



Université Mouloud MAMMERRI de TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil

THÈSE DE DOCTORAT

En vue de l'obtention de Diplôme de
Docteur en Génie Civil

Présentée par

Monsieur **Djamal BOUCHAFA**

INGENIEUR D'ETAT EN
TRAVAUX PUBLICS

Thème :

COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE APPLIQUÉE AUX CALCUL NON LINEAIRE DES PIEUX APPLICATION AUX POUTRES

Devant le jury d'examen composé de :

Président	DAHMANI LAHLOU	Professeur	UMMTO
Rapporteur	KACHI MOHAND.SAID	Professeur	UMMTO
Co-Rapporteur	BOUAFIA YOUCEF	Professeur	UMMTO
Examinatrice	MEKIDECHE-CHAFIA Fawzia	Professeur	ENSTP
Examineur	FEDGHOUCHE FERHAT	Professeur	ENSTP
Examineur	KHEFFACHE TOUFIK	Maitre de conférences A	UAM/Bejaia

Soutenue le : 29/06/2024.

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à remercier mes rapporteurs Kachi Mohand Said et Bouafia Youcef d'avoir bien voulu proposer et diriger ce travail de recherche et pour m'avoir permis de le réaliser dans d'excellentes conditions leur appui, leur précieux conseils et orientations ont beaucoup apporté quant à la réalisation de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Un grand remerciement à Monsieur DAHMANI Lahlou, Professeur à l'UMMTO, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le Temps de lire et juger ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à Madame MEKIDECHE-CHAFA Fawzia, Directrice de l'Ecole National Supérieure des Travaux Publics, pour avoir bien voulu Participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie vivement Monsieur FEDGHOUCHE Ferhat, Directeur des études à l'ENSTP, pour avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur KHEFFACHE Toufik, Maître de conférences à UAM/Bejaia, pour avoir bien voulu Participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie également Monsieur K. BEN YAHI, qui m'a beaucoup aidé concernant la programmation et aussi, d'avoir été disponible tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

DEDICACE

Je tiens à dédier ce travail à :

- Mes très chers parents.
- Mes chers frères et mes chères sœurs.
- Mes beaux frères et mes neveux.
- Tous mes amis (es) et toute la famille.

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans la recherche de la probabilité de défaillance des structures en béton armé à section circulaire, Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche mécano-fiabiliste. Du point de vue mécanique, le comportement à retenir est élastique non linéaire et la capacité portante sera déterminée suite à la vérification d'une part ; des déformations limites et puis d'autre part ; à la rupture. Les événements de l'environnement (champ de forces, actions) et comportement des matériaux sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste apportée par un dimensionnement mécanique peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure.

Pour cela, un programme en FORTRAN est développé dans ce travail pour simuler la méthode directe de Monte Carlo couplée à un calcul non-linéaire pour évaluer la probabilité de défaillance des structures en béton armé à section circulaire. Le principe d'Hasofer-Lind est appliqué, où le schéma de fiabilité est construit en couplant un modèle d'éléments finis non linéaire avec la méthode de surface de réponse (*RSM*). La sécurité structurelle est donnée en terme d'indice de fiabilité Hasofer-Lind, trouvé en résolvant un problème d'optimisation, pour lequel l'algorithme de Rackwitz et Fiessler a été adopté.

Pour représenter la non-linéarité du matériau, des modèles locaux basés sur des relations axiales contrainte-déformation sont adoptés pour décrire le comportement du béton en traction et en compression. Les barres d'armature étant placées dans des couches prédéfinies dans la section transversale du béton, l'acier est supposé suivre une loi élastique-plastique parfaite. Les applications numériques montrent l'efficacité du couplage entre *RSM-MEF*, à travers l'analyse de structures non linéaires complexes nécessitant un nombre réduit d'appels mécaniques.

Afin d'estimer les scénarios et la probabilité de défaillance des structures étudiées. Nous validons notre modèle mécanique en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux, Enfin on vérifie les résultats du modèle fiabiliste ; et cela en confrontant les résultats obtenus par simulation de Monte-Carlo avec ceux de la méthode d'Hasofer-Lind.

MOTS CLÉS

Modélisation - non-linéarité mécanique - non-linéarité géométrique - probabilité de défaillance - Monte Carlo - indice de fiabilité.

ABSTRACT

The aim of this study is to analyze the reliability of three-dimensional reinforced concrete structures with circular section. The problem is tackled by the definition of security by a probabilistic threshold: the mechanical-reliability approach is used. From a mechanical point of view, the behaviour to be retained is non-linear elastic and the bearing capacity will be determined following verification on the one hand; boundary deformations and then on the other hand; at the breakup. Environmental events (force field, actions) and material behaviour are simulated by random and deterministic variables. The purpose is to show how a reliability evaluation provided by a mechanical dimensioning can be obtained. For this, it is necessary to have a mechanical model and a reliability model correctly representing the behaviour of this type of structures. It involves, on the one hand, performing non-linear modeling (mechanical non-linearity and geometrical non-linearity) of three-dimensional structures with circular section and on the other hand, proposing or adapting a formulation and modeling of reliability.

For this, a program in FORTRAN is developed in this work to simulate the direct Monte Carlo method coupled to a non-linear calculation to evaluate the probability of failure of three-dimensional structures with circular section.

To represent the material non-linearity, local models based on axial stress-strain relationships are adopted to describe the concrete behaviour in tension and in compression. Having the reinforcement bars placed in predefined layers within the concrete cross-section, the steel is assumed to follow a perfect elastic-plastic law. The numerical applications show the efficiency of the *RSM-FEM* coupling, through the analysis of complex nonlinear structures requiring a reduced number of mechanical calls.

The Hasofer-Lind principle is applied to estimate the reliability index, the scenarios, and the probability of failure of the studied structures. We validate our mechanical model by comparing the results of our calculations with experimental results. Finally, we verify the results of the reliability model; and this by comparing the results obtained by Monte-Carlo simulation with those of the Hasofer-Lind method.

KEY WORDS

Modeling – nonlinearity mechanical – nonlinearity geometrical - probability – reliability - probability of failure.

LISTE DES FIGURES

I.1. Diagramme de farmer : probabilité gravité [22].	9
I.2. Acteur de couplage mécano-fiabiliste [22]	11
I.3. État- limite de variable résistance-sollicitation	14
I.4. Diagramme représentant la loi de comportement du béton	19
I.5. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [07]	19
I.6. Comportement de béton ordinaire avant fissuration	21
I.7. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton sur le bord tendu [27]	21
I.8. Comportement global Contrainte de cisaillement-déformation Adjrad et al. [43]	23
I.9. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élastoplastique avec Raffermissement)	23
I.10. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élastoplastique parfaite)	24
I.11. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis	25
I.12. Le modèle de Bouafia et al. [67]	25
I.13. Discrétisation d'une section transversale de béton en tables trapézoïdales	26
II.1. Section de poutre à section circulaire discrétisée en couches	30
II.2. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section	35
II.3. Système d'axes d'un élément 3D à l'état initial et déformé	36
II.4. Repère local de référence et notations	40
II.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une structure	46
III.1. Illustration de la simulation de Monte-Carlo	51
III.2. Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la simulation de Monte Carlo direct	53
III.3. Exemple simple d'une tige soumise un effort normale	54
III.4. Représentation de l'indice de Rjanitzyne-cornell [49]	57
III.5. Point de conception [56]	60
III.6. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF)	64
III.7. Représentation du portique [49]	65
III.8. Représentation l'approximation FORM	67
III.9. Représentation l'approximation SORM	68
III.10. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe dans le cas des méthodes fiabilistes de Niveau II [64]	70
III.11. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	72
IV.1. La poutre OG	76
IV.2. La géométrie et ferrailage des poutres OG [29]	76
IV.3. Ferrailage de la poutre OG3	76
IV.4. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (OG3)	78
IV.5. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (OG4)	78
IV.6.a. Lois de probabilité de la variable aléatoire P	80
IV.6.b. Lois de probabilité de la variable aléatoire δ	81
IV.7. Vue schématique des types des outres, de la disposition d'essai, des dimensions et de L'équipement Utilisé [65]	84
IV.8. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge (BS-01)	85
IV.9. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge (BS-02)	85
IV.10. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge (BS-03)	86
IV.11. Essai de flexion compose pour pieu en béton armé à section circulaire Zhan [66]	88
IV.12. Courbe Charge-déplacement (BA)	89
IV.13. Courbe Charge-déplacement (BFO25)	90

IV.14. Courbe Charge-déplacement (BFO40)	90
IV.15. Courbe charge-déplacement (BF2T).....	91
IV.16. Courbe charge-déplacement (BT).....	91
IV.17. Courbe Moment – Déplacement	93
IV.18.a. Lois de probabilité de la variable aléatoire P	95
IV.18.b. Lois de probabilité de la variable aléatoire δ	96

LISTE DES TABLEAUX

III.1. La moyenne et l'écart-type des variables du problème	65
III.. Résultats du problème	65
IV.1. Données mécaniques et fiabilistes des poutres OG.....	77
IV.2. Résultats obtenus par simulation de Monte Carlo (OG3)	80
IV.3. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (OG3)	82
IV.4. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste (OG3).....	83
IV.5. Données mécaniques et fiabilistes des poutres	84
IV.6. Résultats obtenus par simulation de Monte Carlo (poutres)	86
IV.7. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite de chaque poutres.....	87
IV.8. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste (poutres).....	87
IV.9. Caractéristiques mécaniques du béton armé (BA), mesuré à 350 kg/m ³ de ciment ; et du béton témoin (BT), mesuré à 400 kg/m ³ de ciment	88
IV.10. Propriétés mécaniques du composite (béton armé avec fibres d'acier).	89
IV.11. Caractéristiques des fibres d'acier.....	89
IV.12. Les résultats significatifs.....	93
IV.13. Données mécaniques et fiabilistes de pieu (BA) Zhan.....	94
IV.14. Résultats obtenus par simulation de Monte Carlo PIEU (BA)	95
IV.15. Lois des paramètres des variables aléatoires pour l'état limite du pieu.....	96
IV.16. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste	97
IV.17. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires.....	98
IV.18. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités	98

NOTATIONS PRINCIPALES

$\varphi(\varepsilon)$: Définit le comportement réel des matériaux,
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton a l'origine,
 ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,
 f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j,
 k_b et \hat{k}_b : Paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin.
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton,
 f_{tj} : Résistance du béton à la traction,
 ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,
 ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,
 ε_{bt} : Déformation de la fibre du béton la plus tendue,
 E_s : Valeur contrôlant la pente de la partie descendante de la courbe de comportement du béton confiné,
 f_{cc} : Contrainte de compression pic,
 ε_{cc} : Déformation correspondant à la contrainte f_{cc} ,
 ε_{cu} : Déformation de rupture d'un béton non confiné,
 ε_{ccu} : Déformation de rupture d'un béton confiné,
 f_l : Contrainte de compression latérale effective due au confinement,
 f_{c0} : Contrainte de compression du béton non confinée a l'âge j,
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du composite à l'origine,
 ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,
 ε_{s1} : Déformation correspondant a la fin du palier plastique,
 ε_{s2} : Déformation correspondant à la fin du raffermisssement,
 ε_{su} : Déformation de rupture,
 E_a : Module longitudinal de l'acier,
 ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,
 σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,
 ε_u : Déformation ultime de l'acier,
 E_a : Module d'Young de l'acier à l'origine,
 σ_e : Limite élastique conventionnelle à 2‰,
 $0,7 \cdot \sigma_e$: Contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
 σ_p : Contrainte dans l'acier de précontrainte,
 ε_p : Déformation dans l'acier de précontrainte,
 E_p : Module d'Young à l'origine,
 f_{peg} : Limite élastique conventionnelle à 0,1‰,
 $0,9 \cdot f_{peg}$: Contrainte ou s'arrête le diagramme linéaire,
 $1,06 \cdot f_{peg}$: Contrainte de rupture,
 σ_{p0} : Tension à l'origine,
 e : Base des logarithmes népériens,
 f : Coefficient de frottement en courbe de l'armature sur la gaine (rd^{-1}),
 $\alpha(s)$: Somme des valeurs absolues des déviations angulaires entre l'origine et le point d'abscisse curviligne s (rd),
 φ : Coefficient de perte de tension par unité de longueur (m^{-1}),
 s : Abscisse curviligne du point ou l'on calcule la tension dans le câble (m),
 f_{prg} : Contrainte de rupture garantie,
 f_{peg} : Limite d'élasticité garantie,
 ε_x : Déformation du centre de gravité de la section totale due à l'effort normal N,
 $\{F_{mn}\}$: Contribution dues au béton et /ou au profilé métallique,

$\Delta\sigma_m(y, z)$: Contrainte normale en un point courant de la section de béton et /ou au profilé métallique,
 $[k_{mn}]$: Matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales de la matrice de la section à la variation de déformation normale de la section,
 $\{F_{sn}\}$: Vecteur des sollicitations normales à la section,
 e : Variation de longueur de l'élément,
 L_0 : Longueur initiale de l'élément avant déformation,
 L : Longueur de l'élément après déformation,
 $[B]$: Matrice de transformation géométrique,
 $[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément barre dans le repère local,
 $[R_0]$: Matrice de transformation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle
 $[K_X]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXYZ,
 $[S_S]_{i-1}$: Matrice de souplesse "corde" de la section à l'itération (i-1),
 ε_s : Déformation à l'étape précédente équilibrée,
 $\{\Delta F_S\}^r$: Accroissement d'efforts à l'étape r,
 $\{\Delta\varepsilon\}_0$: Accroissement de déformations initiales,
 $[K]_i$: Matrice de rigidité "corde" de la structure à l'itération (i),
 $\{U_S\}$: Vecteur de déplacement des nœuds de la structure correspondant à la dernière étape stable,
 $\{\Delta P\}^r$: Accroissement du chargement appliqué à l'étape r,
 $\{P\}$: Chargement cumulé jusqu'à l'étape (r - 1),
 $f_x(x_1, \dots, x_n)$: Densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x ,
 Φ : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1),
 F_{x_i} : Fonction de distribution de la variable x_i ,
 m_R, m_S : Moyennes de la résistance R et de la sollicitation S ,
 σ_R, σ_S : Ecart types de la résistance R et de la sollicitation S ,
 P^* : Point de défaillance le plus probable, est le point de l'espace normalisé qui réalise ce minimum,
 $\alpha^{(k)}$: Vecteur des cosinus directeurs (ou le vecteur du gradient normalisé) de H en $P^{(k)}$,

SOMMAIRE

RÉSUMÉ	III
ABSTRACT	IV
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1

CHAPITRE I

ÉTUDE BELIOGRAPHIQUE

Sommaire

I. 1. Introduction	5
I. 2. Définition de la fiabilité	5
I. 3. Aperçu sur les travaux réalisés sur la fiabilité des structures dans le contexte de L'analyse non linéaire	5
I. 4. Fiabilité Des Structures	8
I. 4.1. Description de l'incertitude	8
I. 4.1.1. Aléas intrinsèques	8
I. 4.1.1. Aléas extrinsèques.....	9
I. 4.2. Risque	9
I. 4.3. Mécanique fiabiliste.....	10
I. 4.4. Aléas et représentation des aléas.....	12
I. 4.4.1. Approche probabiliste	12
I. 5. Variables de base	13
I. 6. Fonction d'état limite	13
I. 7. Probabilité de défaillance	13
I. 7.1. Cas des variables résistances-sollicitation	14
I. 8. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire	15
I. 8.1. Comportements non linéaires des structures	15
I. 8.2. Évolution de l'analyse non linéaire	16
I. 8.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes	17
I. 8.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles	17
I. 9. Modélisation des matériaux à comportement réels	19
I. 9.1. Comportement du béton ordinaire	19
I. 9.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN	19
I. 9.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT	20
I. 9. 2. Module de cisaillement du béton	22
I. 9.3. Comportement des aciers	23
I. 9.3.1. Comportement des aciers passifs	23
I. 9.4. Comportement du béton de fibre	25
I. 10. Modélisation des sections	26
I. 10.1. Modélisation de la section de béton	26
I. 10.2. Modélisation géométrique des armatures	26
I. 11. Conclusions	27

CHAPITRE II :
METHODE DE CALCUL NON LINEAIRE DES STRUCTURES

Sommaire

II. 1. Introduction	29
II. 2. General hypothèses	29
II. 3. Etude de la section transversale de l'élément	29
II. 3.1. Les déformations.....	30
II. 3.1.1. Les déformations normales du béton	30
II. 3.1.2. Déformations tangentes au béton.....	30
II. 3.1.1. Déformation des armatures	30
II. 3.2. Calcul des forces interne.....	30
II. 3.2.1. Forces normales dues au béton	30
II. 3.2.2. Forces de cisaillement dues au béton.....	31
II. 3.2.3. Forces dues aux armatures	32
II. 3.3. External forces.....	33
II. 3.3. Equilibre de la section	33
II. 4. Etude de l'équilibre des structures	35
II. 4.1. La matrice de rigidité de la structure	35
II. 4.2. Système de coordonnées.....	36
II. 4.3. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque	37
II. 4.3.1. Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des Sections	38
II. 4.3.2. Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément	39
II. 4.4. Matrices de rigidité de l'élément dans le repère local	39
II. 4.4.1. Relation entre les déplacements des nœuds dans le système d'axes local et le système d'axes intrinsèque.....	39
II. 4.4.2. Relation entre l'accroissement d'efforts et accroissement de déplacement	41
II. 4.5. Matrices de rigidité de l'élément dans le repère local	42
II. 4.6. Calcul du déplacement des nœuds.....	44
II. 4.7. Organigramme de calcul	46
II. 5. Conclusions	47

CHAPITRE III :
METHODES DE CALCUL DE LA FIABILITE DES STRUCTURES

Sommaire

III. 1. Introduction	49
III. 2. Calcul de la probabilité de défaillance	50
III. 2.1. Calcul de P_f par la simulation Monte Carlo	50
III. 2.1.1. Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la méthode de MC	53
III. 2.2. Calcul de P_f par intégration analytique directe	54
III. 2.3. Calcul de P_f par la méthode d'approximation.....	55
III. 2.3.1. Indice de fiabilité.....	56
III. 2.3.1.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell	56
III. 2.3.1.2. Indice de Hasofer et Lind	58
III. 2.3.2. Transformation iso probabiliste.....	59
III. 2.3.3. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant.....	60
III. 2.3.4. Recherche du point de conception.....	61
III. 2.3.5. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL}	62
III. 2.3.5.1. Organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).....	64

III. 3. Méthode FORM/ SORM.....	66
III. 3.1. Méthode FORM	66
III. 3.2. Méthode SORM	67
III. 4. Couplage mécano-fiabiliste	69
III. 4.1. Introduction	69
III. 4.2. Le couplage direct	69
III. 4.2.1. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe_.....	70
III. 4.3. Méthode par surface de réponse	71
III. 4.3.1. Surface de réponse analytique	71
III. 4.3.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	72
III. 5. Remarques sur les méthodes d'estimation de la fiabilité	73
III. 6. Conclusions	73

**CHAPITRE IV :
APPLICATION ET VALIDATION**

Sommaire

IV. 1. Introduction	75
IV. 2. Etude de la poutre OG	76
IV. 2.1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)	77
IV. 2.2. Evaluation de la probabilité de défaillance de la poutre OG3	79
IV. 3. Etude des poutres en béton armé à section circulaires	83
IV. 3.1. Évaluation de la flèche sous charge (P) de chaque éprouvette	85
IV. 3.2. Évaluation de la probabilité de rupture d'éprouvettes en béton armé.....	86
IV. 4. Etude des pieux de ZHAN	88
IV. 4.1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)	89
IV. 4.2. Evaluation de la probabilité de défaillance de pieu (BA).....	94
IV. 5. Conclusion	99

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES 101

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 104

ANNEXES 112

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Avant le développement des programmes informatiques, la modélisation des structures était basée sur le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au XIX^{ème} siècle en considérant un matériau à comportement linéaire, homogène et intègre. Or, il n'existe aucun matériau dont le comportement est strictement linéaire élastique lors d'une étude aux états limites ultimes. Depuis quelques années, le développement accéléré des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, ainsi que le progrès dans le domaine de l'informatique, a permis d'élaborer des approches plus réalistes pour la simulation du comportement des structures les plus complexes qui exigent une modélisation exacte de la géométrie, des lois constitutives réalistes et une technique de résolution efficace.

Une telle analyse est aujourd'hui indispensable pour les structures de forme et fonctionnement complexes (bâtiments élevés, ponts de grande portée, ...) subissant des charges importantes, surtout quand leur défaillance a des conséquences humaines et économiques graves. D'autre part une telle analyse ne permet pas de prendre en compte les incertitudes aléatoires liées aux propriétés matérielles, aux chargements, ou à la géométrie. C'est pour cela de nos jours, il est indispensable d'élaborer une méthode qui permet d'obtenir des prédictions numériques fiables. Cette nécessité a conduit à faire appel à l'analyse fiabiliste qui est basée sur le calcul probabiliste.

La **plupart** des recherches effectuées sur le calcul non linéaire des structures en béton armé se concentrent sur les sections rectangulaires, cependant, les structures en béton armé à section circulaire sont fréquemment utilisées dans la construction de génie civil, par exemple comme fondations sur pieux, colonnes de béton armé bâtiments et ponts...etc. Les recherches sur le calcul non linéaire des structures ont considérablement progressé ces dernières années ; il est nécessaire pour la prédiction de la réponse réelle des structures. Les méthodes basées sur l'analyse non linéaire ont permis de mieux estimer un domaine de sécurité. L'étude de la capacité des structures en béton armé nécessite des modèles réalistes de matériaux, une discrétisation par éléments finis et la recherche d'une réponse non linéaire.

La conception et la requalification des structures de **Génie Civil** nécessitent des modèles qui tiennent compte du comportement **réel** des matériaux et des structures, des **actions** appliquées et des conditions environnementales. Les paramètres liés à ces modèles tels que les propriétés des matériaux constitutifs, les dimensions géométriques et les actions appliquées présentent naturellement des **incertitudes** aléatoires. Ces incertitudes proviennent de la variabilité intrinsèque de ces paramètres (comme par exemple, le module d'élasticité du béton qui varie au sein d'un même échantillon du fait de l'hétérogénéité du matériau), de l'erreur de mesure liée au dispositif utilisé pour quantifier les paramètres ou à un manque de connaissance précise sur ces paramètres. De même, les actions appliquées aux structures ne sont pas toujours parfaitement connues (actions climatiques, séismes, etc.). La **fiabilité des structures** a pour objet de mesurer la sécurité conventionnelle d'un ouvrage en prenant en compte ces diverses incertitudes, sous un angle probabiliste, et par extension permet aussi d'estimer sa fiabilité. L'indice de fiabilité **d'Hasofer-Lind** est une solution courante pour la mesure probabiliste de la fiabilité. On peut facilement en déduire une valeur approximative de la probabilité de défaillance à un coût numérique réduit.

L'indice de fiabilité d'*Hasofer-Lind* est par ailleurs la mesure de fiabilité la plus fréquemment référencée dans les codes de conception et de dimensionnement.

La détermination de l'**indice de fiabilité** nécessite d'avoir à disposition une fonction mathématique définissant l'état de défaillance de la structure étudiée, et de pouvoir coupler cette fonction à l'algorithme probabiliste. Cette fonction mathématique donne le plus souvent la valeur d'un ou de plusieurs paramètres du comportement mécanique, au sens large, de la structure (déplacement, contrainte, etc.) comparée à une ou plusieurs valeurs limites à ne pas dépasser.

La simulation de **Monte-Carlo directe** est la technique la plus simple pour estimer une espérance ou une intégrale mathématique. Elle est basée sur l'application de la loi des grands nombres. Elle consiste à réaliser un grand nombre de tirages aléatoires, calculer pour chaque tirage la réponse de la fonction d'état limite et exécuter alors un traitement statistique de cette réponse pour en déduire la probabilité de défaillance.

La méthode des éléments finis reste aujourd'hui l'outil numérique le plus puissant pour modéliser le comportement mécanique des structures. Elle permet de discrétiser des équations mécaniques et de tenir compte des comportements réels (non linéaires) des matériaux et des structures. La conception et la requalification des structures de Génie Civil s'appuient ainsi de plus en plus sur cet outil. Par conséquent, le couplage entre méthodes probabilistes et calculs aux éléments finis est une nécessité. Durant ces quinze dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés à ce couplage.

La question du développement d'outils permettant de minimiser le temps de calcul pour l'évaluation de la fiabilité des structures en assurant la précision des résultats reste donc d'actualité. La présente étude a pour objectif de développer des outils numériques performants en termes de temps de calcul et de précision pour l'estimation de la fiabilité des éléments de structures à section circulaire en béton armé.

Objectifs :

Les objectifs principaux de la thèse se résument comme suit :

- Proposition d'une formulation et modélisation dans le cadre d'un calcul non linéaire (géométrique et mécanique) des structures en béton armé à section circulaire ;
- Adaptation d'une méthode classique de fiabilité ;
- Enfin, après avoir implémenté le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, on procèdera à leur combinaison avec une méthode de couplage indirecte afin d'estimer l'indice de fiabilité des scénarios et d'évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques en fiabilité.

La thèse que nous présentons est organisée comme suit :

Le premier chapitre présente une synthèse bibliographique relative à la fiabilité des structures, nous donnons les différentes lois de comportement des matériaux (béton et acier), ainsi le calcul non

linéaire et la modélisation des matériaux en tenant compte de comportement réel des matériaux.

Le deuxième chapitre vise à présenter nous présentons la méthode de calcul du **modèle mécanique**, nous donnons les différentes étapes de calcul non linéaire, puis ; nous décrivons l'équilibre de la section, ainsi que l'établissement de la matrice de rigidité dans les déférent repères.

Le troisième chapitre de la thèse décrit les différentes méthodes fiabilistes et probabilistes des structures, dans le contexte de leur couplage avec la méthode des éléments finis (le model mécanique) ,on présente deux techniques de calcul de la fiabilité des structures, La première est la méthode de **Monté Carlo directe** qui consiste à réaliser un grand nombre de tirages aléatoires, et calculer pour chaque tirage la réponse de la fonction d'état-limite et exécuter alors un traitement statistique de cette réponse pour en déduire la probabilité de défaillance. La seconde est la méthode **d'Hasofer-Lind** qui fait appel aux probabilités et aux statistiques. Puis on associe la méthode de fiabilité au model mécanique à l'aide d'une méthode de couplage indirecte.

Enfin, **le Quatrième chapitre** est consacré à la présentation d'une série d'exemples d'applications et de confrontations à des résultats expérimentaux et numériques afin de valider l'implémentation qui a été faite sur le calcul non linéaire des **structures a section circulaire en béton armé**, et aussi pour évaluer la précision des résultats obtenus, et estimer leurs fiabilités par le couplage mécano-fiabiliste.

On termine par une conclusion générale et quelques perspectives issues de cette étude.

CHAPITRE I

ÉTUDE BELIOGRAPHIQUE

Sommaire

I. 1. Introduction	5
I. 2. Définition de la fiabilité	5
I. 3. Aperçu sur les travaux réalisés sur la fiabilité des structures dans le contexte de L'analyse non linéaire	5
I. 4. Fiabilité Des Structures	8
I. 4.1. Description de l'incertitude	8
I. 4.1.1. Aléas intrinsèques	8
I. 4.1.1. Aléas extrinsèques.....	9
I. 4.2. Risque.....	9
I. 4.3. Mécanique fiabiliste	10
I. 4.4. Aléas et représentation des aléas	12
I. 4.4.1. Approche probabiliste	12
I. 5. Variables de base.....	13
I. 6. Fonction d'état limite.....	13
I. 7. Probabilité de défaillance	13
I. 7.1. Cas des variables résistances-sollicitation	14
I. 8. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire	15
I. 8.1. Comportements non linéaires des structures	15
I. 8.2. Évolution de l'analyse non linéaire	16
I. 8.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes	17
I. 8.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles	17
I. 9. Modélisation des matériaux à comportement réels	19
I. 9.1. Comportement du béton ordinaire	19
I. 9.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN	19
I. 9.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT	20
I. 9. 2. Module de cisaillement du béton	22
I. 9.3. Comportement des aciers	23
I. 9.3.1. Comportement des aciers passifs	23
I. 9.4. Comportement du béton de fibre	25
I. 10. Modélisation des sections	26
I. 10.1. Modélisation de la section de béton	26
I. 10.2. Modélisation géométrique des armatures	26
I. 11. Conclusions	27

I.1. Introduction

La conception des structures en béton armé est un domaine de recherche qui a retenu l'attention au cours de ce siècle. Il y a deux aspects principaux généralement pris en compte pour parvenir à un modèle de conception approprié appliqué à ce type de structures. Un aspect important à considérer concerne les hypothèses de fiabilité requises pour prédire l'aptitude au service de la conception et les états limites ultimes dans certaines probabilités spécifiées. Le deuxième aspect important concerne le modèle mécanique, dans lequel les conditions d'équilibre et la compatibilité géométrique doivent être satisfaites avec des modèles appropriés adoptés pour décrire le comportement des matériaux. Le modèle mécanique doit être choisi pour représenter le plus réaliste possible le comportement structurel réel. D'un autre côté, le modèle de fiabilité doit être choisi pour prédire avec précision les probabilités de défaillance, en tenant compte des aspects informatiques qui peuvent restreindre leur applicabilité.

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : rapport entre une variable de charge et une variable de résistance établie par une approche déterministe. Pour une structure complexe ces efforts sont mal connus, et sa résistance est incertaine, il y a donc toujours un risque de voir la structure ruinée. A cet effet, l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de fiabilité des systèmes mécaniques développés au cours de ces dernières années. Pour de nombreuses raisons (par exemple difficulté à exprimer avec précision les propriétés du matériau, simplification dans la simulation du comportement de la structure, etc.), le 0% de probabilité de défaillance ne peut être garanti. Cependant, la conception peut être effectuée pour augmenter la fiabilité jusqu'à un niveau sélectionné.

I.2. Définition de la fiabilité

La définition adoptée [1] pour le néologisme fiabilité traduction du terme anglo-saxon Reliability : « *La fiabilité est une caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise dans des conditions données, pendant un temps donné* ».

I. 3. Aperçu sur les travaux réalisés sur la fiabilité des structures dans le contexte de l'analyse non linéaire :

Des hypothèses cinématiques simples pour prendre en compte la configuration d'équilibre finale sont, en général, suffisantes pour calculer précisément les efforts internes au niveau de l'élément structurel. L'analyse des structures de bâtiments en béton est généralement effectuée dans le contexte de petits concepts de déformation et de rotation [2], [3]. En ce qui concerne la méthodologie pour décrire les changements de géométrie au cours de l'analyse, les schémas lagrangiens totaux et mis à jour sont les procédures les plus couramment adoptées pour définir le processus incrémental-itératif recommandé pour ce problème Bathe et al [4].

La réduction de la rigidité d'un élément en béton armé est de loin l'aspect le plus important concernant le comportement mécanique des structures de bâtiment. Au cours des 40 dernières années, il y a eu de nombreuses études où la tâche principale était la proposition de modèles pour approximer la rigidité individuelle des éléments en béton armé et, par conséquent, le comportement global de la structure. Le comportement élastique-plastique est le choix naturel à

supposer pour le matériau en béton et l'acier d'armature. Une étude complète de l'hypothèse de ce comportement pour modéliser des éléments en béton armé peut être trouvée dans Chen [5] [6]. Étant donné que seules les contraintes de compression sont prises en compte, la résistance à la traction est négligée, ces méthodes sont appropriées pour vérifier l'état limite ultime à des sections particulières, mais pas pour évaluer la rigidité des éléments.

Afin de prendre en compte les effets de raidissement en traction pour estimer correctement la rigidité globale de la structure, quelques méthodes approximatives écrites en termes de diagrammes moment-courbure internes ont été proposées. Parmi elles, il est important de mentionner le modèle ACI 318 simple Sargin [7], dans lequel une rigidité moyenne est considérée pour chaque élément individuel. Il s'agit d'un modèle simple mais très pratique à adopter dans des conceptions pratiques. Il est important de signaler deux autres modèles plus précis qui ont été proposés par Debernardi [8] [9] et Ghali & Favre [10]. Le modèle recommandé dans le modèle de code CEB-FIP 90 [11] est basé sur le dernier de ces modèles décrits.

Une autre possibilité de représenter convenablement la région de traction pour prendre en considération les effets de raidissement en tension est donnée par les modèles basés sur la théorie de la mécanique des dommages du continuum Lemaitre [12] Et Mazars [13]. Ces modèles étalés sont plutôt appropriés pour représenter la réduction de la rigidité et le processus de microfissuration interne particulièrement observé dans la zone de traction. Ils sont capables de modéliser les microfissures distribuées apparaissant sur la zone de traction en utilisant des modèles appropriés basés sur des déformations équivalentes.

Comme on le sait, les modèles mécaniques donnent des réponses de structure en raison d'un ensemble de variables de conception déterministes. Cependant, toutes les variables d'un problème particulier sont aléatoires. Ainsi, la réponse mécanique est toujours associée à une probabilité de défaillance.

Les méthodes de fiabilité sont les outils d'évaluation de la conception qui peuvent estimer la probabilité d'atteindre une certaine défaillance définie. En gros, on peut classer les méthodes de fiabilité de deux manières : les méthodes aléatoires et les méthodes non aléatoires.

Les méthodes aléatoires, comme les simulations de Monte Carlo, l'échantillonnage d'importance, etc., ont été largement adoptées pour estimer les probabilités de défaillance structurelle, mais conduisant toujours à un coût de calcul énorme. Souvent, ils ne sont utilisés que pour vérifier l'exactitude des méthodes non aléatoires.

L'une des principales étapes des méthodes non aléatoires consiste à estimer la surface de défaillance (FS), appelée également : état limite. Il est approuvé que la précision du FS affecte fortement l'estimation de la sécurité structurelle. Dans de nombreux travaux, le FS des structures est présumé en fonction des connaissances et de l'expérience du concepteur. Mais en général, les structures présentent des réponses mécaniques non linéaires, notamment au voisinage de l'état de rupture, et par conséquent il est très difficile de prédire a priori la FS structurelle globale.

La méthode de surface de réponse, RSM, est classée parmi les méthodes robustes, puis particulièrement recommandée pour analyser la fiabilité des structures non linéaires avec FS implicite. Afin d'utiliser cette méthode pour approximer les surfaces de rupture structurelle, le comportement mécanique du corps analysé doit être pris en compte. Le principal avantage de cette méthode est son coût de calcul réduit. Le RSM semble associé à la méthode bien connue de

fiabilité du premier ordre (FORM) ou à la méthode de fiabilité du deuxième ordre (SORM), pour estimer la probabilité de défaillance de la structure.

Les méthodes de fiabilité sont appliquées aux structures en béton armé depuis 1947 lorsque Freudenthal a publié son premier travail sur les concepts de fiabilité appliqués aux conceptions structurelles. Après cela, pratiquement tous les codes de conception internationaux ont été proposés incorporant des concepts de fiabilité, comme on peut le voir dans l'Eurocode 1, ainsi que dans plusieurs recommandations du CEB publiées jusqu'à présent (Sargin, 1971 ; CEB 191, 1988 ; CEN 229, 1995).

Récemment, d'autres modèles plus réalistes pour incorporer la fiabilité dans la conception en béton armé ont été proposés. Plusieurs avancées ont été observées en essayant de concevoir des structures directement sur la base de la fiabilité. L'analyse de fiabilité appliquée aux éléments en béton apparaît généralement avec l'état limite ultime, comme le travail effectué par Tabsh [14], qui a étudié la sécurité des éléments en béton armé en flexion. Les éléments structuraux analysés ont été conçus sur la base du code de conception ACI 318, en utilisant une combinaison de charges et des facteurs de réduction de résistance.

La fiabilité des poteaux et des ponts en béton armé apparaît dans les travaux menés par Frangopol [15], dans lesquels la fiabilité pourrait être significativement affectée par la corrélation des charges et le planning de chargement. Son travail a été réalisé en supposant un diagramme contrainte-déformation non linéaire approprié avec plusieurs états limites supposés. Reid [16] a également étudié le problème de fiabilité des poteaux en béton armé, mais en mettant l'accent sur les effets à long terme et la perte de résistance due à la durée du chargement. En termes de fiabilité, il a observé une réduction assez élevée de la résistance du béton pour le cas de chargement à long terme. Holicky et Vrouwenvelder [17] ont également étudié les poteaux en béton armé.

Dans son travail, 12 poteaux ont été pris pour l'analyse, où l'indice de fiabilité a été étudié en termes de temps. L'étude a été menée en appliquant des actions à long et à court terme, pour lesquelles le comportement des éléments en béton armé était représenté par une relation moment de flexion-force normale, en appliquant la méthode FORM.

Jusqu'à présent, très peu de travaux traitant des Portiques en béton armé réalisées par analyse de la fiabilité sont apparus dans la littérature. Ici, nous avons pris quelques exemples importants où ce sujet est étudié. Val [18] a présenté une méthode basée sur une combinaison d'un modèle d'éléments finis avec la méthode de fiabilité de premier ordre FORM, appliquée pour prédire la fiabilité d'un portique en béton armé en tenant compte des non-linéarités physiques et géométriques. L'analyse de la fiabilité des structures en béton armé a également été étendue aux bâtiments à plusieurs étages. Epaarachchi [19] a développé un modèle probabiliste préliminaire pour estimer la probabilité d'effondrement structurel de bâtiments typiques à plusieurs étages pendant la phase de construction. Les simulations de Monte Carlo ont été utilisées pour estimer la probabilité de défaillance. Benyahi et al [20] ont développé un modèle pour prédire la fiabilité des structures métalliques en treillis.

I. 4. Fiabilité Des Structures :

Selon l'expression d'A.M. Freudenthal (1947) la théorie de la fiabilité consiste à "placer le concept de la sûreté des structures dans le royaume de la réalité physique où il n'y a pas d'absolu, où la connaissance n'est pas parfaite". Ainsi, l'approche fiabiliste permet d'introduire une mesure quantitative du risque de défaillance, ou moyen d'une démarche probabiliste pour la modélisation des incertitudes et des aléas. En effet, le problème de la fiabilité des structures est basé sur deux aspects fondamentaux : une connaissance physique des phénomènes mécanique et des différents mécanismes de défaillance, d'une part, et une connaissance statistique des paramètres du modèle mécanique, d'autre part.

I. 4. 1. Description de l'incertitude

La variabilité sur la structure provient de la nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur la structure. Cette variabilité peut avoir plusieurs origines : les aléas ont principalement deux origines, aléas intrinsèques (contrainte de fonctionnement) et aléas extrinsèques (contrainte de qualité).

I. 4. 1.1. Aléas intrinsèques :

Les aléas intrinsèques qui peuvent affecter la qualité du produit sont attachés principalement aux contraintes de fonctionnement (forces internes, mouvement...) et les contraintes de qualité (nature des matériaux, qualité de surface, précision des mesures...) [21]. Premièrement, l'incapacité à maîtriser la modélisation des forces internes dans les matériaux est une source majeure de l'incertitude. Deuxièmement, pour des raisons de coûts, l'assurance des matières premières au même niveau de qualité s'avère difficile. À cet effet, des variations dans les caractéristiques d'un même matériau sont constatées. Afin de prendre en considération cette variabilité, les fournisseurs offrent des produits avec des intervalles de tolérances.

La dispersion dans les propriétés des matériaux est représentée par des variations dans les caractéristiques des matériaux :

- ✓ Le module d'Young E ;
- ✓ Le coefficient de poisson ν ;
- ✓ La masse volumique ρ ;
- ✓ La limite élastique σ_e .

De plus, la qualité de surface influe considérablement sur le comportement des structures. Par conséquence, l'amorçage de fissure se fait plus rapidement dans les produits avec des surfaces maltraitée. Finalement, L'erreur humaine et l'imprécision d'usinage d'une machine génèrent des variations affectant la qualité de la structure. Ces variations se manifestent par des dispersions sur la géométrie et des imperfections des coupes.

I. 4. 1.2. Aléas extrinsèques :

Les aléas extrinsèques sont liés principalement à l'environnement, et peuvent avoir deux origines : les contraintes climatiques (température, pression, humidité...) et les contraintes mécaniques (chargement, déformations imposées...) [21]. Premièrement, par définition, la fiabilité est caractérisée par quatre aspects (la probabilité, l'accomplissement d'une fonction

requis, des conditions données relativement à l'environnement et l'utilisation, le temps). Par conséquent, la structure devrait respecter les conditions d'utilisations spécifiées dans le cahier des charges. Cependant, un dépassement des conditions d'utilisation peut être enregistré. Par exemple, un dépassement de la charge ou de la température d'utilisation prévue par le cahier des charges. Deuxièmement, certaines forces exercées sur la structure sont de nature incertaine, comme le vent, la houle, le trafic sur un pont. Ces grandeurs varient dans le temps et ils sont difficiles à déterminer de façon précise

I. 4. 2. Risque :

Le risque est défini par l'existence d'un événement redouté possédant une probabilité d'occurrence et par la gravité des conséquences de cet événement [22]. [23]. La relation suivante est souvent donnée :

$$\text{Risque} = \text{Probabilité} \times \text{Gravité}$$

Le diagramme de Farmer [22] comme indiqué en figure II.1 illustre la probabilité vis-à-vis de la gravité de conséquences. Nous trouvons pour le même niveau du risque. La probabilité de réalisation est plus grande en "conséquence mineur" que celle en "conséquence critique". Ce diagramme est vraiment utile dans la conception des structures afin de savoir le niveau du risque accepté.

