

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Mécanique



Mémoire de Fin d'Etudes

En Vue De L'obtention du diplôme
De Master Académique en Génie Mécanique
OPTION : ÉNERGETIQUE



THÈME :

**Etude et simulation d'un
écoulement compressible dans une
tuyère de Laval**

Proposé et dirigé par :

Mr. FOUCHANE

Présenté par :

Melle BENSSAAD Malika

Mr BOUAROUR Hakim

Melle BOUDJEMA Kaissa

PROMOTION :2020/2021

Résumé

ملخص

يتضمن هذا العمل محاكاة تدفق مضغوط من خلال فوهة متقاربة-متباعدة، باستخدام أداة تصميم بمساعدة الكمبيوتر ANSYS 16.0. تمت هذه المحاكاة على أربع مراحل (إنشاء هندسة السطح، شبكة الهندسة، الدقة بواسطة FLUENT وتصور النتائج)، وهي تستند إلى التحليل والمعايير (عدد الماخ، الضغط الثابت والسرعات).

Résumé

Le présent travail consiste à simuler un écoulement compressible à travers une tuyère convergente-divergente, à l'aide d'un outil de conception assistée par ordinateur ANSYS 16.0. Cette simulation s'est déroulée en quatre phases (Création de la géométrie surfacique, Maillage de la géométrie, Résolution Par FLUENT et la Visualisation des Résultats), elle est basée sur l'analyse paramétrique (Nombre de Mach, Pression Statique et vitesses).

Summary

The present work consists in simulating a compressible flow through a convergent-divergent nozzle, using a computer-aided design tool ANSYS 16.0. This simulation was carried out in four phases (Creation of the surface geometry, meshing of the geometry, Resolution by FLUENT and Visualization of the Results), it is based on the parametric analysis (Mach number, Static Pressure and velocities).

Remerciement

Au terme de ce modeste travail, nous remercions en premier lieu DIEU qui nous a donné la Puissance de nous accorder d'avoir accompli ce travail.

Nous tenons d'abord à remercier infiniment nos chers parents pour leur soutien tout au long parcours d'études.

En tenant aussi à remercier notre promoteur **Mr. Sid-Ali. FOUCHANE** pour avoir bien voulu encadrer ce travail, ainsi que pour sa riche contribution et ses précieux conseils.

Nous tenons à gratifier aussi les membres de jury (**M. BOUMRAR** et **M. HAMZAOU**) pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail.

Nous remercions aussi l'ingénieur **M. Toufik HAMITOUCHE** et l'enseignant **M. BELTAGI** pour leurs énormes contributions à la réussite de ce travail. De plus nous remercions tous les enseignants et les fonctionnaires du département de génie mécanique.

Enfin, on adresse nos Sincères Sentiments de gratitude et de reconnaissances à toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire retrouve ici l'expression de nos plus Profonds Sentiments.



Dédicaces

Je dédie ce travail

A mon cher père qui est mon précieux, l'homme qui doit ma vie je ferai tout pour qu'il soit fier de sa fille un grand respect pour lui. Ce travail est le fruit de son amour à moi.

A mon adorable mère qui n'a jamais dit non à mes exigences elle a tout donné de ces moyens pour que je réussisse mes études elle sera toujours à mes côtés que dieu la protège.

A mes frères qui n'ont pas cessé de me conseiller, encourager et de me soutenir le long de mes études je leurs souhaite du bonheur et de joie dans leurs vies.

A mes chères sœurs bien aimé Kahina et Wardoucha et ma belle-sœur adorable Zuzanna et ma petite princesse Arinas qui m'ont soutenue, aider et encourager

A ma grande famille, à mes grands-mères, mes tantes, mes oncles, mes cousins, mes cousines, mes proches.

A tous mes amis de loin ou de près, à mes meilleurs amis pour leurs soutiens, leurs conseils et leurs encouragements.

Je dédie particulièrement ce mémoire à moi-même pour avoir fait preuve de patience et de persévérance

Sans oublier mes collègues Kaïssa et Hakîm pour leurs soutiens leurs patiences tout au long de ce projet

BENSSAAD Malika



Dédicaces



Je dédie ce travail

À ma chère mère, Zohra MENECEUR

À mon cher père, Mohammed

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

À mes chers frères, Yacine et Saïd

À ma chère sœur, Lydia que le dieu les garde sans oublier ma défunte sœur, Souad

Pour ses soutiens moraux et leurs conseils précieux tout au long de mes parcours études.

À mes défunts grands-pères paternels ainsi qu'à mes grands-pères maternels que le dieu les garde

À mes chères binômes, BENSSAAD Malika et BOUDJEMA Kaïssa

Pour leurs ententes et leurs sympathies.

Pour leurs indéfectibles soutiens et leurs patiences infinies.

Qui m'a aidé et supporté dans les moments difficiles.

A mon cher moniteur de sport des Arts Martiaux (VÕ-Viêt- Nam), Mr. BOULILA Kamel.

Et aussi toute l'équipe de sport des Arts Martiaux (VÕ-Viêt- Nam),

À mes cher(e)s ami(e)s, ainsi que Tous les étudiant(e)s de ma promotion sans exception en particulière : MAKHLOUF Azwaw, ARAB Abdenour, CHOUGAR Ramande, MOUSSI Djamel, LOUNNAS Youcef, ALIANE Aïssa, AMRANE Idris, BAZIZ Ali, LAOUFI Rabah, HADJERAS Ali, AMROUNI Mohamed, ADJRAD Ali, BOURMEL Mustapha, TOUADI Amine, CHABANE Yacine, AMEUR Arab, SNAOUI Saïd, Amoura Nacime, SIARI Lounes, OUAMARA Thanina, OUHADJ Djazia et IGHIL Fatima.

Pour leurs aides et supports dans les moments difficiles.

À toute ma famille.

BOUAROUR Hakim



Dédicaces



Je dédie ce travail

Je suis pour la première fois entré dans une université, il y a déjà 05 ans, mais j'ai toujours pensé faire où offrir quelque chose à mes parents en signe de reconnaissance pour tous les efforts et sacrifices qu'ils n'ont consentis rien que pour me voir réussir, et voilà, l'occasion est venue.

Alors, je tiens à dédier ce travail à ceux qui m'ont donné la vie, symbole de beauté, de fierté, de sagesse et de patience.

A ceux qui sont la source de mon inspiration et de mon courage, à qui je dois de l'amour et la reconnaissance.

Mes chers parents

Mes chers frères (Saïd ; Yacine ; koko ; Tarik ; Juba ; manis ; massi)

Mes sœurs (sylvia ; Kenza)

Mes chères sœurs à mes chouchous sérine et Akçil

Mon cher oncle et tt sa famille

Toute ma grande famille

Mes chers binôme Malika et Hakim

A Yanis qui m'a beaucoup aidé, Ainsi qu'à tous mes amis que j'ai connus dans ma vie, À tous ceux qui m'aiment et que j'aime, à tout le groupe énergétique et à tous ceux qui m'ont encouragé durant ma vie estudiantine.

BOUDJEMA Kaïssa



Sommaire

Résumé	i
Remerciement.....	ii
Dédicaces	iii
Sommaire	xv
Liste des figures	xx
Nomenclature	xxiv
INTRODUCTION GENERALE.....	1
Chapitre I : Étude Générale de L'Écoulement Compressible	
I.1 Introduction :	3
I.2. Définition d'un fluide :	3
I.3. Ecoulement de l'air :	3
I.4. Repère historique de la science des fluides compressibles :	4
I.5. Équations de base de l'écoulement :	6
I.5.1 Équation de continuité :	6
I.5.2 Bilan de la quantité de mouvement :	7
I.5.3 Équation de l'énergie cinétique ou équation énergétique mécanique :	7
I.5.4 Équation de l'énergie ou équation énergétique thermodynamique :	8
I.5.5 Équation d'état du fluide :	8
I.6 Résolution des problèmes :	9
I.7 Application des équations énergétiques à quelques cas particuliers :	9
I.7.1 Fluide en écoulement dans une canalisation :	9
I.7.2 Écoulement d'un fluide non pesant dans une canalisation fixe :	10
I.7.3 Écoulement adiabatique d'un fluide non pesant dans une canalisation fixe :	10
I.7.4 Écoulement réversible (fluide parfait) :	10
I.8 Vitesse du son :	11
I.9.Écoulement isentropique d'un gaz parfait :	12
I.9.1 Étude générale de l'écoulement :	12
I.9.1.1 Vitesse de l'écoulement :	12
I.9.1.2 État générateur. Point d'arrêt :	13
I.9.1.3. Vitesse de détente dans le vide :	17
I.9.2 Particularités de l'écoulement :	17

I.9.2.1. Évolution de la section droite en fonction de la pression :	17
I.9.2.2. Évolution de la masse volumique avec la pression :.....	18
I.9.2.3. Évolution de la vitesse avec la pression :.....	18
I.9.2.4. Évolution de la section avec la pression :	19
I.9.2.5. Vitesse au col :	21
I.9.2.6. Taux de détente au col capable de la vitesse du son :.....	23
I.9.2.7. Température du fluide en écoulement sonique :	25
I.9.2.8. Équation du débit :	25

Chapitre II : Écoulement adiabatique et réversible d'Un gaz parfait dans Une Conduite Cylindrique

II.1 Introduction :	26
II.2 Écoulement adiabatique :.....	26
II.2.1 Équations de l'écoulement de Fanno :.....	26
II.2.2 Évolution du fluide en diagramme entropique :	26
II.2.3 Nature de l'écoulement :.....	28
II.3 Ecoulement réversible :	32
II.3.1 Équations en conduite de Rayleigh :	32
II.3.2 Évolution du fluide en diagramme entropique :	32
II.3.3 Nature de l'écoulement :.....	33

Chapitre III : Écoulement isentropique d'un gaz parfait dans une tuyère

III.1 Introduction :	35
III.2. Définition d'une tuyère :	35
III.3.1. Définition d'une tuyère de Laval :	36
III.3.2. Rôle et utilisation de la tuyère :.....	36
III.3.2.1. Moteur Fusée :.....	37
III.3.2.2. Moteur Avions :	37
III.3.2.3. Soufflerie :.....	38
III.4. Différentes formes de tuyères :	39
III.4.1. Tuyère conique :.....	39
III.4.2. Tuyère à contour profilé :.....	39
III.4.3. Tuyère à zone d'expansion :.....	40
III.4.4. Tuyère à détente centrée :.....	40
III.4.5. Tuyère à double galbe :	41

III.4.6. Tuyère annulaire :	41
III.4.7. Tuyère à corps central :	42
III.3.8. Tuyère type à bouchon :	42
III.4.9. Tuyère type détente-déviaton :	43
III.5. Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique :	43
III.5.1. Écoulement subsonique :	44
III.5.2. Écoulement sonique adapté :	44
III.5.3. Écoulement sonique non adapté :	44
III.5.4. Écoulement supersonique adapté :	46
III.5.5. Écoulement supersonique non adapté :	46
III.6. Fonctionnement réel de la tuyère supersonique :	47
III.6.1. Le régime d'adaptation :	47
III.6.2. Le régime de sous-détente :	47
III.6.3. Le régime de sur-détente :	48
III.7. Ondes de choc :	50
III.7.1. Nombre de Mach :	50
III.7.2. Les ondes de choc :	50
III.7.3. Les types d'onde de choc :	51
III.7. 4. Équations des ondes de choc :	54
III.7.5. Relations entre les paramètres du fluide de part et d'autre de l'onde de choc :	55
III.7.5.1 Expressions des paramètres en fonction des nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc :	55
III.7.5.2 Relation entre les nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc :	56
III.7.5.3. Expressions des paramètres en fonction du nombre de Mach amont :	57
III.7.5.4 Relation de Rankine-Huguenot pour les ondes de choc droites :	57
III.7.5.6. Relation de Prandtl-Mayer :	58
III.7.5.7. Variation d'entropie à la traversée d'une onde de choc :	59
III.8. Conclusion :	59

Chapitre IV : La modélisation des écoulements compressibles turbulents

IV.1. Introduction :	60
IV.2. Equations de base des écoulements des fluides :	60
IV.2.1. Les équations de conservation :	60
IV.2.2. Hypothèses et lois des comportements :	61

IV.2.3 Les équations de Navier-Stokes moyennées en temps :	63
IV.3. La modélisation par la viscosité turbulente :	64
IV.4. Le modèle turbulent adopté en 2D axisymétrique :	65
IV.5. Conclusion :	66

Chapitre V : Calcul numérique

V.1. Introduction :	67
V.2. Les méthodes de discrétisation :	68
V.2.1. Les méthodes d'approximation des équations :	68
V.2.2. Les méthodes d'approximation des solutions :	68
V.3. La méthode des différences finis :	69
V.3.1. Formule différentielle pour la première et la deuxième dérivative :	69
V.4.1. Conditions sur la sélection des volumes finis :	71
V.4.2. Définition de la discrétisation en volumes finis :	72
V.5. Le maillage :	73
V.5.1. Notions de maillage :	74
V.5.2. Classification des méthodes de maillage :	75
V.6. Maillage structuré :	76
V.6.1. Techniques de génération de maillage structuré :	76
V.7. Maillage non structuré :	77
V.7.1. Techniques de génération de maillage non structuré :	77
V.8. Comparaison entre maillage structuré et non structuré :	80
V.9. Maillage hybride :	80
V.10. La simulation numérique :	83
V.10.1. Introduction :	83
V.10.2. Géométrie :	84
V.10.3. Maillage :	84
V.10.4. Conditions aux limites :	85
V.10.5. Résolution :	87
V.11. Conclusion :	88

Chapitre VI : Résultats et discussions

VI.1. Introduction :	89
VI.2. Modèle de calcul Ansys16.0 :	89
VI.3. Phases de simulation :	89

VI.3.1. Création de la géométrie :	89
VI.3.2. Maillage de la géométrie :	91
VI.3.3. Résolution par FLUENT :	93
IV.3.4. Visualisation des paramètres :	95
VI.2. Résultats et Discussions de La Simulation :	95
VI.2.1. Premier Cas : 3 bars :	95
VI.2.1.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère :	96
VI.2.1.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :	97
VI.2.1.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :	98
VI.2.2. Deuxième Cas : 7 bars	99
VI.2.2.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère :	99
VI.2.2.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :	101
VI.2.2.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :	102
VI.2.3. Troisième Cas : 67.8 bar	103
VI.2.3.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère	103
VI.2.3.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :	104
VI.2.3.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :	105
VI.3. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère avec des pressions différentes :	106
VI.4. Evolution de la vitesse statique dans la tuyère avec des pressions différentes :	107
VI.5. Conclusion :	107
CONCLUSION GENERALE	108
Références bibliographiques	
Annexes	

Liste des figures

Figure 1. Écoulements monodimensionnels dans un tube de courant.....	6
Figure 2. Écoulements monodimensionnels de gaz	7
Figure 3. Écoulement d'un fluide compressible dans une canalisation alimentée par un réservoir.....	10
Figure 4. Propagation d'une onde sonore.....	11
Figure 5. Écoulement d'un gaz parfait idéal dans une veine quelconque	13
Figure 6. Schématisme de l'état générateur d'un gaz parfait en diagramme (T, s ou h, s) ...	16
Figure 7. Écoulement avec point d'arrêt	16
Figure 8. Évolution de la pression et de la température dans un écoulement isentropique d'air en fonction du nombre de Mach.....	18
Figure 9. Évolution des paramètres V, ρ et A en fonction de la pression (ou du taux de détente) pour un écoulement isentropique de gaz parfait.....	19
Figure 10. Évolution de la section d'un écoulement isentropique en fonction de sa position allant d'un réservoir amont à un réservoir aval à pression nulle.....	21
Figure 11. Évolution de la section d'un écoulement de fluide incompressible.....	21
Figure 12. Évolution de l'écoulement dans une veine convergente-divergente.....	24
Figure 13. Évolution théorique du débit en fonction de la pression pour une section donnée.	25
Figure 14. Évolution du fluide en écoulement de Fanno pour une température génératrice donnée	28
Figure 15. Sens d'évolution du fluide et régimes d'écoulement en conduite cylindrique	31
Figure 16. Transition régime supersonique-régime subsonique par onde de choc en écoulement de Fanno	31
Figure 17. Évolution des caractéristiques thermodynamiques du fluide lors d'un écoulement de Rayleigh	33
Figure 18. Profils des Tuyères.....	35
Figure 19. Différentes formes géométriques des tuyères [7].	35
Figure 20. La tuyère De-L'aval.....	36
Figure 21. Tuyère du moteur Européen Vulcain2d'Ariane5 [10]......	37
Figure 22. Tuyère d'un avion de Combat ChengduJ-10[12]......	38
Figure 23. Tuyère Mach2 de la soufflerie S5 Ch du Centre Onera de Meudon [11].	38
Figure 24. Tuyère conique[15]......	39

Figure 25. Forme de la tuyère à zone d'expansion [13,17].	40
Figure 26. Forme générale d'une tuyère à détente centrée [18].	40
Figure 27. Tuyère à double galbe [20].	41
Figure 28. Tuyère annulaire [21].	42
Figure 29. Géométrie de la tuyère à corps central type bouchon [13].	43
Figure 30. Géométrie de la tuyère à corps central type détente déviation [13].	43
Figure 31. Schéma de la tuyère supersonique	44
Figure 32. Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique et l'évolution de la pression le long de la tuyère	45
Figure 33. Régime de sur-détente en 1D	45
Figure 34. Organisation de l'écoulement à l'adaptation	47
Figure 35. Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente.	48
Figure 36. Profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente	48
Figure 37. Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche limite.	49
Figure 38. Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite	49
Figure 39. Effet d'une onde de choc droite stationnaire [31]	51
Figure 40. Propagation d'une onde de compression	51
Figure 41. Illustration d'une onde de choc normale [29].	52
Figure 42. Cône volant à une vitesse supersonique	52
Figure 43. Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.	53
Figure 44. L'avion YF-12 [32].	53
Figure 45. Représentation d'une onde de choc conique [33].	54
Figure 46. Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc.	56
Figure 47. Évolutions du fluide : isentropique et lors de la traversée d'une onde de choc.	57
Figure 48. Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc.	57
Figure 49. Évolution isentropique et équation de Rankine –Hugoniot.	58
Figure 50. Maillage uniforme à une dimension suivant x.	70
Figure 51. Maille centrée pour un maillage en volumes finis structurés et non structuré.	71
Figure 52. Maille-sommet pour un maillage non structuré en volumes finis et non structuré en volumes finis.	71
Figure 53. Volume de control hexagonal et trapézoïdal.	72
Figure 54. Illustration de la notion du maillage.	74

Figure 55. Eléments de maillage.	74
Figure 56. Maillage structuré et non structuré.	75
Figure 57. Maillage structuré autour d'un profil.	76
Figure 58. Maillage structuré dans une tuyère.	76
Figure 59. Transfer du domaine physique au domaine de calcul.	77
Figure 60. Progression du maillage sur une grille (méthode d'Octree).	78
Figure 61. Étapes de Maillage par La triangulation de Delaunay en 2D.	78
Figure 62. Progression et algorithme du maillage par la méthode frontale.	79
Figure 63. Maillage hybridée structure non structuré	81
Figure 64. Qualité de maillage basé sur un volume équilatéral.	82
Figure 65. Qualité de maillage basé sur la déviation angulaire.....	82
Figure 66. Changement Brusque.	83
Figure 67. Changement de taille Optimal.	83
Figure 68. Changement de taille.....	83
Figure 69. Résolution du maillage dans les régions à fort gradient.	83
Figure 70. Géométrie 2D de Laval.	84
Figure 71. Maillage structuré de la tuyère Laval.....	84
Figure 72. Types des conditions aux limites utilisées dans les simulations numériques.	87
Figure 73. Création du Profil avec Design Modeler	90
Figure 74. Génération du corps surfacique Avec le Design Modeler.	90
Figure 75. Tuyère axisymétrique.....	91
Figure 76. Création de surfaces sur les trois blocs de domaine de calculs sur MESHING en 2 dimensions avec(Maillage quadrilatérales).	91
Figure 77. Création de surfaces sur le bloque de la tuyère sur MESHING en 2 dimensions. Maillage Tri-quadrilatérales.	92
Figure 78. Création de Sélection Nommés.....	92
Figure 79. Maillage structuré quadrilatère sur MESHING.	93
Figure 80. Maillage structure sur FLUENT.	93
Figure 81. Condition aux limites sur fluent.....	94
Figure 82. Le graphe des résiduelles de notre simulation.	94
Figure 83. La visualisation des variables de l'écoulement sous forme d'un champ (contours).	95
Figure 84. Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.	96
Figure 85. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.	96

Figure 86. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.....	97
Figure 87. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.	97
Figure 88. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.....	98
Figure 89. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère.	98
Figure 90. Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.	99
Figure 91. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.	100
Figure 92. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.....	101
Figure 93. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.	101
Figure 94. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.	102
Figure 95. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère	102
Figure 96. Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.	103
Figure 97. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.	104
Figure 98. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.....	104
Figure 99. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.	105
Figure 100. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.....	105
Figure 101. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère.	106
Figure 102. Evolution des Courbes du Nombre de Mach dans la tuyère avec des pressions différentes.....	106
Figure 103. Evolution des Courbes de la vitesse dans la tuyère avec des pressions différentes.	107

Nomenclature

Notations et symboles latines

Symbole	Désignation	Unités
C_p	Capacité thermique massique à pression constante	(J /kg /K)
C_v	Capacité thermique massique à volume constant	(J /kg /K)
D	Diamètre de la canalisation	(m)
e	énergie massique	(J/ kg)
e_c	énergie cinétique massique	(J /kg)
e_p	énergie potentielle massique	(J /kg)
f	force de viscosité	((Pascal.s) ou Poiseuille (PI))
g	Accélération de la pesanteur	(9.81(m/ s ²))
h	enthalpie massique	(J/kg)
J	pertes de charge	(m/m)
ℓ	longueur de la canalisation	(m)
\dot{q}_m	débit-masse	(kg/s)
\dot{m}	vitesse massique	(m ³ /s)
Ma	nombre de Mach	/
P	Pression	((N/m ²)ou (Pascal))
r	constante du gaz	(J/kg.K)
s	Entropie massique ou abscisse curviligne	(J/kg.K)
t	Temps	(s)
T	température thermodynamique	(K ou °C)
u	vitesse moyenne débitante	(m/s)
V	vecteur vitesse	(m/s)

v	Vitesse	(m/s)
v	volume massique	(m ³ /kg)
v _s	vitesse du son	(m/s)
V _s *	vitesse du son critique	(m/s)
x	Abscisse	(m)
z	abscisse verticale	(m)

Liste des Indices

*	Critique
0	relatif à l'état initial
1,2	amont, aval
c	col, cinétique
i	au point d'inflexion
P	à pression constante
s	son, isentropique
S	Sortie
t	technique, totale, transition
V	à volume constant

3. Lettres grecques :

Symbole	Désignation	Unités
α	Angle formé par l'axe de la tuyère de la paroi extérieur du bouchon	(°)
β	Angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi intérieur du bouchon	(°)
μ	Angle de Mach	(°)
ϵ	Facteur de perte de poussée	/
ε	La précision	/

Δ	Le discriminateur	/
ε_X	Erreur relative	/
δ	taux de détente	/
γ	Rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants	/
η	Rendement	(%)
λ	coefficient de pertes de charge	S.u
ρ	masse volumique	(kg/m ³) (N/m ²)
τ	travail massique des forces de frottement	ou (Pascal))
A	section droite	(m ²)
\vec{F}	Flux	Watts
U	Variable conservative (quantité scalaire par unité de volume)	(J/m ³)
Ω	Volume considéré	m ³
Q_V	Source volumique	(l/s)

Abréviations :

NPR : Nozzle Pressure Ratio

G.P : Gaz parfait

INTRODUCTION GENERALE

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important dans la conception des engins aérospatiaux. Ils interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles, les moteurs d'avions, et dans la fabrication des souffleries supersoniques.

Toute conception aéronautiques et études étaient basées sur les expériences réelles, causant par la suite d'énorme dégâts et pertes de temps considérable. Avec le développement de l'outil informatique et l'émergence des logiciels de simulation et modélisation numériques une approche réelle ait pu réaliser, de nouvelles expériences ont vu le jour.

Notre travail dans ce mémoire se focalise sur la simulation numérique de l'écoulement supersonique bidimensionnels d'un fluide compressible en régime stationnaire dans une tuyère convergente-divergent axisymétrique raccordée à un moteur d'aviation, sous une divergence de 14.8° .

Cette étude est dans le but de comprendre les différents phénomènes d'interaction et le décollement des ondes de chocs ainsi que le phénomène de la symétrie de l'écoulement. Dans une application réelle de cette étude, il y a des moyens et des potentiels énormes pour améliorer les performances des moteurs fusés et des systèmes d'aéronef, en remplaçant les systèmes mécaniques des tuyères avec des configurations géométriques efficaces. Pour cette raison, on se base sur la variation de pression ($P=3$ bars ; $P=7$ bars ; $P=67.86$ bars).

Pour bien mener notre étude nous avons divisé le mémoire en six chapitres dont Le premier chapitre est consacré à un petit historique et une étude générale de l'écoulement compressible

Dans le deuxième chapitre nous faisons l'étude d'un écoulement adiabatique et réversible d'un gaz parfait dans une conduite cylindrique.

Ensuite, dans le troisième chapitre on présente des généralités sur les tuyères, les différents écoulements et les diverses formes de tuyères et leur régime de fonctionnement. Dans le quatrième chapitre nous présentons les équations de NAVIER-STOKES et les principes de modélisations statistiques de la turbulence. Les équations ainsi présentées, décrivent un écoulement de fluide compressible en régime turbulent. La formulation du phénomène de turbulence est basée sur le modèle $k - \varepsilon, k - \omega, SST$, et dans le cinquième chapitre est dédié aux calculs numériques, on décrit les méthodes de discrétisation numériques à savoir la méthode des différences finis qui est plus utilisé dans le domaine de la CFD, ainsi que les différents types

de maillage et leurs méthodes de génération. On finira par une présentation de notre simulation numérique.

Dans le sixième chapitre qui représente le dernier chapitre, on présente tous les résultats obtenus par le Logiciel Ansys 16.0 avec l'interprétation des différents paramètres (Nombre de Mach, Pression, vitesse) et une comparaison pour les trois cas.

On finira par une conclusion générale qui prend en compte les objectifs du travail et les principaux résultats obtenus avec les perspectives envisagé pour la poursuite de cette étude.



Chapitre I
Étude Générale de L'Écoulement
Compressible

I.1 Introduction :

La mécanique des fluides est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées. Elle se divise en deux parties :

- La statique des fluides (étude des fluides au repos).
- La dynamique des fluides (étude des fluides en mouvement).

I.2. Définition d'un fluide :

Un corps fluide se différencie d'un corps solide par son aptitude à la déformation. Dans un milieu fluide, les interactions entre les molécules sont faibles, ce qui autorise une déformation. Un corps fluide adopte ainsi la forme du réservoir qui le contient.

- **Fluide incompressible** : un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. La masse volumique est constante (Ex : eau, huile ...).
- **Fluide compressible** : Un fluide compressible est un fluide dont on peut changer le volume. En d'autres mots, c'est possible de le comprimer dans un espace plus restreint. Les gaz sont des fluides compressibles (air, hydrogène, azote) [1]
- **Fluide réel** : dans un fluide réel, il existe des forces (tangentielles) élémentaires qui s'opposent au mouvement. C'est ce que l'on appelle la viscosité. Un fluide réel au repos, peut être considéré comme parfait.
- **Fluide parfait** : un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité.

I.3. Ecoulement de l'air :

- **Ecoulement laminaire** : les filets d'air suivent des trajectoires rectilignes et parallèles entre elles.
- **Ecoulement turbulent** : les filets d'air suivent des trajectoires quasiment parallèles entre elles, mais qui ne sont plus rectilignes, tout en se déplaçant globalement dans la même direction avec une même vitesse d'ensemble.
- **Ecoulement tourbillonnaire** : l'ensemble de l'écoulement est très désordonné. Bien que globalement tout l'écoulement d'air se déplace dans la même direction, certaines particules peuvent remonter le courant et former ainsi des tourbillons.

- **Couche limite** : au voisinage d'une surface solide, la vitesse de l'écoulement est ralentie au fur et à mesure que l'on s'en rapproche pour finalement s'annuler au contact de celle-ci. Ce phénomène est causé par la viscosité de l'air.

I.4. Repère historique de la science des fluides compressibles :

a) Propagation du son : au XVIIIème siècle (1687-1765). Problème linéaire de l'équation des ondes provenant de l'étude des cordes vibrantes (D'Alembert, Mém. Acad. Sci. Berlin 1747) et des tuyaux sonores. 1765 Euler écrit "La plus sublime recherche que les Géomètres ayant entreprise de nos jours avec succès, est sans contredit à tous égards celle de la propagation du son." (Mém. Acad. Sci. Berlin, Eclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son, et sur la formation de l'écho)

b) Lien avec une loi d'état, idée de linéarisation : fin XVIIIème 1759-1816 (Euler, Lagrange, Laplace)

c) Aspects non-linéaires : XIXème 1808-1910, construction des notions de solution discontinues, de relations de saut, du lien avec le second principe de la thermodynamique

d) Application technologiques : XXème depuis 1888 et l'invention de la tuyère De Laval, mais avec un abandon du savoir accumulé en début de siècle jusqu'à la mise en place de vols supersoniques autour de la seconde guerre mondiale

Newton, Principia, Livre 2, Section VII (1687) notion de propagation du son par condensation et raréfactions, établissement de la vitesse du son

Sauveur 1697 premiers parallèles entre la vibration des cordes et les instruments à vent : tuyau sonore

Derham 1708 première expérience de mesure de la vitesse du son évaluée à 3 %, conclusion sur la non dépendance de la vitesse du son dans la température et le taux d'humidité !

L. Euler (1707–1783) :

1727 Dissertation physique sur le son

1755 Mémoires sur l'équilibre et les mouvements des fluides (en français, dispo. Version électronique + papier)

1759 Mémoires sur la propagation du son

1765 Mémoire sur la propagation du son et la formation des echos

J. Le Rond D'Alembert (1721–1783)

1747 Mémoire sur les cordes vibrantes (Hist. Acad. Sci. Berlin)

1752 Essai sur la résistance des fluides

1753 Traite des Fluides seconde moitié du siècle : 9 volumes d'Opuscules Mathématiques dans lequel il traite en particulier de Mécanique des Fluides et de propagation du son

Bernoulli Jean, le père et Daniel, le fils, ayant chacun écrit un traite d'hydrodynamique

Idée de linéarisation et lien avec la loi d'état du fluide

L. Euler (1759) Mémoires sur la propagation du son

Lagrange Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son (1761)

Pierre-Simon Marquis de Laplace 1816 Sur la vitesse du son dans l'air et dans l'eau (disponible)

S. D. Poisson (1808) Mémoire sur la théorie du son, introduit la notion d'onde simple monodimensionnelle isotherme

J. Challis 1848 On the velocity of sound, introduit le débat sur la non unicité des solutions données par Poisson

G.G. Stokes 1848 On a difficulty in the theory of sound, propose d'utiliser des fonction discontinues et obtient des conditions de saut pour un gaz isotherme (disponible)

Développement autour de la notion d'onde simple

S. Earnshaw (1860) On the mathematical theory of sound

B. Riemann (1860) Über die introduit les invariants qui portent son nom mais ne résout pas la question de la conservation de l'énergie et son saut dans les ondes de choc

Compréhension de l'ensemble des conditions de saut, y compris pour l'énergie et donc pour l'entropie

W.J.M. Rankine (1869) on the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance (introduit la notion de volume spécifique "bulkiness")

H. Hugoniot (1887) Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits (introduit la vision géométrique des courbes caractéristiques, compréhension de la notion de saut d'entropie et formulation quasi-actuelle des conditions de saut, disponible)

Pendant ce temps les expériences permettant d'isoler les phénomènes élémentaires se mettent en place

A.B. Stodola (1903) Etude des tuyères avec ondes de choc, expérience et théorie, ETH Zürich

T. Meyer (1908) Thèse sous la direction de L. Prandtl à Göttingen, observation des ondes de choc et des ondes de Mach, travail théorique sur la notion de détente de Prandtl-Meyer

Finalisation du lien des conditions de saut et du second principe : un choc doit être compressif, compréhension des effets dissipatifs à l'intérieur de l'onde de choc associé

J.W.S Rayleigh (1910) Aerial plane waves of finite amplitude

G.I. Taylor (1910) (disponible)

Conclusion : en 1910, la science compressible a atteint sa maturité mais les avions de l'époque volent encore à des vitesses trop subsoniques pour que les effets compressibles soient importants

Carl Gustav Patrick de Laval (1845–1912) Invention de la forme de tuyère qui porte son nom en 1888 en ajoutant un divergent

Captain Charles Yeager 14 octobre 1947, premier vol supersonique à Muroc Dry Lake dans le désert de Morave, Californie avec le Bell XS-1

L'intérêt porté aux vols supersoniques relance les études sur le sujet, les mathématiques et la simulation numérique vont se développer de pair dans la seconde moitié du XXème siècle [2]

I.5. Équations de base de l'écoulement :

I.5.1 Équation de continuité :

Cette équation traduit la conservation de la masse. Elle s'écrit :

$$\int \rho_1 V_1 dA_1 = \int \rho_2 V_2 dA_2 \quad (\text{I.1})$$

Où A_1 et A_2 sont des sections planes perpendiculaires à la ligne moyenne encore appelées sections droites sur la figure 1 et V_i la composante de la vectrice vitesse selon la normale à chacune de ces sections. Compte tenu de l'hypothèse de la constance de cette vitesse sur une section droite et en admettant que la masse volumique ρ soit également constante sur cette section, on peut écrire :

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \dot{q}_m \quad (\text{I.2})$$

Où \dot{q}_m est le débit-masse du fluide dans le tube de courant.

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{I.3})$$

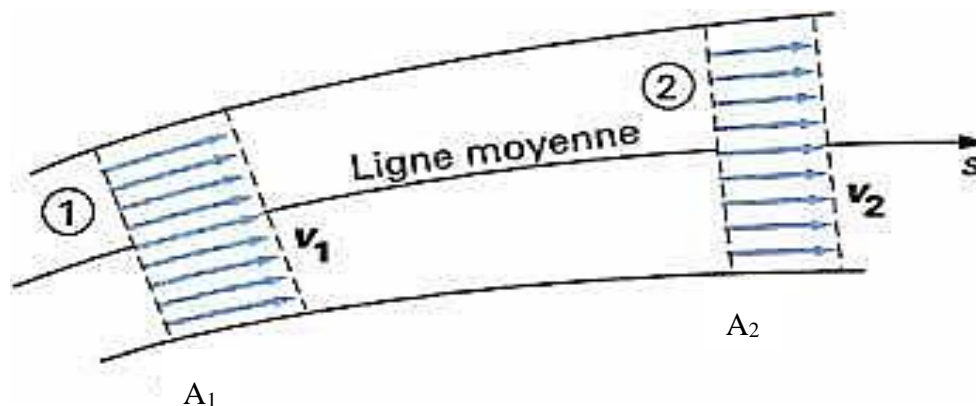


Figure 1. Écoulements monodimensionnels dans un tube de courant

I.5.2 Bilan de la quantité de mouvement :

Le bilan de la quantité de mouvement donne lieu à une équation vectorielle qui traduit simplement l'égalité entre les forces d'inertie du fluide et les forces qui lui sont appliquées. Dans le cas classique où on ne considère parmi ces forces que celles qui sont dues à la pression P , à la pesanteur g et à la viscosité du fluide, cette équation s'écrit de la manière suivante :

$$\rho \frac{DV}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}P} - \rho \mathbf{f} - \rho g \overrightarrow{\text{grad}z} \quad (\text{I.4})$$

Avec

\mathbf{f} : forces visqueuses par unité de masse,

z : abscisse verticale,

$\frac{DV}{dt}$: Dérivée totale de la vitesse par rapport au temps.

Pour un écoulement monodimensionnel et permanent, la projection sur la tangente à la ligne moyenne :

$$V \frac{dV}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} + g \frac{dz}{ds} + f = 0 \quad (\text{I.5})$$

Soit :

$$V dV + \frac{dP}{\rho} + g dz = -f ds \quad (\text{I.6})$$

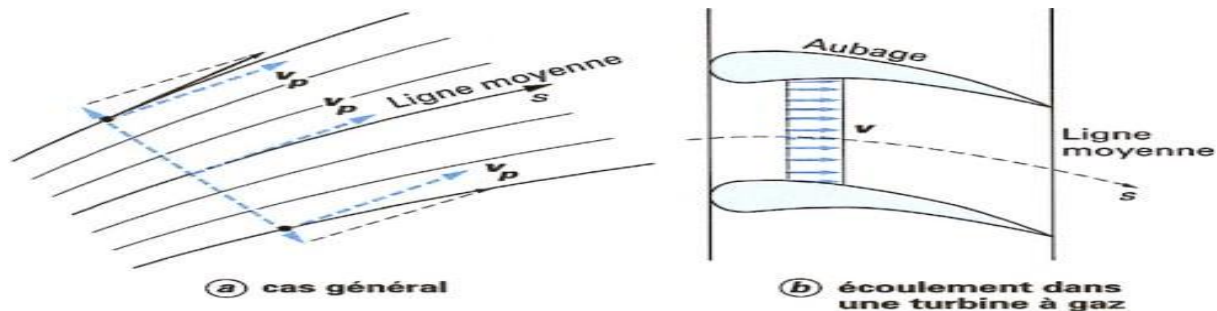


Figure 2. Écoulements monodimensionnels de gaz

I.5.3 Équation de l'énergie cinétique ou équation énergétique mécanique :

Lorsqu'on intègre l'équation 6 entre les points 1 et 2 d'une même ligne de courant (ligne en tous points parallèle à la vectrice vitesse qui, en écoulement stationnaire, est confondue avec la trajectoire d'une particule), on obtient :

$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + \Delta e_{c12} + \Delta e_{p12} + \tau_{12} = 0 \quad (\text{I.7})$$

C'est une équation énergétique massique dite équation de l'énergie cinétique, ou encore équation énergétique mécanique, car elle ne fait apparaître explicitement que des énergies de type mécanique : de pression P cinétique e_c , gravifique ou potentielle e_p . L'opposé du travail des forces de frottement par unité de masse τ_{12} , toujours positif, correspond à la transformation d'énergie mécanique en énergie thermique.

Comme l'équation 7 est déduite de 6, on utilisera soit l'une, soit l'autre de ces expressions puisqu'elles sont physiquement identiques.

Si on interpose un élément mobile d'une machine entre les points 1 et 2 de la ligne de courant, l'intégration de l'expression 6 donne :

$$w_{t12} = \int_1^2 \frac{dP}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \tau_{12} \quad (\text{I.8})$$

Où w_{t12} représente l'énergie reçue par l'unité de masse de fluide lors de son contact au cours du déplacement 1-2 avec cet élément de machine. Cette énergie est encore appelée : travail technique (Totale).

I.5.4 Équation de l'énergie ou équation énergétique thermodynamique :

L'équation de l'énergie traduit le premier principe de la thermodynamique :

$$w_{t12} + q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta e_{c12} + \Delta e_{p12} \quad (\text{I.9})$$

Avec :

q : quantité de chaleur échangée entre l'unité de masse du fluide et le milieu extérieur à l'élément de fluide considéré,

h : enthalpie de l'unité de masse.

Cette équation peut s'écrire plus simplement sous la forme :

$$w_t + q = \Delta h_t \quad (\text{I.10})$$

Où :

$h_t = h + \frac{v^2}{2} + gz$: Est l'enthalpie totale.

I.5.5 Équation d'état du fluide :

Un système est défini par son état. L'état d'un système est décrit par un ensemble de variables (paramètres) permettant de reconstituer expérimentalement le système avec un ensemble de propriétés parfaitement définies. On appelle équation d'état une relation entre les variables d'état. Pour un gaz parfait l'équation d'état est donnée par [3] :

$$PV = nRT$$

Et

$$\frac{P}{\rho} = rT \quad (\text{I.11})$$

Où :

P : Pression du gaz [Pas]

V : Volume occupé par le gaz [m^3]

n : Quantité de matière [mol]

T : Température absolue [k]

$R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ constante molaire des gaz,

$r = \frac{R}{M}$ Est la constante du gaz étudié,

$R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ constante molaire des gaz,

M : masse molaire du gaz.

Pour les gaz réels, il convient d'utiliser d'autres équations qui sont plus ou moins complexes [4].

Remarque :

Dans un gaz parfait, il n'y a aucune interaction entre les molécules. Un gaz réel à basse pression peut être considéré comme un gaz parfait.

I.6 Résolution des problèmes :

Le système des quatre équations (I.2) ou (I.3), (I.6) ou (I.8), (I.9) et 11 permet de déterminer quatre inconnues si on connaît les autres paramètres ainsi que les conditions à l'amont de l'écoulement.

