



Université Mouloud Mammeri TIZI - OUZOU

Faculté du Génie et de la Construction  
Département de Génie Civil

## MEMOIRE DE MAGISTER

Option: Modélisation et calcul non linéaire

Présenté par :

**Monsieur MANI Aomar**

Ingénieur d'état en Génie Civil

### THEME

**Etude comparative de modèles du béton tendu  
fissuré dans les éléments fléchis en  
béton armé.**

Devant le jury composé de:

|    |           |               |                                     |            |
|----|-----------|---------------|-------------------------------------|------------|
| Mr | Bouafia   | Youcef        | Professeur – U.M.M.T.O.             | Président  |
| Mr | Drizi     | Said          | Maître de conférences A –U.M.M.T.O. | Rapporteur |
| Mr | Kachi     | Mohammed Said | Professeur – U.M.M.T.O.             | Examineur  |
| Mr | Mehaddene | Rachid        | Professeur – U.M.M.T.O.             | Examineur  |

Soutenu le 05 / 05 / 2014

# REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance au Docteur S.DRIZI qui a bien voulu proposer et diriger ce travail et surtout, pour son aide morale et effective. Sa contribution réelle a permis de mener à terme ce travail.

Je témoigne aussi ma profonde reconnaissance aux enseignants qui m'ont aidé durant la préparation de mon diplôme entre autres, messieurs: Y. BOUAFIA, M. S. KACHI, R. MEHADDENE, L. DAHMANI et M. DERRADJ, pour leurs contributions.

Que tous les collègues enseignants qui m'ont encouragé dans cette entreprise, et particulièrement, messieurs, H. AIT-AIDER, A. HAMZA, M. SAAD A. BOUHERAOUA, A. ADJRAD, trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres du jury de m'avoir honoré en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne saurai oublier tout mes collègues et amis qui m'ont encouragés durant toute cette période à aller jusqu'au bout de ce travail.

**Résumé:**

Dans le cadre des règlements de béton armé, le calcul, en flexion, des éléments en béton armé se fait en négligeant la contribution du béton tendu. Ces calculs sont tout à fait corrects pour l'estimation de la capacité portante mais conduisent à une surestimation des déformations; car entre les fissures, le béton tendu non fissuré contribue d'une façon non négligeable à la rigidité : c'est l'effet du "tension stiffening". Cette contribution est prise en compte en utilisant soit des lois fictives pour l'acier tendu, soit des lois fictives pour le béton tendu. Divers modèles du béton tendu sont considérés, en particulier les modèles de Grelat, Quast et de Vecchio. Ils sont intégrés dans un programme informatique de calcul qui permet la simulation du comportement non linéaire, jusqu'à rupture, d'un élément en béton armé soumis à la flexion. Une étude paramétrique et comparative relative à la prise en compte de l'effet du "tension stiffening" est ensuite réalisée.

**Mots clés:** Modélisation, "tension stiffening", fissuration, flexion, béton tendu.

**Abstract:**

In the case of the reinforced concrete codes the calculation in flexion of elements in a reinforced concrete is made in neglecting the contribution of the stretched concrete. These calculations are correct for the loading capacity estimation but conduct for overestimating deformations; because, the non cracked stretched concrete between cracks contributes in the way of the non neglecting raider. It's the "tension stiffening" effect. This contribution is taken into account in using even fictive laws for tensile steel, or fictive laws for stretched concrete. Various models for stretched concrete are considered, in particular the models of Grelat, Quast and Vecchio. They are integrated in the computation programme which permits the simulation of the non linear comportment, until rupture of a reinforced concrete element submitted to flexion. A parametrique and a comparative study taking into account the effect of the "tension stiffening" is also carried out.

**Key words:** Modeling, "tension stiffening", cracking, flexion, stretched concrete.

## PRINCIPALES NOTATIONS

$\sigma_{bc}$  : contrainte de la fibre de béton la plus comprimé.

$\sigma_{bt}$  : contrainte de la fibre de béton la plus tendu.

$\varepsilon_{bc}$  : déformation de la fibre de béton la plus comprimé.

$\varepsilon_{bt}$  : déformation de la fibre de béton la plus tendu.

$f_{cj}$  : résistance à la compression du béton à j jours.

$\varepsilon_0$  : déformation de pic correspondant à  $f_{cj}$ .

$E_{b0}$  : module élastique du béton à l'origine.

$K_b'$  : paramètre permettant d'ajuster la branche décroissante de la courbe.

$E_c$  : module d'élasticité du béton.

$E_s$  : module d'élasticité de l'acier.

$f_{cr}$  : contrainte à la fissuration du béton.

$\varepsilon_{cr}$  : déformation à la fissuration du béton.

$f_{ctj}$  : résistance du béton à la traction.

$\varepsilon_{ct}$  : déformation de traction correspondant à  $f_{ctj}$ .

$\varepsilon_y$  : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu.

$\varepsilon_i$  : déformation de la fibre de béton la plus tendue.

$\varepsilon_s$  : déformation de l'acier.

$\varepsilon_y$  : limite d'élasticité de l'acier.

$n$  : coefficient de forme de la courbe.

$\alpha_1$  : paramètre d'adhérence.

$\alpha_2$  : paramètre de chargement.

$\alpha_3$  : paramètre tenant compte des fissures de fendage longitudinal.

$A_c$  : section du béton.

$A_s$  : section d'acier tendu.

$B$  : section du tirant.

$\varepsilon_m$  : allongement relatif moyen du tirant (ou allongement fictif de l'armature).

$\varepsilon_s$  : allongement relatif de l'acier.

$\varepsilon_p$  : déformation plastique.

$E_{b0}$  : Module d'élasticité du béton à la compression

$f_{bt}$  : Contrainte à la traction de béton

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation correspondante à la contrainte à la traction de béton.

$\varepsilon_e$  : Déformation limite élastique de l'acier,

$\sigma_e$  : Contrainte limite élastique de l'acier,

$\varepsilon_u$  : Déformation ultime de l'acier.

$f_{bc}$  : Résistance à la compression du béton.

$E_{bo}$  : Module élastique du béton à l'origine.

$\varepsilon_0$  : Déformation correspondant au pic des contraintes.

$\varepsilon_{cu}$  : Déformation de rupture.

$n$  : coefficient de forme de la courbe

$\sigma_r$  : Contrainte de rupture.

$E_a$  : Module longitudinal de l'acier,

$l_e$  = Longueur de l'élément fini ;

$l$  = Longueur total du poteau ;

$h$  = Hauteur de la section transversale.

## Liste des figures

| <u>FIGURE :</u> | <u>TITRE DE LA FIGURE:</u>                                                                             | <u>PAGE:</u> |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Figure 1.1:     | comportement du béton en compression uni axiale.                                                       | 4            |
| Figure 1.2:     | Comportement du béton en compression selon SARGIN.                                                     | 5            |
| Figure 1.3:     | diagramme contrainte –déformation (loi parabolique)                                                    | 6            |
| Figure 1.4:     | Diagramme contrainte - déformation de la loi de SARGIN avec un tronçon droit.                          | 7            |
| Figure 1.5:     | diagramme contrainte –déformation (loi parabole rectangle)                                             | 8            |
| Figure 1.6:     | Courbes expérimentales du béton en traction selon PETERSON                                             | 9            |
| Figure 1.7:     | Influence de la forme sur la résistance du béton en traction                                           | 9            |
| Figure 1.8:     | Effet d'échelle sur la résistance du béton tendu en flexion                                            | 10           |
| Figure. 1.9:    | Courbes de traction d'éprouvettes en béton selon Hughes et Chapman                                     | 11           |
| Figure 1.10:    | Comportement locale du béton en traction selon MAZARS                                                  | 11           |
| Figure 1.11:    | loi bilinéaire de comportement uni axiale du béton ; d'après COENEN                                    | 12           |
| Figure. 1.12:   | Relation $\frac{\sigma}{f_t} = f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)$ de Zhen-Hai et Xiu-Qin | 13           |
| Figure 1.13:    | Loi de comportement d'un acier naturel                                                                 | 13           |
| Figure 1.14:    | loi de comportement d'un acier écroui [05]                                                             | 14           |
| Figure : I.15:  | Diagramme de calcul des aciers naturels d'après le BAEL                                                | 14           |
| Figure 1.16:    | comportement d'une barre d'acier soumise à un essai d'arrachement.                                     | 15           |
| Figure 1.17:    | Essai de flexion (Beam test)                                                                           | 16           |
| Figure 1.18:    | comportement d'un tirant soumis à la traction uni axiale                                               | 18           |
| Figure 1.19:    | Courbes contrainte- déformation pour deux chemins de chargement A et B                                 | 19           |
| Figure 1.20:    | Exemple type du retrait du béton en fonction du temps                                                  | 20           |
| Figure 1.21:    | Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Scanlon                                        | 21           |
| Figure 1.22:    | loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER                              | 22           |
| Figure 1.23:    | Loi de comportement fictive pour le béton tendu selon BERGAM et HOLLAND                                | 22           |
| Figure 1.24:    | loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER                              | 23           |
| Figure 1.25:    | loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après LIN                                            | 23           |
| Figure 1.26:    | Diagramme contrainte-déformation du béton tendu selon HSU                                              | 24           |
| Figure 1.27:    | Le béton tendu selon GRELAT                                                                            | 26           |
| Figure1.28:     | Le béton tendu selon QUAST [52], [53] et ESPION                                                        | 27           |
| Figure 1.29:    | Application et rayon d'influence du "Tension stiffening" selon Vecchio                                 | 28           |
| Figure 1.30:    | Allure de la courbe $\sigma - \varepsilon_m$ d'un tirant                                               | 30           |
| Figure1.31:     | loi de comportement avec $\Delta\varepsilon_m$ constant                                                | 31           |

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure 1.32: modèle avec $\Delta\varepsilon_m$ constant d'après VAN DER VEEN et BRUGGELING                     | 33 |
| Figure 1.33: loi de comportement fictive du tirant selon RABICH                                                | 34 |
| Figure 1.34: loi de comportement fictive bilinéaire de l'acier selon ESPION                                    | 35 |
| Figure 1.35: loi de comportement de l'acier fictif selon le CEB 90                                             | 36 |
| Figure 1.36: loi de comportement fictive de l'acier selon RAO et ROSTA                                         | 37 |
| Figure 1.37: loi de comportement fictive de l'acier selon SAAD                                                 | 38 |
| Figure 1.38: loi de comportement fictive discontinue selon GILBERT et WARNER                                   | 39 |
| Figure 2.1: Discrétisation de la structure par éléments finis poutres                                          | 41 |
| Figure 2.2: Schématisation de l'élément poutre                                                                 | 42 |
| Figure 2.3: Définition de la cinématique d'un tronçon de poutre                                                | 43 |
| Figure 2.4: Définition d'un élément fini à 2 nœuds                                                             | 45 |
| Figure 2.5: Discrétisation de la section transversale                                                          | 49 |
| Figure 2.6: diagramme contrainte – déformation de la loi de Sargin                                             | 53 |
| Figure 2.7: Diagramme contrainte-déformation de la loi de Sargin avec un tronçon droit                         | 53 |
| Figure 2.8: Diagramme contrainte –déformation (loi parabolique)                                                | 54 |
| Figure 2.9 : Diagramme contrainte –déformation (loi parabole rectangle)                                        | 55 |
| Figure 2.10: Diagramme contrainte –déformation (élastique-fragile)                                             | 56 |
| Figure 2.11: diagramme contrainte –déformation (Loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire) | 56 |
| Figure 2.12: Loi de comportement fictive de Grelat                                                             | 57 |
| Figure 2.13: Loi de comportement fictive de Quast                                                              | 58 |
| Figure 2.14: Loi de comportement fictive de Vecchio                                                            | 59 |
| Figure 2.15: Comportement des aciers naturels                                                                  | 60 |
| Figure 2.16: Comportement des aciers écrouis                                                                   | 61 |
| Figure 3.1 : Organigramme détaillé du bloc calcul                                                              | 62 |
| Figure 4.1: Essai de la poutre de Mazars                                                                       | 74 |
| Figure 4.2a: Comparaison essai-calcul pour la poutre de Mazars                                                 | 75 |
| Figure 4.2b: Comparaison essai-calcul pour la poutre de Mazars                                                 | 75 |
| Figure 4.3: Caractéristiques du poteau de Low_Moehle                                                           | 76 |
| Figure 4.4: Comparaison essai- calcul par l'essai de Low_moehle                                                | 77 |
| Figure 4.5: Comparaison des différentes lois de comportement                                                   | 78 |
| Figure 4.6: Influence de la finesse de discrétisation                                                          | 79 |
| Figure 4.7: Influence de l'effort normal                                                                       | 80 |
| Figure 4.8a: Influence du pourcentage d'aciers (échelle 0 à 35KN)                                              | 81 |
| Figure 4.8b: Influence du pourcentage d'aciers (échelle 0 à 15KN)                                              | 82 |

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION GENERALE.

|      |                       |   |
|------|-----------------------|---|
| 1.1. | Généralités .....     | 1 |
| 1.2. | Objet de l'étude..... | 1 |
| 1.3. | Plan de travail.....  | 2 |

## CHAPITRE1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

|           |                                                                                  |    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1.      | Introduction.....                                                                | 3  |
| 1.2.      | Comportement du béton en compression.....                                        | 3  |
| 1.2.1     | Comportement expérimental.....                                                   | 3  |
| 1.2.2     | Modélisation du béton en compression.....                                        | 4  |
| a)        | loi de Sargin.....                                                               | 4  |
| b)        | loi parabolique.....                                                             | 6  |
| c)        | loi de Sargin avec un tronçon droit.....                                         | 6  |
| d)        | loi parabole-rectangle (loi conventionnelle).....                                | 7  |
| 1.3.      | Comportement du béton en traction: (béton seul).....                             | 8  |
| 1.3.1     | Comportement expérimental du béton en traction uni axiale.....                   | 8  |
| 1.3.2     | Lois de comportement intrinsèques du béton en traction.....                      | 11 |
| 1.4.      | Comportement des aciers.....                                                     | 13 |
| 1.5       | Le béton armé.....                                                               | 14 |
| 1.5.1     | Observations expérimentales du comportement du béton armé.....                   | 15 |
| 1.5.1.a)  | L'adhérence acier-béton.....                                                     | 15 |
| a1)       | Essai de traction (pull out test).....                                           | 15 |
| a2)       | Essai de flexion (beam-test).....                                                | 15 |
| a3)       | Facteurs qui influencent sur l'adhérence acier-béton.....                        | 16 |
| 1.5.1 .b) | La fissuration.....                                                              | 17 |
| 1.5.1.c)  | l'effet du tension stiffening.....                                               | 17 |
| 1.5.2     | Paramètres influençant le comportement du béton vis-à-vis de la déformation..... | 18 |
| a)        | Fluage.....                                                                      | 18 |
| b)        | retrait.....                                                                     | 19 |
| 1.6       | Modélisation du comportement d'une zone tendue en béton armé fissuré.....        | 20 |
| 1.6.1     | Introduction.....                                                                | 20 |
| 1.6.2     | Lois de comportement uni axiales fictives du béton tendu.....                    | 21 |
| 1.6.2.1   | Lois de comportement fictives "intrinsèques" .....                               | 21 |
| 1.6.2.2   | Lois de comportement fictives influencées par l'acier tendu.....                 | 25 |
| 1.6.3     | Diagramme fictif de l'acier.....                                                 | 30 |
| 1.6.3.1   | Définition.....                                                                  | 30 |
| 1.6.3.2   | Comportement type du tirant en béton armé sous traction axiale.....              | 30 |



|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.6.3.3 Synthèse de quelques lois proposées dans la littérature.....            | 31 |
| a) Lois avec $\Delta\epsilon_m$ constant.....                                   | 31 |
| b) Loi avec variation linéaire ou multi linéaire de $\Delta\epsilon$ .....      | 33 |
| c) loi avec variation de $\Delta\epsilon$ en raison inverse de $\sigma_s$ ..... | 36 |
| d) courbe discontinue de Gilbert ET Warner.....                                 | 39 |
| 1.7. Conclusion.....                                                            | 39 |

## CHAPITRE 2: METHODE DE CALCUL ET MODELISATION.

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Introduction.....                                                         | 41 |
| 2.2. Hypothèses de base.....                                                   | 41 |
| 2.3. Cinématique.....                                                          | 42 |
| 2.4. Relation déformations-déplacements.....                                   | 44 |
| 2.5. Relation efforts-déformations.....                                        | 44 |
| 2.6. Discrétisation par éléments finis.....                                    | 45 |
| 2.7. Discrétisation de la section transversale.....                            | 48 |
| 2.8. Evaluation des rigidités de section.....                                  | 49 |
| 2.9. Procédure de calcul non linéaire.....                                     | 49 |
| 2.10. Organigramme de calcul.....                                              | 51 |
| 2.11. Modélisation des matériaux.....                                          | 52 |
| 2.11.1 Le béton.....                                                           | 52 |
| 2.11.1.1 Comportement du béton à la compression.....                           | 52 |
| a) la loi de sargin :(itbc=1).....                                             | 52 |
| b) loi de sargin avec un tronçon droit pour $\epsilon > \epsilon_{b0}$ .....   | 53 |
| c) loi parabolique.....                                                        | 54 |
| d) loi parabole – rectangle.....                                               | 54 |
| 2.11.1.2 Comportement du béton à la traction.....                              | 55 |
| a) loi élastique fragile :(itbt=1).....                                        | 55 |
| b) loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire:(itbt=2)..... | 56 |
| c) loi de comportement fictive de grelat :(itbt=3).....                        | 57 |
| d) loi de comportement fictive de quast : (itbt=4).....                        | 57 |
| e) loi de comportement fictive de vecchio (itbt = 5).....                      | 58 |
| 2.11.2 les aciers.....                                                         | 59 |
| 2.11.2.1 aciers naturels.....                                                  | 60 |
| 2.11.2.2. aciers écrouis.....                                                  | 60 |

## CHAPITRE3: PRESENTATION DU PROGRAMME DE CALCUL.

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Introduction.....                                    | 62 |
| 3.2. Organigramme général du bloc calcul.....             | 62 |
| 3.3. Description des différentes sous-routines.....       | 63 |
| 3.4. Description du fichier de données.....               | 65 |
| 3.5. Description des variables du fichier de données..... | 66 |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| 3.6. Présentation du fichier résultats..... | 71 |
|---------------------------------------------|----|

## **CHAPITRE 4: ETUDE PARAMETRIQUE ET COMPARATIVE.**

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 : Introduction.....                                                       | 74 |
| 4.2: Etude de l'essai de la poutre de Mazar.....                              | 74 |
| 4.2.1: Présentation de l'essai.....                                           | 74 |
| 4.2.2: Calcul et analyse.....                                                 | 74 |
| 4.3: Etude de l'essai du poteau de Low_Moehle.....                            | 76 |
| 4.3.1: Présentation de l'essai de Low_Moehle.....                             | 76 |
| 4.3.2: Evaluation de l'effet du tension stiffening.....                       | 77 |
| 4.3.3: Etude comparative de diverses lois de comportement du béton tendu..... | 77 |
| 4.3.4: Influence de la finesse de discrétisation.....                         | 78 |
| 4.3.5: Influence de l'effort normal.....                                      | 79 |
| 4.3.6: Influence du pourcentage des armatures longitudinales.....             | 81 |
| 4.4: Conclusion.....                                                          | 82 |

## **CONCLUSIONS GENERALES.**

|                            |    |
|----------------------------|----|
| Conclusions générales..... | 84 |
| Perspectives.....          | 84 |

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....85**

### **ANNEXE A1: (Exemple de la poutre de Mazars).**

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Fichier de données..... | 91 |
| Fichier de sortie.....  | 93 |

### **ANNEXE A2: (Exemple du poteau de Low\_Moehle).**

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Fichier de données..... | 96 |
| Fichier de sortie.....  | 98 |

## INTRODUCTION GENERALE

### 1) Généralités :

Dans les calculs classiques des structures en béton armé, le béton tendu est complètement négligé. Cette hypothèse résulte de la faible résistance du béton à la traction et d'autre part de la grande dispersion que présente souvent la valeur réelle de cette résistance.

Ces calculs sont tout à fait corrects pour l'estimation de la capacité portante mais conduisent à une surestimation des déformations, car entre les fissures le béton tendu non fissuré contribue d'une façon non négligeable à la rigidité. Or dans le calcul parasismique, par exemple, surestimer les déformations conduit à surestimer la ductilité ce qui peut être dangereux pour la sécurité vis-à-vis d'un séisme.

### 2) Objet de l'étude :

Dans un élément fléchi en béton armé, le béton tendu entre les fissures contribue d'une façon non négligeable à la rigidité: C'est l'effet du "tension stiffening".

Cette contribution est prise en compte soit en utilisant les lois fictives pour le béton tendu. Ces dernières peuvent être "intrinsèques" ou influencées par la déformation de l'acier tendu.

La connaissance de la déformation d'éléments en béton armé (fissuré) est importante :  
-D'une part, pour prévoir le comportement en service des constructions (état-limite de déformation voir également de fissuration);  
-et d'autre part, pour permettre d'estimer la résistance, par exemple, des pièces comprimées au flambement, de structures hyperstatiques, etc...

Compte-tenu du grand intérêt du sujet, il existe dans la littérature technique d'assez nombreuses publications rapportant des études théoriques et de recherches expérimentales, ainsi que des propositions de démarche pour prendre en compte les divers phénomènes physiques dans les calculs de structures en béton armé.

Les progrès effectués ces dernières années dans le domaine du calcul sur ordinateur des structures, ainsi que dans l'étude expérimentale du matériau béton armé, peuvent laisser penser qu'il est possible d'obtenir par le calcul une représentation de plus en plus proche du comportement réel des constructions en béton armé. Une modélisation réaliste du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis impose de tenir compte de la présence du béton tendu entre les fissures.

Plusieurs lois de comportement du béton tendu fissuré sont présentées en littérature. On se propose d'effectuer une étude paramétrique et comparative relative à la prise en compte de l'effet du "tension stiffening" en considérant divers modèles du béton tendu fissuré.

Cette contribution est prise en compte en utilisant soit des lois fictives pour l'acier tendu, soit des lois fictives pour le béton tendu.

Parmi ces lois, on peut citer celles que nous avons introduites dans un logiciel déjà existant et que nous avons utilisé dans la présente étude comparative. On citera:

- La loi élastique fragile ;
- La loi avec branche descendante linéaire;
- La loi de Grelat;
- La loi de Quast;
- La loi de Vecchio.

### **3) Plan de travail :**

Le travail développé dans ce mémoire est divisé en plusieurs chapitres :

Dans le chapitre1 nous présentons une étude bibliographique qui rappelle les différents aspects du comportement mécanique des matériaux béton et acier et également du composite béton armé. Nous considérons également les principales études réalisées sur le comportement du béton tendu fissuré en particulier à l'effet du "tension stiffening" caractérisant la contribution de celui-ci à la rigidité d'un élément en béton armé soumis à la traction. Nous présentons ensuite quelques travaux portant sur les modèles et lois de comportement de celui-ci en tenant compte des deux approches :

- En utilisant une loi de comportement moyenne fictive du béton tendu.
- En utilisant une loi de comportement de l'acier.

Le chapitre2 est consacré à la présentation d'une méthode d'analyse non linéaire des éléments d'ossatures planes en béton armé, en se basant sur la méthode des éléments finis et l'hypothèse de Navier Bernoulli. Nous présentons aussi quelques lois de modélisations permettant la simulation numérique du comportement du béton tendu entre les fissures utilisées dans le programme de calcul.

Au chapitre3 nous présentons un programme de calcul élaboré en langage Fortran 90. Ce programme permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane, constituée d'éléments poutres en béton armé. Dans ce Programme, nous avons introduit quelques sous-routines concernant les lois de comportement utilisées.

Dans le chapitre4, nous présentons les résultats de l'étude paramétrique et comparative réalisée en considérant l'influence de l'effet du "tension stiffening" sur le comportement des éléments d'ossatures en béton armé.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation des conclusions générales tirées et des perspectives futures pour le présent travail.

## **Chapitre1: Etude bibliographique**

### **1.1 Introduction:**

Dans ce chapitre, on se propose de rappeler quelques aspects du comportement mécanique des matériaux béton et acier et également du composite béton armé. On considère ensuite le comportement en traction d'un tirant en béton fissuré. On s'intéresse en particulier à l'effet du "tension stiffening" caractérisant la contribution du béton tendu fissuré à la rigidité d'un élément en béton armé soumis à la traction. Nous présentons ensuite une revue bibliographique des travaux portant sur les modèles et lois de comportement du matériau « béton armé » tendu et fissuré, en se basant sur le concept de "tension stiffening".

La contribution du béton tendu fissuré est prise en compte selon deux approches.

- En utilisant une loi de comportement moyenne fictive du béton tendu.
- En utilisant une loi de comportement fictive de l'acier.

### **1.2- Comportement du béton en compression:**

Le béton est connu pour sa bonne résistance mécanique à la compression après l'âge de 28 jours. Il est capable de supporter des efforts de compression importants (de l'ordre de 20 à 40MPa) pour un béton ordinaire), son comportement dépend d'un grand nombre de paramètres: tels que la qualité et le dosage des matériaux utilisés, le degré et les conditions de réalisation ...

#### **1.2.1- Comportement expérimental:**

La résistance à la compression du béton est déterminée en utilisant un essai de compression uni axiale sur une éprouvette cylindrique normalisée (16cm x 32cm). L'allure générale de la courbe caractéristique reliant les contraintes aux déformations est donnée par le diagramme représenté sur la (figure 1.1) suivante.

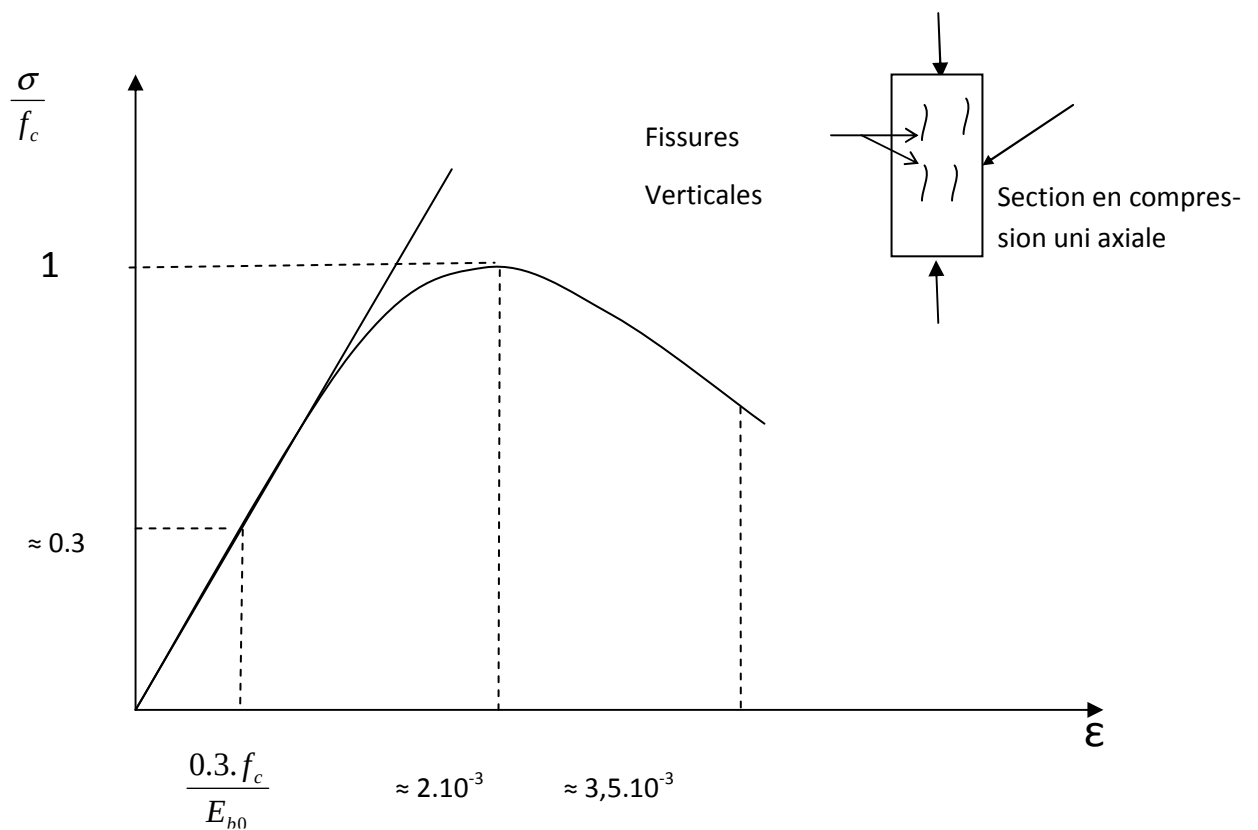


Figure 1.1 : comportement du béton en compression uni axiale [01].

On remarque les phases suivantes:

- la déformation croît de façon linéaire jusqu'à environ 30% de la contrainte ultime.
- entre 30% et 100% de la contrainte ultime, la courbe s'incurve et le comportement devient non linéaire. Ceci correspond à l'apparition puis au développement des fissures verticales dans l'éprouvette.
- l'altitude du pic définit la contrainte ultime qui caractérise la résistance du béton à la compression. Elle correspond à une déformation de l'ordre 2‰.
- la rupture se produit au-delà du pic avec fissuration verticale et écrasement de l'éprouvette. Elle correspond à une déformation de l'ordre de 3.5‰.

### 1.2.2- Modélisation du béton en compression:

#### a) Loi De SARGIN [02].

Sargin a décrit le comportement du béton en compression en admettant un modèle élastique non linéaire. L'allure de la courbe contrainte-déformation est donnée par le diagramme représenté sur la (figure 1.2).

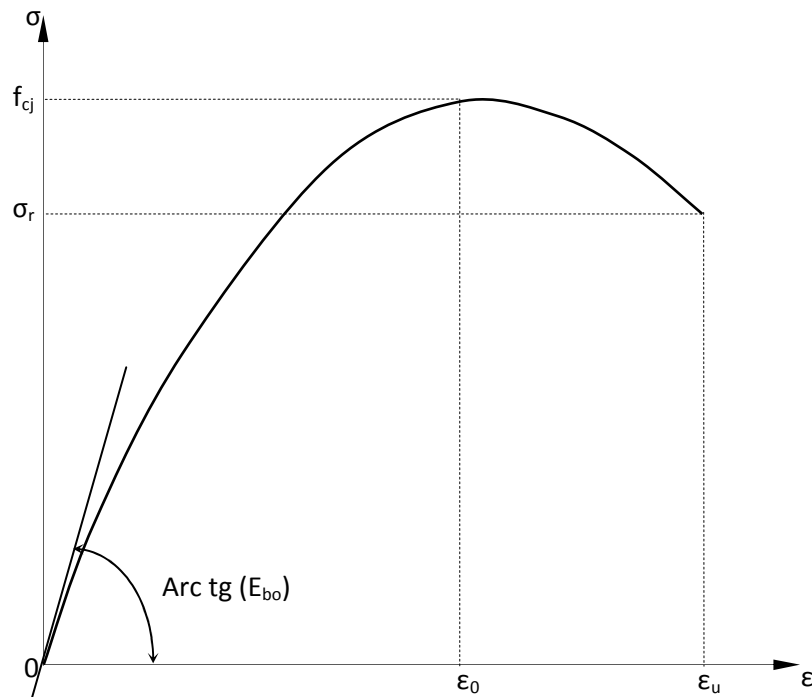


Figure 1.2. Comportement du béton en compression selon SARGIN [02].

La contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) k'_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (1.1)$$

Où  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$K_b$  paramètre ajustant la courbe ascendante :  $K_b = \frac{E_{b0} \varepsilon_0}{f_{cj}}$

$f_{cj}$  : résistance à la compression du béton à j jours ;

$\varepsilon_0$  : déformation de pic correspondant à  $f_{cj}$  ;

$E_{b0}$  : module élastique du béton à l'origine ;

$K'_b$  est un paramètre permettant d'ajuster la branche décroissante de la courbe :

En général, pour un béton normal, on peut prendre :  $k'_b = k_b - 1$

- Pour  $K'_b = 0$ , on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile (cas des bétons légers).

- Pour  $k'_b = 1$ , on obtient les courbes avec une branche descendante assez douce qui correspond à un béton ayant un comportement ductile.

**b) Loi parabolique [03].**

L'équation de cette loi est obtenue à partir de la loi de Sargin pour  $k_b = 2$  et  $K_b' = 0$ , elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad (1.2)$$

Le diagramme contrainte-déformation est représenté sur la (figure1.3).

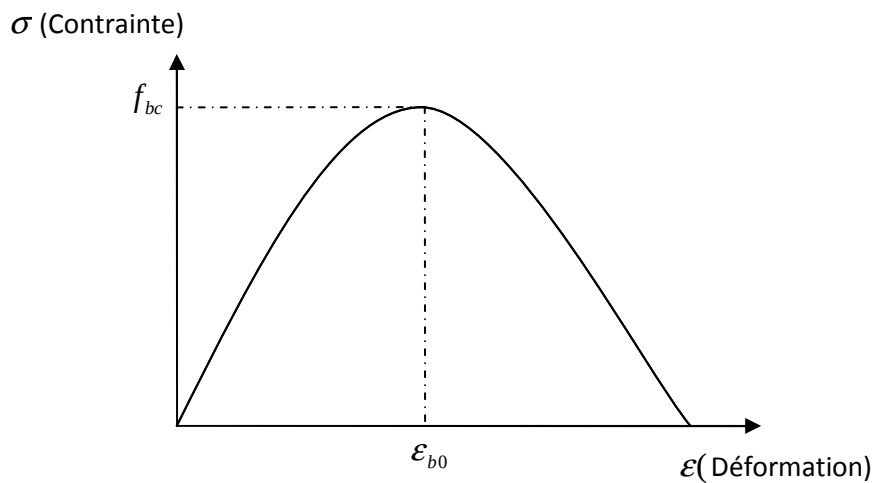


Figure 1.3 : diagramme contrainte –déformation (loi parabolique) [03].

**c) loi de SARGIN avec un tronçon droit pour  $\varepsilon > \varepsilon_{b0}$  [04].**

Pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_{b0}$ , l'équation de la loi est la même que l'équation de SARGIN.