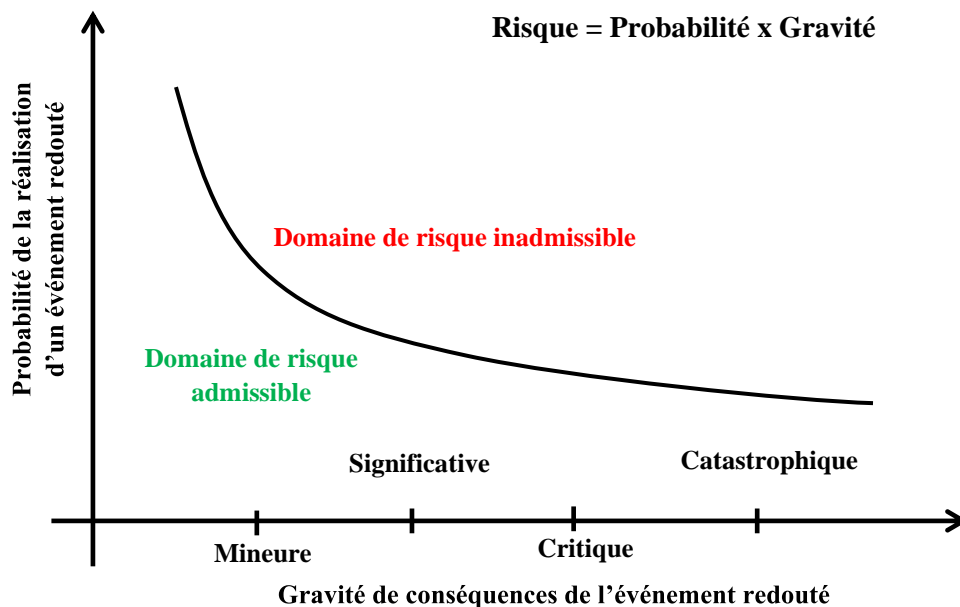


Fig.I.1. Diagramme de farmer : probabilité gravité [22].

I. 4. 3. Mécanique fiabiliste :

L'objectif de la modélisation est de construire des modèles explicatifs et prévisionnels des phénomènes physiques. Mais il existe toujours une déférence entre un modèle de comportement d'une structure et la réalité physique. Il faut donc effectuer les procédures de validation des modèles qui permettent de maîtriser cet écart.

Dans le cas de l'analyse fiabiliste, les modèles mécaniques appliqués permettent d'évaluer la sollicitation prévue et la ressource nécessaire. La sollicitation est associée au résultat de l'application des excitations à la structure et la ressource est associée à la disponibilité ou à la résistance des matériaux. L'analyse fiabiliste s'appuie sur un scénario de défaillance combinant l'évaluation des sollicitations et des résistances. Dans ce cas, le scénario traduit l'équilibre entre la ressource et le besoin et il s'exprime par une fonction de performance.

A partir d'une présentation générale, nous montrons les hypothèses qui permettent de se rapprocher d'un simple problème résistance-sollicitation. Un matériau est une structure mécanique sont considérés comme des systèmes comportant une entrée, un état et une sortie. Notons :

- $A_i(t)$ - les i données d'**entrée** du système mécanique, fonction du temps t , en générale le chargement ou les actions.

- $k_j(t)$ - les j données d'**état** du système mécanique. Elles contiennent des caractéristiques géométriques, celles des matériaux et les conditions aux limites.

- $R_l(t)$ - les l variables de la ressource disponible, en contexte mécanique ce sont principalement les résistances et les déplacements admissibles.

Un modèle de calcul permet de simuler une réalisation des besoins (sollicitations) qui constituent les k variables de sortie du modèle noté S_k et une réalisation des ressources $R_l(t)$. Si $G(\dots)$ est un opérateur mathématique représentatif du modèle mécanique, il existe alors une relation du type

$$G(t, A_i, k_j, S_k, R_l) = 0 \quad (\text{I.1})$$

Le succès d'un dimensionnement est traduit par la vérification d'une inégalité qui est une fonction du temps t , du type :

$$G((S_k(t), R_l(t)) > 0, \forall t \in [0, T] \quad (\text{I.2})$$

et dans un cas simple de séparation des variables :

$$S_k(t) < R_l(t), \forall t \in [0, T] \quad (\text{I.3})$$

Où $[0, T]$ est la durée de vie exigée ou période de référence pour laquelle le dimensionnement est étudié. Le concepteur tend alors à déterminer le meilleur dimensionnement, c'est-à-dire celui qui optimise un critère objectif pour un niveau de fiabilité donnée. Il propose des performances associées à une règle de fonctionnement qui représente le scénario de défaillance. Un schéma type de ce système illustre la démarche présentée :

$$A_i(t) \rightarrow k_j(t) \rightarrow S_k(t) (\text{réponse} = \text{sollicitation}) < R_l(\text{ressource}) \quad (\text{I.4})$$

En calcul des structures, l'identification des variables est simple. Il vient par exemple dans le contexte de la méthode des éléments finis :

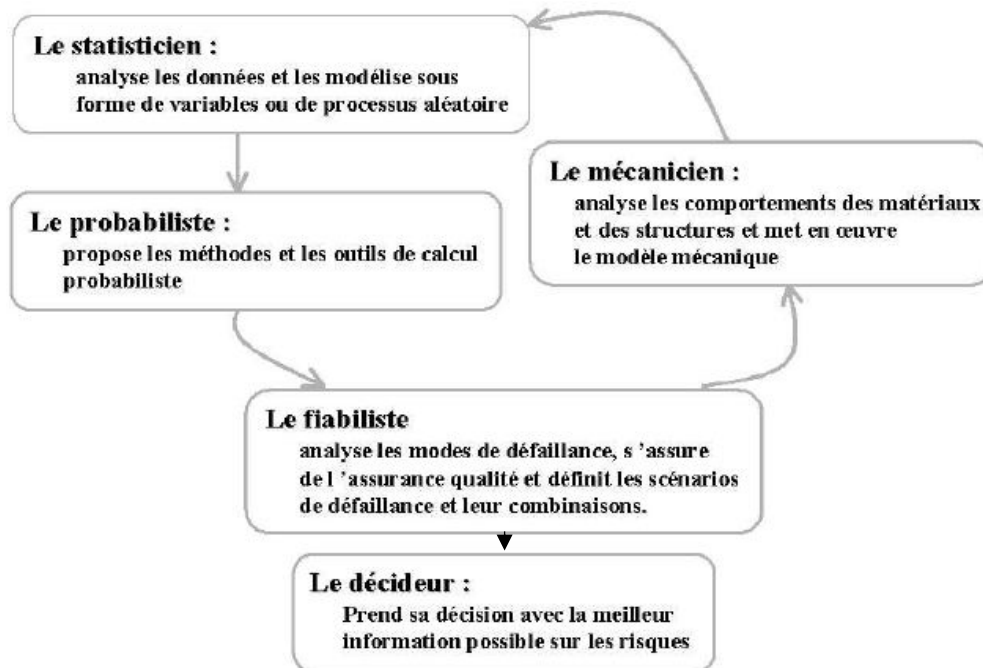


Fig. I.2. Acteur de couplage mécano-fiabiliste [22].

- L'entrée est le vecteur des forces extérieures $\{F\}$;
- L'état est caractérisé par la matrice de rigidité $[K]$ et par le vecteur des déplacements $\{U\}$. Les autres éléments de S_K : effort tranchant, contraintes, déformations..., sont calculées à partir de $\{U\}$.
- La sortie est donnée par le vecteur déplacement ou les autres résultats.

La fonction d'état-limite qui est construite par la relation $G(\dots)$ est donc la fonction de performance nulle. Elle est exprimée en fonction des variables de base. Celle-ci comprend les données relatives aux actions, aux paramètres d'état, mais également aux résistances. Dans ce cas, la différence entre la sollicitation et la résistance est une marge qui est une variable aléatoire.

Actuellement, le modèle qui associe une procédure de calcul mécanique est une procédure de calcul fiabiliste constituée en modèle mécano-fiabiliste [29]. Il existe une très forte interaction entre diverses spécialités voire figure (I.2) qui apportent collectivement au décideur une information supplémentaire.

- **Le statisticien** analyse les données, les conditionne et les modélise en fonction d'un usage prévisible. Il identifie les variables aléatoires et les processus. Il doit dialoguer avec le mécanicien ou le spécialiste des matériaux susceptible de lui apporter des informations sur l'origine physique des variabilités.
- **Le probabiliste** propose les méthodes et les outils du calcul des probabilités. Il les met en œuvre.

- **Le fiabiliste** analyse les modes de défaillance, s'assure de l'assurance qualité et définit les scénarios de défaillance et leurs combinaisons.
- **Le mécanicien** analyse les comportements des matériaux et des structures et garantit la bonne utilisation des modèles mécaniques mis en œuvre.

I. 4. 4. Aléas et représentation des aléas :

Les analyses de fiabilité des structures reposent sur la donnée d'un modèle probabiliste des paramètres intervenant dans la modélisation mécanique utilisée vis-à-vis des modes de défaillance considérés. Ce modèle doit dans des cas, être construit à partir de données statistiques issues de l'expérimentation qui permettent de modéliser l'aléa.

I. 4. 4.1. Approche probabiliste :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est la correspondance entre les différentes valeurs possibles de la variable aléatoire et les probabilités des événements associés. Il existe une fonction $f_X(x)$: appelée densité de la variable aléatoire telle que :

$$P_r(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x)dx \quad (I.5)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X réelle est l'application F_X de \mathbb{R} dans $[0,1]$ défini par :

$$F_X(x) = p_r(X \leq x) \quad (I.6)$$

F_X : est une fonction monotone croissante continue à gauche. si X est continue réelle, la notion de continuité se confond avec celle d'existence d'une densité de probabilité $f_X(x)$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy \quad (I.7)$$

Nous présentons ci-dessous quelques définitions des caractéristiques des variables aléatoires.

- **Médiane** : nous appelons la médiane la valeur m_0 de la variable aléatoire ou du caractère statistique telle que $F_X(m_0) = 0.5$. Dans le cas continu m_0 est parfaitement déterminé. Si nous avons une répartition en classe qui contient la médiane $m_0 \in [x_k; x_{k+1}]$ Si $F(x_k \leq 0.5)$ et $F_X(x_{k+1}) > 0.5$. Ensuite nous déterminons m_0 par interpolation linéaire en supposant une distribution uniforme à l'intérieur de la classe médiane.

- **Ecart-type σ** : racine carrée de la variance :

$$\sigma^2 = var[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad (I.8)$$

- **Mode** : nous appelons mode, la valeur qui correspond à un maximum de la densité de probabilité.

- **Espérance Mathématique** : la notion de la base qui mène aux calculs ultérieurs est l'espérance mathématique qui est définie par :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx \quad (I.9)$$

Pour une variable aléatoire de type continue, et

$$E(X) = \sum_i P_i x_i \quad (\text{I.10})$$

Pour une variable aléatoire de type discret où P_i est la probabilité associée à x_i .

– **Coefficient de variation :**

$$v = \sigma/\mu \quad (\text{I.11})$$

- **les principales lois probabilistes utilisées dans la fiabilité (voir Annexe III) :**

- Loi normale (Laplace-Gauss).
- Loi Log-normale (ou de Galton).
- Loi exponentielle.
- Loi de Weibull.
- Loi Gamma.
- Loi de Gumel (loi de valeurs extrême de type I).

I. 5. Variables de base :

Appelées aussi variables de conception, elles sont les composantes d'un vecteur X. Ce sont des variables aléatoires d'entrée d'un calcul de fiabilité. Elles sont caractérisées par une loi de densité conjointe de probabilité $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots)$, où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le vecteur des réalisations des variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) . Cette information est souvent indisponible, elle est limitée à la connaissance des deux propriétés suivantes :

- La loi marginale de chaque variable X_i : $f_{X_i}(x_i)$;
- La corrélation entre chaque couple de variables (X_i, X_j) : $\rho_{ij}(X_i, X_j)$.

I. 6. Fonction d'état limite :

Appelée aussi fonction de performance et notée $G(X)$, son intersection avec l'hyperplan des variables définit la frontière entre le domaine de sécurité D_s et le domaine de ruine D_f . Une valeur positive de G signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant $G(X) = 0$ est appelée courbe d'état limite. Lorsque la fonction d'état s'écrit sous la forme de la différence d'une résistance et d'une sollicitation $G = R - S$, elle est appelée marge de sécurité et est notée Z . Cette fonction d'état limite nous permet donc de préciser au-delà duquel le système physique étudié n'est plus considéré comme fiable.

I. 7. Probabilité de défaillance :

C'est la probabilité d'avoir une valeur négative d'une réalisation de la fonction d'état $G(X)$, elle est notée P_f (probability of failure).

Dans le cas général, on peut écrire $G(X)$ comme la différence entre la résistance de la structure R et la sollicitation S, comme suit :

$$G(X) = R - S \tag{I.12}$$

À partir de l'équation (I.12), on peut dire qu'un scénario de fonctionnement est produit lorsque la disponibilité d'une résistance est supérieure à la sollicitation, et dans le cas contraire (c.-à-d. la disponibilité d'une résistance est inférieure ou égale à la sollicitation) on aura un scénario de non-fonctionnement.

La fiabilité est alors définie par :

$$P_r = Prob(G(X) > 0) = \int_{G(X)>0} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{I.13}$$

La probabilité de défaillance est le complément à 1 de la fiabilité :

$$P_f = 1 - P_r = \int_{G(X) \leq 0} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \tag{I.14}$$

Où : $f_X(x_1, \dots, x_n)$ représente la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x .

Lorsque les n variables aléatoires X_i de base sont indépendantes, l'expression de la densité de probabilité conjointe est égale au produit de toutes les densités de chaque variable :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \tag{I.15}$$

I.7.1. Cas des variables résistances-sollicitation :

Considérons la formulation simple où la résistance X_1 et la sollicitation agissante X_2 sont des variables de sortie indépendantes du temps. Il est alors possible de décrire l'état de la structure à travers une seule variable aléatoire globale, la marge $Z = f(X_1, X_2)$, ce qui constitue le cas élémentaire résistance-sollicitation voire figure ci-dessous ;

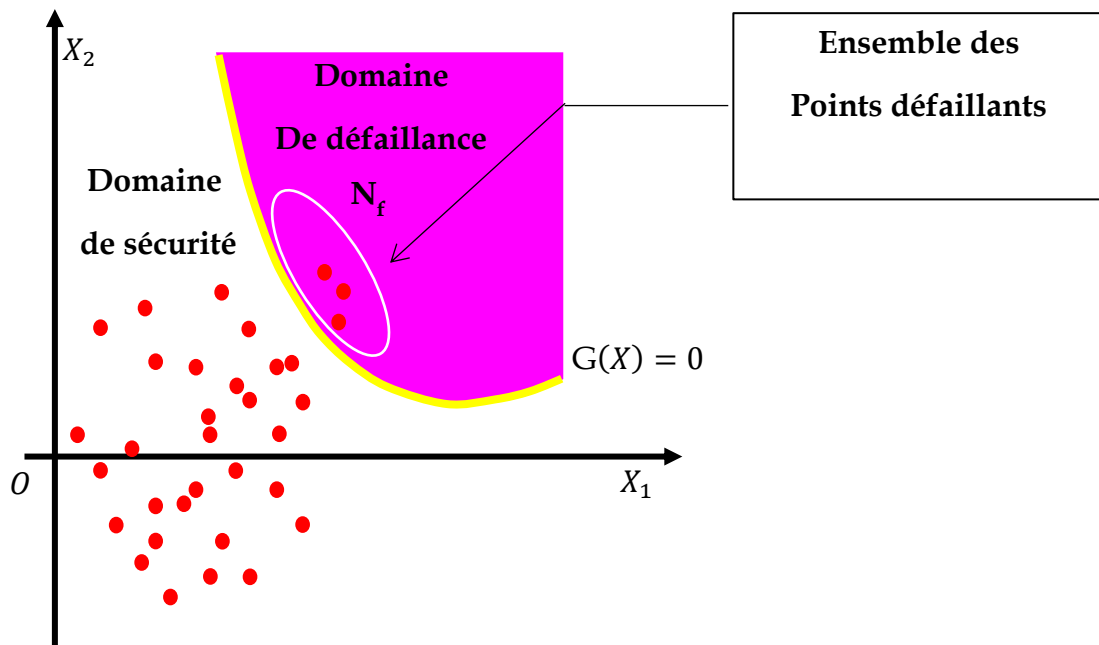


Fig. I.3. Etat -limite de variable résistance-sollicitation.

Nous avons donc ;

Variable aléatoire	:	Résistance et Sollicitation	
Vecteur des v. a	:	$\langle X_1 \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle$	
Fonction d'état limite	:	$G(\{X\}) = G(X_1, X_2) = 0$	
Domaine de sécurité	:	$G(\{X\}) = G(X_1, X_2) > 0$	(I.16)
Domaine de défaillance	:	$G(\{X\}) = G(X_1, X_2) \leq 0$	

Le scénario de fonctionnement est la disponibilité d'une résistance supérieure à la sollicitation c'est-à-dire :

$$G(X_1, X_2) > 0 \quad (\text{I.17})$$

Et le scénario de non-fonctionnement, ou la défaillance, est alors :

$$G(X_1, X_2) \leq 0 \quad (\text{I.18})$$

La mesure de la défaillance est alors la probabilité associée à l'évènement $\{G(X_1, X_2) \leq 0\}$, soit :

$$\text{Probabilité de défaillance} = P_f = \text{Prob}(G(X_1, X_2) \leq 0) \quad (\text{I.19})$$

Les deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont caractérisées par une densité conjointe de probabilité notée $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$. La probabilité de défaillance P_f associée à la marge Z , est le poids probabiliste de la partie de l'espace constitué par le domaine $D_f: Z = G(X_1, X_2) \leq 0$

$$P_f = \text{Prob}(G(X_1, X_2) \leq 0) = \int_{G(X_1, X_2) \leq 0} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{I.20})$$

Toute démarche d'une analyse de la fiabilité d'une structure comporte, généralement, cinq étapes qui sont : Étape 1 : la construction de la fonction de performance (fonction d'état limite) ; Étape 2 : l'identification des variables de base (conception) ; Étape 3 : la modélisation statistique des variables de base ; Étape 4 : l'analyse de la fiabilité ; Étape 5 : la prise de décisions.

I. 8. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire :

I. 8.1. Comportement non linéaire des structures :

L'hypothèse du comportement linéaire des structures linéaires à un domaine de validité restreint. En effet, la modélisation du comportement réel des matériaux fait appel à une relation contraintes-déformations qui est non linéaire, aussi, de nos jours les structures sont de plus en plus légères et soumises à des excitations importantes, ce qui conduit à de grands déplacements et à une relation déplacements-déformations non linéaire. Ainsi on distingue différentes sources de non-linéarités possibles dans les structures [24] :

- Les **non-linéarités matérielles** en petits déplacements et petites et grandes déformations, où la relation contraintes-déformations est non linéaire. Elles peuvent provenir de la loi de

comportement, de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures.

- Les **non-linéarités géométriques** en grands déplacements et petites déformations, où la relation déplacements-déformations peut être non linéaire. Elles peuvent provenir des instabilités de forme des pièces élancées ou de structures élancées à nœuds déplaçables.
- Les **non-linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations, où les relations contraintes-déformations et déplacements-déformations sont généralement non linéaires. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non linéaire des structures.
- Les **non-linéarités** provenant des **conditions aux limites**, dans ce cas les forces de réactions ou de liaisons entre plusieurs structures dépendent d'une manière non linéaire des déplacements. On peut les trouver lors des modélisations de choc, contact et frottement.

En effet dans cette présente étude on ne s'intéresse pas aux **non-linéarités** provenant des **conditions aux limites**, et les **non-linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations.

I. 8.2. Évolution de l'analyse non linéaire :

Les bases de l'analyse non linéaire matérielle ont été les premières à être établies à cause de leur simplicité. Deux différentes approches ont été proposées : la méthode des déformations initiales et celle du module tangent. Dans la première méthode, pour un accroissement de charge, on calcule un accroissement des déformations plastiques qui sont ensuite considérées comme des déformations initiales pour corriger l'état des contraintes dans le milieu étudié. Cette technique ne pouvant s'appliquer dans le cas des matériaux sans écrouissage a été vite abandonnée en faveur de la technique du module tangent, actuellement connue sous le nom de méthode incrémentale, où on effectue le calcul d'une matrice tangente qui dépend des lois de comportement incrémentales. En 1969 Zienkiewicz et al [25] ont proposé la technique dite de contraintes initiales. Puis en 1973 Frey [25] a démontré que cette dernière approche n'est qu'un cas particulier de la méthode générale dite incrémentale.

Après une série d'applications spécifiques, les équations d'une formulation générale de l'analyse non linéaire géométrique ont été établies par Yagmai [26] en 1968 pour la description lagrangienne actualisée où la dernière position d'équilibre de la structure est considérée comme la configuration de référence, et par Marcal et Oden [25] à peu près à la même époque pour la description lagrangienne totale où on fixe l'état initial comme référence (Frey [25]1978). Dans les deux cas, les déformations étaient supposées infinitésimales.

A. Grelat [27] a été parmi les premiers à prendre en compte dans la simulation ces deux types de non-linéarité. Le comportement du béton comprimé a été modélisé par la loi de Sargin, et celui des zones tendues a été simulé à l'aide d'une forme originale de loi de comportement où le béton est représenté par un diagramme de contrainte fictive triangulaire à partir de la fibre neutre. Ses travaux ont été complétés par O. Naït-Rabah [28] qui a étendu les simulations numériques aux structures tridimensionnelles. Afin d'améliorer les simulations des grands déplacements et des grandes rotations, F. Robert [29] a proposé d'y introduire une description Co-rotationnelle du mouvement pour le traitement de la non-linéarité géométrique. D'autres auteurs ont complété des codes existant en développant des éléments finis spécifiques comme par exemple, B. Espion [24] qui a proposé un élément fini plan de poutre à 9 degrés de liberté.

Une présentation exhaustive sur l'analyse non linéaire peut être trouvées dans les références [25], [29]

I. 8.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes :

Le début de l'analyse non linéaire remonte à 1968, quand NILSON [30] propose une analyse non linéaire de structures en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis. Aussi dans la même année un article de JENNINGS [29] va être le point de départ d'une série de travaux, dont le présent. La non-linéarité géométrique en 2D, peut-être prise en compte de façon exacte, grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes.

- En 1970, FRANKLIN [28] a développé une étude tenant compte que des effets de non-linéarité matérielle, il a élaboré une formulation plane où apparaissent pour chaque nœud d'un élément de poutre 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation). Les lois de comportement sont données point par point (multilinéaire). La rigidité du béton tendu entre deux fissures est négligée. Dans la même année, GUNNIN [28] est le premier qu'a introduit la non-linéarité géométrique, la matrice des contraintes initiales (ou rigidité géométrique) est absente. En ce qui concerne les effets de non-linéarité matérielle, les rigidités extensionnelles (E.A) et les rigidités flexionnelles (E.I) sont supposées constantes le long de l'élément, tout en négligeant la résistance du béton tendu, puis dans la même année LAZARO [29] qui apporte une correction à la formulation de GUNNIN en tenant compte de la fissuration.

- En 1972, MENEGOTTO et PINTO [28] ont utilisé une méthode qui tient compte de la non-linéarité géométrique en introduisant l'hypothèse des petits déplacements lors du passage du repère intrinsèque d'un élément à un repère fixe. Et la prise en compte aussi de la non-linéarité matérielle dans un repère mobile lié à la position déformée de l'élément. En 1978, GRELAT [27] c'est inspiré des travaux de MENEGOTTO et PINTO [29], a développé un programme de calcul des ossatures planes en béton armé, en introduisant la loi de SARGIN pour le comportement du béton en compression, et en se basant sur le diagramme parabolique pour le béton tendu.

- En 1979, FERRARO-MAIA [31] poursuit le travail de GRELAT au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Cette dernière est introduite par la méthode interne explicitée par FAUCHART [31]. L'influence de l'inclinaison des câbles dans la formation de la matrice de rigidité n'est pas prise en compte. En 1986, ESPION [24] introduit un élément de poutre plane à 9 degrés de liberté. Cette approche est plus complète et réaliste vis-à-vis de la non-linéarité matérielle et géométrique. La tension stiffening et les effets différés sont pris en compte. Son modèle a été confronté avec de nombreux résultats publiés.

Dans les travaux cités précédemment, la déformation d'effort tranchant n'est pas prise en compte.

- En 2006, KACHI MS., FOURE B., BOUAFIA Y., MULLER P. [32] [33] poursuivent les travaux de GRELAT [27] et NAIT-RABAH [28] en développant un modèle qui tient compte de l'effet combiné de la flexion plane et de l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliqué aux poutres en béton armé et précontraint. Le programme développé a été validé sur plusieurs poutres en béton armé et précontraint qui ont fait l'objet d'essais.

I. 8.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles :

- Le premier élément de poutre en béton armé tridimensionnel a été développé par CHAN [28] en 1981, l'analyse prend en compte les effets du second ordre, ainsi que les effets différés. L'influence de l'effort tranchant est absente, alors que la torsion est tout à fait découplée. Les

sections sont discrétisées en fibres et non pas en couches. La rigidité torsionnelle provient d'une pente dans un diagramme idéalisé trilineaire "moment de torsion– rotation de torsion", construit à l'aide d'une théorie de treillis pour déterminer le moment et la rotation de plastification sans tenir compte de l'effort normal. Les vérifications effectuées portent sur des structures planes.

- En 1984, le programme de MARI [28] est le prolongement du travail de CHAN. La précontrainte est introduite selon la méthode de KANG [28]. Cependant la validation du modèle se limite uniquement à des exemples théoriques.

- Pour les structures métalliques, on peut citer le travail effectué par DE VILLE DE GOYET [29] en 1989. Faisant suite aux travaux de FREY [29], DE VILLE DE GOYET établit un bilan des différentes formulations en grands déplacements et se livre à une comparaison très complète de différents éléments finis. Il introduit un élément fini dit de Marguerre modifié à 7 degrés de liberté, qui modélise le gauchissement des sections.

- En 1990, NAIT-RABAH [28], poursuit le travail de GRELAT [27], qui, rappelons-le, est basé sur les coordonnées convectées introduites par JENNIGS [29]. Le programme est étendu aux problèmes tridimensionnels. La prise en compte de la non-linéarité matérielle est complète. Les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion sont introduits, mais en faisant l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau sous sollicitations tangentes. Cependant, la non-linéarité géométrique n'est que partiellement appréhendée. En effet, les déplacements doivent rester modérés, et les rotations petites. Le programme est validé sur de nombreux cas expérimentaux, ayant néanmoins des déplacements modérés.

- Les développements les plus récents sur le béton armé concernent la formulation de nouvelles lois de comportement s'appuyant sur la théorie de l'endommagement. Cette approche est dictée par le calcul au séisme, pour lequel le chargement est cyclique. Le modèle d'endommagement développé par MAZARS est issu d'une formulation thermodynamique des milieux continus.

- En 1994, ULM [34] utilise également un modèle d'endommagement. Il adopte une approche semi-globale : l'élément qu'il utilise est en fait discrétisé en fibres parallèles à la ligne moyenne de l'élément. Chaque fibre dispose d'une loi de comportement, d'un endommagement et d'un historique. Cet élément est inséré dans une description corrélationnelle afin de prendre en compte les effets de la non-linéarité géométrique.

- En 1999, F. ROBERT [29] poursuit le travail de GRELAT [27] et de NAIT-RABAH [28], il a proposé d'y introduire une description Co rotationnelle du mouvement pour le traitement de la non-linéarité géométrique, en décomposant le mouvement d'une particule en un mouvement de corps rigide de grande amplitude et un mouvement modéré induisant les déformations. Ceci permet de prendre en compte les grands déplacements et les grandes rotations pour des éléments de poutre tridimensionnels alors que la non-linéarité matérielle repose sur l'hypothèse des petites déformations.

- En 2011, ADJRAD A., KACHI MS., BOUAFIA Y., IGUETOULENE F. [35] ont repris la formulation de NAIT-RABAH [28] qui traite le calcul non linéaire matérielle et géométrique des structures en béton armé et précontraint tridimensionnelles. Et qui prend en compte la non-linéarité matérielle, et la non-linéarité géométrique sous l'hypothèse que les déplacements doivent rester modérés, et les rotations petites, et sous l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau sous les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion. Le programme développé a été validé sur de nombreux cas expérimentaux, ayant néanmoins des déplacements modérés.

I. 9. Modélisation des matériaux à comportement réels :

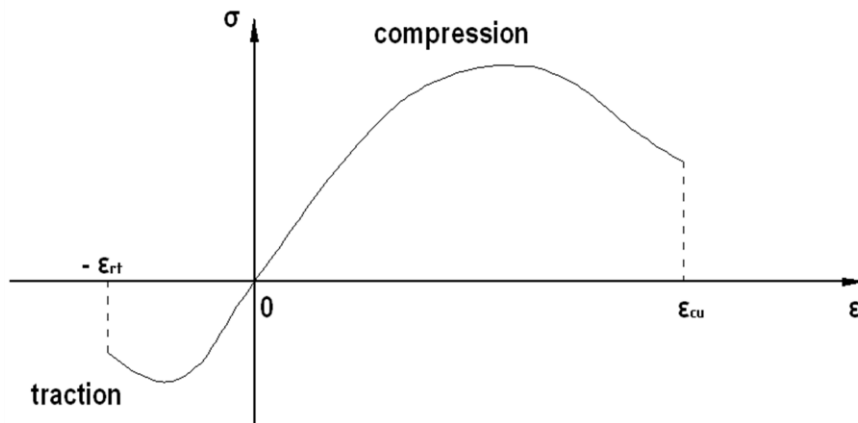


Fig. I.4. Diagramme représentant la loi de comportement du béton

Cette courbe se caractérise par la valeur de $\varphi(\epsilon)$ qui est considérée comme nulle au-delà de la rupture du béton en compression et en traction (respectivement pour des déformations ϵ_{cu} et $-\epsilon_{rt}$).

I. 9.1. Comportement du béton ordinaire :

Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton. Nous adoptons ici la loi de SARGIN pour le comportement du béton ordinaire en compression, et le modèle de GRELAT pour le comportement du béton ordinaire en traction.

I. 9.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN [07] :

Les relations qui lient les contraintes aux déformations instantanées des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque. Ces lois sont définies en fonction des paramètres : E_{b0} , f_{cj} , ϵ_{b0} , ϵ_{ll} . L'aspect qualitatif de la loi de comportement contrainte-déformation, prend la forme de la courbe représentée ci-dessous :

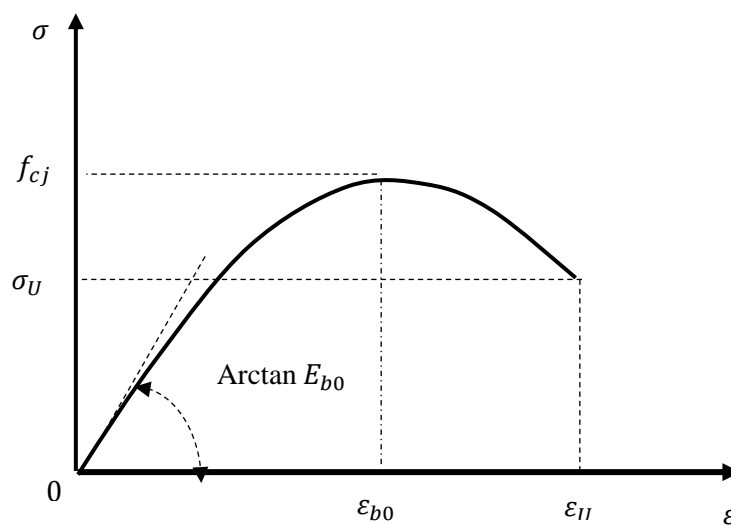


Fig. I.5. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [07]

Ce modèle est essentiellement utilisé dans le calcul des structures en béton armé et précontraint, et présente deux branches :

- Une branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un modèle tangent initial E_{b0} , et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_{cj} ;
- Une branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

En admettant un comportement élastique non linéaire, la contrainte est décrite par la loi de SARGIN suivante :

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \cdot \bar{\varepsilon} + (\hat{k}_b - 1) \cdot \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \cdot \bar{\varepsilon} + \hat{k}_b \cdot \bar{\varepsilon}^2} \quad (I.21)$$

Tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \quad \text{et} \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{cj}} \quad \text{et} \quad E_{b0} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Avec : E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton à l'origine ;

ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ;

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j,

k_b et \hat{k}_b : Sont des paramètres adimensionnels qui ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin.

Le paramètre \hat{k}_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante :

$\hat{k}_b = 0 \Rightarrow$ On obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, Correspondant à des bétons ayant un comportement fragile,

$\hat{k}_b = 1 \Rightarrow$ On obtient des courbes assez plates correspondant à des bétons ayant un comportement ductile.

Nous pourrions adopter d'après [29] :

$$\hat{k}_b = \begin{cases} k_b - 1 & \text{pour } f_{cj} \leq 30 \text{ MPa.} \\ 0 & \text{pour } f_{cj} \geq 55 \text{ MPa.} \\ (k_b - 1) \cdot \left(\frac{55 - f_{cj}}{25}\right) & \text{pour } 30 \text{ MPa} < f_{cj} < 55 \text{ MPa} \end{cases} \quad (I.22)$$

I. 9.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT [27] :

La formulation de Grelat [27] attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Figure I.6), dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

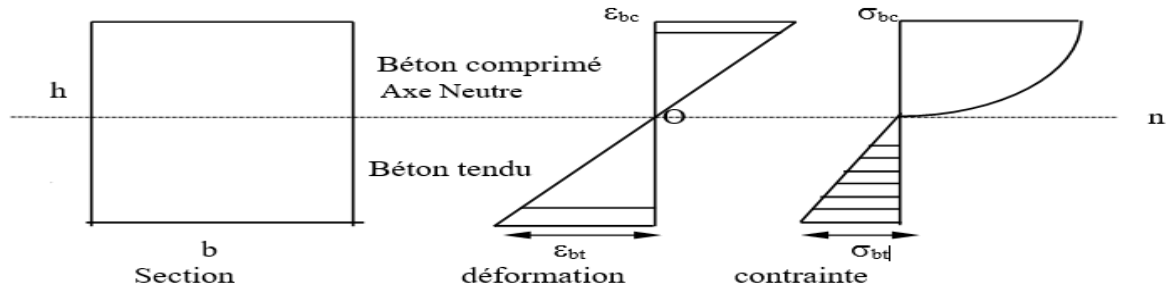


Fig. I.6. Comportement du béton ordinaire avant fissuration (sans coefficient de sécurité)

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} définie à partir de la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \tag{I.23}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives.

La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus. Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section située entre deux fissures, donne les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} & \text{si } |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft} \rightarrow \text{Pas de fissuration, participation} \\ & \text{complète du béton avec le module } E_{b0}. \\ \sigma_{bt} = -f_{tj} \cdot \frac{(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} & \text{si } \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration avec} \\ & \text{participation du béton tendu.} \\ \sigma_{bt} = 0 & \text{si } |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration sans} \\ & \text{participation du béton tendu.} \end{array} \right. \tag{I.24}$$

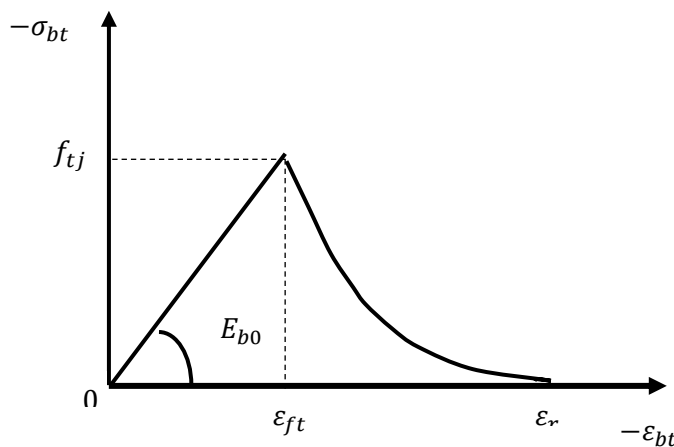


Fig. I.7. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton ordinaire sur le bord tendu selon Grelat [27]

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{tj} : Résistance du béton a la traction,

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

ε_{bt} : Déformation de la fibre du béton la plus tendue.

I. 9.2. Module de cisaillement du béton :

Dans les études classiques sur ce sujet, la résistance au cisaillement est négligée ou considérée par la simple formule de la théorie de l'élasticité linéaire. Certaines méthodes avancées [36], [37] [38], [39] [40] [41], calculent un module de cisaillement du béton variable en résolvant un système complexe d'équations ; à savoir équations d'équilibre, équations de compatibilité et lois de comportement des matériaux Une équation empirique simple pour le calcul du module de cisaillement post-fissuration a été proposée dans [42]. Dans cette présente étude, les formules proposées par Adjrad et all [43] pour le calcul du module de cisaillement du béton sont adoptées. Le module de cisaillement est calculé dans les trois phases de comportement ; par l'élasticité linéaire avant la fissuration du béton et en fonction des armatures et du béton après fissuration du béton et après plastification de l'acier.

Phase 1 : Avant fissuration du béton, la théorie de l'élasticité linéaire est valide, le module de déformation transversale G est fonction du module de déformation longitudinale E_c du béton à l'origine, et il est donné par l'Eq. (I.25).

$$G = \frac{E_c}{2(1 - \mu)} \quad (0 \leq \gamma \leq \gamma_{fiss}) \quad (I.25)$$

Phase 2 : Après la fissuration du béton et avant la plastification de l'acier, le module de déformation transversale G est fonction des caractéristiques du béton et des aciers ; le module de déformation transversale est donné par Eq. (I.26).

$$G = 604 w \quad (\gamma_{fiss} \leq \gamma \leq \gamma_{plas}) \quad (I.26)$$

Phase 3 : Cette phase correspond à la plastification des aciers ; le module de déformation transversale G est fonction des caractéristiques des matériaux voir Eq. (I.27).

$$G = 327w \quad (\gamma_{plas} \leq \gamma \leq \gamma_{fr}) \quad (I.27)$$

Où : $\gamma_{fiss} = 0.0003$; $\gamma_{plas} = 0.0025$; $\gamma_{fr} = 0.006$; μ : est le coefficient de Poisson, il est pris égal à 0.2.

$$\text{On note: } W = \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}}$$

Où ρ_t : est le rapport de ferrailage transversal ; ρ_l : est le rapport de ferrailage longitudinal ; f_{et} : est la limite d'élasticité du ferrailage transversal ; f_{el} : est la limite d'élasticité du ferrailage longitudinal ; f_{cj} : est la résistance à la compression du béton.

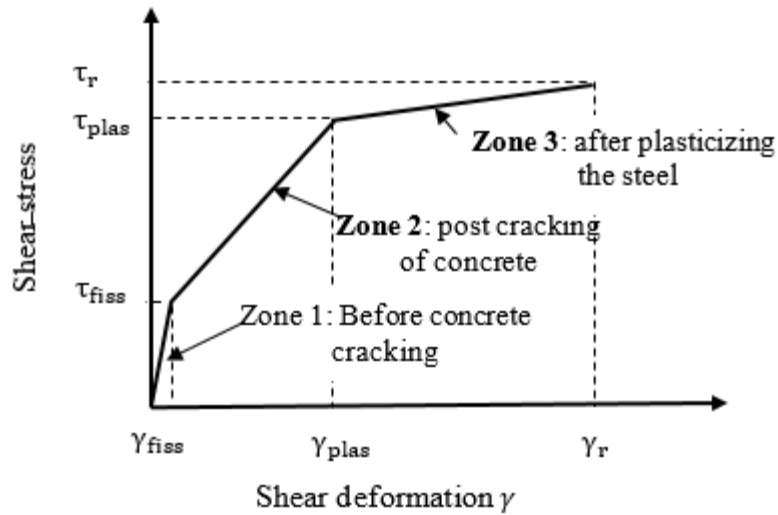


Fig. I.8. Comportement global Contrainte de cisaillement-distorsion Adjrad et al. [43]

I. 9.3. Comportement des aciers :

La loi contrainte-déformation pour l'acier a un comportement symétrique en compression et en traction sous chargement monotone, elle dépend de la nature de l'acier.

