du théorème Fisher-Tippett à des suites stationnaires.

Rappelons qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ est dite stationnaire si pour tous entiers $n, h, i_1 < \dots < i_n$ le vecteur $(X_{i_1+h}, \dots, X_{i_n+h})$ à la même loi de probabilité que le vecteur $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$.

Pour lever l'hypothèse d'indépendance, de nombreux auteurs ont proposé une extension du théorème 1.1 à des suites stationnaires vérifiant différentes conditions de dépendance, telles que la m -dépendance (voir Watson [29]) la condition D (voir Leadbetter et al. [19]) et le mélange fort (voir Loynes [20]).

1.4.2 Convergence du maximum sous le mélange fort

La notion de mélange a été introduite par Rosenblatt [26]; elle décrit l'indépendance asymptotique des variables aléatoires indexées par le temps lorsque la différence entre les indices tend vers l'infini. Elle s'exprime en termes de coefficient de mélange qui est lié à la mesure de la dépendance entre les tribus engendrées par le futur et le passé de la suite.

Définition 1.8. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. Pour tout entier naturel non nul n , on définit le coefficient du mélange fort par :

$$\alpha(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \sup |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{F}_1^k(X) \text{ et } B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty(X) \}$$

où \mathcal{F}_i^k désigne la tribu engendrée par les $X_j; i \leq j \leq k$.

La suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires est dite α -mélangeante si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$$

Le coefficient de mélange α est compris entre 0 et 1/4.

Théorème 1.5 (Loynes [20]). *Soit $(X_n)_n$ une suite stationnaire de variables aléatoires fortement mélangante. S'il existe deux suites réelles $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que*

$$P[M_n \leq a_n x + b_n] = G(x)$$

alors G est de type I, II ou III.

Pour la démonstration de ce théorème (voir Loynes [20]).

1.4.3 Convergence du maximum sous la m-dépendance

Définition 1.9. *La suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ est dite m-dépendante si X_i et X_j sont dépendantes quand $|i - j| \leq m$ et indépendantes quand $|i - j| > m$.*

Si on note

$$F_{i_1, \dots, i_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{i_1} \leq x_1, \dots, X_{i_n} \leq x_n)$$

La m-dépendance correspond à :

$$F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = F_{i_1, \dots, i_p}(x_1, \dots, x_p) F_{j_1, \dots, j_q}(y_1, \dots, y_q) \quad (1.4)$$

avec $i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < j_2 < \dots < j_q$ et $j_1 - i_p > m$

Pour les variables aléatoires m-dépendantes on dispose des travaux de Watson [29] qui a montré que sous certaines conditions la loi de maximum normalisé d'une suite m-dépendante est l'une des trois lois classiques (Fréchet, Weibull, Gumbel).

Théorème 1.6 (Watson [29]). *Soit $(X_n)_n$ une suite stationnaire de variables aléatoires, non bornées et vérifiant la condition (1.4), Si*

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{P(X_i > u)} \max_{|i-j| \leq m} P[(X_i > u), (X_j > u)] = 0 \quad (1.5)$$

alors, pour $\tau = nP[X_i > u_n]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_i \leq u_n] = e^{-\tau}; \quad i = 1, \dots, n$$

Démonstration. Pour chaque $l \leq n$ et $\forall i = 1, \dots, n$, $P[X_i \leq u_n]$ est minorée et majorée respectivement par

$$1 - \sum_{i=1}^n P(X_i \leq u) + \dots + (-1)^{l-1} \sum_{i_{l-1}=1}^n \dots \sum_{i_1=1}^n P[(X_{i_1} \leq u), \dots, (X_{i_{l-1}} \leq u)],$$

$$1 - \sum_{i=1}^n P(X_i \leq u) + \dots + (-1)^l \sum_{i_l=1}^n \dots \sum_{i_1=1}^n P[(X_{i_1} \leq u), \dots, (X_{i_l} \leq u)]$$

avec $u = u_n$ et $\sum_{i=1}^n P(X_i > u) = nF(1 - F(u_n)) \rightarrow \tau$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P[(X_i > u), (X_j > u)] = \sum_{i=1}^m (n-i)P[(X_1 > u), (X_{i+1} > u)] + P(X_i > u)^2(n-m-1)(n-m)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (n-i)P[(X_1 > u), (X_{i+1} > u)] &\leq mn[1 - \frac{m+1}{2n}] \max_{|i-j| \leq m} P[(X_i > c), (X_j > u)] \\ &= mn[1 - \frac{m+1}{2n}] \max_{|i-j| \leq m} \frac{P[(X_i > u), (X_j > u)]}{P[(X_i > u)]} \end{aligned}$$

Si $u = u_n \rightarrow +\infty$, alors d'après la condition (1.5) ce terme tend vers zéro.

Donc, $\sum P[(X_i > u), (X_j > u)] = \frac{1}{2}\tau^2$

De la même façon, on calcule $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n P(X_i > u, X_j > u, X_s > u)$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum P(X_i > u, X_j > u, X_s > u) = -\frac{1}{6}\tau^3$$

En général, pour tout $l < n$

$$\sum_{r=0}^{l-1} \frac{(-\tau)^r}{r!} \leq P(M_n \leq u) \leq \sum_{r=0}^l \frac{(-\tau)^r}{r!}$$

1.4.4 Convergence du maximum sous la condition D

La condition D proposée par Leadbetter et al. [19] est plus faible que la m-dépendance et se définit de la manière suivante :

Définition 1.10 (Condition D). Une suite $(X_n)_n$ vérifie la condition D si pour tout entier $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_q$ tels que $j_1 - i_p \geq l$ on a :

$$|F_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(u) - F_{i_1, \dots, i_p}(u)F_{j_1, \dots, j_q}(u)| \leq g(l) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

avec $g(l) \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \infty$ et F la distribution jointe de X_{i_1}, \dots, X_{i_n}

On introduit maintenant une condition plus faible que D , appelée la condition $D(u_n)$.

Définition 1.11 (Condition $D(u_n)$). *Étant donnée une suite de réels (u_n) et une suite d'entiers naturels $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n$ tels que $j_1 - i_p \geq l$, la condition $D(u_n)$ est vérifiée si*

$$|F_{i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_q}(u_n) - F_{i_1, \dots, i_p}(u_n)F_{j_1, \dots, j_q}(u_n)| \leq \epsilon_{n,l}(u_n)$$

avec $\epsilon_{n,l} \rightarrow 0$ quand $l \rightarrow \infty$

Théorème 1.7 (Leadbetter et Rootzèn [19]). *Soit $(X_n)_n$ une suite stationnaire, s'il existe deux suites $a_n > 0$ et b_n telles que :*

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G(x)$$

Si la condition $D(u_n)$ est vérifiée pour $u_n = a_n x + b_n, \forall x \in \mathbb{R}$, alors la distribution de G est du même type que l'une des trois lois limites classiques.

1.5 Estimation de l'indice des valeurs extrêmes

Diverses méthodes ont été proposées pour estimer l'indice des valeurs extrêmes, on trouve la méthode de maximum de vraisemblance, la méthode des moments, la méthode des moments pondérés, ou encore les méthodes bayésiennes. Il existe également des approches non paramétriques pour l'estimation de l'indice de queue.

Les plus utilisés en pratique sont l'estimateur de Pickands [25], l'estimateur de Hill [16] appliqué seulement dans le domaine d'attraction de Fréchet et l'estimateur Dekkers, Einmalh et De Haan [9].

Considérons la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires i.i.d de fonction de distribution commune F , $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ sont les statistiques d'ordre correspondantes.

On dit que $k = k_n$ est une suite d'entiers intermédiaire si elle vérifie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$$

1.5.1 Estimateur de Hill

Cet estimateur a été introduit par Hill [16] pour estimer d'une manière non-paramétrique l'indice des valeurs extrêmes. Pour le construire, Hill utilise la méthode du maximum de vraisemblance sur l'ensemble des k plus grandes observations d'un échantillon.

Définition 1.12. *L'estimateur de Hill de $\gamma > 0$ est défini par*

$$\hat{\gamma}_k^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \frac{X_{(i)}}{X_{(k)}}$$

Notons que l'estimateur de Hill n'est utilisable que pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet ($\gamma > 0$), cependant on a une propriété intéressante de cet estimateur, il est possible de l'interpréter graphiquement, ceci est particulièrement important pour les praticiens, qui préfèrent souvent des interprétations graphiques.

La consistance faible et forte de l'estimateur de Hill ont été établies par Mason [23], Deheuvels, Haeusler et Mason [8].

Théorème 1.8. *(Mason [23], Deheuvels, Haeusler et Mason [8])*

1) *Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$, $\gamma > 0$, pour suite intermédiaire k on a*

$$\hat{\gamma}_k^H \xrightarrow{P} \gamma$$

2) *Si de plus, $\frac{k}{\log(\log n)} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, alors*

$$\hat{\gamma}_k^{H^{p.s.}} \xrightarrow{P} \gamma$$

Pour établir la normalité asymptotique il est nécessaire d'introduire une condition supplémentaire sur la fonction de distribution F .