Les paramètres intervenant dans ce système sont $V, \rho, P, T, z, A, w_t, q, h$ et τ . En général, on suppose connues les évolutions de A, z, w_t, q et P lorsque la section se déplace. Il reste alors cinq inconnues à déterminer : V, ρ, T, h et τ , pour quatre équations. L'équation de fermeture du système est alors l'équation qui lie l'enthalpie à la pression et à la température et qui, dans le cas d'un gaz parfait, s'écrit simplement :

$$dh = C_p dT$$

Où :

$$h = C_p T + Cte \quad (\text{I.12})$$

I.7 Application des équations énergétiques à quelques cas particuliers :

I.7.1 Fluide en écoulement dans une canalisation :

Dans ce cas, $w_t = 0$.

Alors les équations (I.8) et (I.9) donnent respectivement :

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \tau_{12} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta e_{c12} + \Delta e_{p12} \quad (\text{I.14})$$

Soit, en les combinant :

$$q_{12} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \tau_{12} = \Delta h_{12} \quad (\text{I.15})$$

1.7.2 Écoulement d'un fluide non pesant dans une canalisation fixe :

Pour les écoulements de gaz, on peut pratiquement toujours négliger la variation d'énergie potentielle ($\Delta e_p \approx 0$), Alors,

On a :

$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} + \Delta e_{c12} + \tau_{12} = 0 \quad (I.16)$$

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta e_{c12} \quad (I.17)$$

1.7.3 Écoulement adiabatique d'un fluide non pesant dans une canalisation fixe :

S'il n'y a pas d'échange thermique ($q=0$), l'équation (I.17) devient :

$$\Delta h_{12} + \Delta e_{c12} = 0$$

Ou encore :

$$h + \frac{V^2}{2} = Cte \quad (I.18)$$

C'est l'équation de Zeuner.

Appliquons cette équation au cas particulier d'un fluide s'écoulant dans une canalisation placée en aval d'un réservoir de grandes dimensions montré sur la figure 3 dans lequel l'énergie cinétique peut être négligée.

Alors l'équation de Zeuner s'écrit :

$$h_0 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} \quad (I.19)$$

Soit :

$$V_1 = \sqrt{2\Delta h_{10}} = \sqrt{2|\Delta h_{01}|}$$

h_0 est appelé enthalpie d'arrêt ou enthalpie de l'état générateur de l'état 1.

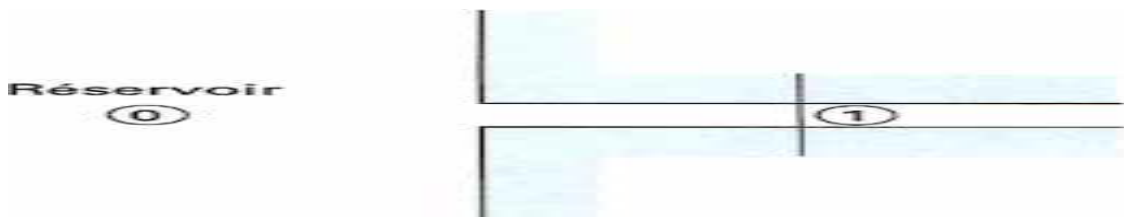


Figure 3. Écoulement d'un fluide compressible dans une canalisation alimentée par un réservoir

1.7.4 Écoulement réversible (fluide parfait) :

Un écoulement ne peut être réversible qu'en absence de viscosité, ce qui entraîne : $\tau_{12} = 0$. Alors l'équation (I.16) donne :

$$\int_1^2 \frac{dP}{\rho} = \Delta e_{c12} = 0$$

Où :

$$\frac{dP}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0 \quad (I.20)$$

I.8 Vitesse du son :

Le son est produit par de petits changements dans la pression du milieu qu'il propage. La vitesse du son correspond donc à la propagation de ces changements de pression. Imaginons un milieu fluide, tel qu'un gaz, dans lequel on observe localement la dimensionnalité de la différence de pression entre la partie droite 1 et la partie gauche 2. Les ondes sonores, comme leur nom l'indique, se déplacent à la vitesse de son V_s . Dans le mouvement relatif ondes sonores-fluide In, le fluide se déplace à la même vitesse par rapport à l'onde. La partie A des deux côtés de l'onde de pression est la même, l'équation I.3 s'écrit comme suit :

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{dV_s}{V_s} = 0 \quad (\text{I.21})$$

En supposant que l'onde de pression passe de manière réversible, il n'y a donc pas de frottement, surtout compte tenu de la valeur infinitésimale de l'épaisseur du front d'onde, l'équation (I.6) devient, en ignorant la gravité ou en supposant que l'onde se déplace horizontalement

$$V_s dV_s + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (\text{I.22})$$

La combinaison de ces deux équations [21 $V_s^2 - 22$] donne :

$$V_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (\text{I.23})$$

Compte tenu que l'on a affaire à un phénomène local rapide, on peut admettre que ce phénomène est adiabatique. Avec l'hypothèse de réversibilité, il est donc isentropique. En admettant que le fluide considéré soit un gaz parfait idéal (gaz parfait pour lequel le coefficient $\gamma = C_p/C_v$, rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants, est constant), l'équation de la transformation isentropique est :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{Cte} \quad (\text{I.24})$$

Soit :

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

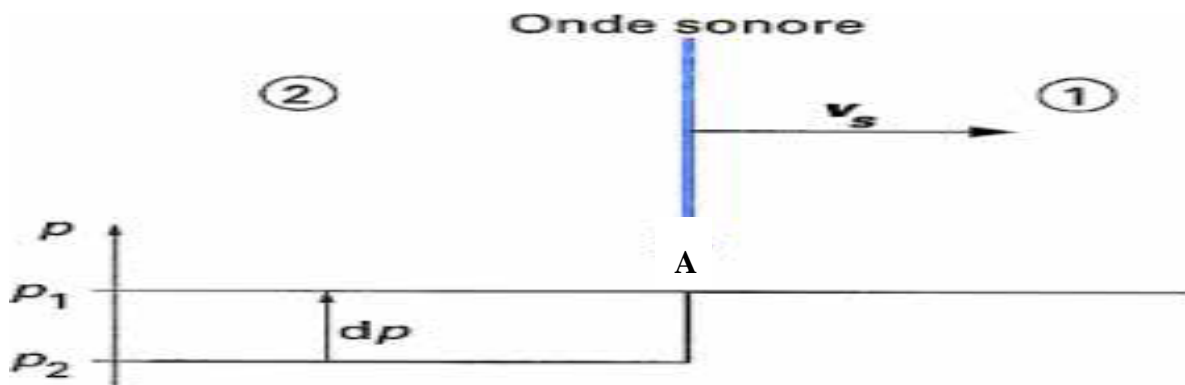


Figure 4. Propagation d'une onde sonore

Dans ce cas, la vitesse du son pour expression :

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (\text{I.25})$$

Ou, en tenant compte de l'équation 6 l'équation d'état des gaz parfaits :

$$V_s = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{I.26})$$

Si le fluide n'est pas un gaz parfait, en considérant toujours la transformation isentropique, on peut écrire, d'une manière générale :

$$V_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Or, en notant que le coefficient isentropique vaut, par définition :

$$K_s = -\frac{V}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s = \frac{\rho}{p} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Où $v = 1/\rho$ est le volume massique.

On a:

$$V_s^2 = K_s \frac{P}{\rho} \quad (\text{I.27})$$

La vitesse du son peut être reliée au coefficient de compressibilité isentropique K_s du fluide

$$K_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho K_s}$$

Soit, avec 27 :

$$V_s^2 = \frac{1}{\rho K_s} = \frac{\bar{v}}{M} \frac{1}{K_s}$$

Où

\bar{v} : Volume molaire

M : la masse molaire du fluide.

La vitesse du son est donc d'autant plus faible que la compressibilité du fluide est plus grande.

I.9.Écoulement isentropique d'un gaz parfait :

I.9.1 Étude générale de l'écoulement :

I.9.1.1 Vitesse de l'écoulement :

Soit une veine d'écoulement quelconque montré sur la figure 5, une section de référence amont 1 et une section aval 2 quelconques.

La vitesse au point aval s'obtient à partir de l'équation de Zeuner I.18 qui s'écrit :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} = -\Delta h_{12} \quad (\text{I.28})$$

Dans laquelle, compte tenu de l'équation I.12 :

$$\Delta h_{12} = C_p \Delta T_{12} = C_p (T_2 - T_1)$$

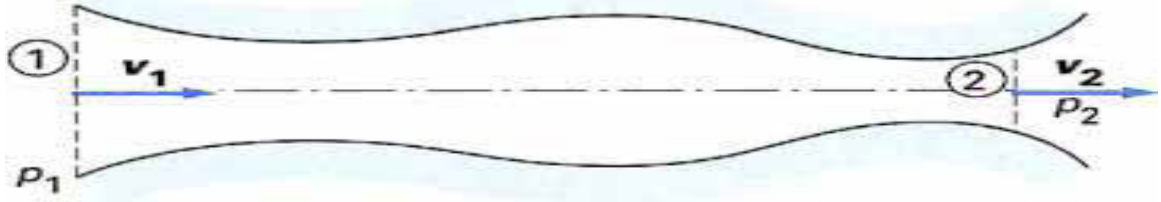


Figure 5. Écoulement d'un gaz parfait idéal dans une veine quelconque

La relation de Poisson, déduite des équations (I.11) et (I.24) s'écrit comme suit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \delta^a$$

Où

$$a = \frac{\gamma-1}{\gamma} \text{ et } \delta = \frac{P_2}{P_1} \quad (\text{I.29})$$

Dans cette équation, δ est le taux de détente. Alors :

$$\Delta h_{12} = C_p T_1 (\delta^a - 1)$$

Comme pour un gaz parfait (relation de Mayer) :

$$C_p - C_v = r \text{ et } C_p = \frac{r}{a}$$

La variation d'enthalpie a pour expression :

$$\Delta h_{12} = \frac{r}{a} T_1 (\delta^a - 1) \quad (\text{I.30})$$

On obtient alors, avec l'équation 18 l'équation de Zeuner.

L'expression suivante de la vitesse :

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2 \frac{r T_1}{a} (1 - \delta^a)} \quad (\text{I.31})$$

C'est la relation de Barré de Saint-Venant.

On remarque que, pour un gaz donné, la vitesse ne dépend que des conditions amont (vitesse et température), du taux de détente et de la nature du fluide.

I.9.1.2 État générateur. Point d'arrêt :

Lorsque la section amont a une aire infinie, la vitesse d'écoulement est nulle dans cette section. La vitesse, en une section quelconque où la pression a la valeur P , est alors égale à :

$$V = \sqrt{\frac{2rT_0}{a} (1 - \delta_0^a)} \quad (\text{I.32})$$

T_0 est la température dans la section amont où la pression est P_0 . Par définition, l'état du fluide à vitesse nulle donné par P_0 et T_0 est appelé état générateur du fluide s'écoulant

isentropiquement à la vitesse V dans une section où sa pression a la valeur P et sa température est égale à T . Le taux de détente $\delta_0 = P/P_0$ est le taux de détente générateur de l'écoulement.

Inversement, on peut déterminer les conditions génératrices d'un fluide à la température T , à la pression P et s'écoulant à la vitesse V à partir des relations d'après l'équation (I.32) et (I.29). On obtient :

$$P_0 = P \left(1 + \frac{V^2}{2c_p T} \right)^{1/a} \quad (\text{I.33})$$

$$T_0 = T \left(1 + \frac{V^2}{2c_p T} \right) = T + \frac{V^2}{2c_p} = \frac{h_0}{c_p} \quad (\text{I.34})$$

L'état générateur sert de référence dans tous les écoulements de gaz parfaits, isentropiques ou non. À ce titre, il est évidemment important. Dans le cas d'un écoulement non isentropique, cet état est un état amont hypothétique, puisqu'on l'obtient en supposant un écoulement isentropique.

L'état générateur peut être représenté sur un diagramme entropique T, s (ou h, s puisque, pour un gaz parfait, cette représentation est équivalente). La figure 6 donne une telle représentation qui permet de mettre en évidence l'énergie cinétique à partir de l'application de l'équation (I.18) l'équation de Zeuner :

$$\frac{V^2}{2} = h_0 - h \quad (\text{I.35})$$

Inversement, cette équation permet d'obtenir l'enthalpie de l'état générateur h_0 à partir des caractéristiques de l'état du fluide au point considéré :

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2} \quad (\text{I.36})$$

On obtient la masse volumique dans l'état générateur en utilisant la loi de transformation isentropique :

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{V^2}{2c_p T} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (\text{I.37})$$

Il est important de remarquer que, lorsqu'un fluide part d'un état générateur donné P_0, T_0, h_0 en évoluant de manière adiabatique, l'état générateur pour toute situation ultérieure 1 ou 2 figures 6 ne change pas si l'évolution est réversible. En effet, comme :

$$h_{01} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_{02}$$

On a, d'après l'équation 34 :

$$T_{01} = T_{02} = T_0$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation 33 et compte tenu de l'équation de Zeuner :

$$h_0 = h_1 \left(1 + \frac{V_1^2}{2C_p T_1} \right) = h_2 \left(1 + \frac{V_2^2}{2C_p T_2} \right)$$

Soit :

$$P_{01} = P_1 \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^{1/\alpha} = P_1 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{1/\alpha}$$

$$P_{02} = P_2 \left(\frac{T_0}{T_2} \right)^{1/\alpha}$$

Ou encore :

$$\frac{P_{01}}{P_{02}} = \frac{P_1}{P_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/\alpha} = 1$$

Si l'évolution est irréversible, le point 3 étant par exemple à la même pression que le point 2 la figure 6, on a, compte tenu de l'adiabatique de l'écoulement ($h_{03} = h_{01} = h_0$) :

$$T_{03} = T_3 + \frac{V_3^2}{2C_p} = T_0$$

Et :

$$P_{03} = P_3 \left(\frac{h_0}{h_3} \right)^{1/\alpha} = P_3 \left(\frac{T_0}{T_3} \right)^{1/\alpha} = P_2 \left(\frac{T_0}{T_3} \right)^{1/\alpha} = P_{03} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{1/\alpha}$$

Ainsi, l'état générateur du point 3 est tel que : T_0 , h_0 et $P_{03} \neq P_{02}$.

On peut énoncer le résultat suivant :

Dans un écoulement adiabatique quelconque faisant passer le fluide d'un état 1 à un état 3, les températures génératrices sont constantes $T_{01} = T_{03}$ alors que les pressions génératrices évoluent $P_{01} \neq P_{03}$

Les relations précédentes peuvent être données en fonction du nombre de Mach Ma de l'écoulement où $Ma = V/V_s$. En effet, on a :

$$V_s^2 = \gamma r T = (\gamma - 1) C_p T$$

Où

$$C_p T = \frac{V_s^2}{\gamma - 1}$$

Ainsi, les conditions génératrices s'expriment par :

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right)^{\gamma/\gamma-1} \quad (\text{I.38})$$

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2 \right) \quad (\text{I.39})$$

Ces expressions montrent que, dans les écoulements subsoniques pour lesquels $V < V_s$ où

$Ma < 1$, les conditions génératrices sont proches de l'état du fluide en écoulement, du moins lorsque Ma est relativement faible, inférieur à 0,3 par exemple.

Les conditions génératrices correspondent également aux conditions que l'on obtient au point d'arrêt d'un écoulement. Considérons un corps quelconque placé dans un écoulement infini comme montré sur la figure 7 Il existe une ligne de courant particulière qui doit se séparer, au point A, en deux lignes passant de part et d'autre de l'obstacle. Au point A, dit point d'arrêt, la vitesse ne peut alors qu'être nulle.

Si on admet qu'entre un point quelconque M et le point A l'évolution est isentropique, on obtient par un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus :

$$P_{Ai} = P_0; T_A = T_0$$

L'étude de l'évolution d'un fluide entre un point de vitesse quelconque V et un point d'arrêt montre que la compressibilité du gaz dans un écoulement isentropique peut être négligée tant que le nombre de Mach de l'écoulement est inférieur à 0,5 environ.

Dans le tableau 1, sont donnés les rapports de pression P_{Ai}/P en fonction du nombre de Mach en tenant compte de la compressibilité du gaz (l'équation 37) d'une part,

En supposant le gaz incompressible d'autre part. Dans ce dernier cas, on peut appliquer l'équation de Bernoulli entre M et A [5] et on obtient :

$$P_{A inc} = P + \rho \frac{v^2}{2} = p \left(1 + \frac{v^2}{2\gamma T} \right) \tag{I.40}$$

$$P_{A inc} = P \left(1 + \frac{\gamma}{2} Ma^2 \right) \tag{I.41}$$

Soit :

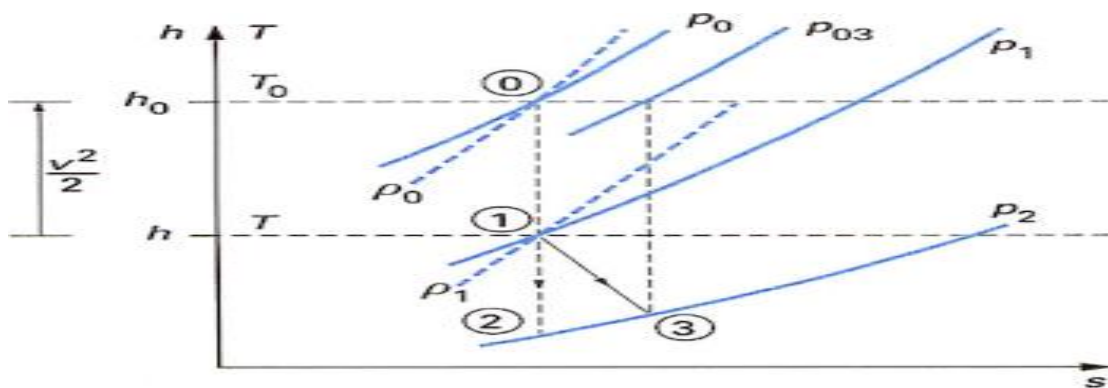


Figure 6. Schématisation de l'état générateur d'un gaz parfait en diagramme (T, s ou h, s)

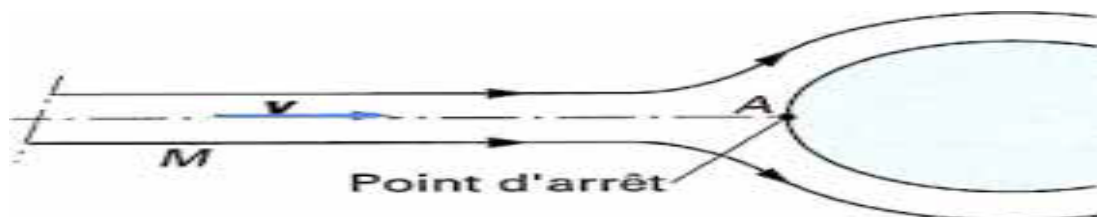


Figure 7. Écoulement avec point d'arrêt

L'observation du tableau 1 montre que la compressibilité du fluide (air, dans ce cas) entraîne une différence de 1 % seulement à $Ma = 0,5$ et de 11 % environ à $Ma = 1$. Ce résultat justifie l'hypothèse faite quant à l'incompressibilité du fluide dans les écoulements de fluides compressibles tant que l'écoulement reste nettement subsonique ($Ma \leq 0,5$ environ).

Enfin, les évolutions de la pression et de la température, à partir d'un état générateur P_0, T_0 , donné, peuvent être tracées (figure 8), à partir des équations (I.37) et (I.38), en fonction du nombre de Mach local de l'écoulement isentropique.

I.9.1.3. Vitesse de détente dans le vide :

Soit un état générateur P_0, T_0 et une section dans laquelle la pression P est nul (vide). La vitesse, donnée par la relation (l'équation I.32), est alors maximale. Elle a pour expression :

$$V_{\text{Max}} = \sqrt{\frac{2\gamma T_0}{\alpha}} = \sqrt{2C_p T_0} \quad (\text{I.42})$$

Cette vitesse est indépendante de la pression, elle ne dépend que de la température de l'état générateur et de la nature du fluide.

On peut comparer cette vitesse à la vitesse du son dans l'état générateur. On obtient :

$$V_{\text{Max}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} V_{s0} \quad (\text{I.43})$$

I.9.2 Particularités de l'écoulement :

L'ensemble des équations (I.2), (I.11), (I.12), (I.18) et (I.24) applicables à l'écoulement isentropique monodimensionnel d'un gaz parfait idéal fait apparaître que la section droite A doit suivre une évolution particulière en fonction de la pression. Cet impératif constitue la particularité principale de ce type d'écoulement.

I.9.2.1. Évolution de la section droite en fonction de la pression :

Dans la suite de cette étude la référence amont sera prise égale à l'état générateur, ce qui équivaut à prendre le point de référence amont dans un réservoir de grandes dimensions ($A_0 = \infty$).

Tableau 1. Taux de compression au point d'arrêt d'un écoulement en fonction du nombre de Mach de l'écoulement

Ma	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$P_{A1}/P(1)$	1,00700	1,0280	1,0630	1,112	1,175	1,252	1,443	1,70
$P_{Ainc}/P(2)$	1,00701	1,0283	1,0644	1,117	1,186	1,276	1,524	1,89

(1) En tenant compte de la compressibilité du fluide (air)

(2) En faisant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide.

L'équation de continuité permet d'affirmer que, le débit-massique étant constant dans l'écoulement, la section de l'écoulement doit varier comme $1/\rho V$. On étudie alors séparément la variation de ρ , puis celle de V avec la pression.

I.9.2.2. Évolution de la masse volumique avec la pression :

L'équation 24 de l'évolution isentropique permet d'écrire :

$$\rho = \rho_0 \delta_0^{1/\gamma} \quad (\text{I.44})$$

Avec

$$\delta_0 = P/P_0$$

Ainsi :

— pour $P = P_0$, soit $\delta_0 = 1$, on a : $\rho = \rho_0$;

— pour $P = 0$, soit $\delta_0 = 0$, on a : $\rho = 0$.

La dérivée $\frac{d\rho}{d\delta_0} = \frac{\rho_0}{\gamma} \delta_0^{-\alpha}$ étant une fonction continue décroissante de ∞ , pour $\delta_0 = 0$, à $\frac{\rho_0}{\gamma}$, pour $\delta_0 = 1$, la courbe $\rho(P)$ ou $\frac{\rho}{\rho_0}(\delta_0)$ à l'allure représentée sur la figure 9.

I.9.2.3. Évolution de la vitesse avec la pression :

L'équation de Barré de Saint-Venant (I.32) s'écrit, compte tenu de l'expression de la vitesse maximale de détente dans le vide (l'équation (I.41)) :

$$V = V_{\max} \sqrt{1 - \delta_0^\alpha} \quad (\text{I.45})$$

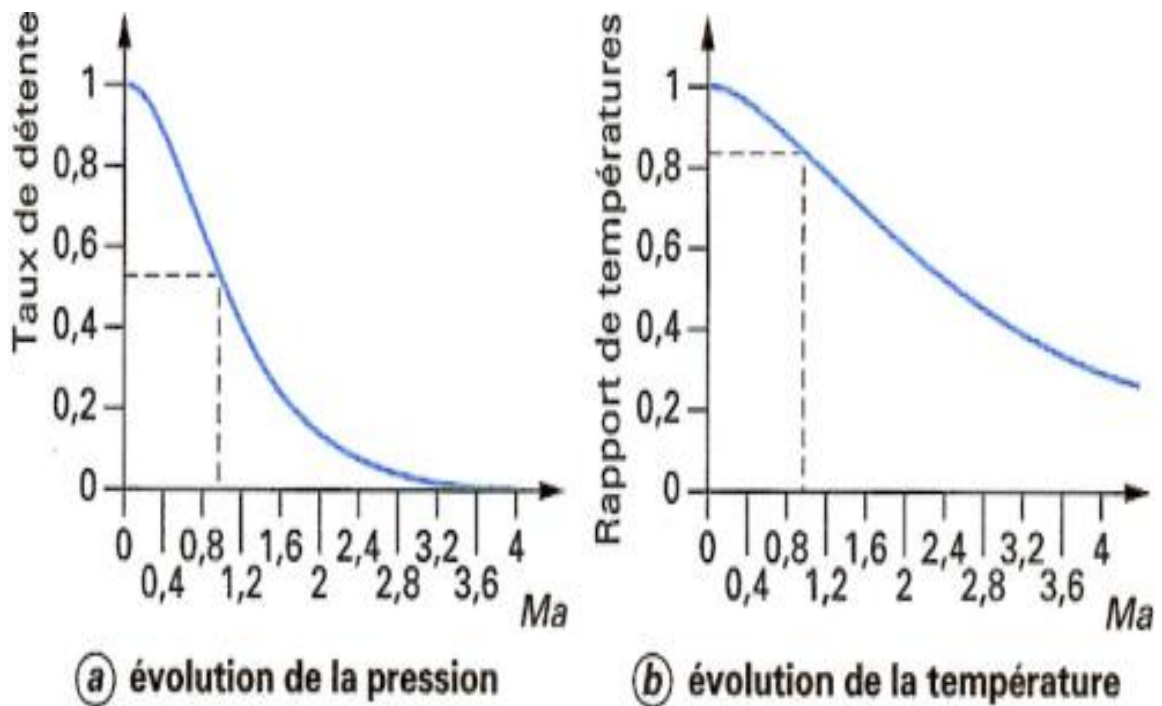


Figure 8. Évolution de la pression et de la température dans un écoulement isentropique d'air en fonction du nombre de Mach

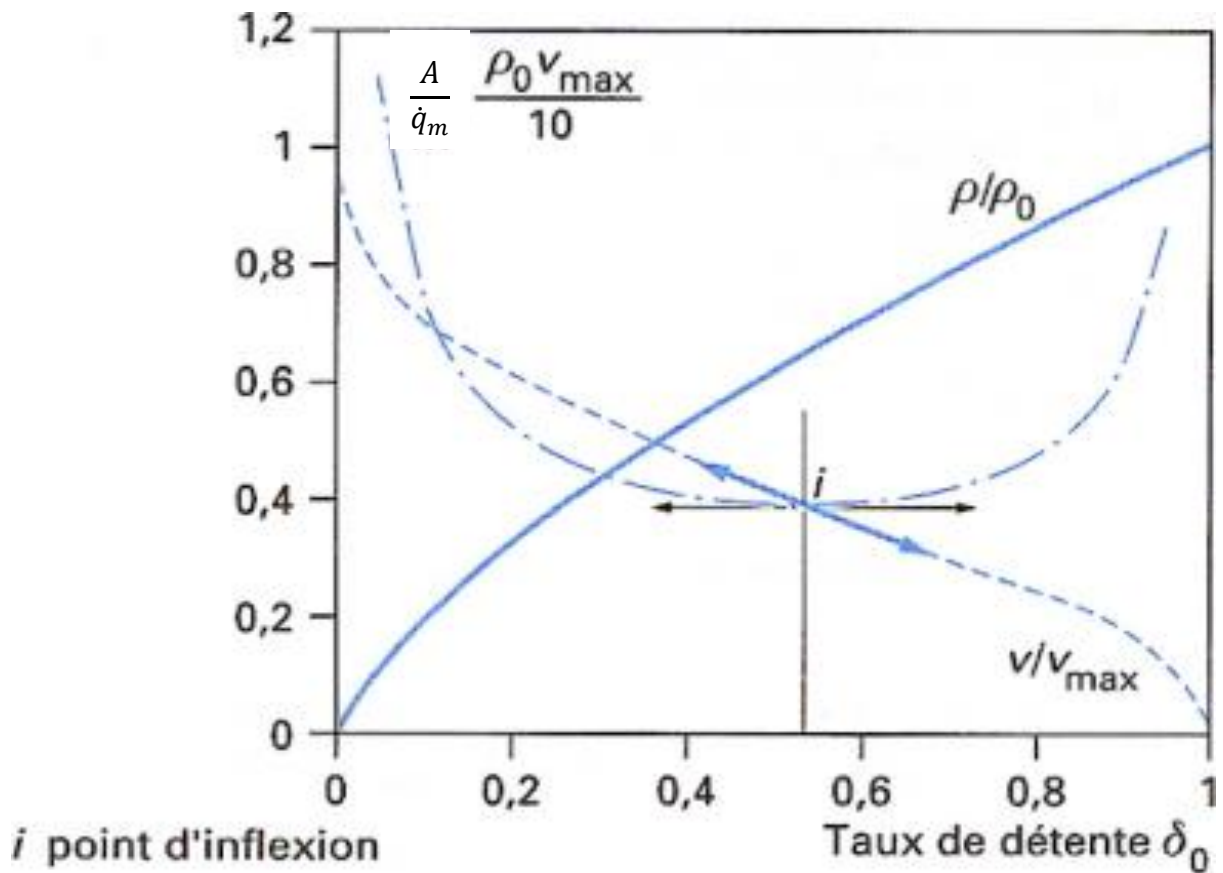


Figure 9.Évolution des paramètres V, ρ et A en fonction de la pression (ou du taux de détente) pour un écoulement isentropique de gaz parfait

Ainsi :

— pour $P = P_0$ ($\delta_0 = 1$), on a : $V = 0$;

— pour $P = 0$ ($\delta_0 = 0$), on a : $V = V_{\max}$.

La dérivée de cette fonction s'écrit :

$$\frac{dV}{d\delta_0} = -\frac{\alpha}{2} V_{\max} \frac{\delta_0^{-1/\gamma}}{\sqrt{1-\delta_0^\alpha}} \tag{I.46}$$

L'étude de cette dérivée donne :

— pour $P = P_0$ ($\delta_0 = 1$) : $\frac{dV}{d\delta_0} \rightarrow -\infty$;

— pour $P = 0$ ($\delta_0 = 0$) : $\frac{dV}{d\delta_0} \rightarrow -\infty$.

Ce résultat implique la présence d'un maximum dans la dérivée, donc d'un point d'inflexion i dans la fonction $V(\delta_0)$.

I.9.2.4. Évolution de la section avec la pression :

Le produit des fonctions $\rho(\delta_0)$ et $V(\delta_0)$ donne une fonction passant par 0 pour $\delta_0 = 0$ et $\delta_0 = 1$ et donc par un maximum pour une valeur de δ_0 comprise entre 0 et 1.

L'inverse de cette fonction qui, à une constante près (égale à l'inverse du débit), représente l'évolution de la section en fonction de la pression (ou du taux de détente) :

$$\frac{1}{\rho V} = \frac{A}{\dot{q}_m} = f(P) = f'(\delta_0) \quad (\text{I.47})$$

Passé par un minimum et tend vers l'infini pour $\delta_0 = P = 0$ et pour $\delta_0 = 1$ soit $P = P_0$.

Cette fonction a pour expression [combinaison de I.43 et I.44] :

$$\frac{A}{\dot{q}_m} = \frac{1}{\rho_0 V_{max}} \frac{\delta_0^{-1/\gamma}}{\sqrt{1-\delta_0^\alpha}} \quad (\text{I.48})$$

On constate que, à une constante près, cette fonction a la même expression que celle de la dérivée de la vitesse [équation I.45]. On peut alors affirmer que le minimum de la fonction $\frac{A}{\dot{q}_m}$ correspond au point d'inflexion i de la courbe $V(P)$.

En définitive, l'étude de l'évolution d' A en fonction de P permet d'énoncer le résultat suivant

Lorsqu'un gaz parfait idéal s'écoule de façon isentropique d'un réservoir de grandes dimensions (vitesse nulle) vers un réservoir où la pression est nulle, la section du tube de courant (ou de la veine d'écoulement) varie d'une valeur infinie à l'amont à une valeur infinie à l'aval en passant par une valeur minimale appelée col. La partie située à l'amont du col est le convergent, celle qui se trouve à l'aval, le divergent (figure 10). Inversement, on peut affirmer que, si un gaz s'écoule entre deux réservoirs dont l'un est à une pression maintenue nulle, il faut que la veine d'écoulement présente un col pour que l'écoulement adiabatique soit réversible.

La position du col, non définie par cette étude, dépend de la variation de p avec s (ou x dans le cas d'une veine à ligne moyenne rectiligne) et est située au point $s = s_c$ tel qu'en ce point la pression soit $P = P_c = P_i$. Cette valeur de la pression sera déterminée plus loin.

On peut comparer ce résultat à celui obtenu en écoulement d'un fluide incompressible, pour lequel :

$$A = \frac{\dot{q}_v}{V}$$

Où le débit-volume est constant puisque $\rho = Cte$. Selon la relation de Bernoulli [5] de l'écoulement d'un fluide parfait (c'est-à-dire non visqueux afin d'admettre la réversibilité), on peut écrire :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho}$$

Soit :

$$V = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2P_0}{\rho}} \sqrt{1 - \delta_0}$$

Ainsi, on a :

$$\frac{A}{\dot{q}_m} = \frac{1}{\sqrt{2\rho P_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta_0}} \quad (\text{I.49})$$

C'est une fonction croissante, représentée sur la figure 10. La différence entre ces deux cas est évidemment due à la compressibilité du fluide. En amont du col, pour un fluide compressible, l'augmentation de la vitesse est supérieure à l'augmentation du volume massique. Après le col, c'est l'inverse. Ainsi, malgré l'augmentation de la vitesse, la section doit augmenter.

I.9.2.5. Vitesse au col :

La combinaison de l'équation différentielle de continuité :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

Et de l'équation différentielle de la transformation isentropique (I.24) :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} \quad (\text{I.50})$$

Conduit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{I.51})$$

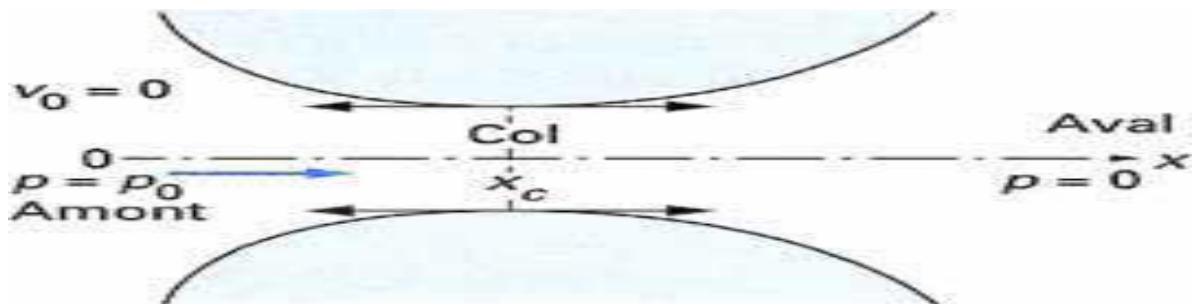


Figure 10.Évolution de la section d'un écoulement isentropique en fonction de sa position allant d'un réservoir amont à un réservoir aval à pression nulle

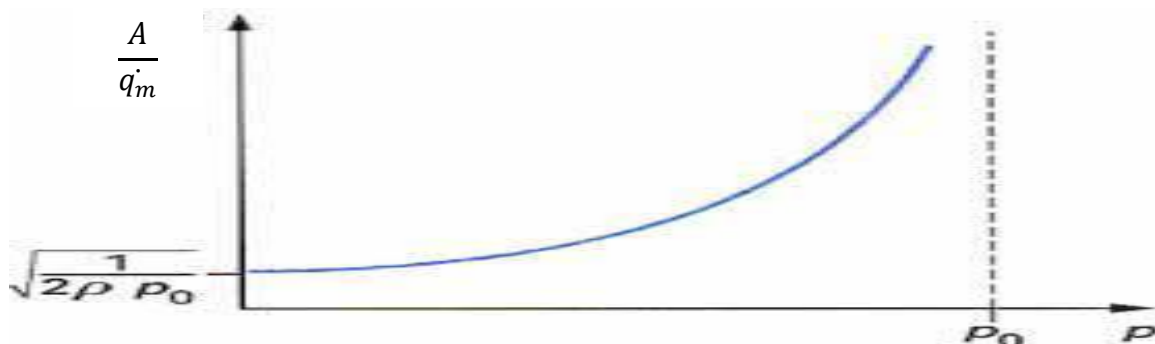


Figure 11.Évolution de la section d'un écoulement de fluide incompressible

Par ailleurs, en considérant la réversibilité de l'écoulement, l'équation du bilan de la quantité de mouvement (I.6) s'écrit :

$$dp = -\rho V dV \quad (I.52)$$

Ainsi, l'équation I.50 devient :

$$\frac{dV}{V} \left(1 - \frac{V^2 \rho}{\gamma P} \right) + \frac{dA}{A} = 0$$

En introduisant la vitesse du son $V_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$, on obtient :

$$\frac{dA}{A} = (Ma^2 - 1) \frac{dV}{V} \quad (I.53)$$

C'est la relation de Huguenot qui permet de faire l'étude de la variation de la vitesse en fonction de la section droite de la veine et de la situation au col de cet écoulement où $dA = 0$. Deux cas sont à considérer.

Variation nulle de la vitesse au col : $dV = 0$

Si dans le *convergent* où $dA < 0$, la vitesse augmente ($dV > 0$), la relation de Huguenot indique que le nombre de Mach doit être inférieur à l'unité : la vitesse est subsonique. Dans le *divergent*, la vitesse diminue ($dV < 0$ puisque sa dérivée en fonction de s s'annule au col) et on a encore $Ma < 1$: l'écoulement est subsonique. Alors, l'écoulement est subsonique dans toute la veine. Sur les courbes $\frac{A}{q_m} = f(\delta_0)$ et $V(\delta_0)$, les points évoluent selon les chemins à (figure 12).

Si, dans le *convergent*, la vitesse diminue, il faut que $Ma > 1$: c'est l'écoulement supersonique. Dans le *divergent*, la vitesse augmente et on doit encore avoir $Ma > 1$, soit un écoulement supersonique. Dans ce cas, l'écoulement est supersonique dans toute l'aveine d'écoulement. Sur les courbes $\frac{A}{q_m} = f(\delta_0)$ et $V(\delta_0)$, les points évoluent selon les chemins b (figure 12).

Croissance de la vitesse au col : $dV \neq 0$

Pour avoir $dV \neq 0$ au col d'une veine d'écoulement ($da = 0$), le nombre de Mach doit être égal à l'unité. L'écoulement est alors sonique au col et, si dans le *convergent* la vitesse augmente, le nombre de Mach est inférieur à 1 et l'écoulement est subsonique ; dans le *divergent*, la vitesse continue à augmenter puisque $dV \neq 0$ au col, ce qui entraîne $Ma > 1$ et indique que l'écoulement est supersonique. Les points caractéristiques de l'évolution de l'écoulement suivent les courbes $\frac{A}{q_m} = f(\delta_0)$ et $V(\delta_0)$ dans leur intégralité et dans un sens ou dans l'autre (chemin c).

La vitesse au col d'un écoulement isentropique peut être subsonique ou sonique. Lorsque la vitesse au col atteint celle du son, le col est le lieu de transition entre un écoulement subsonique et supersonique. Si la vitesse du son n'est pas atteinte au col, le régime d'écoulement est le même de part et d'autre du col

La relation entre la vitesse et l'évolution de la section peut être déduite de la figure 9 ou de la figure 12. Le cas de croissance de vitesse au col correspond au cas où le col géométrique de l'écoulement coïncide avec le minimum de la courbe $\frac{A}{q_m}$ puisque, pour la valeur p_i de la pression, on a $dV \neq 0$. Ainsi, la vitesse v_i correspond à la vitesse du son :

$$V_i = V_{si} = \sqrt{\gamma P_i / \rho_i} \quad (\text{I.54})$$

On obtient le cas à en notant que le col de la veine a une variation nulle d' A en fonction de s et non pas de P . On peut alors très bien imaginer, par exemple, que, la pression P diminuant en fonction de s à partir de la valeur P_0 , la section diminue avec s (convergent) puis admette que P passe par un minimum P_1 avant d'avoir atteint la valeur P_i . L'augmentation de pression exige alors une augmentation d' A correspondant au divergent. Au cours de cette évolution en fonction de s , la courbe $V(P)$ indique que la vitesse augmente jusqu'à $P = P_1$, puis diminue lorsque P augmente à nouveau. Dans ce cas V reste toujours inférieur à V_i , ce qui correspond à un écoulement subsonique dans toute la veine.