I. 9.3.1. Comportement des aciers passifs :

Généralement deux types d'aciers passifs sont utilisés pour le renforcement du béton : les aciers naturels et les aciers écrouis.

- Aciers naturels :

Les aciers naturels sont caractérisés par un diagramme issu de la loi de comportement élastoplastique avec raffermissement, (Figure I.9.).

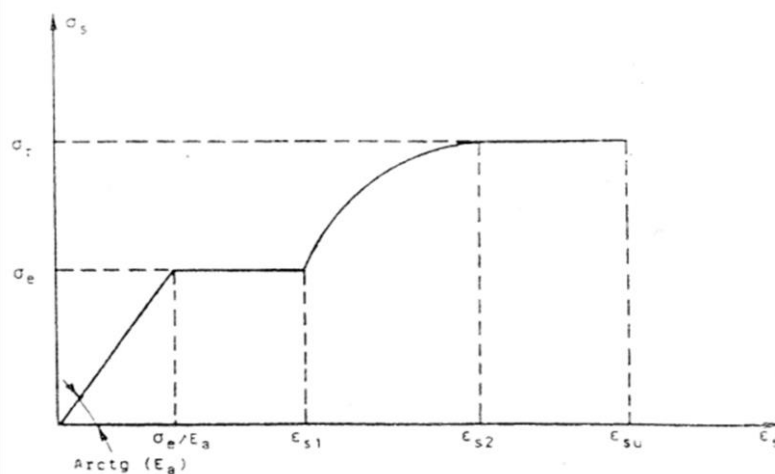


Fig. I.9. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élastoplastique avec raffermissement)

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon_s & \text{pour } 0 \leq \varepsilon_s < \sigma_e / E_a \\ \sigma_e & \text{pour } \sigma_e / E_a \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s1} \\ \sigma_e + (\sigma_r - \sigma_e) \cdot \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \cdot \left[2 - \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \right] & \text{pour } \varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s2} \\ \sigma_r & \text{pour } \varepsilon_s > \varepsilon_{s2} \end{cases} \quad (I.28)$$

Avec :

- ε_{s1} : Déformation correspondant à la fin du palier plastique,
- ε_{s2} : Déformation correspondant à la fin du raffermissement,
- ε_{su} : Déformation de rupture.

Pour des calculs aux états limites de résistance ou l'évaluation précise des déformations n'est pas nécessaire, on adopte la loi de comportement élastoplastique parfaite (Figure I.10).

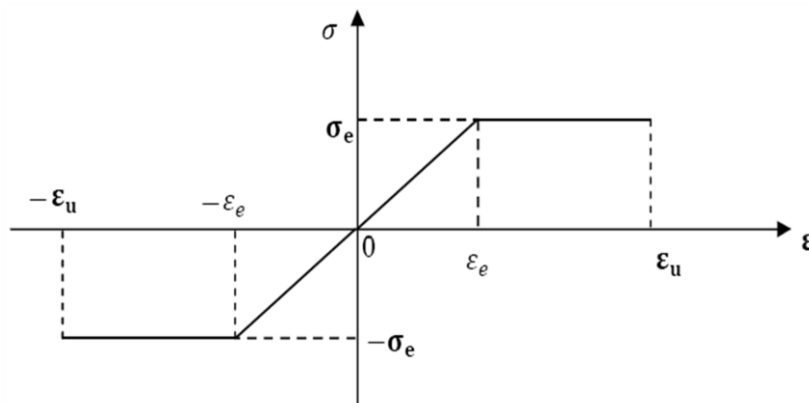


Fig. I.10. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élastoplastique parfaite) BAEL [44]

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon & \text{pour } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_e \\ \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \quad (I.29)$$

Avec :

- E_a : Module longitudinal de l'acier,
- ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,
- σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,
- ε_u : Déformation ultime de l'acier.

- **Aciers écrouis :**

Ils correspondent à des aciers écrouis généralement par torsion ou par traction pour améliorer leurs capacités, (Figure I.11).

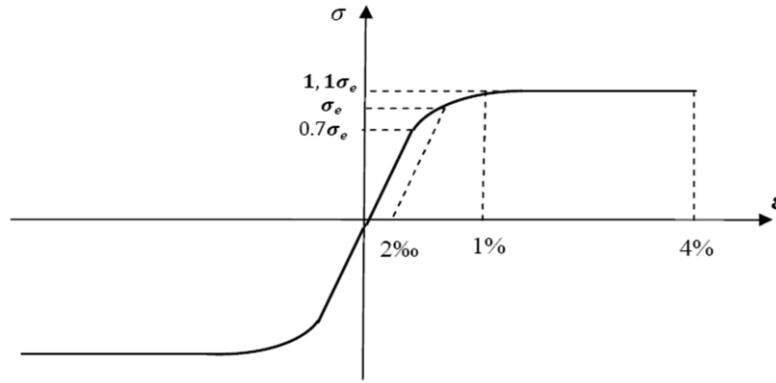


Fig. I.11. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis

Pour ce type d'acier, on adopte la loi préconisée par le règlement BPEL91 suppose un comportement élastique linéaire jusqu'à 70 % de la limite élastique. Mais au-delà, et jusqu'à des déformations de 1 %, on adopte une courbe du cinquième degré.

Pour des déformations supérieures à 1 % la contrainte reste constante, jusqu'à la déformation limite de 4 %. Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a \cdot \varepsilon_s & \text{pour} & 0 \leq \sigma_s \leq 0,7 \cdot \sigma_e \\ \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0,823 \cdot \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0,7\right)^5 & \text{pour} & 0,7 \cdot \sigma_e < \sigma_s < 1,1 \cdot \sigma_e \\ \sigma_s = 1,1 \cdot \sigma_e & \text{pour} & 1 \% \leq \varepsilon_s < \varepsilon_r \end{cases} \quad (I.30)$$

Avec :

E_a : Est le module d'Young de l'acier à l'origine,

σ_e : Est la limite élastique conventionnelle à 2‰,

$0,7 \cdot \sigma_e$: Est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire.

I. 9.4. Comportement du béton de fibre

Nous avons utilisé le modèle de Bouafia et al. [67] pour modéliser le comportement en traction du béton fibré. Une illustration graphique du modèle est présentée dans la Figure I.12.

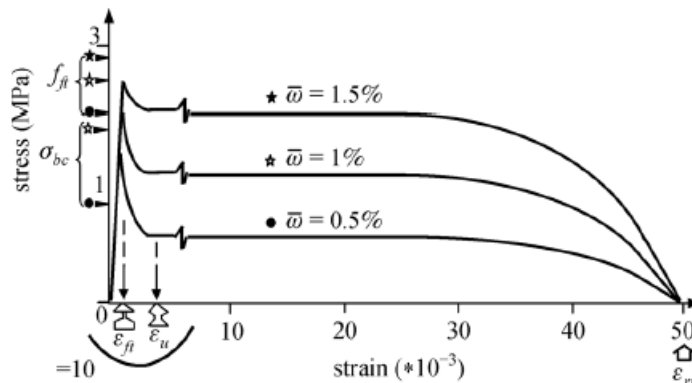


Fig. I.12. Le modèle de Bouafia et al. [67]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = E_{ct} \varepsilon & \text{Si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_U \\ \sigma = \sigma_{uc} - [\sigma_{uc} - f_{ft}] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & \text{Si } \varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ \sigma = \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} \right] & \text{Si } \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r \end{array} \right. \quad (\text{I.32})$$

σ_{uc} est donnée sur la formule suivante : $\sigma_{uc} = \omega \theta_o l_f \tau_u / \phi$

I. 10. Modélisation de la section

I. 10.1. Modélisation de la section de béton :

Pour mieux approcher le contour d'une section de béton de forme quelconque, la section de béton est considérée comme une succession de tables trapézoïdales [28]. Chaque table est définie par la largeur de sa base inférieure et supérieure : b_j , b_{j+1} ainsi que leurs ordonnées y_j , y_{j+1} , par rapport à un axe de référence passant par le centre de gravité de la section, (Figure I.13).

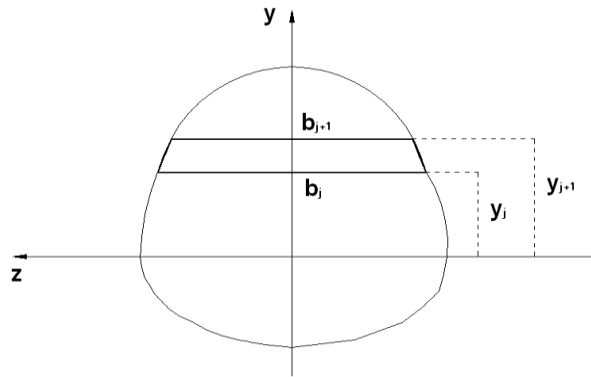


Fig. I.13. Discrétisation d'une section transversale de béton en tables trapézoïdales

L'indice j varie de 1 à $nbtra$, où $nbtra$ est le nombre total des trapèzes choisi dans la discrétisation de la section transversale de béton.

Le procédé d'intégration étant numérique (méthode de SIMPSON), l'expression de la largeur du trapèze d'ordre j à son ordonné y [28], est :

$$b(y) = b_j + (b_{j+1} - b_j) \cdot (y - y_j) / (y_{j+1} - y_j) \quad (\text{I.31})$$

I. 10.2. Modélisation géométrique des armatures :

La section de chaque armature passive est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini par son ordonnée y_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} , avec i variant de 1 à ns , où ns est le nombre de lits d'armatures.

I. 11. Conclusions :

Nous avons présenté dans ce chapitre ; dans une première partie, l'étendue historique de la fiabilité, quelques notions et définitions de base sur la fiabilité des structures, une définition des sources d'incertitude est également donnée. L'approche fiabiliste nous permet de trouver la probabilité de défaillance dans laquelle la structure se trouve dans le domaine de défaillance. L'approche probabiliste est basée sur les variables aléatoires et sa densité de probabilité, cette approche nous permet de calculer le niveau de fiabilité d'une structure, c'est-à-dire de trouver la probabilité de défaillance. Puis dans une seconde partie nous avons présenté un petit aperçu sur les non-linéarités qui existent et sur l'évolution de l'analyse non linéaire ainsi un ensemble de lois de comportement permettant la modélisation des comportements non linéaires des matériaux sous un chargement instantané et monotone jusqu'à la ruine. Nous disposons ainsi, de modèles de comportement réel des matériaux suivants :

Pour le béton ordinaire : en compression la loi de SARGIN, et en traction le modèle de GRELAT [27]. Pour le béton fibre le model de Bouafia. Pour l'armature passive : la loi élastoplastique parfaite ou bien la loi élastoplastique avec raffermisssement pour l'acier naturel, et la loi préconisée par le règlement BAEL 91 pour l'acier écrouis.

Ces modèles seront utilisés dans un programme de calcul non linéaire de structures soumis à des chargements statiques monotones jusqu'à la ruine.

CHAPITRE II :

METHODE DE CALCUL NON LINEAIRE DES STRUCTURES

Sommaire

II. 1. Introduction	29
II. 2. General hypothèses.....	29
II. 3. Etude de la section transversale de l'élément.....	29
II. 3.1. Les déformations	30
II. 3.1.1. Les déformations normales du béton	30
II. 3.1.2. Déformations tangentes au béton	30
II. 3.1.1. Déformation des armatures	30
II. 3.2. Calcul des forces interne.....	31
II. 3.2.1. Forces normales dues au béton	31
II. 3.2.2. Forces de cisaillement dues au béton	31
II. 3.2.3. Forces dues aux armatures	32
II. 3.3. External forces	33
II. 3.3. Equilibre de la section.....	33
II. 4. Etude de l'équilibre des structures	35
II. 4.1. La matrice de rigidité de la structure	35
II. 4.2. Système de coordonnées	36
II. 4.3. Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque	37
II. 4.3.1. Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des Sections	38
II. 4.3.2. Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément	39
II. 4.4. Matrices de rigidité de l'élément dans le repère local	39
II. 4.4.1. Relation entre les déplacements des nœuds dans le système d'axes local et le système d'axes intrinsèque.....	39
II. 4.4.2. Relation entre l'accroissement d'efforts et accroissement de déplacement	41
II. 4.5. Matrices de rigidité de l'élément dans le repère local.....	42
II. 4.6. Calcul du déplacement des nœuds	44
II. 4.7. Organigramme de calcul	46
II. 5. Conclusions	47

II.1. INTRODUCTION :

La méthode de calcul que on propose dans ce chapitre a pour objectif la simulation du comportement des structures en béton armé dans le domaine non linéaire soumis à un chargement instantané croissant jusqu'à rupture, le system non linéaire mis en place est basé sur la méthode de déplacement pour résoudre itérativement l'équation d'équilibre de la structure. Les sections droites d'un élément spatial peuvent être soumise à des sollicitation normale N , des moments de flexion, des efforts tranchants, et un moment de torsion. L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et que les sollicitations tangentes dues à des efforts tranchants

II.2. Hypothèses générales

- La structure est divisée en éléments de poutres. Les éléments sont décomposés en sections intermédiaires afin d'évaluer le comportement non linéaire du béton et des armatures. La section transversale de la poutre est décomposée en couches de béton et en renforcement longitudinal. La déformation de la section suit le principe de Bernoulli.
- Une procédure étape par étape est adoptée pour simuler la réponse de la structure a une charge monotone appliquée à chaque étape ; les boucles itératives sont terminées jusqu'à atteindre l'état d'équilibre des forces. Au cours de cette procédure itérative pour l'équilibre des charges externes.
- Les systèmes d'axes suivants sont introduits pour étudier l'équilibre d'un élément : un système global fixe attaché à la structure ; un système local dépendant la position initiale de l'élément ; un système intrinsèque lié à la position déformée de l'élément ; et un système intermédiaire lié à la traduction du système local à l'origine du système intrinsèque.
- L'évaluation du champ de déplacement des éléments est faite par intégration numérique des déformations section par section. Les déformations d'une section sont calculées en utilisant le système intrinsèque.
- On suppose que la déformation et les déplacements sont faibles. La non-linéarité géométrique concernant la déformation de l'élément est négligée ainsi que la déformation nodale à la jonction de plusieurs éléments.
- Les effets de second ordre dus aux déplacements des nœuds sont introduits par une transformation non linéaire des déplacements aux extrémités des éléments du système intrinsèque vers le système intermédiaire.

II.3. Etude de la section transversale de l'élément

La section en béton était considérée comme une succession de trapèzes. Chaque trapèze était défini par les dimensions de sa base inférieure et supérieure (b_j, b_{j+1}) et de leurs ordonnées (y_j, y_{j+1}), par rapport à l'axe de référence passant par le centre de gravité de la section, voir (figure II. 1). Le processus d'intégration est numérique, il est nécessaire d'exprimer les largeurs et les ordonnées des trapèzes cohérents avec les relations de calcul numériques.

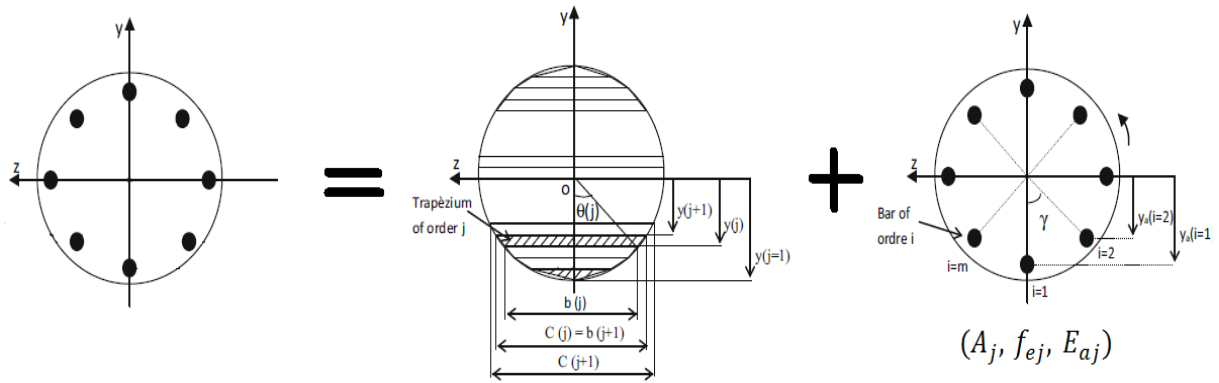


Fig. II. 1. Section de poutre à section circulaire discrétisée en couches

II.3.1. Les déformations

II.3.1.1. Les déformations normales du béton

La section est soumise à l'état de déformation, caractérisé par les déformations ε_x , ϕ_y et ϕ_z , la déformation normale au point de coordonnées (y, z) de la section du béton est donnée par :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x + \phi_y Z + \phi_z Y \quad (\text{II.1})$$

Où $\varepsilon(y, z)$ est la déformation normale ; ε_x est la déformation du centre de gravité de la section ; Y and Z sont les coordonnées d'un point de la section ; ϕ_y et ϕ_z sont les rotations des sections autour des axes Gy et Gz , respectivement.

Les déformations normales seront désignées par le vecteur $\{\varepsilon_n\}$ comme :

$$\{\varepsilon_n\} = (\varepsilon_x \phi_y, \phi_z)^T \quad (\text{II.2})$$

Nous pouvons écrire :

$$\{\varepsilon(y, z)\} = (1, Y, Z) \cdot \{\Delta\} \varepsilon_n \quad (\text{II.3})$$

II.3.1.2 Déformations tangentes au béton

Les sollicitations tangentes à la section sont les forces de cisaillement et le moment de torsion. Les déformations tangentes sont γ_y , γ_z et l'angle de torsion θ_x . Les déformations tangentes sont désignées par le vecteur :

$$\{\varepsilon_t\} = (\gamma_y \gamma_z, \theta_x)^T \quad (\text{II.4})$$

II.3.1.3 Déformation des armatures

Pour un accroissement de déformation $\{\Delta\varepsilon_n\}$ et $\{\Delta\varepsilon_t\}$ de la section, l'accroissement des déformations dans l'armature est donné :

$$\{\Delta\varepsilon_f\} = \cos^2 a (1, z_f, y_f) \{\Delta\varepsilon_n\} + \sin a \cos a \cdot [R_a]^T \cdot \{\Delta\varepsilon_t\} \quad (\text{II.5})$$

Où $[R_a]$ est la matrice colonne définie comme :

$$[R_a] = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ ((z_f) \cdot \cos \beta - (y_f) \cdot \sin \beta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

L'accroissement de la déformation normale de la section :

$$\{\Delta \varepsilon_n\} = (\Delta \varepsilon_x, \Delta \Phi_y, \Delta \Phi_z)^T \quad (\text{II.7})$$

L'accroissement de La déformation tangente de la section est :

$$\{\Delta \varepsilon_t\} = (\Delta \gamma_y, \Delta \gamma_z, \Delta \theta_x)^T \quad (\text{II.8})$$

α : l'angle que fait la ligne moyenne de l'armature avec l'axe G_x

β : l'angle entre la projection de l'armature dans le plan de la section et l'axe G_y

II.3.2 Calcul des forces internes

II. 3.2.1 Forces normales dues au béton

L'accroissement des efforts internes due à l'accroissement des contraintes normales des sections est donnée par :

$$\{\Delta F_{bn}\} = \int \Delta \sigma_b(y, z) \cdot (1, Z, Y)^T \cdot ds_b \quad (\text{II.9})$$

L'accroissement de la contrainte normale dans le béton peut s'écrire :

$$\{\Delta \sigma_b(y, z)\} = E_b(y, z) \cdot \{\Delta \varepsilon(y, z)\} \quad (\text{II.10})$$

Étant donné les équations. (II.2), (II.9), (II.10) et après développement on peut écrire :

$$\Delta F_{bn} = \int E_b(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & yz \\ y & yz & y^2 \end{bmatrix} \cdot ds_b \cdot \{\Delta \varepsilon_b\} \quad (\text{II.11})$$

Cela peut être écrit sous forme matricielle :

$$\{\Delta F_{bn}\} = [K_{bn}] \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (\text{II.12})$$

Où $[K_{bn}]$ est la matrice de rigidité corde reliant l'accroissement des sollicitations normales dans le béton de la section a la variation de la déformation normale de la section

II.3.2.2 Forces de cisaillement dues au béton

Dans le système d'axes OXYZ, nous pouvons également écrire

$$\{\mathbf{F}_{bt}\} = (T_{by}, T_{bz}, M_{bcx})^T \quad (\text{II.13})$$

Ou T_{by} and T_{bz} sont des forces de cisaillement et M_{bcx} est le moment de torsion.

On note $[\mathbf{K}_{bt}]$ matrice de rigidité tangent reliant les sollicitations tangentes de la section aux déformations tangentes de la section :

On peut écrire :

$$\{\mathbf{F}_{bt}\} = [\mathbf{K}_{bt}] \cdot \{\varepsilon_t\} \quad (\text{II.14})$$

Le cisaillement et la rigidité en torsion sont supposés constants, la relation est linéaire et valide pour l'accroissement des forces. Il peut s'écrire comme suit :

$$\{\Delta\mathbf{F}_{bt}\} = [\mathbf{K}_{bt}] \cdot \{\Delta\varepsilon_t\} \quad (\text{II.15})$$

Ou $[\mathbf{K}_{bt}]$: est la matrice de rigidité corde donnée par

$$[\mathbf{K}_{bt}] = \begin{bmatrix} G \cdot A_y & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot A_z & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot I_x \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Enfin, nous pouvons écrire des équations. (18) et (21) sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \{\Delta\mathbf{F}_{bn}\} \\ \{\Delta\mathbf{F}_{bt}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{bn}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{K}_{bt}] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{\Delta\varepsilon_n\} \\ \{\Delta\varepsilon_t\} \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

II.3.2.3 Forces dues aux armatures

-Forces normales dues aux armatures

L'accroissement des forces normales due au renforcement est donnée par l'Eq. (II.18) :

$$\Delta\mathbf{F}_{fn} = [\mathbf{K}_{fn}] \cdot \Delta\varepsilon_n + [\mathbf{K}_{fnt}] \cdot \Delta\varepsilon_t \quad (\text{II.18})$$

-l'accroissement des forces tangentes dues aux armatures

L'accroissement des forces tangente due aux armatures est donnée par l'Eq. (II.19) :

$$\Delta\mathbf{F}_{ft} = [\mathbf{K}_{ftn}] \cdot \Delta\varepsilon_n + [\mathbf{K}_{ft}] \cdot \Delta\varepsilon_t \quad (\text{II.19})$$

Nous pouvons écrire les équations. (II.18) et (II.19) sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{F}_{fn} \\ \Delta\mathbf{F}_{ft} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{fn} & \mathbf{K}_{fnt} \\ \mathbf{K}_{fnt}^t & \mathbf{K}_{ft} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_n \\ \Delta\varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

Avec

$$[\mathbf{K}_{fn}] = \sum_{i=1}^{nf} E_{fi} \cdot \cos^3 a_i \cdot s_{fi} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{fi} & y_{fi} \\ z_{fi} & z_{fi}^2 & y_{fi}z_{fi} \\ y_{fi} & y_{fi}z_{fi} & y_{fi}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$$[\mathbf{K}_{fnt}] = \sum_{i=1}^{nf} E_{fi} \cdot s_{fi} \cdot \sin a_i \cdot \cos^2 a_i \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i & y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \\ z_{fi} \cos \beta_i & z_{fi} \sin \beta_i & z_{fi} \cdot y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi}^2 \cos \beta_i \\ y_{fi} \cos \beta_i & y_{fi} \sin \beta_i & y_{fi}^2 \sin \beta_i - y_{fi} \cdot z_{fi} \cos \beta_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

$$[\mathbf{K}_{fnt}] = [\mathbf{K}_{fnt}]^t \quad (\text{II.23})$$

$$[\mathbf{K}_{ft}] = \sum_{i=1}^{nf} E_{fi} \cdot \sin^2 a_i \cdot s_{fi} \cdot V_{fti} \cdot V_{fti}^T \quad (\text{II.24})$$

Où

$$V_{fti} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{fi} \sin \beta_i - z_{fi} \cos \beta_i \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

II.3.3 Forces externes

La section de l'élément de poutre est soumise à l'accroissement des forces externes, qui est donnée par :

$$\Delta \mathbf{F}_{sn} = \begin{pmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \text{ and } \Delta \mathbf{F}_{st} = \begin{pmatrix} T_y \\ T_z \\ M_{cx} \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Où $\Delta \mathbf{F}_{sn}$ and $\Delta \mathbf{F}_{st}$ sont l'accroissement des forces normales et l'accroissement des forces tangentés

II.3.4 Equilibre de la section

L'équilibre de la section de l'élément de poutre est exprimé par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F}_{sn} \\ \Delta \mathbf{F}_{st} \end{pmatrix} = [\mathbf{K}_s] \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Ou $[\mathbf{K}_s]$: est la matrice de rigidité corde des sections donnée par :

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{bn}] + [\mathbf{K}_{fn}] & [\mathbf{K}_{fnt}] \\ {}^t[\mathbf{K}_{fnt}] & [\mathbf{K}_{bt}] + [\mathbf{K}_{ft}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Pour un accroissement des forces externes donnés $\{\Delta F_s\}$ définie par l'équation (II.29), la résolution de l'Eq. (II.27) est itérative, cette méthode est décrite en détail dans les Réf. [28, 37,45,46]. A l'équilibre de la section, l'accroissement des déformations $\{\Delta \epsilon_s\}$ définie par l'équation (II.31) est donné par l'Eq. (II.32) :

$$\{\Delta F_s\} = (\Delta N, \Delta M_y, \Delta M_z, \Delta T_y, \Delta T_z, \Delta M_c)^T \quad (II.29)$$

$$\{\Delta \epsilon_s\} = (\Delta \epsilon_x, \Delta \phi_y, \Delta \phi_z, \Delta \gamma_y, \Delta \gamma_z, \Delta \theta_x) \quad (II.30)$$

$$\{\Delta \epsilon_s\} = [S_s] \cdot \{\Delta F_s\} \quad (II.31)$$

$$[S_s] = [K_s]^{-1} \quad (II.32)$$

-L'équilibre de la section est défini par deux conditions :

1. On considère que l'équilibre de la section est atteint lorsque, pour deux itérations successives, la norme euclidienne des déformations est inférieure à une tolérance fixée :

$$\eta_s = \left[\frac{\langle \Delta \epsilon_i - \Delta \epsilon_{i-1} \rangle (\{\Delta \epsilon\}_i - \{\Delta \epsilon\}_{i-1})}{\langle \epsilon_s - \Delta \epsilon_i \rangle (\{\epsilon_s\} - \{\Delta \epsilon\}_i)} \right]^{1/2} < T_s \quad (II.33)$$

T_s Ordre de précision souhaité de 0,01.

2. La seconde est de limiter le nombre d'itérations pour chaque étape de calcul. Dépasser une dizaine d'itérations peut être lié à certains problèmes d'ordre numérique. Ces problèmes surviennent lorsque le déterminant de la matrice de rigidité est proche de zéro.

L'organigramme de la recherche d'équilibre de la section est illustré dans la figure II.2.

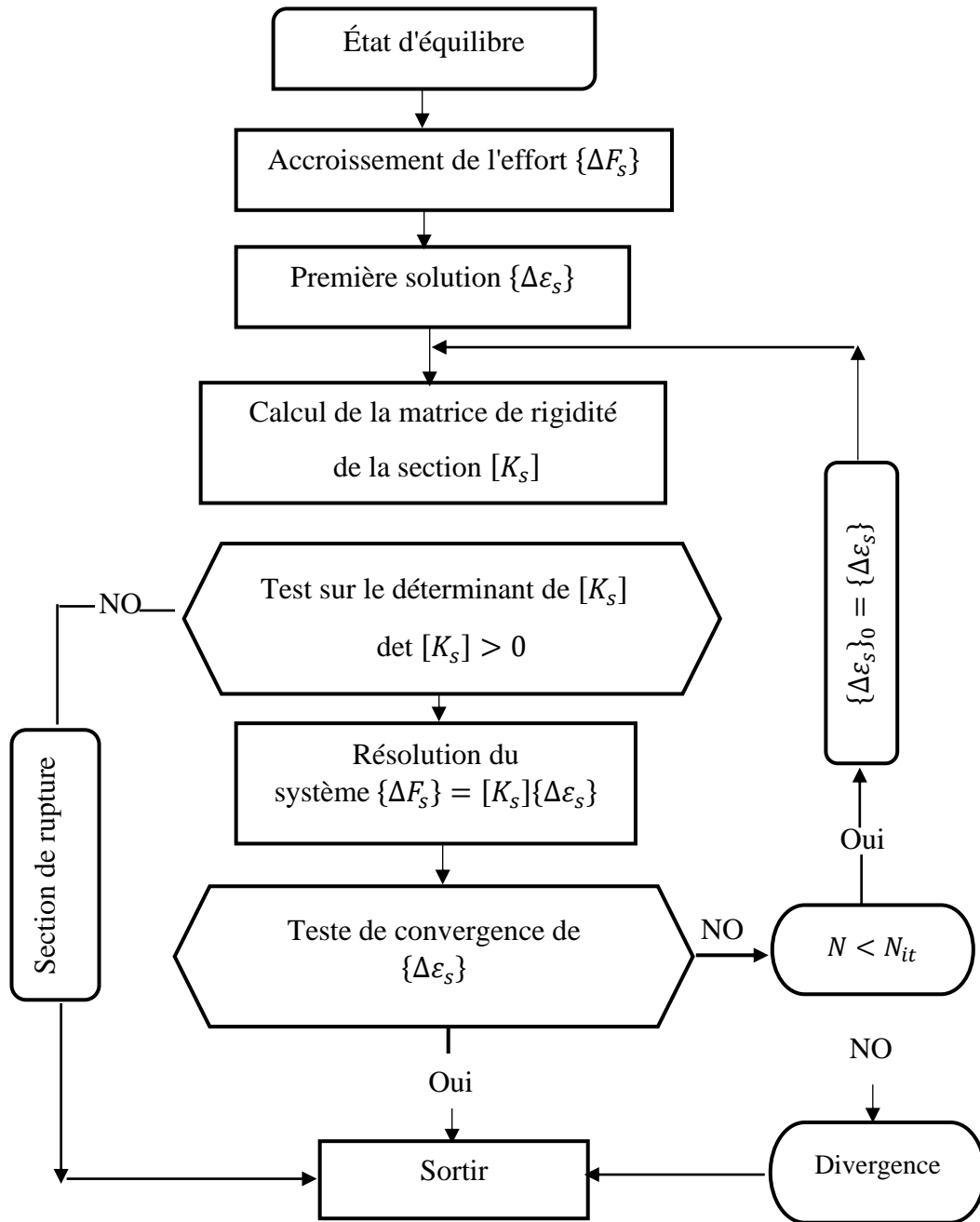


Fig.II.2. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

II.4 Etude de l'équilibre des structures

II.4.1 La matrice de rigidité de la structure

La matrice de rigidité de la structure $[K]$ est formée à partir de la matrice de rigidité de l'élément $[K_x]$ dans le système d'axes absolus. La matrice de rigidité de l'élément $[K_x]$ est donnée à partir de la matrice de rigidité des sections dans le calcul est effectué dans le système d'axes intrinsèques. Pour chaque étape de chargement, le problème est de calculer l'accroissement du déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ en résolvant le système non linéaire suivant, qui décrit l'équilibre de la structure :

$$\{\Delta P\} = [K] \{\Delta U\} \tag{II.34}$$

II.4.2 Système de coordonnées :

Dans le système d'axes XYZ, une des positions du système d'axes local $x_0 y_0 z_0$ de l'élément associé ici à la position initiale, à l'accroissement du chargement, Les nœuds I_0 and J_0 de l'élément sont déplacés dans I and J , respectivement. La notion de system de coordonnées intrinsèques noté xyz qui relie à la position déformée de l'élément.

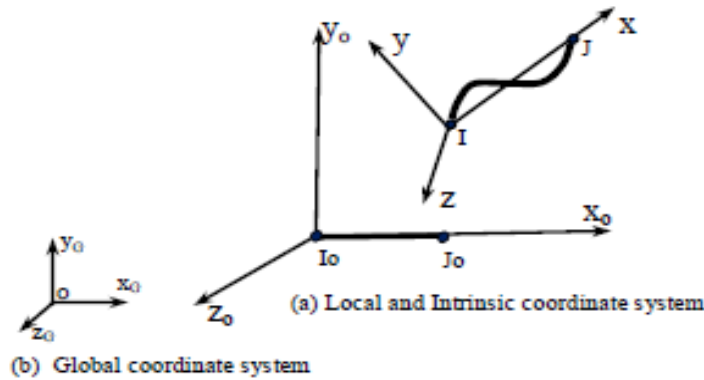


Fig.II.3. Système d'axes d'un élément 3D à l'état initial et déformé

On peut noter respectivement $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$ les matrices colonne (12×1) contenant les forces et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le système d'axes local $x_0 y_0 z_0$ (Figure. II. 3).

$$\{F_L\} = (F_{ix_0}, F_{iy_0}, F_{iz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (II.35)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}, u_j, v_j, w_j, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0})^T \quad (II.36)$$

Les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément dans le repère intermédiaire sont

$$\{F_u\} = (F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (II.37)$$

$$\{S_u\} = (u, v, w, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}, \theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0})^T \quad (II.38)$$

Où

$$u = u_j - u_i$$

$$v = v_j - v_i$$

$$w = w_j - w_i$$

La relation entre les efforts et les déplacements des nœuds dans le système d'axes intermédiaires et dans l'axe local est donnée par :

$$\{\mathbf{S}_u\} = [\mathbf{T}_0] \cdot \{\mathbf{S}_L\} \quad (\text{II.39})$$

$$\{\mathbf{F}_L\} = [\mathbf{T}_0]^T \cdot \{\mathbf{F}_u\} \quad (\text{II.40})$$

Avec

$$[\mathbf{T}_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II.4.3 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque :

Soit (x, y, z), le repère intrinsèque, lié à la position déformée de l'élément. Les efforts et les déplacements correspondant sont comptés positivement dans le sens des axes. La courbure $\Phi_z(x)$ (respectivement $\Phi_y(x)$) est positive lorsque la cavité de l'axe déformé est dirigée dans le sens positif de l'axe y (respectivement l'axe z)

$\{\mathbf{F}_n\}$ la matrice de dimension (6×1) contenant (les charges internes aux extrémités de l'élément) dans le système d'axes intrinsèques

$$\{\mathbf{F}_n\} = (N_j, M_{iy}, M_{iz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz})^T \quad (\text{II.41})$$

$$\begin{aligned} N(x) &= -N_j \\ M_y(x) &= \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iy} - \frac{x}{L} M_{jy} \\ M_z(x) &= -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iz} + \frac{x}{L} M_{jz} \\ T_y(x) &= \frac{1}{L} (M_{iz} + M_{jz}) \\ T_z(x) &= -\frac{1}{L} (M_{iy} + M_{jy}) \\ M_x(x) &= -M_{jx} \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

La relation liant les sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de l'élément dans le système d'axes intrinsèques :

$$\{\mathbf{F}_S\} = [\mathbf{L}(X)] \cdot \{\mathbf{F}_n\} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$\{\mathbf{F}_S\} = \left(N(x), M_y(x), M_z(x), T_y(x), T_z(x), M_c(x) \right)^T$$

$$[\mathbf{L}(X)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{X}{L}\right) & 0 & 0 & -X/L & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{X}{L}\right) & 0 & 0 & X/L \\ 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 1/L \\ 0 & -1/L & 0 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & y_c/L & z_c/L & -1 & y_c/L & z_c/L \end{bmatrix}$$

On peut écrire en considérant l'Eq. (II.43) :

$$\{\Delta \mathbf{F}_S\} = [\mathbf{L}(X)] \cdot \{\Delta \mathbf{F}_n\} \quad (\text{II.44})$$

II.4.3.1 Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections :

Toute variation d'efforts $\{\delta \mathbf{F}_n\}$ aux extrémités de l'élément engendre ;

- un travail virtuel des forces extérieur :

$$\delta W_e = \{\delta \mathbf{F}_n\}^T \cdot \{\mathbf{S}_n\} \quad (\text{II.45})$$

- un travail virtuel de déformation δW_i tel que :

$$\delta W_i = \int_0^L \{\delta \mathbf{F}_s\}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x) \cdot dx \quad (\text{II.46})$$

Ou $\{\boldsymbol{\varepsilon}(x)\}$ représente la matrice colonne (6×1) contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x .

D'après du travail virtuel complémentaire :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (\text{II.47})$$

Après développement, nous avons :

$$\{\mathbf{S}_n\} = \int_0^L [\mathbf{L}(X)]^T \cdot \{\varepsilon(x)\} \cdot dx \quad (\text{II.48})$$

Nous pouvons écrire à partir de l'Eq. (II.48) :

$$\{\Delta\mathbf{S}_n\} = \int_0^L [\mathbf{L}(X)]^T \cdot \{\Delta\varepsilon(x)\} \cdot dx \quad (\text{II.49})$$

II.4.3.2 Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément :

Utilisant Eq. (II.31) liant les accroissements de déformations aux accroissements de sollicitations dans une section transversale Eq. (II.49) devient :

$$\{\Delta\mathbf{S}_n\} = \int_0^L [\mathbf{L}(X)]^T \cdot ([\mathbf{S}_s] \cdot \{\Delta\mathbf{F}_s\}) \cdot dx \quad (\text{II.50})$$

Considérant Eq. (II.44), nous arrivons à :

$$\{\Delta\mathbf{S}_n\} = [\mathbf{K}_n]^{-1} \cdot \{\Delta\mathbf{F}_s\} \quad (\text{II.51})$$

Ou $[\mathbf{K}_n]^{-1}$ matrice (6×6) de souplesse de l'élément dans le repère intrinsèque xyz

$$[\mathbf{K}_n]^{-1} = \int_0^L [\mathbf{L}(X)]^T \cdot [\mathbf{S}_s] \cdot ([\mathbf{L}(X)]) \cdot dx \quad (\text{II.52})$$

À partir de l'Eq. (II.50), nous arrivons à la relation matricielle liant l'accroissement d'efforts aux accroissements des déplacements des nœuds de l'élément, dans le repère intrinsèques (x, y, z)

$$\{\Delta\mathbf{F}_n\} = [\mathbf{K}_n] \cdot \{\Delta\mathbf{S}_n\} \quad (\text{II.53})$$

La matrice $[\mathbf{K}_n]$ est obtenue à partir de la matrice de rigidité de la section dans le système d'axes intrinsèques. La matrice $[\mathbf{K}_n]$ Prend en compte la non-linéarité des matériaux.

II.4.4. Matrices de rigidité de l'élément dans le repère local

Maintenant, nous établissons la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds, ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

II.4.4.1 Relation entre les déplacements des nœuds dans le système d'axes local et le système d'axes intrinsèque

Pour un instant t quelconque, on peut écrire les relations géométriques suivantes :

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} - L_0 \\ \theta_{iz} &= \theta_{iz0} - \theta_v \\ \theta_{iy} &= \theta_{iy0} - \theta_w \\ \theta_x &= \frac{1}{2}(\theta_{jk0} - \theta_{ix0}) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

$$\theta_{jz} = \theta_{jz0} - \theta_v$$

$$\theta_{jy} = \theta_{iy0} - \theta_w$$

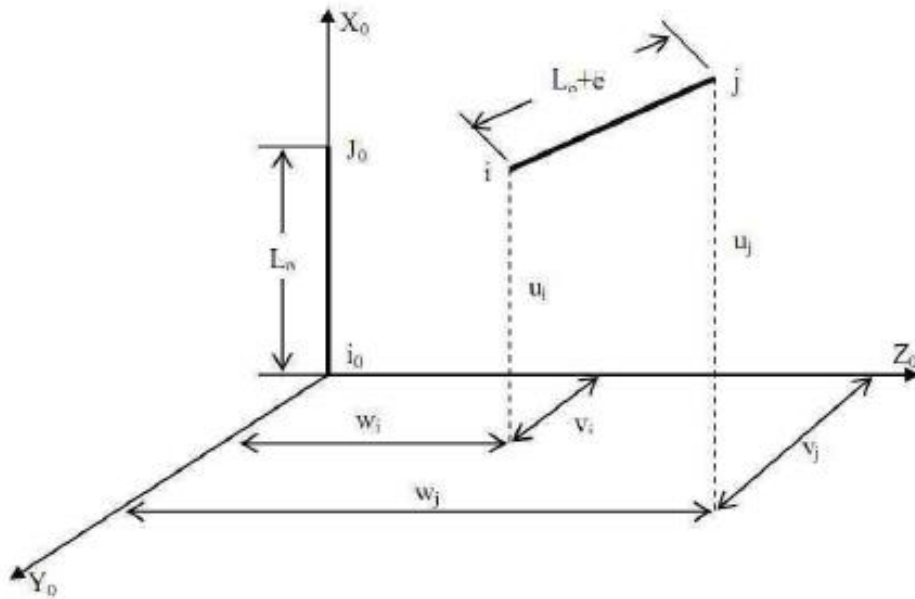


Fig.II.4. Repère local de référence et notations.