Définition 1.13. *On dit qu'une fonction h est à variation régulière de second ordre d'indice (γ, ρ) ; $\rho \leq 0$ (on note $h \in 2RV(\gamma, \rho)$) s'il existe une fonction g à signe constant avec $g \in RV_\gamma$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ telles que,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{h(tx)}{h(t)} - x^\gamma}{g(t)} = cx^\gamma \int_1^x u^{\rho-1} du = cx^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho} ; x > 0, c \neq 0 \quad (1.6)$$

g est appelée la fonction auxiliaire de h .

Théorème 1.9. Soit $F \in DA(H_\gamma)$, $\gamma > 0$ vérifiant la conditions ci-dessous et une suite k intermédiaire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = \lambda$, alors

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_k^H - \gamma) \xrightarrow{d} N\left(\frac{\lambda}{1-\rho}, \gamma^2\right), \quad \lambda < \infty$$

Remarques.

1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = 0$ alors $\sqrt{k}(\hat{\gamma}_k^H - \gamma) \sim N(0, \gamma^2)$

2) On peut associer à l'estimateur de Hill un intervalle de confiance asymptotique $I(\beta)$ de niveau β .

$$I(\beta) = \left] \hat{\gamma}_k^H - z_{\frac{\beta}{2}} \hat{\gamma}_k^H \frac{1}{\sqrt{k}}, \hat{\gamma}_k^H + z_{\frac{\beta}{2}} \hat{\gamma}_k^H \frac{1}{\sqrt{k}} \right[$$

où $z_{\frac{\beta}{2}}$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\beta}{2}$ de la loi normale centrée et réduite.

1.5.2 Estimateur des moments

Cet estimateur introduit par Dekkers et al. [9] est une extension de l'estimateur de Hill, valable pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

Définition 1.14. L'estimateur des moments de l'indice $\gamma \in \mathbb{R}$ est défini par

$$\hat{\gamma}_k^D = M_n^{(1)} + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{(M_n^{(1)})^2}{M_n^{(2)}} - 1 \right)^{-1}$$

où $M_n^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k (\log X_{(i)} - \log X_{(k)})$

et $M_n^{(2)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^k (\log X_{(i)} - \log X_{(k)})^2$

Les propriétés de l'estimateur des moments ont été établies par Dekkers et al [9].

Théorème 1.10. Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et k une suite intermédiaire.

1) Consistance faible :

$$\hat{\gamma}_k^D \xrightarrow{P} \gamma$$

2) Consistance forte : Si de plus $\frac{k}{(\log n)^\delta} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ pour $\delta > 0$, alors

$$\hat{\gamma}_k^D \xrightarrow{p.s} \gamma$$

3) Normalité asymptotique : Si $\log b$ (b est la fonction quantile de queue) vérifie la condition (1.6), et pour une suite intermédiaire k telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (g est la fonction auxiliaire de la fonction $\log b$).

On a,

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_k^D - \gamma) \xrightarrow{d} N(\lambda c_{\gamma, \rho}, \text{var} \gamma)$$

où

$$\text{var} \gamma = \begin{cases} (1 + \gamma)^2; & \gamma \geq 0 \\ \frac{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)(1-\gamma+6\gamma^2)}{(1-3\gamma)(1-4\gamma)}; & \gamma < 0 \end{cases}$$

et

$$c_{\gamma, \rho} = \begin{cases} 1; & \text{si } \gamma > \rho = 0 \\ \frac{(1-\gamma)(1-2\gamma)}{(1-\gamma-\rho)(1-2\gamma-\rho)}; & \text{si } \gamma < \rho \leq 0 \\ \frac{\gamma(1+\gamma)}{(1-\gamma)(1-3\gamma)}; & \text{si } \rho < \gamma \leq 0 \\ -\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}; & \text{si } 0 < \gamma < -\rho \\ \frac{\gamma-\gamma\rho+\rho}{\rho(1-\rho)^2}; & \text{si } 0 < \gamma < -\rho \text{ ou } \gamma \geq -\rho > 0 \end{cases}$$

1.5.3 Estimateur de Pickands

L'estimateur de Pickands est construit en utilisant trois statistiques d'ordre. Cet estimateur a l'avantage d'être valable quel que soit le domaine d'attraction de la distribution et par conséquent, du domaine de définition de l'indice des valeurs extrêmes. Pickands [25] démontre la consistance faible de son estimateur. La convergence forte ainsi que la normalité asymptotique ont été démontrées par Dekkers et De Haan [9].

Définition 1.15. Soient $F \in DA(H_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et k une suite intermédiaire. L'estimateur de Pickands est défini par

$$\hat{\gamma}_k^P = (\log 2)^{-1} \log \frac{X_{(k)} - X_{(2k)}}{X_{(2k)} - X_{(4k)}}, \quad 1 \leq k < \left[\frac{n}{4}\right]$$

Théorème 1.11 (Dekkers et De Haan [9]). Supposons que $F \in DA(H_\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et k une suite intermédiaire.

1) Consistance faible :

$$\hat{\gamma}_k^P \xrightarrow{P} \gamma$$

2) *Consistance forte* : Si de plus $\frac{k}{\log \log n} \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ alors,

$$\hat{\gamma}_k^{P.p.s} \xrightarrow{P.p.s} \gamma$$

3) *Normalité asymptotique* : Si de plus F vérifie (1.6) et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = \lambda$; λ fini, on a

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_k^P - \gamma) \xrightarrow{d} N(\lambda b_{\gamma, \rho}, \text{var} \gamma)$$

où

$$b_{\gamma, \rho} = \begin{cases} 1; \text{ si } \rho = 0 \\ \frac{4^{-\rho\gamma}[(4^{\gamma+\rho}-1)-(2^{\gamma+1})(2^{\gamma+\rho}-1)]}{\rho^{2\gamma}(\gamma+\rho)(2^{\gamma-1}) \log 2}; \text{ si } \rho < 0 \neq \gamma \\ \frac{1-2^{-\rho+1}+4^{-\rho}}{\rho^2(\log 2)^2}; \text{ si } \rho < 0 = \gamma \end{cases}$$

et

$$\text{var} \gamma = \begin{cases} \frac{\gamma^2(2^{2\gamma+1}+1)}{(2(2^{\gamma-1}) \log 2)^2}; \text{ si } \gamma \neq 0 \\ \frac{3}{4(\log 2)^4}, \text{ si } \gamma = 0 \end{cases}$$

1.5.4 Autres estimateurs

1.5.4.1 Estimateur de Hill négatif

Cet estimateur a été proposé par Falk [10]; il peut servir de complément pour l'estimateur de Hill dans le cas $\gamma < -\frac{1}{2}$.

Si $\gamma < -\frac{1}{2}$, l'estimateur de Hill négatif est défini par :

$$\gamma_k^{H^-} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \log(X_{(1)} - X_{(j+1)}) - \log(X_{(1)} - X_{(k+1)})$$

Sous certaines conditions cet estimateur est consistant, mais sa normalité asymptotique est obtenue uniquement pour $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$.

Théorème 1.12. 1) Soient $F \in DA(H\gamma)$ avec $\gamma < -\frac{1}{2}$ et k une suite intermédiaire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^\tau}{\log n} = \infty$ pour τ assez petit, alors

$$\hat{\gamma}_k^{H^-} \xrightarrow{P} \gamma$$

2) Si $F \in DA(H\gamma)$ avec $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$, vérifie (1.6), pour k une suite intermédiaire et sa fonction auxiliaire est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$(\hat{\gamma}_k^{H^-} - \gamma) \xrightarrow{d} N(M, \gamma^2)$$

avec

$$M = \begin{cases} \frac{\lambda\gamma}{\rho(1+\gamma)(1-\gamma)}; & \text{si } \rho < 0 \\ \lambda; & \text{si } \rho = 0 \end{cases}$$

1.5.4.2 Estimateur à noyau

Csörgő et al. [4] ont proposés les estimateurs à noyau $\hat{\gamma}_k^N$. Cette classe d'estimateurs ne peuvent être utilisés que pour $\gamma > 0$, définie par :

$$\hat{\gamma}_k^N = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{j}{k} K\left(\frac{j}{k}\right) (\log X_{(n-j+1,n)} - \log X_{(n-j,n)})}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{k} K\left(\frac{j}{k}\right)}$$

où K représente un noyau d'intégrale égale à 1 (i.e., la fonction $K(\cdot)$ doit satisfaire la condition suivante $0 \leq K(t) < \infty, \forall t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)dt = 1$).

Suivant le choix de ce noyau, différents estimateurs peuvent en résulter, le plus connu étant l'estimateur de Hill, correspondant au cas particulier $K(x) = I_{(0,1]}(x)$.

La consistance et la normalité asymptotique de cet estimateur ont été établis par Groeneboom, P. et Lopuhaä [15]. Plus précisément, Necir [24] a proposé une loi fonctionnelle du logarithme itéré pour cet estimateur et a prouvé sa consistance forte.