Pour  $\varepsilon > \varepsilon_{b0}$ , la loi se présente sous la forme d'un tronçon droit qui est donné par l'équation :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 1 - \frac{(1 - \frac{f_{bu}}{f_{bc}})(\bar{\varepsilon} - 1)}{(\frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{b0}} - 1)} \right] \quad (1.3)$$



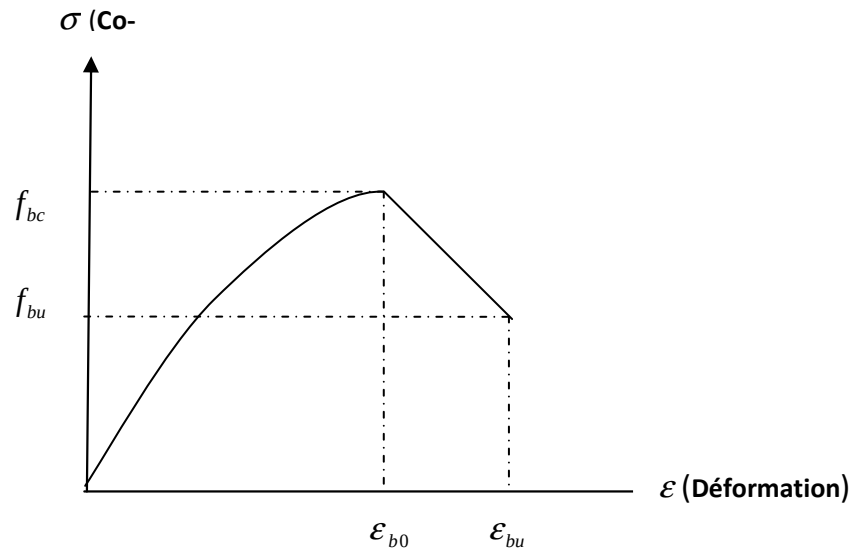


Figure 1.4 : Diagramme contrainte - déformation de la loi de SARGIN avec un tronçon droit [04].

**d) La loi parabole-rectangle (loi conventionnelle) [05]:**

Ce modèle reprend la loi parabole - rectangle des règles BAEL [05]. En compression la contrainte est une fonction parabolique de déformation jusqu'à  $f_{bc}$  (domaine élastique) ensuite elle demeure constante. La non-linéarité ne provient que de la déformation plastique qui vaut  $\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ , le palier du domaine plastique peut commencer à une déformation valant de 0.2%

si le module de Young est pris égale à  $E = \frac{2 \cdot f_c}{0.002}$ , la contrainte s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{b0} = 2\text{‰} \quad \sigma = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad (1.4)$$

$$\text{Pour } \varepsilon = 2\text{‰} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bu} = 3.5\text{‰} \quad \sigma = f_{bc}$$

Cette loi permet d'effectuer des calculs de vérification réglementaires.

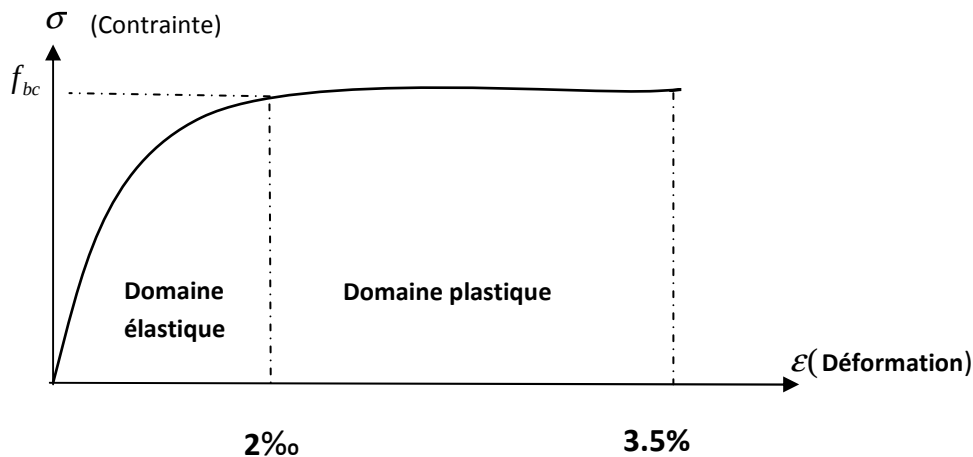


Figure 1.5 : diagramme contrainte –déformation (loi parabole rectangle) [05].

### 1.3 Comportement du béton en traction (béton seul):

Le béton est un matériau fragile. Il présente une faible résistance à la traction de l'ordre du 1/10ième de sa résistance en compression. Par ailleurs, les différents essais utilisés pour mesurer la résistance à la traction du béton montrent une certaine dispersion des résultats.

#### 1.3.1 -Comportement expérimental du béton en traction uni axiale:

La résistance du béton à la traction est mesurée, soit par des essais de traction directe, soit indirectement par des essais de fendage ou de flexion. Afin d'apprécier, lors d'un essai, le comportement d'un élément soumis à une traction directe, il est nécessaire de réaliser l'essai avec asservissement en déformation contrôlée.

Avec l'évolution de la technologie (machines plus performantes) on ne se contente plus de mesure simple de résistance. On se permet de déterminer les courbes contrainte-déformation ( $\sigma - \varepsilon$ ) dans le domaine non linéaire jusqu'à l'atteinte du maximum et même au-delà du pic de contrainte. Ce qui permet de mettre en évidence le comportement post-pic et la ductilité relative du matériau jusqu'à rupture totale. Ces courbes montrent une résistance résiduelle non négligeable du béton tendu après fissuration.

La figure 1.6 montre un exemple de la courbe de comportement type du béton en traction réalisé par Peterson [06]. Les diagrammes obtenus montrent l'existence de deux phases très distinctes :

- Une branche ascendante élastique linéaire jusqu'au maximum de la résistance à traction.
- Au delà du pic, la résistance décroît brutalement puis se stabilise progressivement jusqu'à s'annuler pour une déformation largement supérieure à celle du pic.

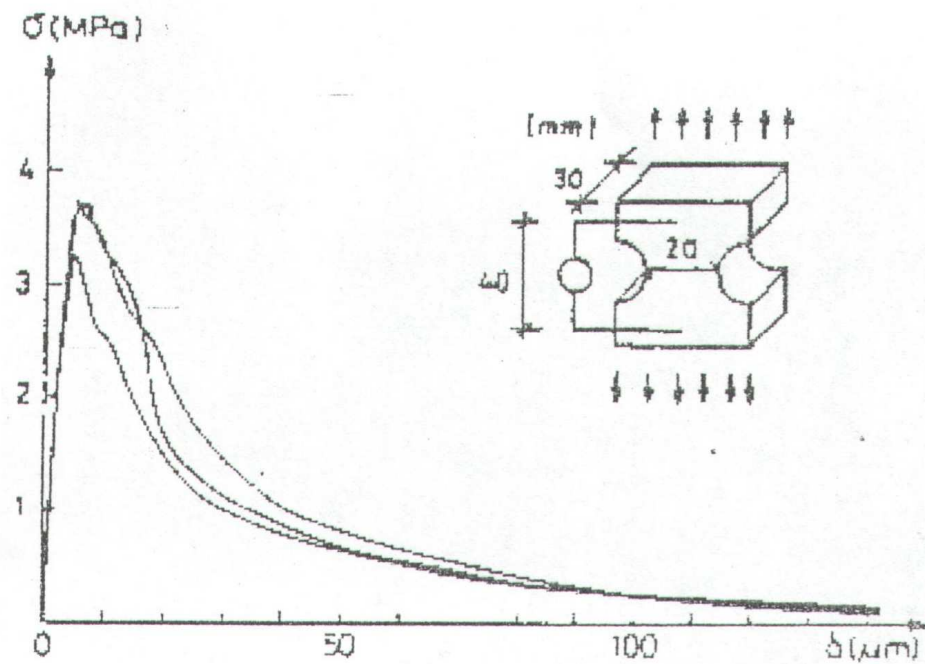


Figure. 1.6: Courbes expérimentales du béton en traction selon PETERSON [06].

Par ailleurs des études expérimentales effectuées par KADLECEK [07], sur des corps d'épreuves de différentes formes et dimensions, en traction directe, ont mis en évidence une influence faible mais non négligeable de la dimension sur la résistance du béton en traction uni axiale et une influence négligeable de la forme (figure 1.7).

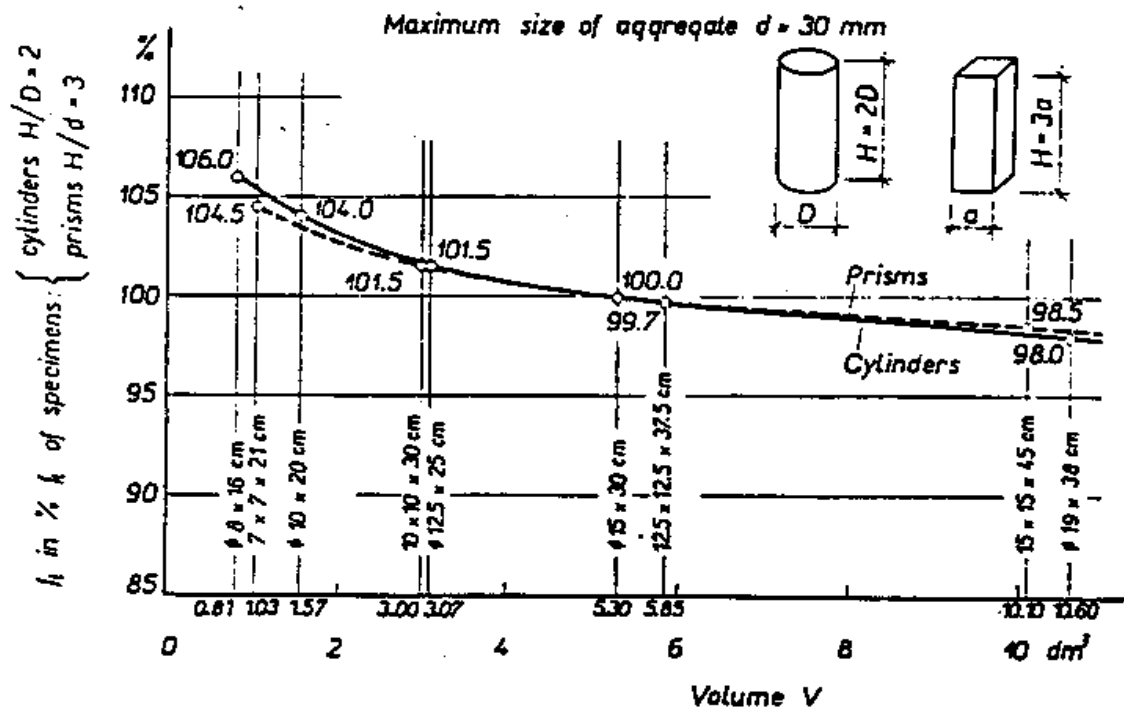


Figure 1.7: Influence de la forme sur la résistance du béton en traction [07].

D'autres auteurs, LEFEVRE [08] et L'HERMITE [09], en effectuant des essais de traction directe et de flexion trois points sur des éprouvettes normalisées (7x7x28cm), avaient constaté une augmentation apparente de la résistance du béton tendu en flexion par rapport à sa résistance en traction directe. Cette augmentation semble être liée au gradient de la déformation qui est nul en traction directe et maximal en flexion simple. Dans le cas de la flexion, l'effet d'échelle devient important.

Les essais de flexion trois points effectués par L'HERMITE [09] montrent que la résistance diminue notablement lorsque la dimension augmente (figure 1.8).

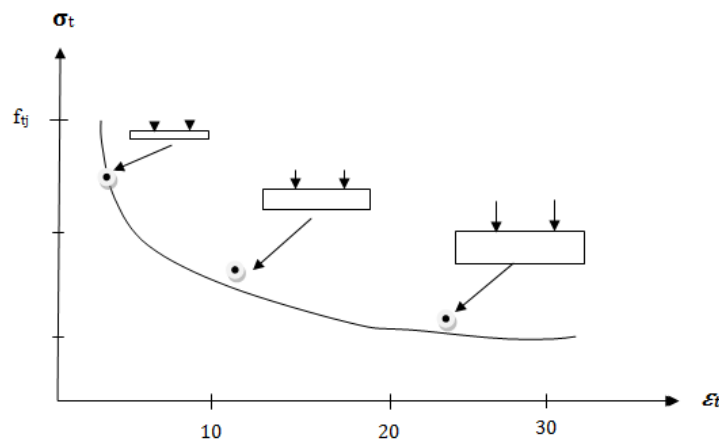


Figure 1.8 Effet d'échelle sur la résistance du béton tendu en flexion [09].

Selon MAZARS [10], l'effet d'échelle est justifié par la nature hétérogène du matériau béton et se compose en deux phénomènes distincts :

- L'effet de volume, résultat de la distribution aléatoire des résistances locales traduisant la distribution aléatoire des défauts au sein du matériau.
- L'effet de structure, résultant de l'existence d'une longueur caractéristique de la zone de localisation des fissures, fonction de la taille des granulats.

D'autres essais réalisés par HUGHES et CHAPMAN [11] ont montré l'effet de la taille des granulats et l'âge de l'éprouvette sur le comportement du béton en traction (figure 1.9).

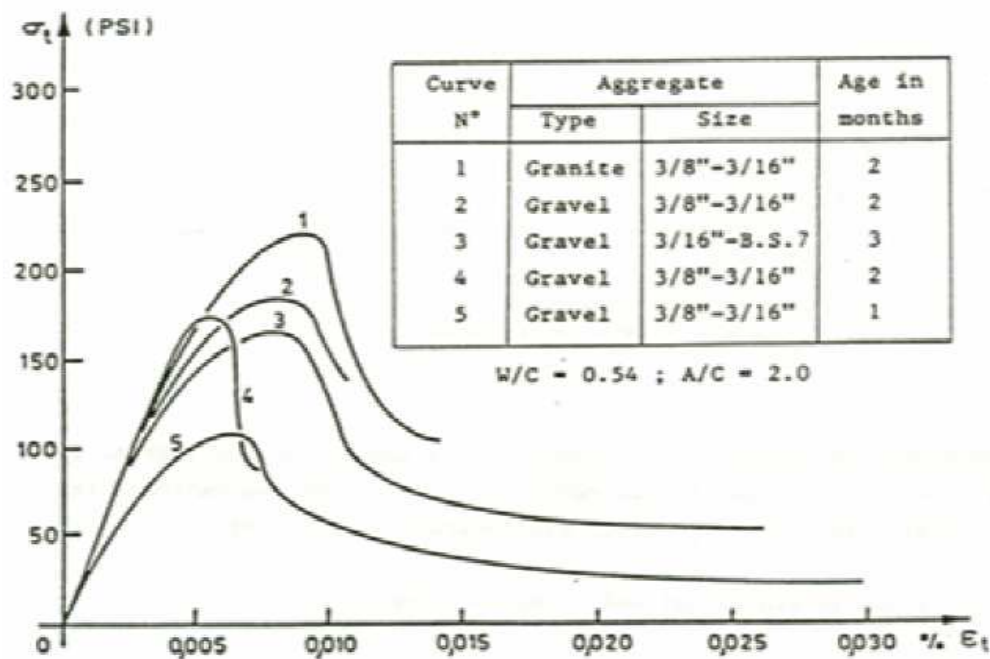


Figure. 1.9. Courbes de traction d'éprouvettes en béton selon Hughes et Chapman [11].

### 1.3.2 Lois de comportement intrinsèques du béton en traction:

Elles constituent une approche du comportement du béton tendu tel qu'il est constaté expérimentalement. Beaucoup de propositions sont réalisées par différents chercheurs. On peut citer :

La loi théorique développée par MAZARS [10]. Elle présente l'avantage d'ajuster la courbe décroissante avec deux paramètres A et B (figure 1.10).

$$\sigma_t = E_{co} \left\{ \varepsilon_{ct} (1 - A_t) + \frac{A_t \varepsilon_m}{e^{B_t (\varepsilon_m - \varepsilon_{ct})}} \right\} \quad \text{si } \varepsilon_m \geq \varepsilon_{ct} \quad (1.5)$$

Les coefficients  $A_t$  et  $B_t$  permettent de moduler la forme de la courbe post-pic.

Avec  $0,7 < A_t < 1$ , en moyenne ;  $A_t = 0,8$

$10^4 < B_t < 10^5$ , en moyenne ;  $B_t = 2 \cdot 10^4$

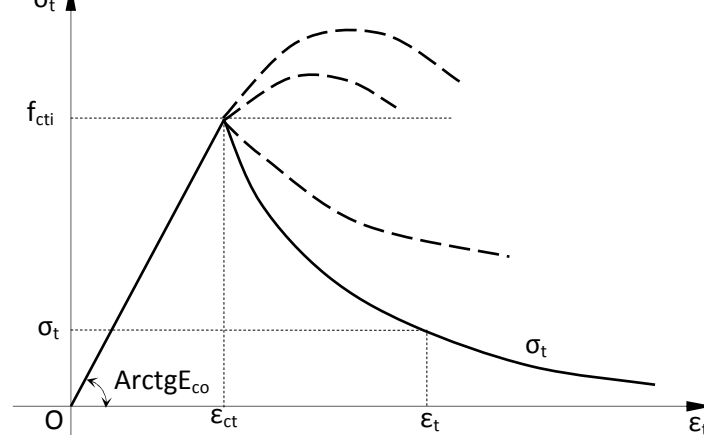


Figure 1.10 : Comportement local du béton en traction selon MAZARS [10].

- COENEN [12] a proposé une loi bilinéaire (fig. 1.11). Ce genre de modèle peut comprendre deux cas extrêmes ; les modèles élasto-plastiques ( $E_f = 0$ ) et les modèles élasto-fragiles ( $E_f = -\infty$ ).

COENEN [12] propose la relation (1.6)

$$\begin{cases} \sigma_t = E_0 \varepsilon_t & \text{si } \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ct} \\ \sigma_t = f_{ct} + E_f (\varepsilon_t - \varepsilon_{ct}) & \text{si } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{tu} \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec :  $-0,1 E_0 \leq E_f \leq -0,3 E_0$

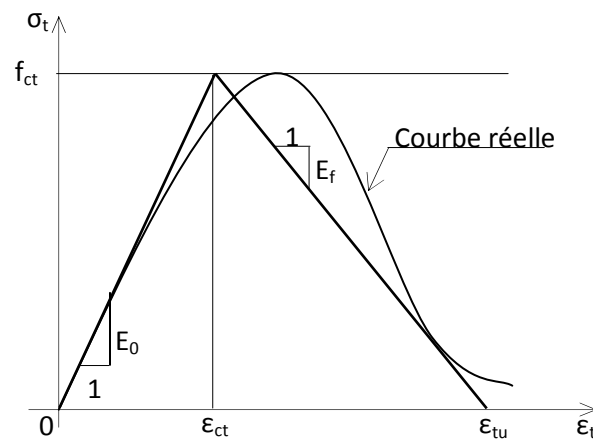


Figure 1.11: loi bilinéaire de comportement uni axiale du béton ; d'après COENEN [12].

- BAZANT et OH [13], avec la même loi bilinéaire définissent  $E_f$  dans la relation (1.7) en fonction de  $E_0$  et  $f_{ct}$  (avec unités en psi).

$$E_f = -\frac{70 E_0}{57 + f_{ct}}, \quad (1.7)$$

- Une autre approche est celle de ZHEN-haï et XIU-Qin [14]. En prenant certaines précautions telles que, (la rigidité de la machine d'essai, centrage des éprouvettes), Ils présentent une loi théorique (relation 1.8) décrivant la courbe ascendante et la courbe décroissante avec un comportement ductile non négligeable du béton tendu (figure .1.12). Ils proposent les relations suivantes :

$$\begin{cases} y = 1,2x - 0,2x^6 & \text{si } x \leq 1, \\ y = \frac{x}{\alpha(x-1)^\beta + x} & \text{si } x \geq 1, \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec :  $\beta = 1,7$ ;  $y = \frac{\sigma}{f_t}$ ;  $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}$  et  $\alpha = 0,312 f_t^2$ .

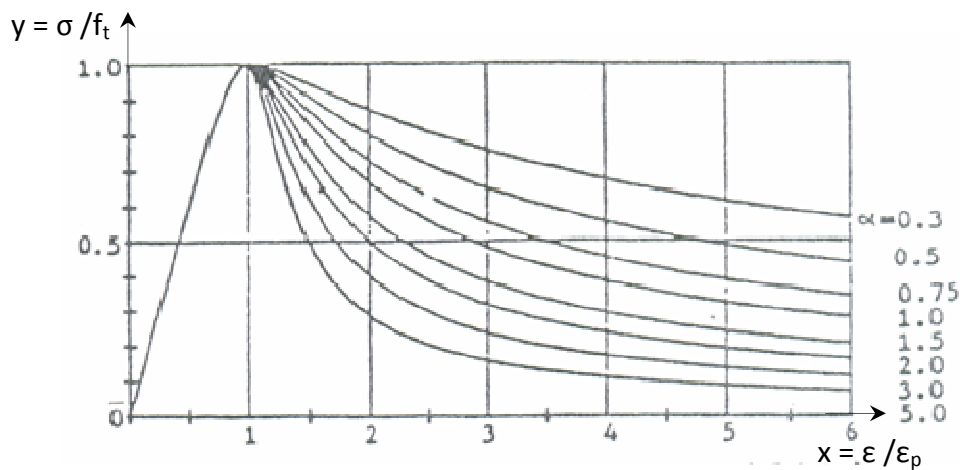


Figure. 1.12. Relation  $\frac{\sigma}{f_t} = f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)$  de Zhen-Hai et Xiu-Qin [14].

#### 1.4 Comportement des aciers:

Le comportement de l'acier est semblable en traction et en compression, contrairement au béton. La loi contrainte-déformation dépend de la nature de l'acier.

Généralement deux types d'aciers sont utilisés pour le renforcement du béton; l'acier naturel et l'acier écroui.

Pour un acier naturel, la courbe contrainte-déformation a l'allure de la figure (1.13). Elle est caractérisée par un palier de ductilité après l'atteinte de la limite élastique  $f_e$  [05].

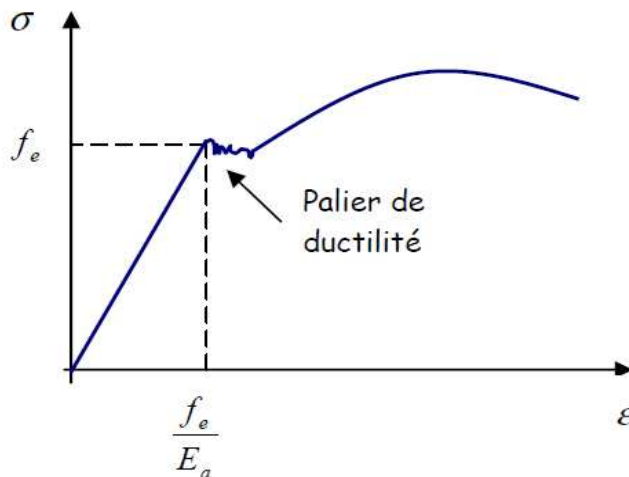


Figure 1.13: Loi de comportement d'un acier naturel [05].

La figure 1.14 présente la courbe contrainte-déformation pour un acier écroui. A noter que l'action d'écrouissage permet d'augmenter la limite d'élasticité en faisant disparaître le palier de ductilité et diminuer l'allongement à la rupture. La limite élastique correspond à une déformation de l'ordre de 2‰.

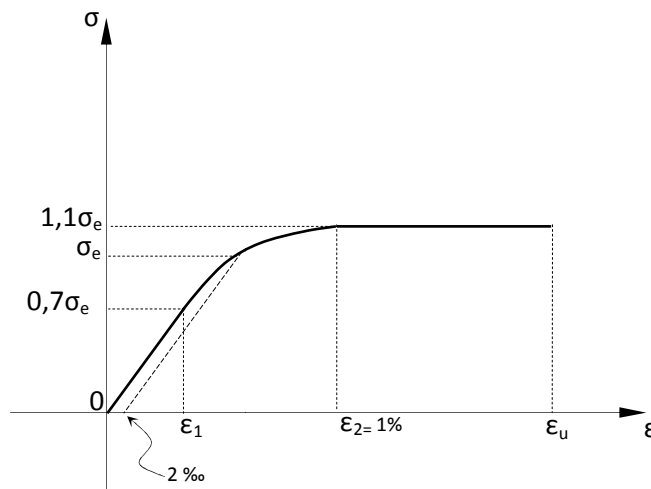


Figure 1.14 : loi de comportement d'un acier écroui [05].

Par contre les règlements adoptent généralement un comportement des aciers élasto-plastique parfait. Exemple le règlement BAEL qui fixe Les déformations ultimes à 10‰ [01].

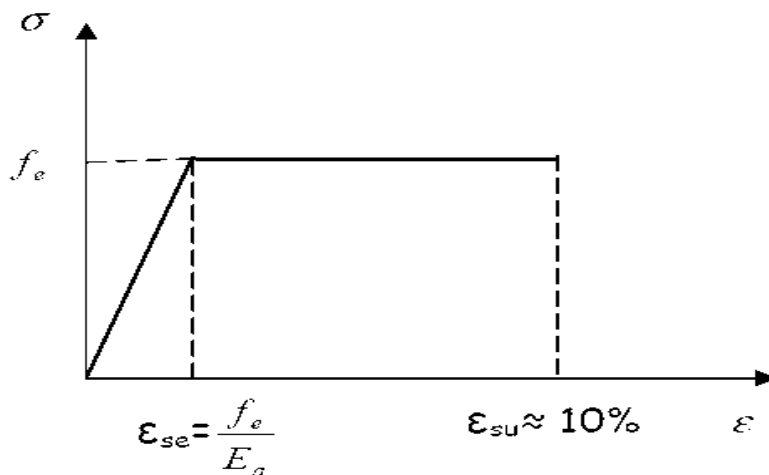


Figure : 1.15 Diagramme de calcul des aciers naturels d'après le BAEL [01].

### 1.5: Le béton armé:

Les structures en béton armé sont généralement composées de deux constituants acier et béton; deux matériaux avec des caractéristiques mécaniques différentes. La propriété mécanique de l'acier peut être considérée comme un matériau homogène. Cette homogénéité rend la définition des propriétés du matériau acier bien connue. Dans l'autre partie, le matériau béton est un matériau hétérogène et ses propriétés mécaniques se dispersent et ne peuvent pas être définies facilement.

Pour faciliter la conception, on considère que le béton est un matériau homogène dans le sens macroscopique.



Le principe du béton armé est de combiner le béton et l'acier de façon que :

- Les efforts de compression soient absorbés par le béton (et éventuellement par l'acier).
- Les efforts de traction soient absorbés par l'acier.

L'association acier-béton est rendue possible grâce à :

- L'adhérence acier-béton, permettant la transmission des efforts entre les deux matériaux.
- L'analogie des coefficients de dilatation très voisins (de l'ordre de  $12.10^{-6}$ ).
- L'absence de réaction chimique nuisible entre la pâte de ciment et l'acier. Par ailleurs, le béton enrobant l'acier le protège de la corrosion.

### 1.5.1 : observations expérimentales du comportement du béton armé:

#### 1.5.1.a) l'adhérence acier-béton:

Généralement, dans les structures en béton armé, les efforts sont appliqués directement sur le béton. La capacité d'adhérence d'une barre en acier au béton est mesurée par un essai d'arrachement (pull out test) où l'essai par flexion (beam-test) selon les normes de la RILEM [15], [16]. Ces deux essais sont très utilisés en pratique.

##### a1) Essai de traction (pull out test):

Une barre d'acier est moulée dans un cube en béton, la barre est ensuite tendue par une machine de traction à l'une de ses extrémités (figure 1.16).

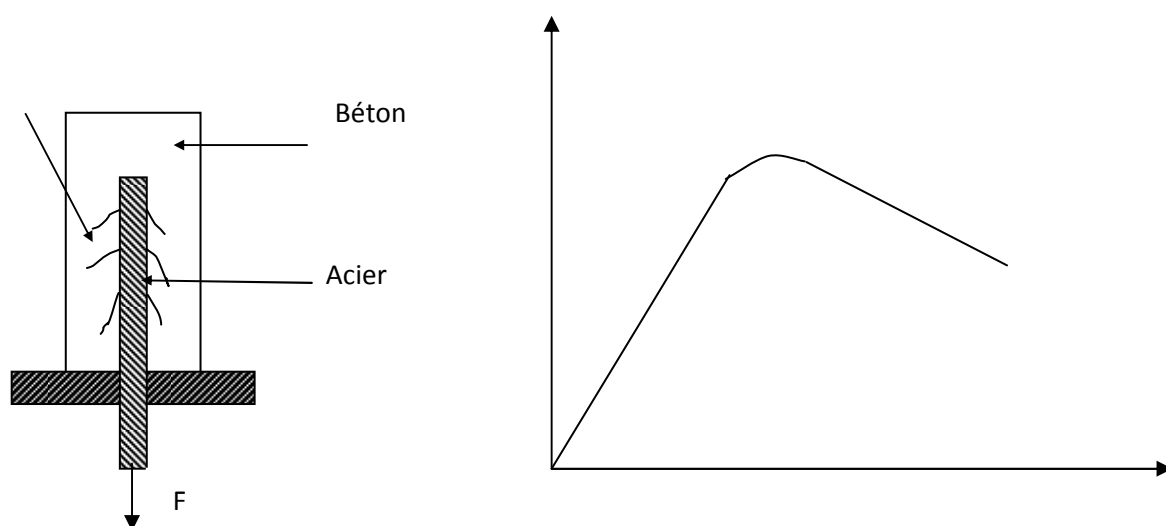


Figure 1.16 comportement d'une barre d'acier soumise à un essai d'arrachement [15].

Cet essai montre que l'adhérence n'est pas due uniquement à un phénomène de collage entre les deux matériaux car elle subsiste même à des déplacements (glissements) notables. IL s'agit en fait d'un phénomène de frottement.

### a2) Essai de flexion (beam- test) :

La poutre en béton armé est formée de deux moitiés symétriques. Dans chaque partie, l'armature principale de traction n'est adhérente que sur une longueur de dix fois son diamètre. Cet essai aux normes de la RILEM permet de mesurer le glissement relatif acier-béton et de déterminer la force d'arrachement c'est-à-dire la rupture d'adhérence

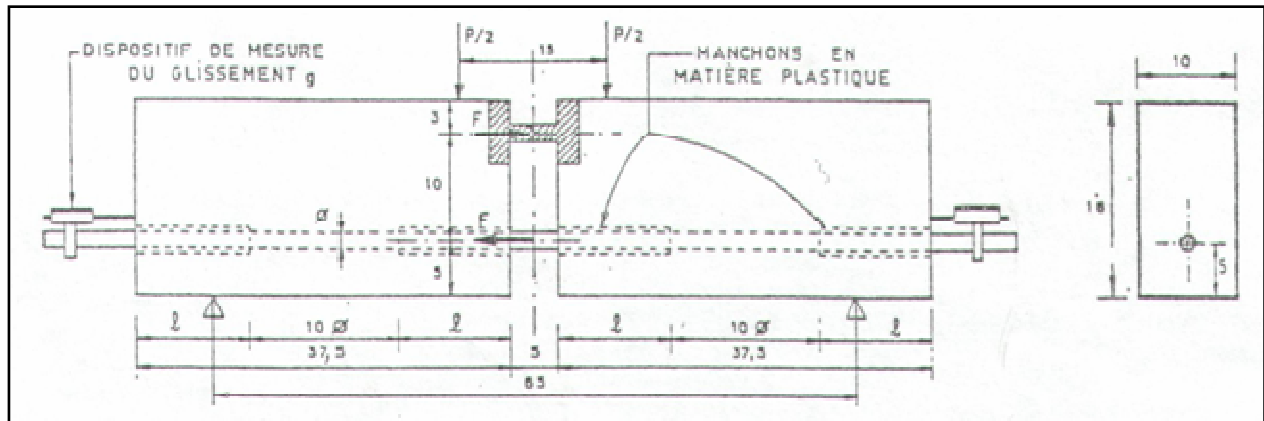


Figure 1.17 Essai de flexion (Beam- test) [16].

### a3) Facteurs qui influencent sur l'adhérence acier-béton:

L'influence des divers paramètres sur l'adhérence acier-béton n'est pas toujours facile à quantifier. Même avant le chargement, plusieurs éléments contribuent aux conditions d'adhérence. Plusieurs expériences réalisées font ressortir certains facteurs qui améliorent la qualité du phénomène.

- L'état de surface et la forme de la barre d'acier: L'adhérence est améliorée lorsque la barre possède des nervures en saillies où lorsque sa surface est rugueuse [17].
- La qualité du béton d'enrobage: l'adhérence croît avec la résistance en compression du béton, c'est-à-dire avec le dosage et la classe du ciment et aussi par les conditions de vibration lors du coulage. GIURIANI [18] a mis évidence l'influence de l'enrobage du béton autour de la barre.
- L'adhérence physico-chimique: ce genre d'adhérence a été mis en évidence par MARTIN [19]. Cet état s'explique par la pénétration de la pâte fluide du ciment dans la couche extérieure oxydée des barres : cette rouille augmente la rugosité et donc l'adhérence.
- La position de la barre: la position de la barre dans le coffrage et son inclinaison par rapport à la direction de bétonnage, influent sur la valeur de l'adhérence, ainsi que le confinement [20].
- Le retrait du béton: les contraintes de compression normales à la surface de la barre, créées par le retrait du béton influent sur l'adhérence acier-béton. Celles-ci ont été mesurées par LUTZ et GERGELY [21] et sont de l'ordre de 0.5 MPa pour une déformation de  $3.10^{-4}$ .

f) L'Influence des armatures transversales: Celles-ci créent des conditions de confinement du béton autour de la barre [22].

g) L'espacement entre les barres: FERGUSON et al [23] ont mis en évidence l'influence des espacements des barres sur l'adhérence en faisant intervenir le rapport  $b/n\varnothing$  ( $n$ =nombre de barres,  $\varnothing$ =diamètre des barres et  $b$ =largeur de la barre où sont réparties ces barres).

**Remarque :**

La quantification de tous ces paramètres énumérés rend complexe la détermination de la loi adhérence-glissement.

**1.5.1.b) La fissuration :**

Certains paramètres comme le retrait et la reprise du bétonnage influent considérablement sur la fissuration du béton. Ceux-ci restent encore mal maîtrisés.

La fissuration dans les structures en béton armé est principalement due au dépassement de la résistance tendue en traction du béton.

Cet effet de fissuration peut non seulement nuire à l'esthétique de la structure, mais il expose également l'acier de renforcement à l'environnement menant à sa corrosion.

Les fissures qui se développent dans les éléments en béton armé peuvent être classifiées en deux catégories principales, à savoir les fissures provoquées par les charges extérieures appliquées, et ceux qui se produisent indépendamment des charges [24]. Les fissures de flexion et les fissures inclinées de cisaillement sont les deux types principaux de fissures provoquées par les charges extérieures.

Les microfissures internes sont aussi considérées parmi le type de fissures provoquées par les charges externes. Elles se produisent en raison des efforts élevés du béton près des nervures dans les barres déformées, et sont confinées dans le voisinage immédiat de l'acier de renforcement sans apparaître sur la surface du béton. Ces microfissures sont considérées comme une partie du mécanisme d'adhérence [25].

Des microfissures peuvent également être générées dans le ciment par différents facteurs, tels que: le retrait hydraulique engendré par une évaporation d'eau, le retrait thermique engendré par une variation de température où une consolidation incomplète du ciment entraînant de microcavités. Des microfissures peuvent être aussi dues à des défauts des structures à l'interface entre les granulats et la pâte de ciment, cette interface constituant le lien le plus faible du matériau. Des microfissures supplémentaires peuvent se former suite à des concentrations de contraintes de tension isolées dues à des déformations incompatibles entre les granulats et le ciment dues à une sollicitation de la structure.