Où

$$\theta_v = \text{Arcsin} \frac{v}{\sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2}}$$

$$\theta_w = \text{Arcsin} \frac{w}{\sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2}}$$
(II.55)

u, v, w , Les déplacements relatifs de translation des nœuds I et J exprimés dans le système d'axes local sont donnés dans la sous-section II.4.2.

La différentiation des expressions $e, \theta_{iz}, \theta_{iy}, \theta_x, \theta_{jz}, \theta_{jy}$ permet d'établir :

$$\{\Delta S_n\} = [B] \cdot \{\Delta S_u\}$$
(II.56)

Où $[B]$ est la matrice de transformation géométrique

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L_0 & w/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/L_0 & 0 & 1/L_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/L_0 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w/L_0 & 0 & 1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/L_0 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.57})$$

II.4.4.2 Relation entre l'accroissement d'efforts et accroissement de déplacement

Selon le théorème du travail virtuel, en tenant compte du fait que le travail des forces est nul dans un déplacement du corps rigide du système d'axes intrinsèque en équilibre au système d'axes local, on peut dire que le travail virtuel des forces appliquées aux nœuds $\{\mathbf{F}_n\}$ dans le système d'axes intrinsèques dû au déplacement virtuel $\{\Delta\mathbf{S}_n\}$ est égal au travail des efforts appliqués aux nœuds dans le système d'axes intermédiaires, $\{\mathbf{F}_u\}$, c'est-à-dire :

$$\{\mathbf{F}_n\}^T \cdot \{\Delta\mathbf{S}_n\} = \{\mathbf{F}_u\}^T \cdot \{\Delta\mathbf{S}_u\} \quad \forall \{\Delta\mathbf{S}_u\}, \quad \forall \{\Delta\mathbf{S}_n\} \quad (\text{II.58})$$

Considérant Eq. (II.56) nous aurons :

$$\{\mathbf{F}_n\}^T \cdot [B] \cdot \{\Delta\mathbf{S}_u\} = \{\mathbf{F}_u\}^T \cdot \{\Delta\mathbf{S}_u\} \quad (\text{II.59})$$

Ce qui donne :

$$\{\mathbf{F}_u\} = [B]^T \cdot \{\mathbf{F}_n\} \quad (\text{II.60})$$

La différenciation de l'Eq. (II.60), nous amène à :

$$\{\Delta\mathbf{F}_u\} = [B]^T \{\Delta\mathbf{F}_n\} + [\Delta B]^T \cdot \{\mathbf{F}_n\} \quad (\text{II.61})$$

En considérant les relations (II.54) et (II.57), l'Eq. (II.61) devient :

$$\{\Delta\mathbf{F}_u\} = [B]^T \cdot [K_n] \cdot [B] \cdot \{\Delta\mathbf{S}_u\} + [\Delta B]^T \cdot \{\mathbf{F}_n\} \quad (\text{II.62})$$

Compte tenu du terme : $[\Delta B]^T \cdot \{\mathbf{F}_n\}$

Les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles des fonctions e et θ qui sont fonction des déplacements relatifs u, v, w des nœuds i et j .

Après un développement, on arrive à l'équation suivante :

$$[\Delta \mathbf{B}]^T \cdot \{\mathbf{F}_n\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_u\} \quad (\text{II.63})$$

Avec $[\mathbf{D}]$: la matrice de transformation géométrique.

Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, on peut se contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des termes de la matrice $[\mathbf{D}]$:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{-2v(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^3} + \frac{2w(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^3} \\ D_{12} &= D_{21} = \frac{-vN_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^2} \\ D_{13} &= D_{31} = \frac{-wN_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^2} \\ D_{22} &= \frac{N_j}{L_0} + \frac{2w(M_{iz} + M_{jz})}{L_0^3} \\ D_{23} &= D_{32} = 0 \\ D_{33} &= \frac{N_j}{L_0} - \frac{2w(M_{iy} + M_{jy})}{L_0^3} \end{aligned} \quad (\text{II.64})$$

Après développement, la relation suivante est obtenue :

$$\{\Delta \mathbf{F}_u\} = [\mathbf{K}_u] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_u\} \quad (\text{II.65})$$

La relation entre l'accroissement des forces et l'accroissement des déplacements de l'élément dans le système d'axes local s'écrit ainsi :

$$\{\Delta \mathbf{F}_L\} = [\mathbf{K}_L] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_L\} \quad (\text{II.66})$$

Avec $[\mathbf{K}_L]$: la matrice de rigidité des éléments dans le système d'axes local, définie par :

$$[\mathbf{K}_L] = [\mathbf{T}_0]^T \cdot ([\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{K}_n] \cdot [\mathbf{B}] + [\mathbf{D}]) \cdot [\mathbf{T}_0] \quad (\text{II.67})$$

II.4.5 Matrice de rigidité d'un élément dans le repère absolu :

Soit un élément de la structure, initialement entre le nœud i_0 et le nœud j_0 lié au repère local $x_0y_0z_0$, et OXYZ le repère absolu lié à la structure (voir Figure.II.3).

$\{\mathbf{F}_X\}$ et $\{\mathbf{S}_X\}$: sont les matrices colonne respective (12×1) contenant les efforts appliqués et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère absolu OXYZ.

$\{\Delta \mathbf{F}_X\}$ et $\{\Delta \mathbf{S}_X\}$: sont l'accroissement des efforts et les déplacements dans le repère absolu OXYZ.

$$\{\Delta \mathbf{F}_X\} = (\Delta F_{iX}, \Delta F_{iY}, \Delta F_{iZ}, \Delta M_{iX}, \Delta M_{iY}, \Delta M_{iZ}, \Delta F_{jX}, \Delta F_{jY}, \Delta F_{jZ}, \Delta M_{jX}, \Delta M_{jY}, \Delta M_{jZ})^T \quad (\text{II.68})$$

$$\{\Delta \mathbf{S}_X\} = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_{iX}, \Delta \zeta_{iY}, \Delta \zeta_{iZ}, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_{jX}, \Delta \zeta_{jY}, \Delta \zeta_{jZ})^T \quad (\text{II.69})$$

La relation matricielle entre les déplacements de nœuds $\{\mathbf{S}_L\}$ dans le repère local et les déplacements de nœuds $\{\mathbf{S}_X\}$ dans le repère absolu s'écrit :

$$\{\mathbf{S}_L\} = [\mathbf{RT}] \cdot \{\mathbf{S}_X\} \quad (\text{II.70})$$

Dans le cas des efforts, on peut écrire :

$$\{\mathbf{F}_X\} = [\mathbf{RT}]^T \cdot \{\mathbf{F}_L\} \quad (\text{II.71})$$

La différenciation de l'Eq. (II.71) conduit à :

$$\{\Delta \mathbf{F}_X\} = [\mathbf{RT}]^T \cdot \{\Delta \mathbf{F}_L\} \quad (\text{II.72})$$

En remplaçant Eq. (II.72) et Eq. (II.66), ça vient

$$\{\Delta \mathbf{F}_X\} = [\mathbf{RT}]^T \cdot [\mathbf{K}_L] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_L\} \quad (\text{II.73})$$

La différenciation de l'Eq. (II.70) conduit à :

$$\{\Delta \mathbf{S}_L\} = [\mathbf{RT}] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_X\} \quad (\text{II.74})$$

Enfin, en remplaçant Eq. (II.73) par Eq. (II.74), on arrive à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts aux accroissements des déplacements aux extrémités d'un élément dans le système d'axes absolus OXYZ, lié à la structure

$$\{\Delta \mathbf{F}_X\} = [\mathbf{K}_X] \cdot \{\Delta \mathbf{S}_X\} \quad (\text{II.75})$$

$[\mathbf{K}_X]$: est la matrice de rigidité (12×12) de l'élément en coordonnée absolue OXZ donnée par :

$$[\mathbf{K}_X] = [\mathbf{RT}]^T \cdot [\mathbf{K}_L] \cdot [\mathbf{RT}] \quad (\text{II.76})$$

$[\mathbf{RT}]$: est la matrice de rotation orthogonale.

La relation entre l'accroissement des efforts et des déplacements dans le repère absolu est obtenue au moyen de la matrice de rotation orthogonale $[\mathbf{RT}]$, telle que :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [R_0] & o & o & o \\ o & [R_0] & o & o \\ o & o & [R_0] & o \\ o & o & o & [R_0] \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

Où

$$[R_0] = [R_\gamma] \cdot [R_\beta] \cdot [R_\alpha] \quad (\text{II.78})$$

Où

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$[R_\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[R_\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Les angles α , β sont fonction des coordonnées des nœuds donnés dans le repère absolu, liés à la structure.

II.4.6. Calcul du déplacement des nœuds

Le problème non linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative, basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle on recalcule, pour chaque étape, la matrice de rigidité de la structure reliant les accroissements des déplacements aux accroissement des charges.

La matrice de rigidité de la structure $[K]$ est formée à partir d'une matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu.

L'accroissement des déplacements des nœuds accroissent $\{\Delta U\}$ est lié à l'accroissement des charges par l'équation d'équilibre de la structure :

$$\{\Delta P\} = [K] \{\Delta U\} \quad (\text{II.79})$$

L'accroissement des déplacements des nœuds est obtenu en résolvant l'équation d'équilibre de la structure et s'écrit :

$$\{\Delta U\} = [K]^{-1} \{\Delta P\} \quad (\text{II.80})$$

La convergence des déplacements des nœuds s'effectue par l'équation suivante.

$$\eta_u = \left[\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1})}{\langle U_s - \Delta U_i \rangle \cdot (\{U_s\} - \{\Delta U\}_i)} \right]^{1/2} < T_u \quad (\text{II.81})$$

A la fin de chaque étape, on calcule les déformations totales de chaque section, les forces et les déplacements aux nœuds, en cumulant les incréments de cette étape avec les valeurs de l'étape précédente. Avant de passer à une nouvelle étape de chargement, on procède à la correction des déplacements aux nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette étape est indispensable dans le cas de structures sensibles aux effets de second ordre.

Une étape de correction est effectuée dans l'étape actuelle, en introduisant l'effet d'une augmentation de charge fictive ΔP^* donnée par :

$$\{\Delta P^* = \{P\} - \{P^{int}\}\} \quad (\text{II.82})$$

Cette étape de correction est caractérisée par un cycle itératif visant à équilibrer cette charge fictive. Elle est supprimée si la norme euclidienne η des charges est inférieure ou égale à une certaine tolérance T_f fixée a priori :

$$\eta_f = \left[\frac{\langle \Delta P^* \rangle \{\Delta P\}}{\langle P \rangle \{P\}} \right] \quad (\text{II.83})$$

Après cette étape de correction, l'analyse se poursuit avec une nouvelle étape de chargement externe. La charge de rupture est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de la valeur absolue de la charge qui est inférieure ou égale à une précision fixée bien avant.

II.4.7. Organigramme de calcul :

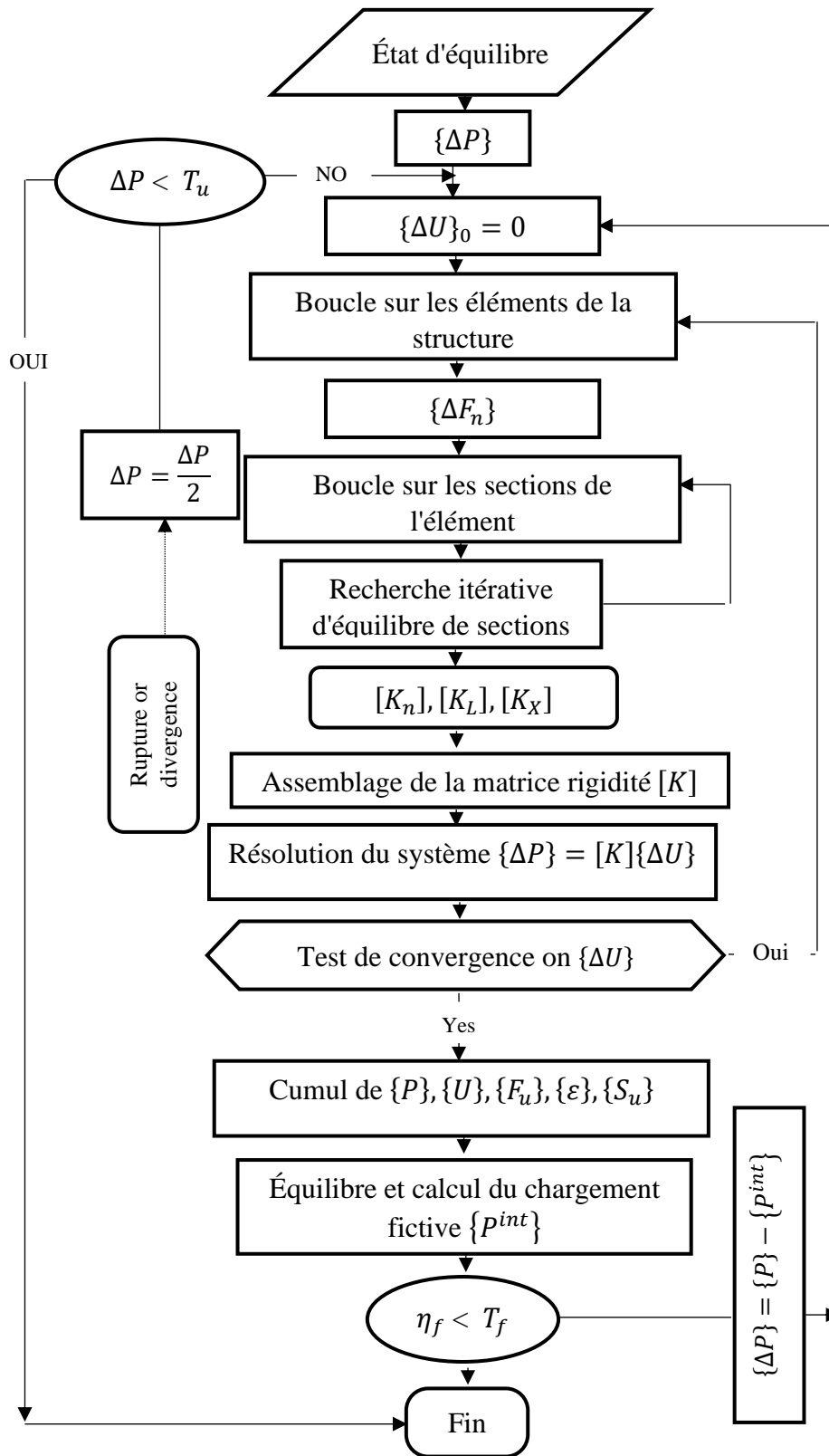


Fig.II.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre de la structure

II. 5. Conclusions :

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode de calcul du modèle mécanique ; où nous décrivons l'équilibre de la section, ainsi que l'établissement de la matrice de rigidité, en seconde partie nous avons présenté la méthode de calcul non linéaire que nous avons développé ou la non-linéarité des lois contraintes -déformation des matériaux ainsi que la non-linéarité due aux déplacements (effets du second ordre) ont été introduites. Cette méthode nous permet de décrire, de façon proche de la réalité, le comportement jusqu'à la ruine des structures subissant des déplacements importants ou des redistributions d'effort considérables.

Le Problème non linéaire est résolu par une succession d'étape de calcul linéaire, une résolution itérative basée sur la méthode des déplacements a été utilisée, dans laquelle nous recalculons, à chaque étape, la matrice de rigidité corde reliant les accroissements de déplacements aux accroissements d'efforts.

L'effet de l'effort tranchant est introduit par la méthode des rigidité effectives et ceci dans le calcul de la matrice de rigidité de la section, dans les études antérieurs l'effort tranchant est considéré linéaire, le module de déformation transversale est constant même dans le domaine post fissuration, alors qu'en réalité il diminue considérablement.

CHAPITRE III :

METHODES DE CALCUL DE LA FIABILITE DES STRUCTURES

Sommaire

III. 1. Introduction	49
III. 2. Calcul de la probabilité de défaillance	50
III. 2.1. Calcul de P_f par la simulation Monte Carlo	50
III. 2.1.1. Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la méthode de MC	53
III. 2.2. Calcul de P_f par intégration analytique directe	54
III. 2.3. Calcul de P_f par la méthode d'approximation.....	55
III. 2.3.1. Indice de fiabilité.....	56
III. 2.3.1.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell	56
III. 2.3.1.2. Indice de Hasofer et Lind	58
III. 2.3.2. Transformation iso probabiliste.....	59
III. 2.3.3. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant.....	60
III. 2.3.4. Recherche du point de conception.....	61
III. 2.3.5. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL}	62
III. 2.3.5.1. Organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).....	64
III. 3. Méthode FORM/ SORM.....	66
III. 3.1. Méthode FORM	66
III. 3.2. Méthode SORM	67
III. 4. Couplage mécano-fiabiliste	69
III. 4.1. Introduction	69
III. 4.2. Le couplage direct	69
III. 4.2.1. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe.....	70
III. 4.3. Méthode par surface de réponse	71
III. 4.3.1. Surface de réponse analytique	71
III. 4.3.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	72
III. 5. Remarques sur les méthodes d'estimation de la fiabilité	73
III. 6. Conclusions	73

III. 1. Introduction :

Les méthodes probabilistes pour évaluer la fiabilité des structures en béton armé à sections transversales circulaires dans le cadre de l'analyse non linéaire sont présentées. La méthode de Monte Carlo qui consiste à simuler les réalisations des états limites et à compter le nombre d'événements de défaillance obtenus a été appliquée. Le schéma de fiabilité est construit en couplant un modèle d'éléments finis non linéaire avec la méthode de surface de réponse RSM. La sécurité structurelle est donnée en termes de l'indice de fiabilité Hasofer-Lind, β , trouvé en résolvant un problème d'optimisation, pour lequel l'algorithme de Rackwitz et Fiessler a été adopté.

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : rapport entre une variable de chargement et une variable de résistance établie par une approche déterministe. Pour une structure complexe ces efforts sont mal connus, et sa résistance est incertaine, alors il existe toujours un risque de voir la structure ruinée. Pour cela l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de fiabilité des systèmes mécaniques développés au cours de ces dernières années, ces méthodes d'évaluation de la fiabilité peuvent être classées par niveaux :

- Niveau 0 : il correspond aux approches purement déterministes. La sécurité est caractérisée par un facteur de sécurité établi sans tenir compte de la variabilité des paramètres.
- Niveau 1 : il s'agit des approches dites semi-probabilistes. Elles consistent à appliquer des facteurs partiels de sécurité aux différentes grandeurs mécaniques intervenant dans la définition de l'ouvrage, grandeurs pour lesquelles les dispersions sont prises en compte par l'intermédiaire de valeurs caractéristiques établies sur la base d'une analyse préalable statistique, voire probabiliste.
- Niveau 2 : la fiabilité est mesurée par un indice de fiabilité. Les indices de fiabilité de Cornell et de Hasofer-Lind sont généralement utilisés.
- Niveau 3 : il s'agit des approches les plus raffinées pour l'analyse du risque. Toutes les variables aléatoires sont caractérisées par leur loi conjointe. La probabilité de défaillance est évaluée directement en calculant une intégrale multiple sur le domaine de défaillance. Les méthodes de Monte-Carlo sont le plus souvent utilisées.
- Niveau 4 : il concerne toutes les méthodes couplant l'approche fiabiliste à la théorie de la décision.

Les méthodes de niveau 0 et de niveau 1 n'entrent pas dans le cadre de l'approche Probabiliste de la fiabilité : les méthodes de niveau 0 sont en voie de disparition du paysage de l'ingénierie de la construction, au profit des méthodes de niveau 1 qui forment le socle des codes de calcul et de conception des structures, tels que les actuels Eurocodes.

Les approches de niveau 2 et de niveau 3 sont précisées dans ce qui suit.

III.2. Calcul de la probabilité de défaillance :

Pour calculer la probabilité de défaillance il existe trois méthodes :

III.2.1. Calcul de P_f par la simulation Monte Carlo :

Des procédures mathématiques permettent de simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi donnée [47], [48]. La méthode de Monte Carlo consiste à simuler des réalisations de l'état-limite et à compter le nombre d'évènements de défaillance obtenus. La dénomination (simulation de Monte Carlo) vient d'un projet confidentiel de l'armée américaine pendant la deuxième guerre mondiale, traitant les problèmes aléatoires ; le code du projet était Monte-Carlo en référence aux jeux de hasard.

Si n est le nombre de simulations, nous admettons que la fréquence des évènements de défaillance tend vers la probabilité de défaillance quand $n \rightarrow \infty$

$$P_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Nombre d'évènements où } G \leq 0}{\text{nombre total d'évènements simulés}} \quad (\text{III.1})$$

D'une façon générale, les simulations de Monte-Carlo constituent le moyen le plus coûteux, mais certainement le plus sûr, pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. Elles ne nécessitent aucune information préalable. Les tirages sont effectués dans tout l'espace et l'intégrale à évaluer est :

$$P_f = \int_{D_f} \phi_n(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (\text{III.2})$$

Où P_f est la probabilité de défaillance, $\phi_n(x_k)$ est la fonction de densité multi-normale de dimension n et D_f est le domaine de défaillance définie par $G(x_k) \leq 0$. En introduisant un indicateur de défaillance I_{D_f} :

$$I_{D_f} = \begin{cases} 1 & \text{si } G(x_k) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(x_k) > 0 \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

L'intégration de (III.2) peut être écrite sous la forme :

$$P_f = \int_{R^n} I_{D_f} \phi_n(x_k) dx_1 dx_2 \dots dx_n = E[I_{D_f}] \quad (\text{III.4})$$

Où $E[.]$ est l'espérance mathématique. Pour n tirages aléatoires, la moyenne empirique de I_{D_f} est une estimation non biaisée de P_f :

$$P_f = E[I_{D_f}] \approx P_f = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n I_{D_f}^r = \frac{N_f}{n} \quad (\text{III.5})$$

Où N_f est le nombre de cas où $G \leq 0$.

Dans la variance est obtenue par le calcul suivant :

$$Var[P_f] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n I_{D_f}^r\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{r=1}^n I_{D_f}^r\right] = \frac{1}{n^2} [Var \sum_{r=1}^n I_{D_f}^r] \quad (\text{III.6})$$

Une telle procédure présente l'intérêt de la simplicité, à condition de savoir simuler une variable de loi donnée, mais possède une convergence très lente en (\sqrt{n}) , d'autant que le nombre de simulation doit être très supérieur à l'inverse de la probabilité de défaillance. La convergence par la formule de Shooman [22] :

$$\%erreur = \frac{200 \sqrt{1-P_f}}{\sqrt{n P_f}} \tag{III.7}$$

Où P_f est la fréquence estimée et n est le nombre de simulations. Cette erreur correspond à une probabilité de 95% que la valeur exacte de P_f appartienne à l'intervalle $P_f(1 \mp \%erreur)$, c'est l'intervalle de confiance à 95%.

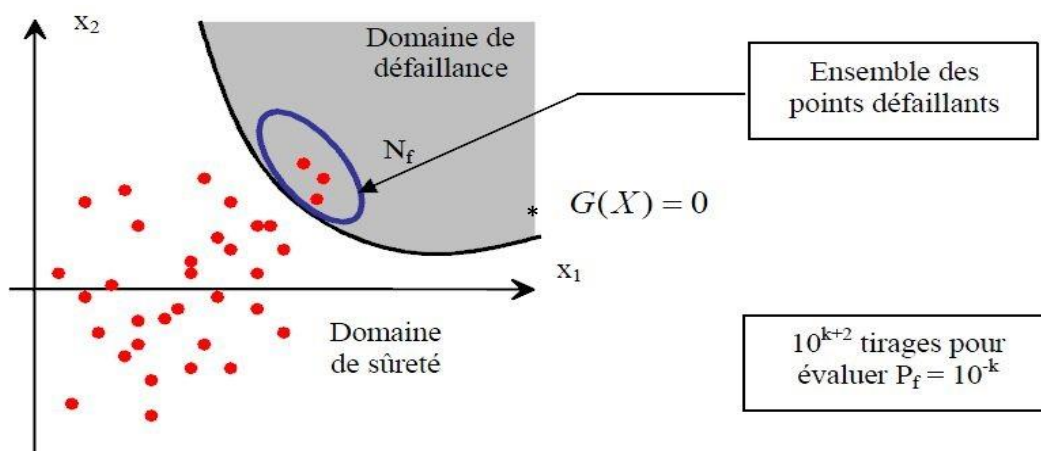


Fig. III.1. Illustration de la simulation de Monte-Carlo

D'une manière générale, pour évaluer correctement une probabilité de l'ordre 10^{-n} , il faut effectuer 10^{n+2} à 10^{n+3} simulations [23]. Il est évident que cette méthode est impossible à utiliser pour les grands systèmes à probabilité de défaillance et à coût de calcul élevé pour chaque réalisation.

Nombres pseudo-aléatoires uniformes :

La génération de nombres pseudo-aléatoires est à la base de toutes les méthodes de simulation. La méthode la plus utilisée pour générer des nombres pseudo-aléatoires est la méthode congruentielle mixte. Cette méthode utilisée pour engendrer une suite m de x , est basée sur le calcul du reste de la division par un nombre entier m ; l'expression s'écrit sous la forme :

$$x_{i+1} = (aX_i + c)(\text{mod}m), i = 1, \dots, n \tag{III.8}$$

Où le multiplicateur a , l'incrément c et le dénominateur m sont des entiers non négatifs ; mod est l'opérateur de division des entiers.

Il existe d'autres générateurs comme, le générateur multiplicatif et le générateur congruentiel additif. En effet la génération de nombres aléatoires uniformes sur l'intervalle $[0, 1[$, semble facile puisqu'on trouve des fonctions RAN, RANDOM, RND sur tous les calculateurs. Il faut rester prudent quant à leur utilisation. Dans notre étude on utilise ces dernières.

-Générateur de distributions non uniformes

Le principe des méthodes de simulation est d'effectuer des tirages en accord avec la loi des paramètres des variables aléatoires. Les générateurs présentés ci-dessus génèrent des variables aléatoires selon une loi uniforme. Cependant, les variables de base peuvent avoir d'autres lois pour engendrer des nombres à distribution quelconque. Nous disposons de trois méthodes :

- Méthode de la transformation inverse ;
- Méthode de composition ;
- Méthode de rejet-acceptation.

❖ Les étapes de la procédure sont donc [49] :

1. Engendrer des réalisations des variables aléatoires selon leur densité conjointe de probabilité ou, au moins, selon leurs lois marginales et leurs corrélations ;
2. Calculer la valeur de la fonction d'état-limite ;
3. Selon le cas

S'il y a défaillance, incrémenter le compteur des cas défectueux par rapport au nombre total des réalisations effectuées ;

S'il n'y a pas de défaillance, il n'y a pas d'incrémentation ;

4. Répéter 1 à k jusqu'à ce qu'un nombre suffisant de tirages soit atteint ;
5. Estimer la probabilité en fonction du nombre des cas défectueux par rapport au nombre total des réalisations effectuées.

III. 2.1.1. Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la méthode de MC :

L'organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la simulation de Monte Carlo directe, est décrit ci-dessous :

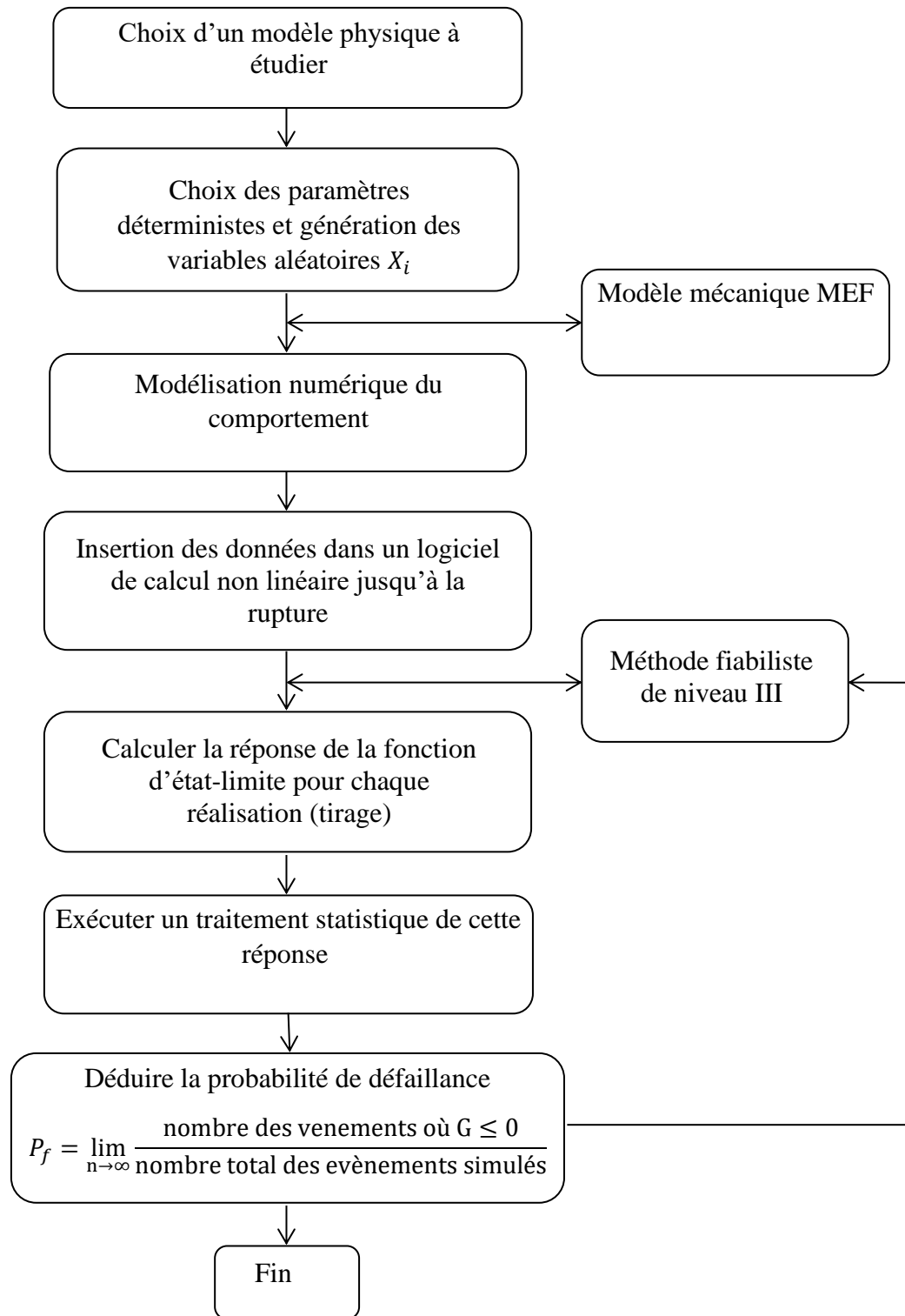


Fig. III.2. Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la simulation de Monte Carlo directe

III.2.2. Calcul de P_f par intégration analytique directe :

Ce calcul ne peut être mené que dans le cas particulièrement favorable où les fonctions de densité ont des formes simples. Lemaire et al [22] donne l'exemple simple suivant.

L'objet de cet exemple est d'illustrer les notions présentées dans un cas simple, avec des hypothèses dont l'intérêt est de permettre un calcul explicite des solutions. Considérons l'exemple particulier d'une tige soumise à un effort normal par l'application d'une action normale F voir figure III.3.

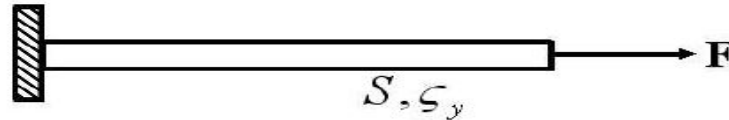


Fig. III.3. Exemple simple d'une tige soumise un effort normale.

L'Aire de la section droite est S et la limite élastique est ζ_y . Nous choisissons comme données :

- Donnée d'action F
- Donnée d'état : la section S
- Sollicitation $\zeta = F/S$
- Règle de dimensionnement $F/S < \zeta_y$

Les données numériques sont les suivantes :

- F de moyenne 70MN et d'écart type 15MN, représente le maximum d'une action variable sur une certaine durée ;
- ζ_y de moyenne 272.72MPa et d'écart type 16.36MPa , dans une population définie supposée homogène. La moyenne diminuée de 2 écarts-types donne une valeur de la limite élastique de 240MPa correspondant à un acier de construction.

Ces variables sont Gaussiennes et non corrélées. La valeur de S est fixée à 0.42m², le choix de ce dimensionnement et des données numériques est justifié dans l'ouvrage de Lemaire[24].

Le vecteur des variables de base est $\{X\} = \{F, \zeta_y\}^t$, et l'état-limite : $G(\{X\}) = \zeta_y S - F$

les variables ζ_y et F sont gaussiennes. La probabilité de défaillance peut s'écrire sous la forme :

$$P_f = \int_{\zeta_y S - F \leq 0} f_{\zeta_y, S, F}(\zeta_y S, F) S d\zeta_y dF \tag{III.9}$$

$$f_{\zeta_y, S, F}(\zeta_y S, F) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\zeta_y S}\sigma_F} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\zeta_y S - \mu_{\zeta_y S})^2}{\sigma_{\zeta_y S}^2} + \frac{(F - \mu_F)^2}{\sigma_F^2}\right)\right) \tag{III.10}$$

Pour faire l'intégration analytique de P_f , il est nécessaire de normaliser l'espace et d'effectuer une rotation des axes. Effectuons les changements de variables suivants pour passer en variable normées centrées :

$$\begin{aligned} X_1 &= \zeta_y S & X_2 &= F \\ u_1 &= \frac{X_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}} & u_2 &= \frac{X_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \\ dX_1 &= \sigma_{X_1} du_1 & dX_2 &= \sigma_{X_2} du_2 \end{aligned} \tag{III.11}$$

La densité conjointe de (u_1, u_2) s'écrit alors :

$$f_{u_1, u_2}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)\right) \quad (\text{III.12})$$

Et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_{X_1} u_1 - \sigma_{X_2} u_2 + \mu_{X_1} - \mu_{X_2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)\right) du_1 du_2 \quad (\text{III.13})$$

Car la condition de défaillance $X_1 - X_2 \leq 0$ devient : $\sigma_{X_1} u_1 - \sigma_{X_2} u_2 + \mu_{X_1} - \mu_{X_2} \leq 0$ (droite d'état-limite). Cette intégrale peut être calculée en effectuant une rotation des axes d'angle θ :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

et la droite d'état limite devient :

$$G(u'_1, u'_2) = (\sigma_{X_1} \cos\theta - \sigma_{X_2} \sin\theta)u'_1 - (\sigma_{X_1} \sin\theta + \sigma_{X_2} \cos\theta)u'_2 + \mu_{X_1} - \mu_{X_2} \quad (\text{III.15})$$

Pour $\tan\theta = \sigma_{X_1}/\sigma_{X_2}$, nous avons :

$$\begin{aligned} u'_1 &= 0 \\ u'_2 &= \frac{\mu_{X_1} - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_1} \sin\theta + \sigma_{X_2} \cos\theta} = u'_{20} \\ G(u'_1, u'_2) &= -u'_2 + u'_{20} \leq 0 \text{ Soit } u'_2 \geq u'_{20} \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Le déterminant du Jacobien de la rotation est égal à 1 et $du'_1 du'_2 = du_1 du_2$. L'expression de P_f devient :

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{u'_2=u'_{20}}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u_1'^2}{2}} du'_1 \right) e^{-\frac{u_2'^2}{2}} du'_2 \quad (\text{III.17})$$

L'intégrale entre parenthèse est égale à $\sqrt{2\pi}$ est finalement :

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u'_2=u'_{20}}^{\infty} e^{-\frac{u_2'^2}{2}} du'_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-u'_{20}} e^{-\frac{u_2'^2}{2}} du'_2 = \Phi(-u'_{20}) \quad (\text{III.18})$$

Avec les données numériques :

$$u'_{20} = 2.700 \text{ et } P_f = 0.00347$$

Ce calcul donne un résultat exact, mais il n'est effectué que dans une condition particulière. La distance u'_{20} est l'**indice de fiabilité**. Cette notion est généralisée dans la section suivante de ce chapitre.

III.2.3. Calcul de P_f par la méthode d'approximation :

La méthode d'approximation permet de calculer une approximation de P_f sous certaines conditions. Pour le calcul par la méthode d'approximation, nous avons besoin de connaître l'indice de fiabilité à partir de l'expression de l'état-limite d'un système ou d'une structure.

Quelques méthodes d'approximations sont développées à ce jour, elles sont :

- Les méthodes du premier et du second ordre FORM/SORM (First/Second Order Reliability Method), ces méthodes sont considérées comme les plus efficaces en termes de rapport entre temps de calcul et précision de la réponse. Elles sont les plus utilisées et conviennent dans une majorité des cas. Elles sont effectuées par le transfert de l'état-limite dans l'espace normalisé, afin de trouver la probabilité de défaillance d'un système ou d'une structure. Ces méthodes exigent une connaissance de l'état-limite pour trouver le point de conception, appelé aussi le point de défaillance le plus probable (MPFP : *Most Probable Failure Point*), nous présentons cette méthode dans ce chapitre.

- Dans un cas particulier, Zhao et al [50], [51], proposent une méthode de moment d'un état-limite afin de trouver le point de conception. Cette méthode a pour but d'éviter l'algorithme d'optimisation de la méthode FORM/SORM. De plus Kai et al [52] montrent l'application de la méthode de FOSM (First Order Second Moment) et de la méthode AFOSM (Advance First Order Second Moment) en se basant sur le développement en série de Taylor d'une fonction de l'état-limite pour remplacer le calcul par la méthode de FORM. D'autre part, Liu [45] montre que ces méthodes ont des désavantages car elles ne nous donnent pas toujours une même valeur de la probabilité.

- Quelques auteurs [53] [54] [55] montrent l'application de la méthode de RSM (Response Surface Methode) qui a pour but de déterminer la surface de l'état-limite. Cette méthode donne une approximation si la structure est trop complexe, mais elle a besoin en fait, de couplage entre la méthode numérique et l'approche fiabiliste. En revanche, Gayton et al [68] proposent un algorithme pour prendre en compte l'information de connaissance et la formulation statistique dans la méthode RSM.

III.2.3.1. Indice de fiabilité :

Le calcul de P_f par la méthode d'approximation exige une connaissance de l'indice de fiabilité β . Il semble d'après Lemaire [49] que la première proposition d'un indice de fiabilité soit due à Rjanitzynne dans les années 1950, en Union Soviétique. Cependant, c'est Cornell qui popularise cette idée. Ensuite, diverses propositions furent présentées, mais la forme la plus complète est due à Hasofer et Lind qui s'appuient sur une définition rigoureuse.

III.2.3.1.1. Indice de Rjanitzynne-Cornell :

Cet indice est obtenu à partir de la moyenne μ_Z divisée sur l'écart-type σ_Z de la variable de marge $Z = R - S$.

$$\beta_c = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (\text{III.19})$$

L'indice β_c apparait comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire Z . Nous constatons sur la figure III.4, que l'indice de fiabilité représente le nombre d'écart types nécessaires pour s'éloigner de la moyenne μ_Z vers l'état limite ($z = 0$) afin de se placer en sécurité.

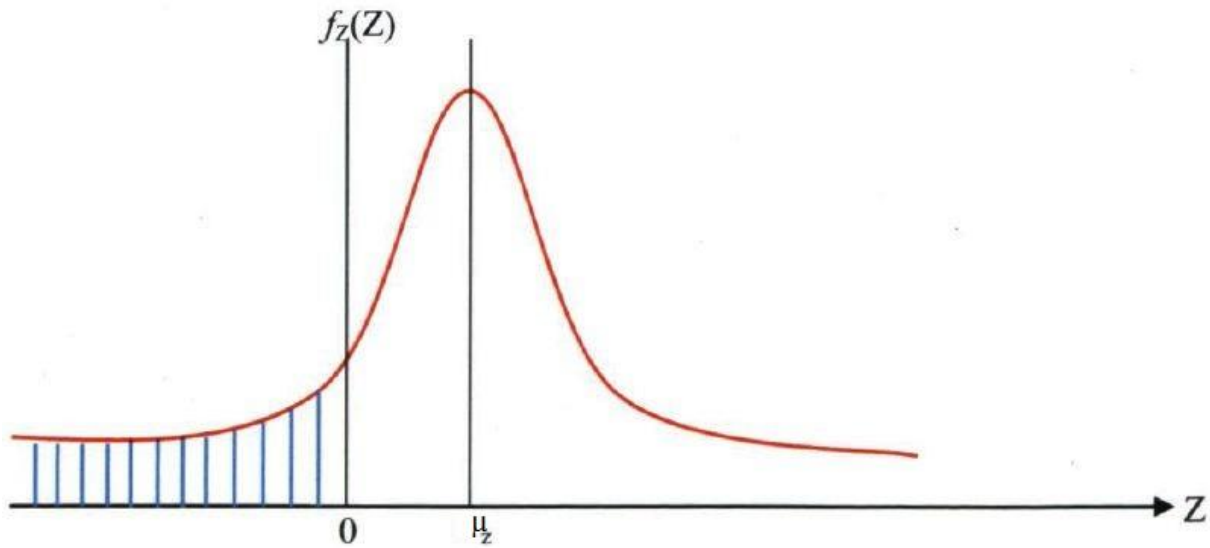


Fig. III.4. Représentation de l'indice de Rjanitzyne-cornell [49]

Mais cette approche a un inconvénient, si la représentation différente de la marge Z pour le même état limite conduit à une valeur différente de β . Par exemple, si la marge est définie par $Z_1 = R - S$ et $Z_2 = R/S - 1$, les calculs de la moyenne et de l'écart type de Z_2 ne peuvent plus être analytiquement effectués. Par ailleurs, Z_2 n'est pas une variable aléatoire Gaussienne même si R et S le sont. Une approximation est obtenue en linéarisant l'état limite autour des valeurs moyennes, mais nous n'obtiendrons pas la même valeur de l'indice de fiabilité pour la marge $Z_1 = R - S$. Comme montré ci-dessous :

- Cas élément R-S :

Le cas le plus simple est celui d'une fonction d'état limite linéaire comportant deux variables normales et indépendantes.