1.5.4.3 Estimateur de Zipf

Schultze et Steinebach ([27]) ont proposé d'estimer l'indice de queue par la méthode des moindres carrés classique. Leur estimateur connu sous le nom de Zipf. Il est défini par

$$\hat{\gamma}_k^Z = \frac{M_n^{(1)}}{M_n^{(2)}}$$

où

$$M_n^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log \frac{k+1}{j} \log X_{n-j+1,n} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log \frac{k+1}{j} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log X_{n-j+1,n} \right)$$

$$M_n^{(2)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \log^2 \left(\frac{k+1}{j} \right) - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \log \frac{k+1}{j} \right)^2$$

Cet estimateur a été proposé, dans le but d'améliorer le biais asymptotique des estimateurs de Hill et Pickands. Toute fois, la variance de cet estimateur est deux fois supérieure à

celle de l'estimateur de Hill.

La normalité asymptotique de l'estimateur de Zipf est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.13. *Soient $F \in DA(H\gamma)$, $\gamma > 0$, vérifiant (1.6) et k une suite intermédiaire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{k}g(\frac{n}{k}) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\sqrt{k}(\hat{\gamma}_k^Z - \gamma) \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$$

$$\text{où } \sigma^2 = \begin{cases} 2(1 + \gamma^2 + \gamma); & \text{si } \gamma \geq 0 \\ \frac{2(1-\gamma)[1+2\gamma+\gamma^2-2\gamma^3]}{(1-2\gamma)(1-\gamma)}; & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$$

et $\mu = \frac{\lambda}{(1-\rho)^2}$

Remarques.

- 1) L'estimateur de Hill n'est valable que pour des valeurs positives de $\gamma > 0$, i.e., pour des distributions appartenant au domaine d'attraction de Fréchet, tandis que les estimateurs de Pickands et des moments sont valables pour $\gamma \in \mathbb{R}$.
- 2) Une multitude d'estimateurs ont été proposés pour estimer l'indice des valeurs extrêmes. En revanche, le choix de l'estimateur dépend de la queue de la distribution et de la série étudiée.
- 3) La construction des estimateurs est basée sur le choix de la suite k_n , le nombre d'observations dans la queue de distribution. Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens, proposant différentes techniques pour la détermination de k .

Chapitre 2

Estimateur de type géométrique

2.1 Introduction

Divers estimateurs de l'indice des extrêmes ont été proposés dans la littérature, néanmoins le choix de l'estimateur est complexe car il dépend en premier lieu de la forme et du comportement de la queue de la distribution.

Dans ce chapitre, notre intérêt porte particulièrement sur des estimateurs construits pour des distributions à queue légère. Cette étude est motivée par un important problème dans la théorie du risque, à savoir l'estimation du coefficient d'ajustement dans le modèle de Cramér- Lundberg, qui joue un rôle majeur dans le calcul de la probabilité de ruine. Csörgö-Steinebach [5] ont observé que ce dernier problème d'estimation est équivalent à l'estimation de l'indice des extrêmes. Schultze et Steinebach [27] ont utilisé la méthode des moindres carrés pour obtenir trois estimateurs tandis que Brito-Freitas [21] ont étudié les propriétés de l'estimateur qui s'écrit comme moyenne géométrique des précédents estimateurs.

2.2 Estimateurs de Schultze-Steinebach

2.2.1 Construction des estimateurs de Schultze-Steinebach

Soit une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes de fonction de distribution commune F . Désignons par $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ les statistiques d'ordre correspondantes.

Supposons que

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X_1 > x) = r(x)e^{-\gamma x}, \quad x > 0 \quad (2.1)$$

avec r une fonction à variation régulière et $\gamma > 0$.

Posons $y = \log(1 - F(x))$ et $c = r(x)$, alors

$$\begin{aligned} y &= \gamma x - \log(c) \\ &= \gamma x - d \end{aligned}$$

avec $d = \log(c)$

Pour estimer la fonction de répartition F , on utilise sa fonction empirique

$$\bar{F}_n(x) = 1 - F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > x\}}$$

Alors, y peut être estimé par y_i telle que

$$\begin{aligned} y_i &= -\log(1 - F(x_{n-i+1,n})) \\ &= -\log\left(\frac{(1 - (n - i))}{n}\right) \\ &= \log\left(\frac{n}{i}\right) \end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \gamma^{-1}(y + d) \\ &= ay + b \end{aligned}$$

avec $b = \gamma^{-1}d$ et $a = \gamma^{-1}$

Pour obtenir un estimateur de $\gamma_1 = a^{-1}$, on utilise la méthode des moindres carrés en minimisant la quantité suivante :

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^k (x_i - ay_i - b)^2 \quad (2.2)$$

Les valeurs de a et b qui minimisent $f(a, b)$ sont

$$a = \frac{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})} \text{ et } b = \bar{x} - a\bar{y}$$

i.e.,

$$\frac{1}{a} = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k x_i y_i - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k y_i \right) \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)}$$

En remplaçant x_i par la statistique d'ordre $X_{n-i+1,n}$ et y_i par $\log(\frac{n}{i})$, on trouve le premier estimateur de Schultze et Steinebach [27] de γ_1 , qui est donné par

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k \log^2(n/i) - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \log(n/i) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \log(n/i) X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^k \log(n/i) \right)}$$

Dans le cas où $c = 1$, F est une distribution exponentielle ($\bar{F}(x) = e^{-\gamma x}, x > 0$), un deuxième estimateur de γ est trouvé en cherchant le minimum de la quantité

$$f_2(a) = \sum_{i=1}^k (x_i - a y_i)^2$$

Le minimum est atteint pour

$$a = \frac{\sum_{i=1}^k x_i y_i}{\sum_{i=1}^k y_i^2}$$

i.e.,

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_{i=1}^k \log^2(n/i)}{\sum_{i=1}^k \log(n/i) X_{n-i+1,n}}$$

Un troisième estimateur de γ a été proposé par Schultze et Steinebach en appliquant la méthode des moindres carrés pour l'équation $y = \gamma x - d$; et en minimisant l'erreur quadratique

$$f_3(\gamma, d) = \sum_{i=1}^k (y_i - \gamma x + d)^2$$

Il en découle immédiatement l'estimateur $\hat{\gamma}_3$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)}{\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right)^2}$$

Les trois estimateurs sont regroupés dans la définition suivante.

Définition 2.1. *Pour une suite k intermédiaire, Schultze et Steinebach [27] définissent les trois estimateurs suivants*

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k \log^2\left(\frac{n}{i}\right) - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)^2}{\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)} \quad (2.3)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_{i=1}^k \log^2\left(\frac{n}{i}\right)}{\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) X_{n-i+1,n}} \quad (2.4)$$

$$\hat{\gamma}_3 = \frac{\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right) \left(\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)}{\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right)^2} \quad (2.5)$$

Schultze et Steinebach montrent la consistance de $\hat{\gamma}_i, i = 1, 2, 3$.

2.2.2 Propriétés

Théorème 2.1 (Schultze et Steinebach [27]). *Soit F vérifiant (2.1) et k une suite intermédiaire, alors*

$$\hat{\gamma}_2 \xrightarrow{P} \gamma \quad (2.6)$$

Si de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{k} = 0$, on a

$$\hat{\gamma}_1 \xrightarrow{P} \gamma \quad (2.7)$$

Si de plus, F^{-1} est continue en $(s_0, 1)$ pour $s_0 \in (0, 1)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{k} = 0$ alors,

$$\hat{\gamma}_3 \xrightarrow{P} \gamma \quad (2.8)$$

Preuve. On donne une preuve succincte du théorème 2.1

1) Pour démontrer (2.6) il faut et il suffit de montrer que pour une suite intermédiaire k , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \log \left(\frac{n}{i} \right) \sim \frac{k}{n} \log \left(\frac{n}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \log^2 \left(\frac{n}{i} \right) \sim \frac{k}{n} \log^2 \left(\frac{n}{k} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^2 \left(\frac{n}{i} \right) - \left(\frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \log^j \left(\frac{n}{i} \right) \right)^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (2.11)$$

Si de plus F vérifie (2.1) alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \log \left(\frac{n}{i} \right) X_{n-i+1,n}}{k \log^2 \left(\frac{n}{k} \right)} \xrightarrow{P} \frac{1}{\gamma}$$

2) Pour montrer (2.7) il faut et il suffit, pour une suite intermédiaire k et une distribution F vérifiant les limites (2.9) et (2.10), de prouver que

$$\frac{k}{\sum_{i=1}^k \log \left(\frac{n}{i} \right) X_{n-i+1,n} - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \log \left(\frac{n}{i} \right) \right) \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma \quad (2.12)$$

3) Pour montrer (2.8) il faut et il suffit de prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2(n)}{k} = 0$ et la limite (2.12), de plus, $\exists s_0 \in [0, 1]$ telle que F^{-1} est continue en $(s_0, 1)$ telle que

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{\gamma^2}$$

Les limites (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12) sont démontées dans l'article de Schultze et Steinebach [27].

Pour la normalité asymptotique de $\frac{1}{\hat{\gamma}_i}$, $i=1,3$ Csörgő et Viharos [6] prouvent les théorèmes suivants.