### 1.5.1.c) L'effet du "tension stiffening":

La "tension stiffening" est la moins développée des propriétés du béton et reste un sujet de recherche d'actualité. Elle est le résultat direct de l'interaction entre le béton et l'acier [26].

Elle caractérise la contribution du béton tendu, entre les fissures, à la rigidité d'un élément en béton armé soumis à la traction. Afin de calculer les déformations des poutres et planchers, cette rigidité additionnelle doit être prise en compte. L'effet de la "tension stiffening" dans la déformation des membres du béton est montré à la figure 1.18.

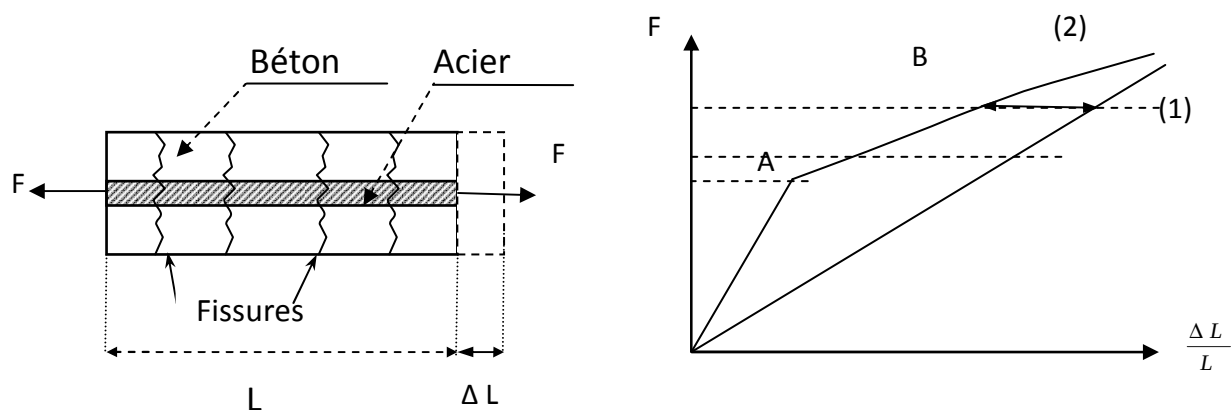


Figure 1.18 : comportement d'un tirant soumis à la traction uni axiale [01].

La courbe (1) représente le comportement expérimental de l'acier nu (sans béton). La courbe (2) représente le comportement expérimental moyen du tirant. La différence  $\Delta \varepsilon$  entre la déformation moyenne du tirant et celle de l'acier nu met en évidence la contribution du béton tendu entre les fissures à la rigidité du tirant. (Effet du "tension stiffening").

La courbe (2) peut être décrite comme suit :

- la droite OA représente le comportement du tirant avant fissuration, qui reste sensiblement élastique linéaire.
- en A, le béton atteint sa résistance en traction : c'est le début de fissuration.
- entre A et B, la fissuration se développe.

La rigidité du tirant diminue notablement et tend vers celle de l'acier nu lorsqu'on atteint la plastification de ce dernier. A ce stade la contribution du béton tendu entre les fissures s'annule.

### 1.5.2: Paramètres influençant le comportement du béton vis-à-vis de la déformation:

Il y'a deux importantes propriétés du béton qui affectent sa déformation avec le temps:

Le fluage, le retrait [27].

#### a) -Fluage:

Le béton est caractérisé par une augmentation de la déformation avec le temps sous chargement constant même si aucune fissure ne se forme [28]. Cela est dû au fluage du béton. L'exemple de la figure 1.19 montre cet effet [29]. Deux courbes contrainte-déformation du même béton sont définies par A et B. La charge finale est identique et la vitesse de chargement est définie la même pour les deux cas.

La courbe A est obtenue si la charge est appliquée avec la même vitesse et sans interruption. La déformation se poursuit avec le temps pendant le processus de chargement.

La courbe B est obtenue si la charge est appliquée avec la même vitesse que la courbe A, mais avec deux périodes durant lesquelles la charge ne change pas et la contrainte sur la section reste constante. La charge finale et la contrainte sur la section sont identiques à celles de A mais la déformation finale est supérieure. La différence de la déformation finale entre deux éléments est le résultat direct du fluage du béton.

L'ampleur du fluage dépend d'un certain nombre de facteurs y compris la résistance du béton, de son âge, et aussi de l'intensité des contraintes. La vitesse à laquelle le fluage se produit décroît avec l'âge du béton, ainsi les premiers chargements provoquent la plus grande proportion de fluage [30].

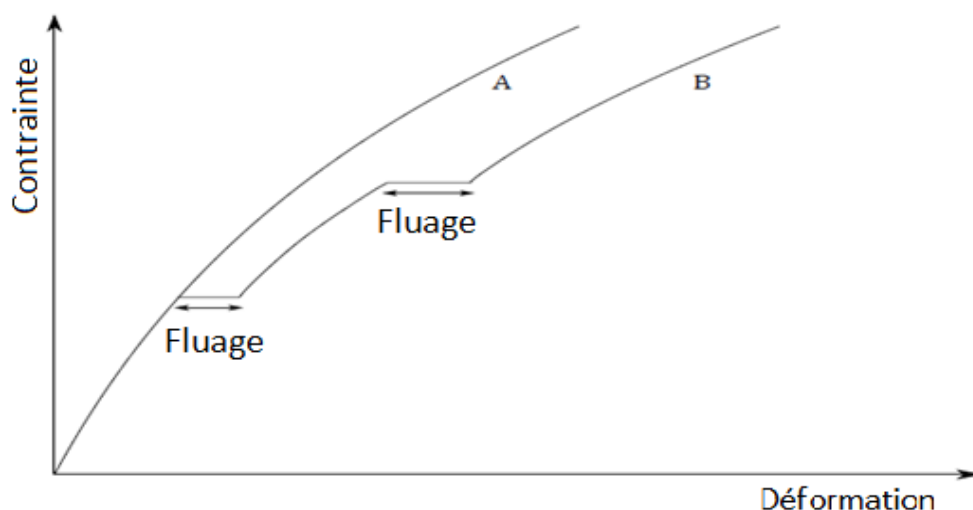


Figure 1.19: Courbes contrainte- déformation pour deux chemins de chargement A et B [29].

**b)-Retrait :**

Le retrait est la diminution du volume des éléments du béton durant la cure. Il est dû à la combinaison de plusieurs facteurs entre autre, la consolidation des agrégats, l'évaporation de l'eau et la réaction d'hydratation entre l'eau et le ciment. La figure 1.20 montre un exemple de courbe du retrait du béton en fonction du temps.

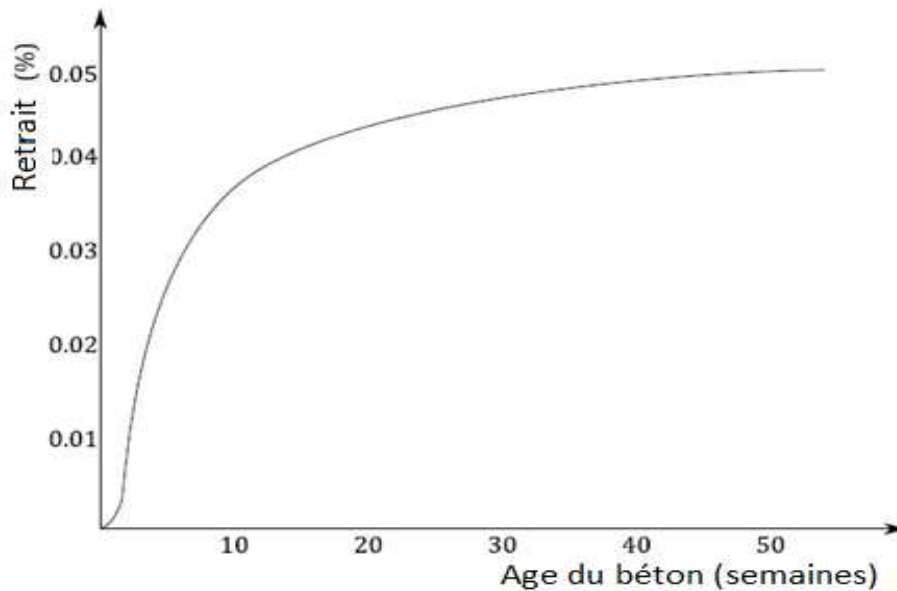


Figure 1.20: Exemple type du retrait du béton en fonction du temps [29].

La vitesse du retrait dépend de l'humidité, de la température, du rapport E/C et de la géométrie du spécimen [29].

Le retrait du béton provoque des contraintes internes quand le béton est contenu (empêché), dans le cas des structures en béton armé. Comme résultat, des contraintes de traction importantes peuvent-être engendrées dans le béton, et des fissures internes peuvent apparaître [28]. La formation de telles fissures internes peut conduire à la diminution de l'effet du "tension stiffening".

Le retrait, et les déformations internes initiales peuvent être réduits sous des conditions favorables durant la cure. Ceci en favorisant une humidité suffisante des spécimens et en gardant un rapport E/C aussi petit que possible dans la composition du béton.

L'ajout des adjuvants peut réduire l'effet du retrait [31]. La vibration du béton durant le moulage peut aussi réduire la proportion des vides et permet aux agrégats de s'installer en premier dans le processus d'hydratation.

## 1.6: Modélisation du comportement d'une zone tendue en béton armé fissuré:

### 1.6.1: Introduction:

Dans ce qui suit, on présente une revue bibliographique des principaux travaux relatifs à la modélisation du comportement en traction d'une zone en béton armé fissuré. Il s'agit de modèles basés sur le concept du "tension stiffening". Dans ce cadre, on distingue deux approches :

- Approche basée sur les lois de comportement fictives du béton tendu.
- Approche basée sur les diagrammes fictifs des armatures.

### 1.6.2: lois de comportement uni axiales fictives du béton tendu:

Dans ce cas la prise en compte de l'effet du "tension stiffening" est effectuée en utilisant une loi de comportement uni axiale fictive pour le béton tendu. Les propositions basées sur cette approche peuvent être classées en deux catégories:

- Les lois de comportement fictives "intrinsèques".
- Les lois de comportement fictives influencées par l'acier tendu.

#### 1.6.2.1 Lois de comportement fictives "intrinsèques":

La première loi fictive uni axiale du béton a été attribuée à SCANLON [33], [34], [35], dans l'étude de déflexions des dalles en béton armé avec décroissance (en dent de scie) discontinue après fissuration (figure 1.21).

Il a trouvé que les déflexions des dalles ont été surestimées, quand la contrainte du béton post fissuré a été ignoré et a proposé que la contrainte additionnelle de traction du béton devait être incluse, avec décroissance (en dent de scie) discontinue après fissuration.

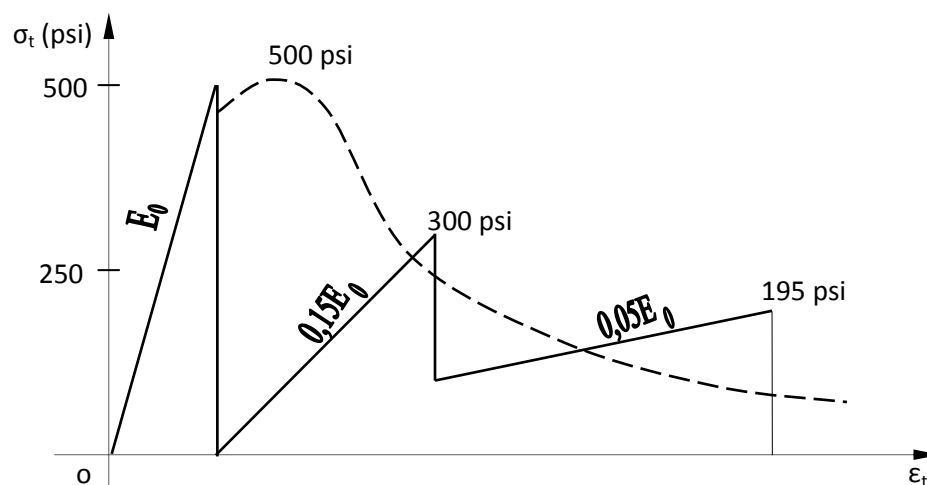


Fig. 1.21 Loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après Scanlon [33].

Cette loi à été reprise par GILBERT et WARNER [36], [37] avec beaucoup plus de dents après fissuration (figure 1.22). Il est clair que ces chutes de rigidité sont dues aux apparitions successives des fissures.

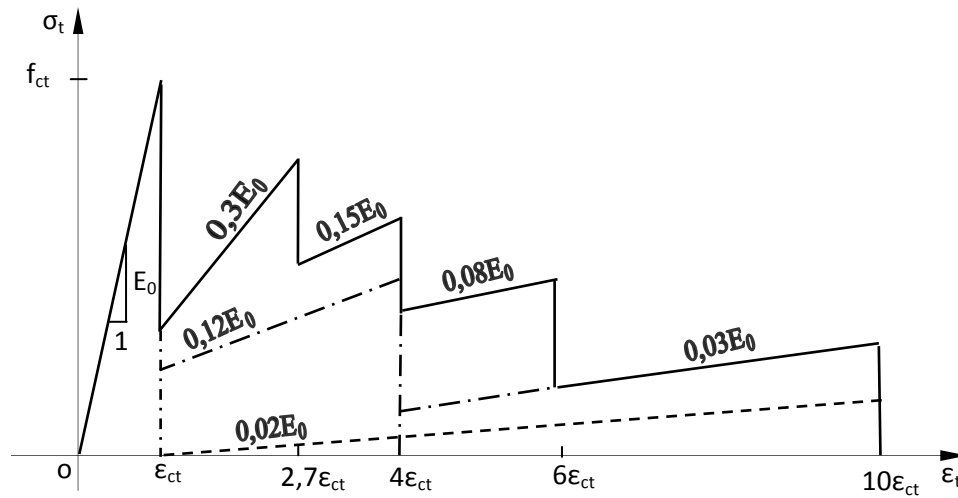


Figure 1.22: loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER [36].

BERGAN et HOLLAND [38] ont présenté la chute instantanée de la rigidité, juste après la fissuration et l'ont attribuée à KULICKI et KOSTEM [39]. Cette loi présentée à la figure 1.23, avec  $\epsilon'_{ct} = 0,55 \epsilon_{ct}$  et  $\epsilon_{ctu} = 700 \mu\text{s}$  et a été aussi utilisée par CHOW [40], [41].

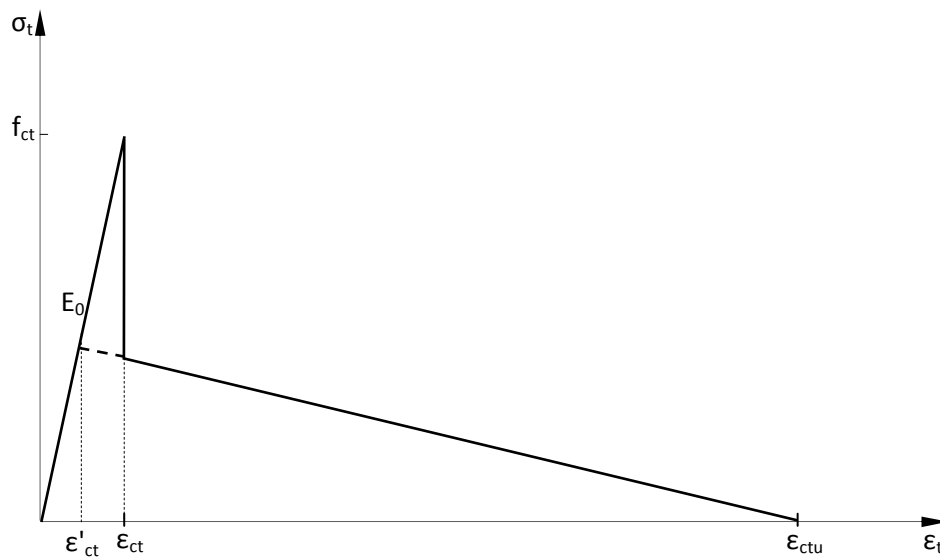


Figure 1.23 : Loi de comportement fictive pour le béton tendu selon BERGAM et HOLLAND [38].

GILBERT et WARNER [36], [37] ont eux aussi établi et généralisé cette proposition, avec d'autres valeurs après l'apparition des fissures (figure 1.24).



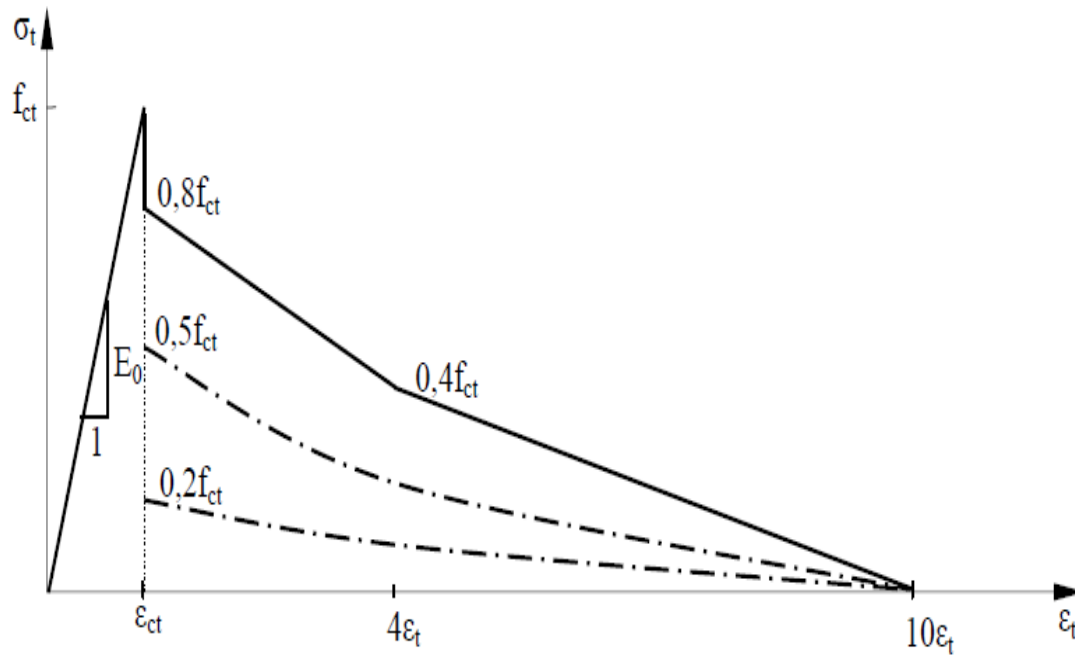


Figure 1.24: loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après GILBERT et WARNER [37].

Lin [42] est l'un des premiers auteurs à proposer une réponse décroissante continue juste après l'apparition des fissures (figure 1.25).

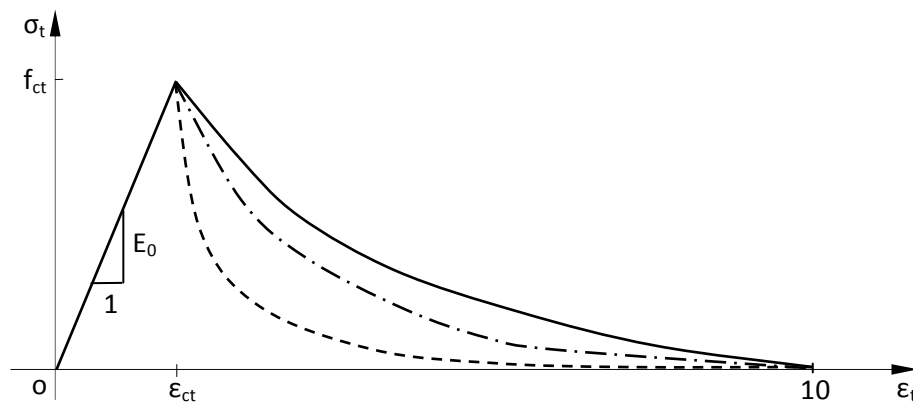


Figure 1.25: loi de comportement fictive pour le béton tendu d'après LIN [42].

HSU et al [43] a défini la courbe moyenne contrainte-déformation du béton en tension (figure 1.26) ou les parties croissante et décroissante de la courbe sont données par les formules (1.9) et (1.10).

$$\sigma_l = E_c \varepsilon_l \quad \varepsilon_l \leq \varepsilon_{cr} \quad (1.9)$$

$$\sigma_l = f_{cr} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_l} \right)^{0.4} \quad \varepsilon_l > \varepsilon_{cr} \quad (1.10)$$

Ou:  $E_c$  est le module d'élasticité du béton;

$f_{cr}$  : la contrainte à la fissuration du béton;

$\varepsilon_{cr}$  : La déformation à la fissuration du béton.

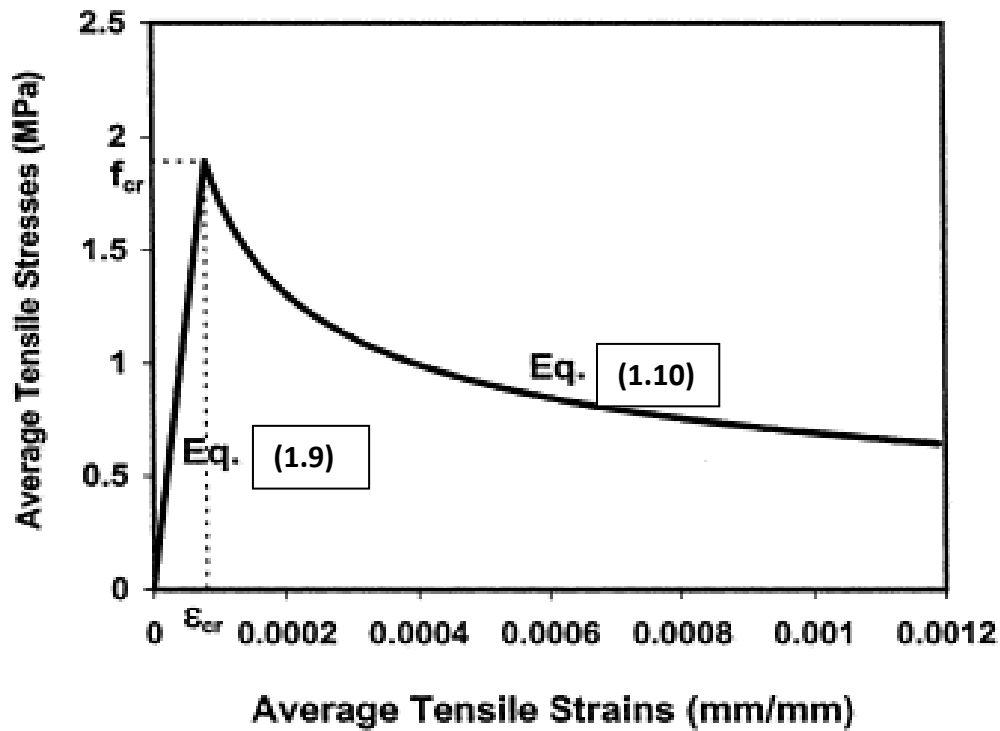


Figure 1.26: Diagramme contrainte-déformation du béton tendu selon HSU [43].

Avec des essais sur des panneaux armés en deux nappes d'armatures à hautes adhérences, BELARBI et HSU [44], établissent et confirment l'expression empirique suivante de TAMAI et AL [45].

$$\sigma_{bt} = \left( \frac{f_t / E_{b0}}{\varepsilon} \right)^{0.4} f_t \quad (1.11)$$

En réalisant des essais sur des tirants de section 250x250mm et en mesurant les déformations sur une longueur de 2m, FIELD et BISCHOFF [46] proposent la relation ci-dessous.

$$\sigma_{bt} = f_t \exp[-800(\varepsilon - \varepsilon_{cr})] \quad (1.12a)$$

En utilisant les résultats établis par GUPTA et AL [47] (en cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique) et la détermination de  $f_{ct}$  donnée par le code modèle 90[48], STRAMONDINOLI et LA ROVEREB [49] proposent une expression (1.12b) similaire à la relation (1.12a). Ils introduisent un coefficient  $\alpha$  tenant compte du pourcentage d'acier et du rapport  $n$  des deux modules d'élasticité; acier béton.

$$\sigma_{bt} = f_{ct} \exp \left[ -\alpha \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}} \right) \right] \quad (1.12b)$$

avec  $\alpha = 0,017 + 0,225 (np) - 0,106 (np)^2 + 0,016 (np)^3$ ,

$$\text{et } f_{ct} = 1,4 \left( \frac{f_{cc} - 8}{10} \right)^{2/3} \text{ en MPa.}$$

Cette expression (1.12b) paraît plus réaliste car elle tient compte, en plus du pourcentage d'acier  $\rho$ , des valeurs des modules d'élasticité des deux matériaux (acier et béton). Toutefois l'allure de la courbe est composée avec la forme exponentielle [50].

#### 1.6.2.2- Lois de comportement fictives influencées par l'acier tendu:

Ces lois dépendent de la déformation de l'acier tendu dans la zone fissurée. On suppose que la contribution du béton tendu est annulée lorsqu'on atteint la plastification des armatures.

La formulation des Grelat [51] consiste à attribuer une distribution triangulaire fictive des contraintes dans la zone tendue fissurée de la section transversale (à partir de l'axe neutre). Afin de tenir compte de la résistance du béton tendu en phase fissurée, on attribue à celui-ci un diagramme fictif à partir de l'axe neutre.

La contribution du béton s'annule à la plastification des aciers. Les relations sont données par (1.13).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= E_{c0} \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i < \varepsilon_{ct} \\ \sigma_t &= f_{ctj} \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_y)^2}{(\varepsilon_y - \varepsilon_{ct})^2} & \text{si } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_y \\ \sigma_t &= 0 & \text{si } \varepsilon_i \geq \varepsilon_y \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

$E_{c0}$ : module d'élasticité longitudinale du béton,

$f_{ctj}$ : résistance du béton à la traction,

$\varepsilon_{ct}$ : déformation de traction correspondant à  $f_{ctj}$ ,

$\varepsilon_y$ : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

$\varepsilon_i$ : déformation de la fibre de béton la plus tendue.

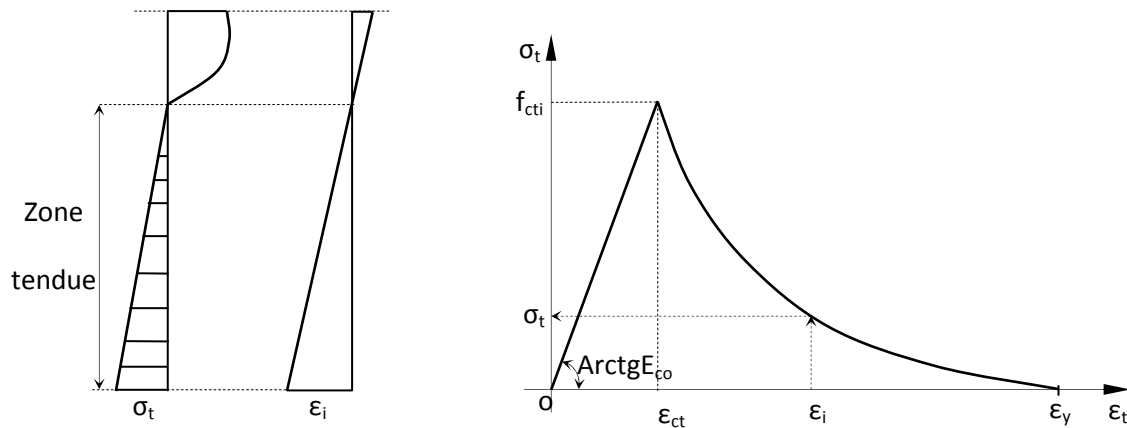


Figure 1.27 : Le béton tendu selon GRELAT [51].

La formulation de QUASt [52], [53] modifiée par espion [54] consiste à prendre un diagramme des contraintes fictif, représenté par une loi monotone croissante, à pente décroissante jusqu'à la résistance en traction qui devient une caractéristique fictive et variable en fonction de la déformation de l'acier le plus tendu.

La proposition de QUASt définit directement les contraintes fictives du béton (figure 1.28). Il propose l'expression (1.14a) avec la définition de  $\sigma_t$  (relation 1.14b).

QUASt a surtout utilisé cette loi pour prédire les lois moment-courbure expérimentales. On remarque qu'on peut avoir une loi linéaire ( $n=1$ ), une loi parabolique ( $n=2$ ) et jusqu'à une loi rigide ( $n=\infty$ )

Espion [54] a repris la même relation mais en modifiant l'expression de  $\sigma_t$  relation (1.14c), pour tenir compte implicitement du pourcentage d'acier.

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} \right)^n \quad (1.14a)$$

où

$$\text{Selon Quast: } \sigma_t = f_{ctj} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right), \quad (1.14b)$$

$\varepsilon_s$ : déformation de l'acier,

$\varepsilon_y$ : limite d'élasticité de l'acier,

$n$ : coefficient de forme de la courbe (pour  $n=2$  : diagramme parabole Rectangle).

$$\text{Selon Espion } \sigma_t = f_{ctj} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right)^m \quad (1.14c)$$

$1 < m < 2$  : dépend du pourcentage d'acier.

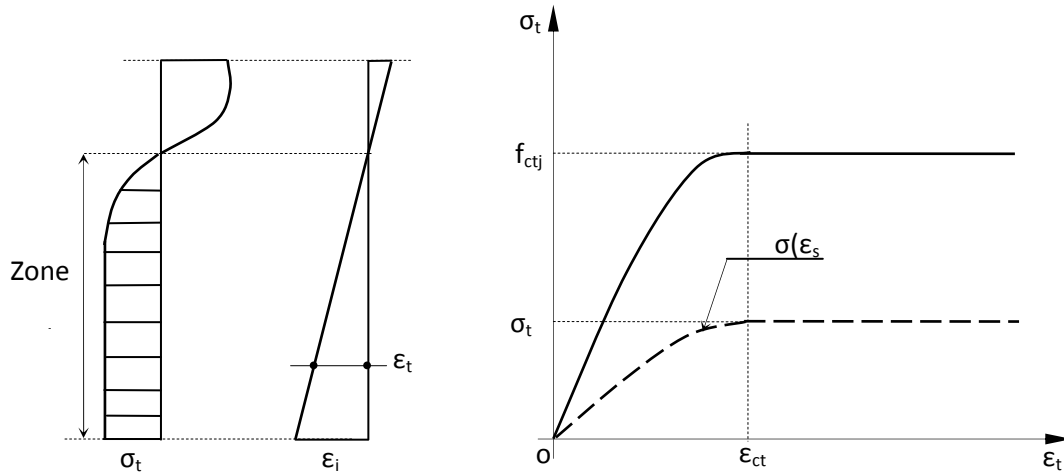


Figure1.28 : Le béton tendu selon QUAIST [52], et ESPION [54].

Aucune des deux propositions (QUAST et ESPION) ne tient compte explicitement du pourcentage d'acier, de la qualité d'adhérence des armatures. Ces relations paraissent insuffisantes pour des éléments faiblement armés. A la plastification des aciers, ces deux lois supposent qu'il n'y a aucune contribution du béton tendu.

D'autres modèles ont été proposés par plusieurs auteurs pour des réponses décroissantes juste après le début de la fissuration, comme le modèle de LIN [42], mais tenant compte de différents paramètres (diamètre de la barre, espacement des barres, pourcentage d'acier ...)

On citera quelques références ci-dessous:

CAREIRA et CHU [55],[56] ont proposé la relation (1.15) pour le béton armé en traction suite à leurs travaux sur le béton en compression puis reprise par PRAKHYA et MORLEY [57] afin de donner des valeurs au coefficient  $\beta_t$ .

$$\sigma_{bt} = \frac{\beta_t \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bf}}}{\beta_t - 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bf}} \right)^{\beta_t}} f_t \quad (1.15)$$

$$\text{Avec: } \varepsilon_{bf} = \frac{f_t}{E_{b0}}.$$

$\beta_t$  peut varier entre 1 (parfaitement plastique) et l'infini (parfaitement fragile).  $\beta_t$  est fonction du diamètre des barres, de leur espacement et de leur pourcentage dans le mélange. Plusieurs auteurs, juste après fissuration du béton, ont utilisé le type de relation suivante :

$$\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}}, \quad (1.16a)$$

Avec a et b paramètres du modèle.

VECCHIO et COLLINS [58], en réalisant des essais de traction sur des panneaux en béton armé de treillis soudé, ont déduit une loi de comportement moyenne du béton en traction.

Avec  $a=1$  et  $b=500$

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{500 \varepsilon}} \quad (1.16b)$$

Cette relation est valide pour le béton environnant les armatures, situé à l'intérieur d'un rayon équivalent à 7,5 fois le diamètre de l'armature concernée de part et d'autre de celle-ci (figure 1.29). Ces zones doivent donc être considérées indépendamment du béton tendu plus éloigné. Cette distinction est prise en compte dans la discrétisation de la section où deux types de bétons sont considérés. Un béton pour les couches situées à proximité des armatures qui inclut le phénomène de "Tension stiffening" et un béton pour les couches plus éloignées qui n'implique que la portion élastique du comportement en traction.

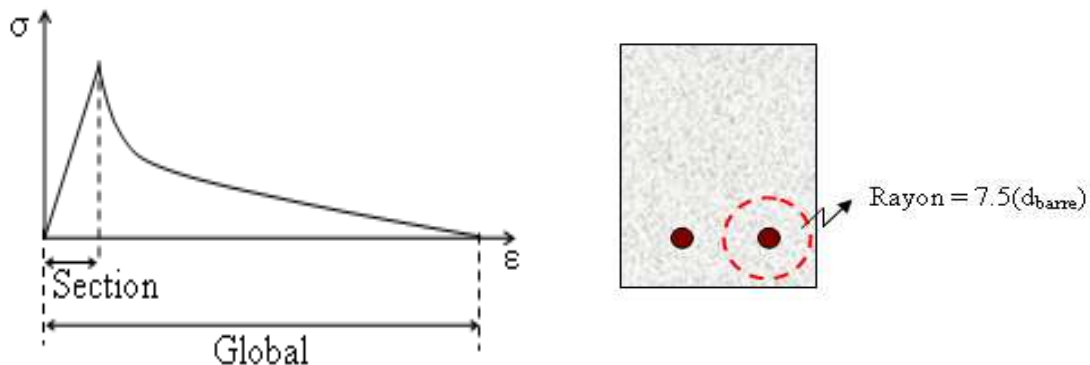


Figure 1.29 : Application et rayon d'influence du "Tension stiffening" selon Vecchio [58].

Suite aux essais réalisés par KIRSCHNER et COLLINS [59], COLLINS et MITCHELLE [60] ont établi la relation suivante : Avec  $a = 1$  et  $b = 200$ .