La marge de sécurité de cet état limite linéaire s'exprime comme suite :

1. Cas :

$$Z = R - S \tag{III.20}$$

La moyenne et l'écart-type de Z sont obtenus directement par la propriété de la sommation de deux variables normales.

$$\begin{cases} \mu_Z = \mu_R - \mu_S \\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{cases} \Rightarrow \beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \tag{III.21}$$

Où : μ_R et μ_S sont les moyennes de la résistance R et de la sollicitation S , et σ_R et σ_S leurs écarts types.

Si les variables sont corrélées, le résultat est valable en notant que :

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2 \text{cov}[R, S] \tag{III.22}$$

Si les variables R, S sont des variables Gaussiennes, Z est également gaussienne et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right) dz \quad (III.23)$$

Et, en posant $u = \frac{z-\mu_Z}{\sigma_Z}$:

$$\text{alors } P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta_c} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(-\beta_c) \quad (III.24)$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Remarque : la situation ci-dessus, les variables sont Gaussiennes et état limite est linéaire, est la seule situation pour laquelle cette démarche est rigoureuse.

2. Cas :

$$Z_2 = R/S - 1 \quad (III.25)$$

Avec, R, S deux variables aléatoire indépendantes et Gaussiennes, alors l'expression de μ_{Z_2} et σ_{Z_2} peut-être calculée à partir de la méthode des perturbations avec le choix de l'utilisation du premier ordre ou du plus haut ordre.

Pour le choix du premier ordre, on aura :

$$\beta_c = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \frac{\sigma_S^2}{\left(\frac{\mu_S}{\mu_R}\right)^2} + \sigma_R^2 \frac{\sigma_S^2}{\mu_S^2}}} \quad (III.26)$$

Nous trouvons que l'expression de β_c dans le sens physique pour Z_1 et Z_2 n'est pas pareil alors que la probabilité de défaillance reste identique. Et pour éviter ce problème, nous nous ramenons à l'utilisation de l'espace normalisé qui est proposé par Hasofer et Lind.

III.2.3.1.2. Indice de Hasofer et Lind :

Dans cette présente étude l'indice de Hasofer-Lind sera utilisé car il permet de résoudre le problème dû à la non-invariance. Pour pallier ce problème, Hasofer et Lind ont proposé de ne pas se placer dans l'espace des variables physiques, mais d'effectuer un changement de variable, vers un nouvel espace de variables gaussiennes statistiquement indépendantes de moyennes nulles et d'écart types unitaires :

$$X_i \xrightarrow{T} U_i \text{ Vecteur gaussien } \mathcal{N}(0,1), \mu_{U_i} = 0, \sigma_{U_i} = 1, \rho_{ij} = 0, \forall i, \forall j$$

Dans le cas des variables gaussiennes indépendantes, la transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) est isoprobabiliste :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (\text{III.27})$$

Pour des variables non corrélées de loi quelconque, le principe de la transformation consiste à écrire l'égalité des fonctions de répartition :

$$\Phi(u) = F_X(x) \Rightarrow x \rightarrow u = \Phi^{-1}(F_X(x)) \quad (\text{III.28})$$

La transformation de l'équation (III.16) est appelée **transformation isoprobabiliste**, elle est notée T . Elle est appliquée ici pour une variable et elle suppose que $F_X(x)$ soit continue et strictement croissante. Si les variables ne sont pas indépendantes, une forme générale de la transformation a été donnée par Rosenblatt.

III.2.3.2. Transformation isoprobabiliste :

La transformation du vecteur aléatoire x dans l'espace physique en un vecteur aléatoire gaussien centré réduit u , dont la moyenne est zéro et la matrice de covariance est la matrice unitaire, est nécessaire à la détermination du point de conception. Si les variables sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation T la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable x_i en une variable u_i normale centrée réduite par :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i \Leftrightarrow \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (\text{III.29})$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1) et F_{X_i} la fonction de distribution de la variable x_i . On obtient donc :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (\text{III.30})$$

Réciproquement, si F_{X_i} est inversible pour toute valeur de x_i , la transformation inverse est définie :

$$u_i \xrightarrow{T^{-1}} x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (\text{III.31})$$

La fonction d'état limite est notée dans le nouvel espace gaussien comme suit :

$$H(u) = G(x) \quad (\text{III.32})$$

Lorsque les variables sont corrélées, on utilise, en particulier, les transformations de Rosenblatt ou de Nataf.

Pour des lois quelconques, les transformations T et T^{-1} ne peuvent être construites que numériquement, point par point. Il existe cependant des cas où une forme analytique peut être trouvée.

La transformation de Rosenblatt est la transformation isoprobabiliste la plus couramment utilisée dans le calcul de la probabilité. Elle donne une solution lorsque la fonction de distribution conjointe $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est connue car elle suppose le choix d'un ordre des variables et elle conduit à des évaluations différentes de l'indice de fiabilité. La transformation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 x_i &\xrightarrow{T} u_i = T(x_i) \\
 u_1 &= \Phi^{-1}\left(F_{X_1}(x_1)\right) \\
 u_2 &= \Phi^{-1}\left(F_{X_2}(x_1 : x_2)\right) \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 u_i &= \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i : x_1, x_2, \dots, x_{i-1})\right)
 \end{aligned}$$

III.2.3.3. Définition de l'indice de fiabilité exact et invariant :

L'indice de fiabilité notée β_{HL} est une mesure de la fiabilité, il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Il correspond à la distance euclidienne entre l'origine de l'espace normalisé et la surface de l'état limite (c.-à-d. entre l'origine O et le point P^*). L'indice est obtenu en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \tag{III.33}$$

$$\beta_{HL} = \beta = \text{distance}(O, G(\{x_i(u_j)\})) \min_{G(\{x_i(u_j)\}) \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \tag{III.34}$$

P^* : Point de défaillance le plus probable, il est le point de l'espace normalisé qui réalise ce minimum.

L'indice β_{HL} est compté positif si le point origine appartient au domaine de sûreté, sinon il est négatif.

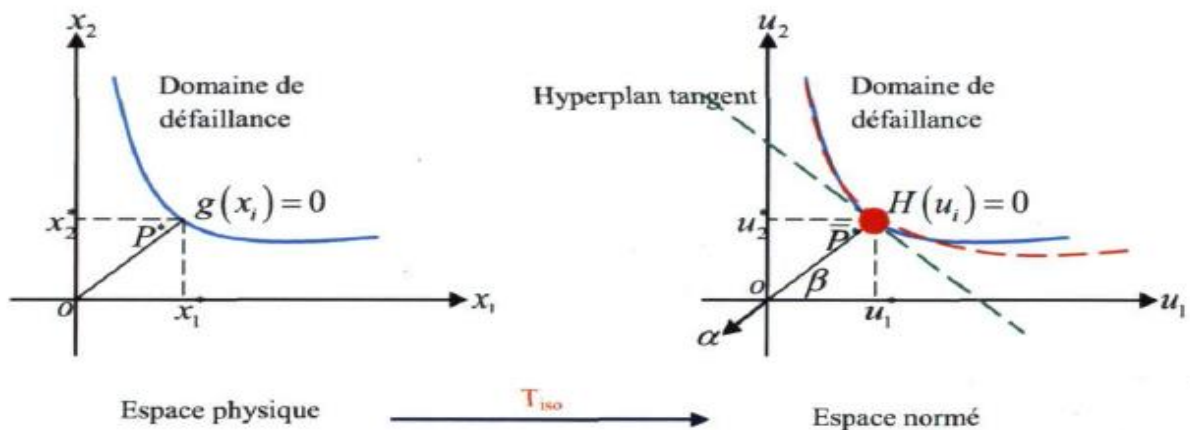


Fig.III.5. Point de conception [56]

Le point P^* est proportionnel au vecteur unitaire α^* , vecteur des cosinus directeurs (dont la valeur varie entre -1 et 1), normal à la surface de défaillance en u^* , soit :

$$u^* = -\beta_{HL} \cdot \alpha^* \quad (\text{III.35})$$

Le point u^* est déterminé comme la limite d'une séquence $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}, \dots$. Le vecteur unitaire normal à la surface de défaillance défini par $H(u)$ au point $u^{(m)}$ est noté $\alpha^{(m)}$. Le vecteur $\alpha^{(m)}$ est parallèle au vecteur gradient en $u^{(m)}$ et dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha^{(m)} = -\frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \quad (\text{III.36})$$

III.2.3.4. Recherche du point de conception :

Le point de conception (ou point de défaillance le plus probable) est le point de la surface d'état-limite où la densité de probabilité de U est maximale, il est aussi défini comme le point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine :

$$\begin{aligned} \beta &= \min d, \text{ avec } d = \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \\ \beta_{HL} &= \min_{G\{x_i(u_j)\} \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \\ &\text{Sous contrainte } H(u) \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Donc Le calcul de β_{HL} est un problème d'optimisation sous contrainte. Il existe différents algorithmes pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte :

- Les algorithmes d'ordre zéro comme les méthodes de dichotomie ou du simplexe qui ne requièrent pas la détermination des gradients de la fonction d'état limite. Néanmoins la vitesse de convergence de ces méthodes est extrêmement lente.

- Les algorithmes d'ordre un, tels que la méthode du gradient projeté ou l'algorithme de Rackwitz-Fiessler. La convergence de ces méthodes dépend de la détermination des gradients de la fonction d'état limite.

- Les algorithmes d'ordre deux, tels que la méthode de Newton et les méthodes du type SQP (Sequential Quadratic Programming). Ces méthodes requièrent l'évaluation des dérivées première et seconde de la fonction d'état limite et l'estimation de la matrice hessienne (matrice carrée composée des dérivées partielles secondes). L'utilisation des méthodes SQP pose des problèmes si la dimension est grande.

- Les algorithmes d'ordre deux où la matrice hessienne est approchée sans être calculée, tels que la méthode de Abdo et Rackwitz [57]. Cette méthode est une variante de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler. Elle possède donc les mêmes propriétés que la méthode de Rackwitz-Fiessler, mais elle est globalement convergente.

- Les algorithmes spécifiques aux surfaces de défaillance non différentiables, tels que la méthode du simplexe et la méthode des traces pivotantes Mébarki [58]. Ces algorithmes sont efficaces dans le cas où la fonction de défaillance n'est pas différentiable au voisinage du point de conception. Mais la vitesse de convergence de ces méthodes dépend de plusieurs paramètres dont l'ajustement initial est délicat.

Une présentation détaillée de ces algorithmes d'optimisation, ainsi qu'une comparaison de certains d'entre eux, ont été proposées dans Devictor [59], Sudret et Der Kiureghian [60].

Dans cette étude, le problème de minimisation sous contraintes sera résolu, en utilisant l'algorithme de Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler qui est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception.

III.2.3.5. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL} :

Pour résoudre le problème de minimisation eq (III.37) :

$$\beta_{HL} = \|u^*\|$$

$$\beta_{HL} = \beta = \text{distance}(O, G(\{x_i(u_j)\})) \min_{G(\{x_i(u_j)\} \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \text{ Sous contrainte } H(u) \leq 0$$

Il existe de nombreux algorithmes permettant la résolution du problème d'optimisation. En pratique, l'algorithme de Rackwitz-Fiessler est le plus employé à cause de sa simplicité et ses bons résultats. L'algorithme d'Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception. L'algorithme (HL-RF) est une amélioration de l'algorithme de Hasofer-Lind, qui suppose que les variables de base sont gaussiennes et non corrélées. Quant à lui (HL-RF) est plus générale. Il n'a aucune restriction concernant les variables de base. L'algorithme qui sera utilisé dans ce qui suit, est celui qu'on trouve dans l'ouvrage de LEMAIRE [49].

Les hypothèses considérées dans l'algorithme :

- La fonction d'état limite H admet un gradient au point de coordonnée u .
- Le gradient $\nabla H(u)$ est non nul en tout point de l'hyper surface d'état limite.

Pour déterminer le point de conception, on se place dans l'espace normé en un point $P^{(k)}$ de coordonnée $\{u\}^{(k)}$, point origine de l'itération (k) . Ce point n'appartient pas nécessairement à la contrainte et $H(u)$ peut être différent de zéro. Le développement en série de Taylor de la fonction d'état limite $H(u)$ autour du point $P^{(k)}$ donne :

$$H(u) = H(u^{(k)}) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\} - \{u\}^{(k)}) + O(\{u\} - \{u\}^{(k)})^2 \quad (\text{III.38})$$

L'équation de l'hyper-plan tangent a $H(u)$ en $\{u\}^{(k)}$:

$$\langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} \{u\} + c = 0 \quad (\text{III.39})$$

Avec $\nabla H(u^{(k)})$ le gradient de $H(u)$ au point $P^{(k)}$. On définit alors $P^{(k+1)}$ par :

$$H(u^{(k+1)}) = H(u^{(k)}) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (\text{III.40})$$

En divisant l'équation par la norme $\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}$ et en introduisant les cosinus directeurs de H en P^k on obtient :

$$\frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} + \langle \alpha \rangle^{(k)} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (\text{III.41})$$

Il vient :

$$\langle u \rangle^{(k+1)} \{\alpha\}^{(k)} = \langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad (\text{III.42})$$

Avec $\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}}$ le vecteur des cosinus directeurs (ou le vecteur du gradient normalisé) de H en $P^{(k)}$.

A la limite quand $k \rightarrow \infty$, $d(u^{(k)}) = \beta$ et $\{u\} = -\beta \{\alpha\}$ si l'algorithme est convergent. A l'itération (k) , posons :

$$\{u\}^{(k+1)} = -\beta^{(k)} \cdot \{\alpha\}^{(k)} \Rightarrow \beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k+1)} \cdot \{\alpha\}^{(k)} \quad (\text{III.43})$$

Ce qui conduit à la relation itérative donnant l'indice de fiabilité :

$$\beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} + \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad (\text{III.44})$$

L'algorithme de recherche de l'indice de fiabilité s'arrête lorsque la norme $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$

Et $\{u\}^{(k+1)}$, est déduit en remplaçant l'équation (II.28) dans (II.27) par :

$$\{u\}^{(k+1)} = (\langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)}) \{\alpha\}^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \{\alpha\}^{(k)} \quad (\text{III.45})$$

❖ Résumé de l'algorithme :

L'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est résumé par les étapes suivantes :

- 1- Choisir un point de départ $\{u\}^{(0)}$;
- 2- Évaluer la fonction d'état-limite $H(u^{(k)})$;
- 3- Calculer le gradient de l'état-limite $\{\nabla H(u)\}^{(k)}$ et sa norme $\|\nabla H(u)\|^{(k)}$, en déduire $\{\alpha\}^{(k)}$ par :

$$\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} ;$$

- 4- Calculer l'indice de fiabilité $\beta^{(k)}$;
- 5- Calculer la coordonnée de la prochaine itération $\{u\}^{(k+1)}$;
- 6- Teste de convergence : si $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, arrêter le calcul ;

Sinon mettre $k = k + 1$ et aller en 2.

III. 2.3.5.1. Organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) :

L'organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), est décrit ci-dessous :

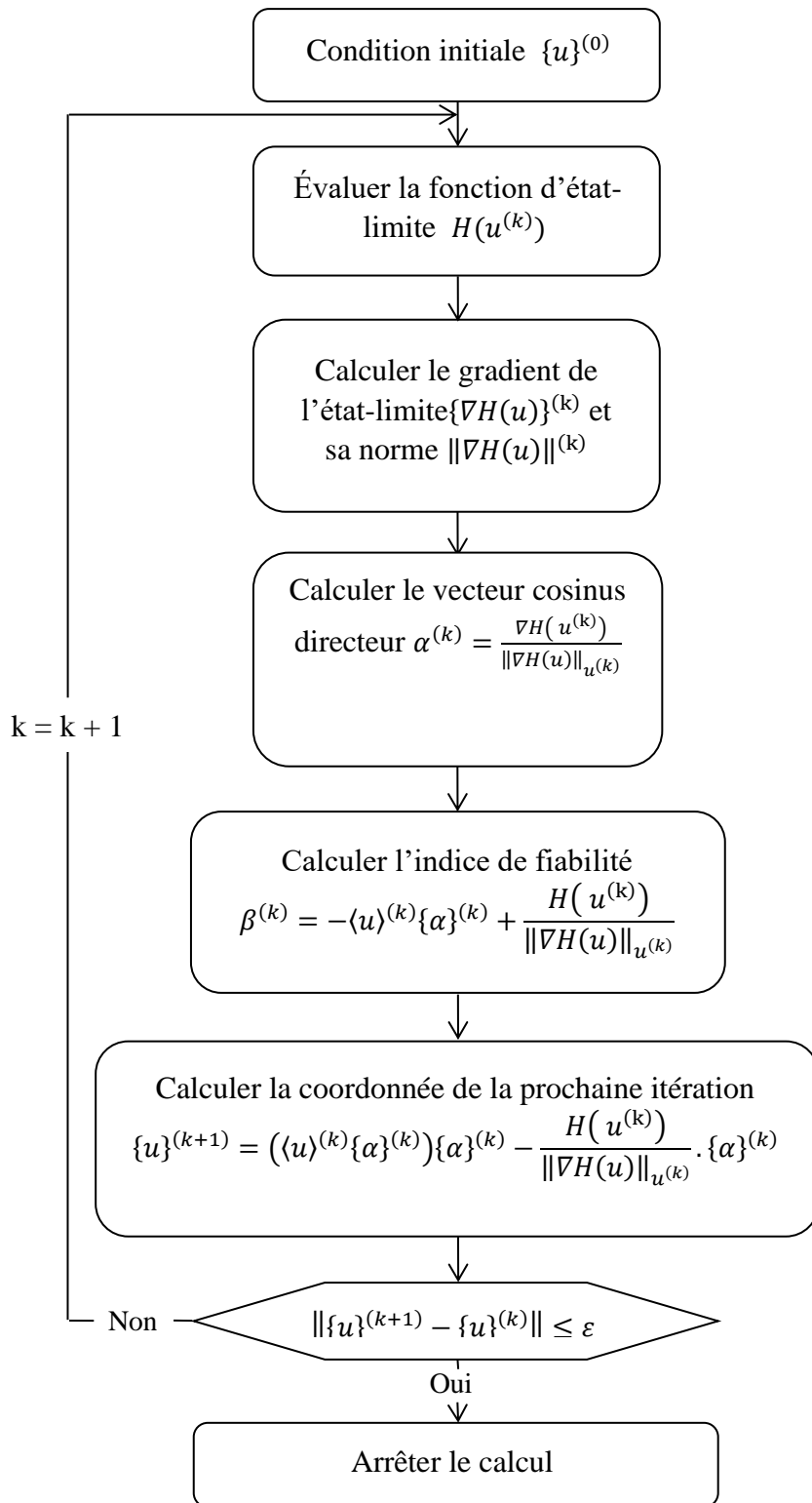


Fig.III.6. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF)

❖ Exemple illustratif :

On se propose de calculer l'indice de fiabilité à partir de notre implémentation sur un exemple simple dont le calcul analytique a été fait par LEMAIRE [49], afin de valider l'algorithme présenté ci-dessus et son implémentation.

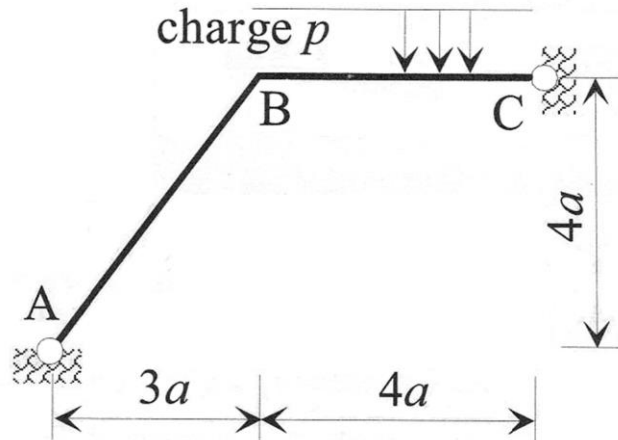


Fig. III.7. Représentation du portique [49]

Après un calcul de RDM du portique, la valeur du moment fléchissant en B s'exprime comme suite : $M_B = -0.496 p a^2$

Où : p est la charge répartie aléatoire et a est une unité de longueur déterministe prise égale à 1. Le moment résistant M_R est considéré comme variable aléatoire. Pour cet exemple la défaillance est produite lorsque : $|M_B| \geq M_R$.

Les données du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Variable X	Variable U	m_X	σ_X	Loi (cas 1)
p	U_1	1000	200	Normale
M_R	U_2	800	40	Normale

Tableau III.1 : La moyenne et l'écart-type des variables du problème

Les résultats du problème obtenus par le programme qu'on a développé sont confrontés au calcul analytique de LEMAIRE [49], et sont présentés dans le tableau suivant :

	β	α_1	α_2
LEMAIRE	2.84	-0.927	0.374
Notre calcul	2.8422	-0.9274414720	0.3739683355
Erreur (%)	0.077	0.047	0.0084

Tableau III.2 : Résultats du problème

III.3. Méthode FORM/ SORM :

Tout d'abord, nous supposons qu'il existe une transformation suffisamment régulière (transformation Rosenblatt) $T: X \rightarrow U$ qui permet de transformer l'espace X des variables physiques en l'espace U des variables normalisées. Par définition, T respecte la mesure de probabilité que nous appelons la transformation isoprobabiliste. En tant que transformation, la transformation isoprobabiliste est inversible. Lorsque l'espace des variables physique est formé des variables aléatoires Gaussiennes, T est une simple affinité.

$$\Phi(u_i) = F_{x_i}(x_i) \rightarrow u_i = T(x_i) \quad (\text{III.46})$$

Les développements suivants seront effectués dans l'espace normalisé pour l'état-limite de structure. La frontière de Df , le domaine de défaillance, doit être une hypersurface suffisamment différentiable, au moins au point de conception. Le point P^* , de coordonnées u^* est au minimum de la distance de l'état-limite à l'origine.

III.3.1. Méthode FORM :

Cette méthode est appliquée dans l'espace normé U . Le principe de l'approximation linéaire commence tout d'abord par la résolution du problème :

$$\begin{aligned} \beta &= \min d, \text{ avec } d = \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \\ \beta &= \min \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \\ \text{Sous la contrainte} \\ G(U) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Qui conduit à la détermination du point de conception P^* et la distance minimum à l'origine β . Une constatation simple est à l'origine du développement des méthodes FORM : *au point du domaine Df le plus proche de l'origine, c.-à-d. au point de conception, la densité de probabilité est maximale dans Df ; en présence d'un nombre limité de variables aléatoires, cette densité décroît rapidement lorsque la distance à l'origine augmente.*

Cela résulte de la forme analytique de la densité de probabilité de la loi normale centrée sans corrélation. Cette propriété devient cependant de moins en moins vérifiée lorsque le nombre de variables aléatoires du problème augmente.

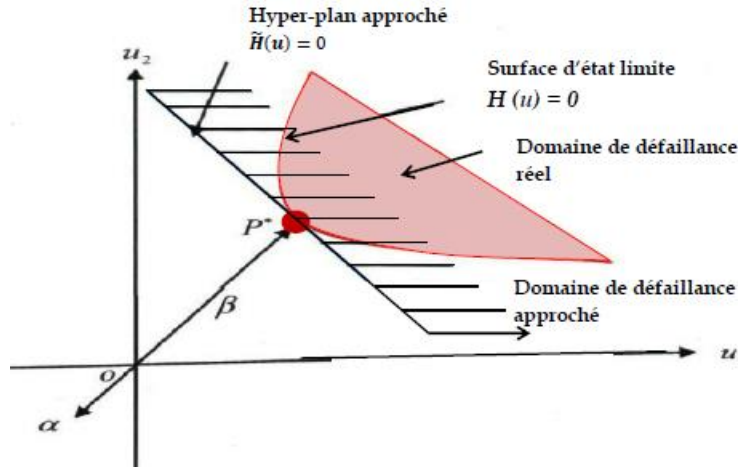


Fig.III.8. Représentation l'approximation FORM

La figure III.8 montre la surface d'état-limite qui est remplacée par un hyperplan au point de conception. L'équation d'un tel hyperplan est donnée par :

$$\tilde{G}(u) = \sum_i \alpha^* u_i + \beta = 0 \tag{III.48}$$

Où α^* est le cosinus directeur du gradient de $G(u)$ au point P^* . Par construction, cet hyperplan est orthogonal au vecteur P^*O de cosinus directeur α^* . ∂Df étant définie par l'équation implicite $G(u) = 0$, nous sommes certains qu'un plan tangent existe au point P^* réalisant le minimum de la distance si :

1. G admet un gradient noté ∇G au point de conception P^*
2. $\nabla G(u) :_{P^*} \neq 0$

Alors la méthode FORM, c'est la méthode en première approximation, c'est-à-dire quand nous remplaçons la surface d'état-limite par son hyperplan tangent au point de conception P^* , la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta_c)$$

Dans laquelle Φ est la fonction de distribution de probabilité par la loi normale centrée à 1 dimension $\mathcal{N}(0,1)$.

III.3.2. Méthode SORM

Quelques auteurs [61], [62], [63] se sont attachés à donner une meilleure approximation de la probabilité de défaillance à partir d'une connaissance plus complète de la géométrie de la fonction d'état-limite au voisinage du point de conception. En effet, le défaut du calcul FORM est principalement dû à la courbure de l'hypersurface d'état-limite au point P^* , mais en réalité, il existe une partie "oubliée" du poids de probabilité par FORM.

La fonction d'état-limite est alors approchée en SORM par une hypersurface comme montré à la figure III.9. En effet, la condition où FORM ne marche pas très bien est lorsque l'état limite n'est pas linéaire, ou quand les variables aléatoires ne sont pas Gaussiennes.

Nous pouvons utiliser l'approximation de Breitung [61] [62] qui donne la correction de la probabilité de défaillance obtenue par FORM :

$$P_f = \Phi(-\beta) \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+\beta_{kj}}} \right) \quad (\text{III.49})$$

Où k est la courbure de l'hypersurface au point de conception, et n est le nombre de variables aléatoires.

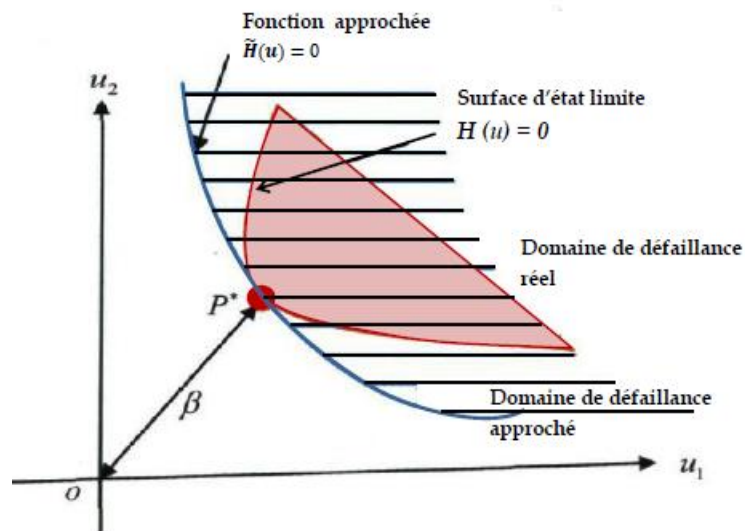


Fig. III.9. Représentation de l'approximation SORM.

III.4. Couplage mécano-fiabiliste :

III.4.1. Introduction :

Dans les problèmes mécaniques linéaires, l'algorithme de calcul de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β suppose que la fonction d'état $G(X)$ est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base. Cependant, dans les problèmes mécaniques, tenant compte de la non-linéarité géométrique ou mécanique, les expressions analytiques des fonctions d'état limite en fonction des variables x_i sont indisponibles. La marge de sécurité ne peut donc être obtenue que sous forme implicite.

L'association des méthodes de fiabilité et des simulations par élément fini constitue un couplage mécano-fiabiliste, le code élément fini est piloté par le modèle fiabiliste qui permet d'analyser les résultats et de prendre continuellement les décisions appropriées. Les principales tâches du modèle mécanique consistent à évaluer la fonction de performance et à calculer les gradients, quant aux tâches du modèle fiabiliste elles consistent à estimer l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance du modèle mécanique étudiée.

Pour réaliser ce couplage, il existe trois méthodes de pilotage [49] :

- Le **couplage direct**, dans lequel le code fiabiliste appelle le code élément fini chaque fois que le calcul de $G(X_i)$ est nécessaire ;
- Le **couplage par surface de réponse**, dans lequel un plan d'expériences numériques permet de construire une réponse explicite approchée de la fonction de performance $G(X_i)$;
- Le **couplage par optimisation**, dans lequel le problème d'optimisation conduisant au calcul de l'indice β est résolu par les procédures d'optimisation disponibles dans le code élément fini.

Dans cette présente étude, le couplage mécano-fiabiliste sera réalisé par surface de réponse.

III.4.2. Le couplage direct :

Le couplage direct est utilisé dans le cas où les méthodes de simulation sont mises en œuvre pour déterminer la probabilité de défaillance du système concerné. On fait appel au modèle mécanique chaque fois qu'une réalisation de la fonction de performance est à calculer. Le modèle fiabiliste choisit la réalisation x_i et appelle le code éléments finis.

III.4.2.1. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe :

L'organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe, est décrit ci-dessous :

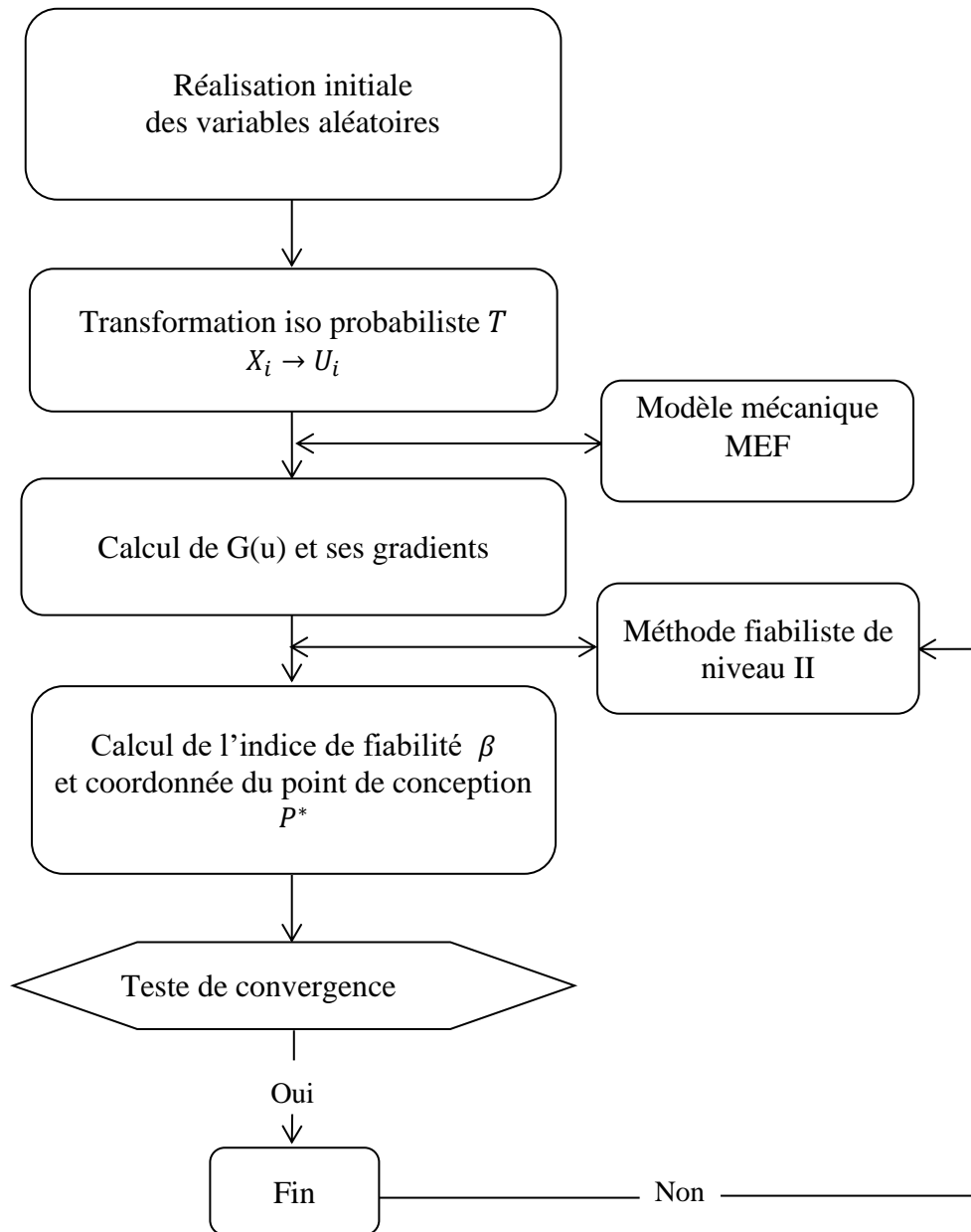


Fig. III.10. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste directe dans le cas des méthodes fiabilistes de niveau II [64]

III.4.3. Méthode par surface de réponse :

Dans cette méthode, l'état limite est approché par une surface, dite surface de réponse. L'idée est de remplacer la fonction d'état limite qui représente la défaillance de la structure et qui est indisponible sous une forme explicite, dans l'espace physique $G(x)$ ou normé $H(u)$, par une fonction explicite équivalente $\hat{G}(x)$ ou $\hat{H}(u)$, afin de pouvoir appliquer les différentes méthodes d'analyse de la fiabilité.

Il existe trois méthodes pour construire une surface de réponse :

- Méthode de **surface de réponse analytique**, elle est basée sur une approximation d'un modèle de la fonction de performance sur une base de données sélectionnée en utilisant des fonctions mathématiques, en particulier des polynômes. Cette méthode est la plus utilisée en ingénierie.
- Méthode de **surface de réponse physique**, elles consistent en l'utilisation des lois déterministes dans lesquelles sont introduites des variables aléatoires pour prendre en compte les variables intrinsèques.
- Méthode de **réseau neurones**, elle s'appuie sur l'utilisation de la méthode de réseau neurones dans la construction de la surface de réponse approchée.

Dans cette présente étude, nous traiterons la construction d'une surface de réponse analytique qui est la plus souvent utilisée dans la pratique.

III.4.3.1. Surface de réponse analytique :

La méthode de surface de réponse analytique consiste à remplacer la fonction de performance inconnue $g(x)$ par une fonction approchée $\hat{g}(x)$. Le choix d'un ordre élevé du polynôme permet de mieux représenter le modèle. Très souvent, une forme quadratique est choisie pour l'écriture du substitut $\hat{g}(x)$ de la fonction de performance $g(x)$. Autrement dit, le substitut s'écrit de la manière suivante :

$$G(x) \approx \hat{G}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} X_i^2 \quad (\text{III.50})$$

$$G(x) \approx \hat{G}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} X_i X_j \quad (\text{III.51})$$

Où : X le vecteur des n variables de base, et c_i, c_{ij} sont les coefficients du polynôme recherché.

Les coefficients sont les inconnues du problème, ils sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation dans la région autour du point de conception. L'évaluation de ces coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques qui correspondent à des calculs numériques avec des paramètres d'entrée sélectionnés conformément à un plan d'expérience.

Remarque :

Dans cette présente étude on a utilisé l'outil Excel pour déduire la fonction approchée $\hat{G}(x)$.

III.4. 3.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse :

L'organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse analytique, est décrit ci-dessous :

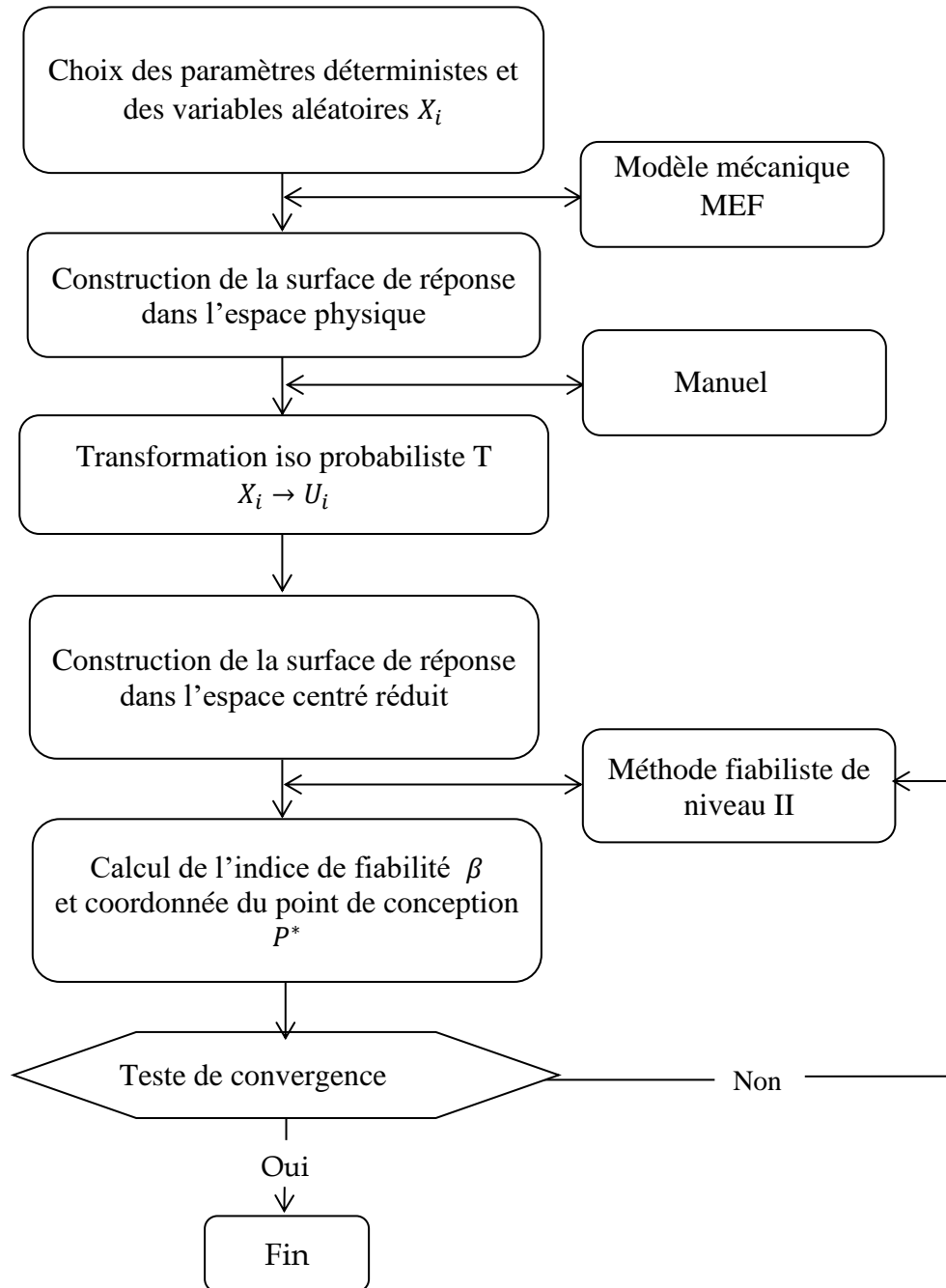


Fig. III.11. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse

III.5. Remarques sur les méthodes d'estimation de la fiabilité :

Il existe principalement deux familles de méthodes basées sur des concepts différents : les méthodes de niveau II basées sur la notion d'indice de fiabilité et les méthodes de niveau III basées sur les simulations de Monte-Carlo.