I.9.2.6. Taux de détente au col capable de la vitesse du son :

Le taux de détente au col permettant d'obtenir la vitesse du son au col est noté par :

$$\delta_{0i} = \frac{P_i}{P_0} \quad (\text{I.55})$$

Pour cette valeur, on a simultanément :

$$\frac{dA}{ds} = 0 \text{ et } \frac{dA}{dP} = 0$$

Ce taux de détente δ_{0i} , appelé également taux de détente critique, se calcule à partir de la relation de Barré de Saint-Venant (I.31) dans laquelle, la vitesse V est à remplacer par la vitesse du son au col $V_i = V_{si}$. On obtient :

$$V_{si}^2 = \frac{2rT_0}{\alpha} (1 - \delta_{0i}^\alpha) = \gamma r T_i$$

Soit :

$$\frac{T_i}{T_0} = \frac{2}{\gamma - 1} (1 - \delta_{0i}^\alpha)$$

En utilisant la relation de Poisson (29), cette équation devient :

$$\delta_{0i} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma + 1}} \quad (\text{I.56})$$

Ce taux de détente ne dépend que de la nature du fluide :

Fluide	γ	δ_{0i}
-aero gaz diatomiques.....	1,405	0,53
-vapeur d'eau sèche ou CO ₂ ...	1,32	0,542
-vapeur d'eau saturée.....	1,135	0,577

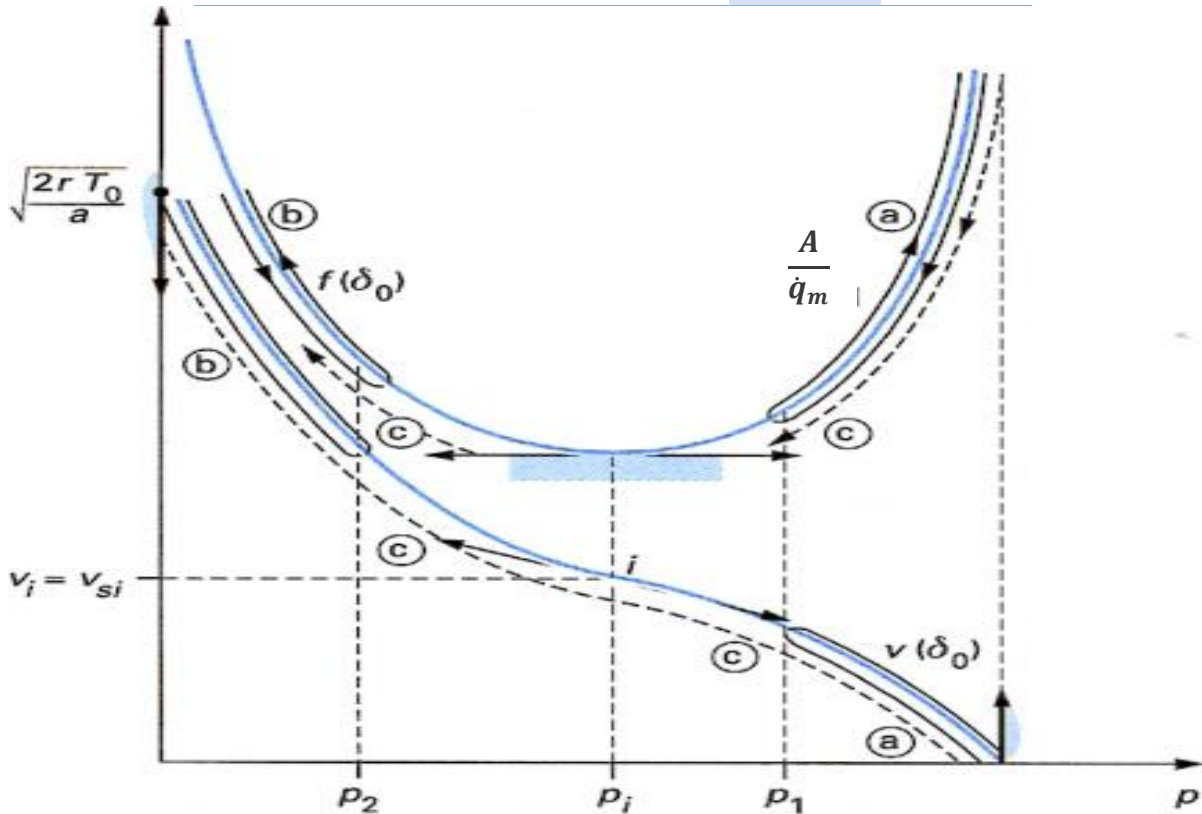


Figure 12.Évolution de l'écoulement dans une veine convergente-divergente

La vitesse du son au col V_{si} peut s'exprimer en fonction de la température de l'état générateur. En effet, en reprenant la relation de Barré de Saint-Venant et l'expression de δ_{0i} , on peut écrire :

$$V_{si}^2 = \frac{2}{\alpha} rT_0 \left[1 - \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\alpha\gamma}{\gamma-1}} \right] = \frac{2}{\alpha} rT_0 \left(1 - \frac{2}{\gamma + 1} \right)$$

On obtient alors :

$$V_i = V_{si} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} rT_0} \tag{I.57}$$

Et en introduisant la vitesse du son dans l'état générateur V_{s0} :

$$V_{si} = V_{s0} \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} \tag{I.58}$$

La vitesse au col d'un écoulement, donnée par les équations (I.53), (I.56) et (I.57) est encore appelée vitesse du son critique. On la note par $V_s^* = V_{si}$.

I.9.2.7. Température du fluide en écoulement sonique :

La température du fluide au col d'un écoulement isentropique en régime sonique s'obtient à partir de la relation de Poisson (I.29) :

$$\frac{T_i}{T_0} = (\delta_{i0})^\alpha$$

Soit :

$$\frac{T_i}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} \quad (\text{I.59})$$

I.9.2.8. Équation du débit :

Le débit est donné par l'équation de continuité (I.2) dans laquelle on remplace :

- ρ par sa valeur tirée de l'expression isentropique (I.24) :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \Rightarrow \rho = \rho_0 \delta_0^{1/\gamma}$$

- V par l'expression (I.31) de Barré de Saint-Venant.

Alors :

$$q_m = \rho_0 A \sqrt{\frac{2rT_0}{\alpha}} \delta_0^{1/\gamma} \sqrt{1 - \delta_0^\alpha} \quad (\text{I.60})$$

Pour une section A donnée, on peut écrire :

$$q_m = KY \quad (\text{I.61})$$

Où :

$$K = \rho_0 A V_{max}$$

$$Y = \delta_0^{1/\gamma} \sqrt{1 - \delta_0^\alpha} \quad (\text{I.62})$$

La fonction $Y(\delta_0)$ correspond, à une constante près, à la fonction $\rho V = f(\delta_0)$. Ainsi, la valeur qui annule la dérivée de Y , annule également celle de ρV et le maximum de Y (fonction qui s'annule pour $\delta_0 = 0$ et $\delta_0 = 1$) correspond au minimum de la fonction $\frac{A}{q_m} = f(\delta_0)$ (figure 13).

Il a lieu pour $\delta_0 = \delta_{i0}$.

On constate que, sauf au maximum de la courbe, une même valeur de Y peut être obtenue pour deux valeurs de δ_0 . Cette particularité sera commentée plus loin. On verra, en particulier, que pour une section donnée, l'ensemble de la courbe ne peut pas être décrit.

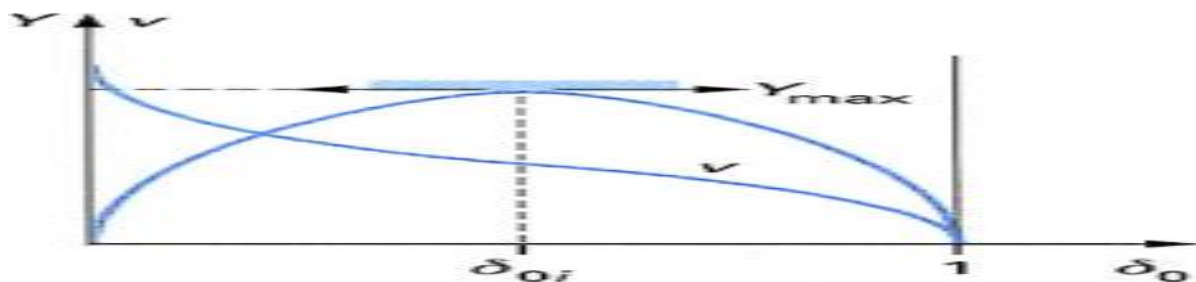
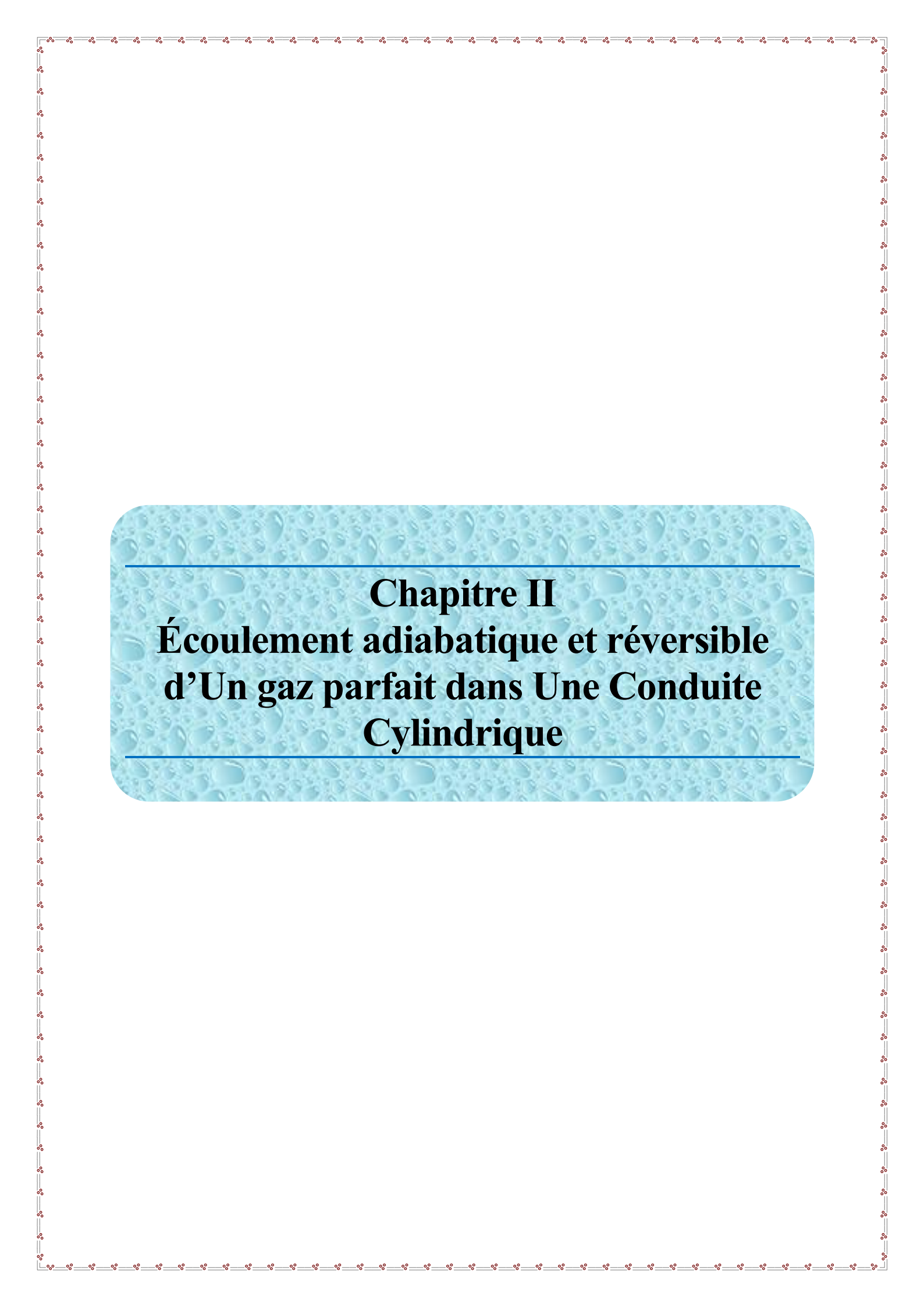


Figure 13. Évolution théorique du débit en fonction de la pression pour une section donnée



Chapitre II
Écoulement adiabatique et réversible
d'Un gaz parfait dans Une Conduite
Cylindrique

II.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va estimer deux types d'écoulements sont définies comme suit :

Écoulement adiabatique qui ne respecte pas l'évolution de la section A d'un écoulement isentropique, est essentiellement irréversible. Il est extrêmement fréquent en pratique et est appelé écoulement de Fanno.

Écoulement réversible, appelé écoulement de Rayleigh, qui a lieu à $A = Cte$ en respectant la réversibilité, ne peut se développer qu'avec un échange thermique q contrôlé. Cette nécessité le rend peu fréquent en pratique.

II.2 Écoulement adiabatique :

II.2.1 Équations de l'écoulement de Fanno :

Les équations générales, appliquées à ce cas particulier, s'écrivent comme suit.

➤ Continuité :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \frac{\dot{q}_m}{A} = \dot{m} = Cte \quad (\text{II.1})$$

Où \dot{m} est le débit-masse par unité de surface encore appelé vitesse massique ou densité de flux massique c'est une constante puisque $\dot{q}_{m1} = \dot{q}_{m2}$ et $A_1 = A_2$. Cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{II.2})$$

➤ Bilan de quantité de mouvement :

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = -fds \quad (\text{II.3})$$

➤ Bilan de l'énergie qui devient l'équation de Zeuner :

$$dh + VdV = 0 \quad (\text{II.4})$$

Equation d'état du fluide :

$$dh = C_p dT \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (\text{II.6})$$

II.2.2 Évolution du fluide en diagramme entropique :

L'expression de la variation d'entropie d'un gaz parfait idéal est donnée par [6] :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{p}{p_1} \quad (\text{II.7})$$

L'indice 1 est relatif à une section de référence amont. En combinant les équations d'état et l'équation de Zeuner et l'équation de continuité on peut écrire successivement :

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\rho T}{\rho_1 T_1} = \frac{V_1 T}{V T_1}$$

$$\frac{v^2 - v_1^2}{2} = h_1 - h = C_p (T_1 - T) \quad (\text{II.8})$$

Soit :

$$\frac{v}{v_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{v_1^2} (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (\text{II.9})$$

Ou encore, en notant que :

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1}$$

$$\frac{v}{v_1} = \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right]^{1/2} \quad (\text{II.10})$$

En combinant les équations II.7, II.8, II.10 et la relation de Mayer pour les gaz parfaits, on obtient :

$$s - s_1 = C_v \ln \frac{T}{T_1} + \frac{r}{2} \ln \left[1 + \frac{2C_p}{\dot{m}^2} \rho_1^2 (T_1 - T) \right] \quad (\text{II.11})$$

C'est l'équation de la courbe entropique $s(T)$

La figure II.14 représente de telles courbes caractérisant l'évolution du fluide en écoulement de Fanno pour diverses valeurs de la densité de flux massique et une température génératrice $T_0 = T_{01}$ donnée.

Exagère cette température génératrice, constante pour tout l'écoulement ont été portées, sur cette figure, l'enthalpie génératrice de tout l'écoulement $h_{01} = h_0$ et la pression génératrice P_{01} du point 1. On rappelle que, l'écoulement étant irréversible, les pressions génératrices des divers points de l'écoulement évoluent avec le point considéré.

La famille de courbes de la figure 1 peut être tracée à partir des considérations suivantes. La température génératrice étant fixée, il existe un lien entre la température et la pression de référence 1 pour chaque valeur de la vitesse massique. Cette relation s'obtient en combinant les équations de Zeuner, l'équation d'état et l'équation de conservation de la masse) :

$$T_0 = T_1 + \frac{r^2}{2C_p} \frac{\dot{m}^2}{\rho_1^2} T_1^2$$

Soit :

$$T_1 = \frac{C_p \rho_1^2}{r^2 \dot{m}^2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{r^2 \dot{m}^2}{C_p \rho_1^2} T_0} - 1 \right) \quad (\text{II.12})$$

C'est cette température qui doit être introduite dans la relation (II.11), en prenant soin, pour tout changement de \dot{m} prendre une nouvelle valeur de s_1 correspondant, à la pression de

référence P_1 (dont la valeur, au départ du tracé n'a aucune importance, mais qui sera ensuite conservée constante pour l'ensemble du tracé) et à la nouvelle température T_1 .

Notons enfin que, selon la relation (II.12), à T_1 constante, si P_1 augmente, \dot{m} doit augmenter. Ainsi, les courbes à forte valeur de \dot{m} sont situées dans la partie gauche du diagramme.

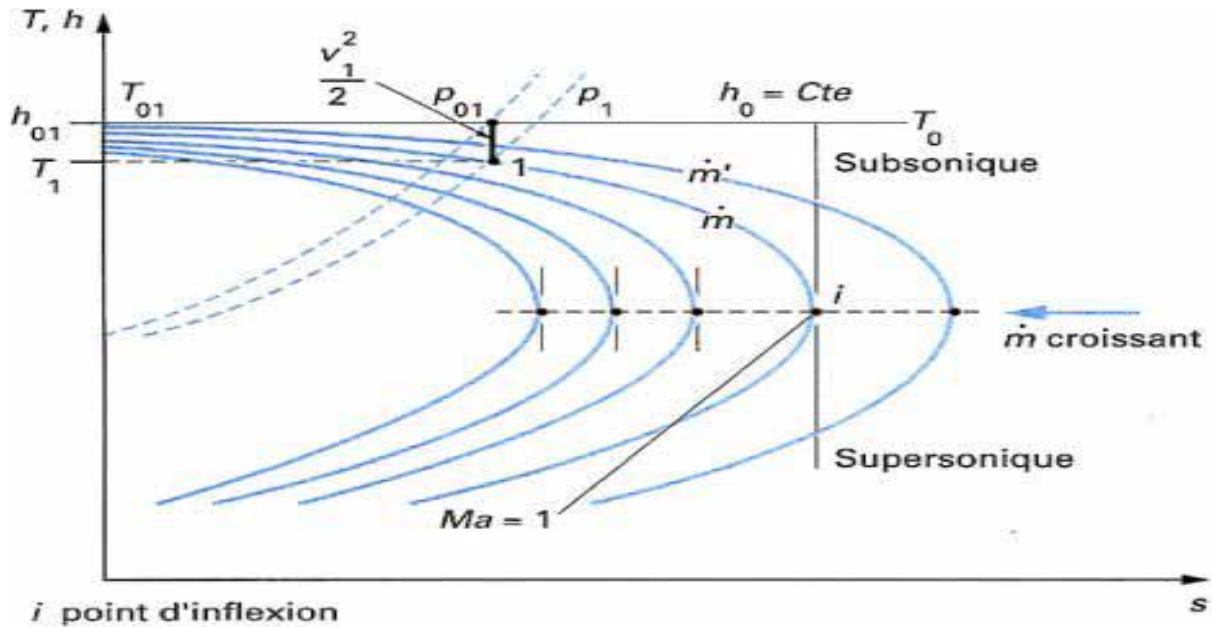


Figure 14.Évolution du fluide en écoulement de Fanno pour une température génératrice donnée

II.2.3 Nature de l'écoulement :

L'équation différentielle de l'entropie s'écrit :

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II.13})$$

Compte tenu de l'équation de continuité (II.2), de l'équation de Zeuner (II.4) et de l'équation d'état (II.5), devient:

$$ds = \left(\frac{c_v}{T} - \frac{r c_p}{v^2} \right) dt \quad (\text{II.14})$$

En exprimant C_p et C_v en fonction de r et de γ par application de la relation de Mayer :

$$C_v = \frac{r}{(\gamma-1)} \quad \text{et} \quad C_p = \frac{r\gamma}{(\gamma-1)}$$

L'équation(II.14)s'écrit :

$$ds = \frac{r}{(\gamma-1)} \left(\frac{1}{T} - \frac{r\gamma}{v^2} \right) dT \quad (\text{II.15})$$

L'introduction de la vitesse du son permet de remplacer la constante du gaz r par l'expression:

$$r = \frac{V_s^2}{\gamma T}$$

Alors, la pente de la courbe d'évolution de l'écoulement de Fanno, représentée dans le diagramme (T,s), s'écrit :

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{T^2 \gamma(\gamma-1)}{v^2 (1-Ma^2)} Ma^4 \quad (II.16)$$

Ainsi, pour $Ma=1$, on a $\frac{dT}{ds} = \infty$, ce qui correspond à une tangente verticale aux courbes de la figure 14

_ Si $\frac{dT}{ds} < 0 \Rightarrow Ma < 1$, l'écoulement est subsonique.

_ Si $\frac{dT}{ds} > 0 \Rightarrow Ma > 1$, l'écoulement est supersonique.

Pour diverses valeurs de la vitesse massique m' , le point à tangente verticale ($Ma= 1$) est situé à la même valeur de la température ou de l'enthalpie (figure14).

Comme lors d'une transformation adiabatique irréversible, l'entropie ne peut qu'augmenter, l'évolution du fluide en écoulement, donc à $m' = Cte$, a nécessairement lieu dans le sens indiqué par les flèches sur (lafigure15) S'il est subsonique au départ, il ne peut que rester subsonique, la vitesse augmentant dans le sens de l'écoulement. Si l'écoulement est supersonique, il le restera également, la vitesse diminuant dans le sens de l'écoulement.

Les pertes de charge de l'écoulement sont déduites de la relation (II.3)

$$d\tau = -VdV - \frac{dp}{\rho} \quad (II.17)$$

Par ailleurs, l'étude semi-empirique de l'écoulement d'un fluide dans une canalisation montre que les pertes de charge J peuvent s'exprimer par :

$$J = \frac{\lambda U^2}{D} \frac{\ell}{2g}$$

Avec :

λ : Coefficient de pertes de charge,

D : Diamètre de la canalisation,

ℓ : la Longueur,

U : La vitesse moyenne débitante.

En écoulement monodimensionnel, ces pertes de charge peuvent s'écrire :

$$d\tau = \frac{\lambda v^2}{D} ds \quad (II.18)$$

Pour simplifier le raisonnement on néglige le terme relatif à l'énergie cinématique dans l'équation (II.17) .

La combinaison de l'équation (II.17) et (II.18), compte tenu de la relation de continuité (II.1), donne :

$$dp = -\frac{\lambda}{2D} \frac{\dot{m}^2}{\rho} ds \quad (\text{II.19})$$

En prenant une valeur moyenne de ρ sur la longueur ℓ séparant les deux sections considérées ; on a :

$$\Delta p_{12} = -\frac{\lambda}{2D} \frac{\dot{m}^2}{\bar{\rho}} \ell \quad (\text{II.20})$$

$$\dot{m} = \sqrt{-\frac{2\bar{\rho}D}{\lambda \ell} \Delta p_{12}} \quad (\text{II.21})$$

Compte tenu de l'hypothèse simplificatrice relative à l'énergie cinétique dans l'équation (II.17), cette relation n'est qu'approchée, l'erreur devenant de plus en plus importante au fur et à mesure que la vitesse se rapproche de la vitesse du son. L'équation (II.21) permet cependant de faire les constatations suivantes.

- Si on augmente la longueur ℓ sans changer la section de la canalisation, ni la pression P_2 , pour un état générateur 01 constant :
- La vitesse massique diminue ; elle devient par exemple, les points 1 et 2 passant respectivement en 1' et 2' (figure 15) ;
- Le débit-masse \dot{q}_m et la vitesse V diminuent.
- Si on diminue la section A (ou le diamètre D) de la canalisation sans changer ni ℓ , ni P_2 , l'évolution est de même nature que précédemment.
- Il en est de même si la rugosité de la paroi augmente (augmentation de λ).
- Si on diminue la pression P_2 en gardant les autres paramètres constants :
- La vitesse massique augmente, la courbe de Fanno évolue sur la gauche, les points caractérisant l'état du fluide dans les sections 1 et 2 deviennent 1'' et 2'' (figure 15) ;
- Le débit-masse \dot{m} augmente et la vitesse augmente également.
- Si dans le dernier cas étudié la pression P_2 baisse suffisamment, l'évolution de la courbe de Fanno et celle de l'isobare peuvent atteindre la position m''' de la (figure 15) L'écoulement est alors sonique dans la section 2. Toute diminution de la pression n'a alors plus d'incidence sur l'écoulement puisqu'une augmentation du débit signifierait, sur la nouvelle courbe de Fanno, une évolution du point 2 vers les entropies décroissantes à partir du point à tangente verticale ce qui est thermodynamiquement impossible (puisque $\delta q = 0$). Il y a alors blocage sonique de l'écoulement. La pression dans la section 2 reste égale à et si, à l'aval, la pression diminue, on observe une diminution brusque de la pression et la formation d'ondes de détente.

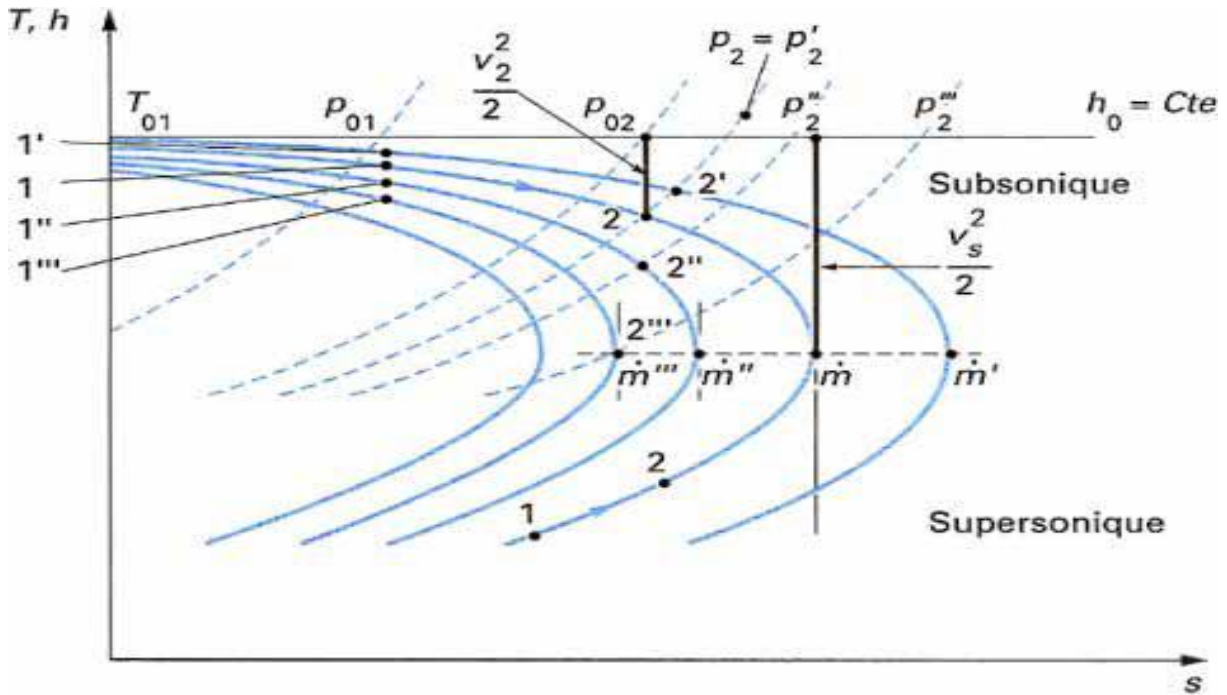


Figure 15. Sens d'évolution du fluide et régimes d'écoulement en conduite cylindrique

L'écoulement ne suit plus, à l'aval, les lois de l'écoulement monodimensionnel.

Dans le cas où l'écoulement est initialement supersonique, l'évolution sur la courbe de Fanno montre qu'il ne peut que rester supersonique (augmentation de s) avec un nombre de Mach se rapprochant de l'unité à moins que, grâce à une discontinuité, un saut puisse avoir lieu de la branche basse de la courbe de Fanno à la branche haute de la même courbe (figure.16). Cette discontinuité, appelée onde de choc, correspond à une transition de l'écoulement du régime supersonique au régime subsonique. Elle a lieu avec une augmentation brusque de pression et d'entropie compte tenu de son caractère irréversible. Cette discontinuité sera étudiée au paragraphe 4.

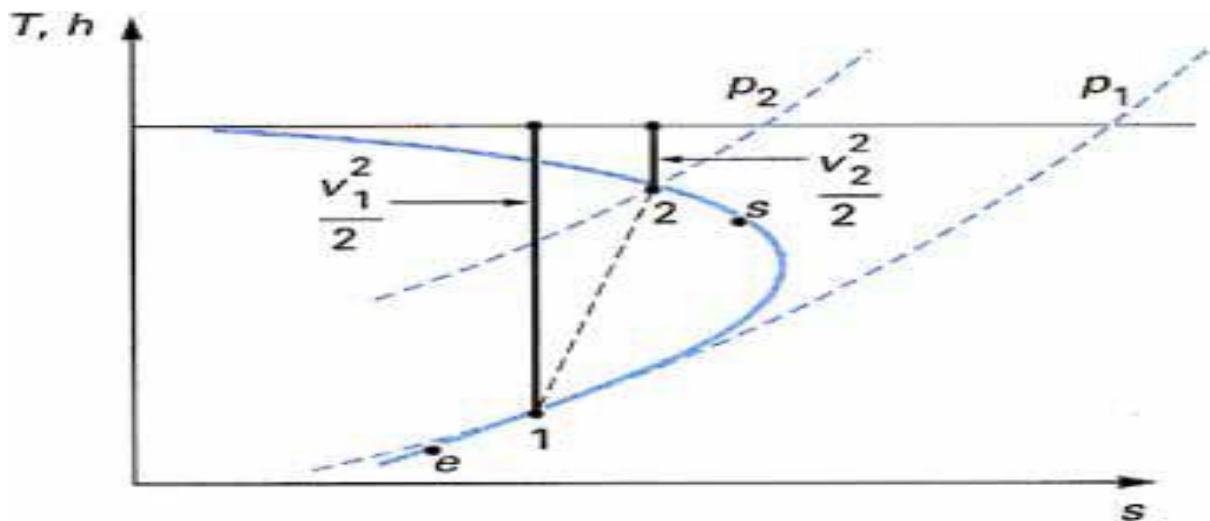


Figure 16. Transition régime supersonique-régime subsonique par onde de choc en écoulement de Fanno

II.3 Ecoulement réversible :

II.3.1 Équations en conduite de Rayleigh :

Les équations générales appliquées à ce cas particulier s'écrivent :

- Continuité :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \dot{m} = cte$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

- Bilan de la quantité de mouvement :

$$VdV + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (II.22)$$

- Bilan de l'énergie :

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta e_{c12} \quad (II.23)$$

Où :

$$\delta q = dh + VdV \quad (II.24)$$

Équation d'état du fluide :

$$dh = c_p dT$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T}$$

II.3.2 Évolution du fluide en diagramme entropique :

La variation d'entropie d'un gaz parfait idéal s'écrit :

$$S - S_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1}$$

Où la référence 1 concerne l'état du fluide dans la section 1 de référence.

Dans cette expression, pour exprimer le rapport de pression P/P_1 en fonction de \dot{m} , de T_1 , de p_1 , on combine les relations (II.22) et (II.2), ce qui donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho V^2} = 0$$

Soit, avec l'équation (II.1) :

$$\dot{m}^2 \frac{d\rho}{\rho^2} - dP = 0$$

L'intégration de cette relation donne :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = cte \quad (II.25)$$

Où :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = P + \frac{\dot{m}^2}{\rho_1} \quad (II.26)$$

En utilisant l'équation d'état on obtient :

$$P + \frac{\dot{m}^2 r T}{P} = P_1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P}$$

Soit :

$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 - \frac{P}{P_1} \left(1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}\right) + \frac{\dot{m}^2 r T}{P_1^2} = 0$$

Ainsi, le rapport est donné par la relation :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \dot{m}^2 r T_1 / P_1^2 \pm \sqrt{(1 + \dot{m}^2 r T_1 / P_1^2)^2 - 4 \dot{m}^2 r T / P_1^2}}{2} \quad (\text{II.27})$$

en posant $\alpha = \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}$, l'équation de l'écoulement est :

$$S - S_1 = c_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln 2 - r \ln \left[1 + \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4 \alpha T / T_1}\right] \quad (\text{II.28})$$

La courbe correspondante est représentée sur la figure 17 pour une valeur de α

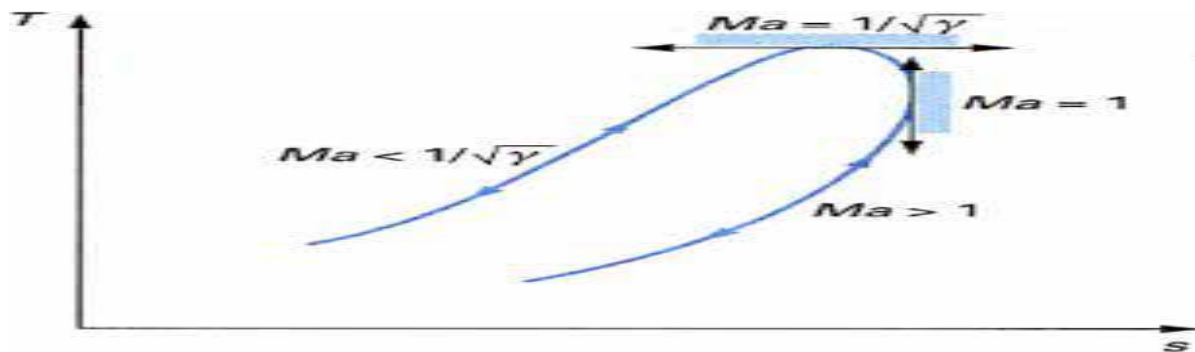


Figure 17.Évolution des caractéristiques thermodynamiques du fluide lors d'un écoulement de Rayleigh

II.3.3 Nature de l'écoulement :

La combinaison de l'équation de l'énergie (II.24), de l'équation d'état (II.5) et de la relation entre l'échange thermique et la variation d'entropie en transformation réversible :

$$\delta q = T dS \quad (\text{II.29})$$

Permet d'écrire :

$$T dS = C_p dT + V dV \quad (\text{II.30})$$

En combinant cette relation avec l'équation suivante, dérivée de l'équation de continuité (II.2),

$$V dV = -V^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

On a:

$$T dS = C_p dT + V^2 \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II.31})$$

L'équation (II.13), donnant la variation d'entropie d'un gaz parfait, permet d'écrire :

$$-\frac{dp}{\rho} = \frac{ds}{r} - \frac{C_v}{r} \frac{dT}{T} \quad (\text{II.32})$$

En combinant les relations (II.32) et (II.33), on obtient :

$$ds \left(T - \frac{V^2}{r} \right) = \left(C_p - \frac{V^2}{rT} C_v \right) dT \quad (\text{II.33})$$

Ou, en introduisant la vitesse du son et le nombre de Mach Ma :

$$\frac{T}{C_p} \frac{1 - \gamma Ma^2}{1 - Ma^2} \quad (\text{II.34})$$

Cette équation montre que :

- Lorsque $Ma = 1$ (écoulement sonique) $\frac{dT}{ds} = \infty$; ainsi, sur la courbe de Rayleigh, le point à tangente verticale correspond à un régime d'écoulement sonique ;
- Lorsque $Ma = \sqrt{1/\gamma}$, la tangente à la courbe $T(s)$ est horizontale et l'écoulement est subsonique ; il le reste dans toute la partie supérieure de la courbe de Rayleigh où $Ma < \sqrt{1/\gamma}$;
- Dans la partie inférieure de la courbe de Rayleigh, $Ma > 1$, l'écoulement est supersonique et la pente de la courbe est positive.

Dans ce type d'écoulement, si les conditions amont P_1 , T_1 et le débit \dot{m} sont constants, le point représentatif de l'état du fluide peut évoluer dans le sens s croissant ou décroissant puisque l'écoulement est réversible par définition. Lorsque l'entropie augmente, il y a apport de chaleur et augmentation de la vitesse si l'écoulement est subsonique ou diminution si l'écoulement est supersonique. Un refroidissement entraîne une chute de la vitesse en écoulement subsonique, une augmentation en écoulement supersonique.



Chapitre III
**Écoulement isentropique d'un gaz
parfait dans une tuyère**

III.1 Introduction :

D'un point de vue historique, la tuyère est le fruit du travail de nombreux chercheurs et Ingénieurs à la fin du XIX^{ème} siècle. *Gustave de Laval* construisit en 1887 une petite Machine à vapeur pour prouver que de tels appareils peuvent être fabriqués dans de semblables dimensions, et en 1890 il développe une tuyère permettant d'augmenter la vitesse de la vapeur entrant dans la turbine. On la connaît de nos jours sous le nom de tuyère de Laval et elle présente une importance particulière dans la conception de fusée, de turbines à vapeur et à gaz. La fonction de la tuyère est de convertir l'énergie thermique issue de la chambre de Combustion en énergie cinétique. Elle convertit ainsi les gaz de faible vitesse, de pression et température élevées en gaz de vitesse très importante mais de basse pression et température.

III.2. Définition d'une tuyère :

Une tuyère est une conduite placée à l'arrière du moteur qui met en communication deux Milieux à des pressions différentes, elle est considérée comme l'un des éléments les plus importants dans les turbomachines et les turboréacteurs, d'ailleurs 40% de la poussée totale de ces derniers est produite par les tuyères. Son rôle principal est la transformation de l'énergie thermique en cinétique. Pour atteindre cet objectif, les tuyères peuvent être convergentes pour les taux de détente élevés (Figure.18. a), sinon convergente divergente (tuyère de Laval) (Figure.18.b). Selon la géométrie on trouve les tuyères à géométrie plane (Figure.19. a) où axisymétrique (Figure.19 b) [7].

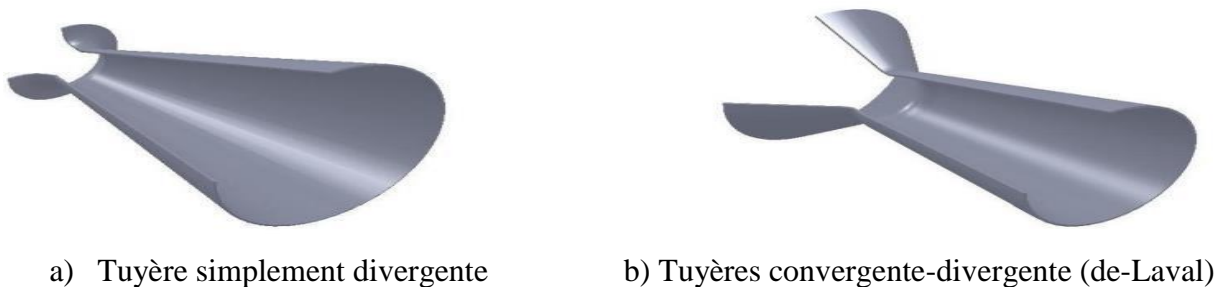


Figure 18. Profils des Tuyères

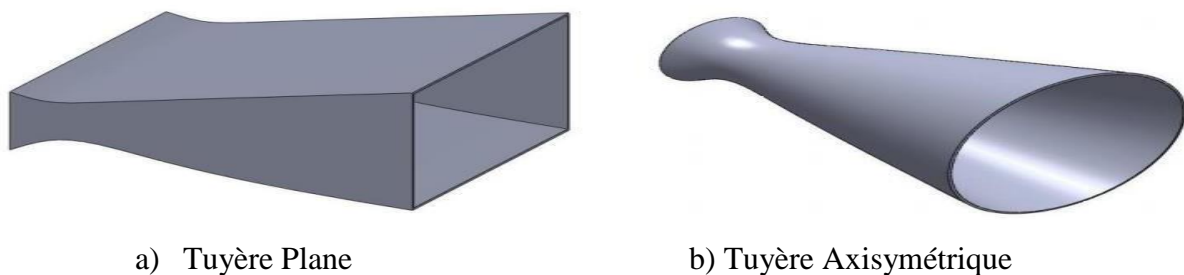


Figure 19. Différentes formes géométriques des tuyères [7].

III.3. Écoulement en tuyère de Laval :

III.3.1. Définition d'une tuyère de Laval :

Une tuyère de Laval est une conduite de forme convergente-divergente qui a un profil spécifiquement étudié. Elle met en communication une chambre contenant un gaz comprimé avec un milieu extérieur d'évacuation. La chambre et le milieu extérieur sont à des pressions différentes pour permettre le mouvement du gaz, La tuyère supersonique a pour rôle d'accélérer les gaz d'une vitesse faible à l'entrée du divergent de la tuyère. la forme de la tuyère permet de détendre les gaz. L'opération de détente transforme l'énergie potentielle du gaz en en énergie cinétique. Tout le long de la tuyère, la vitesse du gaz augmente, Cependant que sa pression et sa température diminuent. La tuyère aval est appelée tuyère supersonique, elle est représentée dans la figure ci-dessous (Figure 20) [8], [9].