Théorème 2.2. (Csörgő et Viharos [6]) Si k est une suite intermédiaire et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\log^4 n} = \infty$ alors, pour F satisfaisant (2.1), on a

$$k_n^{1/2} \left\{ \frac{1}{\hat{\gamma}_1} - u_n^{(1)} \right\} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2}{\gamma^2}\right),$$

$$\text{où } u_n^{(1)} = -\frac{n}{k} \int_0^{k/n} F^{-1}(1-t) \{1 + \log \frac{nt}{k}\} dt \rightarrow \frac{1}{\gamma} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Théorème 2.3. (Csörgő et Viharos [6]) Si k est une suite intermédiaire et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\log^4 n} = \infty$ alors, pour F satisfaisant (2.1), on a

$$k_n^{1/2} \{1/\hat{\gamma}_3 - u_n^{(3)}\} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{2}{\gamma^2}\right),$$

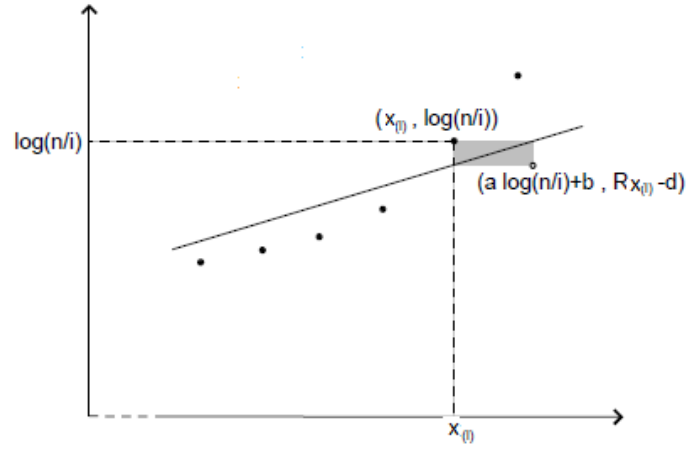
$$\text{où } u_n^{(3)} = \frac{\frac{n}{k_n} \int_0^{k/n} (F^{-1})^2(1-t) dt - \left(\frac{n}{k} \int_0^{k/n} F^{-1}(1-t) dt\right)^2}{-\frac{n}{k_n} \int_0^{k/n} F^{-1}(1-t) \{1 + \log \frac{nt}{k}\} dt} \rightarrow \frac{1}{\gamma} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

2.3 Estimateur de type géométrique

Brito et Freitas [21] introduisent en 2001 un nouvel estimateur de type géométrique noté $\hat{\gamma}$, construit en calculant la moyenne géométrique de $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_3$.

Pour obtenir l'estimateur $\hat{\gamma}$, on minimise la somme globale des aires des rectangles présentés dans la figure suivante.

Géométriquement



Graphe : nuage de points $(X_{(i)}, \log(\frac{n}{i}))$.

$\hat{\gamma}$ est construit en minimisant la quantité :

$$f(\gamma, d) = \sum_{i=1}^k \left(\log\left(\frac{n}{i}\right) - \gamma x_{(i)} + d \right) \left(\gamma^{-1} \log\left(\frac{n}{i}\right) + \gamma^{-1} d - x_i \right)$$

Définition 2.2. *L'estimateur de Brito-Freitas ou l'estimateur de type géométrique est donné par*

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^k \log^2\left(\frac{n}{i}\right) - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n}^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k X_{n-i+1,n} \right)^2}}$$

On sait que $\hat{\gamma}$ est la moyenne géométrique des estimateurs $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_3$ donc on peut déduire une relation entre ces estimateurs donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.4. *Soient $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_3$ des estimateurs définis par (2.3), (2.4) et (2.5) alors,*

$$\hat{\gamma}_3 \leq \hat{\gamma} \leq \hat{\gamma}_1$$

Pour montrer ce résultat il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy Schwarz.

2.4 Propriétés de l'estimateur de type géométrique

Dans cette partie, nous donnons les théorèmes concernant la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur de type géométrique dans le cas d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

Théorème 2.5. (Brito et Freitas [21]) Soient F une distribution vérifiant la condition (2.1) et k une suite intermédiaire telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \log^2 \frac{n}{k} = 0$. Si F^{-1} est continue en $(s_0, 1)$ pour $s_0 \in (0, 1)$ alors

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Schultze et Steinebach montrent dans le théorème 2.1 que si k est une suite intermédiaire vérifiant $\log^2 n/k \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $\hat{\gamma}_1$ est un estimateur consistant de γ . De plus, si F^{-1} est continue en $(s_0, 1)$ pour $s_0 \in (0, 1)$, alors $\hat{\gamma}_3$ est un estimateur consistant de γ .

Comme $\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\gamma}_1 \hat{\gamma}_3}$, en appliquant le théorème de Slutsky, on obtient le résultat du théorème.

Brito et Freitas [21] montrent des résultats similaires aux théorèmes 2.2 et 2.3 pour la normalité asymptotique de l'estimateur $\frac{1}{\hat{\gamma}^2}$ de $\frac{1}{\gamma^2}$.

Théorème 2.6. (Brito et Freitas [21]) Si k est une suite intermédiaire vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} k/\log^4 n = \infty$ alors, pour F satisfaisant (2.1) on a,

$$k^{1/2} \{1/\hat{\gamma}^2 - u_n(k)\} \xrightarrow{d} N(0, 8/\gamma^4),$$

où $u_n(k) = u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k) \rightarrow 1/\gamma^2$ quand $n \rightarrow \infty$

Pour démontrer le théorème 2.6 on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1. (Brito et Freitas [21]) Soient F une distribution vérifiant (2.1) et k une suite intermédiaire telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{\log^4 n} = \infty$.

On définit $W_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_{n-i+1,n}^2 - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Z_{n-i+1,n} \right)^2$, alors

$$k^{1/2} \{W_n - u_n(k)\} = N_n^* + o_p(1)$$

où $N_n^* = N_n^*(h, k)$, $u_n(k) = u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)$ et h est une suite bien choisie, telle que

$$N_n^* \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{8}{\gamma^4}\right)$$

Lemme 2.2. (Brito et Freitas [21]) Soient k une suite intermédiaire et $J_n(k)$ une suite définie par

$$J_n(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^2\left(\frac{n}{i}\right) - \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log\left(\frac{n}{i}\right) \right)^2$$

Alors,

$$J_n(k) = 1 + O\left(\frac{\log^2 k}{k}\right)$$

Preuve du théorème 2.6. On peut écrire

$$k^{1/2}\left\{\frac{1}{\hat{\gamma}^2} - u_n(k)\right\} = \frac{1}{J_n(k)}k^{1/2}\{W_n - u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)\} - \frac{u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)}{J_n(k)}k^{1/2}\{J_n(k) - 1\}$$

D'après les lemmes (2.1) et (2.2), on a $\{J_n(k) - 1\} = O(\frac{\log^2 k}{k})$ et donc

$$\frac{u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)}{J_n(k)}k^{1/2}\{J_n(k) - 1\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On obtient

$$k^{1/2}\left\{\frac{1}{\hat{\gamma}^2} - u_n(k)\right\} = \frac{1}{J_n(k)}k^{1/2}\{W_n - u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)\}$$

avec $\{W_n - u_n^{(1)}(k)u_n^{(3)}(k)\} = N^* + op(1)$

D'où

$$k^{1/2}\left\{\frac{1}{\hat{\gamma}^2} - u_n(k)\right\} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{8}{\gamma^4}\right)$$

Pour obtenir la normalité asymptotique de $\hat{\gamma}$, on considère l'équivalent de la relation (2.1) donnée par

$$F^{-1}(1 - s) = -\frac{1}{\gamma} \log s + \log \tilde{l}(s), \quad 0 < s < 1$$

où \tilde{l} est une fonction à variation lente en 0.

Le théorème suivant qui est démontré par Brito et Freitas.

Théorème 2.7. (Brito et Freitas [21]) Soient F une distribution vérifiant (2.1) et k une suite intermédiaire. Si

$$k^{1/2} \sup_{1/k \leq y \leq 1} \left| \log \left(\frac{\tilde{l}(yt \frac{k}{n})}{\tilde{l}(\frac{k}{n})} \right) \right| \rightarrow 0 \tag{2.13}$$

uniformément en t dans un intervalle compact $(0, \infty)$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{2}\gamma} k^{1/2} (\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Pour avoir des conditions plus faciles à manipuler, on considère le changement de variable $Y_i = e^{X_i}$,

On a

$$1 - F(x) = P(Y_1 > x) = x^{-\gamma}l(x), \quad x > 0 \quad (2.14)$$

avec l est une fonction à variation lente définie par

$$l(x) = r(\log(x)) \quad (2.15)$$

On a la relation asymptotique suivante

$$\frac{l(tx)}{l(x)} - 1 = O(g(x)) \quad \text{quand } x \rightarrow \infty \quad \forall t > 0, \quad (*)$$

avec g une fonction positive vérifiant $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ la

La condition (2.13) fut simplifiée par Bacro et Brito [1] dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *Supposons que l est une fonction à variation lente définie par (2.15), satisfaisant la relation (*) et g est une fonction régulière à l'infini d'indice $\gamma < 0$. Alors, si*

$$k^{1/2}g(\exp(F^{-1}(1 - k_n))) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}k^{1/2}(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

2.5 Estimateur de type géométrique sous le mélange fort

Pour des suites stationnaires vérifiant la condition de mélange fort ou la m-dépendance ; Brito et Freitas montrent que $\hat{\gamma}$ reste consistant.