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{200 \varepsilon}} \quad (1.16c)$$

ABRISHAMI et MITCHELLE [61] ont repris le même type de relation (1.16) avec  $b=500$ , mais en introduisant d'abord deux paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ( $a = \alpha_1 \alpha_2$ ) dépendant successivement du type d'armature et du type de chargement.

Le troisième paramètre  $\alpha_3$  ( $a = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ ) a été ensuite introduit pour tenir compte des fissures de fendage longitudinal ; relation suivante :

$$\sigma_{bt} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 f_t}{1 + \sqrt{500 \varepsilon}} \quad (1.16d)$$

Avec :  $\alpha_1$  : paramètre d'adhérence

$\alpha_1 = 1$  pour les barres haute adhérence

$\alpha_1 = 0,7$  pour les barres lisses et les torons adhérents

$\alpha_2$  : paramètre de chargement

$\alpha_2 = 1$  pour un chargement monotone rapide

$\alpha_2 = 0,7$  pour un chargement soutenu ou répété

$\alpha_3$  : paramètre tenant compte des fissures de fendage longitudinal Lorsque l'enrobage est insuffisant.

$$\alpha_3 = \frac{e}{\phi} - 1 \text{ limité à } 0 \leq \alpha_3 \leq 1$$

BENTZ [62] en comparant les différentes formules du type :

$$\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}}$$

Des auteurs précédents selon les éléments testés ont conclu, avec  $a = 1$ , à l'introduction d'un coefficient  $M$  ( $b = 3.6M$ ) dépendant de l'adhérence des barres;

$$\sigma_{bt} = \frac{f_t}{1 + \sqrt{3,6 M \varepsilon}} \quad (1.16e)$$

Avec :

$$M = \frac{A_c}{\sum \pi \Phi}$$

Où :  $A_c$  est la section du béton.

$\sum \phi \pi$  le périmètre des différentes barres.

### 1.6.3- Diagramme Fictif De l'acier:

#### 1.6.3.1- Définition:

Le diagramme fictif de l'acier est défini comme étant la relation entre la contrainte dans l'acier (rapport entre l'effort normal appliqué et la section d'acier) et la déformation moyenne du tirant (acier et béton) mesurée sur une assez grande longueur (recouvrant ou non des fissures).

#### 1.6.3.2 : Comportement type du tirant en béton armé sous traction axiale:

Sous l'action d'un effort normal  $N$  de traction croissant, dont la droite d'action passe par le centre de gravité de la section du béton et aciers, les différentes phases principales de comportement d'un tirant sont illustrées à la figure (1.30), TRINH [63].

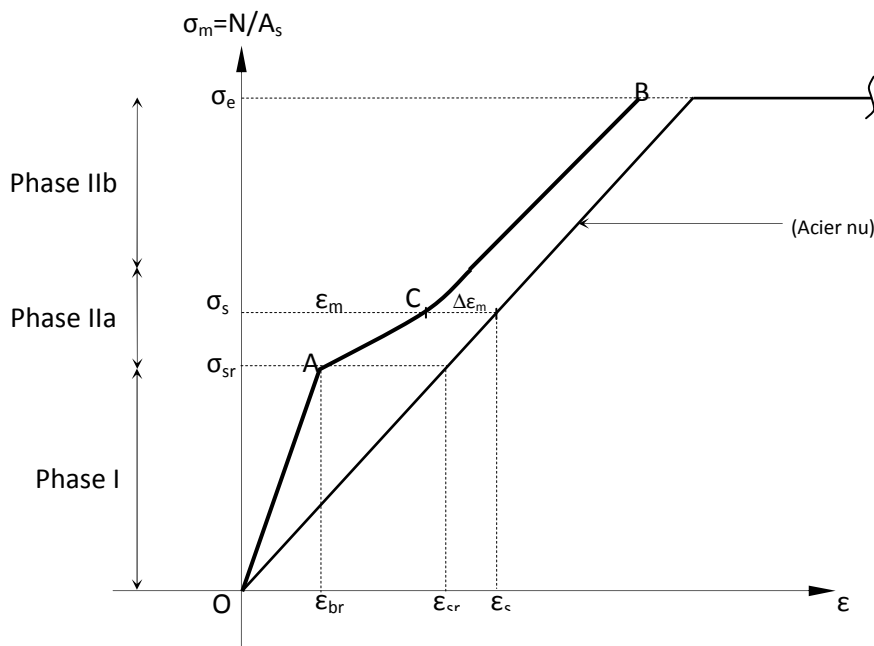


Fig. 1.30: Allure de la courbe  $\sigma - \epsilon_m$  d'un tirant [63].

a) – Phase I (droite OA, figure 1.30).

Dans cette phase, le comportement du tirant est homogène, le béton et l'acier résistent ensemble pour équilibrer l'effort  $N$ . Il y a compatibilité des déformations et c'est l'étape élastique linéaire et non fissurée. Et on peut écrire, dans une section droite quelconque du tirant :

$$N = \sigma_b (B - A_s) + n \sigma_b A_s$$

$$n = \frac{E_s}{E_b}, \quad B = \text{section droite du tirant.}$$

Le rapport entre l'effort normal appliqué au tirant et la section d'acier est égal à :

$$\frac{N}{A_s} = \sigma_s = \sigma_b \left( n + \frac{1-\rho}{\rho} \right) \quad \rho = \frac{A_s}{B}$$



Avec  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_b}{E_b} = \varepsilon_b$ , on a : 
$$\Delta l = \frac{N l}{E_b A_s \left(n + \frac{1-\rho}{\rho}\right)} \quad (1.17)$$

Avec la connaissance exacte de tous les paramètres, la formule ci-dessus donne une estimation correcte de l'allongement pour un effort normal donné.

b) – Phase IIa: (figure 1.30 courbe AC).

Elle débute dès l'apparition de la première fissure. Celle-ci apparaît vraisemblablement, dans la section droite où la résistance du béton à la traction est la plus faible; il y'a effectivement dispersion de la résistance du béton le long du tirant.

En s'éloignant de part et d'autre de cette première fissure (où  $\sigma_{sr} = N_r/A_s$ ), l'effort  $N_r$  est transmis progressivement au béton par le jeu de l'adhérence acier-béton. En augmentant ainsi l'effort  $N$ , d'autres fissures apparaissent. Cette phase IIa prend fin quand la fissuration se stabilise (nombre de fissures stable).

c) – Phase IIb: (figure 1.30 courbe CB).

A ce stade, après la stabilisation des fissures principales, l'augmentation de l'effort  $N$  entraîne l'accroissement de la largeur des fissures.

En phase IIb, le tirant a un comportement appelé <<comportement élastique fissuré>> car le diagramme  $\sigma.\varepsilon_m$  est sensiblement linéaire.

### 1.6.3.3- Synthèse de quelques lois proposées dans la littérature:

a) Lois avec  $\Delta\varepsilon_m$  constant:

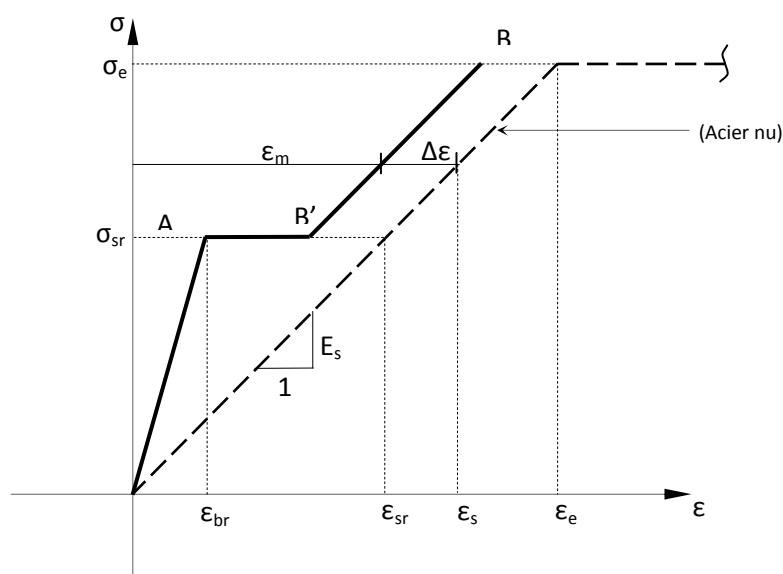


Figure 1.31: loi de comportement avec  $\Delta\varepsilon_m$  constant [64].

Une loi avec  $\Delta\varepsilon$  constant a été proposé par JOHNSON [64]

$$\Delta\varepsilon = \frac{k \sigma_{br}}{E_s \rho} \quad (1.18a)$$

Avec  $1/3 \leq k \leq 2/3$  ;  $k=0,5$  en moyenne, et  $\rho$ =le pourcentage d'aciers.

PALOTAS [65] a proposé une autre valeur de  $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\varepsilon = 0,7 \varepsilon_{sr} \quad (1.18b)$$

Le code européen du béton avait proposé en 1967 [66] et 1973 [67] la valeur de  $\Delta\varepsilon$  suivante :

$$\Delta\varepsilon = \frac{k_3}{E_s \rho} \quad (1.18c)$$

Avec  $K_3 \approx 3 \text{ MPa}$ .

BRUGGELING [68] et VAN DER VEEN [69], ont admis une augmentation de 20% de la contrainte à l'apparition de la première fissure. Ensuite pour simplifier le modèle, un palier a été crée à ce niveau de contrainte. Puis au-delà, la contribution du béton tendu est considérée constante (figure 1.32). La relation (1.18e) exprime la valeur de  $\Delta\varepsilon$  après la stabilisation des fissures. La contribution du béton tendu, considérée constante en phase de fissuration stabilisée, est exprimée en fonction de l'exposant  $b$  dans la relation de l'adhérence ( $\tau = a s^b$ ). La stabilisation de la fissuration a lieu au niveau de la contrainte dans l'acier  $\sigma_{sy} = 1,2\sigma_{sr}$ , ou la contribution du béton tendu est donnée par:

$$\Delta\varepsilon = \frac{(1+b)(5+b)}{12} \cdot (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \quad (1.18d)$$

Pour  $b=0.18$  et  $\sigma_{sy} = 1,2\sigma_{sr}$

$$\Delta\varepsilon = 0.61 (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \quad (1.18e)$$

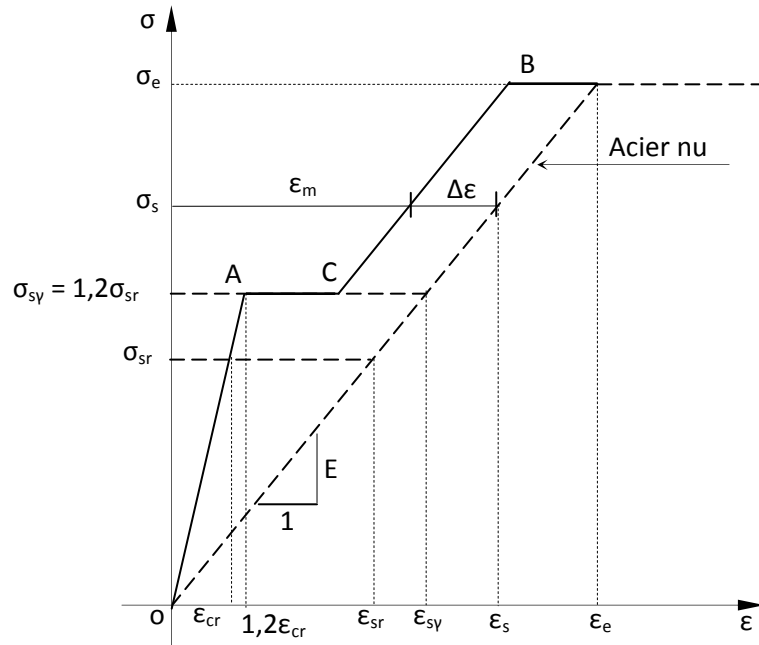


Figure 1.32 : modèle avec  $\Delta\epsilon_m$  constant d'après VAN DER VEEN et BRUGGELING [69].

#### Remarque:

Pour ces propositions de  $\Delta\epsilon$  constant juste après la valeur de  $\sigma_{sr}$  nous remarquons :

- En utilisant la formule (1.18c) pour un même acier et quelle que soit la résistance effective du béton, on obtient la même allure.
- La relation (1.18b) ne dépend que de  $\epsilon_{sr}$  et ne tient pas compte directement du pourcentage d'acier, ni de la résistance fictive à la traction du béton et ni de la nature de l'acier.
- La formule (1.18a) tient compte de deux paramètres manquant aux relations (1.18b), (1.18c), (1.18d), mais  $\Delta\epsilon$  constant n'est pas toujours observé dans les résultats expérimentaux.

VAN DER VEEN [69] et BRUGGELING [68], ont augmenté de 20% la contrainte à l'apparition de la première fissure pour, peut être, simplifier le modèle en négligeant la phase de propagation des fissures [50].

#### b) Loi avec variation linéaire ou multi linéaire de $\Delta\epsilon$ :

Des modèles ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) composés de plusieurs segments de droites successifs ont été proposés par plusieurs auteurs. Ces modèles se ressemblent beaucoup dans leur principe mais divergent souvent sur la définition du point représentant la stabilisation de la fissuration et la résistance effective à la traction du béton à l'apparition de la première fissure.

RABICH [70] propose une variation linéaire de  $\Delta\varepsilon$  représentée par la droite joignant A et B (relation 1.19a). Le point B coïncide avec le point de coordonnées  $(\varepsilon_e, \sigma_e)$  de l'acier (Figure 1.33).

$$\Delta\varepsilon = (\varepsilon_e - \varepsilon) \frac{\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_e - \varepsilon_{cr}} \quad (1.19a)$$

Cette loi de RABICH est un modèle géométrique représentant l'observation grossière des courbes expérimentales entre A et B avec diminution de  $\Delta\varepsilon$  jusqu'à  $\Delta\varepsilon=0$ , pour une contrainte égale à la contrainte limite des aciers. La formule (1.19a), bien que représentant globalement la variation de  $\Delta\varepsilon$  pour un certain pourcentage d'acier, ne tient pas compte de l'adhérence résiduelle entre l'acier et le béton observé dans les résultats expérimentaux (même après la limite élastique des aciers).

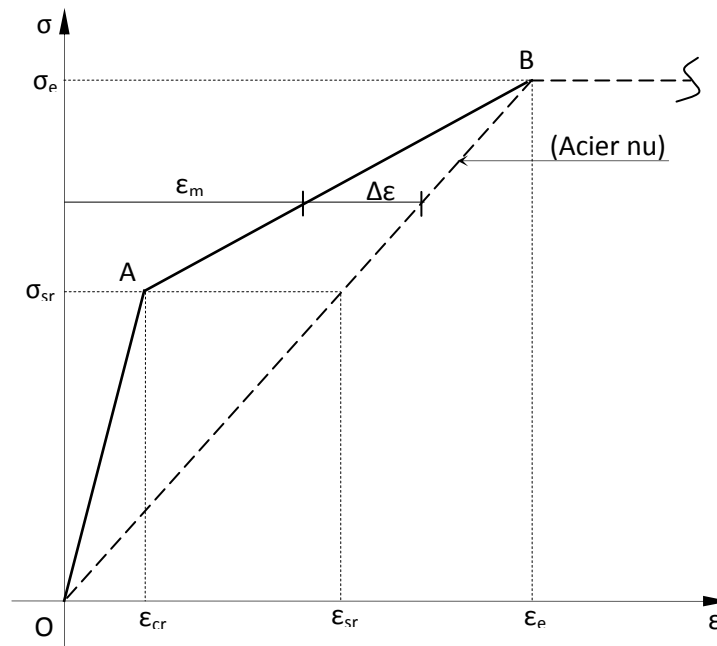


Figure 1.33 : loi de comportement fictive du tirant selon RABICH [70].

ESPION [71] et [72] a proposé une loi multilinéaire pour les tirants ayant un pourcentage d'armatures  $\rho \geq 1\%$  et une loi bilinéaire pour ceux dont le pourcentage d'aciers  $\rho \leq 1\%$  (loi de RABICH [70]). Il a remarqué que les fissures se stabilisaient après un chargement de 2 fois  $\sigma_{sr}$  ( $\sigma_{sy} = 2 \sigma_{sr}$ ).

D'après l'auteur, pour des pourcentages supérieurs à 1%, le point C (figure 1.34) de stabilisation des fissures se situe alors entre A et B. Après fissuration, la variation  $(\Delta\varepsilon_{IIa})$  est linéaire et  $(\Delta\varepsilon_{IIb})$  reste constante comme montré par la relation pour des pourcentages inférieurs à 1%.

Pour des pourcentages inférieurs à 1%, ESPION préconise d'utiliser la loi de RABICH.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{IIa} &= (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) - \frac{(\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) - \Delta \varepsilon_{IIb}}{\varepsilon_s(c)} (\varepsilon - \varepsilon_{sr}) \quad \text{si } \varepsilon_{cr} \leq \varepsilon \leq [\varepsilon_s(c) - \Delta \varepsilon_{IIb}] \\ \Delta \varepsilon_{IIb} &= \left(18 + \frac{3,55}{\rho}\right) 10^{-6} \quad \text{si } [\varepsilon_s(c) - \Delta \varepsilon_{IIb}] \leq \varepsilon \leq (\varepsilon_e - \Delta \varepsilon_{IIb}) \end{aligned} \right\} \quad (1.19b)$$

Avec  $\varepsilon_s(c) = \frac{2\sigma_{sr}}{E_s}$  et  $\rho > 1\%$ .

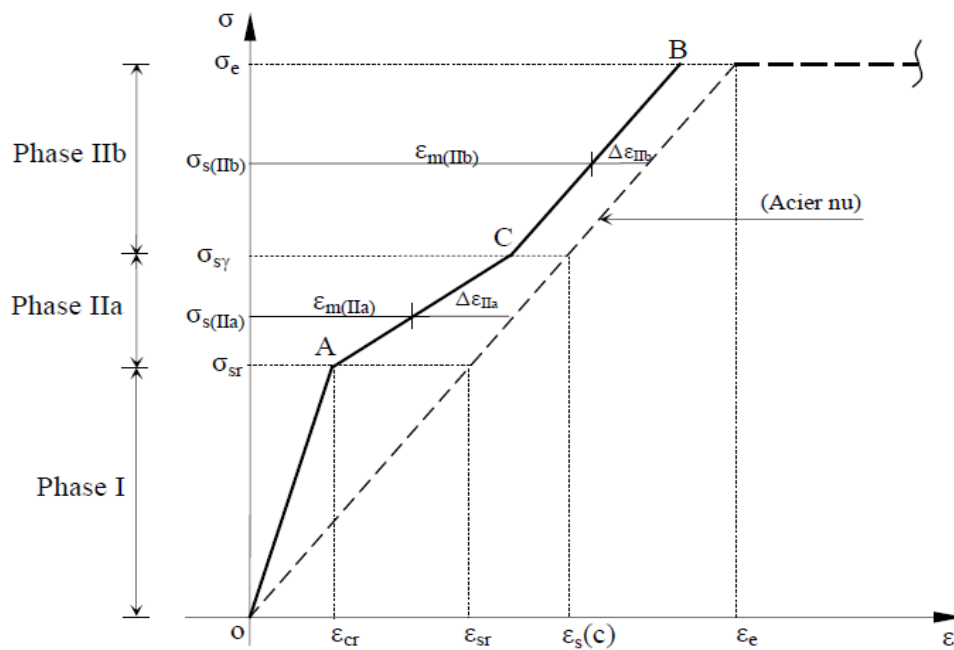


Figure 1.34 : loi de comportement fictive bilinéaire de l'acier selon ESPION [71].

Le code modèle 90 [73], propose que le point de stabilisation de la fissuration soit défini par l'apparition de la première fissure correspondant au point de coordonnées  $(\sigma_{sy} = 1,3 \sigma_{sr})$  et d'abscisse  $(\varepsilon_{sy} = 0,4 \Delta \varepsilon_y)$ . La variation de la courbe  $(\sigma; \varepsilon)$  du tirant est supposée linéaire entre la première et la dernière fissure, au-delà  $\Delta \varepsilon$  est considéré constant.

$$\Delta \varepsilon = \beta (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \quad (1.20)$$

Avec:

$B=0.4$  pour une charge instantanée et des barres à haute adhérence.

$B=0.25$  pour une charge de longue durée ou cyclique et des barres à haute adhérence.

Ce modèle est illustré à la figure 1.35.

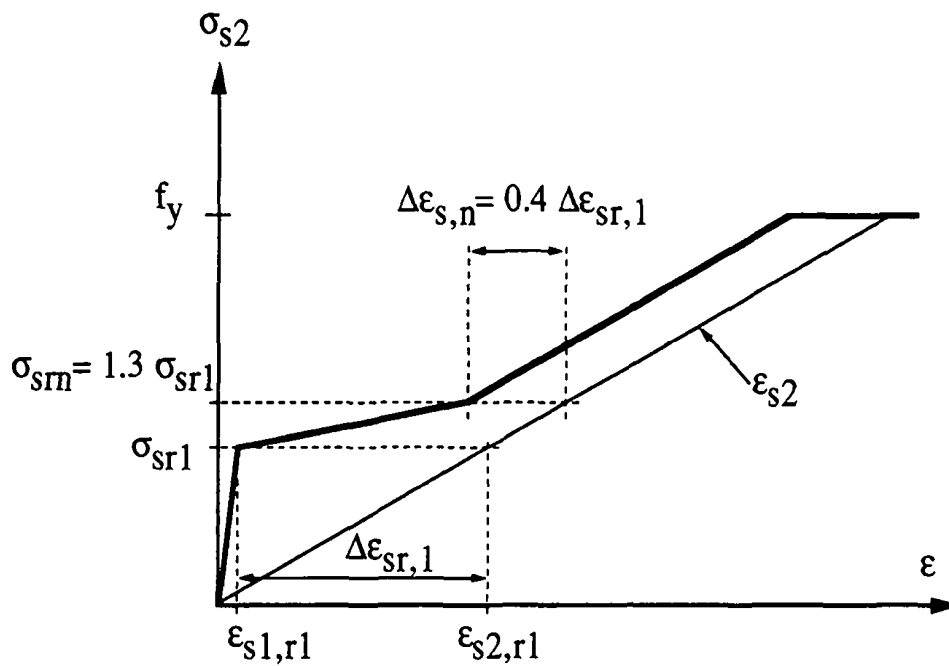


Figure 1.35 : loi de comportement de l'acier fictif selon le CEB 90 [73].

**c) loi avec variation de  $\Delta \epsilon$  en raison inverse de  $\sigma_s$ :**

En 1976, RAO [74] fut le premier à proposer une loi de variation de  $\Delta \epsilon$  en raison inverse de  $\sigma_s$  (figure 1.36).

Le premier modèle de ce type, valable pour les poutres sollicitées en flexion, fut étendu au tirant de béton armé par ROSTASY et AL [75]. Ces derniers proposèrent l'expression :

$$\Delta \epsilon = \frac{\sigma_{cr}^2 (1 + n\rho)}{\rho^2 E_s \sigma_s} \quad (1.21a)$$

Avec  $n$  : rapport des deux modules d'élasticité; acier et béton.

En 1981, FAVRE et AL [76] proposent une loi du même type avec  $\Delta \epsilon$  tendant vers zéro lorsque  $\sigma_s$  tend vers l'infini (relation 1.21b).

$$\Delta \epsilon = \frac{(\epsilon_{sr} - \epsilon_{cr})}{\sigma_s} \sigma_{sr} \quad (1.21b)$$

Cette dernière formule ne prend en compte ni le pourcentage d'acier, ni la section du béton tendu.

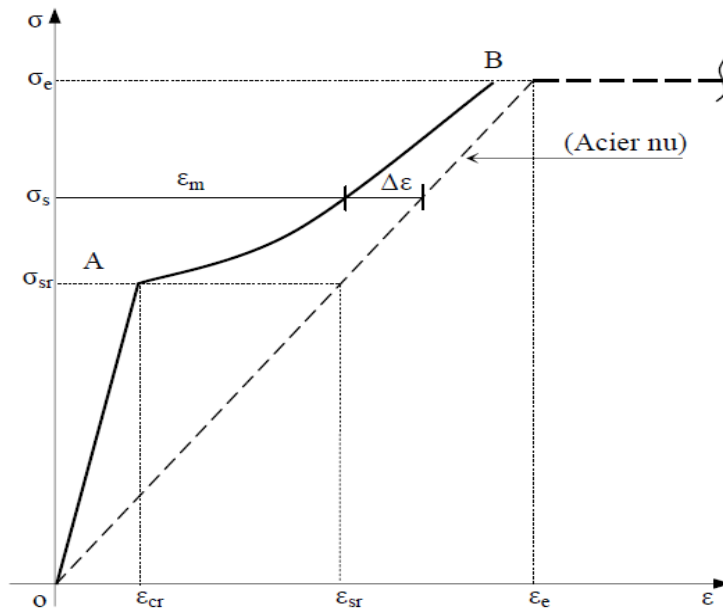


Figure 1.36 : loi de comportement fictive de l'acier selon RAO et ROSTASY [74].

NOAKOWSKI et KUPFER [77] ont modifié légèrement cette dernière, en proposant  $\Delta \varepsilon$  variant hyperboliquement avec  $\sigma_s$  (1.21c).

$$\Delta \varepsilon = 0,6 (1 - n \rho) \frac{\varepsilon_{sr}^2}{\varepsilon_s} \quad (1.21c)$$

Les auteurs ont proposés que  $(n \cdot \rho)$  est petit devant l'unité, ESPION propose alors la modification par la relation suivante:

$$\Delta \varepsilon = \frac{0,6 \sigma_{sr}^2}{(1 + n \rho) E_s \sigma_s} \quad (1.21d)$$

Alors que le CEB [78], en 1985 propose de considérer la formule suivante:

$$\Delta \varepsilon = (\varepsilon_{sr} - \varepsilon_{cr}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \quad (1.21e)$$

SAAD [50] a proposé une loi de comportement de l'acier fictif en divisant la courbe en quatre parties, et pour chaque partie, il propose explicitement sa loi de comportement. Dans le cas où  $2\sigma_{sy} < \sigma_e$ , il propose les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_s &= \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{sr}} \varepsilon & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A \\
 \sigma_s &= \sum_{k=1}^{k=\gamma} \sigma_s(\varepsilon_{mk}) \cdot L_k \text{ où (avec } i \neq k) L_k = \prod_{i=1}^{i=\gamma} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_i)}{(\varepsilon_k - \varepsilon_i)} & \text{si } \varepsilon_A \leq \varepsilon \leq \varepsilon_C \\
 \sigma_s &= \sigma_{sy} + \sigma_{sy} \frac{\varepsilon - \varepsilon_C}{\varepsilon_D - \varepsilon_C} & \text{si } \varepsilon_C \leq \varepsilon \leq \varepsilon_D \\
 \sigma_s &= 2\sigma_{sy} + E_s(\varepsilon - \varepsilon_D) & \text{si } \varepsilon_D \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B \\
 \sigma_s &= \sigma_e & \text{si } \varepsilon \geq \varepsilon_B
 \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

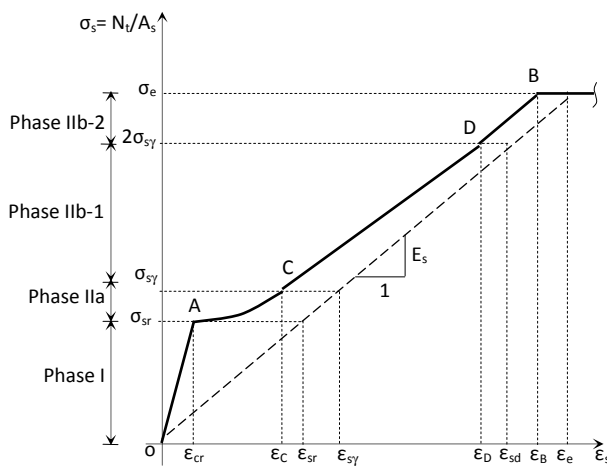


Fig. 1.37a: Allure de la courbe  $\sigma_s$ - $\varepsilon_m$  d'un tirant dans le cas où  $2\sigma_{sy} < \sigma_e$ .

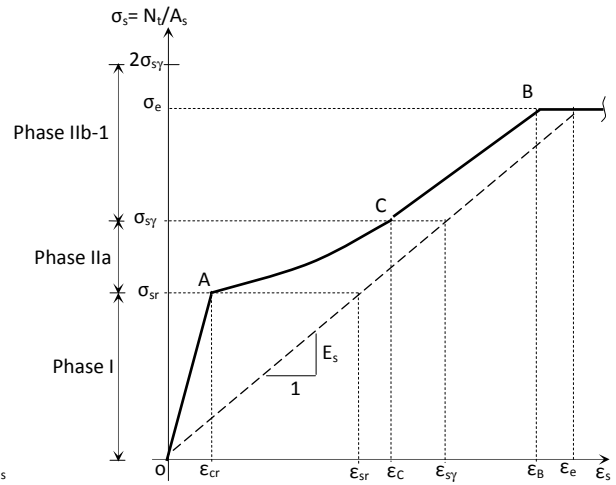


Fig. 1.37b: Allure de la courbe  $\sigma_s$ - $\varepsilon_m$  d'un tirant dans le cas où  $\sigma_{sy} < \sigma_e \leq 2\sigma_{sy}$ .

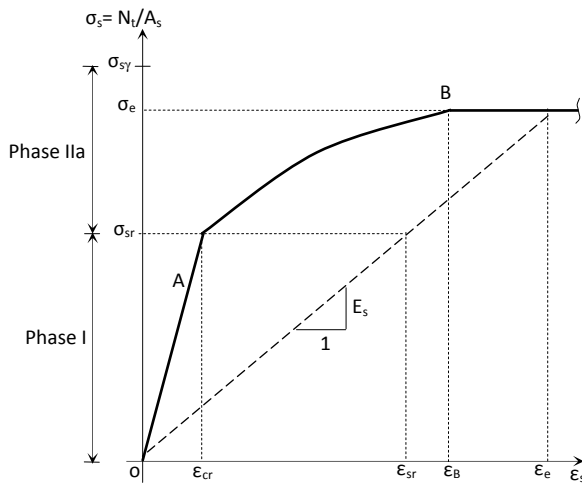


Fig. 1.37c: Allure de la courbe  $\sigma_s$ - $\varepsilon_m$  d'un tirant dans le cas où  $\sigma_{sr} < \sigma_e \leq \sigma_{sy}$ .

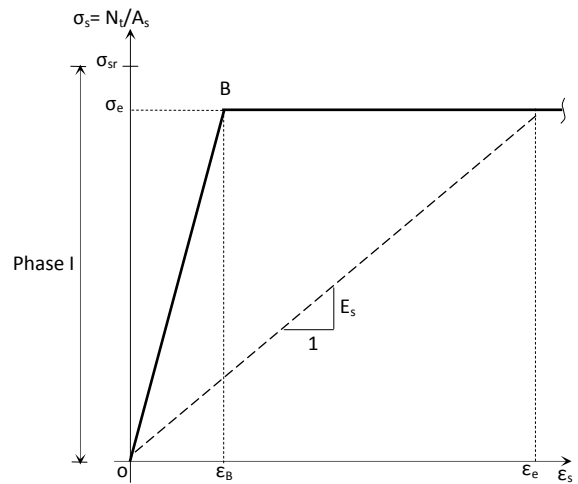


Fig. 1.37d: Allure de la courbe  $\sigma_s$ - $\varepsilon_m$  d'un tirant dans le cas où  $\sigma_e \leq \sigma_{sr}$ .



Figure 1.37 : loi de comportement fictive de l'acier selon SAAD [50].

**d) courbe discontinue de Gilbert et Warner:**

Gilbert et Warner [37] ont exprimé la rigidité fictive de l'armature par une courbe discontinue après fissuration (figure 1.38). Cette courbe fait apparaître le comportement de l'acier ( $\epsilon_s$ ) en fonction de la caractérisation du béton ( $\epsilon_{ct}$ ). Ce modèle fait participer l'acier au-delà de sa limite d'élasticité.

Quand  $\epsilon_y < \epsilon_7$ , on remarque que l'allure de la courbe générale est modifiée. Ici on ne voit pas apparaître directement le pourcentage d'acier et la valeur réelle de  $\sigma_{cr}$ .

Aussi ce n'est pas évident d'avoir le même comportement quelles que soient les caractéristiques du béton.

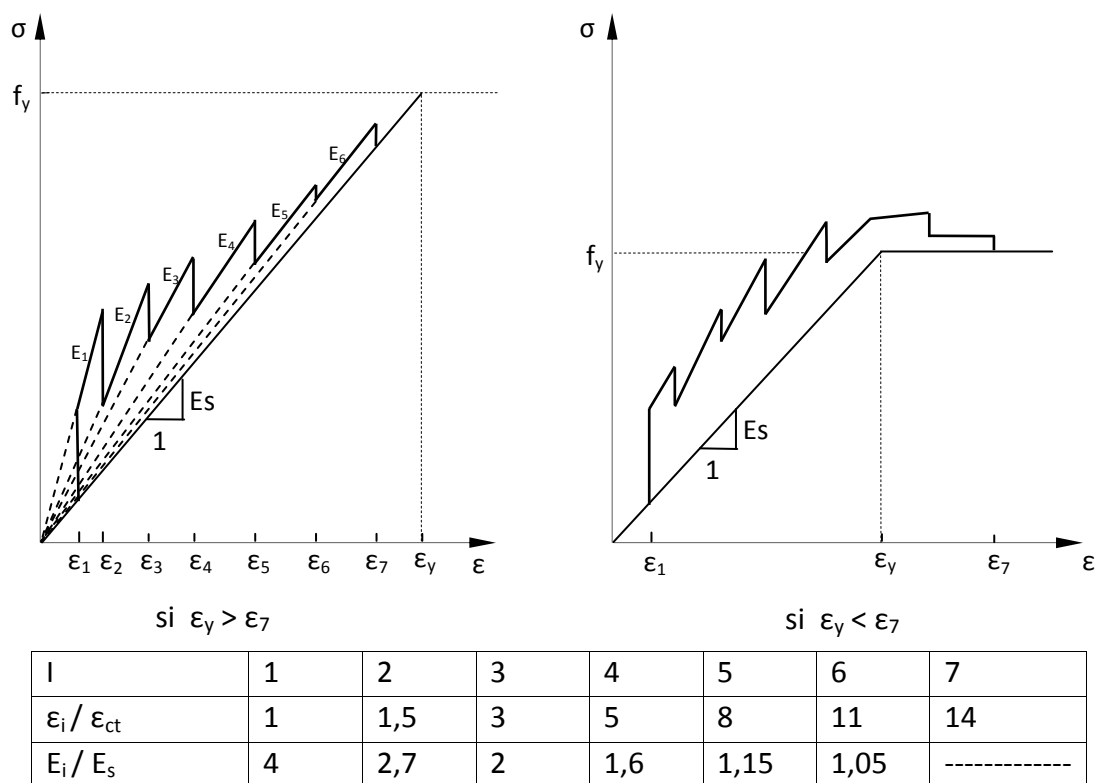


Figure 1.38 : loi de comportement fictive discontinue selon GILBERT et WARNER [37].