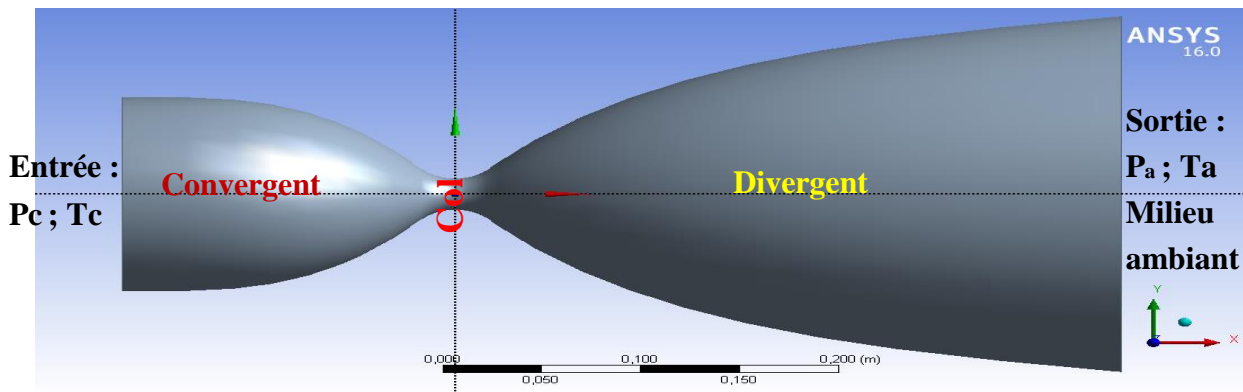


Figure 20. La tuyère De-L'aval

La forme générale du contour d'une tuyère, présente trois parties essentielles, [10]

Le convergent : la partie amont de la tuyère. Situé entre la chambre de combustion et le col, son rétrécissement contribue à l'accélération des gaz où l'écoulement est subsonique

Le col : est la partie du canal d'écoulement des gaz qui a le plus petit diamètre et qui, par le choix de ses dimensions, fixe le point de fonctionnement du moteur où l'écoulement atteint la vitesse du son

Le divergent : il augmente la vitesse d'éjection des gaz au cours de leur détente et améliore, de ce fait, leur effet propulsif où l'écoulement atteint des vitesses supersoniques

III.3.2. Rôle et utilisation de la tuyère :

L'intervention des tuyères supersonique apparait dans plusieurs domaines dans l'aéronautique et l'aérospatial et elles que les moteurs fusée et missile, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersonique pour permettre de modéliser et réaliser des essais expérimentaux des écoulements supersoniques.

III.3.2.1. Moteur Fusée :

Dans ce type de moteurs, la tuyère est considérée comme étant la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dont le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Notons ici que la structure d'un missile est constituée par la chambre de combustion et la tuyère et que cette dernière constitue environ 70% de la masse totale d'une chambre propulsive.



Figure 21. Tuyère du moteur Européen Vulcain2d'Ariane5 [10].

III.3.2.2. Moteur Avions :

L'avènement du vol supersonique dans ce siècle a réalisé un progrès majeur en aviation civile (Concorde, Tupolev) et militaire (les avions de chasse) , il n'a pas provoqué un changement d'attitude immédiat chez les constructeurs d'avions, car le souci primordial pour les premiers avions supersonique militaires c'est d'assurer de bonne conditions de vol subsonique ou transsonique de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de sur détente à ces vitesses modérées.

Pour assurer la rentabilité de tels projets, il faut optimiser les performances de chaque élément du moteur, le rôle assigné à la tuyère est définie de la façon suivante :

- Assurer la détente optimale des gaz de combustion. C'est -à-dire, la poussée maximale du régime de la croisière. Ce problème est délicat, car la section de sortie doit être raccordée au maître couple du moteur ; ou la structure de l'avion par carénage.
- La tuyère doit assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement par la variation de la surface au col en fonction du débit et des conditions de températures et de pression des gaz à évacuer.
- Au régime du vol intermédiaire, la tuyère ne doit pas provoquer des pertes de poussée trop élevées du fait de son inadaptation.
- Elle doit contribuer au freinage de l'avion à la phase d'atterrissage et à l'atténuation de bruit [11].



Figure 22. Tuyère d'un avion de Combat Chengdu J-10 [12].

III.3.2.3. Soufflerie :

Une soufflerie est une installation d'essais utilisée en aérodynamique pour étudier les effets d'un écoulement d'air sur un corps, elle permet de créer un courant d'air artificiel. Il existe plusieurs types de souffleries, mais d'une façon générale une soufflerie se compose de trois parties principales :

- Le convergent ou le collecteur
- La chambre d'expérience

Le divergent ou le diffuseur : que l'air traverse à sa sortie de la chambre d'expérience, en direction du ventilateur qui l'aspire et le rejette ensuite à l'extérieur. Le diffuseur a la forme d'un tronc de cône dont la section va en augmentant, ainsi la vitesse du courant d'air se réduit progressivement jusqu'à la pale de ventilateur mû par un moteur électrique. Parmi les rôles d'une soufflerie, est de faire la simulation des écoulements réels mais sur des prototypes à échelles réduites.

Pour arriver à ça, il faut modéliser l'écoulement à la sortie de la tuyère qui doit être uniforme et parallèle comme l'air libre de l'atmosphère [7].

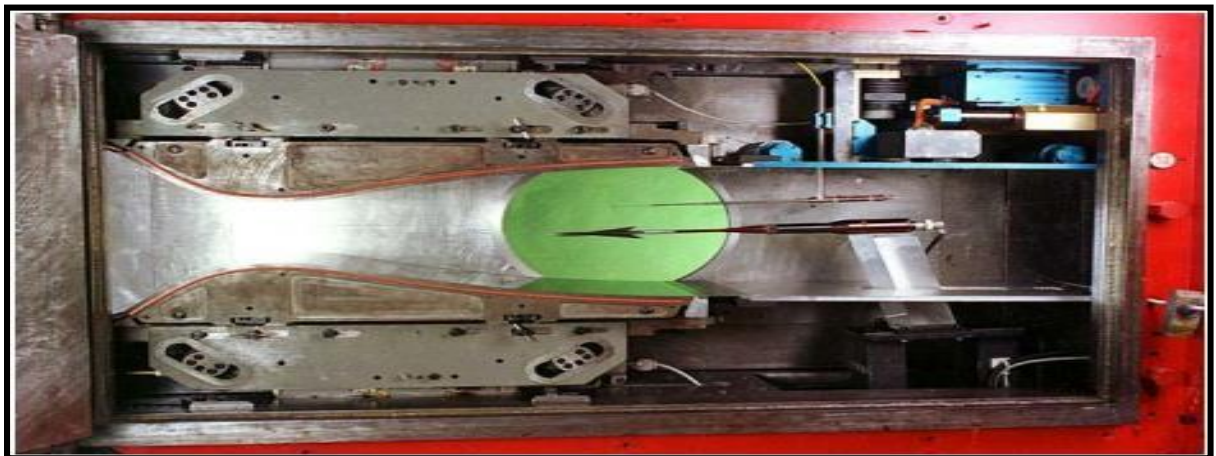


Figure 23. Tuyère Mach2 de la soufflerie S5 Ch du Centre Onera de Meudon [11].

III.4. Différentes formes de tuyères :

Par nécessité d'atteindre des vitesses supersoniques pour des besoins, surtout militaires, les tuyères sont devenues des organes essentiels pour le moteur à réaction. Le rendement de ces machines, leurs poussées ainsi que leur consommation dépendent énormément de la forme géométrique de la tuyère. Citons, quelques formes les plus connues :

III.4.1. Tuyère conique :

Les tuyères coniques qui étaient très largement utilisées dans la conception des premiers moteurs fusés de par leur simplicité et leur facilité de construction sous forme d'un cône. Généralement ces tuyères présentent des angles de divergence entre 15 et 30 degrés [13].

Elles sont actuellement encore employées pour équiper les très petits moteurs qui délivrent de faibles poussées (servant, par exemple, au contrôle d'altitude des satellites) car cette configuration engendre une perte considérable de poussée causée principalement par la divergence de l'écoulement à la section de sortie, au lieu d'être axiale pour un maximum de poussée.

Cette perte est quantifiée par Malina en introduisant un facteur qui dépend de l'angle de divergence du cône [14] :

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \quad (\text{III.1})$$

avec : α : Angle de divergence de la tuyère

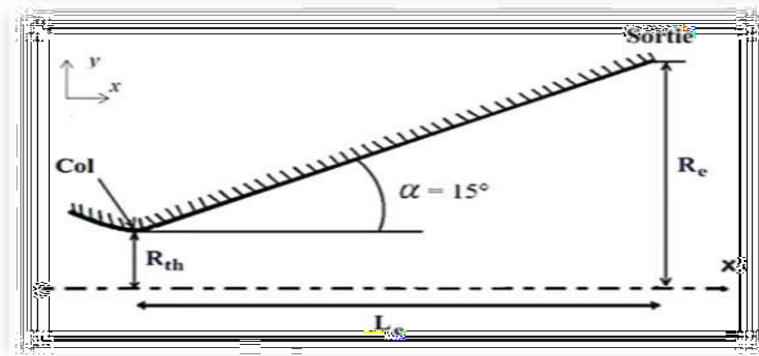


Figure 24. Tuyère conique [15].

III.4.2. Tuyère à contour profilé :

Après quelques années et en parallèle avec le développement expérimental et numérique, les constructeurs ont pensé à l'amélioration des performances des tuyères de propulsion. Ils ont remarqué que les tuyères coniques délivrent une certaine poussée mais avec une perte à cause de l'inclinaison de la portion supersonique qui est entre 15° et 30°.

Donc l'inclinaison de la tuyère à la sortie est nulle, la poussée sera maximale. Les numériciens développent une méthode appelée méthode des caractéristiques pour régler ce problème. Quelques temps après, ils ont trouvé plusieurs formes. Nous citons les deux formes les plus importantes :

- Tuyère à détente centrée.
- Tuyère à zone d'expansion.

Pour accélérer l'écoulement, Il faut qu'il y ait une certaine détente dans la tuyère et comme l'écoulement est horizontal au col et à la sortie, il faut une dérivation de la paroi jusqu'à un certain angle maximal, ce que l'on appelle une zone de détente ou d'expansion ensuite un redressement pour donner à la sortie ce que l'on appelle zone de redressement.

En général, la tuyère profilée possède des angles allant de 20° à 30° au col et de 5° à 14° à la sortie de la tuyère [13].

III.4.3. Tuyère à zone d'expansion :

La forme de la zone d'expansion de la partie divergente est un peu arbitraire. A la sortie de la tuyère, l'écoulement devient uniforme et parallèle à l'axe de révolution [13,16] comme indique la (figure25) :

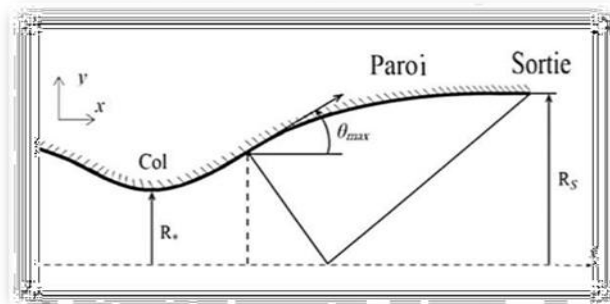


Figure 25. Forme de la tuyère à zone d'expansion [13,17].

III.4.4. Tuyère à détente centrée :

La tuyère est de type à détente centrée, si la zone d'expansion est contractée en un point, où la détente prend place à travers des ondes de Prandtl Meyer centrées et générées à partir du coin du col de la tuyère avec un angle initial θ^* [16,13] comme le montre la (figure 26)

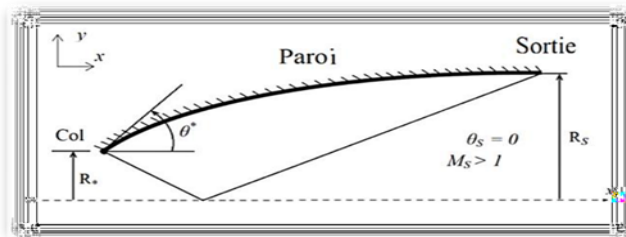


Figure 26. Forme générale d'une tuyère à détente centrée [18].

III.4.5. Tuyère à double galbe :

Le concept des tuyères à double galbes est une nouvelle technologie dans le domaine de conception de tuyères supersoniques destinées à la propulsion spatiale, il est l'un des concepts les plus prometteurs pour les tuyères adaptables en altitude. En effet, l'écoulement dans ce type de tuyères a la faculté de s'auto-adapté pour deux régimes de fonctionnement (basse et haute altitude) sans activation mécanique.

L'écoulement est forcé à décoller de façon stable et symétrique à l'inflexion, générant ainsi une poussée optimisée à basse altitude. Au cours du vol, lorsque la pression atmosphérique chute sous une certaine valeur, l'écoulement s'attache soudainement dans toute la tuyère, permettant ainsi une détente plus importante pour une poussée plus élevée.

Le principe est théoriquement assez simple, mais les efforts structuraux mis en jeu peuvent être importants [19].

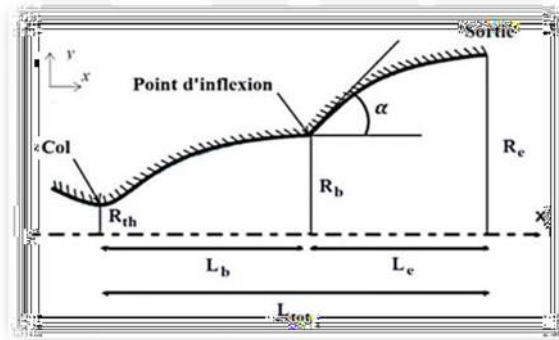


Figure 27. Tuyère à double galbe [20].

Avec :

- α : L'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure au point de déflexion.
- R : Le rayon.
- L : La longueur.

La tuyère double galbe présente des performances très élevées du moment qu'elle s'adapte à deux plages de fonctionnement (Auto adaptation de l'écoulement), à des basses altitudes et à de très hautes altitudes sans activation mécanique. Et aussi le décollement du

Jet à basse altitude, fixé à la jonction des deux galbes [20].

III.4.6. Tuyère annulaire :

Dans ce type, les gaz d'échappement passent à partir du col jusqu'à la sortie de la tuyère à travers une conduite sous forme d'anneau au lieu d'une section circulaire normal. Cet anneau

est formé au col d'un bouchon central et d'une paroi externe qui définit le gabarit de la tuyère voir la Figure (28).

Ce type de configuration induit toujours une perte de poussée de la faite que le contour est de bordures coniques et qu'à la sortie, le gaz d'éjection n'est pas d'une direction axiale.

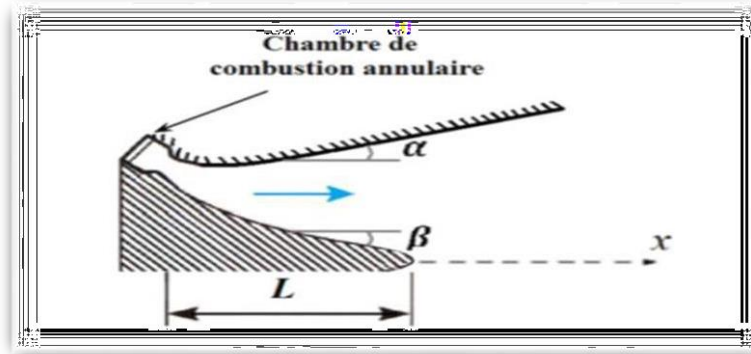


Figure 28.Tuyère annulaire [21].

Avec :

$$\begin{cases} \alpha : \text{L'angle formé par l'axe de la tuyère et la paroi extérieur.} \\ \beta : \text{L'angle formé par l'axe de la tuyère et de la paroi intérieure du bouchon.} \end{cases}$$

III.4.7. Tuyère à corps central :

Contrairement aux configurations précédemment présentées, ce type de tuyères Possède un corps central dont la chambre de combustion est directement reliée à la station du col. Dans cette configuration le processus de détente des gaz est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante [22]. L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures. Par contre dans la configuration précédente les processus de détente des gaz sont principalement influencés par le contour de la paroi à la section divergente de la tuyère. Ces tuyères sont classées en deux catégories :

- Tuyère type bouchon (Plug Nozzle).
- Tuyère type détente-déviation (Expansion-Deflection Nozzle).

III.3.8. Tuyère type à bouchon :

Le col de ce type de tuyères possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion jusqu'à la pression ambiante comme il est indiqué dans la figure (29). La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-divergente [13].

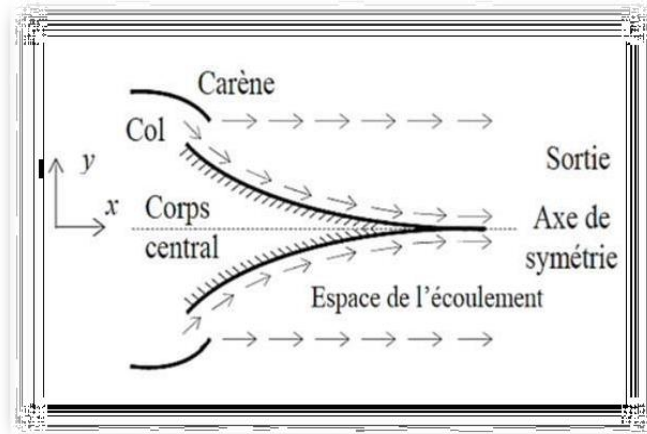


Figure 29. Géométrie de la tuyère à corps central type bouchon [13].

III.4.9. Tuyère type détente-déviat ion :

Dans ce type de tuyère une chambre de combustion compacte se positionne autour de la ligne centrale et présente un col annulaire au voisinage de cette dernière. Dans ce cas, les gaz se dirigent dans la direction de l'écoulement du bouchon central qui réalise une rotation de l'écoulement en expansion à une direction presque axiale. C'est pourquoi on la qualifie de tuyère à détente-déviat ion « E.D ». Cette configuration permet l'obtention de bonnes performances même dans des conditions au-dessous de celles pour lesquelles elle été initialement conçue [13].

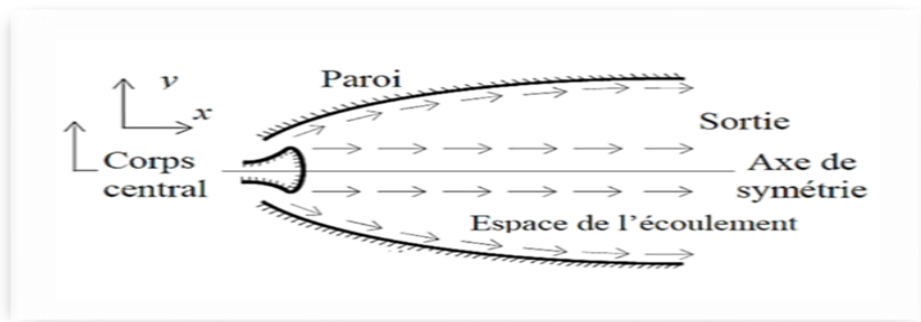


Figure 30. Géométrie de la tuyère à corps central type détente déviat ion [13].

III.5. Fonctionnement théorique de la tuyère supersonique :

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique. Considérons le système représenté par la figure (31), constitué d'une tuyère De Laval. La tuyère est en communication avec un réservoir contenant un gaz à une pression génératrice P_c supposée fixe. Le divergent débouche dans une enceinte quasi infinie dont la pression statique P_a est variable.

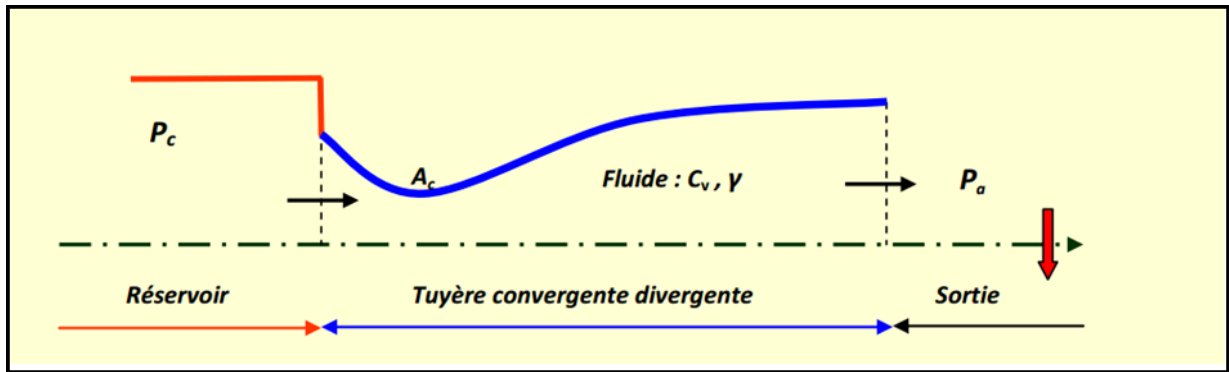


Figure 31. Schéma de la tuyère supersonique

Si la pression du milieu extérieur est égale à la pression de la chambre, le fluide est entièrement au repos (Figure 32, courbe (a)). Si la pression du milieu ambiant P_a diminue progressivement au-dessous de la pression P_c supposée constante, un débit d'écoulement prend naissance et cinq régimes particuliers d'écoulements sont distingués [23], [24], [25]

III.5.1. Écoulement subsonique :

Au début de l'écoulement le débit augmente avec la diminution de la pression ambiante. L'écoulement est subsonique dans toute la tuyère [Figure 32, courbes (b) et (c)]. Dans le convergent la vitesse augmente et la pression diminue jusqu'à une valeur minimale atteinte au col. Dans le divergent la vitesse diminue et la pression augmente jusqu'à la pression du milieu extérieur. La pression est donc minimale dans la section du col où la vitesse passe par une valeur maximale.

III.5.2. Écoulement sonique adapté :

Si P_a continué à diminuer jusqu'à une valeur caractéristique notée P_{ac1} , l'écoulement au col devient sonique et le débit atteint une valeur limite maximale [Figure 32, courbe (d)]. L'écoulement est dit sonique adapté. Partout encore, sauf au col, l'écoulement est subsonique. Au col de la tuyère, la pression atteint la valeur critique P^* et la vitesse atteint la vitesse du son. Le col est amorcé.

III.5.3. Écoulement sonique non adapté :

Si P_a diminué au-dessous de P_{ac1} , le col reste toujours sonique. Dans le divergent apparaît un phénomène irréversible appelé onde de choc, l'écoulement est dit sonique non adapté ou régime de sur-détente. L'évolution de l'écoulement du gaz est représentée par la courbe (e) de la figure (32).

Dans le convergent l'écoulement ne subit aucune modification mais dans le divergent une onde de choc stationnaire et normale à l'axe de la tuyère divise l'écoulement en deux parties

(Figure. 32). Dans la première partie du divergent l'écoulement est supersonique, la vitesse continue à augmenter et la pression diminue. À travers l'onde de choc, la pression augmente brusquement, et la vitesse diminue brusquement. L'onde de choc se place de telle façon à ce que la compression qui s'effectue ramène la pression de la sortie à la pression ambiante P_a . Dans la deuxième partie du divergent (après l'onde de choc) la pression remonte et la vitesse diminue progressivement, l'écoulement est à nouveau subsonique.

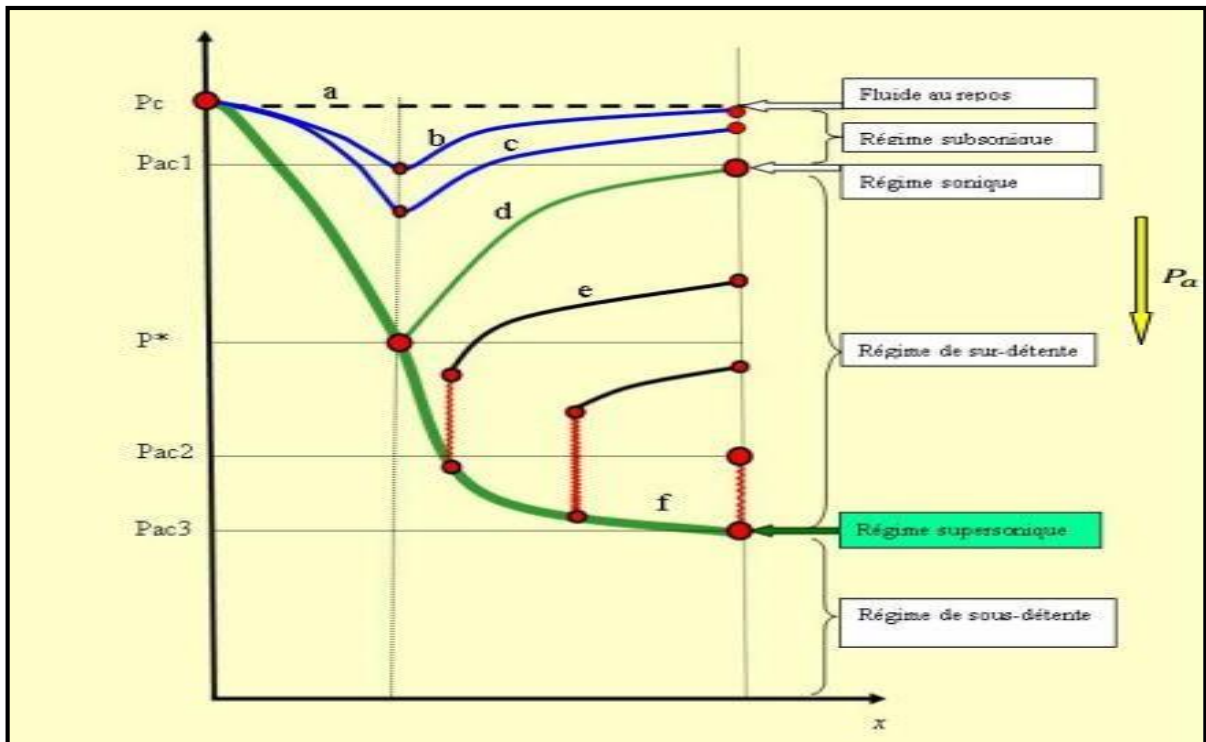


Figure 32. Les régimes d'écoulement dans une tuyère supersonique et l'évolution de la pression le long de la tuyère

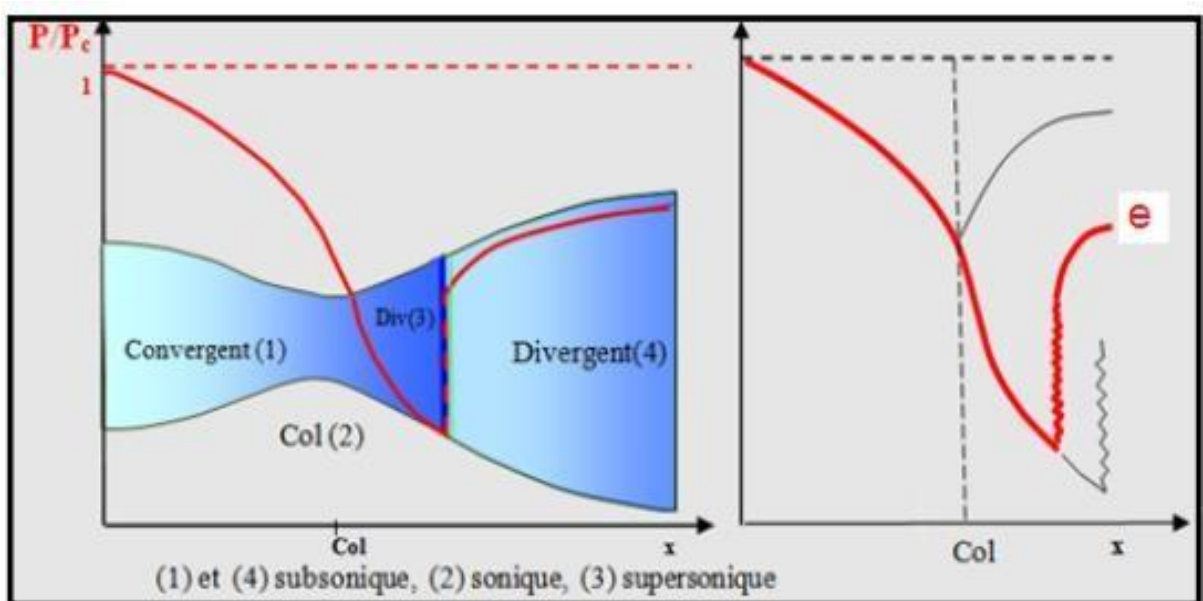


Figure 33. Régime de sur-détente en 1D

L'onde de choc se déplace vers la sortie lorsque P_a diminue. Soit P_{ac2} la pression ambiante pour laquelle l'onde de choc se place à la sortie de la tuyère.

En diminuant encore la pression P_a au-dessous de P_{ac2} , l'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique, la diminution de P_a ne modifie plus l'écoulement à l'intérieur de la tuyère. L'adaptation de la pression entre celle de sortie de la tuyère et la pression du milieu ambiant doit se faire à l'extérieur du divergent par l'intermédiaire d'ondes de choc obliques.

III.5.4. Écoulement supersonique adapté :

Si P_a continue à diminuer il arrive un moment où l'écoulement sera entièrement supersonique dans toute la tuyère. Le phénomène d'onde de choc disparaît et il n'y a plus de compression externe, alors la tuyère est parfaitement adaptée. L'évolution du gaz est représentée par la courbe (f) de la figure 32. Notons par P_{ac3} la pression ambiante pour laquelle ce phénomène se produit. P_{ac3} est appelé pression d'adaptation.

III.5.5. Écoulement supersonique non adapté :

Lorsque la pression P_a devient inférieure à P_{ac3} l'écoulement est dit supersonique non adapté. L'écoulement dans la tuyère de Laval ne subit aucune modification, l'adaptation entre la tuyère et la pression ambiante doit se faire à l'extérieur de la tuyère par l'intermédiaire d'une série d'ondes de détente obliques.

Remarques et résultats :

- ✓ L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et

Non-visqueux permet de décrire les différents régimes de fonctionnement d'une tuyère supersonique.

- ✓ Une tuyère supersonique ne fonctionne donc correctement que pour la seule valeur du rapport de pression P_{ac3}/P_c , où P_{ac3} est appelée pression d'adaptation.
- ✓ La limitation de l'intervalle de chaque régime d'écoulement nécessite la détermination des valeurs caractéristiques de la pression du milieu ambiant pour une pression chambre P_c fixe. Ces valeurs sont P_{ac1} , P_{ac2} , P_{ac3} .
- ✓ L'approche monodimensionnelle permet l'étude de l'effet de variation de section, de l'onde de choc normale, de sondes de choc obliques et des ondes de détentes.
- ✓ L'approche monodimensionnelle permet d'obtenir une première estimation des paramètres de fonctionnement des tuyères supersoniques.

III.6. Fonctionnement réel de la tuyère supersonique :

L'approche monodimensionnelle des écoulements des gaz calorifiquement parfait et non-visqueux suppose l'absence totale des effets visqueux. Dans les écoulements réels, la tuyère comporte une couche limite qui est très sensible aux variations de pression, ce qui rend les phénomènes physiques dans la tuyère plus complexes. Lorsque le col de la tuyère est sonique, l'écoulement dans la tuyère dépend uniquement de la pression à la sortie de la tuyère notée P_e et de la pression du milieu ambiant P_a . En fonction de la différence entre ces deux pressions, trois cas sont rencontrés :

- ❖ Si $P_e = P_a$, la tuyère est dite adaptée.
- ❖ Si $P_e > P_a$, la tuyère est dite sous-détendue.
- ❖ Si $P_e < P_a$, la tuyère est dite sur-détendue.

III.6.1. Le régime d'adaptation :

Dans le cas du régime adapté, la détente du gaz est complètement accomplie dans la tuyère. Le gaz se détend depuis la chambre jusqu'à la sortie de la tuyère. En sortant de la tuyère aucune adaptation de pression n'est nécessaire vue que la pression du milieu ambiant P_a est égale à la pression de sortie P_e . L'écoulement du gaz sort de la tuyère sous forme d'un jet supersonique quasi-uniforme. Une frontière isobare sépare le jet supersonique du fluide ambiant. En sortant de la tuyère, la couche limite du jet entre en contact avec le fluide ambiant et l'entraîne dans son sillage. Cette interaction forme une couche de mélange (Figure.34).

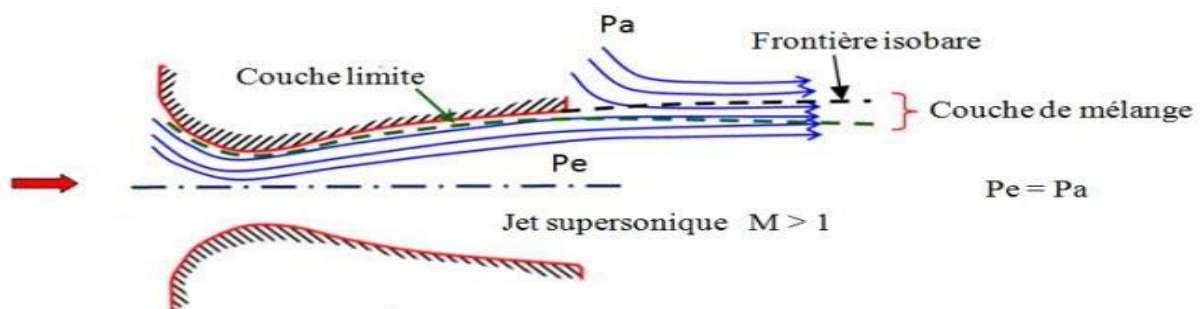


Figure 34. Organisation de l'écoulement à l'adaptation

III.6.2. Le régime de sous-détente :

Ce régime supersonique hors adaptation est appelé régime de sous-détente. Il se concrétise lorsque la pression du milieu ambiant P_a est inférieure à la pression d'adaptation. La détente est incomplète dans la tuyère. En sortant de la tuyère, le gaz continue sa détente de la pression de sortie P_e à la pression inférieure ambiante P_a . La suite de la détente du gaz est réalisée à la sortie de la tuyère par un faisceau d'ondes de détente. Vu que la pression de sortie est supérieure à la

pression ambiante, un élargissement du jet supersonique est observé à la sortie de la tuyère. La frontière isobare qui sépare le jet supersonique du fluide du milieu ambiant prend une forme divergente (Figure.35).

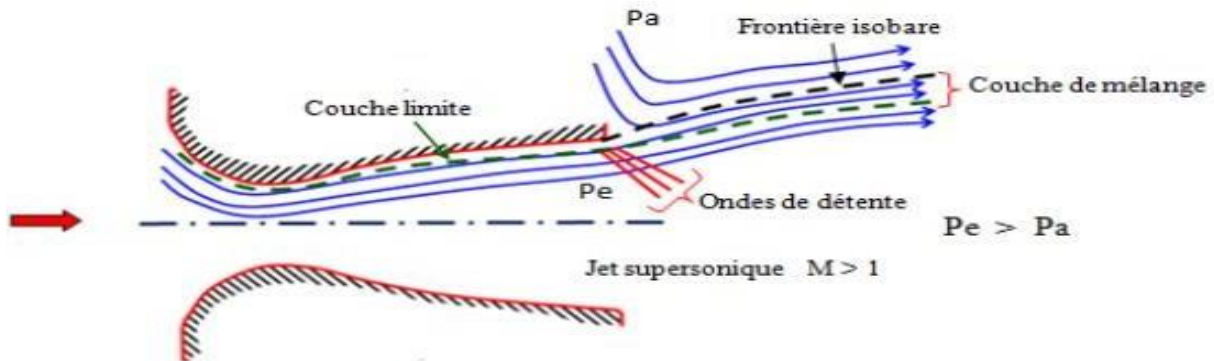


Figure 35. Organisation de l'écoulement en régime de sous-détente

La figure (36) représente le profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente. L'écoulement suit une distribution de pression strictement décroissante depuis la pression chambre jusqu'à la pression de sortie

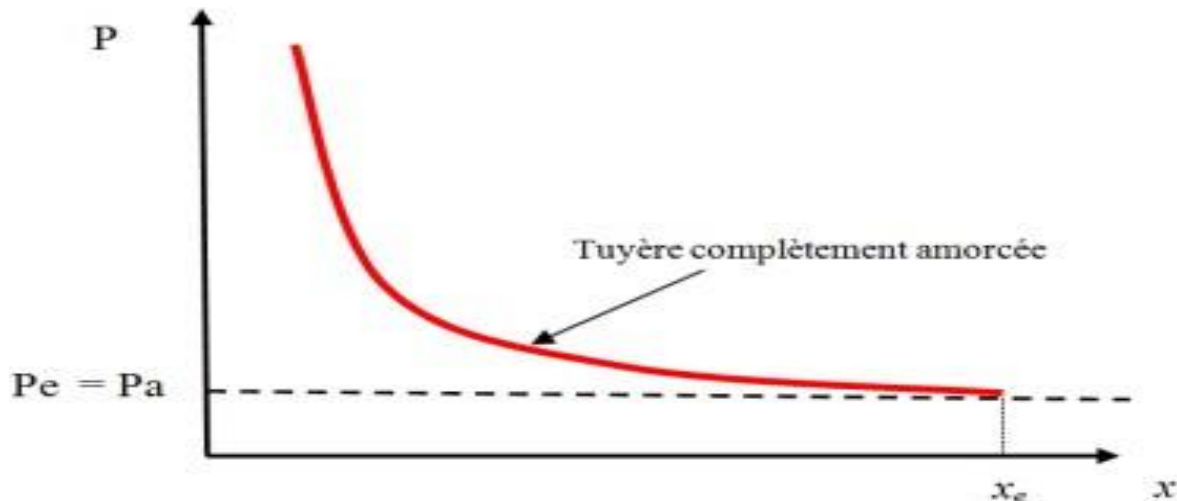


Figure 36. Profil de pression pariétale le long de la tuyère à l'adaptation et en sous-détente

III.6.3. Le régime de sur-détente :

Le deuxième régime supersonique hors adaptation est le régime désigné par le régime de sur-détente. Ce régime se produit lorsque la pression du milieu ambiant P_a est supérieure à la pression d'adaptation de la tuyère. La détente des gaz dans la tuyère s'effectue jusqu'à une pression statique P_1 qui est inférieure à la pression ambiante P_a . La couche limite du jet dans cette situation subit une contre-pression et un choc d'intensité P_2/P_1 se forme dans l'écoulement. La pression P_2 est la pression après le choc, elle est presque égale à la pression ambiante. Suivant l'intensité du choc, deux cas sont rencontrés : le régime de sur-détente avec décollement naissant et le régime de sur-détente avec décollement étendu.

➤ **Sur-détente avec décollement naissant :**

Pour des gradients de pression adverse modérés, la couche limite subsonique détecte ou ressent la contre pression en un point O appelé origine de l'interaction juste un peu en avant de la sortie de la tuyère. La couche limite décolle de la tuyère à la lèvre et un choc oblique se forme à la sortie de la tuyère. Dans ce régime il n'y a pas de point de décollement. Ce régime de sur-détente est qualifié de sur-détente avec décollement naissant(Figure37).

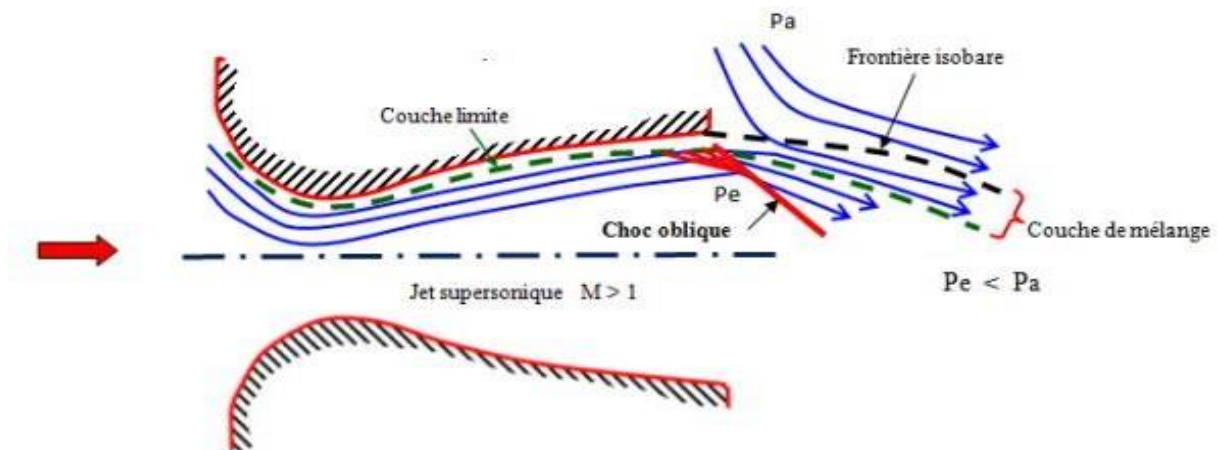


Figure 37. Tuyère en sur-détente avec décollement naissant de la couche limite

➤ **Sur-détente avec décollement étendu :**

La couche limite n'est pas en mesure de supporter n'importe qu'elle valeur de contrepression. Au-delà d'une certaine valeur critique, la couche limite décolle à l'intérieur de la tuyère. Ce décollement entraîne une profonde modification de l'écoulement, comme le montre le montage réalisé dans la figure (38), [26], [27]

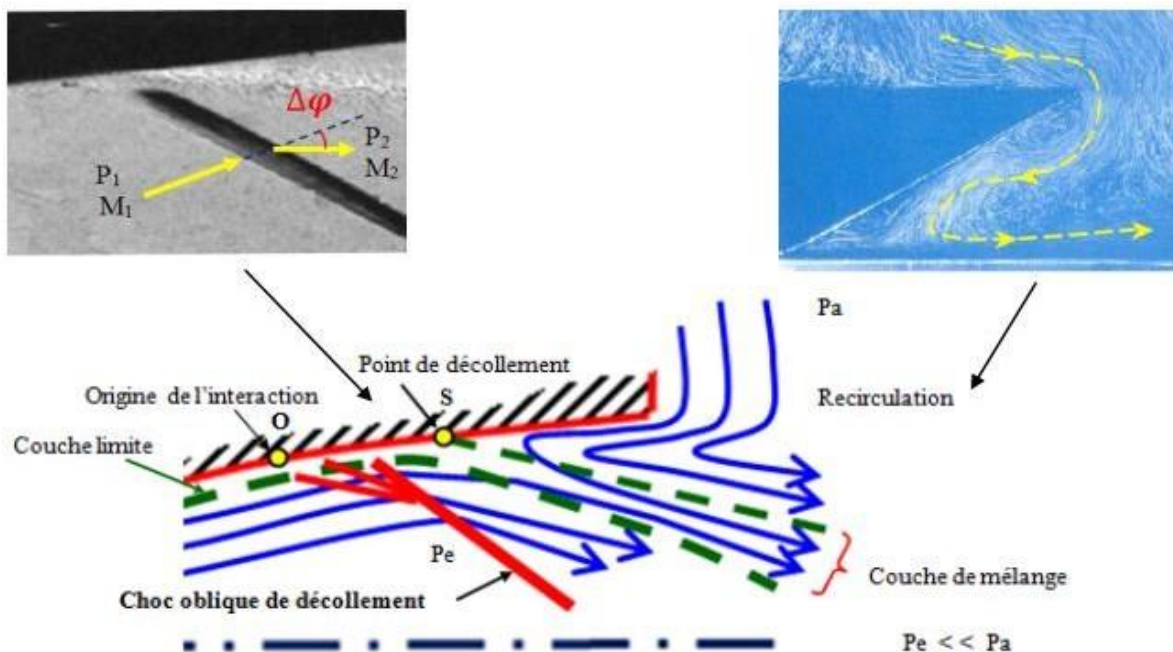


Figure 38. Tuyère en sur-détente avec décollement étendu de la couche limite

Le décollement ainsi créé va se produire dans un point S situé à l'intérieur de la tuyère. Au niveau de ce point de décollement, il se produit une compression rapide de l'écoulement interne de la tuyère depuis la pression P_1 (pression non perturbée immédiatement avant le décollement) jusqu'à la pression P_2 (pression en aval du point de décollement). Cette rapide contre pression provoque la formation d'un choc oblique à travers duquel l'écoulement est ralenti et dévié d'un angle $\Delta\varphi$ et son nombre de Mach passe de M_1 à M_2 . De S part une couche de mélange, zone visqueuse assurant une transition continue des propriétés de l'écoulement décollé entre le jet à grande vitesse situé près de l'axe de symétrie et la région proche de la paroi, où le fluide est presque stagnant. Le fluide du milieu externe est aspiré à l'intérieur de la tuyère sous l'effet d'entraînement puis évacué dans la couche de mélange.