On rappelle que le coefficient de mélange fort est défini par :

$$\alpha(n, l) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \sup |P(A \cap B) - P(A)P(B)|, A \in \mathcal{F}_1^k(X) \text{ et } B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty(X) \}$$

\mathcal{F}_i^j est la σ -algèbre engendrée par $\{X_l, i \leq l \leq j\}$

Dans le reste de ce chapitre, on utilise les notations suivantes : pour $x \in \mathbb{R}$;

$$\max(x, 0) = x_+, \quad \min(x, 0) = x_-, \quad x_+^2 = (x_+)^2 \text{ et } x_-^2 = (x_-)^2$$

On définit Y_{ni} et I_{ni} deux fonctionnelles de X_i par

$$Y_{ni} = \left(\log X_i - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_+$$

$$I_{ni}(\epsilon, a) = I_{(\log X_i - \log b(\frac{n}{ak}) > \epsilon)}$$

où $b(t) = F^{\leftarrow}(1 - \frac{1}{t})$, $t > 1$

D'après l'article de Hsing [17], le moment d'ordre β de la variable $(\log X - 1 - \log b(\frac{n}{k}))_+$ est donné par

$$E(\log X_1 - \log b(\frac{n}{k}))_+^\beta \sim \frac{\beta k!}{n \gamma^\beta} \quad (2.16)$$

\tilde{H} et H^+ désignent les quantités aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \left(\log X_{n-j+1, n} - \log b(\frac{n}{k}) \right) \\ H^+ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \left(\log X_i - \log b(\frac{n}{k}) \right)_+ \end{aligned}$$

Théorème 2.8. (Brito et Freitas [22]) Soient F une distribution vérifiant (2.14) et k une suite intermédiaire. Supposons que

$$k^{-1} \sum_{i=1}^n (T_{ni} - E(T_{ni})) \xrightarrow{P} 0 \quad (2.17)$$

où $T_{ni} = Y_{ni}^j$, $j = 1, 2$ et $T_{ni} = I_{ni}(\epsilon, a)$ pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$ et a au voisinage de 1.

Alors

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$$

Preuve.

Notons $N^+(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (\log X_1 - \log b(\frac{n}{k}))_+^2 - \frac{1}{k^2} (\sum_{i=1}^n (\log X_1 - \log b(\frac{n}{k}))_+)^2$

Commençant par montrer que,

$$N^+(k) \xrightarrow{P} \frac{1}{\gamma^2} \quad (2.18)$$

On a

$$\frac{n}{k} E(\log X_1 - \log b(\frac{n}{k}))_+^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\gamma^2}$$

On applique la condition (2.17) pour $Y_{ni}^2 = T_{ni}$, et on obtient

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^n (\log X_i - \log b(\frac{n}{k}))_+^2 \xrightarrow{P} \frac{2}{\gamma^2}$$

Alors (2.18) est vérifié, i.e.,

$$N^+(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \left(\log X_i - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_+^2 - \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\log X_i - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_+ \right)^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{\gamma^2}$$

Il nous reste à montrer que

$$N^+(k) - \hat{N}(k) \xrightarrow{P} 0$$

Notons $N^+(k) - \hat{N}(k) = A_n + B_n + \tilde{H}^2 - H^{2+}$

avec $A_n = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \left(\log X_{n-j+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_- \right)^2$

$B_n = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^n \left(\log X_{n-j+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_+^2$

Hsing[17] a déjà prouvé dans le lemme 2.1 que

$$\tilde{H}^2 - H^{2+} \xrightarrow{P} 0$$

Donc, il suffit de montrer que $A_n \xrightarrow{P} 0$ et $B_n \xrightarrow{P} 0$

On sait que

$$\log X_{n-[ak]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{ak}\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ (Hsing[17])} \quad (2.19)$$

On a pour $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left[\log X_{n-[ak]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{ak}\right) > 0\right] &= P\left[\sum_{i=1}^n I_{ni}(\epsilon, a) \geq [ak]\right] \\ &= P\left[k^{-1} \sum_{i=1}^n I_{ni}(\epsilon, a) - E(I_{ni}(\epsilon, a)) \geq k^{-1}([ak] - nE(I_{ni}(\epsilon, a)))\right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(I_{ni}(\epsilon, a)) &= P\left[\log X_i - \log b\left(\frac{n}{ak}\right) > \epsilon\right] \\ &= \bar{F}\left(e^\epsilon b\left(\frac{n}{ak}\right)\right) \end{aligned}$$

On rappelle que si $\bar{F} \in RV_{-\gamma}$ à l'infini alors sa fonction quantile b est à variation régulière d'indice $\frac{1}{\gamma}$ à l'infini de plus $\bar{F}(b(t)) \sim t^{-1}$ quand $t \rightarrow \infty$ alors ;

$$E(I_{ni}(\epsilon, a)) \sim a \frac{k}{n} e^{-\gamma\epsilon}$$

D'où, $k^{-1}([ak] - nE(\epsilon, a)) \rightarrow a(1 - e^{-\gamma\epsilon}) > 0$

On en déduit que

$$P[\log X_{n-[ak]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{ak}\right) > \epsilon] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

De la même façon, on a

$$P[\log X_{n-[ak]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{ak}\right) < -\epsilon] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

$\forall \epsilon > 0, a \in v_1$

D'autre part,

$$|A_n| \leq \left(\log X_{n-k+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) \right)_-^2$$

et pour $\epsilon > 0$

$$P[|A_n| > \epsilon] \leq P\left[\left(\log X_{n-k+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right)\right)_-^2 > \epsilon\right]$$

On remplace $a=1$ dans (2.19), on conclut que

$$A_n \xrightarrow{P} 0$$

Soit $\delta \in \mathbb{R}^+$ telle que $(1 - \delta, 1 + \delta) \subset v_1$

On pose $B_n = C_n + D_n$

$$\text{où } C_n = \frac{1}{k} \sum_{j=k+1}^{[(1+\delta)k]} \left(\log X_{n-j+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right)\right)_+^2$$

$$\text{Et } D_n = \frac{1}{k} \sum_{j=[(1+\delta)k]+1}^n \left(\log X_{n-j+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right)\right)_+^2$$

Et montrons que C_n et D_n converge en probabilité vers 0.

On a $D_n > 0 \Rightarrow \log X_{n-[(1+\delta)k],n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) > 0$

$$\text{et } P[D_n > 0] \leq P[\log X_{n-[(1+\delta)k]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) > 0]$$

comme

$$\begin{aligned} & P[\log X_{n-[(1+\delta)k]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{k}\right) > 0] \\ &= P\left[\log X_{n-[(1+\delta)k]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{(1+\delta)k}\right) > \log b\left(\frac{n}{k}\right) - \log b\left(\frac{n}{(1+\delta)k}\right)\right] \end{aligned}$$

D'après (2.19), on a

$$\log X_{n-[(1+\delta)k]+1,n} - \log b\left(\frac{n}{(1+\delta)k}\right) \xrightarrow{P} 0$$

b est une fonction à variation régulière à l'infini d'indice $\frac{1}{\gamma}$, alors

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log b\left(\frac{n}{k}\right) - \log b\left(\frac{n}{(1+\delta)k}\right)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{b(n/k)}{b(n/(1+\delta)k)} \\ &= \frac{1}{\gamma} \log(1+\delta) > 0 \end{aligned}$$

D'où,

$$P[D_n] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Pour le terme C_n , on remarque que

$$\begin{aligned} C_n &\leq \frac{1}{k} ([(1+\delta)k] - k) (\log X_{n-k,n} - \log b(b/n))_+^2 \\ &\leq \delta (\log X_{n-k,n} - \log b(n/k))_+^2 \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} P[|C_n| > \epsilon] &\leq P[(\log X_{n-k,n} - \log b(n/k))_+^2 > \epsilon \delta^{-1}] \\ &\leq P[(\log X_{n-k+1,n} - \log b(n/k))_+ > \sqrt{\epsilon \delta^{-1}}] \end{aligned}$$

D'après le résultat (2.19), on conclut

$$C_n \xrightarrow{P} 0$$

Ce qui termine la démonstration.

Soit r_n une suite d'entiers positifs, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = 0$.

Notons $S_{nj}(T_{ni}) = \sum_{i=(j-1)r_n+1}^{jr_n} T_{ni}$ la variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\mathcal{F}_{(j-1)r_n+1}^{jr_n}(T_{ni})$, $1 \leq j \leq l_n$ avec $l_n = \lfloor \frac{n}{r_n} \rfloor$ et T_{ni} sont des fonctionnelles de X_i .

Considérons les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} k^{-1} \sum_{j=1}^{l_n} (|S_{nj}| I_{(|S_{nj}| > k)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \\ k^{-2} \sum_{j=1}^{l_n} (S_{nj}^2 I_{(|S_{nj}| \leq k)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Le théorème ci-dessous donne la consistance de $\hat{\gamma}$ sous le mélange fort.

Théorème 2.9. (Brito et Freitas [22]) Soit $(X_n)_n$ une suite strictement stationnaire de distribution commune F vérifiant (2.14) et supposons qu'il existe une suite d'entiers positifs r_n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{k} \rightarrow 0$. Si

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} l_n \alpha(r_n, Y_{ni}) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} l_n \alpha(r_n, I_{ni}(\epsilon, a)) = 0$$

2) Les conditions (2.20) sont vérifiées pour $S_{nj}(I_{ni}(\epsilon, a)), S_{nj}(Y_{ni})$ et $S_{nj}(Y_{ni}^2)$.