**1.7. Conclusion :**

- On retient des différents essais effectués sur le béton en traction que les lois fictives sont les mieux appropriées pour représenter les courbes efforts-déformations du matériau <<béton armé>>. Plusieurs paramètres influent sur le mélange acier-béton.
- Les résultats obtenus par les chercheurs sont très dispersés pour les essais de traction sur le béton seul, même en prenant certaines précautions. Ceci est dû au comportement fragile du matériau béton.

- L'ensemble des paramètres influençant sur le comportement du béton ne sont pas pris en considération par les lois proposées.
- Il existe toujours certaines divergences dans les approches et conclusions des auteurs et même dans les codes et règlements, malgré les nombreuses études réalisées.
- Le retrait et la reprise de bétonnage restent toujours mal maîtrisés malgré leur influence considérable sur la fissuration du béton.
- Il faut bien définir clairement la section effective du <<tirant>> à prendre en considération, pour pouvoir utiliser correctement les lois fictives du béton (ou de l'acier) en traction.

## Chapitre 2: Méthode de calcul et modélisation.

### 2.1-Introduction:

Dans le présent chapitre on s'est intéressé à la présentation d'une méthode d'analyse non linéaire des éléments d'ossatures planes en béton armé, en se basant sur la méthode des éléments finis et l'hypothèse de Navier Bernoulli. La formulation présentée constitue la base d'une procédure de calcul aboutissant à l'élaboration d'un programme informatique déjà existant. L'outil de calcul ainsi obtenu permet la simulation numérique du comportement non linéaire, sous chargement croissant jusqu'à la rupture, des éléments d'ossatures planes en béton armé.

### 2.2-Hypothèses de base:

Pour l'analyse du comportement non linéaire des structures constituées de portiques en béton armé, on se base sur la méthode des éléments finis. La structure est discrétisée en éléments finis de type poutre (figure 2.1).

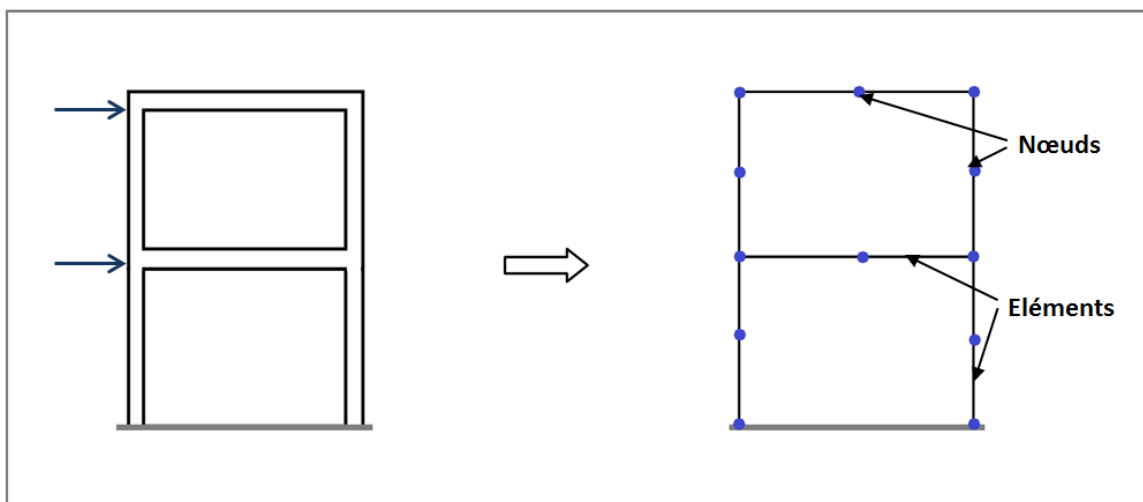


Figure 2.1. Discrétisation de la structure par éléments finis poutres.

On s'intéresse à un élément poutre plan orienté selon l'axe longitudinal  $x$  et dont les dimensions dans le plan  $y-z$  normal à  $x$  sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale  $x$ .

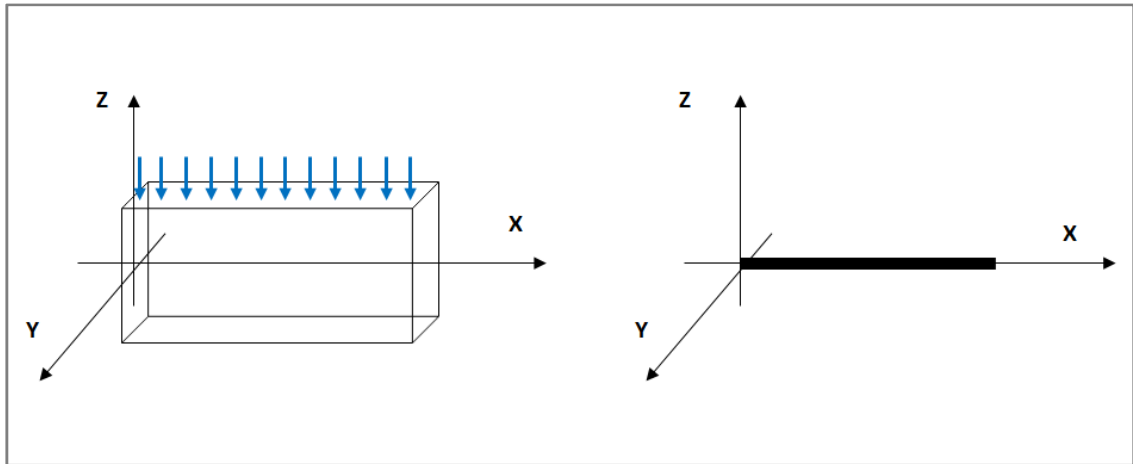


Figure 2.2: Schématisation de l'élément poutre.

Dans le cadre de cette étude, on considère l'élément « poutre mince » ou l'élément de Bernoulli, basé sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli et fonctionnant en flexion.

On se base sur les hypothèses suivantes :

- L'élément considéré est une poutre plane droite de section transversale constante et symétrique par rapport au plan x-z.
- Les chargements agissant sur la poutre, sont appliqués dans le plan de symétrie.
- La poutre se déforme dans le plan de symétrie x-z.
- La poutre transmet des efforts normaux  $N_x(x)$  suivant x, des effort tranchants  $T_z(x)$  suivant z et des moments fléchissant  $M_y(x)$  autour de l'axe local y.
- Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés.
- Adhérence parfaite entre le béton et les armatures d'acier.
- Pour un élément « poutre mince », on vérifie l'hypothèse de Navier Bernoulli, les sections planes et droites avant déformation, restent planes et droites après déformation. Par conséquent, les déformations d'effort tranchant sont négligées.

### 2.3-Cinématique:

Considérons le tronçon de poutre de la figure 2.3, après déformation, le point M(x,y) subit un déplacement axial  $u(x,z)$  selon x et un déplacement transversal  $w(x,z)$  selon z tels que :

$$u(x, z) = u_0(x) + z \cdot \theta(x) \dots \dots \dots (2.1)$$

$$w(x, z) = w(x) \dots \dots \dots (2.2)$$

Où:

$u_0(x)$  = déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

$\theta(x)$  = rotation de la normale de la section transversale, d'abscisse  $x$ .

Tel que:

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \dots\dots\dots (2.3)$$

Où

$\gamma$  : La rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier- Bernoulli, les déformations dues à l'effort tranchant (ou cisaillement) sont négligées, d'où  $\gamma=0$ .

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} \dots\dots\dots (2.4)$$

La relation (2.1) devient :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \dots\dots\dots (2.5)$$

Cette relation (2.5) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli valable dans le cas des poutres minces

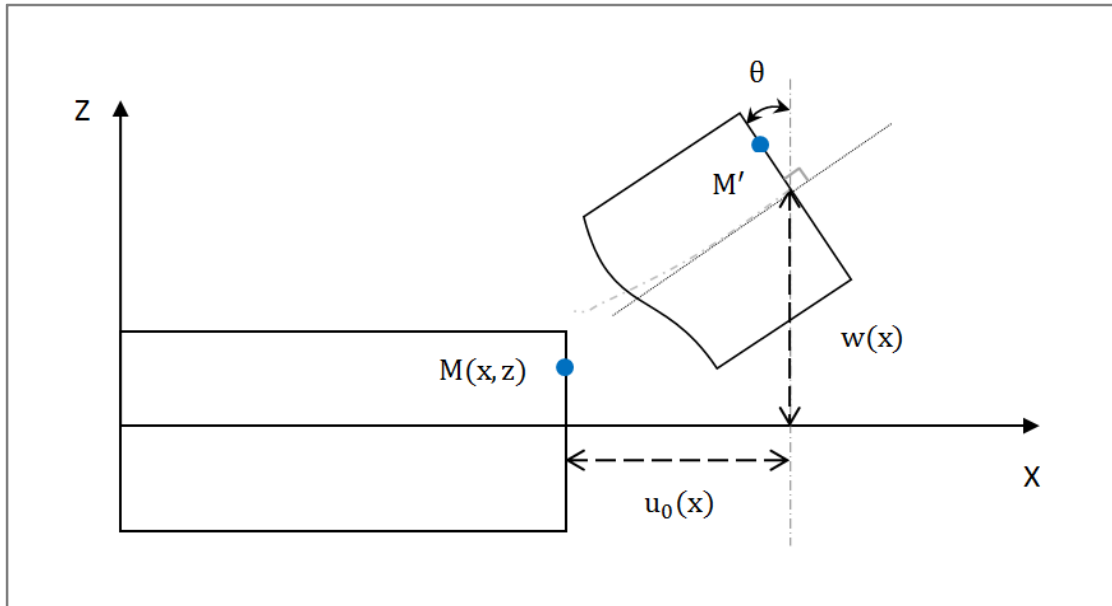


Figure 2.3. Définition de la cinématique d'un tronçon de poutre.

## 2.4-Relation déformations – déplacements:

Selon l'hypothèse (Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés) la relation entre déformations et déplacements est linéaire.

$$\varepsilon_x = + \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} \dots\dots\dots (2.6)$$

En tenant compte de la relation (2.1) on obtient :

$$\varepsilon_x(x) = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \dots\dots\dots (2.7)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_x(x) = \varepsilon_0(x) + z\phi(x) \dots\dots\dots (2.8)$$

Avec :

$$\varepsilon_0(x) = \frac{du_0(x)}{dx} \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\phi(x) = - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \dots\dots\dots (2.10)$$

$\varepsilon_0(x)$  : Déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence, à l'abscisse x.

$\phi(x)$  : Courbure de la section transversale, à l'abscisse x.

## 2.5-Relation efforts – déplacements:

L'expression de l'effort normal est donné par :

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi \dots\dots\dots (2.11)$$

L'expression de moment fléchissant s'écrit comme suit :

$$M = \overline{ES} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \cdot \phi \dots\dots\dots (2.12)$$

Finalement les efforts internes N et M, agissant dans la section transversale d'abscisse x de la poutre, sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.13)$$

Avec :  $[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.14)$

Où :

$\overline{EA} = \int_s E(x, z) dS$  : Rigidité à l'effort normal (ou de membrane).

$\overline{ES} = \int_s E(x, z) z dS$  : Rigidité due ou couplage effort normal – flexion.

$\overline{EI} = \int_s E(x, z) z^2 dS$  : Rigidité à la flexion.

Avec :  $E(x, z)$  est le module d'élasticité longitudinal au point  $M(x, z)$  de la poutre.

## 2.6-Discretisation par éléments finis:

La discrétisation est effectuée en utilisant un élément fini poutre à 2 nœuds ayant 3 degrés de liberté par nœud ( $u, w, \theta$ ), soit 6 d°dl par élément (figure 2.4).

Les déplacements sont représentés par un vecteur de dimension 6 x 1 de la manière suivante :

$$u^T = \{u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2\}$$

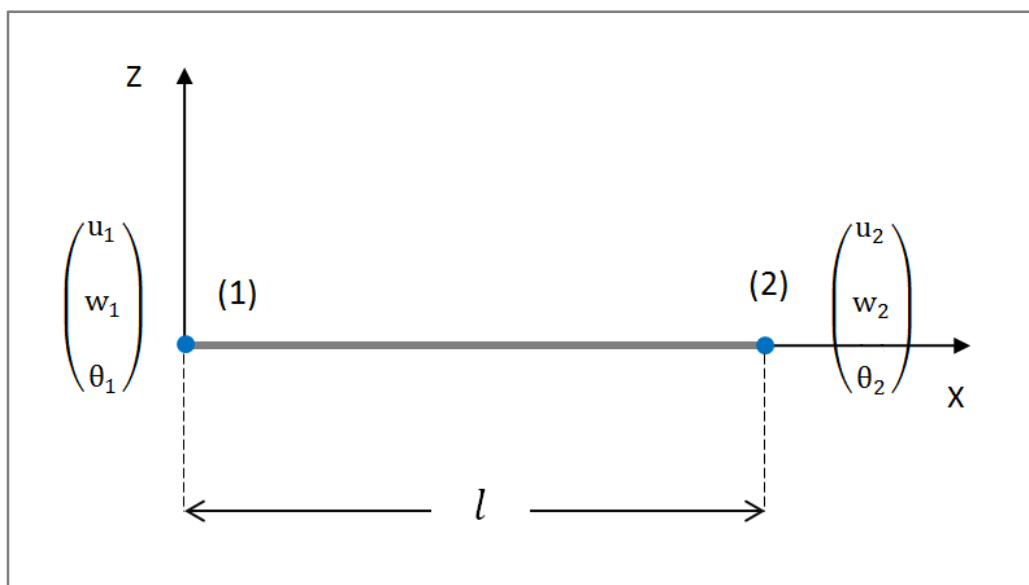


Figure 2.4. Définition d'un élément fini à 2 nœuds.

Le déplacement longitudinal  $u_0(x)$  est approché par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 1.

$$u_0(x) = N_1 \cdot u_1 + N_4 \cdot u_2 \dots\dots\dots (2.15)$$

Avec :  $u_1$  et  $u_2$  sont les valeurs de déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

Où :

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \frac{x}{l}) \\ N_4 = \frac{x}{l} \end{cases} \dots\dots\dots (2.16)$$

On pose :  $\xi = \frac{x}{l}$  , les expressions précédentes deviennent.

$$\begin{cases} N_1 = (1 - \xi) \\ N_4 = \xi \end{cases} \dots\dots\dots (2.17)$$

L'expression du déplacement devient :

$$u_0(x) = (1 - \xi) \cdot u_1 + \xi \cdot u_2 \dots\dots\dots (2.18)$$

Le déplacement transversal  $w(x)$  est approché par des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3.

$$w(x) = N_2 \cdot w_1 + N_3 \cdot \theta_1 + N_5 \cdot w_2 + N_6 \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (2.19)$$

Ou bien :

$$w(x) = \langle N_2 \quad N_3 \quad N_5 \quad N_6 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2.19')$$

Les fonctions d'interpolation sont données par:

$$\begin{cases} N_2 = 1 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_3 = l \left[ \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \\ N_5 = 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \\ N_6 = l \left[ - \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \end{cases} \dots\dots\dots (2.20)$$

Avec :

$w_1, w_2$  : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

$\theta_1, \theta_2$  : les valeurs de la rotation aux nœuds 1 et 2 respectivement.



Ou bien :

$$\begin{cases} N_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_3 = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ N_5 = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_6 = l(-\xi^2 + \xi^3) \end{cases} \dots\dots\dots (2.20')$$

L'expression de  $w(x)$  s'écrit comme suit :

$$w(x) = \left(1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \cdot w_1 + \left(l\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right) \cdot \theta_1 + \left(3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3\right) \cdot w_2 + \left(l\left[-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right]\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (2.21)$$

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément poutre est donnée par :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{l} \cdot u_1 + \frac{1}{l} \cdot u_2 \dots\dots\dots (2.22)$$

La rotation  $\theta(x)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} = \left(\frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3}\right) w_1 + l\left(-\frac{1}{l} + \frac{4x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right) \cdot \theta_1 + \left(-\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}\right) w_2 + l\left(\frac{2x}{l^2} - \frac{3x^2}{l^3}\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (2.23)$$

La courbure  $\phi(x)$  est donnée par :

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) w_1 + l\left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \cdot \theta_1 + \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}\right) w_2 + l\left(\frac{2}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \cdot \theta_2 \dots\dots\dots (2.24)$$

On déduit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l^2} - \frac{6x}{l^3}\right) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots (2.25)$$

Donc la relation entre les déformations de la section transversale à l'abscisse x de l'élément et les déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B]\{u_n\} \dots\dots\dots (2.26)$$

Avec :

$$\{u_n\} = \langle u_1 w_1 \theta_1 u_2 w_2 \theta_2 \rangle$$

Et

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{4}{l^1} - \frac{6x}{l^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) & \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix}$$

Au niveau de la section transversale, à l'abscisse x de l'élément, la relation entre les efforts internes et les déplacements nodaux sont évalués à partir des relations (2.13), (2.26).

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [D][B]\{u_n\} \dots\dots\dots (2.27)$$

$$\text{Avec : } [D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.14)$$

En utilisant le principe des travaux virtuels, pour cet élément, on définit la matrice de rigidité élémentaire (6 x 6).

$$[K]_e = \int_0^l [B]^T [D] [B] dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi \dots\dots\dots (2.28)$$

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire est effectué par intégration numérique en utilisant 3 points de Gauss :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i \dots\dots\dots (2.29)$$

Où :

- n = nombre de point de Gauss (n = 3)
- $\xi_i$  = abscisse de point de Gauss i
- $\alpha_i$  = poids d'intégration au point de Gauss i

## 2.7-Discrétisation de la section transversale:

On utilise une modélisation multicouche, la section est subdivisée en couches ou tranches horizontales, représentant le béton et les lits des armatures en acier.

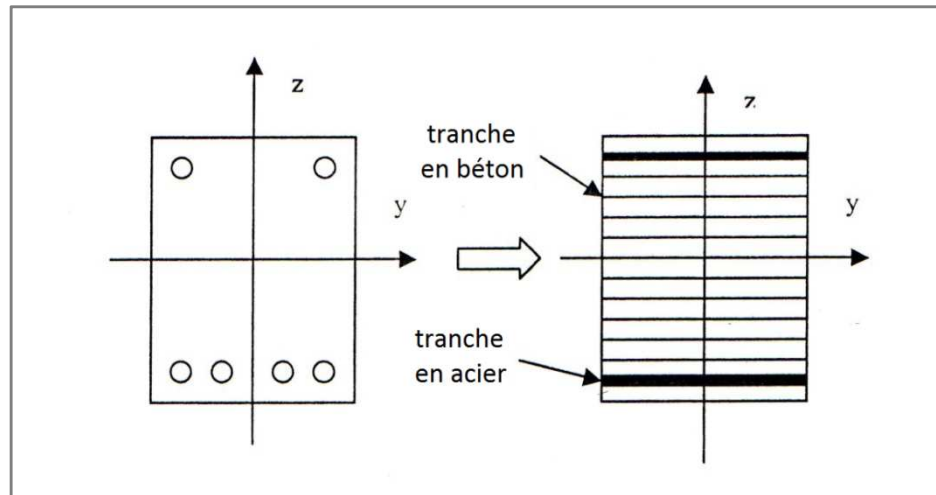


Figure 2.5. Discrétisation de la section transversale.

## 2.8-Evaluation des rigidités de section:

Les quantités  $\overline{EA}$ ,  $\overline{ES}$  et  $\overline{EI}$  sont, alors, évaluées par intégration numériques sur la section transversale :

$$\left. \begin{aligned} \overline{EA} &= \int_0 E(x,z)ds = \sum_{i=1}^n E_i b_i h_i \\ \overline{ES} &= \int_0 E(x,z)zds = \sum_{i=1}^n E_i z_i b_i h_i \\ \overline{EI} &= \int_0 E(x,z)z^2ds = \sum_{i=1}^n E_i z_i^2 b_i h_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.30)$$

Où :

- $n$ = Nombre de couches horizontales discrétisant la section.
- $b_i$ =Largeur de la couche  $i$ .
- $h_i$ =Hauteur de la couche  $i$ .
- $z_i$ =Position de la couche  $i$  par rapport à l'axe de référence.

Connaissant la déformation longitudinale  $\varepsilon_i$  au niveau de la couche  $i$  transversale, on calcule la contrainte normale  $\sigma_i$ , au niveau de cette couche, à partir de la loi de comportement du matériau constituant cette couche. Le module d'élasticité  $E_i$  est alors donné par :

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \dots\dots\dots (2.31)$$

## 2.9-Procédure de calcul non linéaire:

L'analyse non linéaire est effectuée selon une procédure itérative :

**1-**Pour l'étape  $j-1$ , correspondant au chargement extérieurs  $\{F\}^{j-1}$ , on suppose connu l'état de la structure étudiée (déplacement  $\{U\}^{j-1}$ , forces résiduelles  $\{\Psi\}^{j-1}$ ) l'étape initiale  $j=1$  correspond au chargement nul ( $\{U\}^0 = \{0\}$  et  $\{\Psi\}^0 = \{0\}$ ).

**2-**Incrémentation du chargement extérieur.

$$\mathbf{2.1}-\{F\}^j = \{F\}^{j-1} + \{\Delta F\}^j$$

**2.2-**Début de la procédure itérative  $i=1$  :

**2.3-**Incrémentation des forces résiduelles à équilibrer.

$$\{\Psi\}^i = \{\Delta F\}^j + \{\Psi\}^{j-1}$$

**3-**Evaluation des matrices de rigidité élémentaires  $[K]_e^i$ , puis assemblage de la matrice de rigidité globale  $[K]^i$  en fonction de la solution de l'étape précédente  $j-1$ .

**4-**Résolution du système d'équations :

$$[K]^i \{\Delta U\}^i = \{\Psi\}^i$$

**5-**Cumul du vecteur des déplacements nodaux :

$$\{U\}^i = \{U\}^{i-1} + \{\Delta U\}^i$$

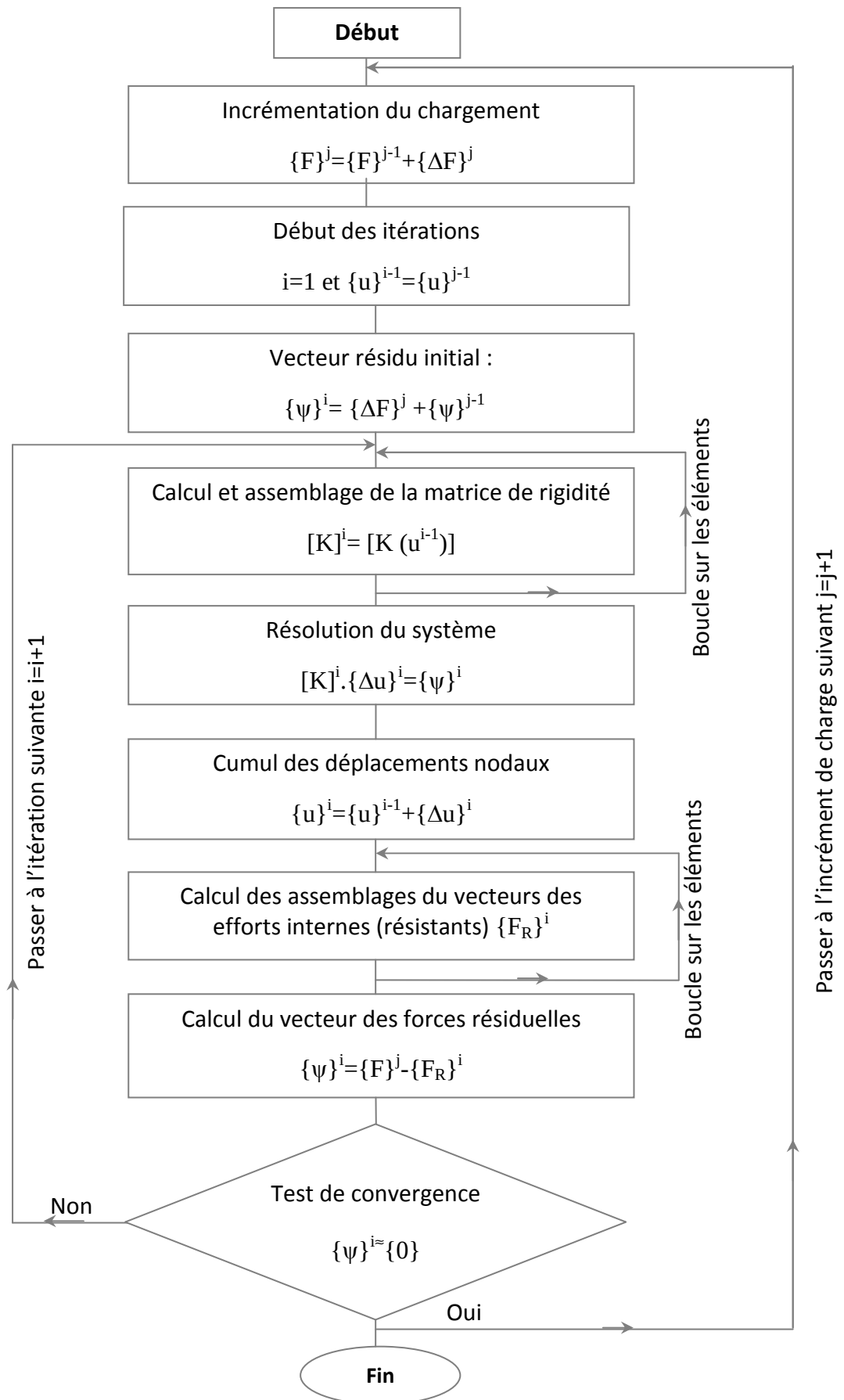
**6-**Evaluation des forces résiduelles élémentaires  $[\Psi]_e^{i+1}$  et assemblage dans le vecteur global des forces résiduelles.

**7-**Test de convergence :

**7.1-**Si convergence, l'étape actuelle est convergente → passage à l'étape (2) pour l'incrément de chargement suivant  $j+1$ .

**7.2-**Sinon, passage à l'itération suivante  $i+1$  → revenir à l'étape (3). (Si le nombre maximal d'itération est dépassée processus est divergent → arrêt de calcul)

## 2.10-Organigramme de calcul:



## 2.11- Modélisation des matériaux:

### 2.11.1 Le béton:

#### 2.11.1.1 Comportement du béton à la compression:

##### a) La loi de Sargin: (itbc=1).

Pour représenter le comportement du béton en compression, on admet un comportement élastique non linéaire, représenté par la loi de Sargin [31] :

$$\sigma = f_{bc} \frac{k_1 \bar{\varepsilon} + (k_2 - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_1 - 2) \bar{\varepsilon} + k_2 \bar{\varepsilon}^2} \dots\dots\dots (2.32)$$

$$\text{Avec : } \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{bc}}$$

Le paramètre  $k_2 = k_1 - 1$  pour les bétons normaux, gouverne la branche descendante.

- $k_2 = k_1 - 1$  si  $f_{bc} \leq 30 \text{ Mpa}$
- $k_2 = (k_1 - 1) \left( \frac{55 - f_{bc}}{25} \right)$  si  $30 \leq f_{bc} \leq 55 \text{ Mpa}$ .
- $k_2 = 0$  si  $f_{bc} > 55 \text{ Mpa}$

et :

$f_{bc}$  : Résistance à la compression du béton.

$E_{b0}$  : Module élastique du béton à l'origine.

$\varepsilon_0$  : Déformation correspondant au pic des contraintes.

$\varepsilon_{cu}$  : Déformation de rupture.

$\sigma_r$  : Contrainte de rupture.

Ce modèle est adopté pour le calcul des structures en béton armé et précontraint et dans le cas du béton de fibres dans le domaine de compression.

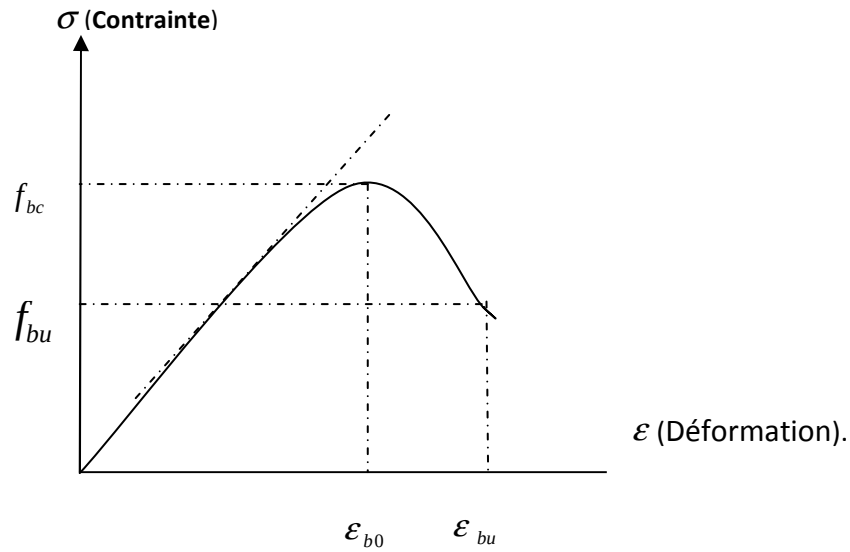


Figure 2.6 : diagramme contrainte – déformation de la loi de Sargin [31].

**b) loi de Sargin avec un tronçon droit pour  $\varepsilon > \varepsilon_{b0}$  :**

Pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_{b0}$ , l'équation de la loi est la même que l'équation de la loi de SARGIN

Pour  $\varepsilon > \varepsilon_{b0}$ , la loi se présente sous la forme d'un tronçon droit qui est donnée par

l'équation: 
$$\sigma = f_{bc} \left[ 1 - \frac{(1 - \frac{f_{bu}}{f_{bc}})(\bar{\varepsilon} - 1)}{(\frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{b0}} - 1)} \right] \dots\dots\dots (2.33)$$

Le diagramme contrainte – déformation est représenté comme suit :(voir figure 2.7)

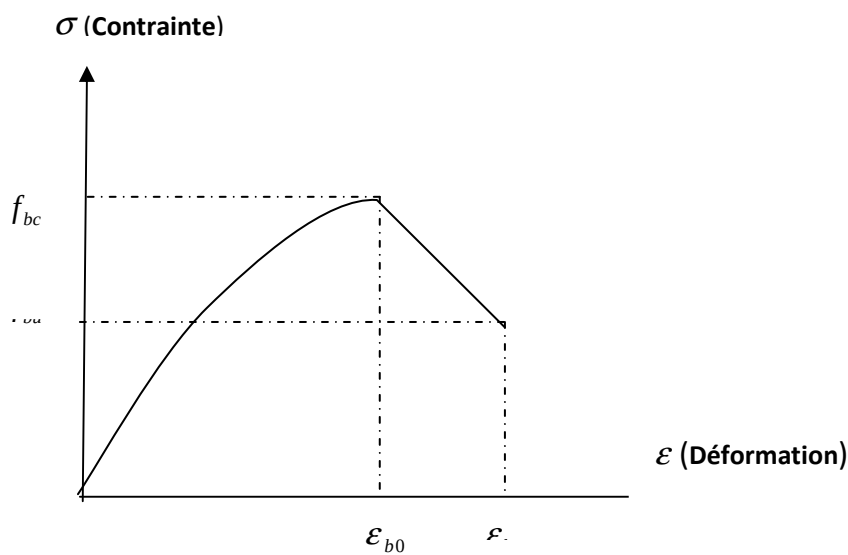


Figure 2.7 : Diagramme contrainte-déformation de la loi de Sargin avec un tronçon droit.

**c) loi parabolique:**

L'équation de cette loi est obtenue à partir de la loi de sargin pour  $k_1 = 2$  et  $k_2 = 0$ , elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

Le diagramme contrainte – déformation est représenté sur la figure suivante :

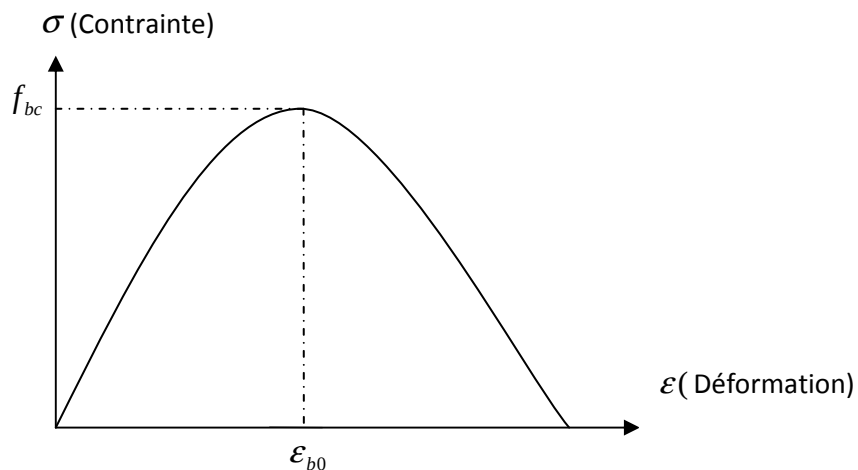


Figure 2.8: Diagramme contrainte –déformation (loi parabolique) [21].

**d) loi parabole – rectangle:**

Ce modèle reprend la loi parabole - rectangle des règles BAEL. En compression, la contrainte est une fonction parabolique de déformation jusqu'à  $f_{bc}$  (domaine élastique) ensuite elle demeure constante. La non-linéarité ne provient que de la déformation plastique qui vaut  $\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ , le palier du domaine plastique peut commencer à une déformation valant de 0.2%

si le module de Young est pris égal à  $E = \frac{2 \cdot f_c}{0.002}$  [10], la contrainte s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{Pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{b0} = 2 \% \quad \sigma = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

$$\text{Pour } \varepsilon = 2 \% \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bu} = 3.5 \% \quad \sigma = f_{bc}$$

Cette loi permet d'effectuer des calculs de vérification réglementaires.



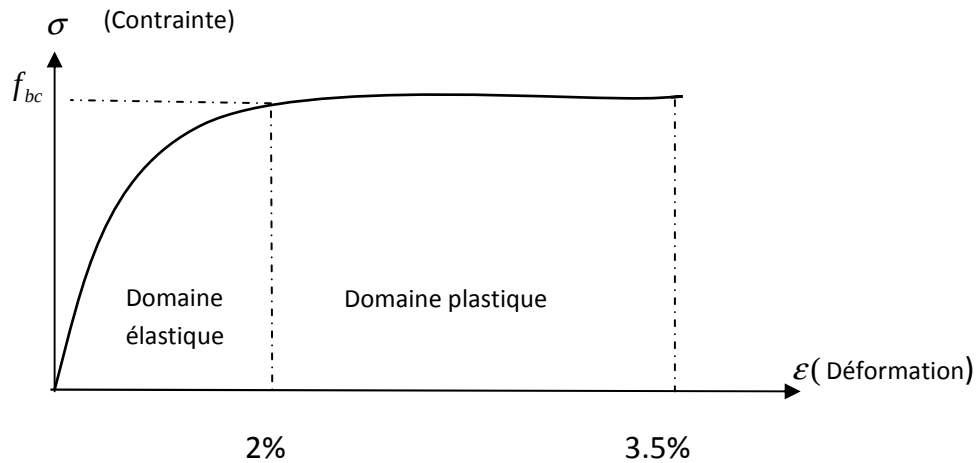


Figure 2.9 : Diagramme contrainte –déformation (loi parabole rectangle) [21].