Ce régime est très dangereux pour la tuyère. La topologie de l'écoulement dans ce régime est fortement influencée par le profil de la tuyère ainsi que le rapport de pression P_c/P_a .

III.7. Ondes de choc :

III.7.1. Nombre de Mach :

Le nombre de Mach est définies comme étant le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son correspondante, dans le cas où le nombre de Mach M est inférieur à l'unité, on dit que l'écoulement est subsonique, et dans le cas où M est supérieur à l'unité, l'écoulement est supersonique. Alors $M = \frac{V}{V_s}$ (adimensionnel)

III.7.2. Les ondes de choc :

L'onde de choc est une région où se transforme une partie de l'énergie cinétique (vitesse moyenne organisée des particules) en énergie interne (fluctuations internes désorganisées des particules : chaleur ou température).

Une onde de choc est une zone d'accumulation de perturbations élémentaires où les phénomènes physiques sont extrêmement violents. Au travers de cette zone d'épaisseur très faible (de l'ordre de $1/10000$ m) il en résulte une discontinuité de pression, de température, de masse volumique et de vitesse. Une onde de choc augmente la pression statique, la température statique ainsi que la densité du fluide. Cependant, le nombre de Mach ainsi que la pression totale diminuent [28, 29, 13, 30, 16].

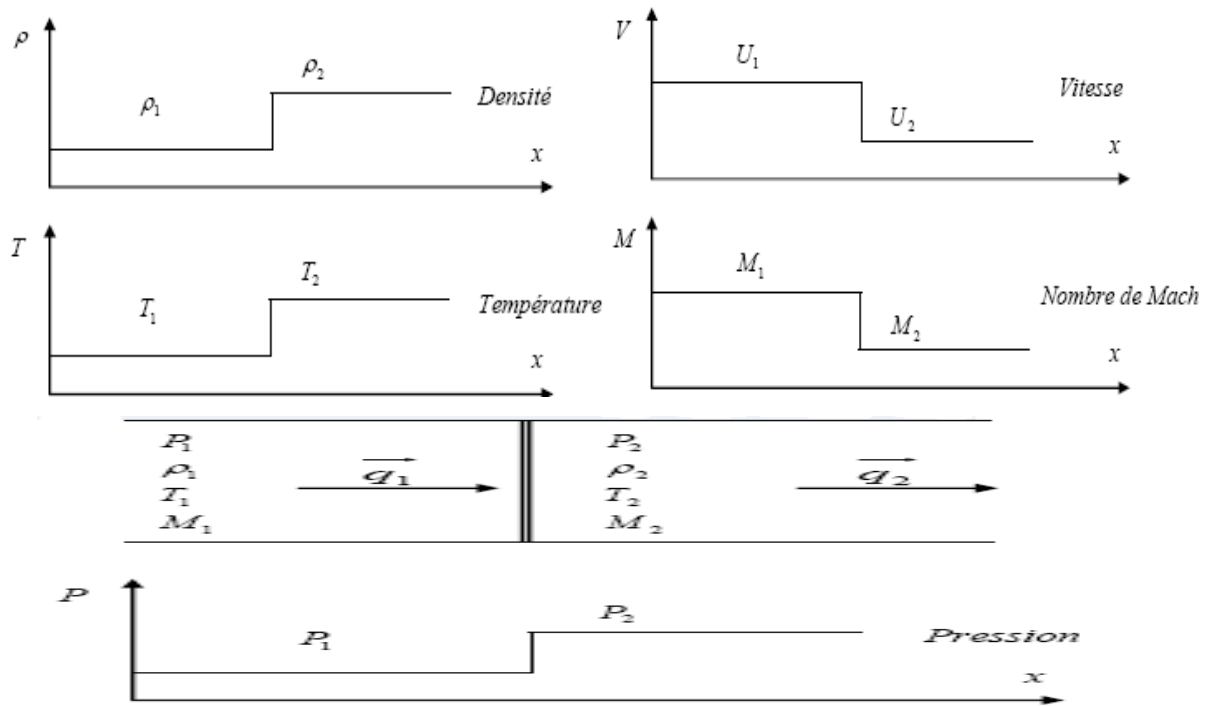


Figure 39. Effet d'une onde de choc droite stationnaire [31]

Il existe de nombreuses variétés d'ondes de choc. Les ondes de choc peuvent être perpendiculaires à l'écoulement, on dit alors qu'il s'agit d'ondes de chocs normales. Elles peuvent être inclinées par rapport à l'écoulement et il s'agit alors d'ondes de choc obliques.

III.7.3. Les types d'onde de choc :

➤ **Onde de choc normale (droite) :**

Un phénomène irréversible commun aura lieu dans les écoulements supersoniques que ce soient internes ou externes, qui est l'onde de choc normale. C'est une très mince onde (d'épaisseur de quelques microns) de discontinuité dans les propriétés de l'écoulement. Puisque l'état du gaz change adiabatiquement, une augmentation de la température statique s'accompagne d'une augmentation de la pression (figure 40.a), la face arrière de l'onde de compression ayant une température plus grande, se propage plus rapidement que la face frontale de l'onde (figure 40.b), ces deux faces de l'onde se combinent en une mince discontinuité de la pression. Les ondes de choc sont associées avec nécessairement d'une augmentation de la pression et pas d'une réduction.

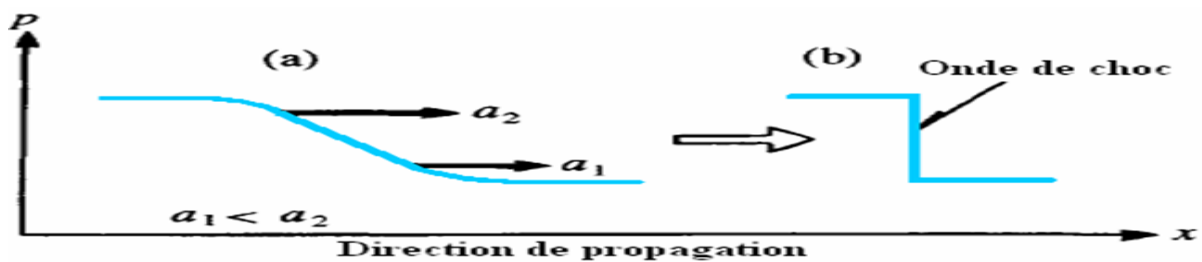


Figure 40. Propagation d'une onde de compression

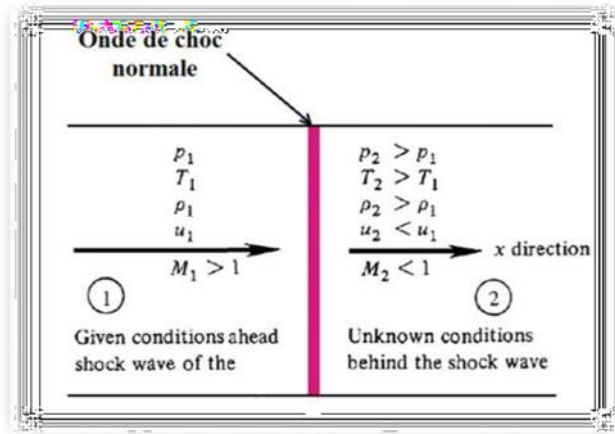


Figure 41. Illustration d'une onde de choc normale [29].

Les ondes de choc se remarquent par exemple après une explosion, l'éjection des gaz brûlés à travers une tuyère d'échappement ou quand un avion ou un projectile vole à une vitesse supersonique (figures 41)

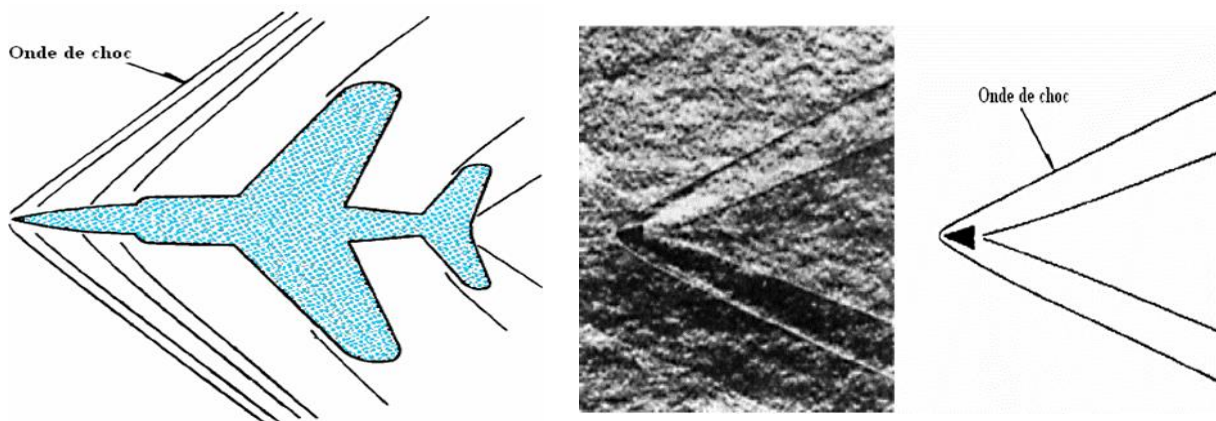


Figure 42. Cône volant à une vitesse supersonique

➤ **Les ondes de choc obliques :**

Les ondes de choc peuvent se former à angle oblique σ par rapport au courant supersonique. Ce type d'ondes dévie le courant d'un angle δ (angle de déflexion), contrairement aux ondes de choc normales, pour lesquelles l'écoulement aval ne change plus sa direction.

Un choc oblique est causé essentiellement par la nécessité d'un écoulement de tourner selon un certain angle. Exemples des chocs obliques est l'écoulement à travers un coin d'extrémité d'un corps et à travers une rampe dans la paroi d'un tunnel supersonique.

La géométrie de l'écoulement considéré est illustrée dans la figure (43). Comme dans le chapitre précédent des ondes de choc normales l'état 1 dénote les conditions en amont et l'état 2 dénote celles en aval.

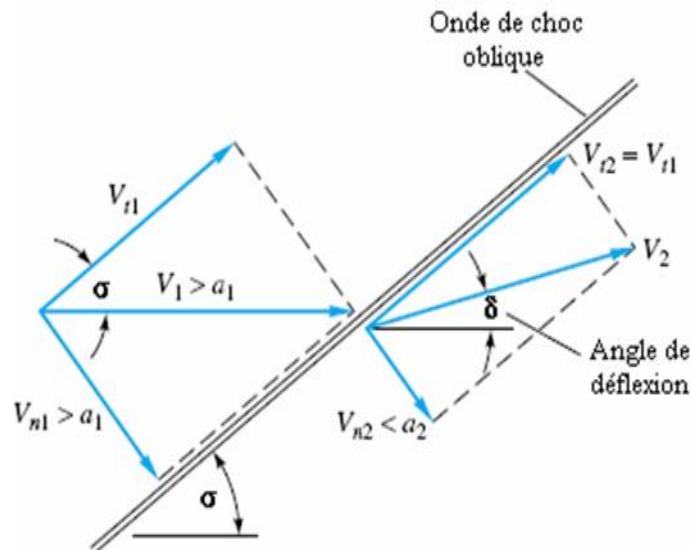


Figure 43. Géométrie d'un écoulement à onde de choc oblique.

Avec :

- ε : L'angle entre l'onde de choc et l'écoulement en amont du choc.
- β : L'angle entre l'écoulement en aval du choc et le plan de choc.
- δ : La déflexion.

L'angle de choc a une valeur arbitraire σ , et l'écoulement en aval V_2 change de direction d'un angle δ qui est fonction de σ et les conditions de l'état 1. L'écoulement amont est toujours supersonique, mais le nombre de mach $M_2 = V_2 / V_{s2}$ peut-être subsonique, sonique ou supersonique tout dépend des conditions de l'écoulement.

➤ Onde de choc conique :

Nous incluons ici le sujet de chocs coniques en raison de son importance pratique dans beaucoup de problèmes de conception. Par exemple, de nombreux avions supersoniques ont des diffuseurs avec des pointes coniques au niveau de leurs entrées d'air. La figure (44) montre l'avion YF-12, qui est un bon exemple de cette situation.

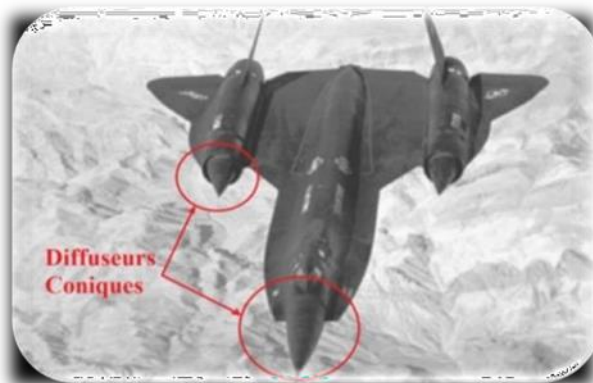


Figure 44. L'avion YF-12 [32].

Les flux associés aux ondes de choc conique et aux ondes de choc oblique (le coin résultant) sont très similaires, figure (44) nous examinons les flux coniques à angle d'attaque nulle (angle d'attaque). Afin de satisfaire l'équation de continuité dans des flux axisymétriques (tridimensionnels), les lignes de courant ne sont plus parallèles à la surface du cône, mais doivent se courber. Après le choc conique, la pression statique de la surface du cône augmente, et cette augmentation est isentropique. Les chocs coniques est un choc faible et il n'y a aucun équivalent au choc oblique fort de la cale.

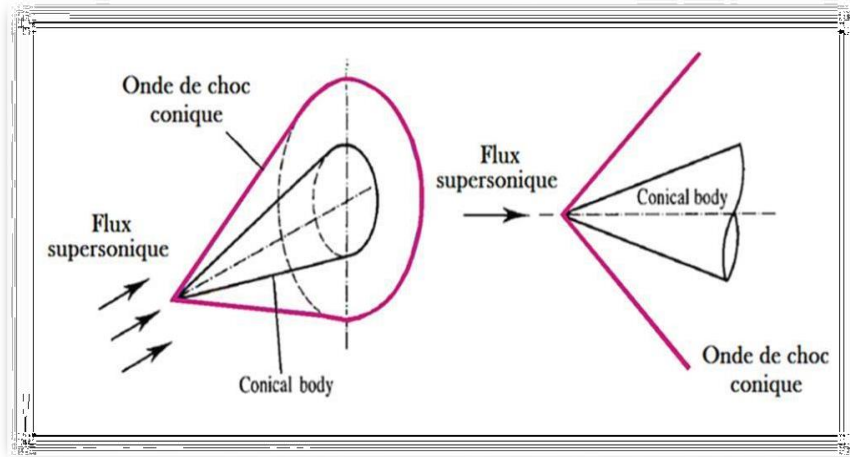


Figure 45. Représentation d'une onde de choc conique [33].

III.7. 4. Équations des ondes de choc :

Pour l'écoulement à travers une onde de choc, les équations générales prennent la forme suivante, en notant par 1 la face amont de l'onde de choc et par 2 la face aval dont la surface A_2 peut être estimée égale à celle de la face amont A_1 .

- Conservation de la masse :

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \dot{q}_m$$

Où :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0$$

- Bilan de la quantité de mouvement :

$$v dv + \frac{dP}{\rho} = 0$$

En effet, le travail des forces de frottement $-f dx$ peut être négligé, compte tenu de la très faible épaisseur de l'onde de choc ($\Delta x \approx 0$).

- Bilan de l'énergie qui, en raison de l'adiabaticité du transfert, s'écrit :

$$dh + VdV = 0$$

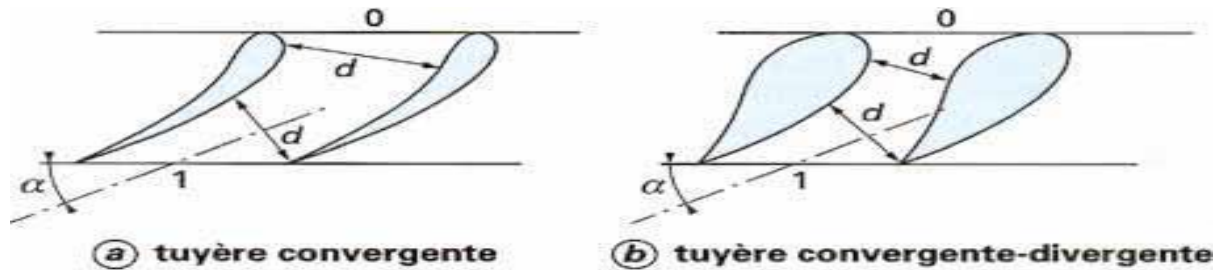


Figure 46. Canalisations en forme de tuyères constituées par des aubages de turbine

III.7.5. Relations entre les paramètres du fluide de part et d'autre de l'onde de choc :

La combinaison des équations de base des ondes de choc permet de trouver des relations entre les pressions, les températures et les vitesses de part et d'autre de l'onde de choc.

III.7.5.1 Expressions des paramètres en fonction des nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc :

L'équation du bilan de la quantité de mouvement peut être remplacée par une équation intégrale dans laquelle les forces d'interaction avec l'élément de fluide considéré ne sont pas explicitées, mais simplement représentées par leur résultante \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \int \rho_2 V_2^2 dA_2 \mathbf{n}_2 + \int \rho_1 V_1^2 dA_1 \mathbf{n}_1 \quad (\text{III.2})$$

Or, du fait de la faible épaisseur de l'onde de choc et de l'hypothèse d'écoulement monodimensionnel, on a :

$$\int \rho V^2 dA = \rho V^2 A$$

Et :

$$\mathbf{R} = (P_1 - P_2) A$$

Ainsi, l'équation (III.2) qui se projette en vraie grandeur sur la normale à la section A, devient :

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2 \quad (\text{III.3})$$

Or, compte tenu de l'équation d'état, on peut noter que :

$$P + \rho V^2 = P \left(1 + \frac{V^2}{rT} \right)$$

Ou, en introduisant la vitesse sonique :

$$P + \rho V^2 = P(1 + \gamma Ma^2) \quad (\text{III.4})$$

Ainsi, l'équation (III.3) s'écrit :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} \quad (\text{III.5})$$

De même, l'équation de l'énergie, compte tenu des équations d'état, devient :

$$c_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = c_p T_1 \left(1 + \frac{V_1^2}{2c_p T_1} \right) = c_p T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2 \right)$$

Soit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2} \quad (\text{III.6})$$

III.7.5.2 Relation entre les nombres de Mach amont et aval de l'onde de choc :

L'équation de continuité :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{Ma_{a1} V_{S1}}{Ma_{a2} V_{S2}}$$

$$\frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{Ma_{a1}}{Ma_{a2}} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

Soit :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{Ma_{a1}}{Ma_{a2}} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (\text{III.7})$$

La combinaison des équations (III.5), (III.6) et III.7) permet de trouver une relation entre les nombres de Mach à l'amont et à l'aval de l'onde de choc :

$$\frac{1 + \gamma Ma_1^2}{1 + \gamma Ma_2^2} = \frac{Ma_{a1}}{Ma_{a2}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_2^2}}$$

La résolution de cette équation se fait en élevant les deux membres au carré, puis en notant qu'elle est symétrique en Ma_1 et Ma_2 .

$Ma_1^2 = Ma_2^2$ Est donc la première solution de cette équation du deuxième degré, la seconde solution est :

$$Ma_2^2 = \frac{Ma_1^2 + [2/(\gamma - 1)]}{[2\gamma Ma_1^2 / (\gamma - 1)] - 1} \quad (\text{III.8})$$

Cette relation entre Ma_1 et Ma_2 est représentée sur la figure .47

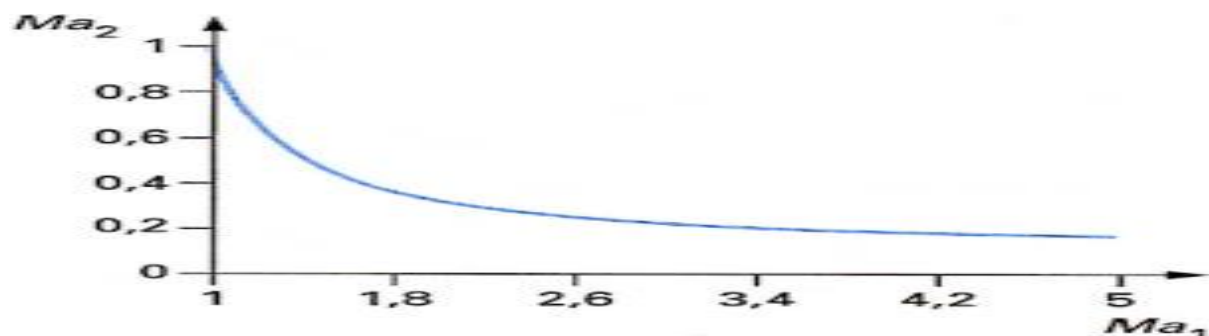


Figure 46. Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc

III.7.5.3. Expressions des paramètres en fonction du nombre de Mach amont :

La relation (III.8) permet d'exprimer les rapports des diverses grandeurs en fonction du seul nombre de Mach amont. Ainsi, on a :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)Ma_1^2} \right) \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \frac{2+(\gamma-1)Ma_1^2}{(\gamma+1)Ma_1^2} \quad (\text{III.11})$$

III.7.5.4 Relation de Rankine-Huguenot pour les ondes de choc droites :

La relation de Rankine-Huguenot lie les pressions amont et aval aux masses volumiques amont et aval. Elle s'obtient en éliminant le nombre de Mach Ma_1 entre les relations (III.10) et (III.11) :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)P_2 + (\gamma-1)P_1}{(\gamma+1)P_1 + (\gamma-1)P_2} \quad (\text{III.12})$$

Où :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2} \quad (\text{III.13})$$

La Figure 47 permet de comparer la loi de l'évolution du choc à celle d'une transformation isentropique.

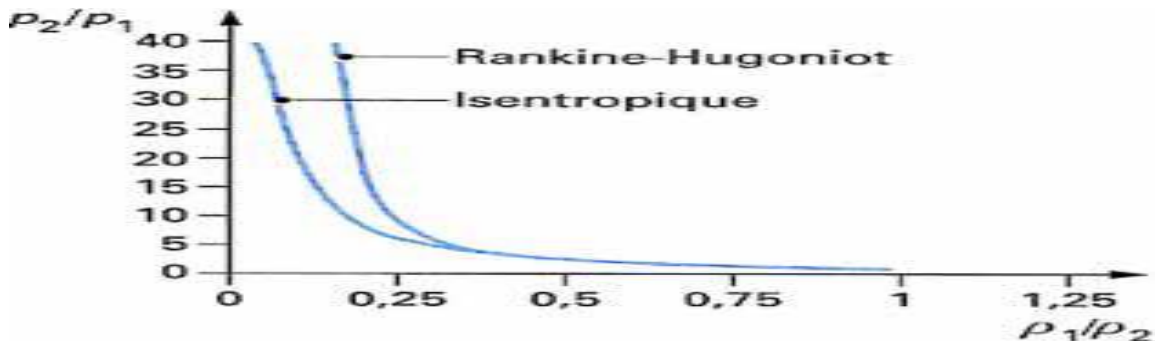


Figure 47.Évolutions du fluide : isentropique et lors de la traversée d'une onde de choc.

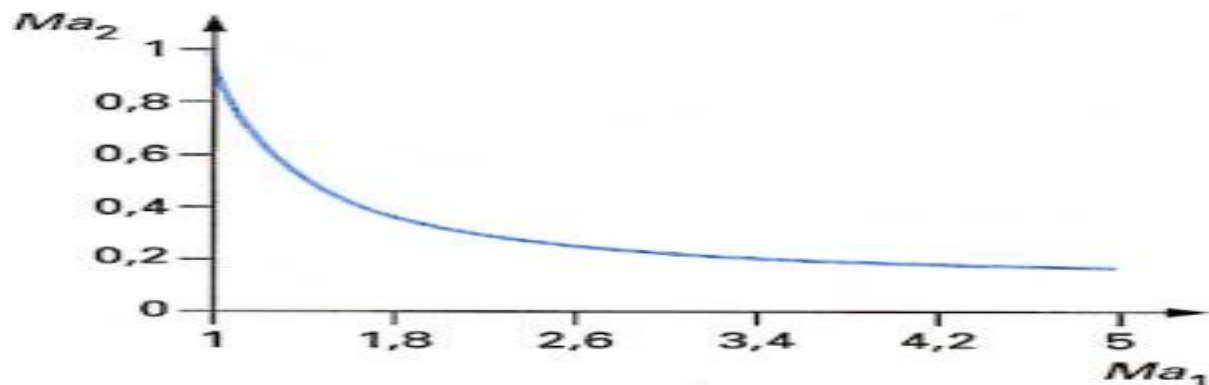


Figure 48.Relation entre les nombres de Mach de l'écoulement à l'amont et à l'aval d'une onde de choc.

Lorsque l'onde de choc se produit à un très grand nombre de Mach, P_2/P_1 est élevé (III.9).
On constate alors que :

$$\frac{P_2}{P_1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$

Dont la valeur est égale à 6 pour un gaz tel que l'air ($\gamma = 1,4$);

Lorsque le nombre de Mach amont est faible, de l'ordre de l'unité :

La transformation de Rankine-Hugoniot se confond avec la transformation isentropique

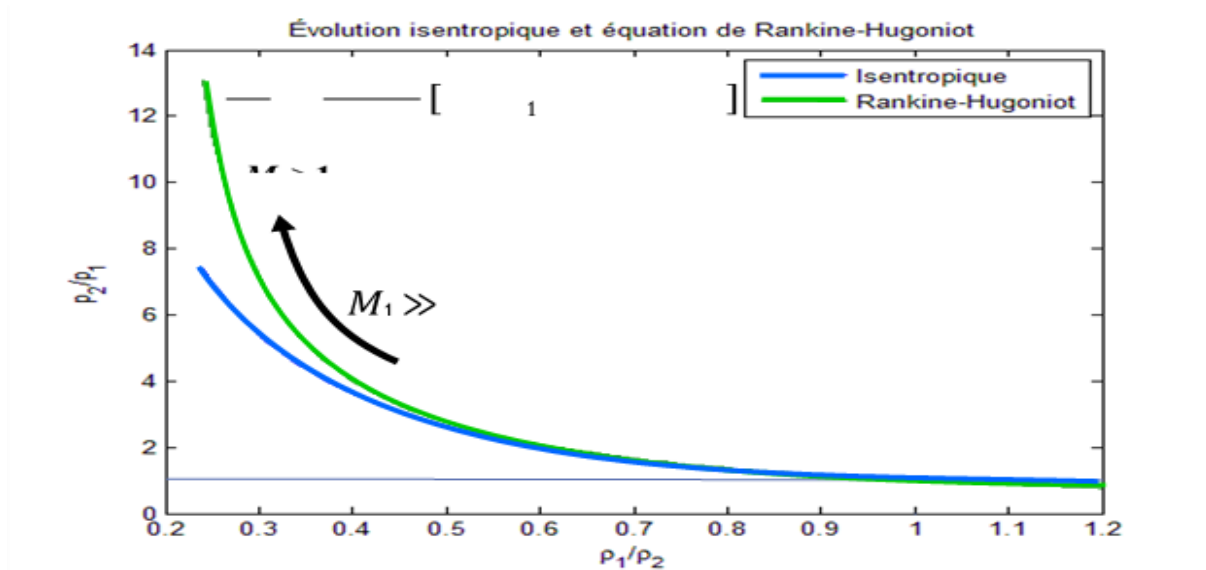


Figure 49. Évolution isentropique et équation de Rankine –Hugoniot.

III.7.5.6. Relation de Prandtl-Mayer :

La relation de Prandtl-Mayer relie les vitesses amont et aval de l'onde de choc à la vitesse du son critique pour l'écoulement amont ou pour l'écoulement aval. Par définition, la vitesse du son critique est la vitesse sonique obtenue dans un écoulement isentropique. Pour un fluide en écoulement à P_1 et T_1 , les conditions génératrices sont P_{01} et T_{01} . Dans un écoulement isentropique à partir de ces conditions génératrices, la vitesse sonique est obtenue au col de l'écoulement lorsque le taux de détente correspond au taux de détente critique :

$$V_{Si} = V_{S*} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} r T_{01}}$$

Pour le même fluide s'écoulant à l'aval de l'onde de choc, les conditions génératrices sont p_{02} et T_{02} . Or, les températures des états générateurs sont identiques. Ainsi, on a :

$$T_{02} = T_{01} \text{ et } V_{S*1} = V_{S*2}$$

On définit ainsi, pour tout écoulement un nombre de Mach critique qui vaut, par définition :

$$Ma_* = \frac{V}{V_{s*}}$$

Ce nombre de Mach critique est relié au nombre de Mach de la manière suivante :

$$Ma_*^2 = \frac{V^2}{V_{s*}^2} = \frac{V^2 V_s^2}{V_s^2 V_{s*}^2} = Ma^2 \frac{\gamma r T}{2 \gamma r T_0} = Ma^2 \frac{\gamma + 1}{2} \frac{T}{T_0}$$

Et, compte tenu de la relation :

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)$$

Donnant le rapport T/T_0 :

$$Ma_*^2 = (\gamma + 1) Ma^2 \frac{1}{2 + (\gamma - 1) Ma^2} \quad (\text{III.14})$$

Soit aussi :

$$Ma^2 = \frac{2 Ma_*^2}{\gamma + 1 - (\gamma - 1) Ma_*^2} \quad (\text{III.15})$$

En portant cette expression du nombre de Mach dans l'équation (III.8) liant les nombres de Mach amont et aval, on trouve :

$$Ma_1^* Ma_2^* = 1 \quad (\text{III.16})$$

Qui s'écrit également :

$$V_1 V_2 = V_{s*}^2 \quad (\text{III.17})$$

C'est l'équation de Prandtl-Mayer qui donne une relation simple entre les vitesses du fluide à l'amont et à l'aval de l'onde de choc et la vitesse du son critique.

III.7.5.7. Variation d'entropie à la traversée d'une onde de choc :

L'irréversibilité d'une onde de choc peut être mesurée par la création d'entropie s due à cette discontinuité. On peut la calculer simplement en appliquant, par exemple, la relation :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1}$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - r \ln \frac{P_2}{P_1}$$

III.8. Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les différentes relations régissant l'écoulement d'un fluide compressible dans une tuyère propulsive ainsi avant d'entamer notre calcul numérique avec la simulation de notre tuyère, il est nécessaire d'avoir des connaissances et des généralités sur les différents types de tuyères pour permettre de bien comprendre et analyser les écoulements à l'intérieur de la tuyère.



Chapitre IV

La modélisation des écoulements compressibles turbulents

IV.1. Introduction :

En pratique la majorité des écoulements sont turbulents. Dans les applications scientifiques et industrielles, la turbulence améliore le transport de la chaleur et de la masse pour préserver le bon fonctionnement de ces applications. Dans les turbomachines, ces écoulements interviennent en aérodynamique interne, dans le cas, par exemple, des chambres de combustion, tuyères ou turbines. En aérodynamique externe, on peut citer l'exemple des arrière-corps ou bien des écoulements sur le fuselage ou sur la nacelle d'un avion.

Dans ce qui suit nous réécrivons brièvement la forme des équations de bilan régissant la dynamique d'un écoulement turbulent, c'est-à-dire les équations de Navier – Stokes pour le champ de vitesse auxquelles s'ajoute l'équation de conservation de la masse et de l'énergie. L'établissement de ces équations est exposé en détails dans de nombreux ouvrages de la mécanique des fluides. Nous fournissons ensuite les équations de l'écoulement moyen résultant, avec le modèle de turbulence k-ε standard.

IV.2. Equations de base des écoulements des fluides :

IV.2.1. Les équations de conservation :

Les écoulements de fluides dans les tuyères convergente-divergentes sont gouvernées par les équations de Navier-Stokes instantanées. Ces équations expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour un fluide réel dans un volume de contrôle pris arbitrairement du domaine de l'écoulement. Ces équations de conservation s'écrivent sous la forme vectorielle suivante [33-39] :

- **L'équation de conservation de la masse :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Où t désigne le temps, ρ la masse volumique et \vec{V} vecteur vitesse.

- **L'équation de conservation de la quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \text{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p \vec{I} - \vec{\tau}) = \rho \vec{f} \quad (\text{IV.2})$$

Où P désigne la pression statique, \vec{I} le tenseur identité, $\vec{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses, \otimes le produit tensoriel de vectrices vitesses et \vec{f} les forces volumiques par unité de masse

- **L'équation de conservation de l'énergie :**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \text{div}(\rho E \vec{V} + P \vec{V} - \vec{\tau} \cdot \vec{V} \vec{q}) = \rho \vec{f} \vec{V} \quad (\text{IV.3})$$

Où \vec{q} désigne le flux de chaleur par unité de surface et E l'énergie totale par unité de masse.

L'énergie totale E est définie comme étant la somme de l'énergie interne e et de l'énergie cinétique (par unité de masse) :

$$E = e + \frac{1}{2}V^2 \quad (\text{IV.4})$$

Le système forme par les équations (IV.1), (IV.2) et (IV.3) est présente sou la forme d'équations aux dérivées partielles .il permet de déterminer, à partir de conditions initiales données, l'évolution des grandeurs caractéristiques principales de l'écoulement : le champ de la masse volumique ρ , le champ de la quantité de mouvement $\rho\vec{V}$ par unité de volume et le champ de l'énergie totale ρE par unité de volume.

IV.2.2. Hypothèses et lois des comportements :

Le système forme par les équations (IV.1), (IV.2), (IV.3) est ouvert. Pour fermer le problème, il faut préciser l'expression de la pression statique p , du tenseur des contraintes visqueuses $\vec{\tau}$ et du flux de chaleur \vec{q} en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement :

$$(P, \vec{\tau}, \vec{q}, \vec{f}) = F(\rho, P\vec{V}, \rho E) = ? \quad (\text{IV.5})$$

Les expressions de la fonction F sont déterminées par le choix du comportement de l'écoulement de fluide dans les tuyères.

- **L'état du fluide :**

Les fluides considérés dans les écoulements de tuyères sont des gaz. La masse volumique des gaz est suffisamment faible pour que les effets de gravite puissent être négligés. On suppose également l'absence de toute force magnétique ou électrique sur le fluide. Ainsi les forces volumiques \vec{f} sont considérées nulles :

$$\rho\vec{f} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

- **Le comportement thermodynamique :**

La loi d'état adoptée, décrivant les variations de pression statique liées aux variations de températures, est la loi du gaz parfait

En supposant que le fluide dans la tuyère est un gaz parfait, la pression p et l'énergie interne e sont données par [40] :

$$P = \rho r T \quad (\text{IV.7})$$

$$e = c_v T \quad (\text{IV.8})$$

T : désigne la température absolue

c_v : La chaleur spécifique à volume constant

r : La constant du gaz considéré.

La constante du gaz r représente le rapport de la constante universelle des gaz parfait R à la masse molaire M du gaz en question ($R=8.314 \text{ J} \cdot \text{mole}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

$$r = \frac{R}{M} \quad (\text{IV.9})$$

r : est relié aux chaleurs spécifiques c_v , c_p par la relation de Meyer :

$$r = c_p - c_v \quad (\text{IV.10})$$

La pression peut être donnée en fonction des grandeurs caractéristiques de l'écoulement par :

$$P = \rho(\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} V^2 \right) \quad (\text{IV.11})$$

Où γ est le rapport des chaleurs spécifiques :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{IV.12})$$

- **Le comportement dynamique :**

Les fluides dans les écoulements de tuyères sont considérés réels (fluides visqueux). En adoptant l'hypothèse du fluide Newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses $\bar{\tau}$ est donné par la loi :

$$\bar{\tau} = 2\mu\bar{S} + \eta (\text{div}(\vec{V})) \bar{I} \quad (\text{IV.13})$$

- μ : le coefficient de viscosité moléculaire
- η : le coefficient de viscosité volumique.

En utilisant l'hypothèse de Stokes : $3\eta + 2\mu = 0$, le coefficient de viscosité volumique η est donné en fonction de μ par :

$$\eta = -\frac{2}{3}\mu \quad (\text{IV.14})$$

Le tenseur \bar{S} est le tenseur des taux de déformation, il est relié au gradient de vitesse par la relation :

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V} \right)^t \right] \quad (\text{IV.15})$$

Le tenseur des contraintes peut être donné en fonction du vecteur vitesse (\vec{V}) par :

$$\bar{\tau} = \mu \left[\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{V} \right)^t \right] = -\frac{2}{3}\mu (\text{div}(\vec{V})) \bar{I} \quad (\text{IV.16})$$

- **Le comportement thermique :**

Les fluides dans les écoulements de tuyères sont des fluides conducteurs de chaleur. Selon la loi de Fourier, le vecteur de flux de chaleur (flux de chaleur par unité de surface et de temps) \vec{q} est proportionnel au gradient de température:

$$\vec{q} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{IV.17})$$

Où λ est le coefficient de la conductivité thermique.

Ce coefficient peut être écrit en fonction du nombre de Prandtl, qui exprime le rapport entre les effets thermiques et les effets visqueux. Le nombre de Prandtl s'écrit comme suit :

$$\text{Pr} = (\mu c_p) / \lambda \quad (\text{IV.18})$$

Le nombre de Prandtl est supposé constant : $\text{Pr}=0.72$ pour l'air.

La viscosité dynamique μ est donnée par la loi de Sutherland. Elle se mesure en pascal-seconde (Pa.S.) [33] :

$$\mu(T) = \frac{B_s \sqrt{T}}{1 + \frac{C_s}{T}} \quad (\text{IV.19})$$

Dans le cas de l'air la formule de Sutherland est bien vérifiée jusqu'à des températures de 3000 K [33]. Les valeurs des constantes de la loi de Sutherland sont :

$$B_s = 1.454 \cdot 10^{-6} \text{ Et } C_s = 110,4$$

IV.2.3 Les équations de Navier-Stokes moyennées en temps :

La modélisation de la turbulence est prise en compte à l'aide d'une approche statistique dans laquelle chaque propriété de l'écoulement de fluide ϕ est décomposée selon le formalisme de Reynolds en une partie moyenne $\bar{\phi}$ et une partie fluctuante ϕ' [41] :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{IV.20})$$

Pour les écoulements compressibles, on utilise le formalisme de Favre. Chaque propriété de l'écoulement est décomposée en une partie moyenne pondérée par la masse volumique est une partie fluctuante [42], [43] :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (\text{IV.21})$$

Avec :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}}$$

Le formalisme de Reynolds est appliqué à la masse volumique et à la pression. Pour les autres propriétés, on applique le formalisme de Favre.