Les méthodes de niveau II sont efficaces en pratique. Elles permettent d'obtenir une estimation de la probabilité de défaillance, mais aussi le point maximum de la probabilité de défaillance et d'étudier la sensibilité de la probabilité de défaillance par rapport aux paramètres du problème. L'analyse de la sensibilité fournit au concepteur des arguments objectifs pour justifier les marges de qualité de fabrication ou les coefficients partiels de sécurité. Ces méthodes demandent le calcul approché des gradients et la validation des résultats obtenus n'est pas évidente.

Les simulations de Monte-Carlo constituent l'outil le plus précis pour calculer la probabilité de défaillance. Ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul si la probabilité recherchée est faible et le modèle mécanique complexe.

III.6. Conclusions :

Dans ce chapitre on a présenté, en premier lieu la méthode Monte-Carlo directe de niveau III, où la probabilité de défaillance est évaluée directement en calculant une intégrale multiple sur le domaine de défaillance. Les méthodes de Monte-Carlo sont le plus souvent utilisées.

L'Organigramme du calcul de la probabilité de défaillance par la simulation de Monte Carlo directe est présenté aussi.

Ensuite on a présenté en seconde lieu la méthode de (HL-RF) de niveau II dite approchée, elle est l'une des méthodes les plus utilisées dans la recherche en ingénierie. Son organigramme a été implémenté sous fortran 90 (*annexe II*).

Puis on a présenté la méthode de surface de réponse analytique, qui est utilisée dans le cas où la fonction d'état limite est implicite. Cette méthode de surface de réponse analytique a pour objectif la construction d'un état limite explicite afin de permettre aux méthodes classiques de fiabilité d'être appliquées.

Enfin on a présenté, l'organigramme utilisé dans notre étude qui résume le couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste afin d'estimer l'indice de fiabilité ainsi que la probabilité de défaillance d'une structure.

CHAPITRE IV

APPLICATION ET VALIDATION

Sommaire

IV. 1. Introduction	75
IV. 2. Etude de la poutre OG	76
IV.. 2.1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)	77
IV.. 2.2. Evaluation de la probabilité de défaillance de la poutre OG3	79
IV. 3. Etude des poutres en béton armé à section circulaires	83
IV. 3.1. Évaluation de la flèche sous charge (P) de chaque poutre.....	85
IV. 3.2. Évaluation de la probabilité de défaillance des poutres	86
IV. 4. Etude des pieux de ZHAN	88
IV. 4.1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)	89
IV. 4.2. Evaluation de la probabilité de défaillance de pieu en béton armé	94
IV. 5. Conclusion	99

IV. 1. Introduction

Dans notre étude, nous nous intéressons à l'analyse fiabiliste des structures en béton armé et en béton de fibre a section circulaire en tenant compte de comportement réel des matériaux.

Nous allons tout d'abord proposer un modèle mécanique pour décrire le phénomène de ruine étudié. Ce modèle mécanique sera par la suite couplé à un processeur d'analyse probabiliste qui prendra en compte les caractères aléatoires du chargement et des caractéristiques mécaniques du modèle étudié pour déterminer la bonne configuration de ruine la plus probable.

Les méthodes fiabilistes mises en œuvre pour évaluer la probabilité de défaillance P_f sont les méthodes de niveau III (simulation Monte Carlo directe) et les méthodes de niveau II (HL-RF) qui sont citées et expliquées au chapitre III.

L'estimation du mode de rupture le plus probable (point de conception), de l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance se font alors par couplage d'un programme de calcul non linéaire qui nous permet d'avoir la courbe d'état limite sous forme de surface de réponse numérique avec le modèle fiabiliste afin de justifier la fiabilité et les performances des systèmes étudiés.

Le programme de calcul non linéaire qu'on a utilisé est un logiciel de calcul des structures en béton armé et précontrainte développé par les références [39,], il permet d'évaluer la résistance des structures en béton armé comme (pieux, poteaux poutre...) en béton armé jusqu'à la rupture en élasticité non-linéaire sous un chargement instantané. L'ensemble des données et résultats sont présentés sous forme de fichier texte.

Ce programme permet de créer pour un certain nombre d'étapes des modes de calcul à partir des fonctions de base qui sont les sous-programmes (subroutines) :

- Déplacement d'un ou de tous les nœuds de la structure ;
- Efforts nodaux d'un ou de tous les nœuds de la structure ;
- Efforts internes aux extrémités ;
- Déformations de toute section de calcul.

Notre intervention réside dans une première étape au couplage de ce programme avec un programme de calcul de la fiabilité écrit aussi en langage fortran 90. La structure générale du programme est décrite en *annexe II*.

IV.2. Etude de la poutre OG :

L'objectif de cette validation numérique est de montrer la capacité de notre programme à prédire le comportement des structures en béton armé a section rectangulaire avant de passer aux structures à section circulaire, l'exemple choisi concerne les essais menés au département structures du CEBTP par [29], les corps d'épreuve sont deux poutres identiques en dimensions et en ferrailage. La poutre OG3 est fabriquée avec un béton normal d'une résistance au jour de l'essai de 52.5 MPA. La poutre OG4 est constituée d'un béton de haute performance de résistances $f_c = 71$ MPA. Les poutres étudiées dans le cadre de ce travail sont illustrées dans les figures IV.1, IV.2 et IV. 3, les données mécaniques et fiabilistes des poutres OG sont données dans le tableau IV. 1

Le but de cette étude est d'évaluer l'effort vertical (P) en fonction de la flèche verticale au milieu des poutres jusqu'à la rupture et de faire une comparaison entre les deux types du béton.

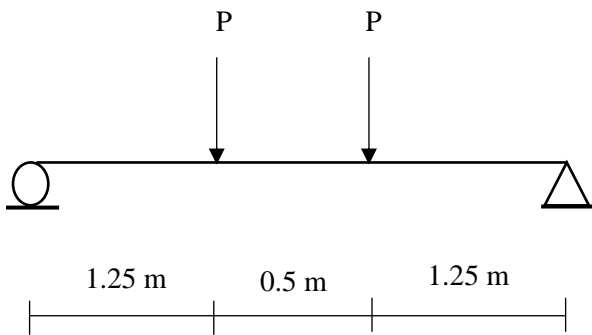


Fig. IV.1. La poutre OG

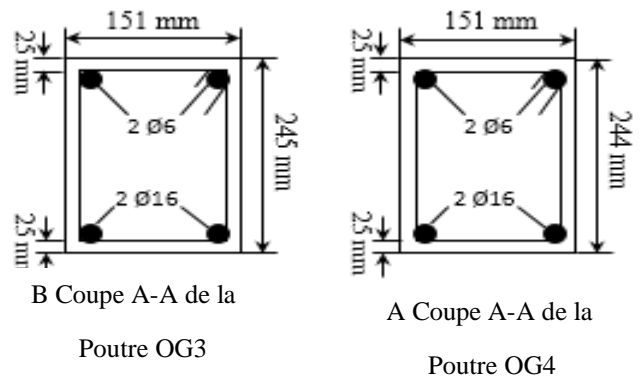


Fig. IV.2. La géométrie et ferrailage des poutres OG [29]

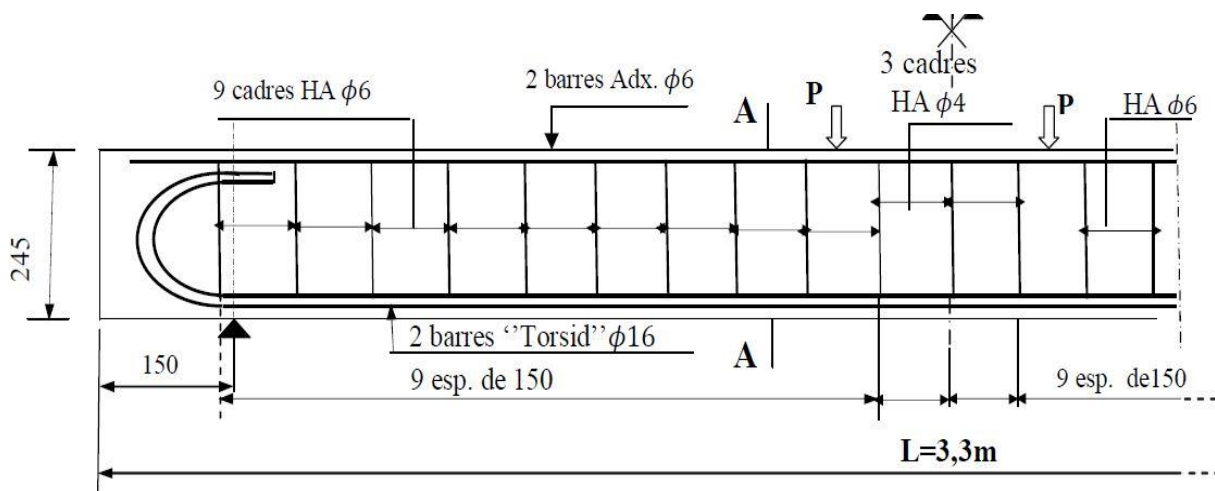


Fig. IV.3. Ferrailage de la poutre OG3

Désignation	Symbole	Unité	Loi de probabilité	OG3		OG4	
				Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
La charge P appliquée	P	[KN]	Déterministe	Variable	–	Variable	–
La portée	L	[m]	Déterministe	3	–	3	–
Coefficient de Poisson	ν	–	Déterministe	0.2	–	0.2	–
Contrainte maximale de compression du béton	f_{cj}	[MPA]	Normale	52.50	5.25	71	7.10
Contrainte maximale de traction du béton	f_{tj}	[MPA]	Normale	3.35	0.335	4.05	0.405
Module de Young élastique du béton	E_b	[MPA]	Normale	$3.99 \cdot 10^4$	$3.99 \cdot 10^2$	$4.69 \cdot 10^4$	$4.69 \cdot 10^2$
Limite élastique de l'acier passif	σ_e	[MPA]	Normale	575	57.50	590	59.0
Module de Young de l'acier passif	E_a	[MPA]	Normale	$2,05 \cdot 10^5$	$2,05 \cdot 10^3$	$2.1 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^3$
Paramètres adimensionnels	k_b	–	Déterministe	1.29	–	1.29	–
Paramètres adimensionnels	k'_b	–	Déterministe	0.29	–	0.29	–
Déformation ultime de rupture du béton	ε_{rb}	–	Normale	0.0035	10%	0.0035	10%
Déformation de rupture de l'acier	ε_{ra}	–	Normale	0.05	10%	0.05	10%

Tableau IV. 1. Données mécaniques et fiabilistes des poutres OG

IV.2. 1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)

Cette simulation a pour but d'évaluer l'effort vertical (P) en fonction de la flèche verticale au milieu des poutres jusqu'à la rupture. Pour cela, on introduit les données nécessaires des poutres OG3 et OG4 (Tableau IV.1) dans le programme informatique élaboré suivant les normes fortran 90. L'évolution de la charge en fonction du déplacement est donnée à la figure IV. 4 et IV. 5.

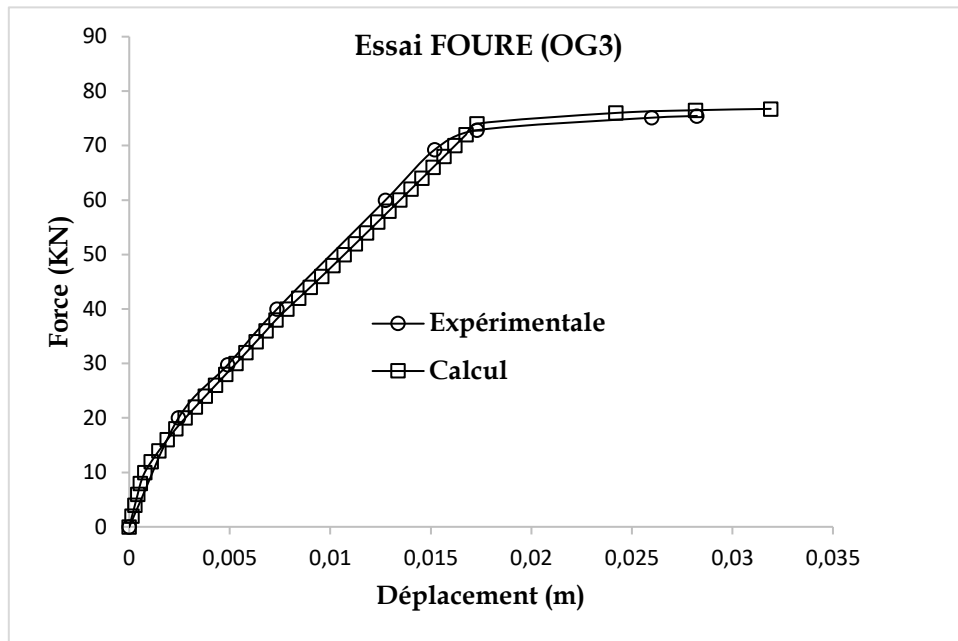


Fig. IV.4. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (OG3)

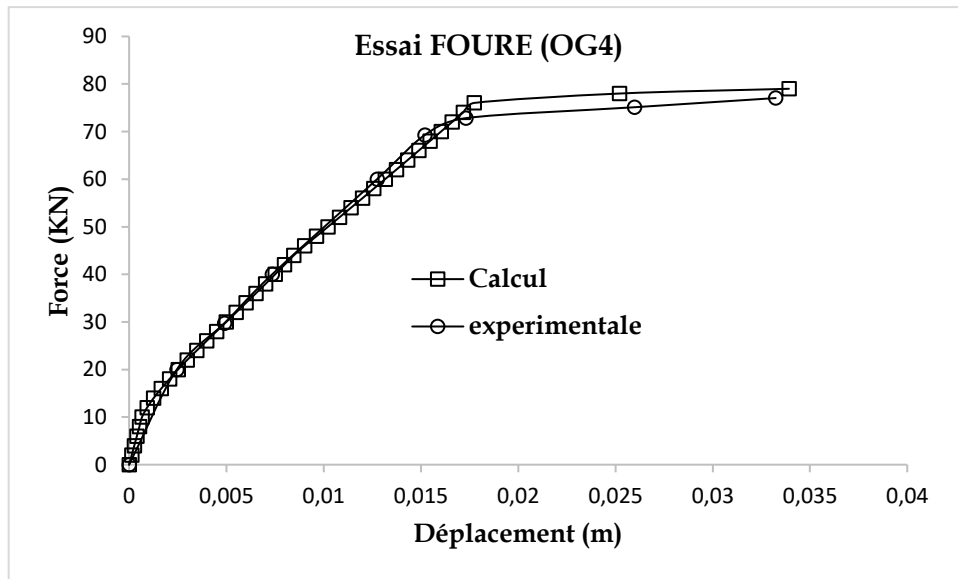


Fig. IV.5. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (OG4)

L'observation des résultats de la simulation montre que les principaux phénomènes de comportement observés dans l'expérience sont prédits d'une manière satisfaisante. Les courbes effort-flèche trouvées se rapprochent du comportement réel des poutres.

La fissuration réelle se produit pour une charge assez faible. Les valeurs observées expérimentalement sont ; OG3 (BN) environ 12.3 KN, OG4 environ 13.7KN, les valeurs données par notre modèle sont le 12 KN pour OG3 et 12.5KN pour OG4 soit une différence de l'ordre de 6%.

Dans la phase post fissuration du béton, le comportement est sensiblement linéaire mais avec une rigidité tangente réduite, les courbes charge-déplacement présentent ensuite une brusque incurvation qui correspond à la plastification des armatures, la charge réelle expérimentale correspondante est de 70KN, par contre la charge calculée avec notre modèle est de l'ordre de 74 KN. Globalement la différence entre nos résultats et l'expérimentation n'excède à pas 5%

Globalement, la simulation montre une bonne estimation de la charge de ruine et le comportement est bien simulé jusqu'à la ruine des poutres. Par contre, le déplacement ultime est un peu surestimé par rapport au déplacement obtenu expérimentalement pour la poutre OG3, ceci est probablement dû à la méthode (tangente) de résolution numérique utilisée.

IV.2. 2. Evaluation de la probabilité de défaillance de la poutre OG3 :

Dans ce qui suit, on procède à l'évaluation de la probabilité de défaillance de la poutre en utilisant deux méthodes : la méthode de niveau III (simulation Monté Carlo directe) et la méthode de niveau II (HL-RF).

a) La méthode de niveau III, Monté Carlo directe :

La fonction d'état limite séparant l'espace des paramètres en un domaine sûr et un domaine de défaillance, peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$G(\delta, P) = \delta_{max} - \delta_{calculer}$$

δ_{max} : dans la section la plus sollicitée expérimentalement

$G > 0$ Définit le domaine sûr, $G \leq 0$ le domaine de défaillance et $G = 0$ l'état limite.

On procède d'abord à réaliser un grand nombre de tirages aléatoires k (Engendrer des réalisations des variables aléatoires selon leur densité conjointe de probabilité).

1. Calculer la valeur de la fonction d'état-limite pour chaque tirage ;
2. $G \leq 0$ Il y a défaillance, incrémenter le compteur des cas défaillants par rapport au nombre total des réalisations effectuées ;
3. $G > 0$ Il n'y a pas de défaillance, il n'y a pas d'incrémentation ;
4. Répéter 1 à k jusqu'à ce qu'un nombre suffisant de tirages soit atteint ;

5. En notant, la probabilité de défaillance peut s'écrire :

$$P_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'événements où } G \leq 0}{\text{nombre total d'événements simulés}}$$

Après analyse par simulation de Monté Carlo on obtient les résultats suivants :

$P_f = 11.90476$ Donc la structure est fiable à **88.09524 %**. Sachant que La probabilité de défaillance est le complément à 1 de la fiabilité : $P_f = 1 - P_r$

La probabilité de défaillance	La fiabilité
11.90476 %	88.09524 %

Tableau IV. 2. Résultats obtenu par simulation de Monte Carlo (OG3)

b) Les méthodes de niveau II (HL-RF) :

On procède d'abord à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires (voir figures IV.6a et IV. 6b et tableau IV. 3) retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution Log-normale ou Exponentielle va mieux la représenter.

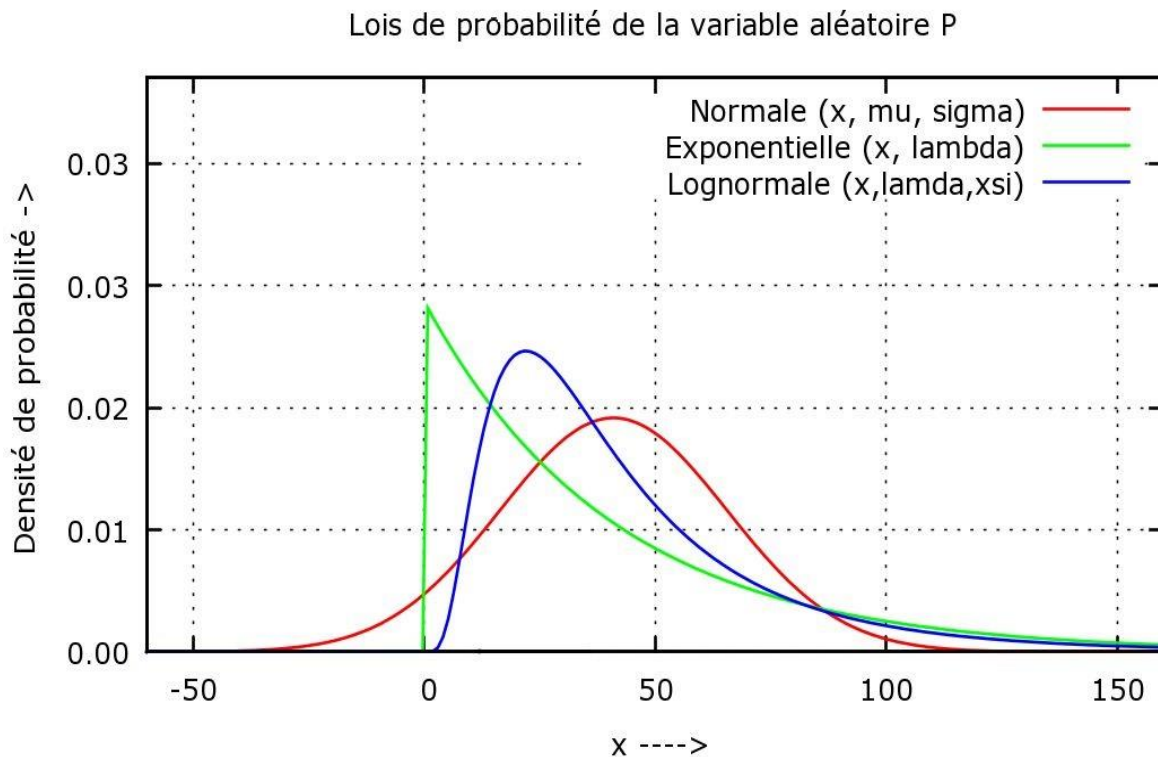


Fig. IV.6.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire P

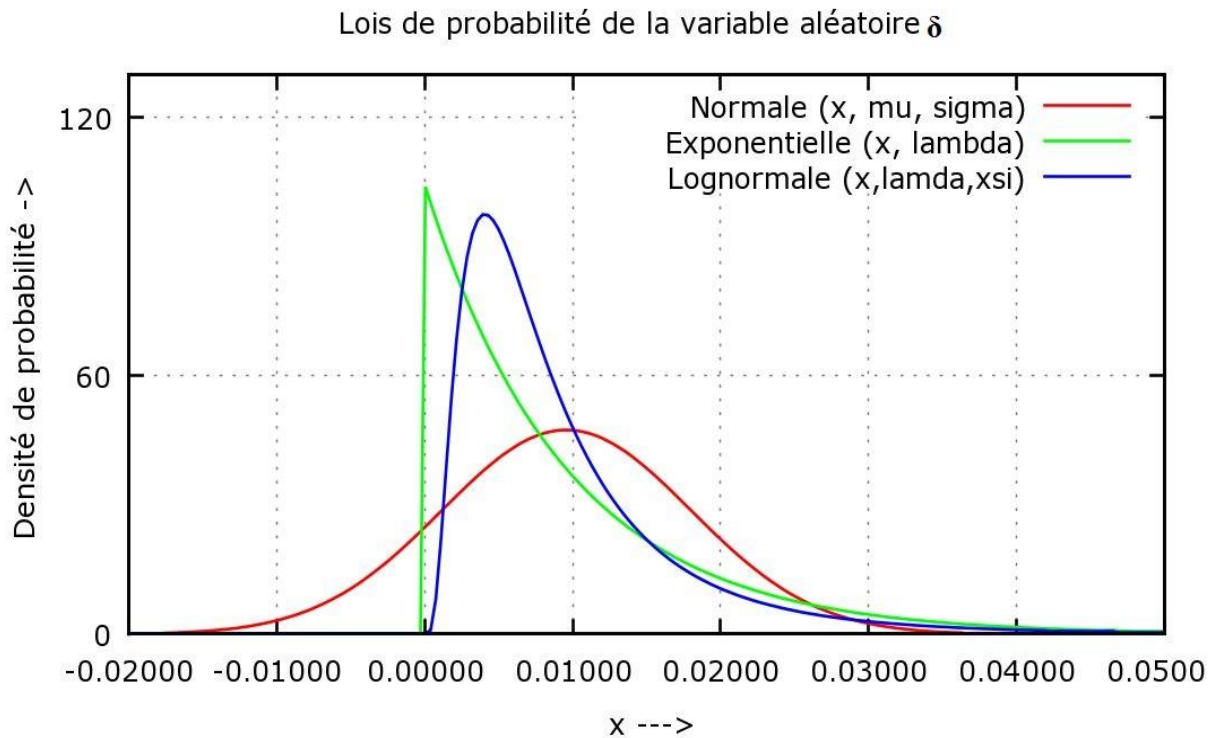


Fig. IV.6.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire δ

Les figures IV.6.a et IV.6.b présentent le résultat de l'estimation de la distribution des lois de probabilité des variables aléatoires retenues, par des lois normale, Log-normale et exponentielle.

Les résultats obtenus sur la figure IV.6.a. donnent ; pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire P soit négative, et pour la loi log-normale une faible densité de probabilité, cependant la loi exponentielle semble mieux représenter ce paramètre par rapport aux deux autres types de loi. Et ceux de la figure IV.6.b donnent aussi pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire δ soit négative, quant aux lois log-normale et exponentielle, elles semblent mieux représenter ce paramètre par rapport à la loi normale, sauf que la loi Log-normale donne une précision des phénomènes inconnus mieux que la loi normale et la loi exponentielle, car elle simule bien la loi normale par une courbe en cloche avec des résultats légèrement ramassés que cette dernière loi.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et ils sont représentés par le vecteur X , qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sortie à l'état-limite (P , δ), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi **Exponentielle** et **Log-normale** respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV.3.

Vecteur X	Variables aléatoires	Loi de distribution	Moyenne μ	Ecart-type σ	Coefficient de variation ν
X1	P	Exponentielle	40,979813	24,4997	0,5978
X2	δ	Log-normale	0,0095817	0,00841415	0,87814000

Tableau IV. 3. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite (OG3)

- Des variables aléatoires d'entrée sont considérées : les paramètres décrivant le comportement non linéaire du matériau (Module de Young élastique du béton ; Contrainte maximale de compression du béton ; Contrainte maximale de traction du béton ; Limite élastique de l'acier passif ; Module de Young de l'acier passif...) et leur loi de distributions aléatoires sont données dans le tableau IV.1. Les autres paramètres comme la longueur de la poutre, sont considérés comme déterministes.

La fonction d'état-limite $G(P, \delta)$ est une fonction non linéaire implicite (connue numériquement à partir de notre calcul non linéaire), dont la défaillance du système est observée quand $G(x) \leq 0$.

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est difficile de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité, alors il devient nécessaire de construire une surface de réponse.

La méthode de surface de réponse a pour objectif de remplacer la fonction d'état limite obtenue sous forme implicite par une autre fonction explicite, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité pour estimer l'indice de fiabilité des scénarios et la probabilité de défaillance de la structure étudiée. Pour cela on suit les étapes suivantes :

- Dans une première étape il faut transformer la fonction d'état limite de l'espace physique vers un espace centré réduit de moyenne nulle et d'écart-type unité selon la loi de la variable aléatoire.

$$G(P, \delta) \xrightarrow{T(\mu=0, \sigma=1)} H(P, \delta)$$

- Dans une seconde étape est de procéder au choix d'une forme mathématique à la surface de réponse.

$$H(P, \delta) \xrightarrow{\text{fonction approchée}} \hat{H}(P, \delta)$$

- La troisième étape est la modélisation des variables aléatoires.
- Enfin la quatrième étape consiste à appliquer la méthode de résolution définie au chapitre III (HL-RF) pour estimer l'indice de fiabilité et calculer la probabilité de défaillance.

Après l'analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats donnés au tableau IV. 4.

Indice de Fiabilité	Probabilité de Défaillance	La Fiabilité	Point de conception dans l'espace centré réduit (U1, U2)	Point de conception dans l'espace physique (X1, X2)
1.29306	0.09853 (9.853%)	0.90147 (90.147%)	(0.3901, -0.2403)	(25.311, 0.0044)

Tableau IV. 4. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste (OG3)

L'indice de fiabilité est $\beta = 1.29306$; ce qui correspond à une probabilité de défaillance de la poutre (OG3) estimée à $P_f = \Phi(-\beta) = 9.853\%$, d'où une fiabilité de 90.147%. Quant au point de défaillance le plus probable dans l'espace physique correspond à la charge 25.311 KN et le déplacement 0.0044 m.

On constate que les résultats obtenus après analyse par simulation de Monté Carlo ($P_f = 11.90476\%$) sont proches de ceux de la méthode d'HL-RF ($P_f = \Phi(-\beta) = 9.853\%$).

IV.3. Etude des poutres en béton armé à section circulaires :

Pour illustrer la fiabilité du programme développé dans cette présente étude. Le calcul de trois poutres de section circulaire dont l'étude expérimentale a été réalisée en Indonésie par Thamrin et al. [65] est présenté. Les diamètres des armatures longitudinales étaient de 13 mm, 16 mm, 19 mm avec une limite d'élasticité de 394 MPa, 380 MPa et 400 Mpa respectivement et la résistance moyenne à la compression du béton obtenue à partir des essais de compression est de 20,1 Mpa. Pour toutes les poutres voire Figure IV.7, la portée est de 2000 mm ; la distance entre les charges à deux points est de 400 mm, la longueur de la portée de cisaillement est de 800 mm, la longueur d'ancrage d'extrémité au-delà du support est de 150 mm et le diamètre de la section transversale de 250 mm. L'enrobage des armateurs mesuraient 30 mm. Plus de données relatives aux poutres sont illustrées dans le tableau IV. 5.

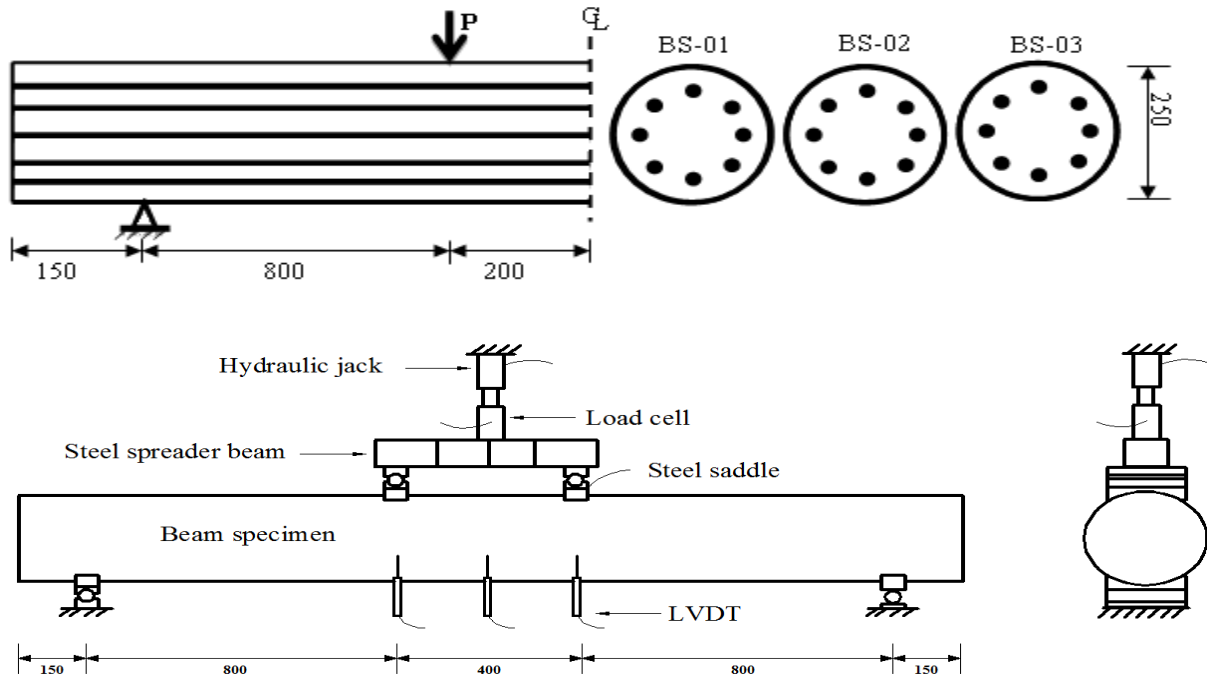


Fig. IV.7. Vue schématique des types des poutres, de la disposition d’essai, des dimensions et de l’équipement utilisé [65]

Variable	Unité	Loi de probabilité	Moyenne	Ecart-type
P	[KN]	Déterministe	Variable	–
Renforcement	mm	Déterministe	BS-01 8Ø13	–
Renforcement	mm	Déterministe	BS-02 8Ø16	–
Renforcement	mm	Déterministe	BS-03 8Ø19	–
D	mm	Déterministe	250	–
L	[m]	Déterministe	2.13	–
v	–	Déterministe	0.2	–
f_{cj}	[MPA]	Normal	20.1	2.01
f_{tj}	[MPA]	Normal	1.806	0.180
E_b	[MPA]	Normal	35656	3565.6
σ_e	[MPA]	Normal	BS-01 394	39.4
σ_e	[MPA]	Normal	BS-02 380	38.0
σ_e	[MPA]	Normal	BS-03 400	40.0
E_a	[MPA]	Normal	2.05.10 ⁵	2.05.10 ³
k_b	–	Déterministe	2.15	–
k’_b	–	Déterministe	1.15	–
ε_{cu}	–	Normal	0.0035	0.00035
ε_u	–	Normal	0.02	0.002

Tableau IV. 5. Données mécaniques et fiabilistes des poutres

IV.3.1. Évaluation de la flèche sous charge (P) de chaque poutre

La simulation est projetée pour évaluer la force verticale (P) en fonction de la flèche verticale au milieu de chaque poutre jusqu'à la rupture. Pour cela, nous introduisons les données nécessaires des échantillons (voir tableau IV.5) dans le programme informatique développé selon les normes Fortran 90. L'évolution de la charge en fonction du déplacement est représentée sur les figures IV. 8, IV. 9 et IV. 10.

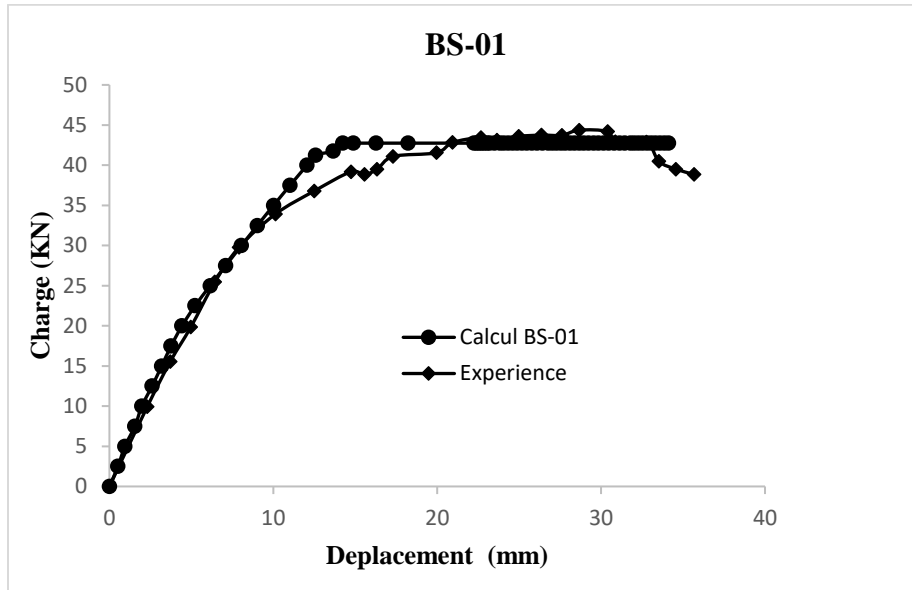


Fig. IV.8. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (BS-01)

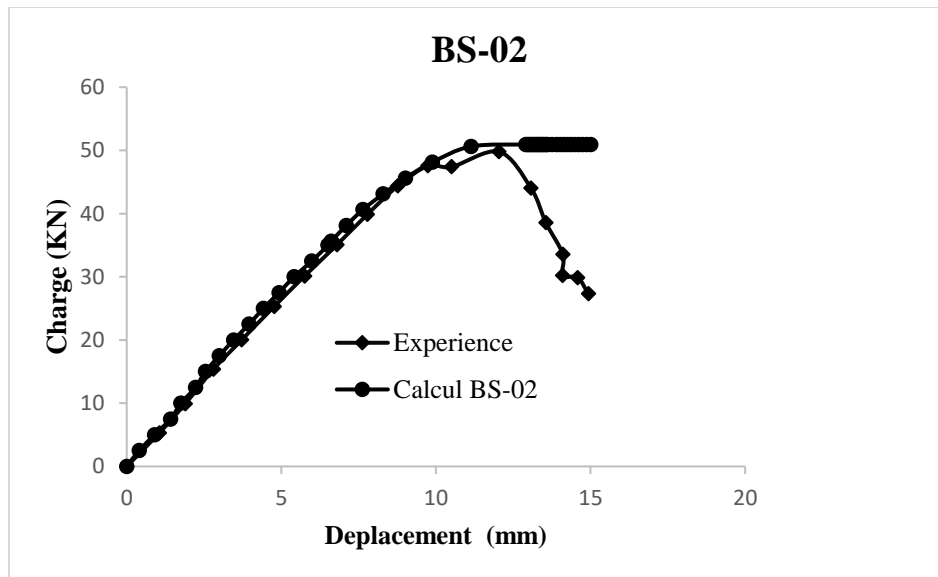


Fig. IV.9. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (BS-02)

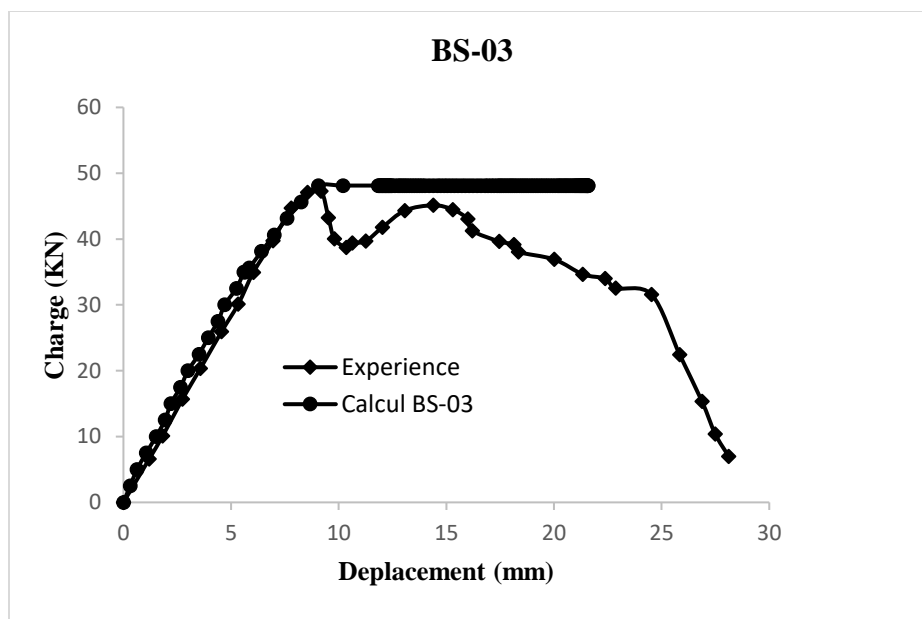


Fig. IV.10. Evolution de la flèche verticale en fonction de la charge P (BS-03)

Les résultats de la simulation montrent que les principaux phénomènes de comportement observés dans l'expérience sont prédits d'une manière satisfaisante. Les courbes effort-flèche trouvées se rapprochent du comportement réel des poutres. Les courbes, représentées sur les figures (IV.8, IV.9 et IV.10), se rapprochent des courbes expérimentales en phase de comportement élastique, mais au début du phénomène de plastification des aciers, elles commencent à s'écarter des courbes expérimentales. Cet écart est dû à des inexactitudes dans les valeurs réelles des matériaux (comme le module élastique d'origine du béton ou de l'acier). Aussi, on peut clairement voir à partir des courbes que notre programme de calcul non linéaire montre une grande capacité à évaluer la résistance des éléments de structure tridimensionnelle à sections circulaires en béton armé jusqu'à la rupture en élasticité non linéaire sous chargement incrémental instantané.

IV.3.2. Évaluation de la probabilité de défaillance des poutres

a) En utilisant la simulation Direct Monte Carlo

Après l'analyse de simulation de Monte Carlo, nous avons les résultats présentés dans le tableau IV.6 :

	BS-01	BS-02	BS-03
Probabilité de défaillance P_f	0.0405405 (4.05405%)	0.0675675 (6.75675%)	0.0135135 (1.35135%)
Fiabilité	0.9594595 (95.94595%)	0.9932433 (99.32433%)	0.9864865 (98.64865%)

Tableau IV. 6. Résultats obtenus par simulation de Monte Carlo

b) En utilisant la méthode de niveau II (HL-RF) :

Il est un peu difficile de réaliser l'étude par un couplage direct entre un programme de calcul non linéaire et un programme de fiabilité en raison de la complexité du modèle d'éléments finis, il devient donc nécessaire de construire une surface de réponse analytique. Les variables d'entrée aléatoires sont définies comme des paramètres décrivant le comportement non linéaire du matériau (module d'Young du béton, contrainte maximale de compression et de traction du béton, limite élastique de l'armature ; module d'Young d'armature) et leurs distributions aléatoires sont données dans le tableau IV. 5. D'autres paramètres, tels que la longueur des poutres, sont déterministes.