Alors

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$$

Brito et Freitas [22] montrent qu'en choisissant la suite r_n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{k} \rightarrow 0$ les conditions (2.15) sont satisfaites. Les conditions (2.20) peuvent être simplifiées dans le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. (Brito et Freitas [22]) Soient $(X_n)_n$ une suite strictement stationnaire de distribution F vérifiant (2.14) et k une suite intermédiaire.

Supposons que pour $T_{ni} = Y_{ni}$ et $T_{ni} = I_{ni}(\epsilon, a)$, il existe une suite r_n telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n \alpha(r_n, \{T_{ni}\}) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{k} \rightarrow 0$ alors,

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$$

Preuve. Pour montrer le corollaire il suffit de vérifier les conditions (2.20).

On pose $T_{ni} = Y_{ni}$, $T_{ni} = Y_{ni}^2$ et $T_{ni} = I_{ni}(\epsilon, a)$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{l_n} E(|S_{nj}| I_{(|S_{nj}| > k)}) &= \frac{l_n}{k} E(S_{n1} I_{|S_{n1}| > k}) \\ &\leq \frac{l_n}{k^2} E(S_{n1}^2) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^{l_n} E(|S_{nj}^2| I_{(|S_{nj}| \leq k)}) &= \frac{l_n}{k^2} E(S_{n1}^2 I_{|S_{n1}| > k}) \\ &\leq \frac{l_n}{k^2} E(S_{n1}^2) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{l_n}{k^2} E(S_{n1}^2(T_{ni})) = \frac{l_n}{k^2} E\left(\left(\sum_{j=1}^{r_n} (T_{ni})\right)^2\right) \leq \frac{l_n}{k^2} r_n^2 E(T_{n1}^2)$$

Donc, il suffit de montrer que

$$\frac{l_n}{k^2} r_n^2 E(T_{n1}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Si $T_{n1} = I_{n1}$, on a

$$E(T_{n1}^2) = E(I_{n1}) = O\left(\frac{k}{n}\right)$$

et si $T_{n1} = Y_{n1}^2$, d'après (2.16) on a

$$E(T_{n1}^2) = O\left(\frac{k}{n}\right)$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{l_n}{k^2} E(S_{n1}^2(T_{ni})) &\leq \frac{n/r_n}{k^2} r_n^2 O\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= O\left(\frac{r_n}{k}\right) \end{aligned}$$

On conclut que

$$\frac{l_n}{k^2} r_n^2 E(T_{n1}^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'après le corollaire 2.2, on peut déduire la consistance de $\hat{\gamma}$ pour les suites m -dépendantes.

Corollaire 2.3 (Brito et Bacro [1]). *Soit $(X_n)_n$ une suite stationnaire, m -dépendante de même distribution F vérifiant la condition (2.1). Alors pour une suite intermédiaire k on a*

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma$$

2.6 Exemple d'application

Cet exemple est une application aux assurances basée sur les résultats obtenus par Brito et Freitas [21].

Les applications statistiques de la théorie des valeurs extrêmes supposent souvent une

prédiction au-delà des plus grandes observations, *i.e.*, une extrapolation. On désire évaluer les performances de l'estimateur construit dans cette section. Pour cela, on décide de comparer les estimateurs de Schultze-Steinebach γ_1 et γ_3 , de Brito-Freitas et celui de Hill. L'étude est basée sur l'estimation du coefficient d'ajustement dans la théorie de risque. Considérons le modèle de Sparre Andersen qui présente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance :

$$S(t) = z + \eta t - \sum_{i=1}^{N(t)} C_i,$$

où

- z et η sont deux réels supposés positifs, représentant respectivement les réserves initiales de la compagnie et le taux de cotisation demandé aux assurés, qui est supposé constant.
- $(N(t)) = \max\{n \leq 0 : \sum_{i=1}^n T_i \leq t\}$ représentant le nombre de sinistres jusqu'au temps t ($t = \sum T_i$).
- C_i est une variable aléatoire positive représentant le montant du i^{eme} sinistre. Les $(C(t))_{t \geq 0}$ sont supposés i.i.d et indépendants de $(N(t))_{t \geq 0}$. Ils sont positifs, de même fonction de répartition F .

Les durées entre deux sinistres sont des variables aléatoires i.i.d distribuées selon la loi exponentielle.

Le but premier de la théorie de la ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la société par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de la ruine, soit la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise et bien entendu d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

La probabilité de la ruine est définie par

$$U(z) = P\left\{\inf_{t>0} \left(z + \eta t - \sum_{i=0}^{N(t)} C_i\right) \leq 0\right\} = P\left\{\max_{t \leq 1} \sum_{i=1}^n (C_i - \eta T_i) \geq z\right\} \quad (2.20)$$

Posons $D_i = C_i - \eta T_i$, $i = 1, 2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d vérifiant $E(D_1) < 0$

La fonction génératrice des moments est donnée par

$$M(r) = E\{exp(rD_1)\} < \infty \quad \forall r \in [0, r_0]$$

R est le coefficient d'ajustement, défini comme l'unique solution positive de l'équation

$$M(R) = 1$$

On s'intéresse à l'estimation du coefficient d'ajustement de la probabilité de la ruine $U(z)$. D'après l'inégalité de Cramer-Lundberg, on sait que quelque soit le capital initial z , la probabilité de la ruine est bornée supérieurement par une fonction décroissante exponentiellement, i.e.,

$$U(z) \leq e^{-Rz}$$

Asymptotiquement

$$U(z) \sim \rho e^{-Rz} \text{ quand } z \rightarrow \infty$$

Où ρ est une constante positive (voir Grandell, Chapitre 3 [14])

Csörgő et Steinebach [5] proposent d'estimer le coefficient d'ajustement R par une suite de variables aléatoires auxiliaires X_k définie par

$$\begin{aligned} W_0 &= 0, W_n = \max\{W_{n-1} + D_n, 0\} \quad n = 1, 2, \dots, \\ v_0 &= 0, \quad v_k = \min\{n \geq v_{k-1} + 1 : W_n = 0\} \quad k = 1, 2, \dots, \\ X_k &= \max_{v_{k-1} < j \leq v_k} W_j \quad k = 1, 2, \dots, \\ (X_n)_n &\text{ est une suite i.i.d satisfaisant} \end{aligned}$$

$$P(X_1 > x) = \exp\{-(1 + o(1))Rx\}; \text{ quand } x \rightarrow \infty \tag{2.21}$$

Si $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i$ est un processus de Poisson composé ou bien les $C_i \sim \exp(\lambda)$ alors (2.21) peut s'écrire de la forme suivante :

$$P(X_1 > x) = ce^{-Rx} \{1 + O(e^{-Ax})\}; \text{ pour } x \rightarrow \infty \tag{2.22}$$

avec c et A sont des constantes positives (voir Csörgő et Steinebach [5]), donc le coefficient d'ajustement peut être estimé par certain estimateurs d'indice des extrêmes proposés dans ce chapitre ou le chapitre précédant.

Exemple.

On considère le cas des cotisations C_i représentées par un processus de Poisson composé

et posons $\alpha = E(\eta T_1) > C_1 = \beta$ alors,

$$M(t) = E(e^{t(C_1 - \eta T_1)}) = \frac{1}{(1 - \beta t)(1 + \alpha t)}, t \in \left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Dans ce cas le coefficient d'ajustement est la solution de l'équation $(1 + \alpha R)(1 - \beta R) = 1$, i.e.,

$$R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}$$

Cohen[3] a donné la distribution exacte de la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ par

$$F(x) = \frac{1 - ae^{-\frac{(1-a)x}{\beta}}}{1 - a^2e^{-\frac{(1-a)x}{\beta}}}, \quad x > 0$$

où $a = \frac{\beta}{\alpha} < 1$. On remarque que cette distribution est un cas particulier de (2.22) avec $A=R$.

Pour un quantile $u = F^{-}(1 - s)$, $0 < s < \frac{a}{1+a}$, on obtient $1 - F(u) = s$, i.e.,

$$\frac{ae^{-\frac{(1-a)u}{\beta}} - a^2e^{-\frac{(1-a)u}{\beta}}}{1 - a^2e^{-\frac{(1-a)u}{\beta}}} = s$$

posons $\zeta = e^{-\frac{(1-a)u}{\beta}}$.

On a $\zeta\{a(1-a) + a^2s\} = s \Rightarrow u = \frac{\beta}{1-a} \log\{\frac{a(1-a)}{s} + a^2\}$

On en déduit la fonction quantile

$$F^{-}(1-s) = \begin{cases} \frac{\beta}{1-a} \log\{\frac{a(1-a)}{s} + a^2\}; & 0 < s < \frac{a}{1+a} \\ 0; & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.23)$$

avec $s = \frac{k}{n}$, $\frac{\beta}{1-a} = \frac{1}{\gamma}$

Pour l'estimation du coefficient d'ajustement, Brito-Freitas [21] ont proposé des simulations en utilisant l'estimateur $\hat{\gamma}$. Dans cette partie on compare les résultats obtenus avec ceux de Schultze et Steinebach [27].