L'injection de cette décomposition dans le système d'équations de Navier-Stokes instantanées avec l'application de l'opération de moyenne, permettent d'obtenir le système des équations RANS au sens de Favre [44] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \text{div}(\bar{\rho}\vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\vec{v}) + \text{div}(\bar{\rho}\vec{V}) \text{div}(\bar{\rho}\vec{V} \otimes \vec{V} + \bar{p}\bar{I} - \bar{\tau} - \bar{\tau}_r) = \vec{0} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}(\tilde{E} + k)) + \text{div}(\bar{\rho}(\tilde{E} + k)\vec{V} + \bar{\rho}\vec{V} - (\bar{\tau} + \bar{\tau}_r)\vec{V} + \vec{q} + \vec{q}_t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

Le passage à la moyenne des équations de Navier-Stokes fait apparaître des termes supplémentaires. On n'a retenu que les termes principaux suivants :

L'énergie cinétique du mouvement turbulent :

$$k = \frac{1}{2} \overline{\rho v''^2} \quad (\text{IV.23})$$

Le tenseur de Reynolds ou tenseur des contraintes turbulentes :

$$\bar{\tau}_r = -\overline{\rho v'' \otimes v''} \quad (\text{IV.24})$$

Le flux de chaleur turbulent, il représente l'enthalpie transportée par les fluctuations turbulentes :

$$\vec{q}_t = -\overline{\rho v'' h''} \quad (\text{IV.25})$$

IV.3. La modélisation par la viscosité turbulente :

Les modèles de turbulence les plus couramment utilisés pour la modélisation des écoulements dans les tuyères, sont formulés dans le cadre de l'hypothèse de Bousines et font intervenir le concept de viscosité turbulente μ_t [45], [46].

Selon cette hypothèse, le tenseur de Reynolds $\bar{\tau}_r$ est exprimé par analogie le tenseur des contraintes visqueuses, comme le produit du tenseur de déformation moyen et d'une viscosité turbulente :

$$\bar{\tau}_r = \mu_t \left[\overline{\text{grad}\vec{V}} + \left(\overline{\text{grad}\vec{V}} \right)^t - \frac{2}{3} \left(\text{div}\vec{V} \right) \bar{I} \right] - \frac{2}{3} k \bar{I} \quad (\text{IV.26})$$

Le terme $\frac{2}{3} k$ représente une pression dynamique turbulente. Il est associé à la pression hydrostatique \bar{p} pour former une pression modifiée ou effective :

$$\bar{p}_{\text{ef}} = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k \quad (\text{IV.27})$$

De manière analogue, le flux de chaleur turbulent \vec{q}_t est relié au gradient de température moyenne par analogie à la loi de Fourier:

$$\vec{q}_t = \lambda_t \overline{\text{grad}}(\tilde{T}) \quad (\text{IV.28})$$

Où λ_t est une conductivité thermique turbulente. Elle est reliée à la viscosité turbulente par l'intermédiaire du nombre de Prandtl turbulent Pr_t donné par :

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t} \quad (\text{IV.29})$$

Le nombre de Prandtl turbulent est supposé constant : $Pr_t=0.9$ pour l'air. L'expression de l'énergie totale en moyenne est modifiée par :

$$\vec{\bar{E}} = \vec{\bar{E}} + k \quad (\text{IV.30})$$

Les équations de Navier-Stokes moyennées en temps avec l'hypothèse de Boussinesq prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \text{div}(\bar{\rho}\vec{\bar{V}}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\vec{\bar{V}}) + \text{div}(\bar{\rho}\vec{\bar{V}}) \text{div}(\bar{\rho}\vec{\bar{V}} \otimes \vec{\bar{V}} + \bar{p}_{ef}\bar{\mathbf{I}} - \bar{\tau}^t) = \vec{0} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{E}_{ef}) + \text{div}(\bar{\rho}\bar{E}_{ef}\vec{\bar{V}} + \bar{p}_{ef}\vec{\bar{V}} - \bar{\tau}^t\vec{\bar{V}} - \bar{q}^t) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Dans le système ci-dessus, les deux termes $\bar{\tau}^t$ et \bar{q}^t représente le tenseur des contraintes totales et le flux de chaleur total, somme des contributions laminaires et turbulentes. Les deux termes s'écrivent alors :

$$\bar{\tau}^t = (u + \mu_t) \left[\overrightarrow{\text{grad}}\vec{\bar{V}} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\vec{\bar{V}} \right)^t - \frac{2}{3}(\text{div}\vec{\bar{V}})\bar{\mathbf{I}} \right] - \frac{2}{3}k\bar{\mathbf{I}} \quad (\text{IV.32})$$

$$\bar{q}^t = -\left(\frac{u}{Pr} - \frac{\mu_t}{Pr}\right)c_p\overrightarrow{\text{grad}}(\bar{T}) \quad (\text{IV.33})$$

IV.4. Le modèle turbulent adopté en 2D axisymétrique :

Dans les écoulements de tuyère axisymétrique, il est possible de restreindre le domaine de calcul 3D en 2D axisymétrique. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes RANS seront écrites dans un système de coordonnées cylindriques (x, r, θ) , auquel on associe le vecteur vitesse \vec{V} (v_x, v_r, v_θ). En négligeant les dérivées ortho radiales, le transport des variables conservatives $(\bar{\rho}, \bar{\rho}v_x, \bar{\rho}v_r, \bar{\rho}\bar{E}_{ef})$ s'exprime par rapport aux deux coordonnées spatiales (x, r) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}v_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}v_r) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}v_xv_x + \bar{p}_{ef}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}v_xv_r) = \frac{\partial\bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{\tau}_{xr})}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}v_r) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}v_rv_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}v_rv_r + \bar{p}_{ef}) = \frac{\partial\bar{\tau}_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{\tau}_{rr})}{\partial r} + \frac{\bar{p}_{ef}-\bar{\tau}_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{E}_{ef}) + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{\rho}\bar{E}_{ef} + \bar{p}_{ef})v_x] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\bar{\rho}\bar{E}_{ef} + \bar{p}_{ef})v_r] = \frac{\partial}{\partial x}[\bar{\tau}_{xx}v_x + \bar{\tau}_{xr}v_r + \bar{q}_x] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r(\bar{\tau}_{xr}v_x + \bar{\tau}_{rr}v_r + \bar{q}_r)] \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}k v_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}k v_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial r}\right] + S_k \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\omega v_x) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{\rho}\omega v_r) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial r}\right] + S_\omega \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

Où les éléments du tenseur des contraintes de cisaillement sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{xx} = 2(\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3}\text{div}\vec{\bar{V}}\right) & \bar{\tau}_{rr} = 2(\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3}\text{div}\vec{\bar{V}}\right) \\ \bar{\tau}_{xr} = 2(\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right) & \bar{\tau}_{\theta\theta} = 2(\mu + \mu_t)\left(\frac{v_r}{r}\right) \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

Avec la divergence du champ de vitesse \vec{V} :

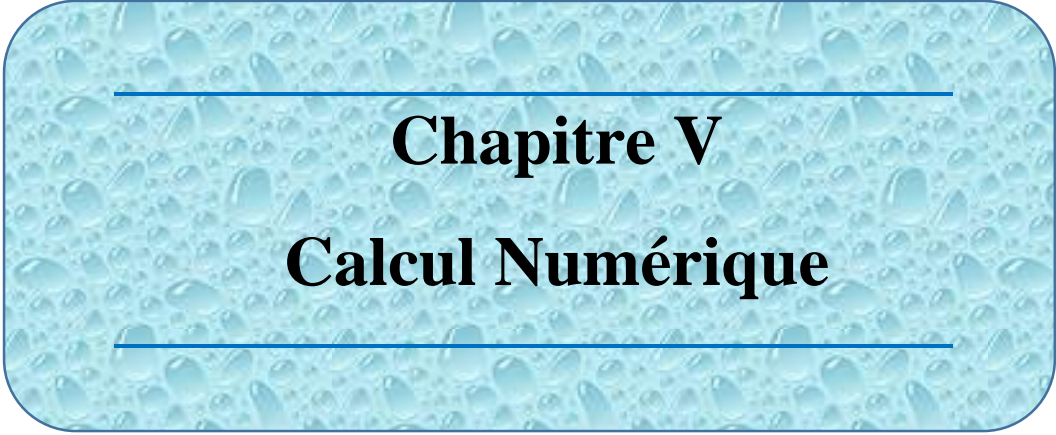
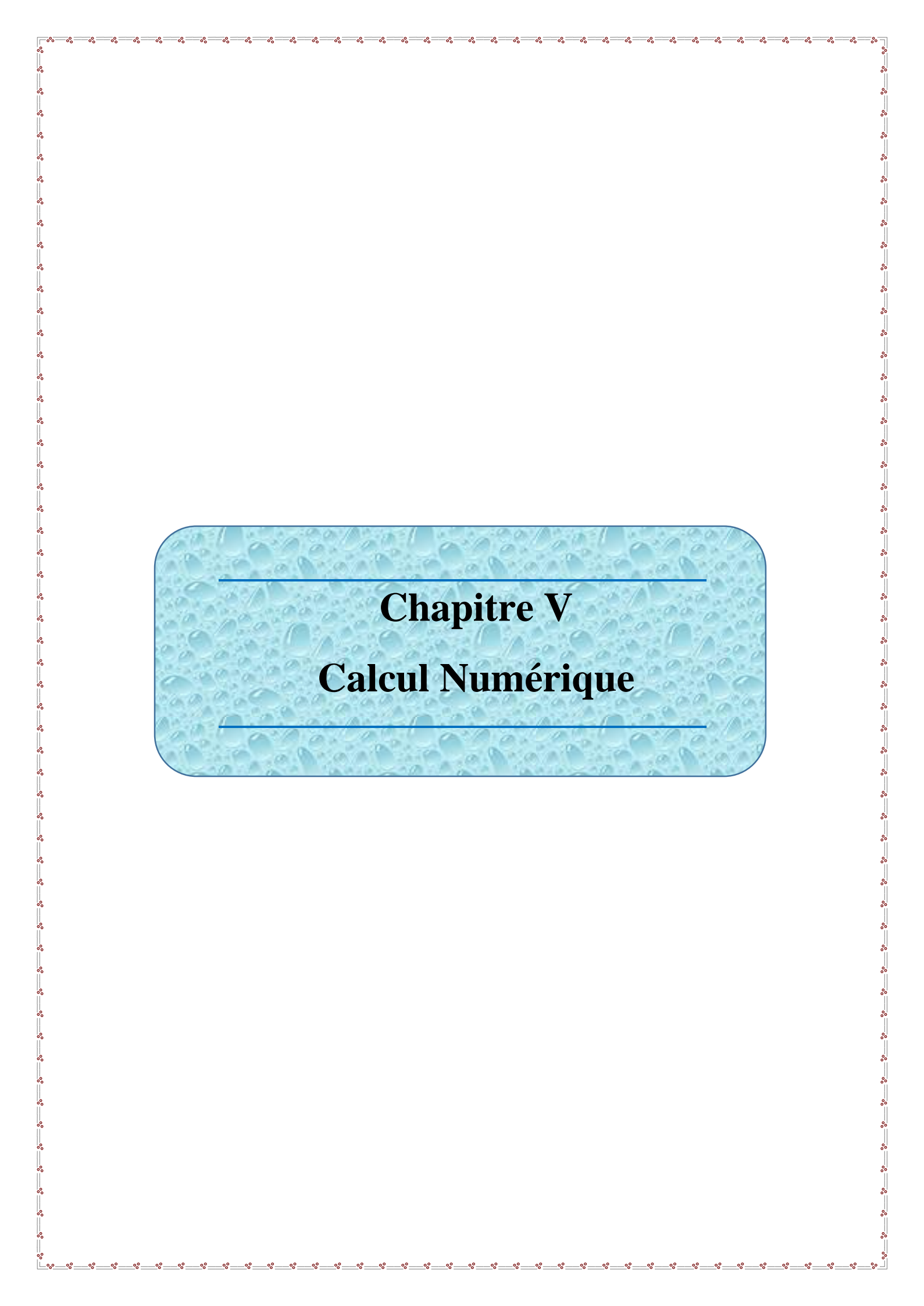
$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{\bar{v}_r}{r} \quad (\text{IV.36})$$

La viscosité turbulente (μ_t) est déterminée par l'un des modèles de turbulence (voir Annexe) :

- ✓ Le modèle de Spalart-Allmaras
- ✓ Le modèle k- ε
- ✓ Le modèle k- ω

IV.5. Conclusion :

Dans ce chapitre on a exposé les équations qui régissent le phénomène. On a montré qu'il n'est pas possible d'utiliser la moyenne de Reynolds pour le traitement statistique de la turbulence. La moyenne de Favre dans ce cas est la plus adaptée. On a aussi mis en évidence la nécessité de la modélisation de la turbulence et dans notre cas par un model RANS a deux équations.



Chapitre V

Calcul Numérique

V.1. Introduction :

Les simulations numériques de la dynamique des fluides plus souvent désignée par le terme anglais CFD (computational fluid Dynamics) est un terme générique qui désigne toutes les approches informatiques permettant de modéliser le comportement d'un fluide (liquide ou gaz) suivant un contexte défini par l'opérateur. La CFD est devenue un outil indispensable dans les sciences et la recherche scientifique et industrielles. Elles ont pour but de reproduire par le calcul le comportement d'un système décrit par un modèle très souvent constitué d'équations aux dérivées partielles. Ces équations correspondent à la traduction mathématique de lois scientifiques. La simulation numérique renforce donc l'étude mathématique (analyse) de ces équations et de leur résolution numérique.

Contrairement aux écoulements externes, les écoulements internes ont pour particularité l'absence de conditions aux limites à l'infini, on en conclue que l'influence des parois se manifeste dans toutes les directions, sauf éventuellement aux sections d'entrée et de sortie du fluide. Ces types d'écoulement sont particulièrement présents dans les systèmes de propulsion des avions et des fusées.

En prenant en compte la complexité de la modélisation de l'écoulement interne qui passe du régime subsonique au régime supersonique, l'étude et l'identification des caractéristiques des écoulements internes dans les tuyères supersoniques constituent un cas d'étude très probant, ce passage du subsonique au supersonique génère des effets de compressibilité non négligeables. La diversité des géométries possibles entraîne évidemment une grande variété dans la structure des écoulements (choc, décollement de couche limites, zones de recirculation). Ces phénomènes sévères rendent difficiles les simulations numériques.

La simulation est le moyen le plus efficace pour faire avancer la connaissance car il nous permet d'explorer des solutions inconnues et d'en observer plusieurs aspects, ce qui est bien souvent difficile ou impossible à travers l'expérience pratique.

Les écoulements de fluides, qu'ils soient internes ou externes, en régime laminaire ou turbulent sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles (E.D.P), qui est à la base de tout phénomène physique modélisé mathématiquement en équations de : de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie qu'il convient de résoudre pour connaître les caractéristiques du champ thermique et du champ d'écoulement.

La phase de discrétisation est une étape de l'approche numérique qui s'accorde avec le choix de la méthode de discrétisation pour le modèle mathématique sélectionné, et se divise en deux étapes :

- Discrétisation des équations
- Discrétisation de l'espace (maillage)

Le maillage ou discrétisation de l'espace consiste à remplacer l'espace continu par un nombre fini de points où les valeurs numériques des variables sont déterminées. Les équations seront discrétisées une fois le maillage défini, ce qui permet de transformer les équations de forme différentielles ou intégrales en équations algébriques discrètes, comportant les valeurs des inconnus qui sont reliées à chaque point du maillage.

Le maillage ou discrétisation de l'espace consiste à remplacer l'espace continu par un nombre fini de points où les valeurs numériques des variables sont déterminées. Les équations seront discrétisées une fois le maillage défini, ce qui permet de transformer les équations de forme différentielles ou intégrales en équations algébriques discrètes, comportant les valeurs des inconnus qui sont reliées à chaque point du maillage.

Pour exécuter un schéma numérique il faut suivre les étapes suivantes :

1. Le choix de la méthode de discrétisation des équations.
2. L'analyse de l'algorithme numérique sélectionné, cette étape concerne l'analyse des qualités du schéma en termes de stabilité et de convergence.
3. Choix de la méthode de résolution pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires dans le temps, pour le système algébrique, le traitement itératif et éventuellement les non linéarités.

V.2. Les méthodes de discrétisation :

Il existe deux grandes familles de méthode de discrétisation :

V.2.1. Les méthodes d'approximation des équations :

- Méthode des différences finies
- Méthode des volumes finis

Selon ces méthodes, on cherche une solution exacte des équations approchées

V.2.2. Les méthodes d'approximation des solutions :

- Méthode spectrale
- Méthode des éléments finis

Lors de l'exécution de ces méthodes, on cherche une solution approchée à partir des équations exactes.

De nos jours en CFD la méthode des volumes finis est la plus appliquée, elle discrétise directement la forme intégrale des équations de conservations. Sa généralité et sa simplicité et

la facilité avec laquelle elle peut s'appliquer aux maillages structurés et non structurés en font son succès.

Bien comprendre et assimiler cette méthode aide énormément dans le suivi des développements récents derrière les outils CFD ainsi que dans l'interprétation des résultats obtenus par l'application des codes commerciaux sur des problèmes pratiques (ex : fluent).

V.3. La méthode des différences finis :

Particulièrement simple à appliquer sur le maillage uniforme et basée sur les propriétés du développement de TAYLOR, la méthode des différences finies a été appliquée pour la première fois par LEONARD EULER (1707-1783) [36], elle correspond à une estimation des dérivées par le rapport de deux différentielles en s'accordant avec la définition théorique de la dérivée. Pour une fonction $u(x)$, la dérivée au point x est définie par :

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} \quad (\text{V.1})$$

Le nom de cette méthode est simplement tiré du fait que si l'on retire la limite à l'équation (V.1), on finit par obtenir la « différence fini ». Si Δx est petit mais fini, l'expression de la droite est une approximation de la valeur exacte de U_x , l'approximation va être améliorée par la réduction de Δx .

Mais pour n'importe quelle valeur définie de Δx , une erreur est introduite (erreur de troncation) qui tend vers zéro quand $\Delta x \rightarrow 0$.

La puissance de Δx avec laquelle l'erreur tend vers zéro est appelée (l'ordre d'exactitude de l'approximation différentielle) qui peut être obtenue par le développement en série de Taylor de $[U(x + \Delta x)]$ au voisinage de x . Actuellement, le concept général d'approximation en différence finie est basé sur les propriétés du développement en série de Taylor.

Développant $U(x + \Delta x)$ au voisinage de x :

$$U(x + \Delta x) = U(x) + \Delta x U_x(x) + \frac{\Delta x^2}{2} U_{xx}(x) + \frac{\Delta x^3}{6} U_{xxx}(x) + \dots \quad (\text{V.2})$$

Développant $U(x - \Delta x)$ au voisinage de x :

$$U(x - \Delta x) = U(x) - \Delta x U_x(x) + \frac{\Delta x^2}{2} U_{xx}(x) - \frac{\Delta x^3}{6} U_{xxx}(x) + \dots \quad (\text{V.3})$$

V.3.1. Formule différentielle pour la première et la deuxième dérivative :

En appliquant la définition générale, on considère une dimension dans l'espace, suivant l'axe x où la discrétisation spatiale a été faite pour remplacer l'espace continu par un nombre discret de points $X_i, i=1, \dots, N$.

U_i Représente la valeur de la fonction $U(x)$ aux points X_i , $U_i = U(X_i)$ et on considère que l'espace entre deux points constants est égal à Δx (figure 51))

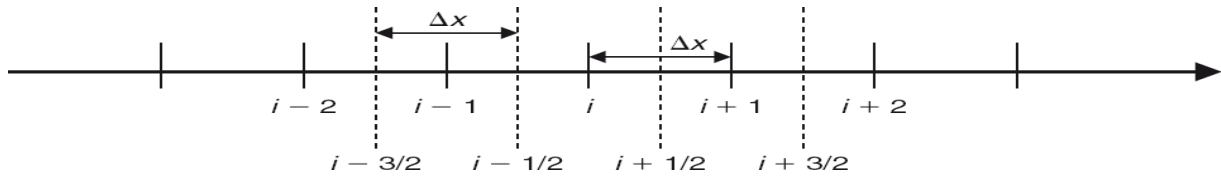


Figure 50. Maillage uniforme à une dimension suivant x .

- **La formule différentielle pour la première dérivée**

A partir de l'équation (V.2) on obtient :

- **Différentielle directe première**

$$\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U_x(x) + \frac{\Delta x}{2} U_{xx}(x) \quad (V.4)$$

- **Erreur de troncature**

$$\frac{U(x+\Delta x) - U(x)}{\Delta x} \approx U_x(x) + O(\Delta x) \quad (V.5)$$

On indique par U_i la valeur de la fonction $U(x)$ au point x_i :

$$(U_x)_i = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} (U_{xx})_i - \frac{\Delta x^2}{6} (U_{xxx})_i + \dots \approx \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (V.6)$$

Etant donné que cette formule comporte le point $(i+1)$ à la droite du point (i) , elle est appelée différentielle directe première différentielle directe première (first order forward difference). A partir de l'équation (V.3) on a :

- **Différence inverse première**

$$(U_x)_i \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (V.7)$$

Si on fait la soustraction de (V.2 - V.3) on obtient un schéma de différence centrale première :

$$(U_x)_i = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} (U_{xxx})_i + \dots \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (V.8)$$

Cette formule qui comporte le point de droite et de gauche à « i » est appelé différentielle centrale première.

Il est clair que la différentielle centrale est souvent la meilleure approximation, par rapport à la différentielle directe et inverse qui est reflétée par son deuxième ordre d'exactitude.

- **La formule différentielle pour la deuxième dérivée**

L'approximation en différence finie d'un ordre de dérivée élevé peut être obtenue par la répétition de la première application de premier ordre. Par exemple l'approximation de deuxième ordre pour la deuxième dérivée peut être obtenue par :

$$(U_{xx})_i = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (V.9)$$

V.4.1. Conditions sur la sélection des volumes finis :

N’importe quel type de maillage, structuré ou non structuré, peut être traité par la méthode des volumes finis vu sa généralité, un degré de liberté apparaît sur la manière de relier les volumes de contrôle aux points du maillage.

Ce qui crée une influence sur la position des points sur lesquels les valeurs de la fonction seront déterminées.

- **Approche maille centrée**

Considérons les figures (V.51), on peut définir, pour le même maillage une approche de maille centrée où les inconnues sont au centre des mailles et les lignes du maillage définissent les volumes finis et les surfaces.

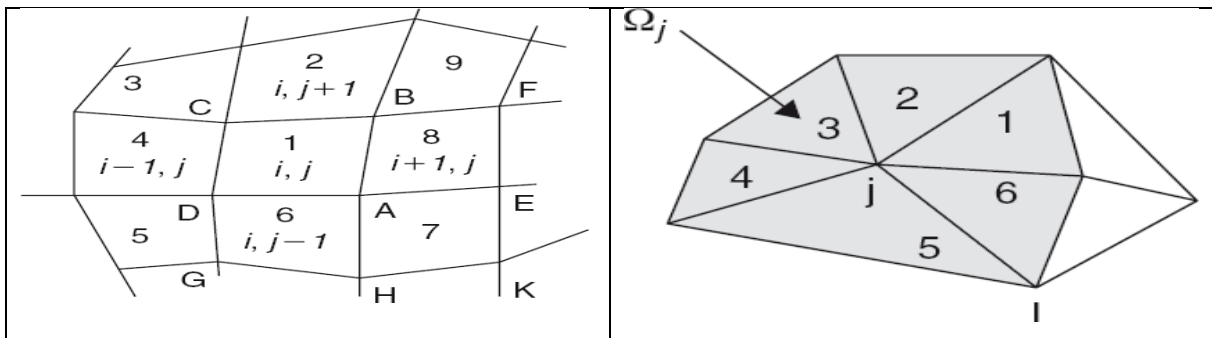


Figure 51. Maille centrée pour un maillage en volumes finis structurés et non structuré.

Le plus évident à faire pour les volumes de contrôle est de les mettre en coïncidence avec les mailles du maillage, comme le montre la figure (51) les variables sont associées à la maille, ainsi les variables du flux sont les valeurs moyennes à travers la maille et peuvent être considérées comme représentatives d’un ensemble de points dans la maille.

- **Approche maille-sommet**

Pour cette approche les inconnus sont définis aux coins du maillage. Les variables sont attachées aux sommets des mailles comme le montre les figures (52)

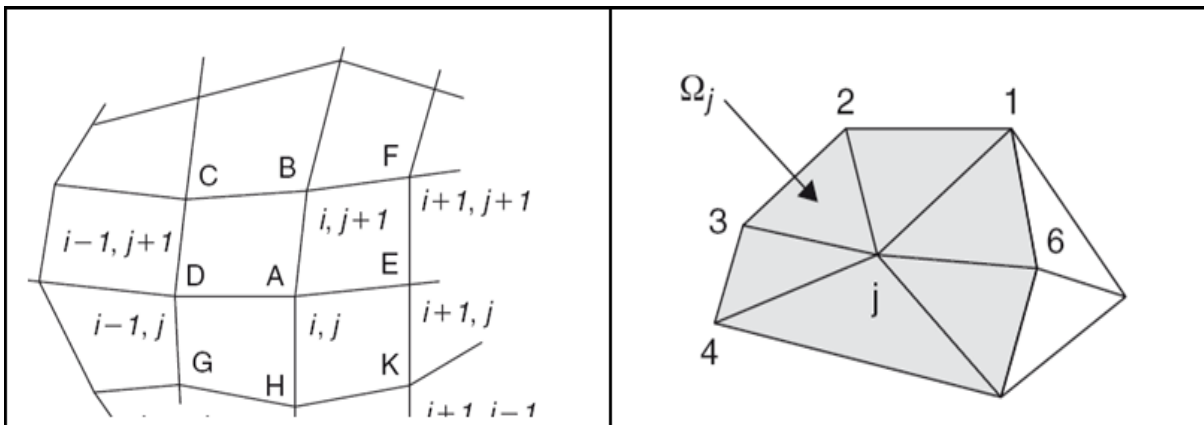


Figure 52. Maille-sommet pour un maillage non structuré en volumes finis et non structuré en volumes finis.

Pour la définition du volume de contrôle, en se référant à la figure (V.52), un choix s'impose, il s'agit de considérer les quatre mailles qui ont le point de maillage (i,j) en commun comme volume de contrôle GHKEFBCDG, associe au point (i,j).

Toutefois comme le montre la figure (53) de Mc Donald (1971) pour un volume de contrôle hexagonal pour un volume de contrôle trapézoïdal [47], plusieurs alternatives sont envisageables.

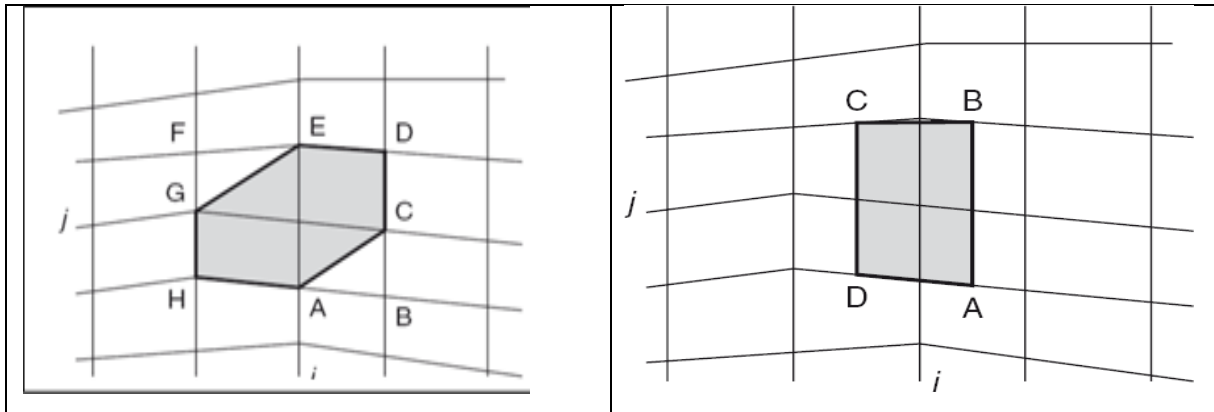


Figure 53. Volume de control hexagonal et trapézoïdal.

V.4.2. Définition de la discrétisation en volumes finis :

La loi de conservation sous la forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} d\vec{s} = \int_{\Omega} Q_v d\Omega \quad (V.10)$$

Avec :

Ω : Volume considéré

Q_v : Source volumique

\vec{F} : Flux

U : Variable conservative (quantité scalaire par unité de volume)

L'équation (V.10) est appliquée sur chaque volume de contrôle Ω_j associe au point j. L'équation sous la forme intégrale d'inconnu U_j attaché au point de maillage j pour le sommet ou au centre de la maille s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega + \oint_{S_j} \vec{F} d\vec{s} = \int_{\Omega_j} Q_v d\Omega \quad (V.11)$$

L'équation (V.11) est remplacée par sa forme discrète, où l'intégral volumique est exprimée comme valeur moyenne à travers la maille et l'intégral surfacique est remplacé par la somme à travers toutes les faces limites du volume de contrôle Ω_j :

$$\frac{\partial}{\partial t} = (U_j \Omega_j) + \sum_{\text{Faces}} \vec{F} \Delta \vec{S} = Q_{vj} \Omega_j \quad (V.12)$$

On se référant à la figure (51) et à la maille (i, j) on doit identifier U_j par $U_{(i,j)}$ avec la surface A, B, C, D et les termes de flux sont sommés à travers les faces AB, BC, CD, DA.

Dans la figure (52) la sommation des flux s'étend à travers les six faces 12, 23, 34, 45, 56 et 61. Ceci est la formulation générale de la méthode des volumes finis, et l'utilisateur doit définir pour le volume sélectionné Ω_j , comment estimer le volume, les surfaces du volume de contrôle et le flux dans les faces.

La méthode des volumes finis se distingue de la méthode des différences et éléments finis par quelques fonctions comme :

- Les coordonnées du point qui est la position précise de la variable U_j à l'intérieur du volume de contrôle Ω_j , n'apparaît pas explicitement par conséquent, U_j n'est pas nécessairement attaché à un point fixe à l'intérieur du volume de contrôle et peut être considéré comme une valeur moyenne de la variable d'écoulement « U » à travers le volume de contrôle.
- Les coordonnées du maillage apparaissent seulement dans la détermination des volumes des mailles et les surfaces des côtés. Si on considère le volume de contrôle ABCD autour du point 1 (voir figure 51) on aura seulement besoin des coordonnées A, B, C, D
- En absence des termes de sources, la formulation en volumes finis montre que la variation de la valeur moyenne « U » à travers l'intervalle de temps Δt est égale à la somme des flux échangés entre les deux mailles adjacentes.

Pour un écoulement permanent, la solution numérique est obtenue comme résultat de la différence de tous les flux entrants et quittant le volume de contrôle.

$$\sum_{Faces} \vec{F} \Delta \vec{S} = 0 \quad (V.13)$$

V.5. Le maillage :

Dans la création d'une simulation CFD la génération du maillage est la partie essentielle, vu que la simulation numérique ne peut commencer sans avoir un maillage adéquat.

Il s'agit de modéliser un problème physique à travers un système d'équations, puis de le résoudre dans le domaine du calcul représentant une géométrie particulière.

Des méthodes ont été développées dans le but d'aider les utilisateurs de l'outil numérique à générer des maillages avec la meilleure manière possible. Le choix du type de maillage est souvent un problème.

Le deuxième choix est de sélectionner dans l'une ou l'autre possibilité le type de l'élément, une fois le maillage généré, le solveur (ex : fluent) va évaluer les surfaces et les volumes en se basant sur les coordonnées des points de maillage et la forme des éléments.

- On commence par le choix de maillage (structural et non structural) en se basant sur les propriétés du solveur et le niveau de complexité de la géométrie.
- Le second choix est de sélectionner dans l'un ou l'autre choix le type de l'élément. Une fois le maillage est généré le solveur (ex : fluent) va évaluer les surfaces et les volumes en se basant sur les coordonnées des points de maillage et la forme des éléments.

V.5.1. Notions de maillage :

- **Nœuds et éléments**

La modélisation numérique se base sur la reformulation des équations de conservation sur des volumes Ω élémentaires ou discrets, appelés éléments ou mailles. Associés à ces éléments, nous retrouvons les nœuds de discrétisation, c'est-à-dire les points de résolution des équations discrètes, qui selon la méthode de discrétisation employée peuvent aussi bien et replacés aux sommets des éléments qu'en leur centre ou encore sur les faces.

Les Éléments et les nœuds associés composent le maillage. La figure (54) illustre la notion de maillage.

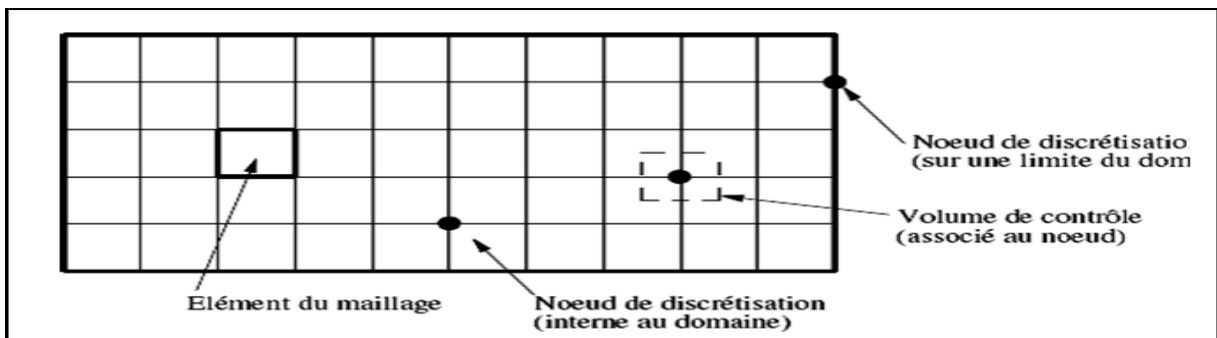


Figure 54. Illustration de la notion du maillage.

- **Types d'éléments**

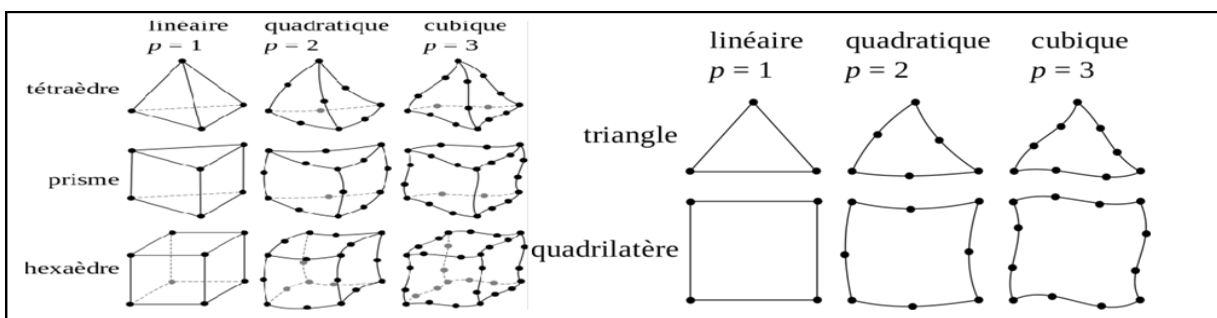


Figure 55. Éléments de maillage.

V.5.2. Classification des méthodes de maillage :

La classification de maillage est basée sur leurs caractéristiques ou selon la méthode utilisée pour les générer. Parmi les grandes lignes de cette classification on distingue :

- **Les maillages sont caractérisés selon leurs propriétés :**
 - ✓ Régulier structuré ;
 - ✓ Hybrides ;
 - ✓ Selon leur forme géométrique (ex : o, c, i...).
 - ✓ Curviligne adapté ;
 - ✓ Non structuré ;
- **Selon la méthode utilisée pour les générer :**
 - ✓ Interpolation transfinie ou technique algébrique ;
 - ✓ Equation différentielle ou transformation conforme ;
 - ✓ Décomposition par blocs ;
 - ✓ Décomposition hiérarchique.
 - ✓ Triangulation de Delaunay ;
 - ✓ Avance de front ;

Généralement le type de classement utilisé est basé sur la propriété structurée ou non structurée des maillages qui se rapportent à la nature de la connectivité entre les éléments.

Dans un maillage structuré, chaque nœud est entouré exactement du même nombre de nœuds. Une différence entre les maillages structurés et les maillages non structurés réside dans la présence de lignes (surfaces) ou des directions clairement identifiables à l'intérieur du maillage [47].

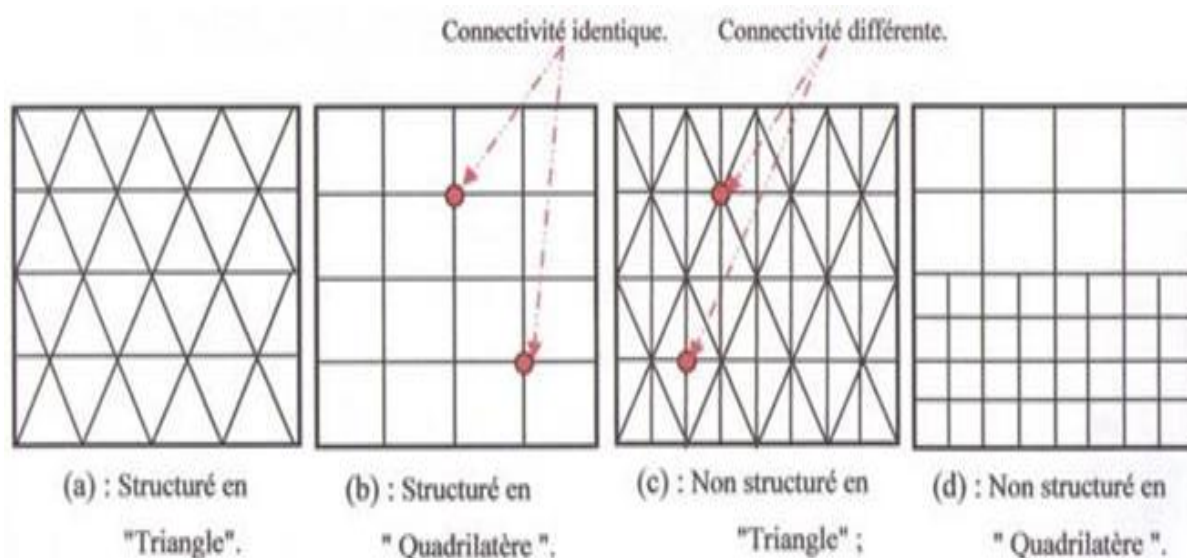


Figure 56. Maillage structuré et non structuré.

V.6. Maillage structuré :

Ce maillage peut être considéré comme le plus habituel pour les problèmes d'écoulement. On peut imaginer les lignes du maillage suivant le même sens que les lignes de courant, vu que l'écoulement est généralement aligné avec le corps solide.

Le domaine comporte des cellules quadrilatères en 2D ou hexaèdres (en 3D) et les nœuds sont identifiés par une paire en 2D (ou triplé en 3D) de nombre qui en dénote la position dans la grille.

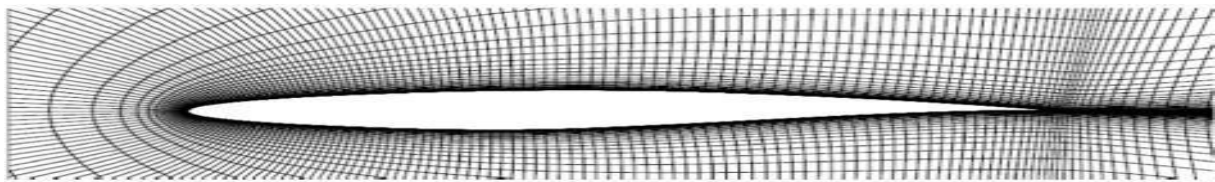


Figure 57. Maillage structuré autour d'un profil.

V.6.1. Techniques de génération de maillage structuré :

- **Méthode multi bloc**

Les maillages multi-bloc structurés sont générés par la décomposition du domaine manuellement en plusieurs blocs avec des formes simples, par la suite chaque bloc généré et maillé d'une manière structurée.

L'utilisateur peut définir le nombre de nœuds et la distribution le long de chaque bord des blocs. La Figure (58) montre une vue en 2D d'un maillage multi-bloc structuré hexaèdres dans une tuyère double galbe. Le système de blocs à gauche et le maillage à droite.