	BS-01		BS-02		BS-03	
Vecteur X	X1	X2	X1	X2	X1	X2
Variables aléatoires	P	δ	P	δ	P	δ
Loi de distribution	Normal	Log-normal	Normal	Log-normal	Normal	Log-normal
Moyenne μ	37.02576	0.02107	41.40104	0.01084	43.87500	0.01461
Ecart-type σ	11.66935	0.01057	15.36040	0.00518	10.91096	0.00595
Coefficient de variation ν	0.31516	0.50187	0.37101	0.47832	0.24868	0.40756

Tableau IV. 7. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite de chaque poutre

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats donnés au tableau IV. 8.

	BS-01	BS-02	BS-03
Indice de fiabilité β	1.5381	1.8813	1.7869
Probabilité de défaillance P_f	0.06301 (6.282%)	0.03065(3.065%)	0.03754(3.754%)
Fiabilité	0.93699 (93.699%)	0.96935 (96.935%)	0.96246 (96.246%)
Point de conception dans l'espace centré réduit (U1, U2)	(0.35106, -1.09707)	(0.33221, -1.03816)	(0.84938, -2.65431)
Point de conception dans l'espace physique (X1, X2)	(30.4024, 0.0094)	(32.24, 0.00717)	(43.6185, 0.0068)

Tableau IV. 8. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste des poutres

On constate que les résultats obtenus après l'analyse par la simulation de Monte Carlo sont proches de ceux de la méthode (HL-RF). Ces résultats conduisent à la nécessité d'approfondir la connaissance des propriétés des matériaux afin d'améliorer les paramètres de distribution et de prendre en compte les corrélations entre les variables aléatoires.

IV.4. Etude des pieux de ZHAN [66] :

Nous avons effectué le calcul avec le programme sur des pieux dont l'étude expérimentale a été réalisée au CEBTP par Zhan [66], Les pieux étudiés dans le cadre de ce travail ont un diamètre de 500 mm et de 4m de long, ils sont soumis à une flexion composée. L'effort normal de compression est de 1370 KN (appliqué à l'aide d'une précontrainte extérieure).

-Le Pieu en béton armé (BA) est renforcé longitudinalement par 5 barres d'acier HA de diamètre 16mm (correspondant à 0,5 % en volume) selon la min du DTU 13.2 et transversalement par des HA 6. Les caractéristiques géométriques et le détail du ferrailage est résumé dans la figure IV. 11

-Pieu (BT) : Béton non-armé

-Les pieux en béton de fibres sont répertoriés par les notations BFO25. BFO40, BF2T, leur dosage en fibre a été varié de 25kg/m³ à 40kg/m³. Les fibres EUROSTEEL, sont en acier tréfilé à haute résistance mécanique. Deux géométries de fibres ont été utilisées : une fibre ondulée de 1mm de diamètre et 60mm de long, et une fibre droite ayant les mêmes dimensions que la fibre ondulée, munie à chaque extrémité d'un cône d'ancrage (ouverture du cône 120).

-Pieu BF2T : 25kg/m³ de fibres à deux extrémités coniques (deux têtes)

-Pieu BF025 : 25kg/m³ de fibres ondulées (correspondant 0,31% en volume)

-Pieu BF040 : 40kg/m³ de fibre ondulées

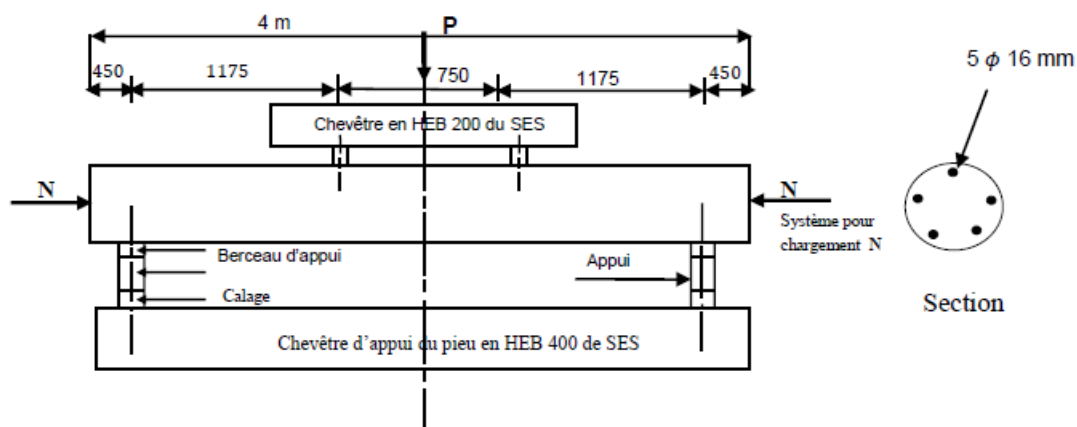


Fig. IV.11. Essai de flexion compose pour un pieu en béton armé à section circulaire Zhan [66]

Désignation	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{b0} (GPa)	R_b	R_c	ϵ_{rt} (‰)	ϵ_0 (‰)
BA	41.42	3.08	34.40	1.6	0.7	-20	2.1
BT	44.69	2.94	34.40	1.6	0.7	-5	2.1

Tableau IV. 9. Caractéristiques mécaniques du béton armé (BA), mesuré à 350 kg/m³ de ciment ; et du béton témoin (BT), mesuré à 400 kg/m³ de ciment

Désignation	f_{cj} (MPA)	f_{tj} (MPA)	E_{b0} (GPA)	R_b	R_c	ε_{rt} (‰)	ε_0 (‰)	ε_{cu} (‰)
BFO25	47.6	3.38	38.18	1.6	0.7	-50	2.1	3.5
BFO40	47.6	3.39	38.18	1.6	0.7	-50	2.1	3.5
BF2T	47.6	3.46	38.18	1.6	0.7	-50	2.1	3.5

Tableau IV. 10. Propriétés mécaniques du composite (béton armé avec fibres d'acier).

Désignation	E_a (GPA)	l_f (mm)	ω (%)	\varnothing (mm)	ε_u (‰)	τ_u (MPA)	DOSAGE EN FIBRE
BFO25	200	60	0.31	1	-0.74	7	25kg/m3
BFO40	200	60	0.49	1	-0.74	7	40kg/m3
BF2T	200	60	0.15	1	-0.74	7	25kg/m3

Tableau IV. 11. Caractéristiques des fibres d'acier.

IV.4.1. Evaluation de la flèche sous la charge (P)

Cette simulation a pour but d'évaluer l'effort vertical (P) en fonction de la flèche verticale au milieu de chaque pieu jusqu'à la rupture. Pour cela, on introduit les données nécessaires des pieux (Tableau IV. 9-11) dans le programme informatique élaboré suivant les normes fortran 90. Pour le pieu en béton armé, les lois de comportement utilisées pour les simulations numériques sont la loi de SARGIN [07] pour le comportement du béton en compression et le modèle de GRELAT [27] pour le béton tendu. Pour les pieux en béton de fibre, la loi de SARGIN est utilisée pour déduire le comportement du béton en compression et la loi de Bouafia et al est utilisée pour déduire le comportement du béton en traction. Quant aux lois de comportement des aciers, nous avons pris celles des aciers écrouis et élasto-plastiques. Le choix de l'une de ces deux lois dépend des aciers utilisés dans les essais expérimentaux. L'évolution de la charge en fonction du déplacement est donnée aux figures IV .12-16.

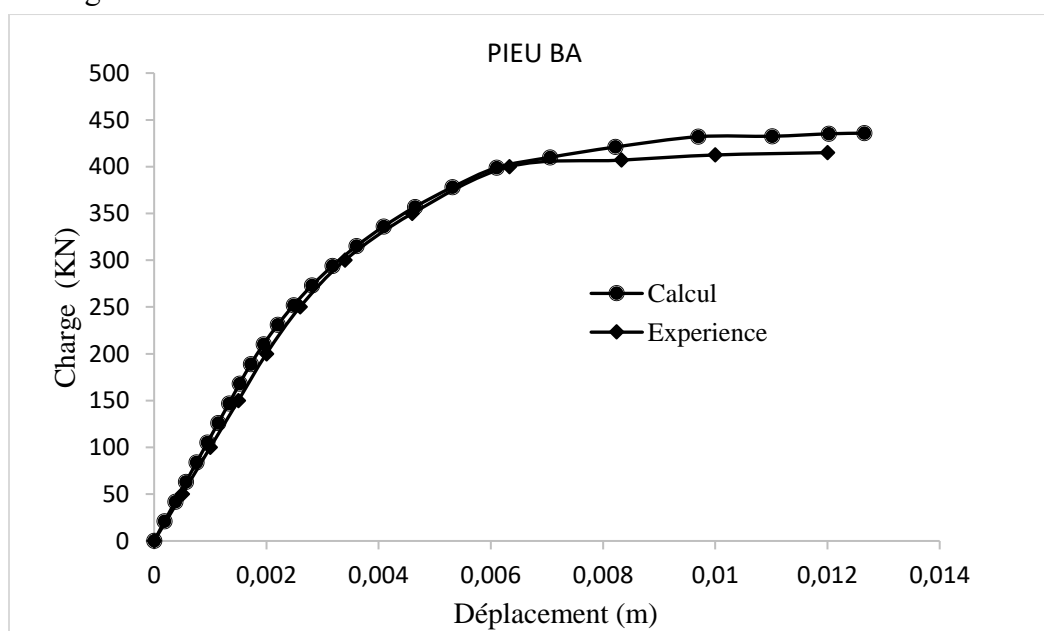


Fig. IV.12. Courbe charge – Déplacement (BA)

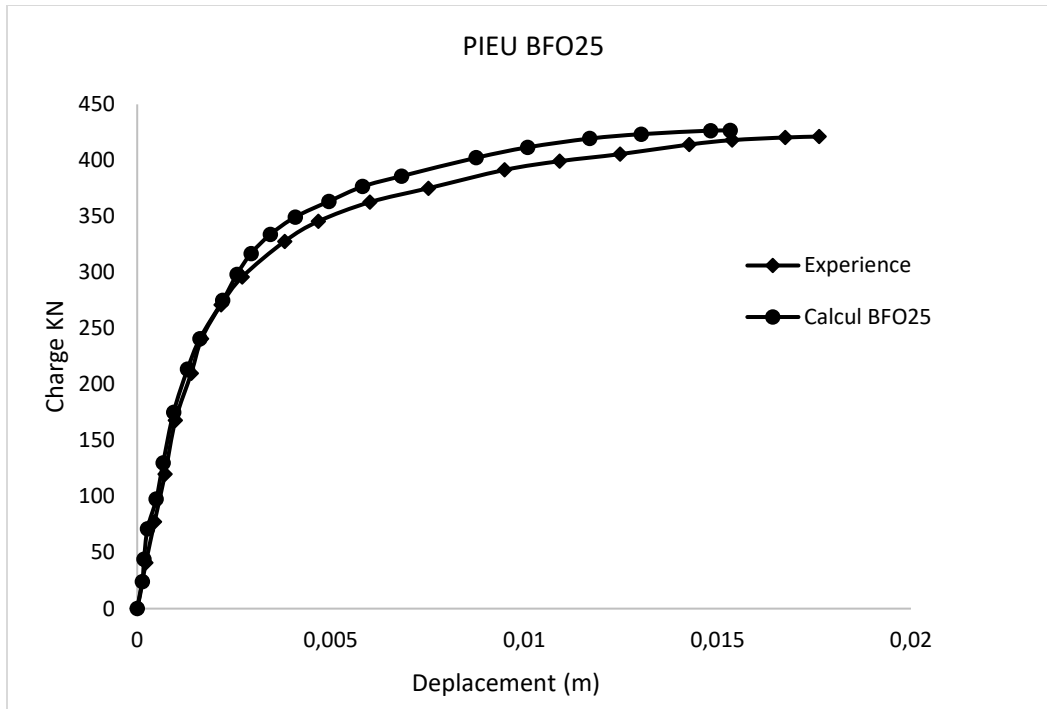


Fig. IV.13. Courbe charge – Déplacement (BFO25)

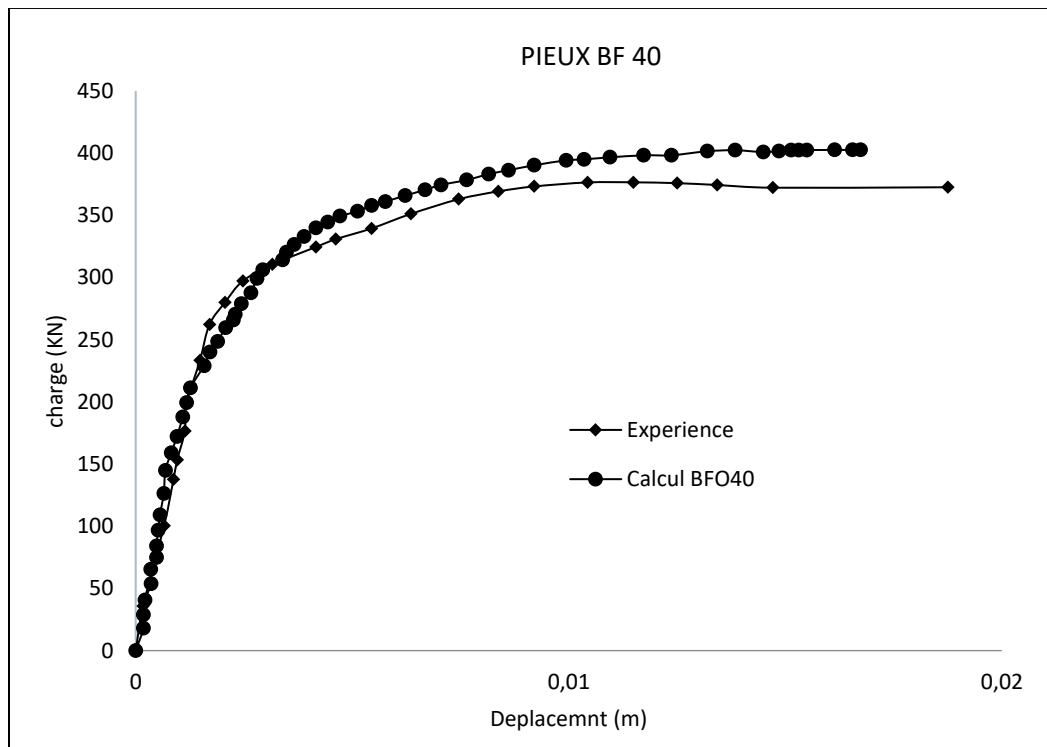


Fig. IV.14. Courbe charge – Déplacement (BFO40)

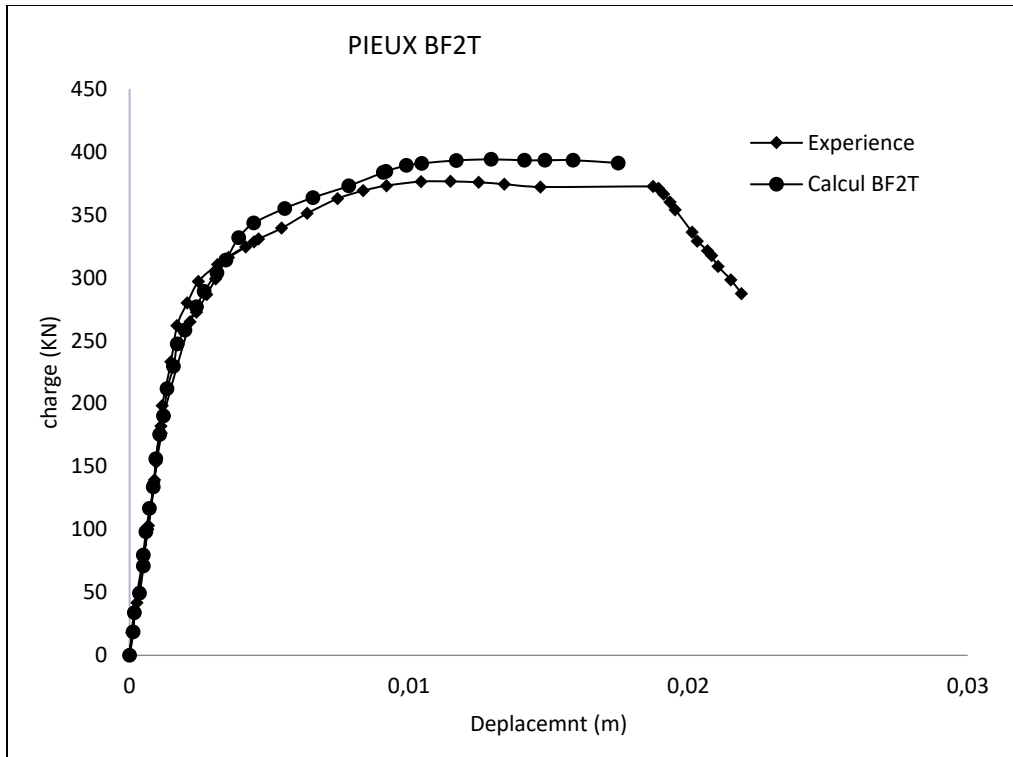


Fig. IV.15. Courbe charge – Déplacement (BF2T)

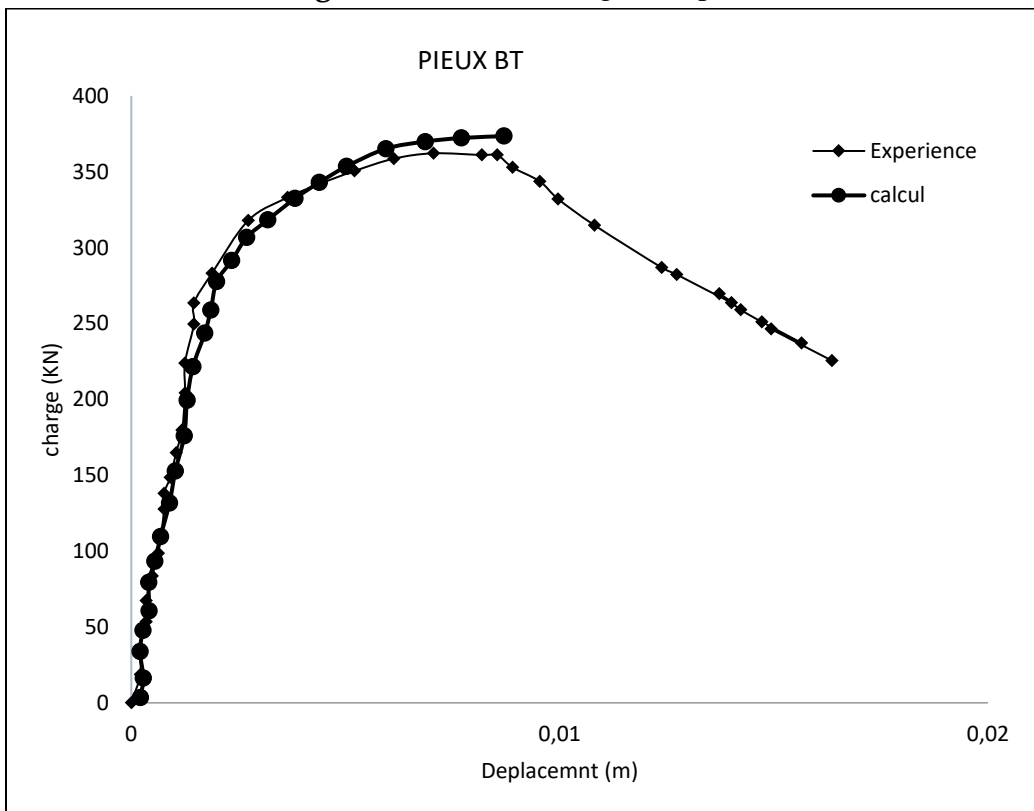


Fig. IV.16. Courbe charge – Déplacement (BT)

-Interprétation des résultats :

-La courbe représentée sur la figure IV.12 (Le pieu en béton armé **:BA**) obtenue se rapproche de la courbe expérimentale en phase de comportement élastique, mais au début des phénomènes de fissuration, elle commence à dévier de la courbe expérimentale. Cet écart est dû à des inexactitudes dans les valeurs réelles des matériaux (tels que le module d'élasticité d'origine du béton). On peut constater aussi que sur la figure IV.12, la corrélation entre le calcul et l'expérience est bonne, et la flèche maximale calculée est 0,01265795m pour une flèche maximale réelle égale à 0.012m, soit un écart de 1,05%. La force de rupture obtenue expérimentalement est de **410 KN**, le calcul permet d'obtenir une valeur de **434,44 KN**. La courbe numérique est très proche de la courbe expérimentale, ce qui explique que la méthode effectuée est bonne en termes de déformation et force à la rupture (figure IV.12).

- Le pieu en béton de fibres à raison de 25 Kg/m² (**BFO25**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de **422KN**, le calcul nous donne une valeur de **426.06 KN**, dans la phase du développement des fissures avec participation du béton de fibres le calcul est bon, bien que les déformations s'arrêtent à une valeur inférieure à celles de l'expérimental car la troisième phase (post fissuration avec participation du béton de fibres) seules des petites déformations ont été considérées dans le programme pour la loi de comportement du béton de fibres et le calcul est effectué par la méthode tangente (figure IV.13).

- Le pieu en béton de fibres à raison de 40 Kg/m³ (**BFO40**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de **401KN**, le calcul nous donne une valeur de 402.61KN, dans la phase du développement des fissures avec participation du béton de fibres le calcul est bon, on remarque que l'augmentation de pourcentage des fibres à 40kg/m³ n'améliore pas la flèche avant la rupture par rapport à 25kg/m³ (figure IV.14).

- Le pieu en béton de fibres à raison de 25 Kg/m³ (**BF2T**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de **390KN**, le calcul nous donne une valeur de **393.24KN**, dans la phase du développement des fissures avec participation du béton de fibres le calcul est bon, bien que les déformations s'arrêtent à une valeur inférieure à celles de l'expérimental car la troisième phase (post fissuration avec participation du béton de fibres) seules des petites déformations ont été considérées dans le programme pour la loi de comportement du béton de fibres et le calcul est effectué par la méthode tangente (figure IV.15).

- Le pieu en béton témoin (non armé **BT**) : la force de rupture obtenue expérimentalement est de **372 KN**, numériquement **373,47 KN**. Les résultats obtenus montrent qu'après avoir atteint la force de rupture, les déformations de calcul numérique se rapprochent de l'expérimental (figure IV.16.).

Nous avons constaté aussi une amélioration importante de la flèche avant rupture du pieu en béton de fibres.

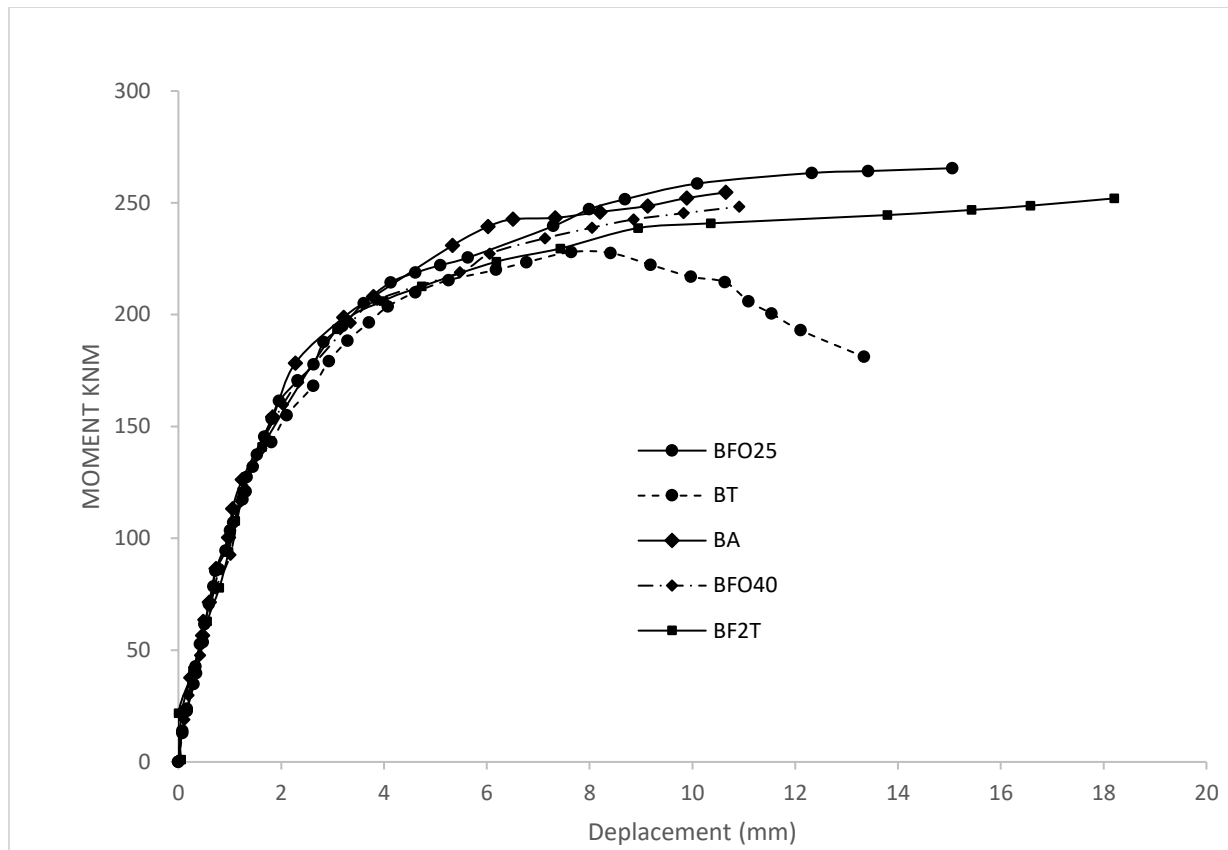


Fig. IV.17. Courbe Moment – Déplacement

Les résultats significatifs des simulations sont regroupés dans le tableau ci-dessous (Tableau IV. 12.)

PIEU	Moment Maximum (KNM)	Flèche (MM)	Flèche admissible (mm)	Ecart
BA	254.65117	10.649457	9	1.18
BF2T	251.98349	18.20893	9	2.02
BFO25	265.47827	15.056106	9	1.60
BFO40	248.27675	10.912351	9	1.2
BT	227.99673	7.6393323		0.84

Tableau IV. 12. Les résultats significatifs

Tous les pieux en béton armé ou en béton de fibres présentent des moments de rupture sensiblement égaux à 6% près. En particulier le pieu **BFO25** possède un moment de rupture légèrement supérieur à ceux des autres pieux. On remarque aussi une amélioration de la flèche à la rupture par rapport au béton armé de 70% pour le pieu **BF2T**, de 41% pour le pieu **BFO25** et de 2% pour le pieu **BFO40**. On note en particulier qu'une augmentation du pourcentage des fibres (de 25kg/m³ à 40kg/m³) n'améliore pas le comportement de l'élément.

IV.4.2. Evaluation de la probabilité de défaillance de pieu en béton armé (BA)

Cette étape consiste à appliquer la méthode de résolution adoptée (Monte Carlo) pour calculer la probabilité de défaillance. Dans ce qui suit, on procède à l'évaluation de la probabilité de rupture du pieu en utilisant deux méthodes : la méthode de niveau II (HL-RF) pour calculer la probabilité de défaillance et la méthode de niveau III (Simulation Monte Carlo) pour vérifier les résultats de la méthode d'Hasofer-Lind.

Variabes	Unité	Loi de probabilité	Moyenne	Ecart- type
P	[KN]	Déterministe	Variable	–
L	[m]	Déterministe	4.00	–
v	-	Déterministe	0.2	–
f_{cj}	[MPa]	Normal	42.41	4.241
f_{tj}	[MPa]	Normal	4.35	0.435
E_b	[MPa]	Normal	38059.47	–
σ_e	[MPa]	Normal	428	42.8
E_a	[MPa]	Normal	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^3$
k_b	–	Déterministe	1.60	–
k'_b	–	Déterministe	0.60	–
ε_{b0}	–	Normal	0.0021	0.00021
ε_u	–	Normal	0.05	0.005

Tableau IV. 13. Données mécaniques et fiabilistes de pieu (BA) Zhan

Remarque : les lois de distribution et leurs paramètres portant sur les variables aléatoires d'entrées sont issus d'un jugement d'expert mais on peut tout à fait envisager des valeurs provenant d'un retour d'expérience ou d'une campagne d'essais. Dans notre cas nous considérons la loi normale

A) En utilisant la méthode de simulation Direct Monte

La fonction d'état limite séparant l'espace des paramètres en un domaine sûr et un domaine de défaillance, peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$G(\delta, P) = \delta_{max} - \delta_{calculer}$$

$G > 0$ Définit le domaine sûr, $G \leq 0$ le domaine de défaillance et $G = 0$ l'état limite.

On procède d'abord à réaliser un grand nombre de tirages aléatoires k (Engendrer des réalisations des variables aléatoires selon leur densité conjointe de probabilité).

1. Calculer la valeur de la fonction d'état-limite pour chaque tirage ;
2. $G \leq 0$ Il y a défaillance, incrémenter le compteur des cas défaillants par rapport au nombre total des réalisations effectuées ;

3. $G > 0$ Il n'y a pas de défaillance, il n'y a pas d'incrémentation ;
4. Répéter 1 à k jusqu'à ce qu'un nombre suffisant de tirages soit atteint ;
5. En notant, la probabilité de défaillance peut s'écrire :

$$P_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'événements où } G \leq 0}{\text{nombre total d'événements simulés}}$$

Après l'analyse de simulation de Monte Carlo, la probabilité de défaillance est : $P_f = 3.3334\%$ alors la structure est fiable à **96,6666%**.

La probabilité de défaillance	La fiabilité
$P_f = 3.3334\%$	96,6666% .

Tableau IV. 14. Résultats obtenu par simulation de Monte Carlo Pieu (BA)

B) En utilisant la méthode de niveau II (HL-RF)

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est difficile de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité, alors il devient nécessaire de construire une surface de réponse analytique.

Premièrement on procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues (Figs. IV 18a-18b, Tableau IV 11) dans cette étude dans le but est d'approximer la loi statistique (réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution lognormale ou exponentielle va mieux la représenter.

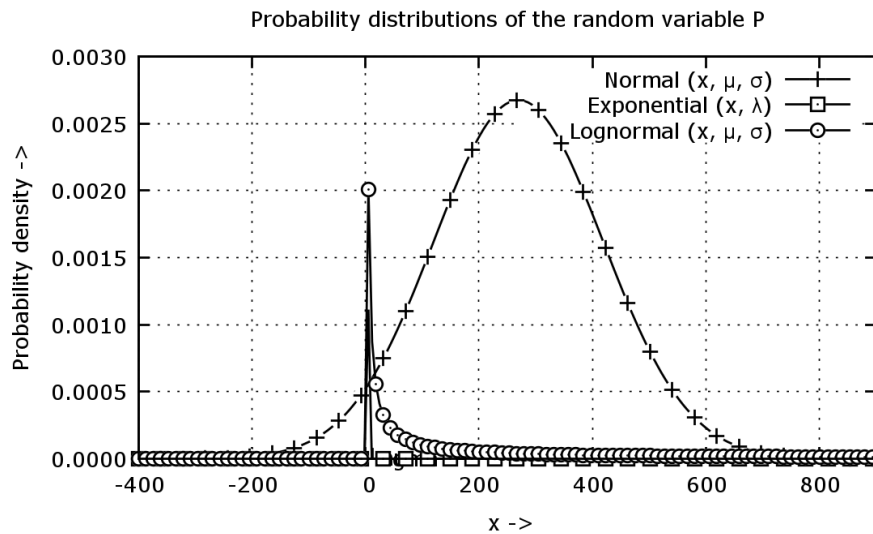


Fig. IV 18.a – Lois de probabilité de la variable aléatoire P

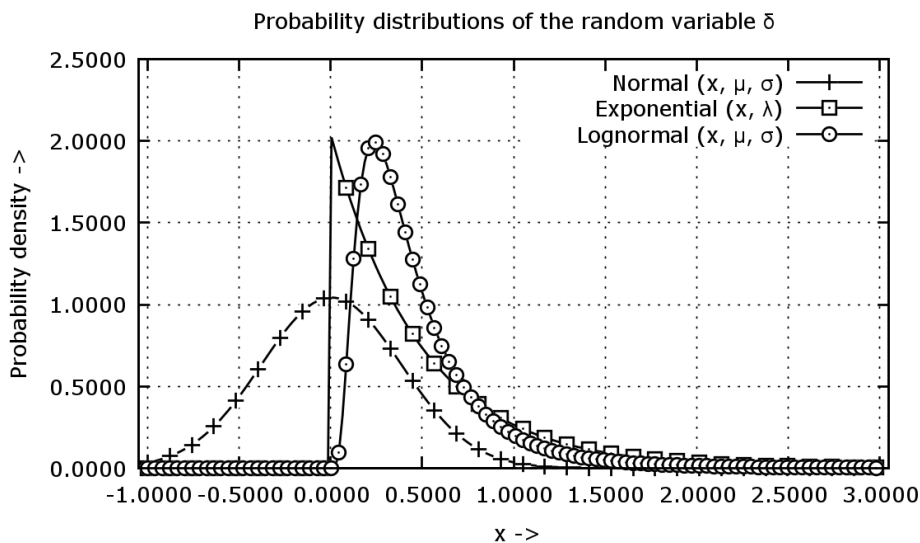


Fig. IV 18.b – Lois de probabilité de la variable aléatoire δ

Les figures IV.18.a et IV.18.b présentent le résultat d’estimation de la distribution des lois de probabilité des variables aléatoires retenues, par des lois normale, lognormale et exponentielle.

Les résultats obtenus sur la figure IV.18.a donnent ; Pour la loi log-normal et exponentiel une faible densité de probabilité de la variable P, par contre la loi normale semble mieux représenter ce paramètre par rapport aux deux autres types de loi. Et ceux de la figure IV.18.b donnent aussi pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire δ soit négative, quant aux lois log-normale et exponentielle, elles semblent mieux représenter ce paramètre par rapport à la loi normale, sauf que la loi log-normale donne une précision des phénomènes inconnus mieux que la loi normale et la loi exponentielle, car elle simule bien la loi normale par une courbe en cloche avec des résultats légèrement ramassés que cette dernière loi.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et ils sont représentées par le vecteur X, qu’on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sortie à l’état-limite (P, δ), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi Normal et Log-normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau IV.15.

Vecteur X	X1	X2
Variables aléatoires	P	δ
Loi de distribution	Normal	Log normal
Moyenne μ	269.4581141	0.004223851
Écart-type σ	149.1366442	0.003826062
Coefficient de variation ν	0.55346874	0.90582308

Tableau IV. 15. Lois des paramètres des variables aléatoires pour l’état limite du pieu

-Des variables aléatoires d'entrées sont considérées : les paramètres décrivant le comportement non linéaire du matériau (Module de Young élastique du béton ; Contrainte maximale de compression du béton ; Contrainte maximale de traction du béton ; Limite élastique de l'acier passif ; Module de Young de l'acier passif...) et leur loi de distributions aléatoires sont données dans le tableau IV.13. Les autres paramètres comme la longueur et la hauteur du portique sont considérés comme déterministes.

La fonction d'état-limite $G(P, \delta)$ est une fonction non linéaire implicite (connue numériquement à partir de notre calcul non linéaire), dont la défaillance du système est observée quand $G(x) \leq 0$.

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est difficile de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité, alors il devient nécessaire de construire une surface de réponse.

La méthode de surface de réponse a pour objectif de remplacer la fonction d'état limite obtenue sous forme implicite par une autre fonction explicite, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité pour estimer l'indice de fiabilité des scénarios et la probabilité de défaillance de la structure étudiée. Pour cela on suit les étapes suivantes :

- Dans une première étape il faut transformer la fonction d'état limite de l'espace physique vers un espace centré réduit de moyenne nulle et d'écart-type unité selon la loi de la variable aléatoire.

$$G(P, \delta) \xrightarrow{T(\mu=0, \sigma=1)} H(P, \delta)$$

- Dans une seconde étape est de procéder au choix d'une forme mathématique à la surface de réponse.

$$H(P, \delta) \xrightarrow{\text{fonction approchée}} \hat{H}(P, \delta)$$

- La troisième étape est la modélisation des variables aléatoires.
- Enfin la quatrième étape consiste à appliquer la méthode de résolution définie au chapitre III (HL-RF) pour estimer l'indice de fiabilité et calculer la probabilité de défaillance.

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats donnés dans le tableau IV.16.

Indice de fiabilité	1.6149
Probabilité de défaillance	0.05282 (5.282%)
Fiabilité	0.94715 94.715%
Point de conception dans l'espace centré réduit (U1, U2)	(0.4921, -1.5380)
Point de conception dans l'espace physique (X1, X2)	(221.378, 0.0014)

Tableau IV. 16. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste

L'indice de fiabilité est $\beta = 1,6149$; ce qui correspond à une probabilité de défaillance du pieu estimée $P_f = \Phi(-\beta) = 5.282\%$ soit une fiabilité de **94,715%**. Quant au point de rupture le plus probable dans l'espace physique, il correspond à la charge **221.378 KN** et au déplacement à **0,0014 m**.

On constate que les résultats obtenus après analyse par simulation de Monte Carlo $P_f = 3.334\%$ sont proches de ceux de la méthode de HL-RF ($P_f = \Phi(-\beta) = 5.282\%$). Ces résultats mettent en évidence la nécessité d'approfondir la connaissance des propriétés matérielles pour affiner les paramètres de distribution et prendre en compte les corrélations entre variables aléatoires.

Dans ce qui suit, on combine entre les lois des variables aléatoires continues afin d'approcher le plus possible des lois de probabilités réelles des variables aléatoires utilisées dans cet exemple, pour cela on retient que six cas de combinaison des lois de distribution. Les six cas retenus des variables aléatoires sont représentés dans le tableau **IV. 17**.

aléatoires variables	Loi de distribution					
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5	Cas 6
P	Normal	Log-normal	Exponentiel	Exponentiel	Exponentiel	Normal
δ	Normal	Log-normal	Exponentiel	Log-normal	Normal	Log-normal

Tableau IV. 17. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste des six cas de combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Cas	Reliability index	Probabilité de défaillance	Point de conception dans l'espace centré réduit (U1, U2)	Point de conception dans l'espace physique (X1, X2)	Reliability
Cas 1	1.0958	0.1357 (13.57%)	(0.3339, -1.0437)	(180.937, 0.0018)	0.8643 (86.43%)
Cas2	0.6842	0.2483 (24.83%)	(0.2085, -0.0651)	(155.197, 0.0052)	0.7517 (75.17%)
Cas 3	0.3285	0.3707 (37.07%)	(0.100, -0.3129)	(136.055, 0.0026)	0.6293 (62.93%)
Cas 4	0.7216	0.2385 (23.85%)	(0.2199, -0.6872)	(157.362, 0.0022)	0.7615 (76.15%)
Cas 5	0.6851	0.2451 (24.51%)	(0.2087, -0.6524)	(155.248, 0.0022)	0.7549 (75.49%)
Cas 6	1.6149	0.05282 (5.282%)	(0.4921, -1.5380)	(221.378, 0.0014)	0.94715 (94.715%)

Tableau IV.18. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités

On constate pour les différentes variables aléatoires retenu qu'en utilisant la même loi de distribution (cas 1, 2, 3), on obtient des indices de fiabilité plus petits que tous les indices de fiabilité trouvés en utilisant des lois de distributions différentes (cas 4, 5, 6). Par conséquent, on note un écart significatif entre la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution identique (cas 1, 2, 3) et la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution différente (cas 4, 5, 6), cela est dû au fait qu'en réalité les variables aléatoires peuvent ne pas suivre toutes une même loi.

On constate aussi que le cas 6 donne le plus grand indice de fiabilité $\beta = 1.6149$, d'où une fiabilité de **94.715%**, ce qui confirme la validité de la première méthode utilisée d'estimation des lois de probabilités qui permet d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

Dans notre étude, on a considéré que des variables aléatoires continues et indépendantes, alors qu'en réalité ce n'est toujours pas le cas pour tous les systèmes.

IV.5. Conclusion :

Les résultats obtenus montrent que le modèle adopté est capable de prédire le comportement global des éléments de structure jusqu'à une valeur élevée de la déflexion. En effet, les résultats de prédiction du modèle comparés aux résultats expérimentaux montrent que les prédictions du modèle sont en bon accord avec les résultats expérimentaux dans tous les domaines du comportement, l'écart observé entre les courbes expérimentales et numériques est dû essentiellement des imprécisions sur les caractéristiques réelles des matériaux ;

L'application de la méthode de surface de réponse a montré une très grande capacité à estimer l'indice de fiabilité des structures non linéaires en béton armé à section circulaire. La méthode de Monte Carlo s'avère être la méthode la plus simple à mettre en œuvre, et la précision des résultats dépend principalement du nombre d'essais. Le modèle de fiabilité couplé au modèle mécanique appliqué aux exemples étudiés nous a permis d'évaluer la probabilité de défaillance relative à la ruine des systèmes mécaniques à comportement non linéaire.