On présente des simulations faites par Brito-Freitas [21] pour différentes tailles de l'échantillon $n=50, 100, 500$; dans chaque cas l'opération est répétée 100 fois.

Pour $(\alpha, \beta) = (24000, 10000)$ la valeur exacte de R est donnée par $R = 5.8 \cdot 10^{-5}$.

Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de fonction de distribution F ou de fonction quantile F^{\leftarrow} de la relation (2.23) et $\beta = E(C_1)$ et $\alpha = E(\eta T_1)$

Pour le problème du choix du nombre d'observations utilisées dans l'estimation k , on peut se référer à l'article de Schultze-Steinebach [27] où la valeur de k est donnée par \tilde{k} dont le choix se fait comme suit :

$\tilde{k} \in \{l, l+1, \dots, n\}$ ($l > 2$) tel que la moyenne des résidus de l'ensemble des points $(x_{n,n}, \log(n/1)), (x_{n-1,n}, \log(n/2)), \dots, (x_{n-\tilde{k}+1,n}, \log(n/\tilde{k}))$ est un minimum.

Simulation pour $n=50, l=5$

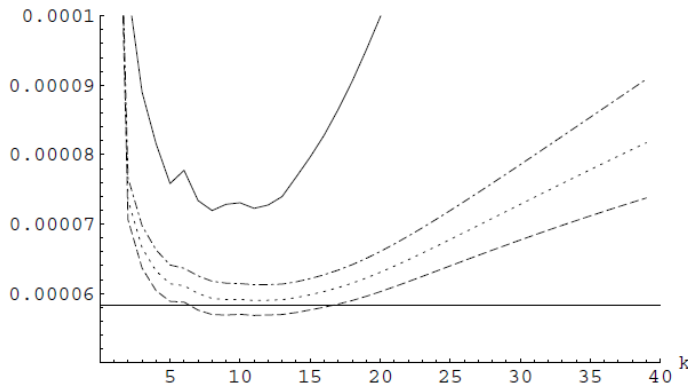
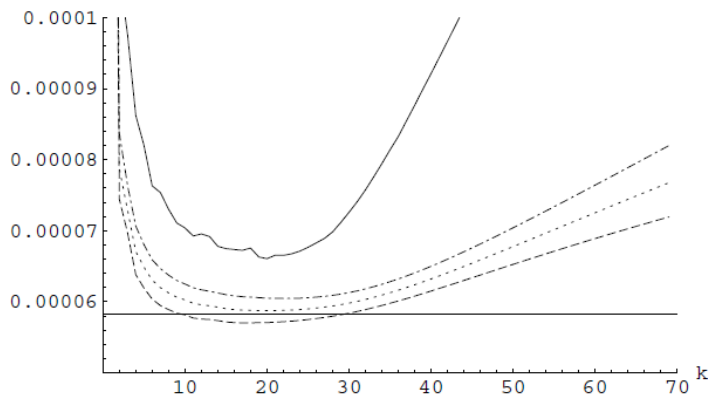


Figure 1 : Le biais de $\hat{\gamma}$ (la ligne pointé), $\hat{\gamma}_3$ (tiret-point ligne), $\hat{\gamma}_1$ et H_{50}^{-1} (ligne).

k	$StdDev(\hat{R}(k))$	$StdDev(\hat{R}_3(k))$	$StdDev(\hat{R}_1(k))$	$StdDev(H_{50}^{-1}(k))$
5	$3.3742 \cdot 10^{-5}$	$3.2406 \cdot 10^{-5}$	$3.5438 \cdot 10^{-5}$	$4.6344 \cdot 10^{-5}$
10	$2.6029 \cdot 10^{-5}$	$2.5319 \cdot 10^{-5}$	$2.6856 \cdot 10^{-5}$	$3.0092 \cdot 10^{-5}$
15	$2.3875 \cdot 10^{-5}$	$2.3444 \cdot 10^{-5}$	$2.4377 \cdot 10^{-5}$	$3.0570 \cdot 10^{-5}$
20	$2.4304 \cdot 10^{-5}$	$2.3801 \cdot 10^{-5}$	$2.4953 \cdot 10^{-5}$	$4.0844 \cdot 10^{-5}$
25	$2.6014 \cdot 10^{-5}$	$2.5164 \cdot 10^{-5}$	$2.7168 \cdot 10^{-5}$	$5.1857 \cdot 10^{-5}$
30	$2.7979 \cdot 10^{-5}$	$2.6624 \cdot 10^{-5}$	$2.9848 \cdot 10^{-5}$	$6.2661 \cdot 10^{-5}$
35	$2.9953 \cdot 10^{-5}$	$2.8008 \cdot 10^{-5}$	$3.2657 \cdot 10^{-5}$	$7.3465 \cdot 10^{-5}$
40	$3.1874 \cdot 10^{-5}$	$2.9290 \cdot 10^{-5}$	$3.5498 \cdot 10^{-5}$	$8.4268 \cdot 10^{-5}$

Tableau 1 : Ecart-type de $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{50}^{-1} .

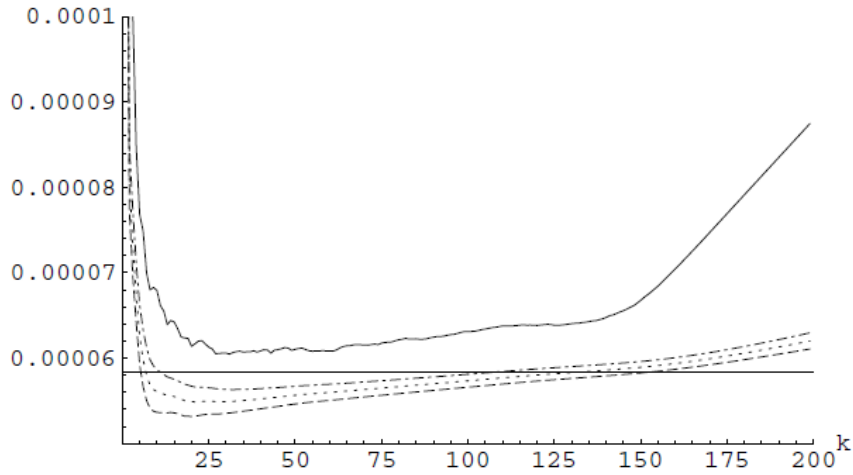
$Mean(\widehat{R}(k))$	$StdDev(\widehat{R}(k))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$6.0181 \cdot 10^{-5}$	$3.2539 \cdot 10^{-5}$	11.68	6.62
$Mean(\widehat{R}_3(k))$	$StdDev(\widehat{R}_3(k))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$5.5778 \cdot 10^{-5}$	$3.1756 \cdot 10^{-5}$	10.58	6.34
$Mean(\widehat{R}_1(k))$	$StdDev(\widehat{R}_1(k))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$6.7150 \cdot 10^{-5}$	$3.3879 \cdot 10^{-5}$	14.63	8.66

Tableau 2 : Ecart-type et le biais de \tilde{k} et les estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{50}^{-1} .Simulation pour $n=100$, $l=5$ Figure 2 : Le biais des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{100}^{-1} .

k	$StdDev(\widehat{R}(k))$	$StdDev(\widehat{R}_3(k))$	$StdDev(\widehat{R}_1(k))$	$StdDev(H_{100}^{-1}(k))$
10	$2.1887 \cdot 10^{-5}$	$2.1397 \cdot 10^{-5}$	$2.2475 \cdot 10^{-5}$	$2.5266 \cdot 10^{-5}$
20	$1.6860 \cdot 10^{-5}$	$1.6846 \cdot 10^{-5}$	$1.6905 \cdot 10^{-5}$	$1.5737 \cdot 10^{-5}$
30	$1.4812 \cdot 10^{-5}$	$1.4924 \cdot 10^{-5}$	$1.4733 \cdot 10^{-5}$	$1.6340 \cdot 10^{-5}$
40	$1.4569 \cdot 10^{-5}$	$1.4632 \cdot 10^{-5}$	$1.4574 \cdot 10^{-5}$	$2.3680 \cdot 10^{-5}$
50	$1.5350 \cdot 10^{-5}$	$1.5237 \cdot 10^{-5}$	$1.5611 \cdot 10^{-5}$	$2.9858 \cdot 10^{-5}$
60	$1.6359 \cdot 10^{-5}$	$1.5984 \cdot 10^{-5}$	$1.6991 \cdot 10^{-5}$	$3.5951 \cdot 10^{-5}$
70	$1.7400 \cdot 10^{-5}$	$1.6716 \cdot 10^{-5}$	$1.8473 \cdot 10^{-5}$	$4.2045 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3 : Ecart-type des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{100}^{-1} .