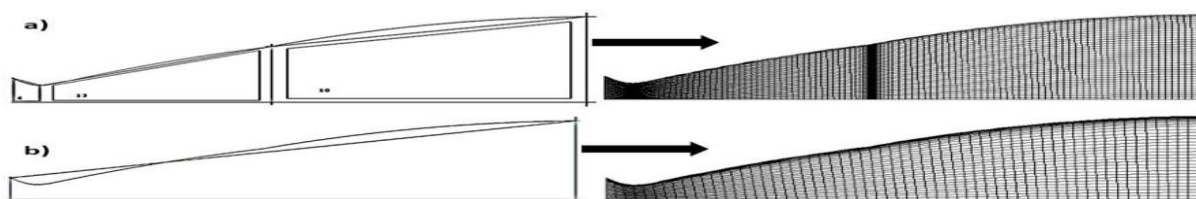


Figure 58. Maillage structuré dans une tuyère.

Malgré les difficultés rencontrées pour générer le maillage structuré, il a beaucoup d'avantages incontestables, en particulier pour les écoulements visqueux. Pour résoudre le flux dans la couche limite, il est relativement facile de générer un maillage quadri-angles avec des éléments allongés dans la direction parallèle à la paroi. Il est également facile de placer les bords perpendiculaires à la paroi. Ceci permet de minimiser l'erreur lors de l'évaluation du gradient de vitesse proche de la paroi. Enfin, une fois le bloc a été créé, il devient relativement facile de changer la densité du maillage en distribuant les points de grille en fonction des besoins du solveur, (Figure (58.a))

- **Méthode d'interpolation algébrique**

Afin de générer un maillage structuré, on utilise une séquence de transformations pour réduire les domaines de géométries arbitraires à des formes simples (par exemple triangle, quadrangle, hexaèdre...) ce qui représente un moyen simple et efficace. Après avoir défini un maillage structuré dans l'espace logique, la fonction de transfert est utilisée pour créer un maillage respectant les frontières du domaine.

Les fonctions de transfert et la distribution des points du maillage dans l'espace logique peuvent être choisies aléatoirement. Par contre, discrétiser les frontières dans l'espace physique se révèle souvent intéressant et plus efficace. Le contrôle de la distribution des points du maillage dans l'espace se fait avec des paramètres permettant le contrôle de la densité des points du maillage résultant du domaine physique.

L'étape primordiale de la méthode est la définition de la fonction de transfert. La fonction permet à travers des coefficients de trouver certaines valeurs spécifiques des coordonnées cartésiennes sur la frontière. Dans les géométries complexes, la détermination de la fonction de transfert se révèle laborieux.

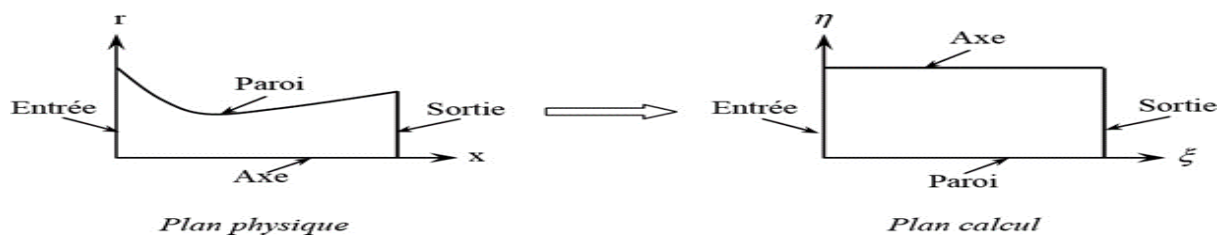


Figure 59. Transfert du domaine physique au domaine de calcul.

V.7. Maillage non structuré :

Les maillages non structurés les plus utilisés sont les maillages triangulaires, car il existe plusieurs manières de relier les mailles de cette forme, il est aussi facile de remplir aléatoirement n'importe quel domaine, ceci est notamment possible grâce à la flexibilité de la connectivité, enfin plusieurs méthodes sont possibles afin de générer ces maillages.

V.7.1. Techniques de génération de maillage non structuré :

Les techniques les plus couramment utilisées sont :

- Les méthodes d'Octree.
- Delaunay ;
- Avance de front ;

Elles sont brièvement résumées ci-dessous afin de donner une idée des différents défis de maillage triangulaire.

- **Méthode d'Octree**

La méthode d'Octree commence par la formation d'un premier quadri-angles immense qui englobe l'ensemble du domaine, on enchaîne en divisant récursivement l'hexaèdre jusqu'à ce que la taille des subdivisés octants soient égales à celles requises par l'utilisateur, (Figure .60). La facilité de réalisation ainsi que la vitesse d'exécution de cette méthode représente ses principaux avantages par rapport aux deux autres, même si des mailles de mauvaise qualité sont produites aux frontières, où il est fortement recommandé d'avoir un maillage de bonne qualité. Il peut également produire des maillages isotropes.

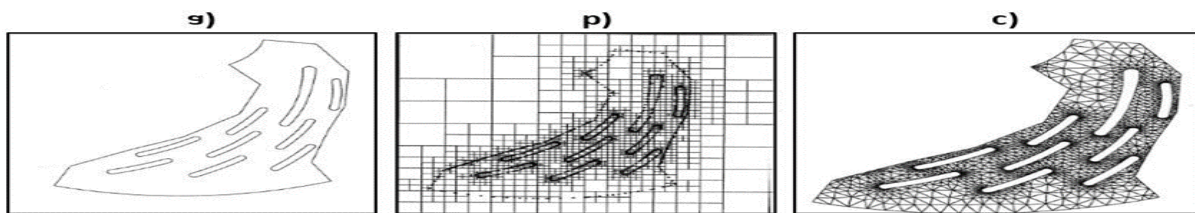


Figure 60. Progression du maillage sur une grille (méthode d'Octree).

L'avantage majeur des maillages non structurés est que leur génération peut aisément être automatisée sans que l'utilisateur n'ait excessivement à intervenir. Un des désavantages présents avec ces méthodes est qu'elles ne sont pas toutes capables de générer des maillages anisotropes, et ceux qui ne peuvent atteindre un degré limité d'anisotropie. L'absence d'anisotropie peut amoindrir fortement l'efficacité d'un maillage pour les simulations des écoulements visqueux. Cela réduit également l'efficacité du maillage pour la simulation CFD.

- **Méthode Delaunay**

Après avoir considéré un nuage de points, les méthodes Delaunay sont utilisées pour communiquer les points de telle sorte que chaque point est entouré par une région qui est plus proche de ce point que de tout autre. Des arêtes ou faces d'un élément sont construites à la limite entre les régions non chevauchées autour de chaque point. Cette méthode a pour principaux avantages son efficacité ainsi que la possibilité de toujours obtenir des maillages valides. Cependant il reste difficile de préserver la définition des limites correctes. Et cette méthode ne résout pas le problème de façon à générer le nuage initial de points à partir duquel le maillage est construit. La Figure (61) montre les étapes de maillage effectuée par cette méthode.

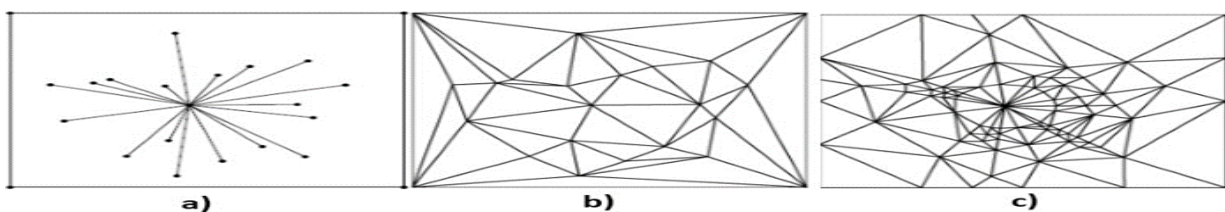


Figure 61. Étapes de Maillage par La triangulation de Delaunay en 2D.

- **Méthode Avance de front**

Le maillage par cette méthode débute par une triangulation initiale sur la surface limite et ensuite des tétraèdres sont construits sur les faces exposées, (Figure (62)). Comme chaque couche d'éléments est générée, un nouveau "front" sur les faces triangulaires est créé, sur

lequel la couche suivante des éléments est construite. Il reste difficile de définir la taille de l'élément et l'étirement dans le module de génération, cependant un avantage indéniable par rapport aux deux autres méthodes est que la définition des limites et la qualité sont facilement conservées.

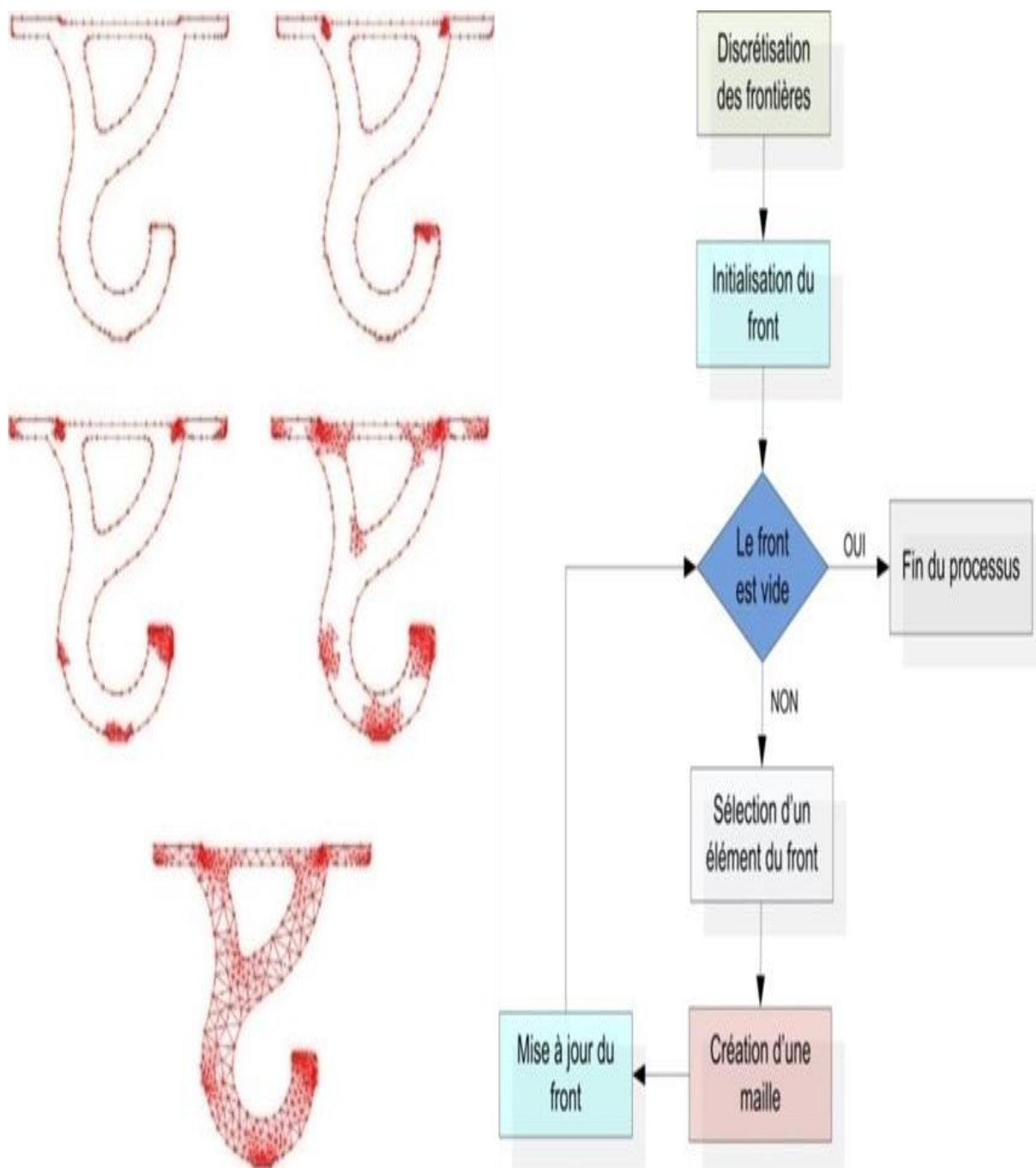


Figure 62. Progression et algorithme du maillage par la méthode frontale.

V.8. Comparaison entre maillage structuré et non structuré :

Tableau 2. Comparaison entre maillage structuré et non structuré.

Maillage structuré		Maillage non structuré
Avantages	plus facile de le générer en utilisant	Création de maillages triangulaires ou tétraédriques dans des géométries quelconques et complexes. Economie de points par rapport aux maillages structurés notamment dans les zones de raffinement. Possibilités d'associer différentes topologies d'éléments.
	Une géométrie à multi blocs	
	Economique en nombre d'éléments.	
	Présente un nombre inférieur de	
	Mailles par rapport à un maillage non	
	Structuré équivalent.	
	Réduit les risques d'erreurs	
	Numériques, car l'écoulement est aligné avec le maillage.	
Inconvénients	Difficile à générer dans les	Difficultés pour contrôler la densité des points dans une zone précise. Engendre des erreurs numériques, qui peuvent être très importantes si l'on compare avec le maillage structuré.
	Géométries complexes	
	Difficile d'obtenir une qualité de	
	Maillage pour les géométries	
	Complexe.	

V.9. Maillage hybride :

Comme son nom indique c'est un maillage généré par un mélange d'éléments de différents types, triangulaire ou quadrilatère en 2D, tétraédriques, prismatique ou pyramidaux en 3D.

Parmi ses avantages on peut citer :

- Combine entre les avantages du maillage structuré et ceux du maillage non structuré.

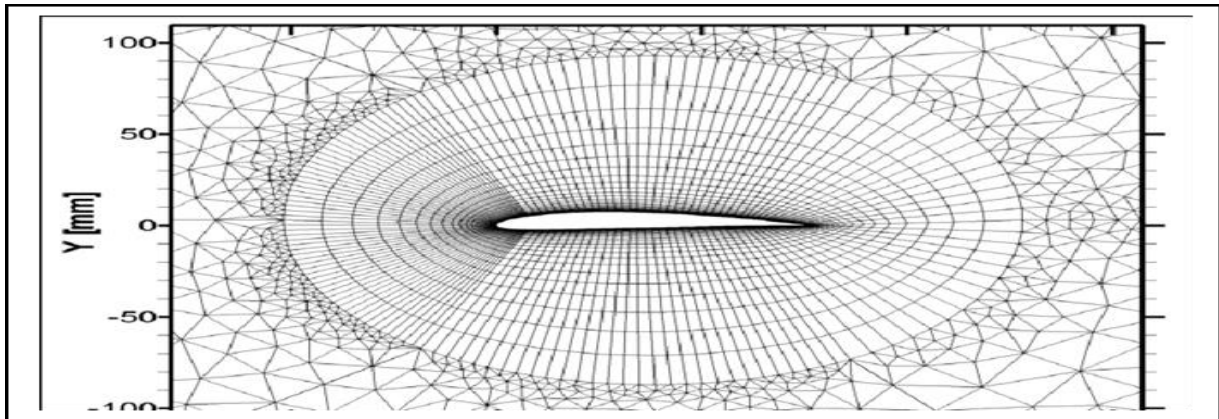


Figure 63. Maillage hybridée structure non structuré

Pratiquement, il n'existe pas de règle précise pour la création d'un maillage valable, cependant, il existe différentes approches qui permettent d'obtenir une grille acceptable.

Nous pouvons résumer ces règles ainsi :

- ✓ Maintenir une bonne Qualité des éléments ;
- ✓ Assurer une bonne Résolution dans les régions à fort gradient ;
- ✓ Assurer un bon Lissage dans les zones de transition, entre les parties à maillage grossier ;
- ✓ Minimiser le nombre Total des éléments (temps de calcul raisonnable). On utilise la formulation mnémotechnique « QRLT ».

➤ **Qualité :**

Afin d'obtenir un résultat de calcul précis, robuste et signifiant, la génération d'une excellente qualité de maillage est primordiale, cela se fait à travers les étapes suivantes :

- Une bonne résolution dans les régions présentant un fort gradient (couche limite, ondes de choc...) ;
- Minimisation des éléments présentant des distorsions (skewness en anglais) ;

Au final la qualité de maillage a un sérieux impacte sur la convergence, la précision de la solution et surtout sur le temps de calcul.

Les facteurs pour l'estimation de la qualité du maillage sont :

- Distorsion (skewness) : une bonne qualité de maillage est synonyme d'absence de grande distorsion d'élément (bon skewness)

Le facteur de distorsion est basé sur deux méthodes :

a) **Sur un volume équilatéral :**

$$Fd = \frac{\text{taillelement optimale} - \text{taillelement generé}}{\text{taillelement optimale}}$$

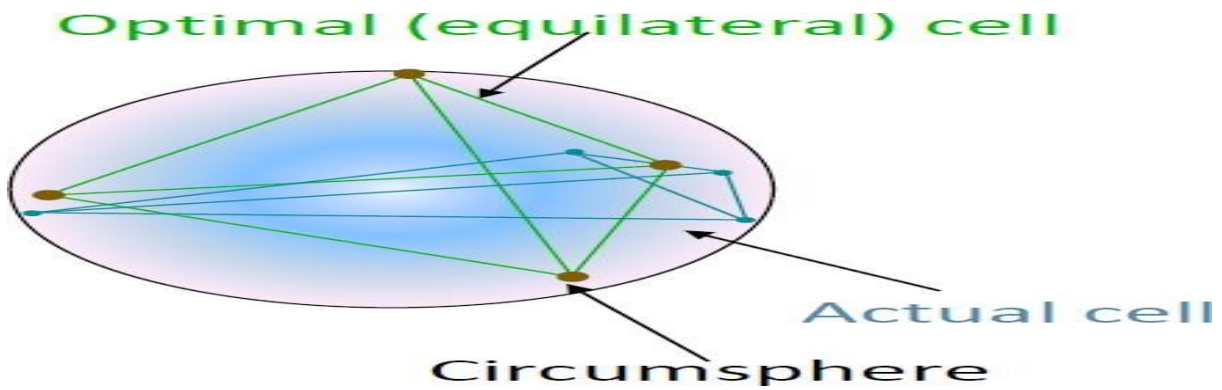


Figure 64. Qualité de maillage basé sur un volume équilatéral.

Applicable seulement pour les éléments triangulaires ou tétraédriques.

a) Calcule basé sur la déviation angulaire :

$$F_d = \max \left| \frac{\theta_{\max} - 90}{90}, \frac{90 - \theta_{\min}}{90} \right|$$

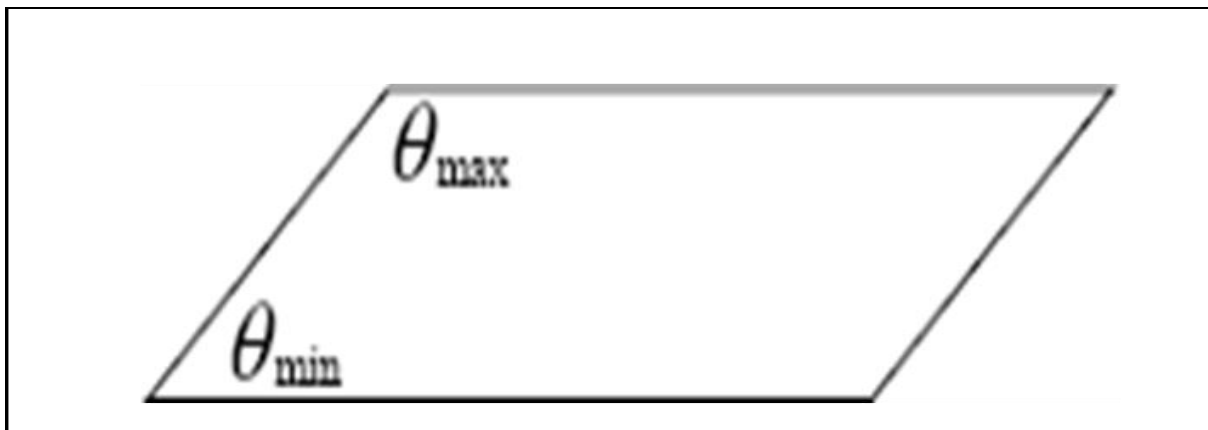


Figure 65. Qualité de maillage basé sur la déviation angulaire.



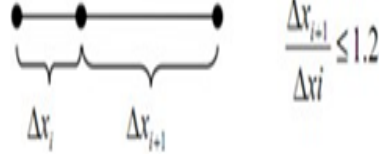
Applicable pour tout type d'élément. Le tableau suivant illustre la variation de la qualité du maillage en fonction de la valeur du coefficient de distorsion F_d .

Tableau 3. Qualité de maillage.

F_d	0-0.25	0.25-0.5	0.50-0.80	0.80-0.95	0.95-0.99	0.99-1.00
Qualité	Excellent	Bonne	Acceptable	Pauvre	Très pauvre	Mauvais

- La valeur maximale du skewness tolérée pour un maillage volumique doit être inférieure à 0.90.
- La valeur maximale du skewness toléré pour un maillage surfacique structuré ou non, hexaédrique ou tétraédrique doit être inférieure à 0.75.
- Lissage (smoothness)

Le changement dans la taille des éléments de maillage d'une zone à un autre doit être graduel, la variation de la taille des éléments de deux zones adjacentes ne doit pas dépasser 20% (voir la figure) [47].

		
Figure 66. Changement Brusque.	Figure 67. Changement de taille Optimal.	Figure 68. Changement de taille

- **Résolution :**

La notion de résolution concerne plus particulièrement les zones qui présentent un fort gradient, ainsi une bonne résolution permet de mieux décrire les phénomènes physiques qui existent dans ces zones telles que les ondes de choc, ou les phénomènes liés à la couche limitent.

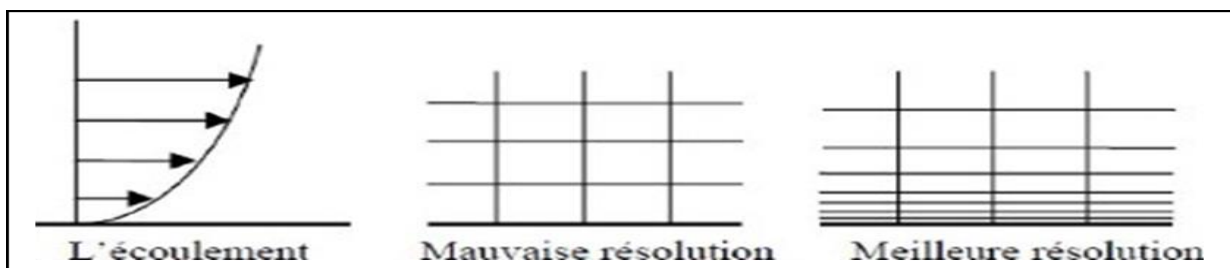


Figure 69. Résolution du maillage dans les régions à fort gradient.

V.10. La simulation numérique :

V.10.1. Introduction :

La simulation numérique de la dynamique des fluides représente de nos jours un outil majeur dans le développement en tant qu'outil d'analyse en recherche et en industrie. Cependant, la génération de maillage reste difficile, plus particulièrement pour la simulation d'écoulements turbulents, puisqu'il peut être très difficile et long de générer un maillage qui produira des résultats précis. La modélisation et la simulation interviennent pour :

- L'étude du comportement du système par rapport à son environnement extérieur (consommation énergétique/cout...);
- La prédiction du comportement d'un système pour des situations nouvelles ou extrêmes;
- La compréhension de la structure et des interactions à l'intérieur d'un système (déterminer le rendement, la performance...);
- La conception de nouveaux dispositifs/ composants, étude de système avant la création de prototype et mise en œuvre de nouveaux procédés (stratégies et algorithmes de contrôle);
- L'optimisation des solutions lors de la conception.

V.10.2. Géométrie :

Le profil de la tuyère est donné sous forme d'une liste de coordonnées, plus de points de maillage sont nécessaires pour bien résoudre les détails géométriques d'une configuration, ce qui conduit à de plus longs délais d'exécution. Le temps d'exécution et le type de résultats exigés impactent directement sur le niveau de précision auquel la géométrie est modélisée.

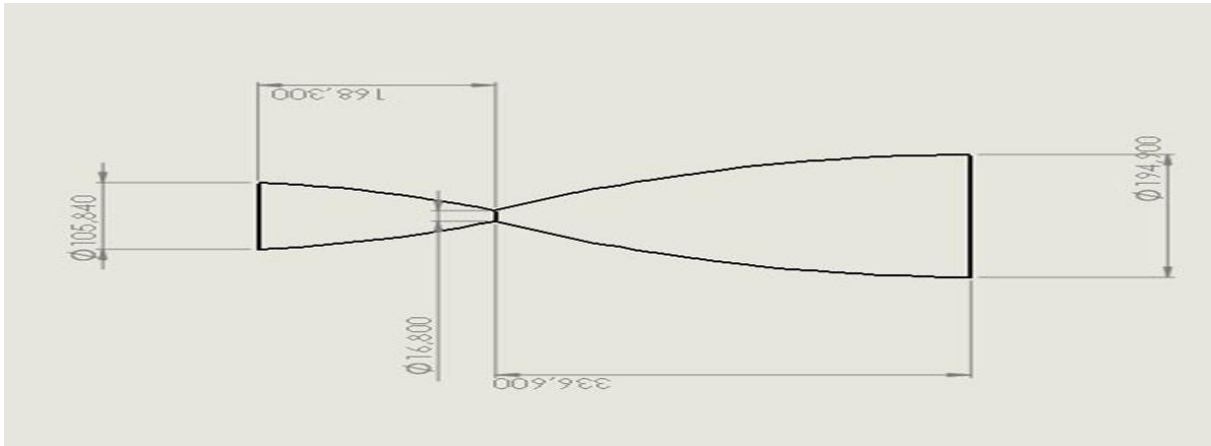


Figure 70. Géométrie 2D de Laval.

V.10.3. Maillage :

La précision des résultats et la réussite des calculs dépendent essentiellement de la génération du maillage. Il dépend énormément des calculs et du problème à résoudre. Il sert à la représentation discrète de variables continues. Toutefois, un bon maillage est un compromis entre la précision recherchée et le temps de calcul.

Dans cette partie, nous avons pour objectif de créer un maillage qui, sous la base de nos connaissances en mécanique des fluides et en méthodes numériques, serait approprié à des calculs à grand nombre de Mach, e.g. raffiner le maillage dans les zones où nous nous attendons à de forts gradients.

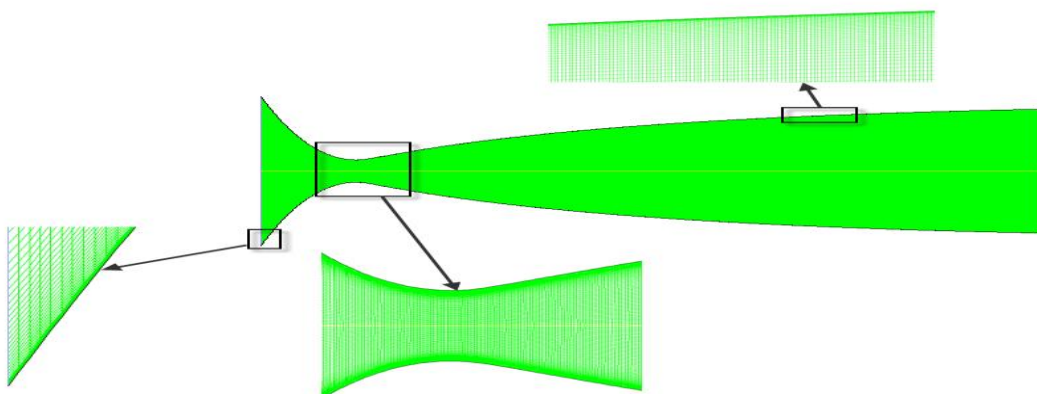


Figure 71. Maillage structuré de la tuyère Laval.

V.10.4. Conditions aux limites :

Les propriétés du fluide et de l'écoulement doivent être spécifiées à toutes les limites du volume de contrôle, ce sont en fait des interfaces entre les régions dans lesquelles l'écoulement sera simulé et les régions en dehors du domaine de calcul. Il suffit parfois de spécifier le type de paroi employée tel que la paroi adiabatique ou la paroi de non glissement ...etc. si cela ne suffit pas, des informations complémentaires sont exigées, e.g la température de la paroi.

Écoulements étudiés s'effectuent dans des domaines confinés limités par la paroi de la tuyère. Alors pour chaque cas d'écoulement, il est nécessaire de préciser quatre types de conditions aux limites à savoir :

- D'écoulement à l'entrée du domaine.
- Conditions d'écoulement à la sortie du domaine.
- Conditions de symétrie.
- Conditions aux parois solides.

Le nombre de conditions à l'entrée ou à la sortie dépend de la nature locale d'écoulement, I.e. supersonique ou subsonique.

V.10.4.1. Conditions d'entrée :

Si l'écoulement à l'entrée est subsonique, trois conditions sont à imposer :

- Pression totale ou de stagnation ; P_0 .
- Température totale ou de stagnation; T_0 .
- Vitesse transversale nulle ; $U_2 = 0$.

Pour un écoulement supersonique à l'entrée, le nombre de Mach doit être spécifié et par conséquent, quatre conditions sont nécessaires :

- Pression totale ; P_0 .
- Température totale; T_0 .
- Vitesse transversale nulle ; $U_2 = 0$.
- Vitesse axiale u_1 correspondante au nombre de Mach spécifié.

La pression totale P_0 n'est pas une variable indépendante. Cependant, la valeur P_0 désirée est assurée par l'imposition de la pression statique P_s correspondante. Ainsi, la pression statique sera imposée de manière non linéaire. Elle est alors actualisée tout le long de calcul de façon à garantir la valeur de la pression totale désirée,

La pression totale P_0 n'est pas une variable indépendante. Cependant, la valeur P_0 désirée est assurée par l'imposition de la pression statique P_s correspondante. Ainsi, la pression statique

sera imposée de manière non linéaire. Elle est alors actualisée tout le long de calcul de façon à garantir la valeur de la pression totale souhaitée,

V.10.4.2. Conditions de sortie

La plupart du temps, une seule condition à la sortie est imposée pour les écoulements internes. Cette condition correspond à la pression statique à la sortie.

V.10.4.3. Condition de symétrie :

Les écoulements étudiés sont des écoulements bidimensionnels à symétrie plane. Donc seule la moitié du domaine fluide est alors considérée et la condition de symétrie est assurée en imposant une vitesse (donc la quantité de mouvement) transversale nulle le long du plan de symétrie.

V.10.4.4. Conditions aux parois solides :

Les conditions aux parois solides sont différentes selon que l'écoulement est visqueux ou non.

- **Écoulement non-visqueux**

Dans un écoulement non visqueux, les particules fluides doivent glisser au contact d'une paroi solide. Grâce à la condition d'imperméabilité de la paroi qui se traduit par une vitesse normale du fluide nulle le long de cette paroi, la condition de glissement est assurée.

- **Écoulement visqueux**

Si l'écoulement est visqueux, au contact d'une paroi solide, la viscosité impose que les particules fluides restent attachées à cette paroi. La vitesse du fluide est alors nulle sur la paroi,

$$u=0 \text{ ou } U=0$$

En ce qui concerne la condition d'une paroi adiabatique, nous imposons dans les deux cas d'écoulements, l'une des deux possibilités suivantes :

- Soit en imposant une répartition uniforme de la température, égale à la température de l'entourage (système extérieur), sur la paroi d'où, une paroi isotherme.
- Soit en isolant la paroi de l'extérieur en considérant que le flux de chaleur normale à la paroi soit nul. La paroi est alors dite adiabatique.

La Figure (72) montre les types de conditions aux limites.

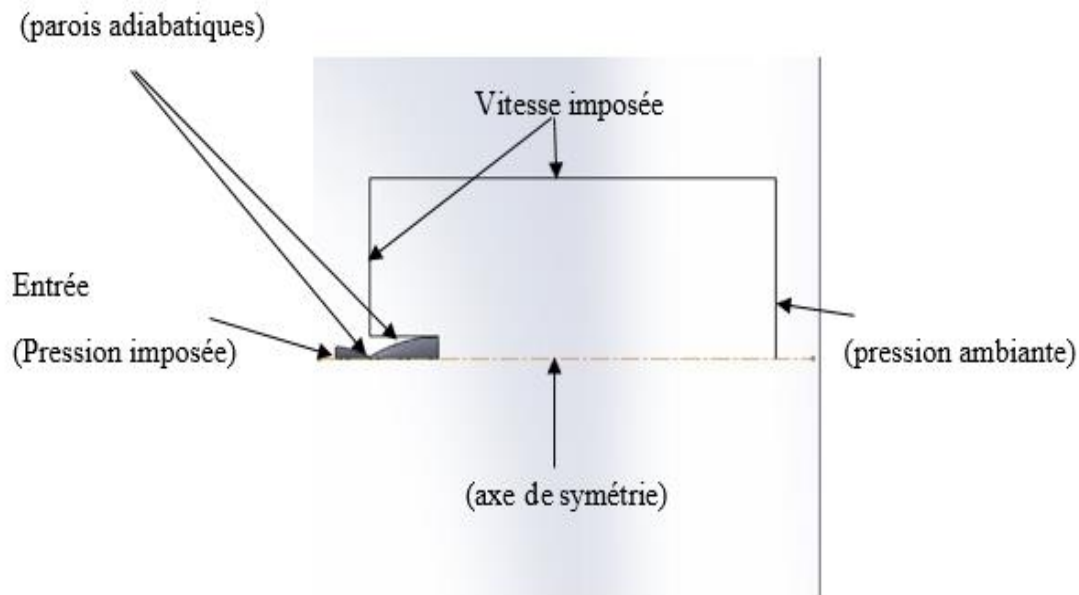


Figure 72. Types des conditions aux limites utilisées dans les simulations numériques.

V.10.5. Résolution :

L'étape de la résolution est effectuée avec le solveur Fluent car en simulation des écoulements internes il fournit en général de bons résultats. La disponibilité d'un nombre conséquent de modèles pouvant faire face à divers aspects de la mécanique des fluides : écoulements diphasiques (miscible, non miscible, cavitation, solidification), turbulence (LES, k- ϵ , k- ω , S-A, Reynolds Stress...), combustion (pré-mélangé et non pré-mélangé), transport de particules, écoulements en milieux poreux, maillages mobiles et dynamiques avec reconstruction du maillage, entre autres représente un avantage certain de ce logiciel de simulation. Afin d'améliorer la convergence les schémas spatiaux et temporels peuvent être modifiés. Les équations gouvernantes utilisées dans Fluent sont formulées en utilisant l'approche de volume fini. Enfin le fait qu'il soit parallélisé permet de tirer parti des systèmes multiprocesseurs aussi bien au sein d'une seule machine qu'en réseau.

Les possibilités de visualisation sont nombreuses :

- Tracer les valeurs du coefficient de frottement pariétal afin de détecter un possible décollement ;
- Visualiser des lignes de courant ou d'autres paramètres de l'écoulement et de la turbulence ;
- Tracer les contours de différentes variables qui décrivent l'écoulement : pression, vitesse
- , variables turbulentes.

V.11.Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté les techniques de génération de maillage et les méthodes de discrétisation, on a parlé aussi sur certain nombre de caractéristiques de maillage qui ont une influence sur la précision et la convergence de la solution. Le maillage doit être lisse, avec une densité variante progressivement, être correctement aligné sur les caractéristiques de l'écoulement, et des éléments déformés doivent être évités autant que possible. Pour les simulations numériques de l'écoulement supersonique, les besoins particuliers des conditions aux limites doivent également être respectés. Pour éliminer les instabilités numériques la densité du maillage doit être variée et continue graduellement. De même, les éléments ne doivent pas être gravement déformés, sinon l'évaluation des fonctions de forme et de gradients de ces éléments peut être moins précise.



Chapitre VI

Résultats et discussions

VI.1. Introduction :

Dans le but de comprendre les différents phénomènes physiques intervenants dans les écoulements des fluides, la CFD s'impose en tant qu'outil de plus en plus indispensable. Ces écoulements sont régis par des équations de conservation. Elles forment un système d'équations de conservation différentielles aux dérivés partielles (EDP) non linéaire qu'on se doit de résoudre.

Il reste cependant difficile de résoudre les problèmes rencontrés dans le domaine de l'ingénierie. Néanmoins une approximation de la solution de ces systèmes à l'aide des méthodes numériques en utilisant les moyens informatiques peut être obtenue.

VI.2. Modèle de calcul Ansys16.0 :

ANSYS 16.0 est un outil de conception assistée par ordinateur (CAO) qui peut réaliser Concevoir et générer des figures géométriques en 3D/2D et appliquer des simulations. Il permet Construire des surfaces et des volumes à partir d'une série de points qui définissent la géométrie de base. Une fois la géométrie construite, elle peut être exportée vers Générateur et solveur de maillage pour effectuer une analyse ou une simulation. ANSYS 16.0 est un logiciel d'ingénierie mécanique qui peut collaborer dans de nombreux aspects différents types de logiciels utilisés dans différents domaines, tels que les vibrations, les machines fluides, aérodynamique, transfert thermique et dynamique. Pour notre recherche, les trois systèmes, Les composants d'ANSYS 16.0 sont utilisés pour effectuer des calculs aérothermiques ;

Conception Modélisation, maillage et système d'analyse FLUENT

FLUENT est un solveur qui utilise des maillages 2D ou 3D non structurés (comment utiliser Volume de produit fini). Ces maillages sont : des maillages triangulaires (tétraèdres en 3D), Grille structurée interprétée dans un format non structuré (ex : rectangle) (Hexaèdre), utilisé pour simuler tous les écoulements compressibles ou incompressibles, Impliquer des phénomènes physiques complexes, tels que la turbulence, le transfert de chaleur, réactions chimiques, écoulement polyphasique. À propos de la géométrie Industriel. L'analyse 2D ou 3D montre que FLUENT peut simuler le flux autour de la buse supersonique. Ce problème est résolu en utilisant équation d'Euler.

VI.3. Phases de simulation :

VI.3.1. Création de la géométrie :

La création de la géométrie se fait avec ces étapes dans le Design Modeler :

Allez au menu supérieur, cliquez sur le concept > courbe 3D

Pour le fichier de coordonnées > parcourir et sélectionner les coordonnées de la tuyère Laval et le domaine de calcul Txt à l'aide de l'Annexe B.1.

Ensuite, ces coordonnées ont été divisées en 08 segments (Courbes, Up, Down, Left, Right), pour créer le corps surfacique de la tuyère Laval et le domaine de calcul (Figure.73).

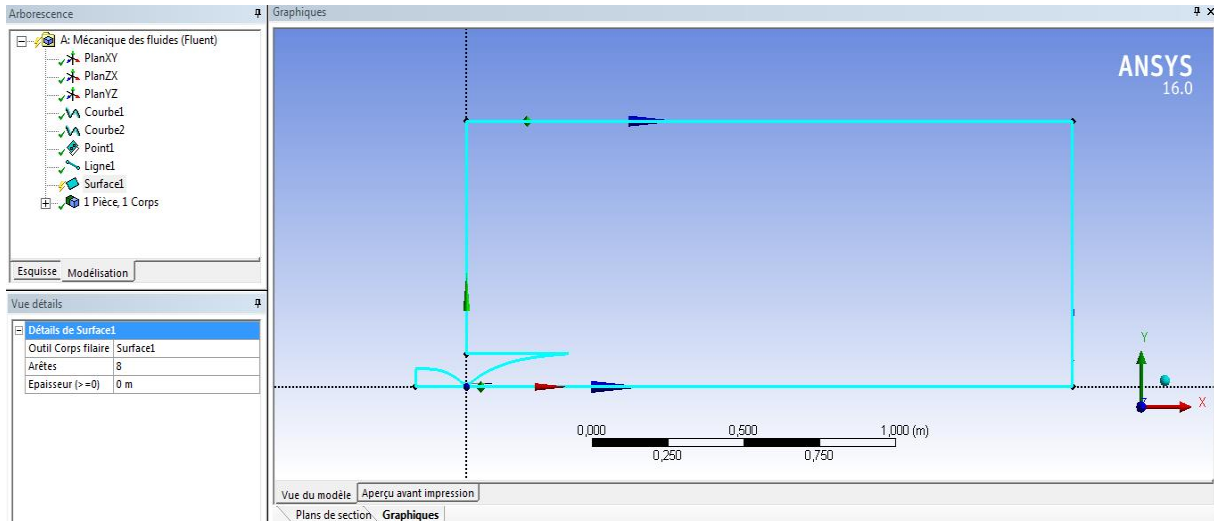


Figure 73. Création du Profil avec Design Modeler

Après avoir Créé le profil de la tuyère on génère le corps surfacique avec le design Modeler

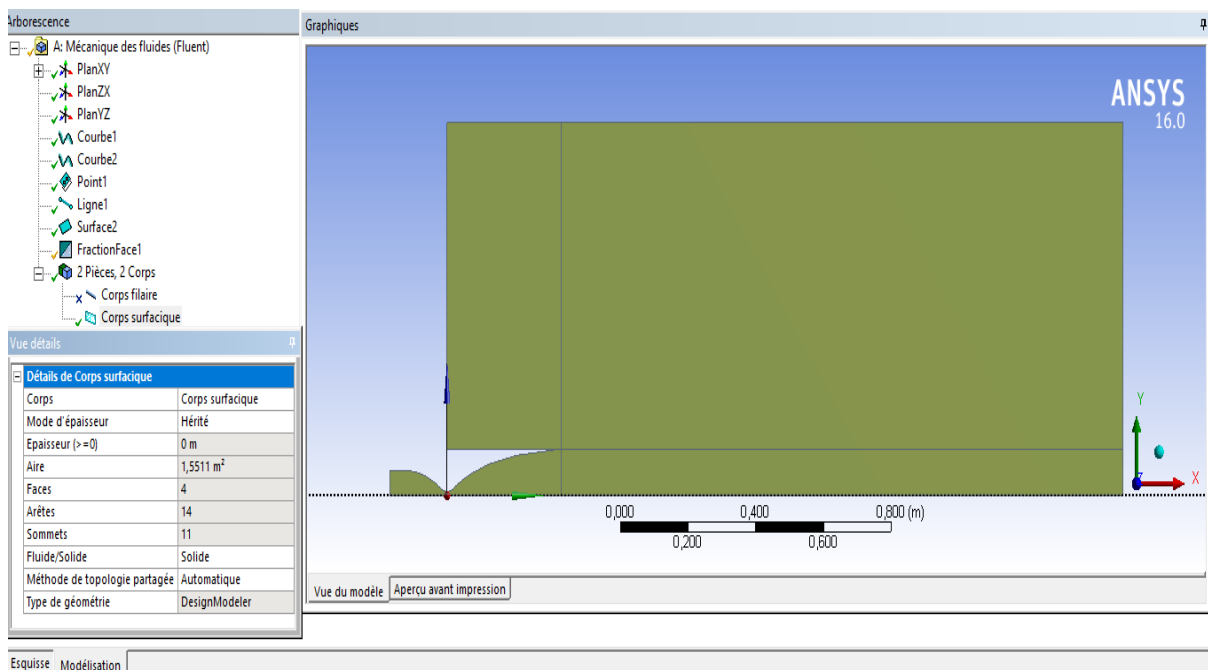


Figure 74. Génération du corps surfacique Avec le Design Modeler.