### 2.11.1.2 Comportement du béton à la traction:

Le programme `poutre_mince2.for` (développé et enrichi) permet de prendre en compte la contribution du béton tendu fissuré <<the tension stiffening>>. La variable `itbt` permet de faire le choix de la loi de comportement à utiliser. Afin de modéliser le comportement du béton armé en traction, quelques modèles et lois de comportement les plus répandus dans la littérature sont inclus dans le programme. Parmi ces modèles et lois, on peut citer :

#### a) Loi élastique fragile: (`itbt=1`):

Il s'agit d'une approche minimaliste qui consiste en une partie linéaire croissante dont la pente correspond au module d'élasticité du béton à la compression jusqu'à la valeur:  $\varepsilon_{bft} = \frac{f_{bt}}{E_{b0}}$

Ensuite la contrainte est nulle pour les déformations supérieures à  $\varepsilon_{bft}$ , avec:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \quad \sigma = E_b \cdot \varepsilon \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{bft} \quad \sigma = 0$$

Avec :

$E_{b0}$  : Module d'élasticité du béton à la compression.

$f_{bt}$  : Contrainte à la traction de béton.

$\varepsilon_{bft}$  : Déformation correspondante à la contrainte à la traction de béton.

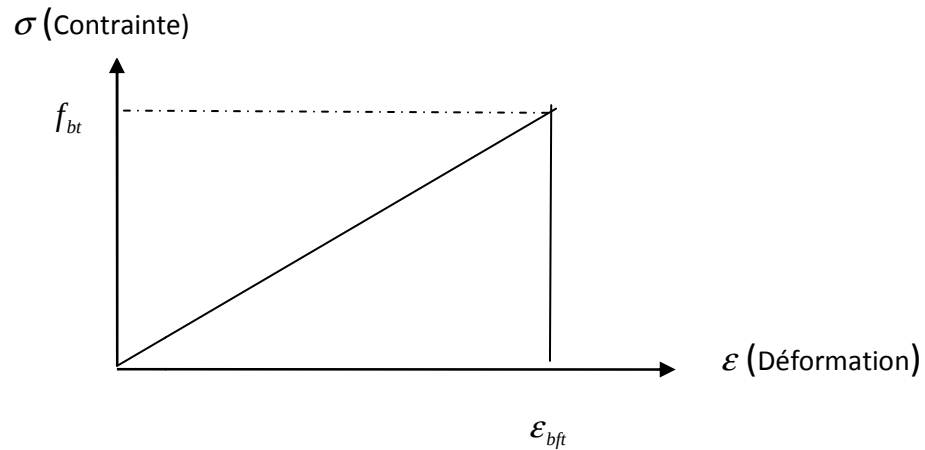


Figure 2.10: Diagramme contrainte –déformation (élastique-fragile) [38].

**b) Loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire: (itbt=2):**

C'est une loi qui présente un comportement post-critique, linéaire. Après le maximum (le pic des contraintes), une partie d'adoucissement linéaire décroissante est considérée.

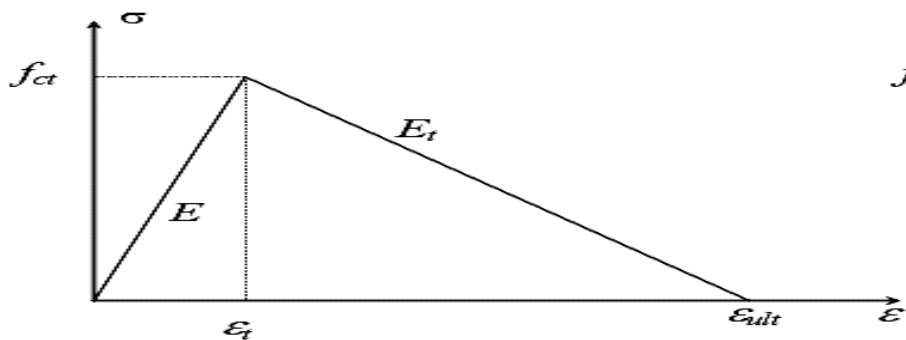


Figure 2.11: diagramme contrainte déformation (Loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire) [55].

L'équation qui représente le diagramme contrainte déformation s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \quad & \sigma = E_{b0} \cdot \varepsilon \\
 \varepsilon_{bft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{btu} \quad & \sigma = f_{bt} \left[ \frac{(\varepsilon_{bft} - \varepsilon_{btu})}{((\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{bft}))} \right] \dots\dots\dots (2.37)
 \end{aligned}$$

**Remarque:** dans cette formulation, la contribution du béton tendu s'annule à la plastification des aciers.

### c) Loi de comportement fictive de Grelat: (itbt=3):

La formulation de Grelat consiste à attribuer une distribution triangulaire fictive des contraintes dans la zone tendue fissurée de la section transversale.

Il est admis de tenir compte de la résistance du béton tendu en phase fissuré, on attribue a celui-ci un diagramme fictif à partir de l'axe neutre.

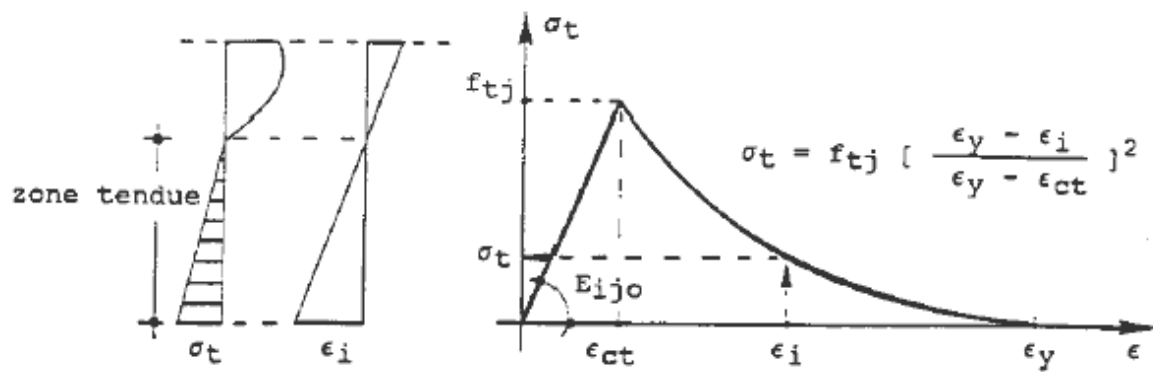


Fig. 2.12: Loi de comportement fictive de Grelat.

$$\sigma_t = E_{c0} \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots \text{si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_{ct}$$

$$\sigma_t = f_{ctj} \frac{(\varepsilon_i - \varepsilon_y)^2}{(\varepsilon_y - \varepsilon_{ct})^2} \quad \dots\dots\dots \text{si } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_y \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\sigma_t = 0 \quad \dots\dots\dots \text{si } \varepsilon_i \geq \varepsilon_y$$

### d) Loi de comportement fictive de Quast: (itbt=4):

La formulation consiste à prendre un diagramme des contraintes fictif, représenté par une loi monotone croissante, à pente décroissante jusqu'à la résistance en traction qui devient une caractéristique fictive et variable en fonction de la déformation de l'acier le plus tendu.

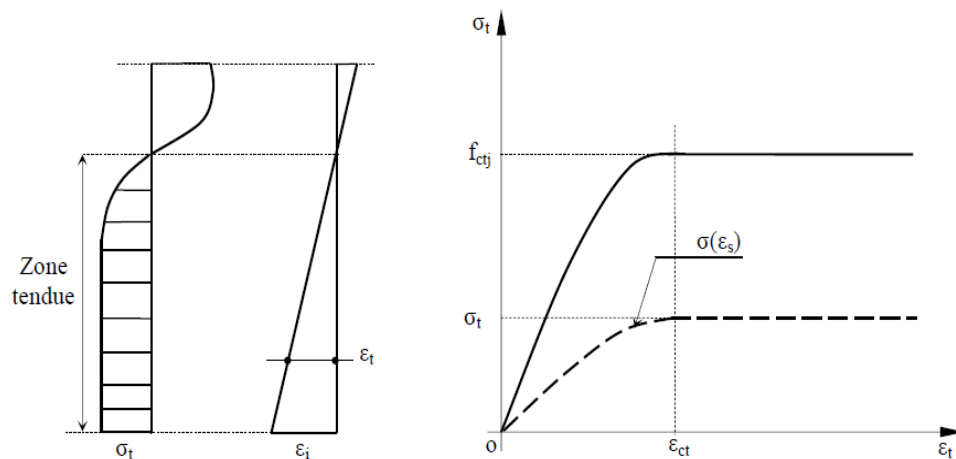


Fig.2.13: Loi de comportement fictive de Quast.

La variation de la courbe contrainte-déformation est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\sigma}{\sigma_t} = 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} \right)^n$$

$n$  : coefficient de forme de la courbe,

Dans notre cas on a considéré une loi parabole-rectangle ( $n = 2$ )

La contribution du béton tendu fissuré ( $\sigma_t$ ) est fonction de la déformation de l'acier

C-à-d :

$$\sigma_t = f_{ctj} \quad \dots\dots\dots \text{si } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{ct}$$

$$\sigma_t = f_{ctj} \left( \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right) \quad \dots\dots\dots \text{si } \varepsilon_s \geq \varepsilon_{ct} \dots\dots\dots (2.39)$$

#### e) Loi de comportement fictive de Vecchio: (itbt = 5):

La formulation de Vecchio permet de prendre dans la même zone tendue deux lois de comportement différentes c'est-à-dire :

Au voisinage de l'armature environ (7.5%), il tient compte de l'effet du « tension stiffening ».

C.-à-d.

$$\sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} \quad \dots\dots\dots \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ft}$$

$$\sigma_{bt} = \frac{a f_t}{1 + \sqrt{b \varepsilon}} \quad \dots\dots\dots \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_y \quad \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\sigma_{bt} = 0 \quad \dots\dots\dots \varepsilon_t \geq \varepsilon_y$$

Avec  $a=1$  et  $b=200$  ou  $500$

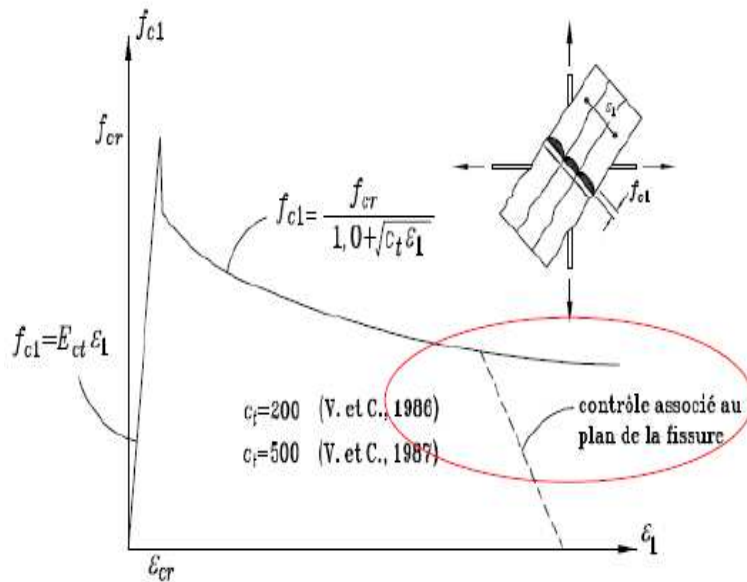


Fig.2.14 : Loi de comportement fictive de Vecchio.

- Au delà de (7.52), il ne tient pas compte du béton tendu fissuré, mais il ne néglige pas totalement le béton en traction car il tient compte du comportement fragile du béton tendu.

C.-à-d.

$$\sigma_{bt} = E_{bo} \cdot \varepsilon_{bt}$$

$$\sigma_{bt} = 0 \quad \dots\dots\dots \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ft}$$

### 2.11.2 Les aciers:

La loi contrainte déformation est supposée identique en traction et en compression sous chargement monotone ; elle dépend de la nature de l'acier.

#### 2.11.2.1 Aciers naturels:

Ils sont caractérisés par une loi élastoplastique parfaite [15] :

$$\begin{array}{lll}
 \sigma = E_a \cdot \varepsilon & \text{pour} & \varepsilon_r \leq \varepsilon_e \\
 \sigma = \sigma_e & \text{pour} & \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \dots\dots\dots (2.41) \\
 \sigma = 0 & \text{pour} & \varepsilon > \varepsilon_u
 \end{array}$$

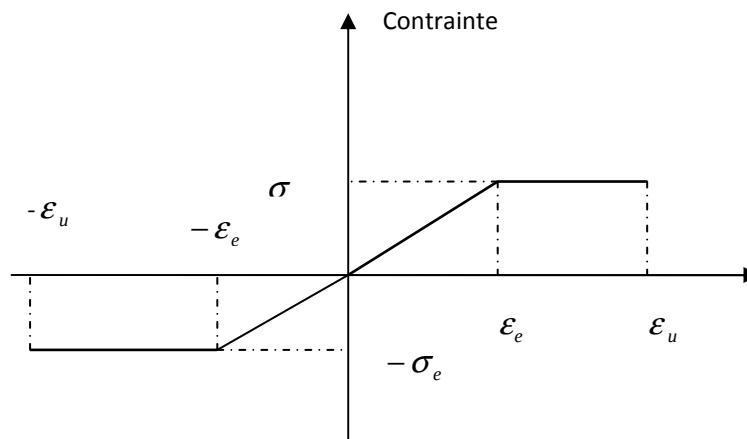


Figure 2.15: Comportement des aciers naturels [14].

Avec :

$E_a$  : Module longitudinal de l'acier,

$\varepsilon_e$  : Déformation limite élastique de l'acier,

$\sigma_e$  : Contrainte limite élastique de l'acier,

$\varepsilon_u$  : Déformation ultime de l'acier.

#### Remarque:

- Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement B à 10<sup>0</sup>/100.
- Le comportement est symétrique en traction et en compression.

### 2.11.2.2. Aciers écrouis:

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique ( $\sigma_e$ ). Au - delà, une courbe  $\varepsilon = f(\sigma)$  du cinquième degré.

Elle se traduit par les relations suivantes:

$$\sigma = E_a \cdot \varepsilon \quad \text{pour } \sigma < 0.7 \sigma_e$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_a} + 0.823 \left( \frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 \quad \text{pour } 0.7 \sigma_e < \sigma < 1.1 \sigma_e \quad \dots\dots\dots (2.42)$$

$$\sigma = 1.1 \sigma_e \quad \text{pour } 1 \% < \varepsilon < \varepsilon_u$$

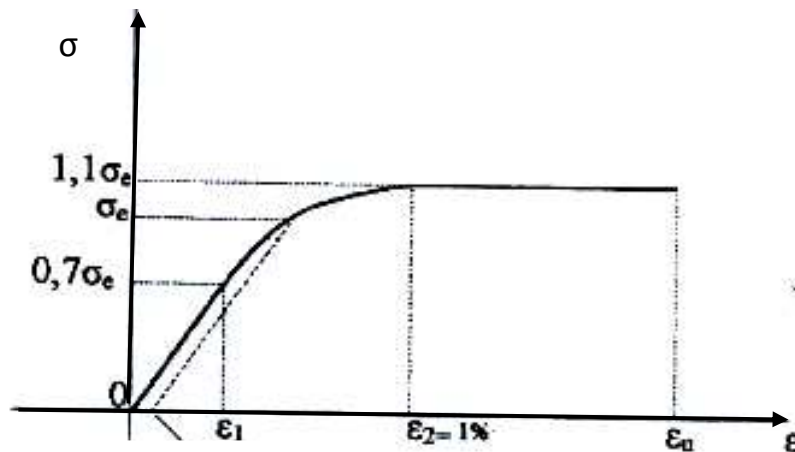


Figure 2.16 : Comportement des aciers écrouis [31].

Remarque: Les relations en traction se déduisent aussi par symétrie dans ce model.

## Chapitre 3: Présentation du programme de calcul:

### 3.1-Introduction:

Ce programme est élaboré en langage Fortran 90. Il permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire jusqu'à rupture d'une structure plane, constituée d'éléments poutres en béton arme.

### 3.2-Organigramme général du bloc calcul:

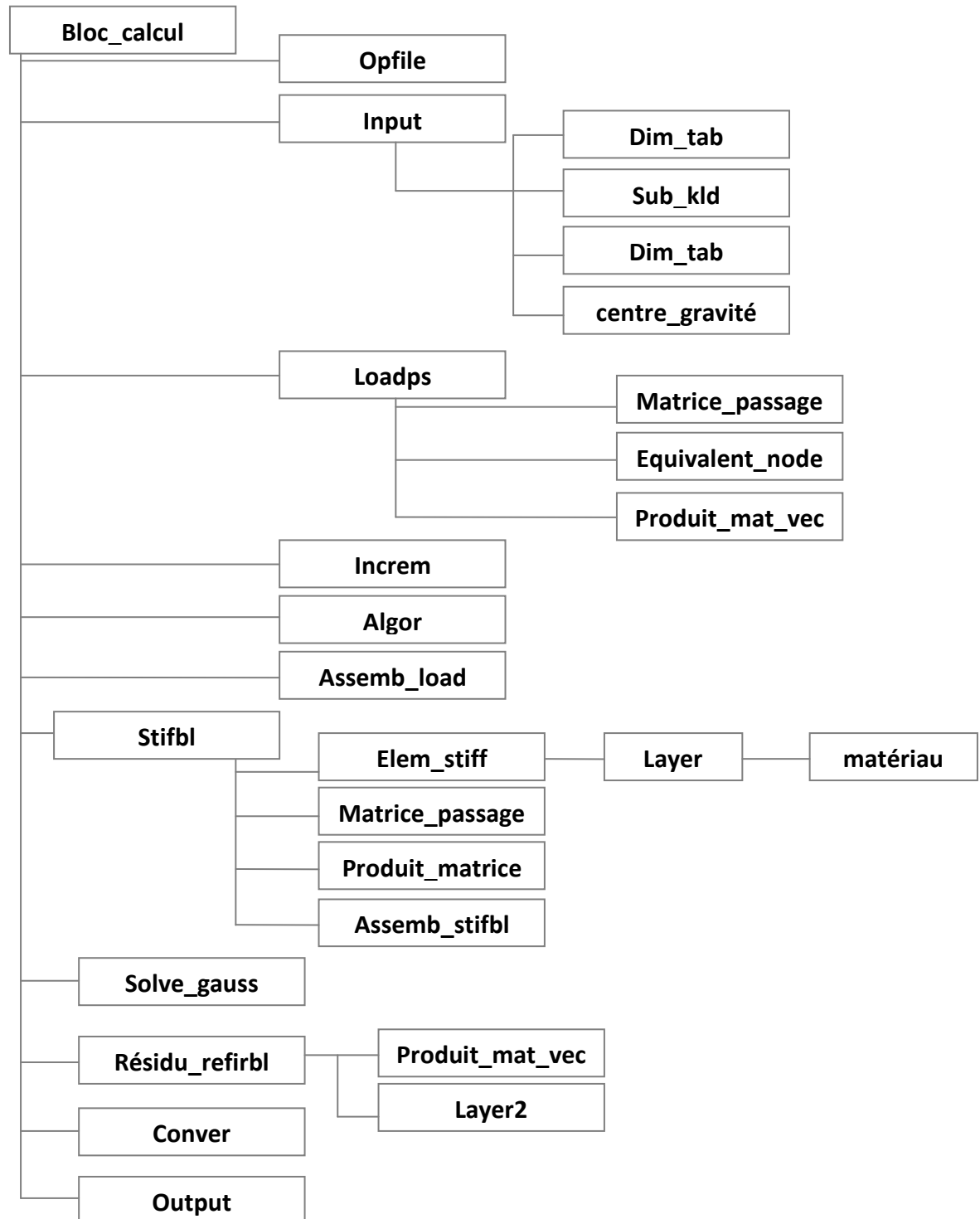


Figure 3.1: Organigramme détaillé du bloc calcul.



### 3.3-Description des différentes sousroutines :

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sousroutines constituant le programme poutre \_ mince :

#### 1-Sousroutine opfile :

Ouverture du fichier de données finp et création du fichier des résultats fout.

#### 2-Sousroutines input :

Lecture des principales données du problème.

#### 3-Sousroutines dim \_ tab (itab) :

Dimensionnement et initialisation des tableaux et vecteurs.

#### 4- Sousroutines sub \_ kld :

Calcul du vecteur kld de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockage en ligne de ciel)

#### 5-Sousroutine centre \_ gravite :

Calcul de la position du centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence.

#### 6-Sousroutine loadps :

Lecture du chargement puis évaluation des forces nodales, pour chaque élément dans le vecteur "rload".

#### 7-Sousroutine équivalent-node :

Calcul du vecteur des forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours.

#### 8-Sousroutine matrice-passage :

Calcul de la matrice de passage.

#### 9-Sousroutine produit\_ matrice :

Calcul du produit de deux matrices  $A (l \times m) * B (m \times n)$

#### 10-Sousroutine produit\_ mat\_ vect :

Calcul du produit d'une matrice par un vecteur  $A (l \times m) * v (m)$

**11-Subroutine increm :**

Lecture et incrémentation du chargement appliqué.

**12- Subroutine algor :**

Calcul du paramètre kresl de l'algorithme de résolution en fonction de la valeur du paramètre nalgo.

**13- Subroutine assemb\_load :**

Assemblage du chargement dans le vecteur global « gload ».

**14-Subroutine stifbl :**

Calcul et assemblage de la matrice de rigidité élémentaire.

**15-Subroutine elem\_stiff :**

Calcul de la matrice de rigidité élémentaire estif (6x6) pour un élément poutre mince plane à 2 nœuds.

**16-Subroutine assem\_stifbl :**

Assemblage des matrices élémentaire dans la matrice globale. « gstif »

**17-Subroutine layer :**

Calcul des valeurs EA, ES, et EI par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours.

**18-Subroutine solve\_gauss :**

Résolution du système d'équations par la méthode d'élimination de gauss (la matrice de rigidité étant stockée en ligne de ciel), cumul des déplacements et réactions.

**19-Subroutine residu\_reforbl :**

Calcul des forces nodales équivalentes

**20-Subroutine layer 2 :**

Calcul des valeurs des efforts N et M au point igauss de la section transversale de l'élément en cours.

**21-Subroutine matériau :**

Loi de comportement relation contrainte – déformation.

**22-Subroutine conver :**

Test de convergence pour le calcul itératif.

**23-Subroutine output :**

Sortie des résultats :

- Déplacements nodaux
- Efforts internes N, T, M.
- Réactions aux appuis.

**3.4-Description du fichier de données :****Début\_titre**

\$

\$ Titre et/ou description du problème

\$

**Fin\_titre****Données\_globales**

Npoin Nelem Nsect MaxTrap MaxAcier Nvfix Nmats Nprop Nincs Nalgo  
Ntype\_charge

**Éléments**

NumElem TypElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2  
..... nelem lignes

**Coordonnees**

NumNoeud CoordX CoordY  
..... npoin lignes

**Section**

|         |            |              |        |        |          |        |  |  |
|---------|------------|--------------|--------|--------|----------|--------|--|--|
| Numsect | Hsection   | Ntrapeze     | Nacier |        |          |        |  |  |
| b_inf   | b_sup      | z_inf        | z_sup  | NumMat |          |        |  |  |
| .....   | .....      | .....        | .....  | .....  | Ntrapeze | lignes |  |  |
| z_acier | aire_acier | NumMat_acier |        |        |          |        |  |  |
| .....   | .....      | .....        |        |        | Nacier   | lignes |  |  |

Nsect fois

**Conditions\_limites**

NumNoeud\_fix Code\_CL Depl\_fix\_X Depl\_fix\_Y Rot\_fix  
..... Nvfix lignes

**Matériaux**

Numat itype\_materiau prop (1) prop (2) ... prop (Nprop)  
..... Nmats lignes

**Charges**

Indice\_charge\_Nodale Indice\_charge\_Repartie

**Charges\_nodales**

```

Nbre_charge_N
NumNoeud_Charge  Force_X  Force_Y  Moment
.....          .....   .....   .....   Nbre_Charge_N  lignes

```

**charges\_reparties**

```

Nbre_charge_R
Numel_Charge  Ncas  Numcas  charge
.....        .....   .....   .....   Nbre_Charge_R  lignes

```

**Incrément**

```

Fact_Charge1  Tolerance1  Max_iterations1  Indice_sortie1
Fact_Charge2  Tolerance2  Max_iterations2  Indice_sortie2
.....        .....        .....        .....        Nincs  lignes
.....        .....        .....        .....

```

**increment**

```

Fact_Charge1  Tolerance1  Max_iterations1  Indice_sortie1
Fact_Charge2  Tolerance2  Max_iterations2  Indice_sortie2
.....        .....        .....        .....        Nincs  lignes
.....        .....        .....        .....

```

**3.5-Description des variables du fichier de données :**

- Commande **début \_ titre** : (bloc des commentaires)

Après cette commande, on peut introduire le titre, la description ou des commentaires concernant le problème à traiter .Cette partie est terminée par la commande **fin \_ titre**.

- Commande **données \_ globales** (lecture des principales données).

(On introduit **1** ligne contenant **11** variables)

**Npoint** : nombre total des points nodaux (nœuds).

**Nelem** : nombre total d'éléments.

**Nsect** : nombre de types de section.

**Maxtrap**: nombre maximum de trapèzes par section.

**Maxacier** : nombre maximum de lits d'acier par section.

**Nvfix** : nombre des neouds ayant des conditions aux limites

**Numat** : nombre de groupes de matériaux

**Nprop** : nombre maximum des propriétés des matériaux

**Nincs** : nombre d'incréments de chargement.

**Nalgo** : indicateur pour identifier le type d'algorithme de résolution.

Si **nalgo = 1** → la méthode de rigidité initiale

**Sinalgo = 2** → la matrice de rigidité est recalculée pour chaque itération pour chaque incrément de charge

Si **nalgo=3** → la matrice de rigidité est recalculée pour la 1<sup>ère</sup> itération pour chaque incrément de charge.

**Ntype\_charge** : = **1** s'il ya seulement un chargement variable

= **2** s'il ya un chargement fixe + un chargement variable

- Commande **éléments** (connectivités nodales et types de sections)

(On introduit une ligne contenant **5** variables. Cette ligne est répétée **nelem** fois)

**NumElem** = numéro d'élément

**TypElem** = type de l'élément = **1** si élément **poutre**

**2** si élément **barre**

**NumSect** = numéro de la section transversale constituant l'élément

**NumNœud 1** = numéro du 1<sup>er</sup> nœud de l'élément en cours

**NumNœud 2** = numéro du 2<sup>ème</sup> nœud de l'élément en cours

- Commande **coordonnée** (lecture des coordonnées nodales)

(On introduit une ligne contenant **3** variables. Cette ligne est répétée **Npoint** fois)

**Num Nœud** = numéro du nœud considéré

**CoordX** = abscisse du nœud considéré / repère global de la structure

**CoordY** = ordonnée du nœud considéré / repère global de la structure

- Commande **Section** (caractéristiques des différents types de sections)

(Ce bloc de données est répété **Nsect** fois)

**Num Sect** = numéro de la section considérée

**Hsection** = hauteur de la section considérée

**Ntrapeze** = nombre de trapèzes dans la section considérée

**Nacier** = nombre de lits d'acier dans la section considérée

**b\_inf** = largeur de la base inférieure du trapèze considéré

**b\_sup** = largeur de la base supérieure du trapèze considérée

**Z\_inf** = ordonnée de la base inférieure / à l'axe de référence.

**Z<sub>sup</sub>** = ordonnée de la base supérieure / à l'axe de référence.

**Num Mat** = numéro du matériau constituant le trapèze considéré

**Z<sub>acier</sub>** = ordonnée du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

**Aire- acier** = aire du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

**Num Mat- acier** = numéro du lit d'acier considéré

- commande **condition \_ limites** (lecture des conditions aux limites)

*(On introduit une ligne contenant 5 variables. Cette ligne est répétée **Nvfix** fois)*

**NumNœud\_fix** = numéro du nœud ayant des C.L

**Code\_CL** = code de la condition aux limites.

= **100** => déplacement longitudinal U imposé

= **010** => déplacement transversal V imposé

= **001** => rotation  $\theta$  imposée

= **110** => déplacements U et V imposés (si U = V = 0 => appuis double)

= **111** => déplacements U, V et  $\theta$  imposée (Si U = V =  $\theta$  = 0 => encastrement)

**Depl\_fix\_X** = valeur du déplacement longitudinal imposé ( 0, s'il s'agit d'un appui )

**Depl\_fix\_Y** = valeur du déplacement transversal imposé ( 0, s'il s'agit d'un appui )

**Rot\_fix** = valeur de rotation imposée (0 si la rotation est empêchée)

- Commande **matériau** (propriété des groupes de matériaux)

*(On introduit une ligne contenant **2+Nprop** variables. Cette ligne est répétée **Nmat** fois)*

**Numat** = numéro du matériau considéré

**itype \_ matériau** (numat) : type du matériau

Si **itype \_ matériau =1** → matériau élastique

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale E

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu$

**Prop (3)** = 0.

.....

**Prop (nprop)** = 0.

Si **itype \_ matériau =2** → matériau béton

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale du béton à l'origine.  $E_{b0}$

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu_b$

**Prop (3)** = Résistance à la compression du béton

**Prop (4)** = le pic des contraintes du béton

**Prop (5)** = déformation correspondant au pic des contraintes.

**Prop (6)** = déformation de rupture.

**Prop (7)** = contrainte du béton à la traction  $f_{bt}$

**Prop (8)** = déformation correspondante à l'atteinte de la contrainte limite du béton en traction.

**Prop (9)** = coefficient **itbc** caractérisant la loi du béton comprimé.

**Prop(10)** = coefficient **itbt** caractérisant la loi du béton tendu.

Si **itype\_matériau = 3** → matériau acier

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale  $E_a$

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu_a$

**Prop (3)** = limite d'élasticité  $f_{ae}$

**Prop (4)** = contrainte ultime  $f_{au}$

**Prop (5)** = déformation ultime  $\epsilon_{au}$

**Prop (6)** = 0.

.....

**Prop (nprop)** = 0.

- Commande **charges** (lecture des paramètres de chargement)

(On introduit une ligne contenant **2** variables.)

**Indice-charge\_Nodale** : paramètre du chargement nodal

Si **Indice-charge\_Nodale** = 0 → pas de chargement nodal à introduire

**Indice – charge \_repartie** : paramètre du chargement reparté sur les éléments

Si **Indice-charge \_repartie** = 0 → pas de chargement reparté

- Commande **charges\_ nodales** (lecture des charges nodales si **indice-charge\_ nodale** ≠ 0)

**Nbre\_Charge\_N** = nombre de nœuds chargés (= nombre de forces nodales appliquées)

**Num Nœud\_charge** = numéro du nœud chargé

**Force-x** = valeur de la charge nodale  $F_x$  selon l'axe x appliquée au nœud

**Force-y** = valeur de la charge nodale  $F_y$  selon l'axe x appliquée au nœud

**Moment** = valeur du moment  $M$  appliqué au nœud

(Ces données sont répétées **Nbre\_Charge\_N** fois)

- Commande **charge répartie** (lecture des charges réparties si **indice \_charge\_repartie** ≠ 0)

**Nbre\_Charge\_R** = nombre d'éléments soumis à des charges réparties

**Numel** = numéro de l'élément chargé

**Ncas** = nombre de cas de chargements repartis (1 à 4)

**Numcas** = numéro du cas de chargement

Si **Numcas** = **1** → charge longitudinale uniformément répartie

= **2** → charge transversale uniformément répartie

= **3** → charge triangulaire croissant de gauche à droite

= **4** → charge triangulaire croissant de droite à gauche

**Charge** = valeur de la charge répartie (force par unité de longueur)

(Ces données sont répétées **Nbre\_Charge\_R** fois)

N.B : les charges reparties sont données dans le repère local de l'élément considéré.

- commande **incrément** (lecture des incréments de chargement)

(On introduit une ligne contenant **4** variables. Cette ligne est répétée **Nincs** fois)

**Fact-charge** = facteur de chargement pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Tolérance** = tolérance de convergence pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Max-itération** = nombre maximal d'itération pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Indice sortie** = paramètre de sortie des résultants pour le 1<sup>er</sup> incrément

Si **indice – sortie** = **0** → sortie des résultats après convergence  
du 1<sup>er</sup> incrément de chargement

Si **indice – sortie** = **1** → sortie des résultats après la première itération  
du 1<sup>er</sup> incrément

Si **indice – sortie** = **2** → sortie des résultats après chaque itération  
du 1<sup>er</sup> incrément

N.B :

Le bloc de lecture **incrément** est lu :

- une seule fois si Ntype\_charge = 1 (chargement variable)
- deux fois si Ntype\_charge = 2 (chargements fixe + variable)



### 3.6-Présentation du fichier résultats

==> début\_titre

\$

\$ Titre et/ou description du problème

\$

fin\_titre

==> données globales:

Nombre total des points nodaux = ...

Nombre total d éléments = ...

Nombre de types de sections = ...

Nombre max de trapèzes/section = ...

Nombre max de lits d aciers/section = ...

Nombre des nœuds ayant des CL = ...

Nombre de groupes de matériaux = ...

nbre max de propriétés de matériaux = ...

Nombre de nœuds par élément = ...

nbre d incréments de chargement = ...

Type d'algorithme de résolution = ...

Nombre de ddl/nœud = ...

nbre de types chargements = ...

==> Connectivites nodales et types de sections:

Elément num\_section numéros noeuds

-----

.....

==> Coordonnées nodales:

Nœud abscisse ordonnée

-----

... ..

==>nombre de types de sections : ...

Type section nombre trapèze hauteur section

.....

| N°trapèze | b_inf | b_sup | zi_trapèze | zs_trapèze | n° matériau |
|-----------|-------|-------|------------|------------|-------------|
| ...       | ...   | ...   | .....      |            |             |
| ...       | ...   | ...   |            |            |             |

| N°trapèze | b_inf | b_sup | zi_trapèze | zs_trapèze | n° matériau |
|-----------|-------|-------|------------|------------|-------------|
| ...       | ...   | ...   | .....      |            |             |
| ...       | ...   | ...   |            |            |             |

```

zi_trapèze ( .....)= ...
zs_trapèze ( .....)= ...
z_acier ( .....)= ...
z_acier ( .....)= ...
zi_trapèze ( .....)= ...
zs_trapèze ( .....)= ...
z_acier ( .....)= ...
z_acier ( .....)= ...