$Mean(\widehat{R}(\widetilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}(\widetilde{k}))$	$Mean(\widetilde{k})$	$StdDev(\widetilde{k})$
$5.9135 \cdot 10^{-5}$	$2.7928 \cdot 10^{-5}$	19.94	14.42
$Mean(\widehat{R}_3(\widetilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}_3(\widetilde{k}))$	$Mean(\widetilde{k})$	$StdDev(\widetilde{k})$
$5.3088 \cdot 10^{-5}$	$2.7185 \cdot 10^{-5}$	18.10	13.73
$Mean(\widehat{R}_1(\widetilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}_1(\widetilde{k}))$	$Mean(\widetilde{k})$	$StdDev(\widetilde{k})$
$6.3247 \cdot 10^{-5}$	$2.7936 \cdot 10^{-5}$	21.62	16.56

Tableau 4 : Le biais et l'écart-type des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{100}^{-1} .Simulation pour $n=500$, $l=5$ Figure 3 : Le biais des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{500}^{-1}

k	$StdDev(\widehat{R}(k))$	$StdDev(\widehat{R}_3(k))$	$StdDev(\widehat{R}_1(k))$	$StdDev(H_{500}^{-1}(k))$
25	$1.4154 \cdot 10^{-5}$	$1.3985 \cdot 10^{-5}$	$1.4391 \cdot 10^{-5}$	$1.2546 \cdot 10^{-5}$
50	$1.0367 \cdot 10^{-5}$	$1.0456 \cdot 10^{-5}$	$1.0306 \cdot 10^{-5}$	$8.5985 \cdot 10^{-6}$
75	$8.8380 \cdot 10^{-6}$	$8.9895 \cdot 10^{-6}$	$8.7083 \cdot 10^{-6}$	$7.4255 \cdot 10^{-6}$
100	$7.9829 \cdot 10^{-6}$	$8.1635 \cdot 10^{-6}$	$7.8246 \cdot 10^{-6}$	$6.8193 \cdot 10^{-6}$
125	$7.4078 \cdot 10^{-6}$	$7.6004 \cdot 10^{-6}$	$7.2368 \cdot 10^{-6}$	$6.1600 \cdot 10^{-6}$
150	$7.0046 \cdot 10^{-6}$	$7.2027 \cdot 10^{-6}$	$6.8280 \cdot 10^{-6}$	$7.0714 \cdot 10^{-6}$
175	$6.8494 \cdot 10^{-6}$	$7.0602 \cdot 10^{-6}$	$6.6649 \cdot 10^{-6}$	$8.7296 \cdot 10^{-6}$
200	$6.8930 \cdot 10^{-6}$	$7.1060 \cdot 10^{-6}$	$6.7163 \cdot 10^{-6}$	$9.9838 \cdot 10^{-6}$

Tableau 5 : Ecart-type des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{500}^{-1} .

Nous illustrons la performance de \tilde{k} dans une petite étude de simulation, les résultats résumés dans le tableau 6, où on présente l'écart-type et le biais des estimateurs en fonction de \tilde{k} .

$Mean(\widehat{R}(\tilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}(\tilde{k}))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$5.7807 \cdot 10^{-5}$	$1.4755 \cdot 10^{-5}$	126.29	38.57
$Mean(\widehat{R}_3(\tilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}_3(\tilde{k}))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$5.4136 \cdot 10^{-5}$	$1.6161 \cdot 10^{-5}$	109.91	43.36
$Mean(\widehat{R}_1(\tilde{k}))$	$StdDev(\widehat{R}_1(\tilde{k}))$	$Mean(\tilde{k})$	$StdDev(\tilde{k})$
$6.0596 \cdot 10^{-5}$	$1.5509 \cdot 10^{-5}$	130.72	30.08

Tableau 6 : Ecart-type et le biais des estimateurs $\hat{\gamma}$, $\hat{\gamma}_3$, $\hat{\gamma}_1$ et H_{500}^{-1} .

Les résultats obtenus montrent que le choix des k plus grandes observations joue un rôle important dans le comportement des estimateurs. On remarque que pour les petits échantillons les estimateurs de Schultze-Steinbach et celui de Brito sont plus robustes que l'estimateur de Hill.

Quand la taille de l'échantillon augmente on remarque que l'estimateur de Hill est mieux et plus robuste que les autres estimateurs.

D'après les résultats on peut dire que l'estimateur de Brito-Freitas est un estimateur fiable même pour des échantillons de petite taille.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, Nous avons d'abord rappelé les principes fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes univarié pour des suites de variables aléatoires i.i.d et pour des processus stationnaires. Nous nous sommes intéressés dans un deuxième chapitre à l'un des estimateurs de l'indice des extrêmes dit de type géométrique, proposé par Brito et Freitas. Nous avons détaillé l'étude des propriétés : consistance et normalité asymptotique, pour des observations indépendantes puis fortement mélangeantes. A titre illustratif en fin de chapitre, une application sur des données en assurance a été présentée comme exemple pratique.

Suite à ce travail plusieurs pistes de recherche nous semblent intéressantes. Il serait important d'envisager d'étendre les résultats du deuxième chapitre à d'autres types de dépendance plus faible que le mélange fort notamment la dépendance faible au sens de Doukhan et Louhichi qui engendre une classe de processus plus large. Le prolongement en multivarié est aussi indispensable pour bien maîtriser la théorie du calcul des risques et son application, comme pour le calcul des risques en gestion de portefeuilles. On pourrait aussi proposer des applications sur d'autres modèles en finance et comparer les résultats obtenus avec ceux d'autres estimateurs.

Bibliographie

- [1] BACRO, J.N.AND BRITO, M. A tail bootstrap procedure for estimating the tail pareto-index. *J.Statist.Palann.Inference.* 71. (1998), 245–260.
- [2] BERMAN, S. Limiting distribution of the maximum term in a sequence of dependent random variables. *The Annals Mathematical Statistics* 33 (1962), 894–908.
- [3] COHEN.J.W. *The Single Server Queue North-Holland,Amsterdam*, 1982.
- [4] CSÖRGŐ, M., MASON, D., AND DEHEUVELS, P. Kernal estimator of the index of a distribution . *Ann.Statist.* 13. (1985), 1050–1077.
- [5] CSÖRGŐ, M., AND STEINBACH, J. On the estimator of adjustment coefficient in risk theory via intermediate order statistics. *Mathematics and Economics.* 10. (1991), 37–50.
- [6] CSÖRGŐ, M., AND VIHAROS, L. Asymptotic normality of least squares estimators of tail indices. *Bernoulli* 3 (1997), 351–370.
- [7] DE HAAN, L., AND FERREIRA, A. Extreme value theory : An introduction. *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Science and Business Media. LLC.* (2006).
- [8] DEHEUVELS, P., HAEUSLER, E., AND MASON, D. Almost sure convergence of the hill estimator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* 104(2). (1988), 371–381.
- [9] DEKKERS.A., AND LEADBETTER, M., AND HAAN.L, D. On the estimation of the extreme-value index and large quantile estimation. *The Annals of Statistics.* 17(4) (1989), 1795–1832.
- [10] FALK, M. Some best parameter estimates for distributions with finite endpoint. *Statistics : A Journal of Theoretical and Applied Statistics.* 27(1-2). (1995), 115–125.

- [11] FISHER, R., AND TIPPETT, L. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 24. (1928), 180–190.
- [12] FRÉCHET, M. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*. 6. (1927), 93–116.
- [13] GNEDENKO, B. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*. 44(3) (1943), 423–453.
- [14] GRANDSELL, J. Aspects of risque théorie. *Springer, New York*. (1991).
- [15] GROENEBOOM, P., LOPUHAÄ, H., AND DE WOLF. Limiting distribution of the maximum term in a sequence of dependent random variables. *The Annals Mathematical Statistics* 31, ((2003)), 956–1995.
- [16] HILL, B. A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The Annals Mathematical Statistics*. (1975), 1163–1174.
- [17] HSING., T. On tail index estimation using dependence data. *The Annals of Statistics*. 19, (1991), 1547–1569.
- [18] JENKINSON, A. The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 81(348) (1955), 158–171.
- [19] LEADBETTER, M., , ROOTZÉN, H., AND LINDGREN, G. Extreme value theory for continuous parameter stationary processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 28(4). (1974), 289–303.
- [20] LOYNES, R. Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *The Annals Mathematical Statistics*. 36(3) (1965), 993–999.
- [21] MARGARIDA BRITO., ANA CRISTINA MOREIRA., F. Limite behaviour of a geometric-type estimator for tail indices. *Statistics and Probability letters* (2001).
- [22] MARGARIDA BRITO., ANA CRISTINA MOREIRA., F. Consistent estimation of the tail index for dependence data. *Statistics and Probability letters* 80, (2010), 1835–1843.
- [23] MASON, D. A strong invariance theorem for the tail empirical process. *Annales de l' I.H.P Probabilités et Statistiques*. 24(4). (1988), 491–506.
- [24] NECIR, A. Kernel estimators for the extreme value index. *Annals of Statistics* 136 ((2006)), 780–802.

- [25] PICKANDS, J. Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*. 3(1). (1975), 119–131.
- [26] ROSENBLATT, M. A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 42(1) (1956).
- [27] SCHULTZE.J., STEINEBACH, J. On least squares estimates of an exponential tail coefficient. *Statistic and Decisions* 14, (1996), 353–372.
- [28] VON MISES, R. La distribution de la plus grande de n valeurs. *Revue de Mathématique Union Interbalcanique*. 1 (1936), 141–160.
- [29] WATSON, G. Extreme values in sample from m-dependent stationary stochastic processes. *The Annals Mathematical Statistics*. (1954), 789–800.