Nous avons cherché à valider le couplage entre le modèle fiabiliste couplée au modèle mécanique, Pour cela, nous avons utilisé deux méthodes qui sont la méthode de niveau III (la simulation de Monte-Carlo directe) et la méthode de niveau II (HL-RF). Les résultats obtenus après l'analyse par la méthode de HL-RF sont proches des résultats obtenus par la simulation de Monte-Carlo directe. Le choix de la nature des variables aléatoires et de leur distribution reste le problème majeur, étroitement lié à la préoccupation de l'utilisateur et à l'échelle de l'étude.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté dans cette présente étude ; en premier lieu, la méthode de calcul du modèle mécanique ou nous donnons les différentes lois de comportement du matériau (béton et acier), puis ; nous décrivons l'équilibre de la section, ainsi que l'établissement de la matrice de rigidité, en seconde partie un programme en FORTRAN est développé dans ce travail pour simuler la méthode directe de Monte Carlo couplée à un calcul non linéaire pour évaluer la probabilité de rupture de structures en béton armé à section circulaire . Le principe de Hasofer-Lind est appliqué pour estimer l'indice de fiabilité, les scénarios et la probabilité de défaillance des structures étudiées. Nous avons validé notre modèle mécanique en comparant les résultats de nos calculs avec des résultats expérimentaux. Enfin, nous avons vérifié les résultats du modèle de fiabilité ; et ce en comparant les résultats obtenus par simulation Monte-Carlo avec ceux de la méthode Hasofer-Lind.

Les lois de comportement du béton et de l'acier ont été utilisées dans cet étude pour traiter le calcul non linéaire des structures, et afin de tenir compte du comportement réel des matériaux. Elles permettent de calculer les déplacements réels de la structure.

L'objectif principal de la thèse était d'apporter une contribution à la réalisation du couplage entre les méthodes fiabilistes et le calcul non linéaire, dans le cas du comportement non linéaire des structures en béton armé à section circulaire et pour évaluer leur fiabilité. Dans le but de développer des structures fiables, l'estimation de la fiabilité est une étape indispensable pendant la phase de conception. Tout au long de ce document, nous avons présenté les différentes méthodes utilisées pour évaluer la probabilité de défaillance des structures.

La fiabilité des structures nous permet d'évaluer la performance d'une structure soumise à des sollicitations aléatoires. La variabilité provient principalement des natures incertaines des phénomènes mis en jeu sur la structure. Ils peuvent être classés en deux origines. Premièrement, les aléas intrinsèques, ils peuvent affecter la qualité des produits qui sont attachés principalement aux contraintes de fonctionnement et aux contraintes de qualité. Deuxièmement, les aléas extrinsèques qui sont liés principalement à l'environnement représenté par les contraintes climatiques et mécaniques.

Pour le calcul fiabiliste, nous nous sommes particulièrement intéressés aux méthodes de niveau 3 la simulation de Monte-Carlo directe afin de déterminer la probabilité de défaillance des structures étudiées, et aux méthodes de niveaux 2 plus précisément la méthode d'optimisation de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), puis nous avons opté pour le couplage entre cette dernière méthode et le calcul non linéaire ; grâce à une méthode de couplage indirecte par surface de réponse analytique (*RSM*). L'utilisation de la transformation isoprobabiliste nous a permis de remplacer la fonction d'état limite implicite dans l'espace physique (qui représente la défaillance de la structure) par une fonction explicite équivalente dans l'espace normé, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité adopté.

Enfin, après avoir fait les implémentations nécessaires, nous avons traité le problème de fiabilité sur quelques exemples plus précisément la poutres OG3, des éprouvettes en béton armé à section circulaires et les pieux de zhan afin d'estimer leur indice de fiabilité et de déterminer leur probabilité de défaillance.

Puis nous avons comparé les résultats obtenus par la simulation de Monte-Carlo aux résultats obtenus par la méthode de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler.

Perspectives :

- Introduire ces méthodes de calcul fiabiliste d'une manière général dans le calcul des structures ;
- Faire collaborer l'ensemble des spécialistes dans le domaine de mathématiques et d'ingénierie
- Réaliser des applications en collaboration avec les différents départements Concernés ;

BIBLIOGRAPHIE

- [01] C. Marcovici. M. G. Vigier. Utilisation des techniques de fiabilité en mécanique. Paris 1974.
- [02] Argyris, J.H. (1965) Continua and discontinua. Procedure of the conference on matrix methods in structural mechanics. Wright-Patterson A.F.B., Ohio, 11-185.
- [03] Crisfield, M. A. (1990). A consistent co-rotational formulation for nonlinear, three-dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, 131-150.
- [04] Bathe, K.J., Ramm, E. & Wilson, E.L. (1975) Finite element formulation for large deformation dynamic analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 9, 353-386.
- [05] Chen, W. F. & Lui, E. M. (1988) *Plasticity for structural engineers*. New York, McGraw-Hill.
- [06] Chen, W. F. (1982) *Plasticity in reinforced concrete*. McGraw-Hill, New York.
- [07] Sargin M. (1971) Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections. S.M. Study No 4, University of Waterloo, Solid Mechanics Division,
- [08] Debernardi, P. G. (1983) La deformazione differita delle strutture in c.a. soggette a fessurazione: considerazioni sui metodi approssimati di calcolo. *L'industria Italiana del Cemento*, Roma, 7/8, 499-510.
- [09] Debernardi, P. G. (1989) Behaviour of concrete structures in service. *ASCE journal*, 32-50.
- [10] Ghali, A. & Favre, R. (1986) *Concrete structures: structures and deformation*. London, Chapman & Hall.
- [11] Comité Euro-Internacional du Béton (1988/1990/1993/1995). CEB-FIP Model Codes. Bulletin D'Information, n. 191/195/196/203/204/205/213/214/229.
- [12] LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J.L. (1985) *Mécanique des Matériaux Solids*. Paris, Dunod.
- [13] Mazars, J. (1984) Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6.
- [14] Tabsh, S.W. and A.M. ASCE (1996) Safety of concrete members designed by ACI 318 chapter 9 and appendix C load combinations. *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*. Proceedings of the seventh specialty conference. Worcester. Massachusetts. USA. 218-221.

- [15] Frangopol, D.M.; F. ASCE; Ide, Y. and Iwaki, I. (1996) Effects of load path and load correlation on the reliability of concrete columns. *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*. Proceedings of the seventh specialty conference. Worcester. Massachusetts. USA. 206-209.
- [16] Reid, S.G. (1996) Strength and reliability of reinforced concrete columns with sustained loading. *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*. Proceedings of the seventh specialty conference. Worcester. Massachusetts. USA. 234-237.
- [17] Holicky, M. and Vrouwenvelder T. (1997) Time variant reliability of a reinforced concrete column. *Advances in Safety and Reliability*. Proceedings of the ESREL'97 International Conference on Safety and Reliability. Lisbon. Portugal. 2, 1307-1314.
- [18] Val, D.; Bljoger, F.; Yankelevsky, D. (1997) Reliability evaluation in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Structural Safety*. 19, 2, 203-217.
- [19] EPAARACHCHI, D.; STEWART, M.G. AND ROSOWSKY, D.V. (1996) System risks for multi-storey reinforced concrete building construction. *Probabilistic Mechanics & Structural Reliability*. Proceedings of the seventh specialty conference. Worcester. Massachusetts. USA. 230-233.
- [20] Benyahi K, Bouafia Y, Barboura S, Kachi M S. Nonlinear analysis and reliability of metallic truss structures. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 2018, ISSN 2095-2449, Volume 12, issue 4, pp 577-593.
- [21] OUAHIBA TEBBI. Estimation des lois de fiabilité en mécanique par les essais. Thèse doctorat. École doctorale d'Angers. France. 2005.
- [22] M. LEMAIRE, J.-P. MUZEAU, AND A MOHAMMED. Fiabilité et sûreté de fonctionnement des systèmes mécaniques. IPSI, 1996.
- [23] M. Lemaire, J.-P. Muzeau, A Mohammed, and J.C. Mitteau. Fiabilité et sûreté de fonctionnement des systèmes mécaniques. IFMA, 1996.
- [24] ESPION B., Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé. Thèse de doctorat en sciences appliquées, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- [25] KWAME ESENAK AKOUSSAH, Analyse non-linéaire des structures à parois minces par élément finis et son application aux bâtiments industriels, Thèse de doctorat, Université Laval Québec, 1987.

- [26] YAGHMAI S. Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric she us of revolution. Technical Report SESM 68–17, Univ. California, Berkeley, 1968.
- [27] GRELAT A., Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI, 1978.
- [28] NAIT-RABAH O., Simulation numérique des ossatures spatiales, Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 1990.
- [29] ROBERT F., Contribution à l’analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en génie civil, application aux ouvrages d’art. Thèse de doctorat : institut national de sciences appliquées de Lyon, 1999.
- [30] MEZIANE R., Modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton armé et béton de fibres, par des éléments finis poutres. Thèse de magister, Université de Tizi–Ouzou, Algérie, 2008.
- [31] MAIA ANTONIO CLAUDIO FERRARO, Analyse non-linéaire des portiques en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1979.
- [32] KACHI, MS., FOURE, B., BOUAFIA, Y., MULLER, P., « L’effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu’à rupture des poutres en béton armé et précontraint ». Revue Européenne de Génie Civil, volume 10, n° 10/2006, déc. 2006, ISSN 1774-7120, Ed. Lavoisier, France, pp. 1235 -1264, <http://www.ejece.revuesonline.com>.
- [33] KACHI M. S., BOUAFIA Y., MULLER P., FOURE B., “ Modélisation du comportement jusqu’à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire”. Colloque International - Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 », Université de Tizi-Ouzou en collaboration avec les universités de Paris 6 et de Cergy – Pontoise, Tizi Ouzou –Algérie, 16, 17 et 18 Nov. 2008.
- [34] ULM F.J., Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [35] ADJRAD A., KACHI, MS., BOUAFIA Y., IGUETOULÈNE, F. ., “Nonlinear modeling structures on 3D », The International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials, ICSAAM 2011, 7-11 September, Sinaia, Romania, pp. 1 – 9, ISSN 2247 – 8337, www.icsaam2011.resist.pub.ro.

- [36] KACHI, MS., FOURE, B., BOUAFIA, Y., MULLER, P., « L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint ». Revue Européenne de Génie Civil, volume 10, n° 10/2006, déc. 2006, ISSN 1774-7120, Ed. Lavoisier, France, pp. 1235 -1264.
- [37] KACHI. M.S., Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres précontrainte extérieure, Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, Algérie, novembre 2006.
- [38] F. J. VECCHIO AND M. P. COLLINS, "Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory," *ACI Structural Journal*, pp. 258-268, May-June 1988.
- [39] Y. BOUAFIA, M. S. KACHI, AND P. MULLER, "Modelling of externally prestressed concrete beams loaded in combined bending, axial load and shear until fracture (in nonlinear elasticity)," in Proc. 2009 ICSAAM. 2009, Tarbes, France, pp. 1-7, 2009.
- [40] A. Belarbi and T. T. C. Hsu, "Constitutive law of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete," *ACI Structural Journal*, pp. 465-474, 1994.
- [41] F. J. Vecchio and M. P. Collins, "The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear," *ACI Journal*. pp. 219-231, March-April 1986.
- [42] K. N. Rahal, "Post-cracking modulus of reinforced concrete membrane elements," *Engineering Structures*, vol. 32, pp. 218-255, 2010.
- [43] A. Adjrad, Y. Bouafia, M. S. Kachi, H. Dumontet, "Non-Linear Modelling of Three Dimensional Structures Taking Into Account Shear Deformation" *IACSIT International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 6, No. 4, August 2014.
- [44] Règles BAEL 91 modifiées 99, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES 2000.
- [45] LIU G R, QUEK S S. *The Finite Element Method: A Practical Course*, Butterworth-Heinemann. Elsevier Science Ltd., 2003
- [46] Fish J, Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ. England, 2007
- [47] C.G. Casella. *Monte Carlo statistical methods*. Springer, 1999.
- [48] K. Binder and D. W Heermann. *Monte Carlo simulation in statistical Physics*. Springer, 2002.
- [49] LEMAIRE M., *Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique*, Éditions Hermès Lavoisier, Paris, 2005.

- [50] Y. G. Zhao and T. Ono. Moments Methods for Structural Reliability. *Structural Safety*, 23 :47-75, 2001.
- [51] Y. G. Zhao and T. Ono. Somme application of moment method for structural reliability. In 8th ASCE Specialty conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, 2000.
- [52] Y. KAI AND H. YOUNIS. A semi-analytical Monte Carlo simulation method for system's reliability with load sharing and damage accumulation. *Reliability Engineering and system safety*,87 :191-200, 2005.
- [53] M. Kmiecki and C. G. Soares. Response surface approach to the probability distribution of the strength of compressed plates. *Marine Structure*,15 :139-156,2002.
- [54] R. C. Soares and W. S. Venturini. Statistical analysis of reinforced concrete structure. In European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering ECCOMAS, Barcelona, Spain, 2000.
- [55] R. C. Soares, A. Mohames, W. S. Venturini and M. Lemaire. Reliability Analysis of non-linear Reinforced Concrete Frames Using the Response surface Methode. *Reliability Engineering and System safety*, 75 :1-16, 2002.
- [56] BERERICHE Y., Contribution de l'approche contrainte / résistance à l'évaluation de la fiabilité des structures. Thèse de maîtrise en génie Mécanique, Université LAVAL, QUEBEC, 2010.
- [57] Abdo T., Rackwitz R., A new beta-point algorithm for large time invariant and time-variant reliability problems, 3rd IFIP Working Conference, Berkeley, 1990.
- [58] Mebarki A., Sur l'approche probabiliste de la fiabilité des structures de génie civil : la méthode de l'hypercône et ses algorithmes d'application, Thèse de doctorat d'état (Es Sciences) de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, France, 1990.
- [59] Devictor N., Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives, Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal - Clermont II, France, 1996.
- [60] Sudret B., Der Kiureghian A., Stochastic Finite Elements Methods and Reliability, State of the art report, University of California, Berkeley, USA, 2000.
- [61] K. Breitung, F. Casciati, and L. Faravelli, Reliability based stability analysis for actively controlled structures. *Engineering Structures*,20(3) :211-215,1998.
- [62] K. Breitung, Asymptotic approximation for multinormal integrals, *Journal Engineering Mechanics*, 3 :357-366, 1984.

- [63] Y. G Zhao and T. Ono. A general procedure for first/Second-Order Reliability method(FORM/SORM). *Structural Safety*, 21 :95-112, 1999.
- [64] Xuan Son NGUYEN., *Algorithmes Probabilistes Appliqués à la Durabilité et à LA Mécanique des Ouvrages de Génie Civil*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2007.
- [65] THAMRIN R, KURNIAWAN R, & PRITA MELINDA A. (2017). Shear and flexural capacity of reinforced concrete members with circular cross section., 171, 957-964.
- [66] ZHAN Z. (1991) Contribution to the design of piles, reinforced concrete. Doctoral Thesis University of Orleans, French, in November.
- [67] Bouafia, Y., Kachi, MS., Fouré, B., « Relation contrainte - déformation dans le cas du béton armé de fibres d'acier ». *Annales de l'ITB*, n° 3, juin 2002, ISSN 1270- 9840, Ed. ESKA, France, pp. 5-17, <http://www.eska.fr>.
- [68] N. Gayton. Bourinet, and M. Lemaire. Cq2rs: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural safety*, 25 :99-121, 2002.

Travaux et publications impliquant le travail de thèse

- I. D. Bouchafa a, M.S Kachi, Y. Bouafia, K. Benyahi a, S, Barboura. «Numerical simulation and reliability of behaviour until the rupture of reinforced concrete spacial structure members with circular cross section» JOURNAL OF MATERIALS AND ENGINEERING STRUCTURES 8 (2021) 61–82
- II. K. Benyahi, Y. Bouafia, D. Bouchafa. . « Reliability analysis of three dimentional reinforced concrete structures by the Monte Carlo method ». Revue « Nature & Technologie ». A- Sciences fondamentales et Engineering, n° 16/ Janvier 2017. Page 37 à 42.
- III. K. Benyahi, D. Bouchafa, Y. Bouafia. « Approche fiabiliste appliquée aux structures poteaux-poutres ». 13th Arab Structural Engineering Conference, ASEC, Blida, from 13-15 December 2015.
- IV. D. Bouchafa, K. Benyahi, Y. Bouafia. « Fiabilité des structures poteaux poutres en béton armé ». Le 2éme Séminaire International de Génie Civil SIGCB’2015, Bechar, tenu les 28 & 29 Octobre 2015.
- V. K. Benyahi, D. Bouchafa, Y. Bouafia. « Reliability analysis of three dimentional reinforced concrete structures by the method of Monte Carlo ». Fifteenth international conference “New trends on fatigue and fracture – fracture and environment”, NT2F15, Oran, from 20-23 October 2015.
- VI. D. Bouchafa, Y. Bouafia, K. Benyahi, H. Dehmous, D. Hamadouche. « Approche fiabiliste appliquée aux structures poteaux-poutres en béton armé ». Colloque International Caractérisation et Modélisation des Matériaux et Structures « CMMS14 », Tizi-Ouzou, tenu les 12 & 13 Novembre 2014.

ANNEXES

ANNEXE I

PRÉSENTATION DU PROGRAMME DE CALCUL DES STRUCTURES EN ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE

II. 1. Introduction :

Afin de permettre l'étude du comportement des ossatures spatiales soumises à un chargement instantané jusqu'à la ruine, un logiciel de calcul de structures tridimensionnelles écrit en langage fortran 90, a été développé par la référence [39] à partir des travaux de NAIT-RABAH [28]. Le code de calcul est constitué d'un programme principal et des sous-routines, l'ensemble de ces données et résultats sont présentés sous forme de fichier texte.

3. 3. Structure générale du programme :

3. 3.1. Description des différentes sous-routines :

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme 3D :

- **Subroutine SSNOLI** : Analyse incrémentale pas à pas du chargement de la structure jusqu'à la ruine.
- **Subroutine RISEEL** : Formation de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.
- **Subroutine SECTION** : Étude de l'équilibre de la section.
- **Subroutine RISESE** : Calcul de la matrice de rigidité de la section en béton armé et/ou précontraint.
- **Subroutine RISESEM** : Calcul de la matrice de rigidité de la section en profilé métallique.
- **Subroutine RISESEMIXT** : Calcul de la matrice de rigidité de la section mixte.
- **Subroutine COOR** : Calcul des coordonnées des nœuds ainsi que les angles de rotation des éléments par rapport au repère de la structure, et la vérification des longueurs des éléments.
- **Subroutine FORMB** : Formation de la matrice $[B]$.

- **Subroutine FORMD** : Formation de la matrice $[D]$.
- **Subroutine FORML** : Formation de la matrice $[L(x)]$.
- **Subroutine FORMT** : Construire la matrice de passage $[T_0]$ du repère intrinsèque au repère local.
- **Subroutine ROTATION** : Construire la matrice de passage $[RT]$ du repère intrinsèque au repère absolu.
- **Subroutine CHARTO** : Effectuant la distribution des charges sur les nœuds.
- **Subroutine BACSUB** : Résoudre le système linéaire $\{P\} = [K].\{U\}$, routine effectuant la méthode de substitution $[A].\{X\} = \{B\}$.
- **Subroutine CHARGE** : Construit le vecteur des charges extérieures.
- **Subroutine CONDLIM** : Prenant en compte des conditions aux limites.
- **Subroutine FORMR** : Assemble les matrices de rigidité des éléments poutres et/ou barres (repère absolu) pour former la matrice de rigidité de la structure.
- **Subroutine REPRI** : Calcul des caractéristiques des sections en béton armé et/ou précontraint dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine REPRIM** : Calcul des caractéristiques des sections en profilé métallique dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine REPRIMIXT** : Calcul des caractéristiques des sections mixtes (aciers-béton) dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine CARRACT** : Préparation des données des sections et câbles de précontrainte.
- **Subroutine PERTE** : Calcul des pertes de précontrainte dans les câbles intérieurs.
- **Subroutine PASSAGE** : Calcul les points de passage du câble de précontrainte dans les sections de calcul.
- **Subroutine POIDP** : Effectuant la distribution du poids propre sur les nœuds de la structure.
- **Subroutine VADELO** : Calcul des déplacements d'un élément poutre spatiale dans le repère local à partir des déplacements des nœuds dans le repère absolu.
- **Subroutine NULL** : Sous programme annulant les termes d'une matrice.

- **Subroutine ASSEMB** : Assemblage de la matrice de rigidité élémentaire.
- **Subroutine FORMT1** : Routine calculant la matrice $[T_1]$.

3.3.2. Présentation du fichier de données :

Les données sont introduites par lignes, les valeurs sont séparées par un blanc ou une virgule, les données sont ainsi lues :

1) Lecture d'un titre de fichier de données

2) Lecture des données relatives à la structure

NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC (1 ligne)

3) POIB(I) POIS(I)

4) Introduction des coordonnées de chaque nœud I dans le repère absolu.

$i= 1, \text{NBNOEU}$

K, (COORD (k,j), j=1,3)

K numéro d'un nœud

5) Lecture de la connectivité

k, (FCON(k,j), j=1,2)

6) Introduction des conditions d'appuis

$I= 1, \text{NIMP}$

NIMP nombre de type d'appuis

XNUM(I), (COMP(XNUM(I),j), j=1,6)

NIMP = numéro du nœud avec déplacement imposé

XNUM(I)= indice qui caractérise si une composante de déplacement est libre ou bien bloquée.

Direction suivante : X, Y, Z

(COMP (XNUM(I),j), j=1,6) $\begin{cases} 1 & \text{appui bloquée} \\ 0 & \text{appui libre} \end{cases}$

7) Chargement

NBCF, NBCV (chargement fixe et le chargement variable).

8) Lecture des données relatives à la section dans le repère générique

NBTRA(I) NNS(I) TTYPE(I) NCABI(I) (1 ligne)

oordzi(I,J) oordzs(i,j)

Absyi1(I,J) Absyi2(i,j)

absys1(I,J) absys2(i,j)

FFE(I) FFT(I) EEC(I) RRB(I) RRC(I)
 EEPSRT(I) EEPSO(I) EEPSCU(I)
 SSE(I) EES(I) EEPSU(I) SSR(I) KKS(I)
 SSEM(I) EEAM(I) EEPSUM(I) SSRM(I) KKS(I)

9) Coordonnées des aciers passifs par rapport au repère générique dans la section

(VVIY(I,IES), IES=1,NNS(i))
 (VVIZ(I,IES), IES=1,NNS(i))
 (AAS(I,IES), IES=1,NNS(i))

10) Introduction de la précontrainte

AAP(I) SSP(I) EEP(I) EEPSUP(I) SSPR(I) TTI(I) KKP(I)

11) Introduction des points de passage des câbles dans les sections d'extrémité de l'élément

ZC1(IL,J) ZC2(IL,J)
 YC1(IL,J) YC2(IL,J)
 XC1(IL,J) XC2(IL,J)

12) Introduction de l'angle que fait le câble avec l'axe des x

(ANGP(IL,J), J=1,NPI)
 ANGP : c'est l'angle de l'élément, et NPI c'est le nombre de câble

PFI PSI Sigmo ITP

3.3.3. Description des variables du fichier de données :

1. NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC

NBNOEU = nombre de nœuds,
 NEL = nombre d'éléments,
 NTYPE = nombre de types de sections,
 NPI= nombre de câble de précontraintes,
 NIMP= nombre de nœuds d'appuis,
 ISEC = nombre de section par élément,

2. BRUTE (i) i=1,NEL

3. K Coord(K,j) j=1,3

K = numéro du nœud (K=1, NBNOEU),

Coord = coordonnées des nœuds.

4. K Connec (k, j) $j=1, 2$

K = numéro de l'élément,

Connec = vecteur véhiculant la connectivité de l'élément.

5. NUM (i) Comp (i, j) $j=1, 6$ et $i=1, Nimp$

Num = numéro du nœud d'appui (dans la liste des nœuds d'appuis),

i = indice du nœud (dans la liste des nœuds d'appuis),

j = indice composant (1/ox , 2/oy , 3/oz , 4 rotation suivant x , 5 rotation suivant y , 6 rotation suivant z),

Comp = indice de la composante : = 1, appui imposé, = 0, appuis libre,

6. NNCF NNCV

NNCF= nombre de nœuds chargés dans le chargement fixe (P0),

NNCV= nombre de nœuds chargés dans le chargement variable(P1).

7. NUN (i) FFIX (i,j)

NUN= numéro du nœud chargé par le chargement P0 (dans la liste des nœuds),
i=1, NNCF

i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P0)),

Force0 (i, j) $j=1$ Composante selon Ox de l'effort appliqué au nœud i,

$j=2$ Composante selon Oy de l'effort appliqué au nœud i,

$j=3$ Composante selon Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=4$ Composante couple Oy , Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=5$ Composante couple Ox , Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=6$ Composante couple Ox , Oy de l'effort appliqué au nœud i.

8. NON (i) FVAT (i, j) $j=1,6$

NON= numéro du nœud chargé par le chargement (P1) (dans la liste des nœuds),
i=1, NNCV

i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P1)),

force1 (i, j) $j=1$ Composante selon Ox de l'effort appliqué au nœud i,

$j=2$ Composante selon Oy de l'effort appliqué au nœud i,

$j=3$ Composante selon Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=4$ Composante couple Oy , Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=5$ Composante couple Ox , Oz de l'effort appliqué au nœud i,

$j=6$ Composante couple Ox , Oy de l'effort appliqué au nœud i.

9. DALPO TOLP

DALPO = Pas d'accroissement du coefficient de chargement,

TOLP= tolérance.

Entre deux étapes consécutives, est augmenté de DALPO, en cas de divergence, DALPO est divisé par 2. Le calcul est arrêté lorsque $DALPO < TOLP$

Les phases qui vont suivre de 10 a 18 sont répétées NTYPE fois ($i=1, NTYPE$)

10. nbtra(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i)

nbtra(i) = nombre de trapèzes de béton et/ou de profil en acier,
 NNS(i) = nombre de lits d'armatures passives,
 TTPE(i) = type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis),
 NCABI(i) = nombre de câbles de précontrainte.

11. oordzi (i,j), oordzs(i,j) Absyi1(i,j),Absyi2(i,j) absys1(i,j),absys2(i,j)

oordzi (i,j)= ordonnée inférieure de trapèze,
 oordzs(i,j)= ordonnée supérieure de trapèze,
 Absyi1 (i,j)= la première abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y,
 Absyi2 (i,j)= le deuxième abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y,
 absys1(i,j)= la première abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y,
 absys2(i,j)= le deuxième abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y.

12. FFE(I) FFT(I) EEC(I) RRB(I) RRC(I)

FFE(i)= f_{cj} : contrainte maximale de compression du béton,
 FFT(i)= f_{tj} : contrainte maximale de traction du béton,
 EEC(i) = E_b : Module de Young élastique du béton,
 RRB(i) = Paramètre caractérisant la branche ascendante de la loi de SARGIN,
 RRC(i)= Paramètre caractérisant la branche descendante de la loi de SARGIN.

13. EEPSRT (i) EEPSO (i) EEPSCU (i)

EEPSRT(i)= déformation de rupture en traction,
 EEPSO(i)= déformation du pic en compression,
 EEPSCU(i)= déformation ultime de rupture en compression.

14. SSE(i) EES(i) EEPSU(i) SSR(i) KKS(i)

SSE(i)= σ_e : Limite élastique de l'acier passif,
 EES(i)= E_a : Module de Young de l'acier passif,
 EEPSU(i)= déformation de rupture (10%),
 SSR(i) = contrainte de rupture (Acier Écrouis),
 KKS(i) : Type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis).

15. SSEM(i) EEAM(i) EEPSUM(i) SSRM(i) KKS(i)

SSEM(i)= σ_{em} : Limite élastique du profil acier,
 EEAM(i)= E_{am} : Module de Young du profil acier,
 EEPSUM(i)= déformation de rupture du profil acier,
 SSRM(i) = contrainte de rupture du profil acier,
 KKS(i) : Type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis).

16. (VVYI(L,IES),IES=1,NNS(i)) (VVIZ(L,IES),IES=1,NNS(i))

VVYI(L,IES) = cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oy,

VVIZ(I,IES) = cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oz.

17. (AAS (I, IES), IES=1, NNS (i))

AAS (I, ies) = Aire du lit d'acier passif.

18. COMP (I), (I=1, INI=NEL* ISEC)

COMP(I) = Numéro de la section de l'élément (I).

Si la section est précontrainte on aura :

19. AAP(I) SSP(i) EEP(i) EEPSUP(i) SSRP(i) TTI(i) KKP(i)

AAP(I) = la section d'armatures de précontrainte,

SSP(i) = limite élastique de l'acier actif,

EEP(i) = module élastique de l'acier actif,

EEPSUP(i) = déformation de l'acier actif,

SSRP(i) = contrainte de rupture,

TTI(i) = tension initial du câble,

KKP(i) = 1 pour section précontrainte; =0 pour section non précontrainte.

I=1, NPI

20. ZC1(IL,J),ZC2(IL,J) YC1(IL,J),YC2(IL,J) XC1(IL,J),XC2(IL,J)

ZC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz),

ZC2(IL,J) = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz),

YC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy),

YC2(IL,J) = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy),

XC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox),

XC2(IL,J) = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox).

21. ALPHAC(IL,J), j=1,NPI ;IL=1,NEL

Angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre j avec l'axe horizontal de la section.

22. PFI PSI SIGMO ITP

PFI = perte par frottement du câble,

PSI = perte de la ligne du câble,

SIGMO = contrainte de rupture,

ITP = mode de traction du câble.

3. 3.4. Présentation du fichier Résultats :

À la fin du calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Charges extérieures appliquées aux nœuds (repère absolu)

X - Charge selon X.

Y - Charge selon Y.

Z - Charge selon Z.

M - Moment dans le plan X-Y, X-Z et Y-Z.

- Déplacement des nœuds (repère absolu)

U - Déplacement selon X.

V - Déplacements selon Y.

W - Déplacement selon Z.

ROT- Rotation autour de l'axe X, Y et Z.

Conventions de signes :

- Les charges sont comptées positives vers les x ou les z ou les y positifs.
- Les moments sont positifs dans le sens trigonométrique.
- Le pas DALP pour l'accroissement de coefficient de chargement sera, en général, choisi de l'ordre du 1/10 de la valeur ultime prévue de ALP et est sans dimension.

UNITES :

Elles sont imposées comme suit :

- Les longueurs =[m].
- Les aires =[m²].
- Les forces =[KN].
- Les contraintes =.
- Les moments =[KN.m]

ANNEXE II

ÉLABORATION D'UN PROGRAMME DE CALCUL DE LA FIABILITÉ DES STRUCTURES

III. 1. Introduction :

Afin de faire un calcul fiabiliste nous avons élaboré un programme écrit en fortran 90 à partir de [28], dont on a introduit l'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) décrit par LEMAIRE [30].

III. 2. Structure générale du programme :**III. 2.1. Description des différentes sous-routines :**

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme de fiabilité :

- **Subroutine INPT** : L'entrée est lue à partir <nomfichier>. DAT, qui est préparé à l'avance.
- **Subroutine EL2SRCH** : Une boucle de recherche qui minimise l'indice de fiabilité par l'algorithme d'optimisation de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).
- **Subroutine OUTPT** : Imprime les valeurs finales de chaque variable aléatoire (indice de fiabilité, les coordonnées du point de conception, les cosinus directeurs).
- **Subroutine FAIL** : Permet d'introduire la fonction de défaillance $g(X)$ (obtenue par surface de réponse analytique) et sa dérivée partielle.
- **Subroutine DIST** : Permet d'évaluer la densité de probabilité et la densité de probabilité cumulée d'une distribution : Weibull, Gumbel, Fréchet. Quant aux distributions normales, lognormale et exponentielle sont gérées dans une boucle de recherche.

III. 2.2. Présentation du fichier de données :

Les données sont entrées par lignes entre les guillemets simples et sont séparées soit par des virgules ou des espaces, les données sont ainsi lues :

<classe>, <type>, <mean>, <std dev>, <min>, <name>

Remarque :

Les données introduites sur le fichier de données qui a été décrit ci-dessus sont répétées n fois ($i=1, n$), où n représente le nombre de variables aléatoire.

III. 2.3. Description des variables du fichier de données :

1) <classe> défini par une variable caractère de dimension deux, est représenté par le caractère 'RE' ou 'LO', où :
'RE' représente une variable de résistance et 'LO' désigne une variable de charge.

2) <type> défini par une variable caractère de dimension deux, est représenté par le caractère 'NO' ou 'LO' ou 'WE' ou 'GU' ou 'FR'.

Ceci spécifie le type de distribution, où :

'NO' , 'LO' , 'WE' , 'GU' , 'FR' , 'EX' désignent : lois Normale, Lognormale, Weibull, Gumbel, Frechet et Exponentielle respectivement.

3) <mean> défini par une variable réelle, qui représente la valeur moyenne,

4) <std dev> défini par une variable réelle, qui représente l'écart-type,

5) <min> défini par une variable réelle, qui représente la limite inférieure (ce qui doit être inclus, mais seront ignorées pour les distributions qui ont que leur limite inférieure),

6) <name> défini par une variable caractère de dimension quatre, qui est représenté par le caractère 'RESI' ou 'LOAD'. Ce sont des noms de variables pour distinguer entre les résistances et les charges.

À la fin de chaque fichier d'entrée on introduit la variable caractère 'ST' de dimension deux pour terminer les calculs.

III. 2.4. Présentation du fichier résultats :

À la fin du calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Indice de fiabilité d'Hasofer-Lind.
- Les cosinus directeurs de chaque variable aléatoire.
- Les coordonnées du point de conception dans l'espace centré réduit et dans l'espace physique.

ANNEXE III

LOIS DE DISTRIBUTION DE DENSITÉ DES PROBABILITÉS

Dans ce qui suit nous présenterons les lois de distribution de densité des probabilités.

V. 1. Loi normale :

La densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale à une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

Où : μ la moyenne et σ l'écart-type du modèle.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\sigma = \sqrt{E[X - E(X)]^2}$$

V. 2. Distribution log-normale :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$$f_X(x; \lambda_X, \xi_X) = \frac{1}{x \xi_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda_X}{\xi_X}\right)^2}, \quad \text{pour } x \geq 0$$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x; \lambda_X, \xi_X) = \frac{1}{\xi_X \sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda_X}{\xi_X}\right)^2} \cdot dx$$

Où : $\lambda_X = m_{\ln X}$ la moyenne et $\xi_X = \sigma_{\ln X}$ l'écart-type du modèle de distribution normale $\mathcal{N}(\lambda_X, \xi_X^2)$ quand $Y = \ln X$.

V. 3. Distribution exponentielle :

Cette distribution s'écrit sous la forme :

$$F(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Où λ est le paramètre exponentiel de distribution. La moyenne μ et l'écart-type σ sont reliés de la manière suivante :

$$\mu = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

V. 4. Distribution gamma :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$$f_X(x; \sigma, \lambda) = \frac{1}{\sigma \Gamma(\lambda)} \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)}, \quad \text{avec } x \geq 0 \text{ et } \sigma, \lambda > 0$$

Avec :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Pour $1 \leq \lambda < 2$, $\Gamma(\lambda)$ est donné par la table de la fonction Gamma. Pour les autres valeurs de λ , $\Gamma(\lambda)$ est donnée par la relation de récurrence :

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x; \sigma, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot \int_0^x \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)} \cdot \frac{dx}{\sigma}$$

Où : σ est le paramètre d'échelle et λ le paramètre de forme.

V. 5. Loi de Weibull :

La distribution de weibull dépend des paramètres : β, η et γ . Sa densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x; \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} ; \gamma < x \text{ et } 0 < \eta, \gamma$$

Et sa densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale à une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x; \beta, \eta, \gamma) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

Ou : β est le paramètre de forme ;

η est le paramètre d'échelle ;

γ est le facteur de position, pris ici égal à 0.

La fonction fiabilité s'écrit :

$$R(x; \beta, \eta, \gamma) = e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(x; \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

V. 6. Loi de Gumbel :

X_i Est une variable aléatoire de moyennem $_{X_i}$, et d'écart-type σ_{X_i} , X_i suit une loi de Gumbel de paramètres a et b, alors :

$$u_i = \Phi^{-1}\left(\exp\left(-\exp\left(-\frac{x_i - b}{a}\right)\right)\right)$$

Avec :

$m_{X_i} = f a + b$ Ou $f = 0.5772156649 \dots$ constante d'Euler-Mascheroni,

$$\sigma_{X_i} = \pi \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Et :

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i} \quad \text{et} \quad b = m_{X_i} - f \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i}$$

La transformation inverse est donnée par :

$$x_i = b - a \ln\left(-\ln(\Phi(u_i))\right)$$

L'expression de la fonction Φ est évaluée numériquement.

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans la recherche de la probabilité de défaillance des structures en béton armé à section circulaire. Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche mécano-fiabiliste. Du point de vue mécanique, le comportement à retenir est élastique non linéaire et la capacité portante sera déterminée suite à la vérification d'une part ; des déformations limites et puis d'autre part ; à la rupture. Les événements de l'environnement (champ de forces, actions) et comportement des matériaux sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste apportée par un dimensionnement mécanique peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure. Il s'agit, d'une part, d'effectuer une modélisation non linéaire (non-linéarité mécanique et non linéarité géométrique) des structures tridimensionnelles en béton armé à section circulaire, et d'autre part, de proposer ou d'adapter une formulation et modélisation de la fiabilité.

Pour cela, un programme en FORTRAN est développé dans ce travail pour simuler la méthode directe de Monte Carlo couplée à un calcul non-linéaire pour évaluer la probabilité de défaillance des structures en béton armé à section circulaire. Le principe d'Hasofer-Lind est appliqué, où le schéma de fiabilité est construit en couplant un modèle d'éléments finis non linéaire avec la méthode de surface de réponse RSM. La sécurité structurelle est donnée en terme d'indice de fiabilité Hasofer-Lind, trouvé en résolvant un problème d'optimisation, pour lequel l'algorithme de Rackwitz et Fiessler a été adopté.

Pour représenter la non-linéarité du matériau, des modèles locaux basés sur des relations axiales contrainte-déformation sont adoptés pour décrire le comportement du béton en traction et en compression. Les barres d'armature étant placées dans des couches prédéfinies dans la section transversale du béton, l'acier est supposé suivre une loi élastique-plastique parfaite. Les applications numériques montrent l'efficacité du couplage entre *MSR-MEF*, à travers l'analyse de structures non linéaires complexes nécessitant un nombre réduit d'appels mécaniques.

Afin d'estimer les scénarios et la probabilité de défaillance des structures étudiées. Nous validons notre modèle mécanique en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux, Enfin on vérifie les résultats du modèle fiabiliste ; et cela en confrontant les résultats obtenus par simulation de Monte-Carlo avec ceux de la méthode d'Hasofer-Lind.

MOTS CLÉS : Modélisation - non-linéarité mécanique - non-linéarité géométrique - probabilité de défaillance - Monte Carlo - indice de fiabilité.

ABSTRACT

The aim of this study is to analyze the reliability of three-dimensional reinforced concrete structures with circular section. The problem is tackled by the definition of security by a probabilistic threshold: the mechanical-reliability approach is used. From a mechanical point of view, the behaviour to be retained is non-linear elastic and the bearing capacity will be determined following verification on the one hand; boundary deformations and then on the other hand; at the breakup. Environmental events (force field, actions) and material behaviour are simulated by random and deterministic variables. The purpose is to show how a reliability evaluation provided by a mechanical dimensioning can be obtained. For this, it is necessary to have a mechanical model and a reliability model correctly representing the behaviour of this type of structures. It involves, on the one hand, performing non-linear modeling (mechanical non-linearity and geometrical non-linearity) of three-dimensional structures with circular section and on the other hand, proposing or adapting a formulation and modeling of reliability.

For this, a program in FORTRAN is developed in this work to simulate the direct Monte Carlo method coupled to a non-linear calculation to evaluate the probability of failure of three-dimensional structures with circular section.

To represent the material non-linearity, local models based on axial stress-strain relationships are adopted to describe the concrete behaviour in tension and in compression. Having the reinforcement bars placed in predefined layers within the concrete cross-section, the steel is assumed to follow a perfect elastic-plastic law. The numerical applications show the efficiency of the RSM-FEM coupling, through the analysis of complex nonlinear structures requiring a reduced number of mechanical calls.

The Hasofer-Lind principle is applied to estimate the reliability index, the scenarios, and the probability of failure of the studied structures. We validate our mechanical model by comparing the results of our calculations with experimental results. Finally, we verify the results of the reliability model; and this by comparing the results obtained by Monte-Carlo simulation with those of the Hasofer-Lind method.

KEY WORDS: Modeling – nonlinearity mechanical – nonlinearity geometrical - probability – reliability - probability of failure.