```

### ==> Conditions aux limites (CL):

| Nœud  | code  | valeurs fixées |
|-------|-------|----------------|
| ----- |       |                |
| ...   | ..... | ...            |
| ...   | ..... | ...            |

### ==> Propriétés des groupes de matériaux:

| groupe | module young | module tran | G     | sigmay | H'    |
|--------|--------------|-------------|-------|--------|-------|
| -----  |              |             |       |        |       |
| ...    | ...          | .....       | ..... | ...    | ..... |
| ...    | ...          | .....       | ..... | ...    | ..... |

==> indice du chargement nodal =...

==> indice du chargement repart =...

### ==> charges\_nodales:

| Nœud  | force Fx | force Fy | Moment |
|-------|----------|----------|--------|
| ----- |          |          |        |
| ...   | ...      | ...      | ...    |
| ...   | ...      | ...      | ...    |

**==> charges reparties:**

| Élément | Nbre cas charges | Num charge | Valeur charge |
|---------|------------------|------------|---------------|
| -----   |                  |            |               |
| .....   |                  |            |               |

**=> Incrément**

-----

Facteur de chargement : ...

Tolérance de convergence : ...

Nbre maximal d itérations : ...

Paramètre de sortie : ...

**\*\*\*\*\* Résultats du calcul \*\*\*\*\***

**==> Déplacements nodaux:**

| Nœud  | Depl Ux | Depl Uy | Rotation teta |
|-------|---------|---------|---------------|
| ----- |         |         |               |
| ...   | ...     | ...     | ...           |

**==> Réactions aux appuis:**

| Noeud | React Rx | React Ry | Moment M |
|-------|----------|----------|----------|
| ----- |          |          |          |
| ...   | ...      | ...      | ...      |

## CHAPITRE 4: ETUDE PARAMETRIQUE ET COMPARATIVE.

### 4.1 : Introduction:

Le présent chapitre consiste en une étude paramétrique et comparative, par simulation numérique, en considérant l'effet du "tension stiffening" c'est-à-dire la contribution du béton tendu fissuré dans le comportement non linéaire des éléments fléchis en béton armé. Le premier exemple considéré est l'essai de la poutre de Mazars [10], soumise à la flexion simple.

Le deuxième exemple considéré est l'essai du poteau de Low-Moehle, soumis à la flexion composée [78]. Dans cette étude, on considère plusieurs modèles du béton tendu fissuré, présentés dans les chapitres précédents. Par ailleurs divers paramètres influençant l'effet du "tension stiffening" sont considérés.

### 4.2: Etude de l'essai de la poutre de Mazars:

#### 4.2.1: Présentation de l'essai:

La poutre considérée est de section rectangulaire de 220mm de hauteur, 150mm de largeur. Elle est armée en sa partie inférieure de 2 armatures haute adhérence HAØ12 et est sollicitée en flexion simple à 3 points (figure 4.1). Les caractéristiques mécaniques du béton utilisé sont:  $f_{cj}=32,3\text{MPa}$  ;  $f_{tj}=3,05\text{MPa}$  et  $E_{bo}=30200\text{MPa}$ .

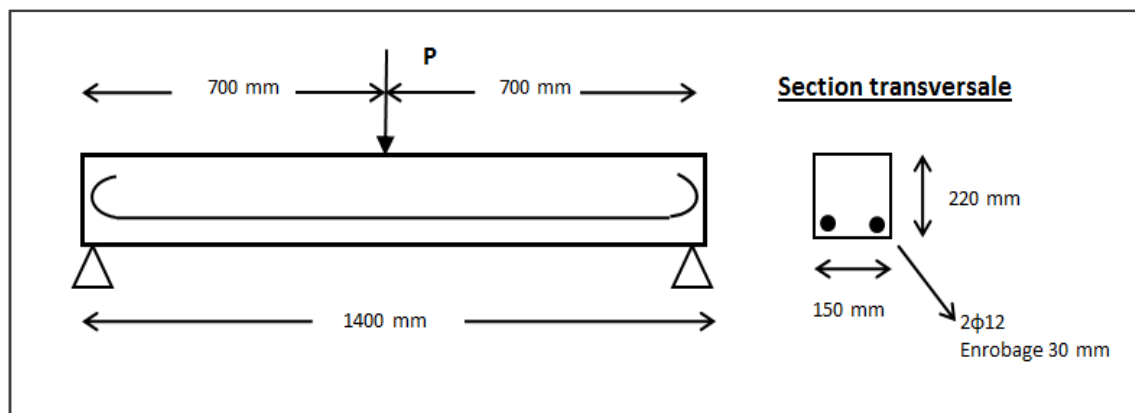


Figure 4.1: Essai de la poutre de Mazars [10].

#### 4.2.2: Calcul et analyse:

Pour l'étude de cette poutre, nous avons effectué le calcul dans deux options différentes:

- a- en négligeant complètement le béton tendu.
- b- en utilisant le modèle de Grelat pour le béton tendu.

Dans les figures 4.2a et 4.2b, nous avons reporté dans deux échelles différentes, les courbes charge-flèche résultant du calcul, comparées aux résultats expérimentaux.

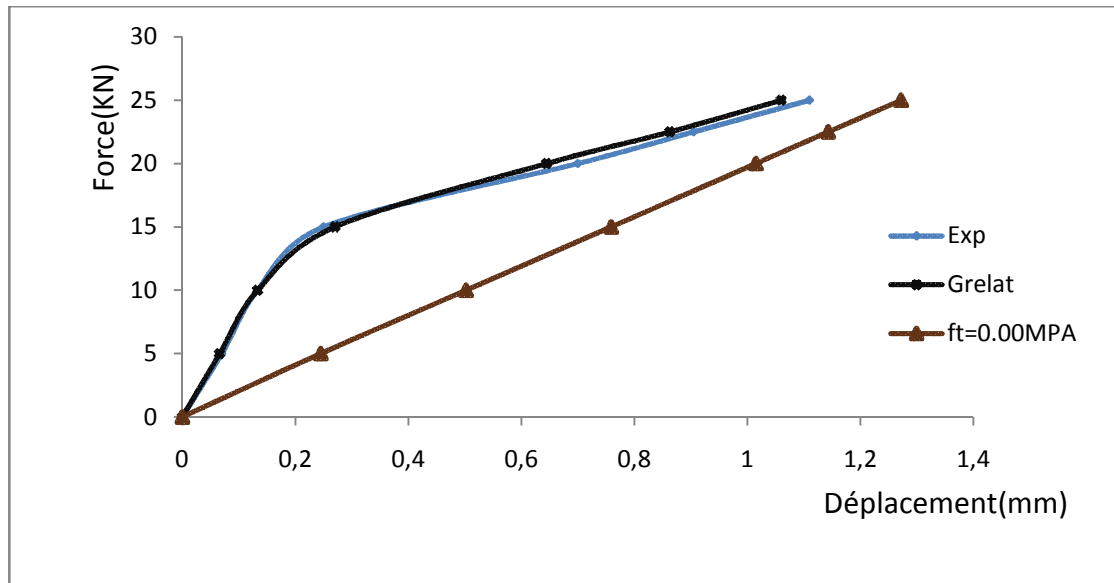


Figure 4.2a: Comparaison essai-calcul pour la poutre de Mazars.

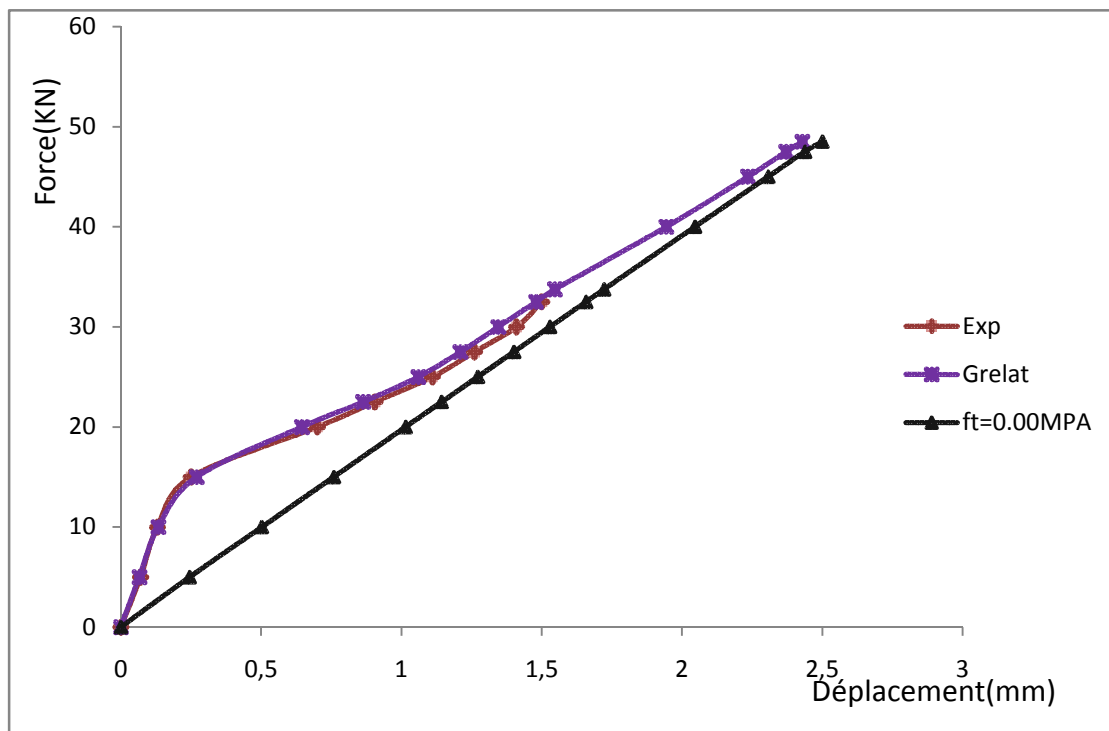


Figure 4.2b: Comparaison essai-calcul pour la poutre de Mazars.

La courbe obtenue en utilisant le modèle de Grelat approche bien les points expérimentaux. En négligeant complètement le béton, on sous estime nettement la rigidité de la poutre. Les déplacements, ainsi calculés, sont largement surestimés par rapport aux valeurs expérimentales, ceci met en évidence la contribution du béton tendu dans la rigidité de la poutre. Cependant, cette contribution diminue progressivement et devient négligeable à l'approche de la charge maximale

### 4.3: Etude de l'essai du poteau de Low\_Moehle:

#### 4.3.1: Présentation de l'essai de Low\_Moehle:

Il s'agit d'un poteau en béton armé de hauteur 514.4 mm, encasté à sa base, soumis à une charge verticale constante  $N=44.5$  kN fixe et une charge horizontale variable  $F$  croissante jusqu'à la rupture. Les principales caractéristiques des matériaux utilisés sont dans les tableaux 4.1a et 4.1b:

| Caractéristiques du béton                            |                  |
|------------------------------------------------------|------------------|
| Module d'élasticité $E$ (MPa)                        | $33 \times 10^3$ |
| Coefficient de poisson                               | 0.2              |
| Résistance en compression $f_{cj}$ (MPa)             | 42.13            |
| Résistance à la rupture en compression du béton(MPa) | 44               |
| Résistance en traction $f_{tj}$ (MPa)                | 3.05             |

Tableau 4.1a: Caractéristiques du béton.

| Caractéristiques des aciers                                          |                   |                                                |                   |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------------|-------------------|
| Les aciers constituant le 1 <sup>er</sup> et le 3 <sup>ème</sup> lit |                   | Les aciers constituant le 2 <sup>ème</sup> lit |                   |
| Module d'élasticité(MPa)                                             | $200 \times 10^3$ | Module d'élasticité(MPa)                       | $200 \times 10^3$ |
| Coefficient de poisson                                               | 0.3               | Coefficient de poisson                         | 0.3               |
| Limite d'élasticité(MPa)                                             | 465.1             | Limite d'élasticité(MPa)                       | 444               |
| Résistance à la rupture(MPa)                                         | 500               | Résistance à la rupture(MPa)                   | 500               |

Tableau 4.1b: Caractéristiques des aciers.

La géométrie du poteau et de la section transversale est représentée dans la figure 4.3.

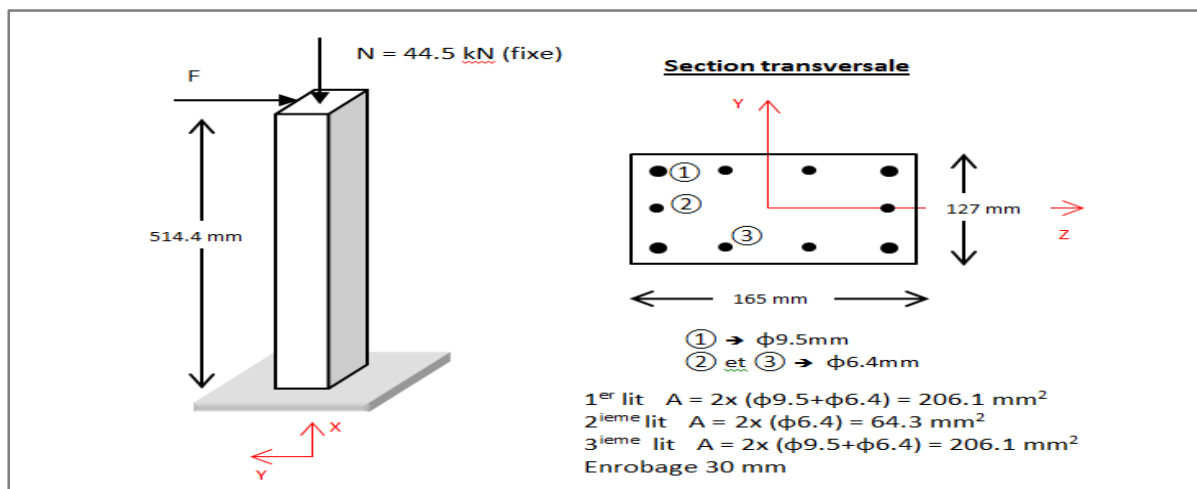


Figure 4.3: Caractéristiques du poteau de Low\_Moehle [69].

#### 4.3.2: Evaluation de l'effet du tension stiffening.

Pour cet essai, nous avons également effectué deux calculs:

- a- Un calcul en négligeant complètement le béton tendu;
- b- un calcul en utilisant le modèle de Grelat pour le béton tendu.

La figure 4.4 présente les courbes charge-déplacement résultant des deux calculs comparés à la courbe expérimentale. On constate que la courbe de calcul, utilisant le modèle de Grelat, est nettement plus proche de la courbe expérimentale. Par contre, en négligeant complètement le béton tendu, les déplacements sont largement surestimés. Et ce pour un chargement situé entre les valeurs 5KN et 20KN environ. Cet effet de "tension stiffening" diminue nettement à l'approche de la charge maximale correspondant à la plastification des armatures.

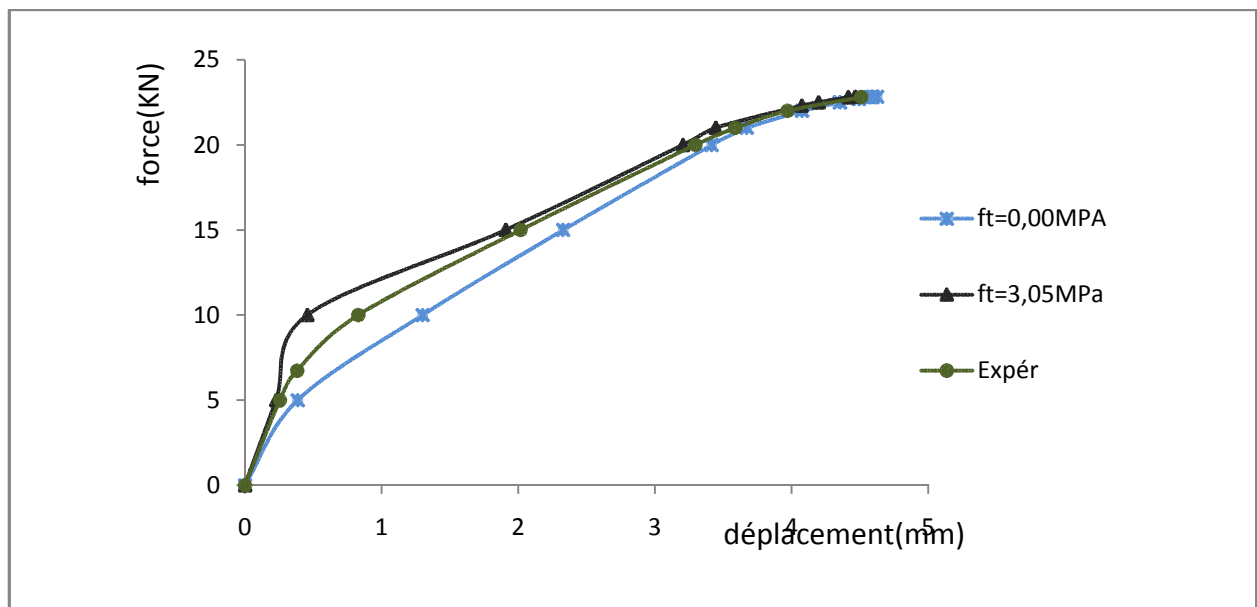


Figure 4.4: Comparaison essai- calcul par l'essai de Low\_moehle.

#### 4.3.3: Etude comparative de diverses lois de comportement du béton tendu.

Dans cette étude, nous avons effectué plusieurs calculs de l'essai de Low\_Moehle, en utilisant différentes lois de comportement du béton tendu, présentées dans les chapitres précédents. Chaque loi est définie par le paramètre  $itbt$  comme le résume le tableau suivant:

| Loi du béton tendu            | Itbt |
|-------------------------------|------|
| -loi élastique fragile        | 1    |
| -Loi avec branche descendante | 2    |
| -Loi de Grelat                | 3    |
| -Loi de Quast                 | 4    |
| -Loi de vecchio               | 5    |

Tableau 4.2: Valeurs de itbt pour les différentes lois utilisées pour le béton tendu.

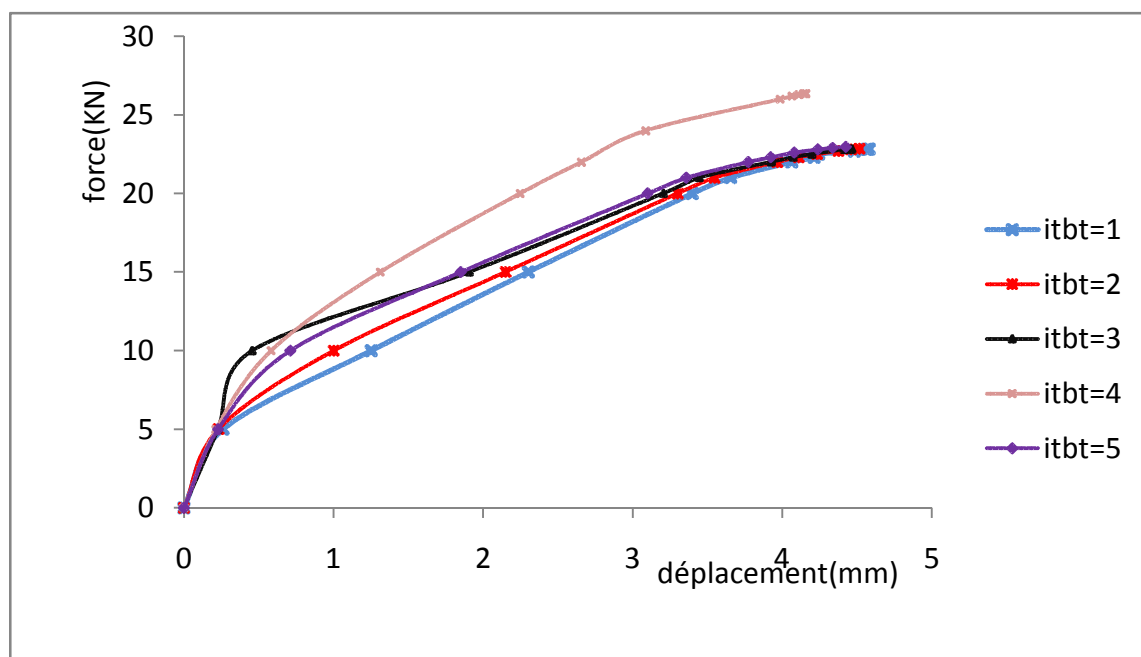


Figure 4.5: Comparaison des différentes lois de comportement.

La figure 4.5 présente les courbes charges-déplacements obtenues avec les différentes lois de comportement pour le béton tendu. On constate que la courbe obtenue avec la loi de Quast diverge nettement des autres courbes, et surestime largement la charge maximale. (Surestimation de l'ordre de 20%). Les lois avec  $itbt=2$  et  $itbt=5$  donnent des résultats satisfaisants et montrent un comportement légèrement moins rigide que celui obtenu avec la loi de Grelat. Les trois courbes se rejoignent au fur et à mesure qu'on s'approche de la charge maximale.

#### 4.3.4: Influence de la finesse de discrétisation.

Dans cette étude, nous avons effectués des simulations numériques de l'essai de Low\_Moehle, en utilisant le modèle de Grelat pour le béton tendu. Les calculs sont effectués en faisant varier le nombre d'éléments finis utilisés pour la discrétisation du poteau de Low\_Moehle.



La figure 4.6 présente les courbes charge-déplacement résultant des calculs avec 1, 2, 4, 8 et 16 éléments finis respectivement.

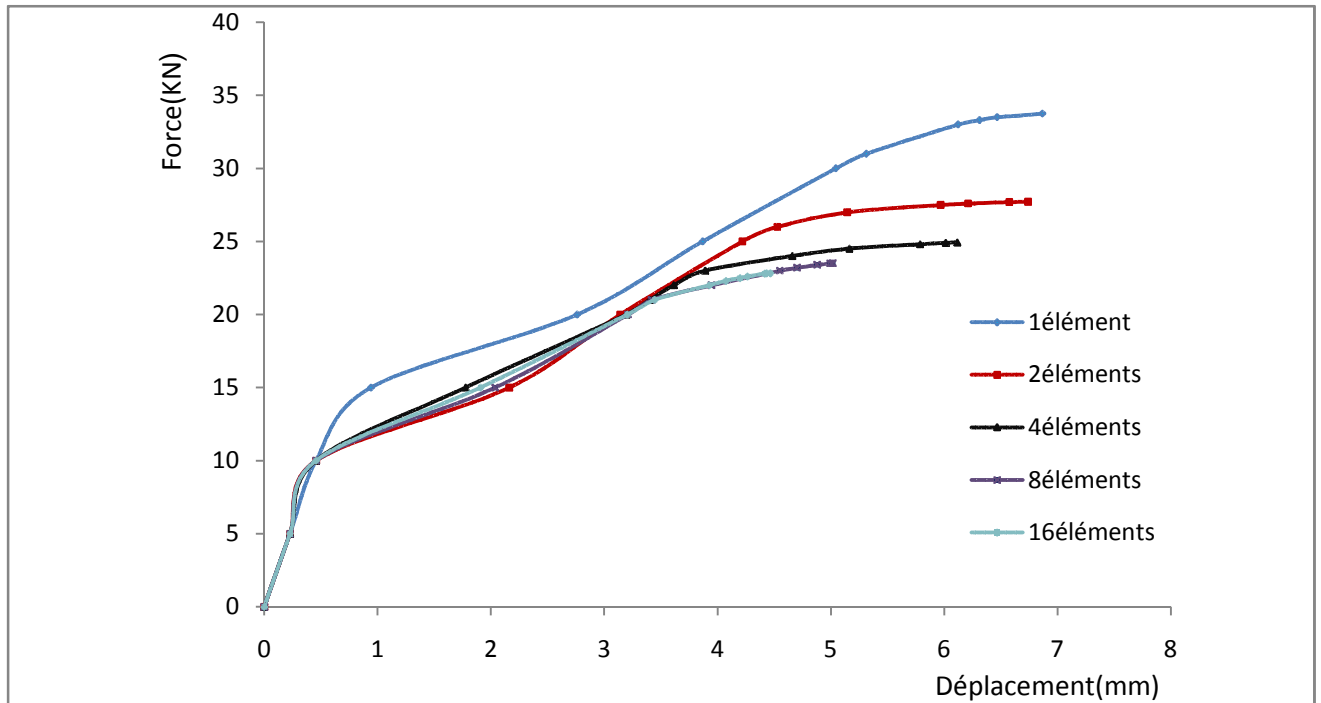


Figure 4.6: Influence de la finesse de discrétisation.

On constate une nette influence de la finesse de discrétisation sur les résultats des calculs. En effet, en utilisant une discrétisation en un ou deux éléments finis, le calcul surestime largement la valeur de la charge maximale et également la valeur du déplacement correspondant. Par ailleurs, il semble qu'une discrétisation en 8 éléments est un choix optimal pour obtenir des résultats satisfaisants en termes de charges et déplacements à la rupture.

Cette discrétisation correspond à des rapports :

$$l_e/l=0.125 \text{ et } l_e/h=0.506.$$

Avec:

$l_e$ = Longueur de l'élément fini ;

$l$ = Longueur total du poteau ;

$h$ = Hauteur de la section transversale.

#### 4.3.5: Influence de l'effort normal.

Dans cette série de simulation, nous avons effectué plusieurs calculs en faisant varier la valeur de l'effort normal agissant sur le poteau.

Le tableau 4.3 résume les valeurs de  $\sigma_n = N/S$ ,  $\sigma_n/f_{bc}$  correspondant aux différentes valeurs de l'effort N considérées dans les calculs. A noter que les différents calculs sont effectués en utilisant la loi de Grelat pour le béton tendu.

| $\sigma_n / f_{bc}$ | $\sigma_n = N/S$ (MPa) | N (KN)  |
|---------------------|------------------------|---------|
| 0.00                | 0                      | 0.00    |
| 0.05                | 2.106                  | 44.142  |
| 0.1                 | 4.213                  | 88.283  |
| 0.3                 | 12.639                 | 264.850 |
| 0.5                 | 21.065                 | 441.417 |

Tableau 4.3: Différentes valeurs de l'effort normal considérées.

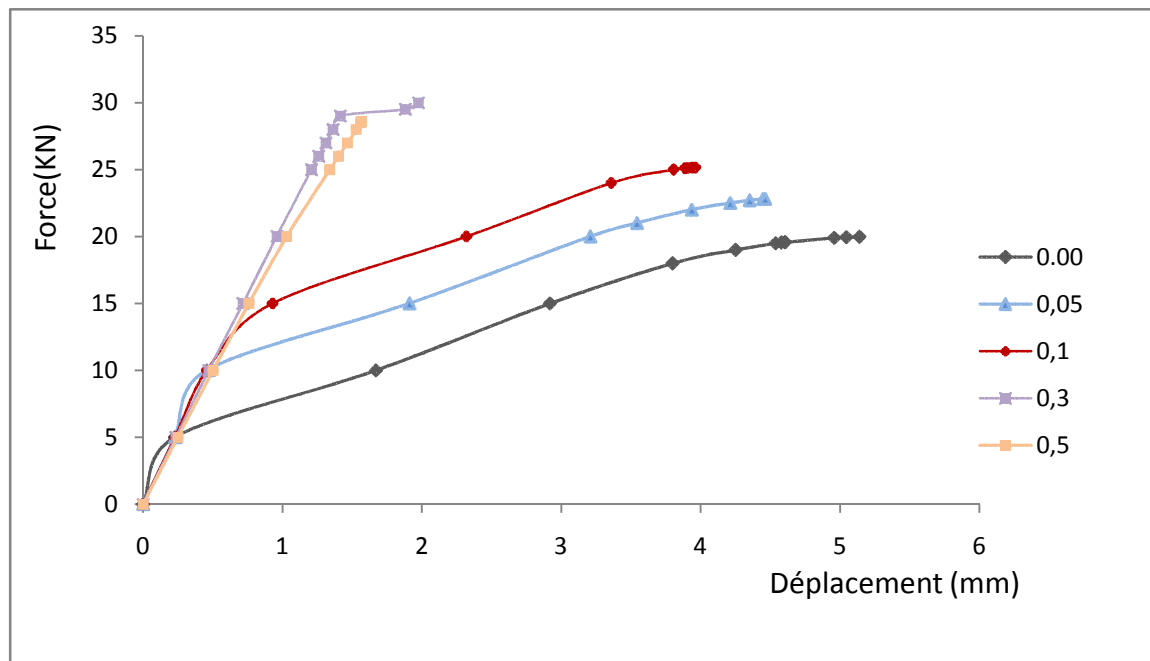


Figure 4.7: Influence de l'effort normal.

Les résultats des calculs sont présentés dans la figure 4.7:

On constate que la charge de rupture augmente avec l'intensité de l'effort normal. Par ailleurs, on constate que l'effet du "tension stiffening" diminue nettement avec l'augmentation de l'effort normal. En effet pour des valeurs de  $\sigma_n/f_{bc} \geq 0.1$  l'effet du "tension stiffening" devient négligeable.

#### 4.3.6: Influence du pourcentage des armatures longitudinales.

Le tableau 4.4 résume les valeurs du pourcentage et sections des armatures utilisées dans cette série de calculs. Les courbes charges-déplacements obtenues sont présentées (avec deux échelles différentes) dans les figures 4.8a et 4.8b.

Avec:  $A_{\text{béton}} = 165 \times 127 = 20955 \text{ mm}^2$

| $w = A_s / B_{\text{éton}} (\%)$ | $A_{\text{Acier}} (\text{mm})$ | $A_s (1^{\text{er}} \text{lit}) (\text{mm})$ | $A_s (2^{\text{e}} \text{lit}) (\text{mm})$ | $A_s (3^{\text{e}} \text{lit}) (\text{mm})$ |
|----------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 0,08                             | 16,76                          | 7,25                                         | 2,26                                        | 7,25                                        |
| 0,8                              | 167,64                         | 72,5                                         | 22,64                                       | 72,5                                        |
| 2,00                             | 419,10                         | 181,3                                        | 56,5                                        | 181,3                                       |
| 4,00                             | 838,2                          | 362,6                                        | 113                                         | 362,6                                       |

Tableau 4.4: Pourcentage d'armatures.

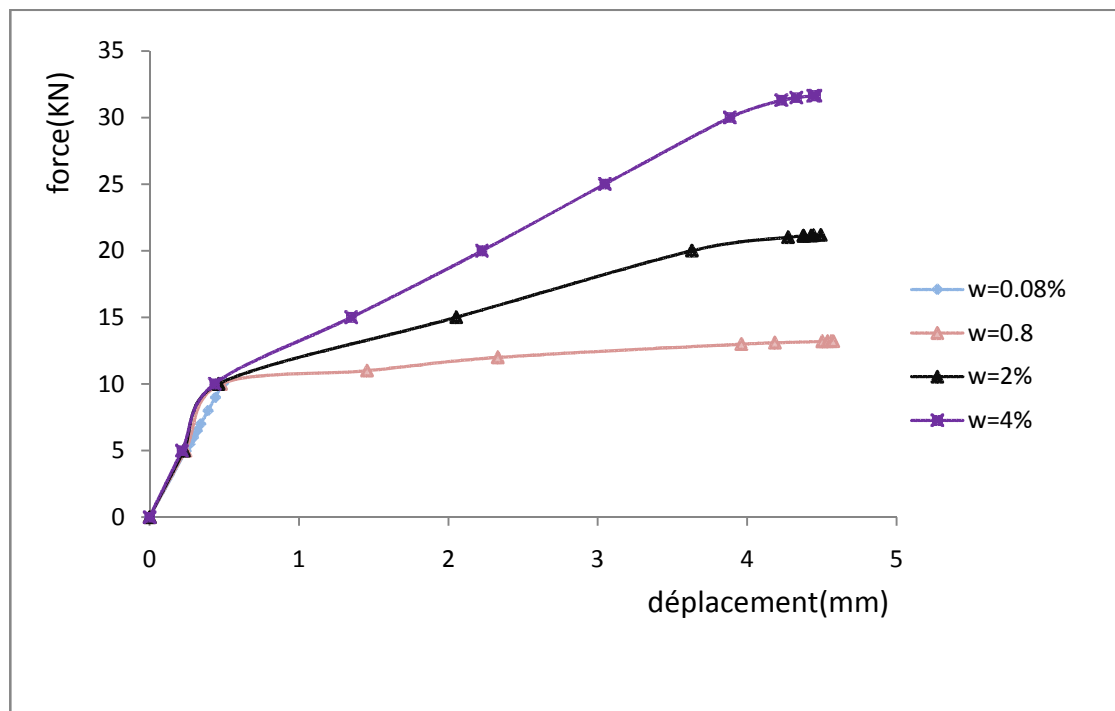


Figure 4.8a Influence du pourcentage d'aciers (échelle 0 à 35KN).

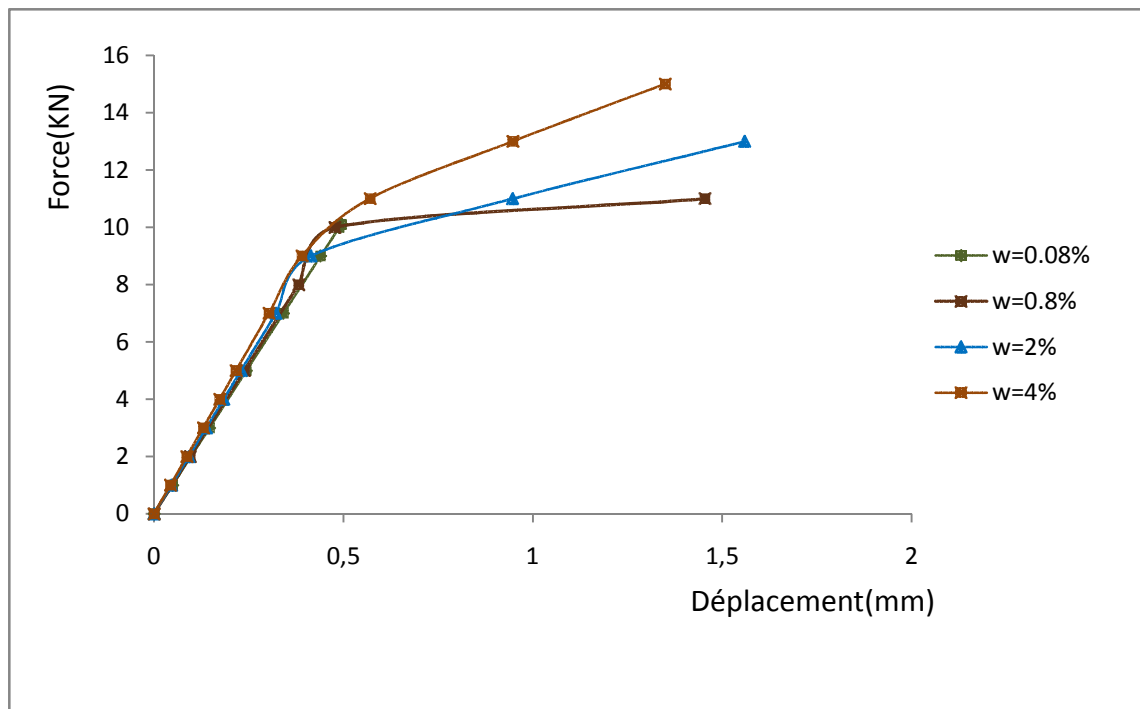


Figure 4.8b: Influence du pourcentage d'aciers (échelle 0 à 15kN).

Les résultats obtenus montrent que le pourcentage d'aciers répartis sur la section influe d'une manière substantielle sur l'effet du "tension stiffening" qui apparaît surtout entre les charges de 5kN et 10kN. On constate que pour un pourcentage d'aciers de 0.08% la section est fragile et sa résistance ne dépasse pas 10kN. Cela a montré que plus le pourcentage d'aciers augmente plus la résistance de la structure augmente. On remarque aussi que jusqu'à un effort de 10kN les différents pourcentages d'aciers nous donnent presque les mêmes déformations. Par contre à partir de cette force une différence sensible apparaît entre les différents pourcentages d'aciers. Plus le pourcentage augmente plus la résistance augmente. L'effet du "tension stiffening" diminue avec l'augmentation du pourcentage d'aciers longitudinaux.

#### 4.4: Conclusion:

Le béton présente des performances très faibles en traction, et même sous l'effet des faibles chargements il a un comportement fragile. Cependant, il est nécessaire de prendre en considération le béton tendu fissuré car celui-ci joue un rôle non négligeable dans la rigidité de la structure. Il ressort de cette étude que le fait de négliger l'effet du "tension stiffening" n'a pas d'influence sur l'estimation de la résistance à la rupture mais conduit à une surestimation des déformations. Or dans un calcul parasismique, surestimer les déformations conduit à surestimer la ductilité ce qui peut être dangereux pour la sécurité vis-à-vis du séisme.

Par ailleurs, il semble que la loi avec branche descendante, la loi de Vecchio ainsi que la loi de Grelat permettent une évaluation correcte de l'effet du "tension stiffening" dans les calculs des structures en béton armé.

Notons également qu'une discrétisation correspondant aux rapports  $l_e/l = 0,125$  et  $l_e/h = 0,5$  environ, constitue un choix optimal dans la simulation des éléments d'ossatures en béton armé.

### Conclusions générales:

Le béton a une faible résistance en traction et se fissure même sous faibles chargements. Cependant, dans les structures en béton armé, il est bien établi que le béton tendu, entre les fissures, contribue d'une façon non négligeable dans la rigidité des éléments. C'est l'effet du "tension stiffening".

La revue bibliographique nous a montré que la prise en compte de l'effet du "tension stiffening", dans le calcul des éléments d'ossatures en béton armé, peut se faire en utilisant soit des lois fictives pour l'acier tendu soit des lois fictives pour le béton tendu. Ces dernières peuvent être "intrinsèques" ou influencées par la déformation de l'acier tendu.

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la modélisation de l'effet du "tension stiffening" en utilisant des lois fictives pour le béton tendu, telles que:

- La loi élastique fragile ;
- La loi avec branche descendante linéaire ;
- La loi de Grelat ;
- La loi de Quast ;
- La loi de Vecchio.

Ces lois sont intégrées dans un programme informatique de calcul permettant la simulation du comportement non linéaire, jusqu'à rupture, des éléments d'ossatures en béton armé.

Le béton présente des performances très faibles en traction, et même sous l'effet des faibles chargements il a un comportement fragile. Seulement il est nécessaire de prendre en considération le béton tendu fissuré car celui-ci joue un rôle non négligeable dans la rigidité de la structure. Il ressort de cette étude que le fait de négliger l'effet du "tension stiffening" n'a pas d'influence sur l'estimation de la résistance à la rupture mais conduit à une surestimation des déformations. Or dans un calcul parasismique, surestimer les déformations conduit à surestimer la ductilité ce qui peut être dangereux pour la sécurité vis-à-vis du séisme. Par ailleurs, il semble que la loi avec branche descendante, la loi de Vecchio ainsi que la loi de Grelat permettent une évaluation correcte de l'effet du "tension stiffening" dans les calculs des structures en béton armé.

Notons également qu'une discrétisation correspondant aux rapports  $l_e/l = 0,125$  et  $l_e/h = 0,5$  environ, constitue un choix optimal dans la simulation des éléments d'ossatures en béton armé.

### Perspectives:

Dans les développements futurs à la présente étude, on peut considérer les points suivants:

- Introduction des déformations dues à l'effort tranchant;
- Etude de l'influence des effets différés sur la fissuration du béton et donc sur l'effet du "tension stiffening";
- Prise en compte de l'adhérence acier-béton;
- Prise en compte de l'influence du chargement cyclique sur la fissuration du béton.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

- 01: Ghannoum .W.M, (1998), «*Size effect on shear strength of reinforced concrete beams*».mémoire de master école normale supérieure de Cachan.
- 02: SARGIN.M (1971), «stress-strain relationships for concrete and the analysis on the Structural concrete section», S.M study n°4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada.
- 03: Fuentes. A, (2005), «*Béton armé, fissuration – flèche* », office des publications universitaires. Alger
- 04: Kachi .M. S, (1997), «*Calcul non linéaire, jusqu'à rupture, d'une section en béton armé de fibre métalliques*», thèse de magister, Institut de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
- 5: B.A.E.L. Règles et techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en Béton armé aux états limite, fascicule 62 du CCTG, règlement français
- 6: Peterson P.E., «Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials», Report TVBM-1006; Lund institute of technology, Sweden, 1981.
- 7: KADLECEK.V, SPETLA.Z (1967) « Effect of size and shape of test specimens on the direct tensile strength of concrete »Bulletin RILEM n°36, pp175 – 184.
- 8: LEFEVRE.C, (1963), <<Méthode d'essai de traction directe du béton, applicable à des matériaux divers. >> Annales ITBTP, n°187-188, pp691-696, juill-aout 1963.
- 9: L'HERMITE.R(1973), <<Influence de la dimension absolue sur la résistance à la flexion.>> Annales ITBTP, n° 309-310,pp39-41.
- 10: Mazars J., «Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non -linéaire et à la rupture du béton de structure», Thèse de docteur d'état. Université Pierre et Marie Curie (paris VI), France, 1984.
- 11: Hughes B. P., Chapman G. P., «The complète stress-strain curve for concrete in tension», Bulletin de la RILEM, 30, 95-97, 1966.
- 12 : Coenen J., «Equations de comportement du béton armé et application au calcul des structures par éléments finis», Thèse de doctorat, Université Libre de Liège, (1978).
- 13: Bazant J.P., OH B.H., «Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams», Proc. ACI, 81, 268-278, (1984).
- 14: Zhen-Hai G. and Xiu-Qin Z., «Investigation of complete stress-deformation curves for concrete in tension», ACI Materiel Journal, July – August, 1987.
- 15: [RIL78-2] RILEM, «Essai portent sur l'adhérence des armatures du béton-1- Essai par traction», Recommandation RILEM/CEB/FIB – RC6, Matériaux et constructions, Vol. 6, N° 32, 1978.

- 16: [RIL78-1] RILEM, «Essai portant sur l'adhérence des armatures du béton-1- Essai par flexion», Recommandation RILEM/CEB/FIB - RC5, Matériaux et constructions, Vol. 6, N° 32, 1978.
- 17: Comité Euro -international du Béton, «Bond Action and Bond Behaviour of Reinforced – State of the Art Report», Bulletin d'information, N°151, Avril 1982.
- 18: Giuriani E., «Experimental investigation on the bond-slip Law of deformed bar in concrete», I.A.B.S.E, Colloquium on «advanced Mechanics of Reinforced concrete», Find Report, Delft, Holland, December, pp.121, 141, 1981.
- 19: Martin H., «Die Haftung der bewerung im stabil beton». Rades -rundschau, 1967.
- 20: Ferguson P.M., «Bond stress the state of the art», A.C.I Journal, vol.63, N°11, 1966.
- 21: Lutz L.A., Gergely P., «Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete», A.C.I. Journal, vol. 64, No. 11, 1967.
- 22: Eligenhaussen R., Popov E. P. and Bertero V. V., «Local bond stress-slip relationships of deformed bar under generalized excitations», Rep. No. UCB/EERC 83-23, Earthquake Engineering Research Centre, Report No. UCB/EERC – 83/23, Univ. of California at Berkeley, Berkeley, 129 pp., October 1983.
- 23: Ferguson P.M., Turpin R.D. and Thompson J.N., «Minimum Bar Spacing as a function of Bond and Shear Strength», A.C.I Journal, Proceedings vol.50, No.10, pp. 869-888, June 1954.
- 24: Base G. D. (1978), Short Course on Design of Concrete Structures for Serviceability, Lecture Notes, Concrete Institute of Australia, Sydney.
- 25: Warner, R. F., Rangan B. V., Hall A. S. and Faulkes, K.A. (1998), Concrete Structures, Addison Wesley Longman Australia Pty. Ltd., South Melbourne , Australia.
- 26: Whittle, R. and Jones, T. Technical Report No. 59: Influence of tension stiffening On detection of reinforced concrete structures. The Concrete Society, Camberley, 2004.
- 27: WENKENBACH, IAN (2011) Tension stiffening in reinforced concrete members with large diameter reinforcement, DURHAM these, Durham University.
- 28: Neville, A.M. Properties of Concrete, Fourth Edition. John Wiley & Sons, 1996.
- 29: Wilby, C.B. Concrete Materials and Structures. University Press, 1991.
- 30: Gilbert, R. and Ranzi, G. Time-dependent behaviour of concrete structures. Spon Press, 2010.
- 31: Neville, A.M. Properties of Concrete, Fourth Edition. John Wiley & Sons, 1996.



- 32: Subramanian, S., Mallikarjun, V., Rao, B.N., Manohar, S. and Srinivasan, N. Use of admixtures for reducing autogenous shrinkage of concrete. In *Innovations and developments in concrete materials and construction: proceedings of the International Conference held at the University of Dundee, Scotland, UK on 9-11 September 2002*, volume 1, page 235. Thomas Telford, 2002.
- 33: Scanlon A., «Time-Dependent Deflexion Concrete Slabs», thesis presented to the University of Alberta, at Edmonton, Alberta, Canada, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, in 1971.
- 34: Scanlon A., Murray D.W., «An Analysis to Determine the Effects of Cracking in Reinforced Concrete Slabs», *Proceedings of the Speciality Conference on the Finite Element Method in Civil Engineering*, Canada, Engineering Institute of Canada, McGill University, Montreal, pp. 841-867, 1972.
- 35: Scanlon A., Murray D.W., «Time-dependent reinforced concrete slab deflections», A.S.C.E., *Journal of Structural Division*, Vol 100 No ST9, pp 1911-1924, September 1974.
- 36: Gilbert R.I., Warner R.F., «Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs with Tension Stiffening», UNICIV Report No. R-167, School of Civil Engineering, University of New South Wales, Kensington, Australia, January 1977.
- 37: Gilbert R.I., Warner R.F., «Tension stiffening in reinforced concrete slabs», A.S.C.E., *Journal of Structural Division*, V. 104, ST12, pp.1885-1900, Dec. 1978.
- 38: Bergan P. G., Holland I., «Non linear finite element analysis of concrete structures», *Comp. Meth. App. Mech. Engng.*, 17/18, 443-467, 1979.
- 39: Kulicki J. M., Kostem C. N., «Inelastic response of prestressed concrete beams», *Mem. A.I.P.C.*, 35(II), 101-112, 1975.
- 40: Chow C. O., Hinton E., Abdel Rahman H. H., «Analysis of creep and shrinkage effects in reinforced concrete beams», *Proc. of Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Split, Yugoslavia, 371-387, 1984.
- 41: Chow C. O., «Nonlinéaire analysis of creep and shrinkage effects on reinforced concrete beams», M. Sc. Thesis, University of Wales, Swansea, 261pp, (1984).
- 42: Lin C. S., Scordelis A. C., «Nonlinear analysis of R.C shells of General Form», A.S.C.E., *Journal of Structural Division*, Vol. 101, No ST3, pp 523-538, Mar. 1975.
- 43: Thomas T.C. Hsu, Taijun Wang., «nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models», *computers and structures* 79(2001)2781-2791.
- 44: Belarbi A., Hsu T. T. C., «Constitutive laws of concrete in tension and reinforced bars stiffened by concrete», *ACI Structural Journal*, pp. 465-474, July-August 1994.
- 45: Tamai S., Shima H., Izumo J., Okamura H., «average stress-strain relationship in post yield range of steel bar in concrete», *Concrete Library of JSCE* 11, 117-129, 1987.

- 46: Fields K., Bischoff P. H., «Tension Stiffening and Cracking of High-Strength Reinforced Concrete Tension Members», ACI Structural Journal, V. 101, No. 4, July-August 2004.
- 47: Gupta A, Maestrini S. R. «Tension-stiffness model for reinforced concrete bars», ASCE Journal of Structural Engineering, 116(3), 769–91,1990.
- 48: Comité Euro -international du Béton, «CEB–FIP MODEL CODE 1990», (Final version published by Thomas Telford Ltd., London), 465 p., 1993.
- 49: Stramandinolia R. S. B., La Rovereb H. L., «An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members», Engineering Structures 30, 2069-2080, 2008.
- 50: SAAD M, (2011) « Influence du pourcentage d’acier sur le comportement post fissuration du béton armé en traction » Thèse de docteur d’état. Université MOULOUD MAMMERI de Tizi ousou.
- 51: Grelat A., «Calcul non linéaire des ossatures en béton armé», Thèse de Docteur ingénieur, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), France, 1978.
- 52 : Quast U., «Rechenansatze in Form einer Spannungsdehnungsbeziehung für das Mitwirken des Betons in der gerissenen Zugzone von Stahlbetonquerschnitten», Bericht aus dem Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der T.U Braunschweig, 64pp., 1980.
- 53: Quast U., «Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone», Beton Stahlbetonb., 76(10), 247-250, 1981.
- 54: Espion B., «Contribution à l’analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé», Thèse de Doctorat ès sciences, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- 55: Carreira D. J., Chu K. H., «Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression», ACI Journal, Proceedings V. 82, No. 6, pp. 797-804, Nov.-Dec. 1985.
- 56: Carreira D. J., Chu K. H., «Stress-Strain Relationship of reinforced Concrete in Tension», ACI Journal, Proceedings V. 83, No. 1, pp. 21-28, Jan.-Fev. 1986.
- 57: Prakhya G. K. V., Morley C. T., «Tension stiffening and moment-curvature relations of reinforced concrete elements », ACI Journal, pp. 597-605, September-october 1990.
- 58: «The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear», ACI Journal, pp 219-231, March-April 1986.
- 59: Kirschner U., Collins M. P., «Investigating the behavior of reinforced concrete shell elements» Publ. No. 86-09, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Toronto, 1986.
- 60: Collins M. P., Mitchell D., «Prestressed concrete basics», Canadian Prestressed Concrete Institute, Ottawa, 1987.

- 61: Abrishami H.H., Mitchell D., «Influence of splitting cracks on tension stiffening», *ACI Structural Journal*, p. 703-710, November-December 1996.
- 62: Bentz E., C., «Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments», *Journal of Structural engineering*, Vol. 131, N° 9, pp.1422-1425, 9/2005.
- 63: Trinh J., «Comportement de panneaux de béton armé sollicité en traction simple dans son plan», Etude bibliographique pour l'E.D.F-S.E.P.E.N, Rapport du S.E.S. du C.E.B.T.P., France, 1986.
- 64: Johnson A. I., «Deformation of reinforced concrete», *International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE) Publications*, Vol. 11, pp. 253-290, 1951.
- 65: Palotas L., «Beitrage zur Berechnung der Riessicherheit», *Mém. ass. int. Ponts Charp.*, Vol.26, P.365-397, 1966.
- 66: Comité Euro -international du Béton, «Fissuration», *Bulletin d'information*, N° 61, Paris, 1967.
- 67: Comité Euro -international du Béton, «Fissuration», *Bulletin d'information*, N° 89, Paris, 1973.
- 68: Bruggeling A. S. G., «An Engineering Model for Structural Concrete», *IABSE Colloquium*, pp 27-36, 1990.
- 69: Van der Veen C. «Cryogenic Bond Stress-Slip Relationship», *Ph. D. thesis*, Delft University of Technology, 1990.
- 70: Rabich R., «Beitrage zur Berechnung der Formanderun -Gen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rissbildung», *Heft 4*, P. 184-187, 1969.
- 71: Espion B., Provost M., Halleux P., «Rigidité d'une zone tendue de béton armé», *Matériaux de Construction*, Vol. 18, N° 105, pp. 185-191, Mai - Juin 1985.
- 72: Espion B., «Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé», *Thèse de Doctorat ès sciences*, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- 73: Comité Euro-international du Béton, «CEB-FIP MODEL CODE 1990», (Final version published by Thomas Telford Ltd., London), 465 p., 1993.
- 74: Rao P.S., «Die Grundlagen zur Brechung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkraft», *D.A.F.St.*, Berlin, Heft 177, 1976.

- 75: Rostasy F.S., Koch R., Leonard F., «Zur mildes tue Wehrung für zwang von aussäen wanden out stahlleicht beton», (Regarding minimum reinforcement against pressure on exterior walls of reinforced light concrete), Buletten N° 267, D.A.F.St, Berlin, 1976, pp.5-83, 1976.
- 76: Favre R., Koprna M., Putallaz J. C., «Deformation of concrete structures. Theoretical basis for the calculation», AZIPC periodicals, Zurich, S-16/81, 1981.
- 77: Noaskowski P., KUPPER H., «Versteifende Mitwirkung des Betons von turmatigen Bauwerken», Beton Stahlbeton, Helft 10, 1981, P.241-246, 1981.
- 78: [CEB85] Comité Euro -international du Béton, «Fissuration et déformation», Bulletin d'information, N°158, 1985.
- 79: In (S.Limkatanyu et A.Samakrattakit, <<Frame élément including effects of reinforced slippage for non linear analysis of r/c structures>>, November 2002).

**Annexe A<sub>1</sub>****Fichier de données :**

Début\_titre

\$

\$ Poutre de Mazars avec béton tendu.

\$ Discrétisation en 8 éléments.

\$

Fin titre

Données\_globales

9 8 1 1 1 2 2 10 10 2 2

Éléments

1 1 1 1 2

2 1 1 2 3

3 1 1 3 4

4 1 1 4 5

5 1 1 5 6

6 1 1 6 7

7 1 1 7 8

8 1 1 8 9

Coordonnées

1 0. 0.

2 175. 0.

3 350. 0.

4 525. 0.

5 700. 0.

6 825. 0.

7 1050. 0.

8 1225. 0.

9 1400. 0.

Section

1 220. 1 1

150. 150. 0. 220. 1

30. 226.2 2

Conditions limites

1 110 0. 0. 0.

9 010 0. 0. 0.

## Matériaux

|   |   |         |     |      |      |       |        |      |        |    |    |
|---|---|---------|-----|------|------|-------|--------|------|--------|----|----|
| 1 | 2 | 30200.  | 0.2 | 32.3 | 30.  | 0.002 | 0.0035 | 3.05 | 0.0005 | 2  | 2  |
| 2 | 3 | 210000. | 0.3 | 400. | 460. | 0.1   | 0.     | 0.   | 0.     | 0. | 0. |

## Charges

1 0

## Charges nodales

1

5 0. -10000. 0.

## Incrément

|      |      |     |   |
|------|------|-----|---|
| 1    | 0.05 | 100 | 2 |
| 1    | 0.05 | 100 | 2 |
| 1    | 0.05 | 100 | 2 |
| 1    | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.5  | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.25 | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.1  | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.1  | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.05 | 0.05 | 100 | 2 |
| 0.05 | 0.05 | 100 | 2 |

**Annexe A<sub>1</sub>****Fichier de sortie :**

==&gt; Début\_titre

\$

\$ Poutre de Mazars avec béton tendu.

\$ Discrétisation en 8 éléments.

\$

Fin\_titre

==&gt; données globales:

nombre total des points nodaux = 9

nombre total d éléments = 8

nombre de types de sections = 1

nombre max de trapèzes/section = 1

nre max de lits d aciers/section = 1

nombre des nœuds ayant des CL = 2

nombre de groupes de matériaux = 2

nbre max de propriétés de matériaux = 10

nombre de nœuds par élément = 2

nbre d incréments de chargement = 10

type d algorithme de résolution = 2

nombre de ddl/nœud = 3

nbre de types chargements = 2

==&gt; Connectivites nodales et types de sections:

Element num\_section numeros noeuds

-----

1 1 1 1

2

2 1 1 2

3

3 1 1 3

4

4 1 1 4

5

5 1 1 5

6

6 1 1 6

7

7 1 1 7

8

8 1 1 8

9

==> Coordonnées nodales:

| Nœud | abscisse    | ordonnée    |
|------|-------------|-------------|
| 1    | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
| 2    | 0.17500E+03 | 0.00000E+00 |
| 3    | 0.35000E+03 | 0.00000E+00 |
| 4    | 0.52500E+03 | 0.00000E+00 |
| 5    | 0.70000E+03 | 0.00000E+00 |
| 6    | 0.82500E+03 | 0.00000E+00 |
| 7    | 0.10500E+04 | 0.00000E+00 |
| 8    | 0.12250E+04 | 0.00000E+00 |
| 9    | 0.14000E+04 | 0.00000E+00 |

==> nombre de types de sections= 1

| Type section | nombre trapèze | hauteur section |             |             |             |
|--------------|----------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|
| 1            | 1              | 220.0000        |             |             |             |
| n° trapèze   | b_inf          | b_sup           | zi_trapèze  | zs_trapèze  | n° matériau |
| 1            | 0.15000E+03    | 0.15000E+03     | 0.00000E+00 | 0.22000E+03 | 1           |
| 1            | 0.30000E+02    | 0.22620E+03     | 2           |             |             |
| zi_trapèze ( | 1              | 1)=             | -110.0000   |             |             |
| zs_trapèze ( | 1              | 1)=             | 110.0000    |             |             |
| z_acier (    | 1              | 1)=             | -80.00000   |             |             |

==> Conditions aux limites (CL):

| noeud | code | valeurs fixees |             |             |
|-------|------|----------------|-------------|-------------|
| 1     | 110  | 0.00000E+00    | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |
| 9     | 10   | 0.00000E+00    | 0.00000E+00 | 0.00000E+00 |

==> Propriétés des groupes de matériaux:

| Groupe | module young | module tran | G        | sigmay   | H'       |          |          |          |          |          |
|--------|--------------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1      | 2            | 0.30E+05    | 0.20E+00 | 0.32E+02 | 0.30E+02 | 0.20E-02 | 0.35E-02 | 0.30E+01 | 0.50E-03 | 0.20E+01 |
|        |              |             |          |          |          |          |          |          |          | 0.20E+01 |
| 2      | 3            | 0.21E+06    | 0.30E+00 | 0.40E+03 | 0.46E+03 | 0.10E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
|        |              |             |          |          |          |          |          |          |          | 0.00E+00 |

==> indice du chargement nodal = 1

==> indice du chargement réparti = 0



```

-----
Facteur de chargement:      4.850000
Tolérance de convergence:   5.0000001E-02
Nbre maximal d'itérations:  100
Paramètre de sortie:       2

```

\*\*\*\*\* Résultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Déplacements nodaux:

| Nœud | depl Ux      | depl Uy      | rotation teta |
|------|--------------|--------------|---------------|
| 1    | 0.00000E+00  | 0.00000E+00  | -0.50049E-02  |
| 2    | -0.31413E-03 | -0.87082E+00 | -0.49187E-02  |
| 3    | 0.44003E-01  | -0.16564E+01 | -0.40026E-02  |
| 4    | 0.13221E+00  | -0.22178E+01 | -0.23511E-02  |
| 5    | 0.25918E+00  | -0.24294E+01 | -0.16721E-05  |
| 6    | 0.35424E+00  | -0.23176E+01 | 0.17544E-02   |
| 7    | 0.47493E+00  | -0.16579E+01 | 0.40068E-02   |
| 8    | 0.51924E+00  | -0.87156E+00 | 0.49229E-02   |
| 9    | 0.51893E+00  | 0.00000E+00  | 0.50091E-02   |

==> Réactions aux appuis:

| Nœud | Réact Rx    | Réact Ry    | Moment M    |
|------|-------------|-------------|-------------|
| 1    | 0.32045E-05 | 0.24250E+05 | 0.00000E+00 |
| 9    | 0.00000E+00 | 0.24250E+05 | 0.00000E+00 |

```

-----
Facteur de chargement   :  4.950000
Tolérance de convergence :  5.0000001E-02
Nbre maximal d'itérations :  100
Paramètre de sortie     :    2

```

AnnexeA<sub>2</sub>

## Fichier d'entrée:

Début\_titre

\$ Essai de Low\_Moehle 1987 cité par spacone.

\$ Console en béton armé, soumise à la flexion composée,

\$ discrétisation en 16 éléments avec la loi de Grelat.

Fin\_titre

Données\_globales

17 16 1 1 3 1 3 10 10 2 2

Eléments

|    |   |   |    |    |
|----|---|---|----|----|
| 1  | 1 | 1 | 1  | 2  |
| 2  | 1 | 1 | 2  | 3  |
| 3  | 1 | 1 | 3  | 4  |
| 4  | 1 | 1 | 4  | 5  |
| 5  | 1 | 1 | 5  | 6  |
| 6  | 1 | 1 | 6  | 7  |
| 7  | 1 | 1 | 7  | 8  |
| 8  | 1 | 1 | 8  | 9  |
| 9  | 1 | 1 | 9  | 10 |
| 10 | 1 | 1 | 10 | 11 |
| 11 | 1 | 1 | 11 | 12 |
| 12 | 1 | 1 | 12 | 13 |
| 13 | 1 | 1 | 13 | 14 |
| 14 | 1 | 1 | 14 | 15 |
| 15 | 1 | 1 | 15 | 16 |
| 16 | 1 | 1 | 16 | 17 |

Coordonnées

|    |         |    |
|----|---------|----|
| 1  | 0.      | 0. |
| 2  | 32.12   | 0. |
| 3  | 64.248  | 0. |
| 4  | 96.372  | 0. |
| 5  | 128.496 | 0. |
| 6  | 160.62  | 0. |
| 7  | 192.744 | 0. |
| 8  | 224.868 | 0. |
| 9  | 256.992 | 0. |
| 10 | 289.116 | 0. |
| 11 | 321.24  | 0. |
| 12 | 353.364 | 0. |
| 13 | 385.488 | 0. |
| 14 | 417.612 | 0. |
| 15 | 449.736 | 0. |
| 16 | 481.86  | 0. |
| 17 | 514.    | 0. |

## Section

1 127. 1 3  
 165. 165. 0. 127. 1  
 35. 206.1 2  
 63.5 64.30 3  
 92. 206.1 2

## Conditions\_limites

1 111 0. 0. 0.

## Matériaux

1 2 33000. 0.2 42.13 44. 0.002 0.0035 3.05 0.001 1 3  
 2 3 200000. 0.3 465.1 500. 0.010 0. 0. 0. 0. 0.  
 3 3 200000. 0.3 444.0 500. 0.010 0. 0. 0. 0. 0.

## Charges

1 0

## Charges\_nodales

1  
 17 -44500. 0. 0.

## Incrément

0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2

## Charges

1 0

## Charges\_nodales

1  
 17 0. -10000. 0.

## Incrément

0.5 0.05 100 2  
 0.5 0.05 100 2  
 0.5 0.05 100 2  
 0.4 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.1 0.05 100 2  
 0.13 0.05 100 2  
 0.02 0.05 100 2  
 0.03 0.05 100 2  
 0.0026 0.05 100 2

## Annexe A<sub>2</sub>

### Fichier de sortie

==> Début\_titre

\$

\$ Essai de Low\_Moehle 1987 cité par spacone.

\$ Console en béton armé, soumise à la flexion composée,

\$ discrétisation en 16 éléments avec la loi de Grelat.

Fin\_titre

==> données globales:

|                                     |   |    |
|-------------------------------------|---|----|
| Nombre total des points nodaux      | = | 17 |
| Nombre total d'éléments             | = | 16 |
| Nombre de types de sections         | = | 1  |
| Nombre max de trapèzes/section      | = | 1  |
| Nbre max de lits d'aciers/section   | = | 3  |
| Nombre des nœuds ayant des CL       | = | 1  |
| Nombre de groupes de matériaux      | = | 3  |
| Nbre max de propriétés de matériaux | = | 0  |
| Nombre de nœuds par élément         | = | 2  |
| Nbre d'incrément de chargement      | = | 10 |
| Type d'algorithme de résolution     | = | 2  |
| Nombre de ddl/nœud                  | = | 3  |
| Nbre de types chargements           | = | 2  |

==> Connectivités nodales et types de sections:

Élément num\_séction numéros nœuds

| Élément | num_séction | numéros nœuds |   |
|---------|-------------|---------------|---|
| 1       | 1           | 1             | 1 |
| 2       |             |               |   |
| 2       | 1           | 1             | 2 |
| 3       |             |               |   |
| 3       | 1           | 1             | 3 |
| 4       |             |               |   |
| 4       | 1           | 1             | 4 |
| 5       |             |               |   |
| 5       | 1           | 1             | 5 |
| 6       |             |               |   |
| 6       | 1           | 1             | 6 |
| 7       |             |               |   |
| 7       | 1           | 1             | 7 |
| 8       |             |               |   |
| 8       | 1           | 1             | 8 |
| 9       |             |               |   |

|    |   |   |    |
|----|---|---|----|
| 9  | 1 | 1 | 9  |
| 10 |   |   |    |
| 10 | 1 | 1 | 10 |
| 11 |   |   |    |
| 11 | 1 | 1 | 11 |
| 12 |   |   |    |
| 12 | 1 | 1 | 12 |
| 13 |   |   |    |
| 13 | 1 | 1 | 13 |
| 14 |   |   |    |
| 14 | 1 | 1 | 14 |
| 15 |   |   |    |
| 15 | 1 | 1 | 15 |
| 16 |   |   |    |
| 16 | 1 | 1 | 16 |
| 17 |   |   |    |

==> Coordonnées nodales:

| Nœud  | abscisse   | ordonnée   |
|-------|------------|------------|
| ----- |            |            |
| 1     | .00000E+00 | .00000E+00 |
| 2     | .32124E+02 | .00000E+00 |
| 3     | .64248E+02 | .00000E+00 |
| 4     | .96372E+02 | .00000E+00 |
| 5     | .12850E+03 | .00000E+00 |
| 6     | .16062E+03 | .00000E+00 |
| 7     | .19274E+03 | .00000E+00 |
| 8     | .22487E+03 | .00000E+00 |
| 9     | .25699E+03 | .00000E+00 |
| 10    | .28912E+03 | .00000E+00 |
| 11    | .32124E+03 | .00000E+00 |
| 12    | .35336E+03 | .00000E+00 |
| 13    | .38549E+03 | .00000E+00 |
| 14    | .41761E+03 | .00000E+00 |
| 15    | .44974E+03 | .00000E+00 |
| 16    | .48186E+03 | .00000E+00 |
| 17    | .51400E+03 | .00000E+00 |

==>Nombre de types de sections= 1

| Type section | nombre trapèze | hauteur section |
|--------------|----------------|-----------------|
| 1            | 1              | 127.000000      |

| N°trapèze | b_inf      | b_sup      | zi_trapèze | zs_trapèze | n° matériau |
|-----------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1         | .16500E+03 | .16500E+03 | .00000E+00 | .12700E+03 | 1           |
| 1         | .35000E+02 | .20610E+03 | 2          |            |             |
| 2         | .63500E+02 | .64300E+02 | 3          |            |             |
| 3         | .92000E+02 | .20610E+03 | 2          |            |             |

|              |   |     |              |
|--------------|---|-----|--------------|
| zi_trapèze ( | 1 | 1)= | -63.500000   |
| zs_trapèze ( | 1 | 1)= | 63.500000    |
| z_acier (    | 1 | 1)= | -28.500000   |
| z_acier (    | 2 | 1)= | 0.000000E+00 |
| z_acier (    | 3 | 1)= | 28.500000    |

==> Conditions aux limites (CL):

| Nœud | code | valeurs fixes                    |
|------|------|----------------------------------|
| 1    | 111  | .00000E+00 .00000E+00 .00000E+00 |

==> Propriétés des groupes de matériaux:

| Groupe | module young | module tran G | sigmay  | H'      |         |         |         |         |         |         |
|--------|--------------|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1      | 2            | .33E+05       | .20E+00 | .42E+02 | .44E+02 | .20E-02 | .35E-02 | .30E+01 | .10E-02 | .10E+01 |
| 2      | 3            | .20E+06       | .30E+00 | .47E+03 | .50E+03 | .10E-01 | .00E+00 | .00E+00 | .00E+00 | .00E+00 |
| 3      | 3            | .20E+06       | .30E+00 | .44E+03 | .50E+03 | .10E-01 | .00E+00 | .00E+00 | .00E+00 | .00E+00 |

==> indice du chargement nodal = 1

==> indice du chargement repart = 0

==> Charges\_nodales:

| Nœud | force Fx   | force Fy    | Moment     |
|------|------------|-------------|------------|
| 17   | .00000E+00 | -.10000E+05 | .00000E+00 |

=> Incrément

-----

Facteur de chargement : 2.282600  
 Tolérance de convergence : 5.000000E-02  
 Nbre maximal d'itérations : 100  
 Paramètre de sortie : 2

\*\*\*\*\* Résultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Déplacements nodaux:

| Nœud | depl Ux    | depl Uy     | rotation teta |
|------|------------|-------------|---------------|
| 1    | .00000E+00 | .00000E+00  | .00000E+00    |
| 2    | .73450E-01 | -.41198E-01 | -.25331E-02   |
| 3    | .11689E+00 | -.14880E+00 | -.41521E-02   |
| 4    | .15011E+00 | -.30341E+00 | -.54629E-02   |
| 5    | .18005E+00 | -.49814E+00 | -.66505E-02   |
| 6    | .20673E+00 | -.72909E+00 | -.77182E-02   |
| 7    | .23014E+00 | -.99245E+00 | -.86690E-02   |
| 8    | .25029E+00 | -.12845E+01 | -.95053E-02   |
| 9    | .26722E+00 | -.16016E+01 | -.10229E-01   |
| 10   | .28090E+00 | -.19402E+01 | -.10841E-01   |
| 11   | .27906E+00 | -.22910E+01 | -.10996E-01   |
| 12   | .27722E+00 | -.26464E+01 | -.11126E-01   |
| 13   | .27540E+00 | -.30056E+01 | -.11233E-01   |
| 14   | .27357E+00 | -.33678E+01 | -.11316E-01   |
| 15   | .27175E+00 | -.37323E+01 | -.11375E-01   |
| 16   | .26993E+00 | -.40984E+01 | -.11411E-01   |
| 17   | .26811E+00 | -.44654E+01 | -.11423E-01   |

==> Réactions aux appuis:

| Nœud | React Rx   | React Ry   | Moment M   |
|------|------------|------------|------------|
| 1    | .44500E+05 | .22826E+05 | .11733E+08 |