La simulation est effectuée sur une tuyère deux dimensions axisymétriques, alors dans le but de minimiser le nombre de mailles, on se contente de faire la simulation sur une partie de la tuyère. Il en résulte une minimisation des erreurs machines et du temps de calcul. La figure (Figure.75) montre la géométrie à simuler :

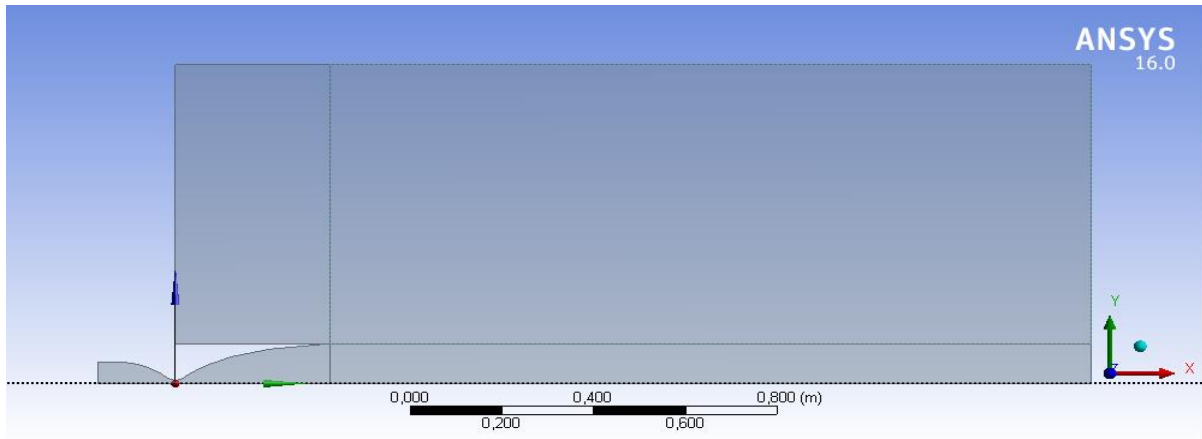


Figure 75. Tuyère axisymétrique.

VI.3.2. Maillage de la géométrie :

Pour les types de maillage, MESHING offre des formes de cellules quadrilatérales ou Triangulaires ou les deux à la fois pour des géométries en deux dimensions et des cellules tétraédriques, hexaédriques, pyramidales et parallélépipédiques pour des géométries en 3D. L'exactitude de la solution est directement liée à la qualité du maillage qui ne doit pas comporter de distorsions (skewness) très importantes, le nombre de mailles doit aussi être minimisé et ce dans le but de minimiser les erreurs machines.

Le maillage structuré rectangulaire (2D) et quadrilatère (3D) est le meilleur maillage pour de multiples raisons ; d'abord les mailles générées ne comportent pas de distorsions importantes et aussi le nombre d'éléments est inférieur par rapport aux autres types de maillage. Pour que MESHING puisse mailler notre géométrie nous avons divisé notre tuyère en 4 surfaces (Multi bloque), pour procéder à un maillage de faces.

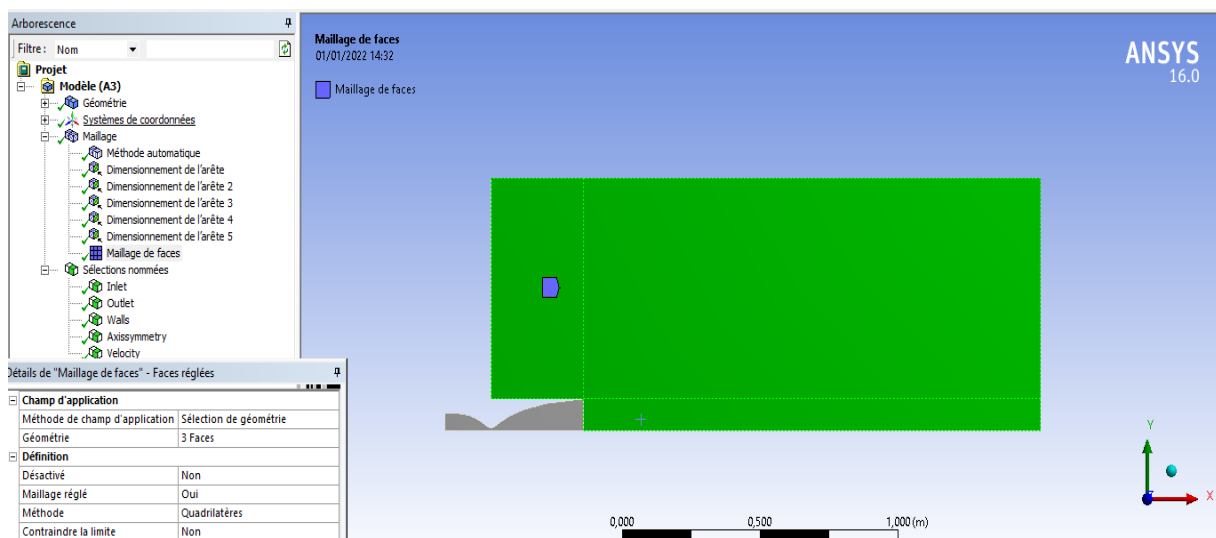


Figure 76. Création de surfaces sur les trois blocs de domaine de calculs sur MESHING en 2 dimensions avec(Maillage quadrilatérales).

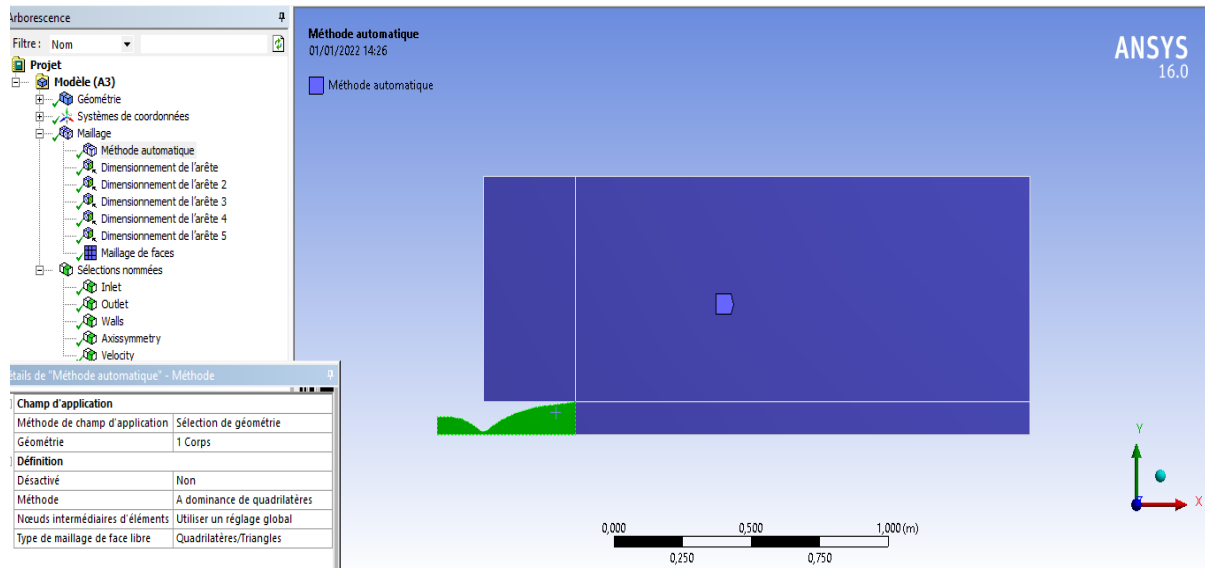


Figure 77.Création de surfaces sur le bloque de la tuyère sur MESHING en 2 dimensions.
Maillage Tri-quadrilatérales.

Ensuite on doit Nommer la sélection des Arêtes (Boundaries), Inlet, Outlet, Axisymmetry, velocity and Wall (Figure.78).

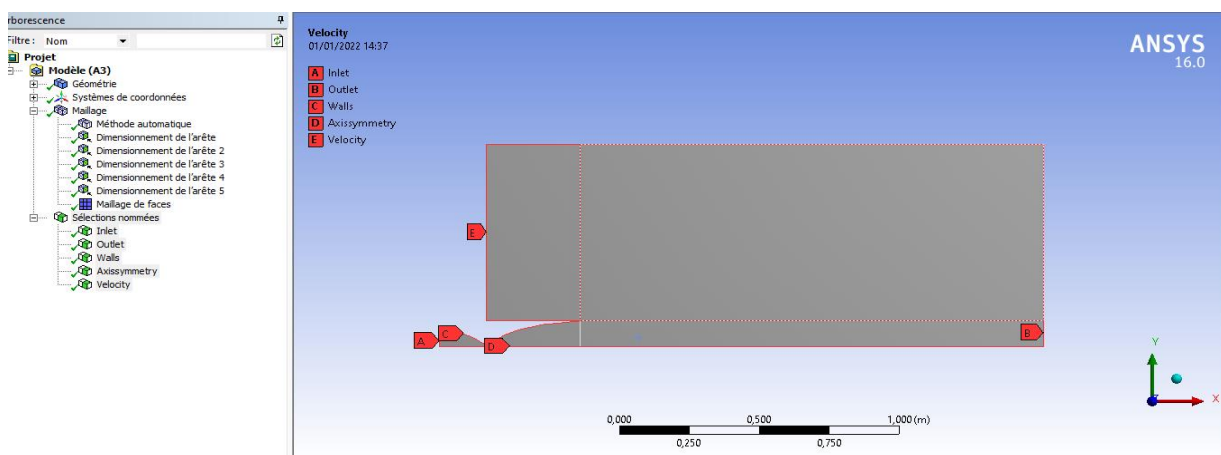


Figure 78.Création de Sélection Nommés.

On procède à la génération du maillage étape par étape en choisissant le nombre de divisions sur les 8 arêtes, ensuite le nombre de division sur les arêtes horizontales (axis), le nombre de division sur la paroi (Wall), on fait un raffinement au niveau du col et la paroi, et on finira par le maillage de faces (4 faces) avec 81449 Nœuds (Figure .79).

Caractéristiques du maillage :

C'est un maillage multi bloc où on a utilisé à l'intérieur de la tuyère un maillage structuré avec des éléments Tria-quadrilatérales et pour le domaine extérieur on la divisé en trois sous bloc. Le premier qui est proche de la tuyère on a utilisé un maillage hybride avec des éléments quadrilatéraux et pour les deux sous bloc loin de la tuyère on a utilisé un maillage structuré en quadrilatère.

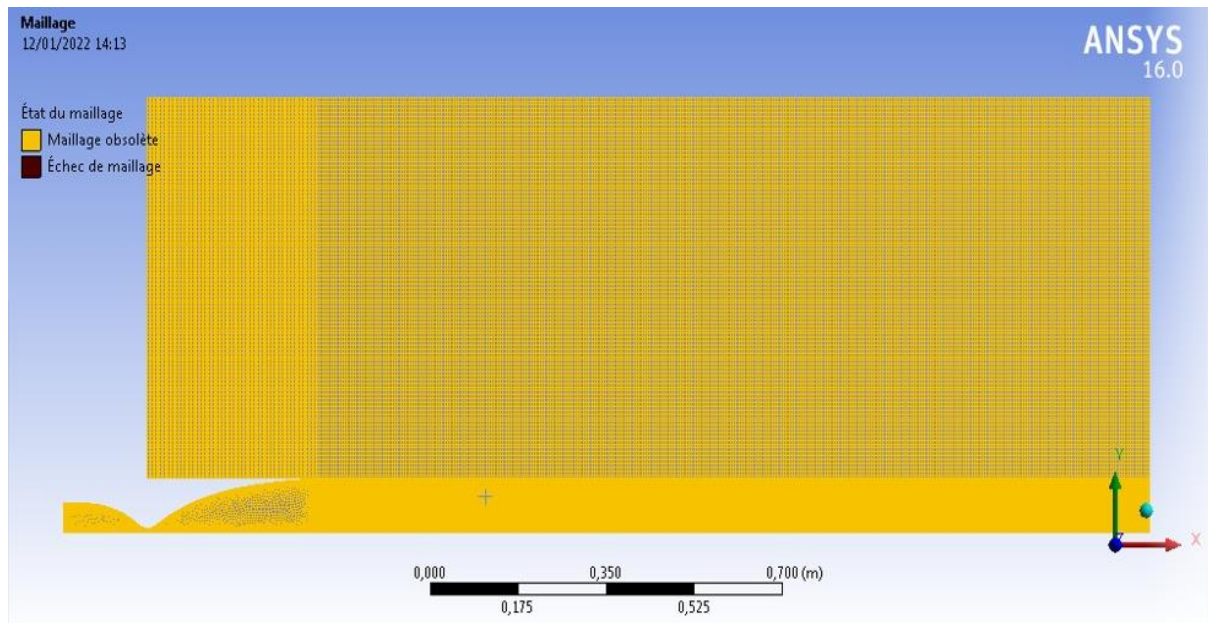


Figure 79. Maillage structuré quadrilatère sur MESHING.

Lorsque le maillage est Généré, on ferme le MESHING et on ouvre le fluent, le maillage généré se charger a automatiquement sur le fluent (Enregistré dans le projet initial de la tuyère).

VI.3.3. Résolution par FLUENT :

L'étape de la résolution est effectuée avec le solveur Fluent. Ce dernier fournit, en générale, de bons résultats en simulation des écoulements internes. On ouvre notre maillage à l'aide de la fonction Read MESH(Figure.80).

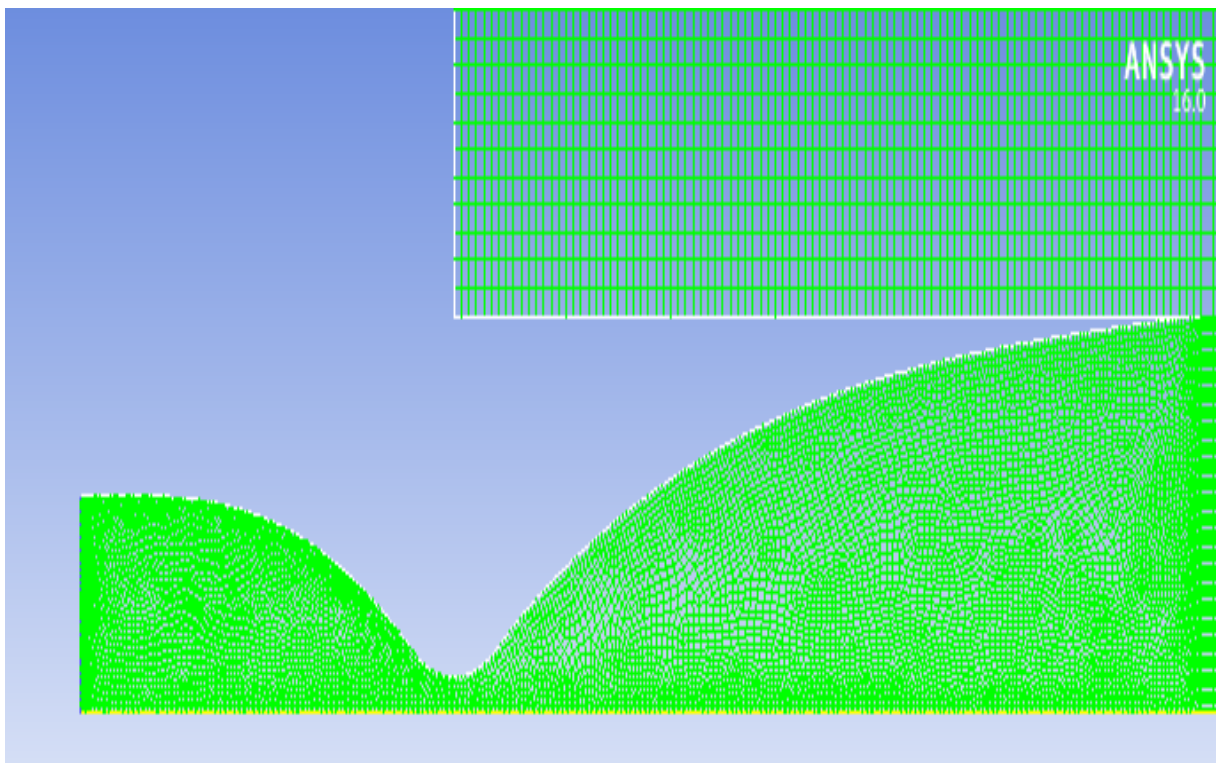


Figure 80. Maillage structure sur FLUENT.

Après avoir vérifié la qualité de notre maillage et choisir notre modèle de calcul et le type de matériaux utilisé on fait entrer les conditions aux limites à l'aide de la fonction Boundary Conditions (Figure.81).

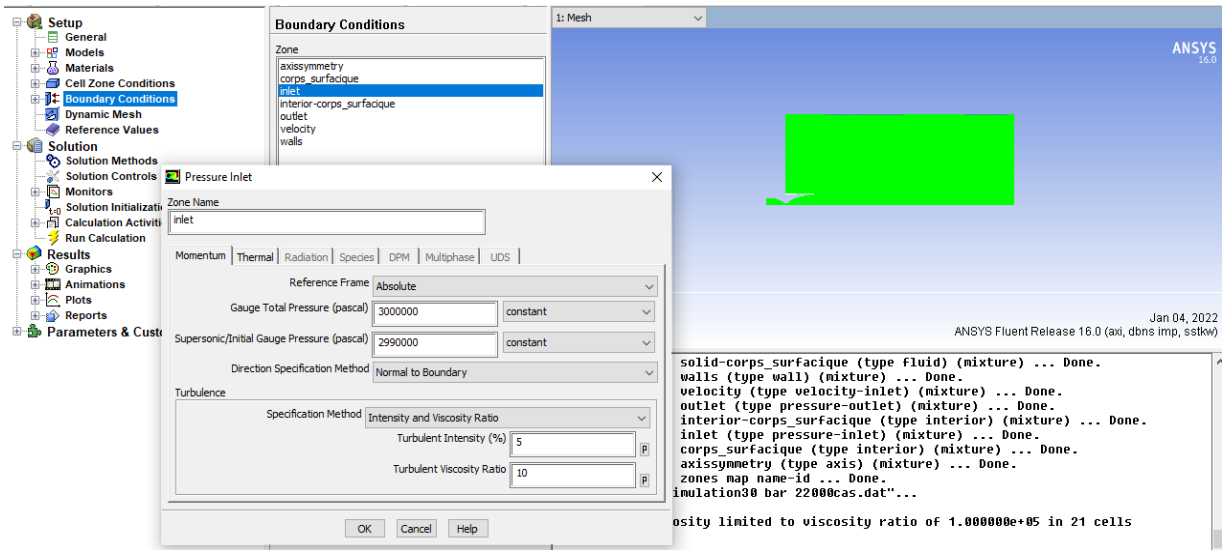


Figure 81. Condition aux limites sur fluent.

Ensuite après avoir choisit la méthode de calcul et le nombre d'itération on lance le calcul à l'aide de la fonction Run Calculation.

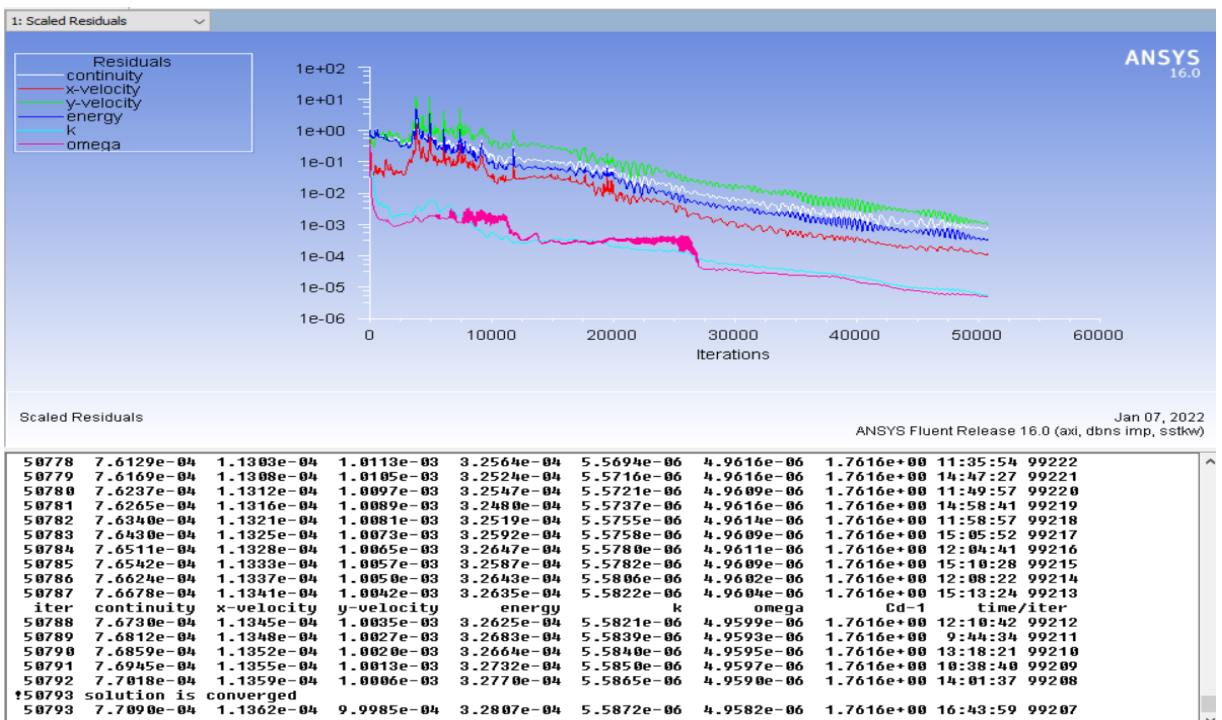


Figure 82. Le graphe des résiduelles de notre simulation.

A partir des graphes des résiduelles on peut dire que les calculs convergent, puisque la figure 82 montre que les résiduelles diminuent d'une manière continue. Pour être certain de la convergence.

IV.3.4. Visualisation des paramètres :

Enfin après avoir la convergence on procède à la visualisation des variables de l'écoulement sous forme d'un champ (contours) à l'aide de la fonction Graphics and Animations ou sous forme de graph à l'aide de la fonction Plots (figure 83).

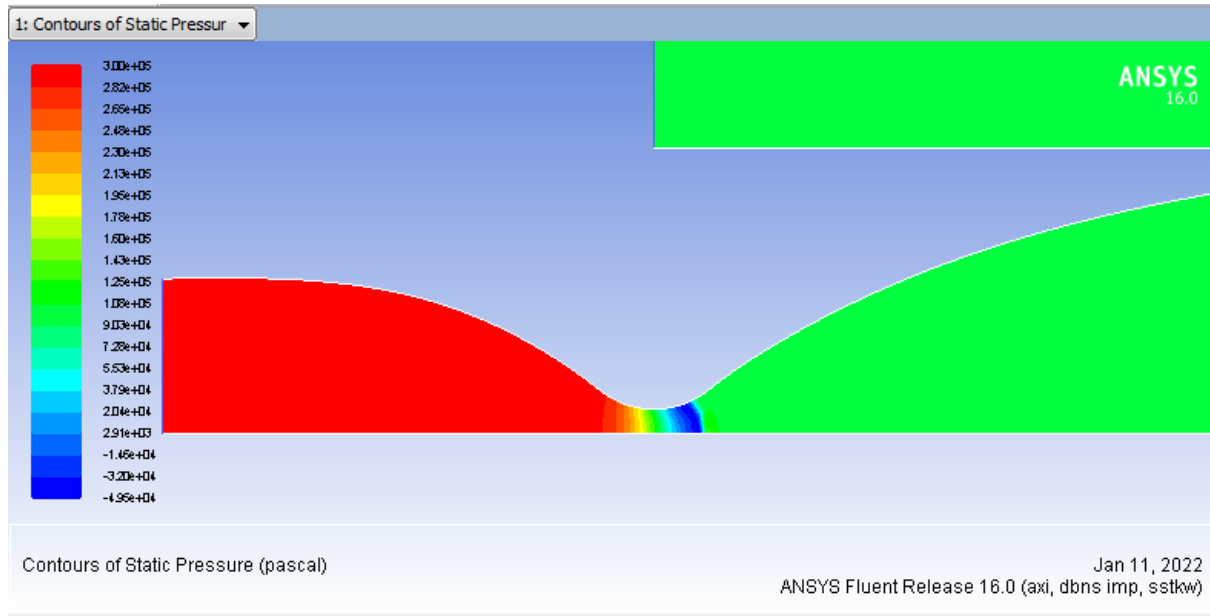


Figure 83.La visualisation des variables de l'écoulement sous forme d'un champ (contours).

VI.2. Résultats et Discussions de La Simulation :

VI.2.1. Premier Cas : 3 bars :

Condition aux limites : les conditions aux limites utilisées dans ce cas sont représentées dans le tableau 4 suivant :

Tableau 4.Représentation des conditions aux limites (gaz parfait).

Modèle solveur fluide		2D, axisymétrique, permanent	
		Couplé, implicite Air, loi des gaz parfaits	
Condition aux limites à l'entrée		Pression d'entrée $\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 300000 Pa \\ P_{statique} = 290000 Pa \\ T_{Totale} = 410 K \end{array} \right.$	
Condition aux limites à la sortie		Pression de sortie $\left\{ \begin{array}{l} P_S = 101325 Pa \\ T_{Totale} = 300 K \end{array} \right.$	
Parois		Wall (parois adiabatique)	
Condition aux limites lointaine		Vélocité (vitesse ambiante) $\left\{ \begin{array}{l} V_{magnitude} = 5.2(m/s) \\ P_{statique} = 101309Pa \\ P_{sortie gauche} = 101325 Pa \end{array} \right.$	

VI.2.1.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère :

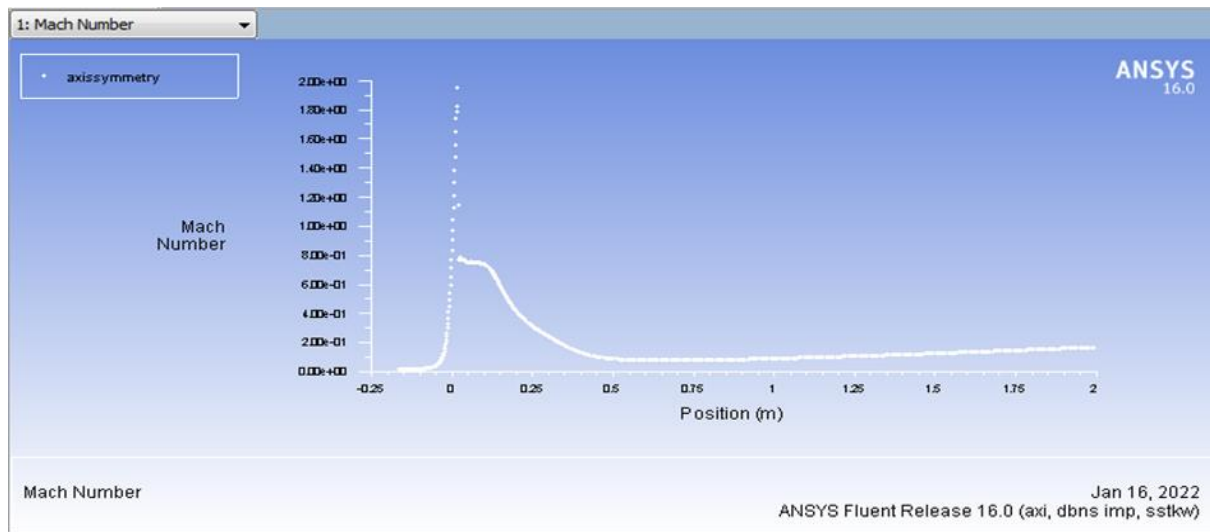


Figure 84. Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution du Nombre de Mach de la tuyère. On remarque que le nombre de Mach augmente rapidement dans la zone d'expansion initiale, jusqu'à atteindre une valeur maximale de $M=1.9$ juste avant le choc normal caractérisé par le disque de Mach, et juste après le choc la valeur du nombre de Mach démunie d'une manière importante.

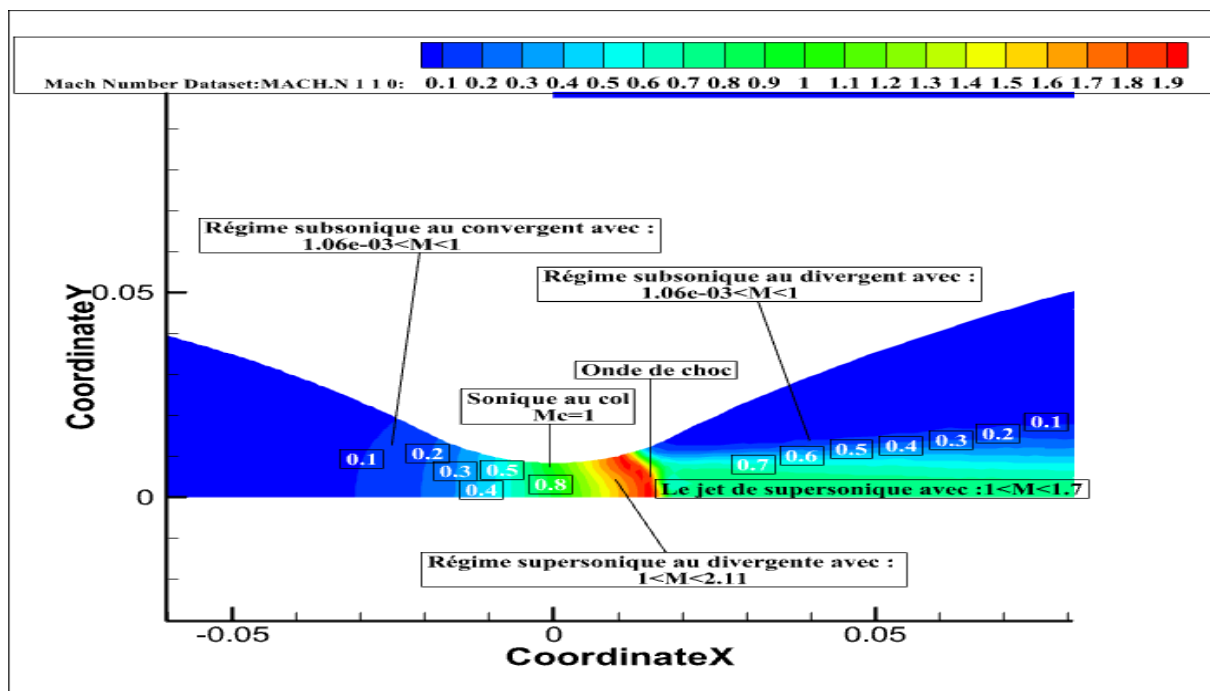


Figure 85. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.

La figure 85 Représente l'évolution du contour du Nombre de Mach Le long de l'axe de la tuyère. On remarque que Le Contour du Nombre de Mach évolue d'une manière croissante dans le convergent, ($0.0149539 < Mach < 1$. L'écoulement est subsonique) dans le col L'écoulement est sonique ($M=1$).

Dans la divergent le nombre de mach augmente brièvement jusqu' à atteint une valeur max égale à 1.9 puis chute directement cela veut dire qu'il y a une existence des ondes de choc (choc normal) positionnée en $x = 0.015$ à une valeur subsonique.

VI.2.1.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :

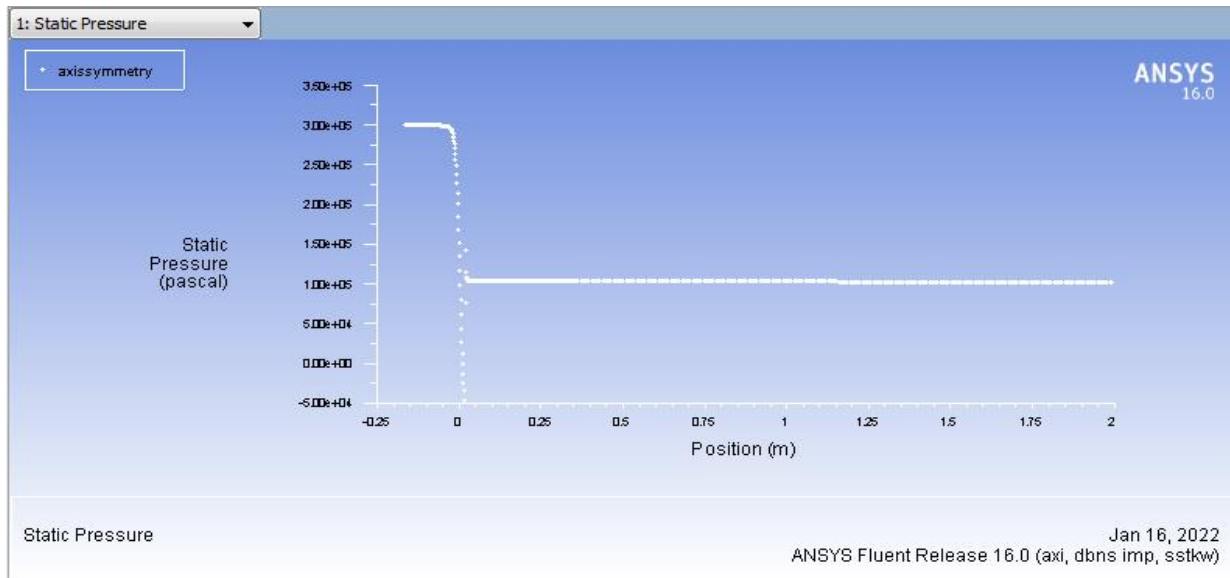


Figure 86. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la pression statique le long de la tuyère On remarque que la pression statique est presque constante dans la partie convergente et diminue rapidement dans la région du col jusqu'à la position du point de décollement -45829.9 Pas (une dépression). Le choc de décollement provoque une croissance rapide de la pression puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée.

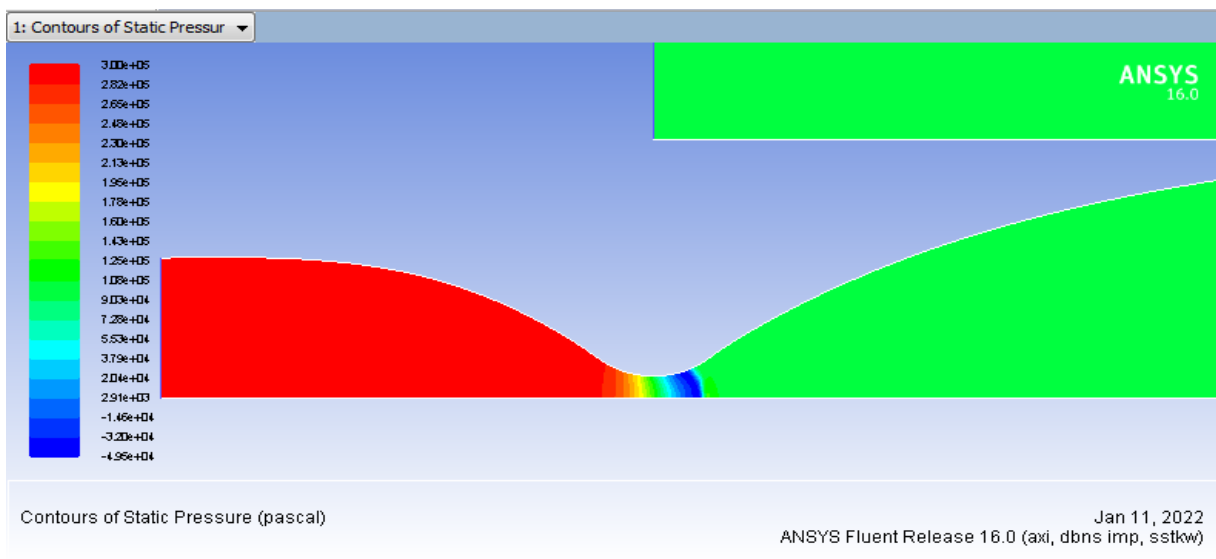


Figure 87. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.

La figure 87 représente le Contour de l'évolution de la Pression Statique sur notre tuyère depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Le Contour de la Pression Statique évolue d'une manière décroissante depuis l'entrée (la zone en rouge) jusqu'au col, puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée (la zone en vert).

VI.2.1.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :

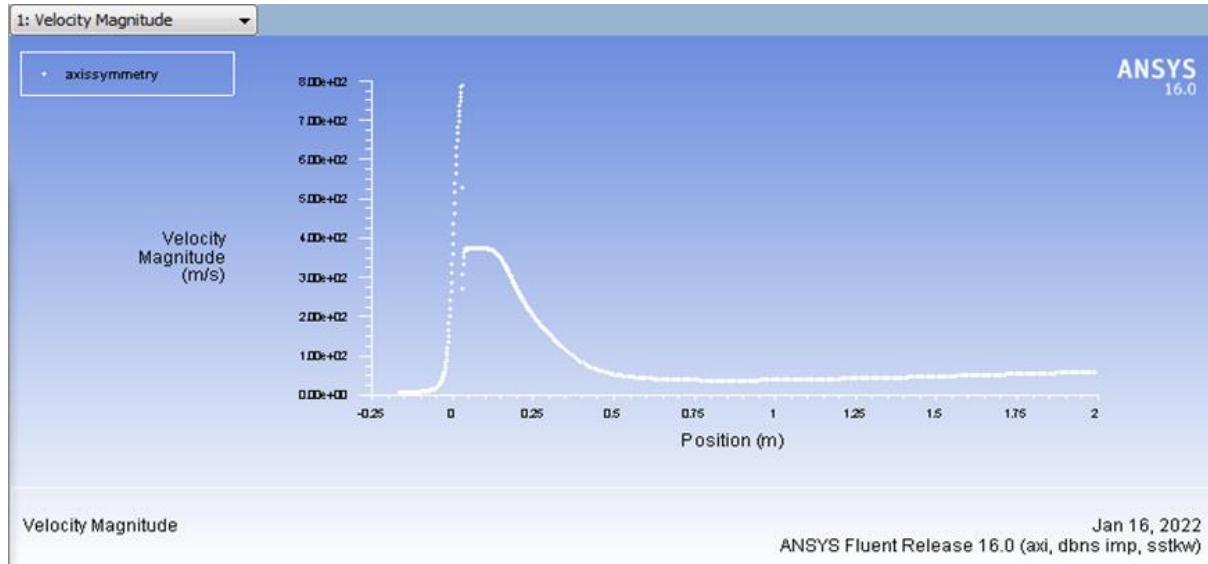


Figure 88. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la vitesse le long de la tuyère. On voit que dans la partie convergent la vitesse est égale 6.06759 m/s, par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la première partie du divergent) ($V = 370.28$ m/s). Ensuite, la vitesse diminue brusquement à cause de la présence d'une onde de choc.

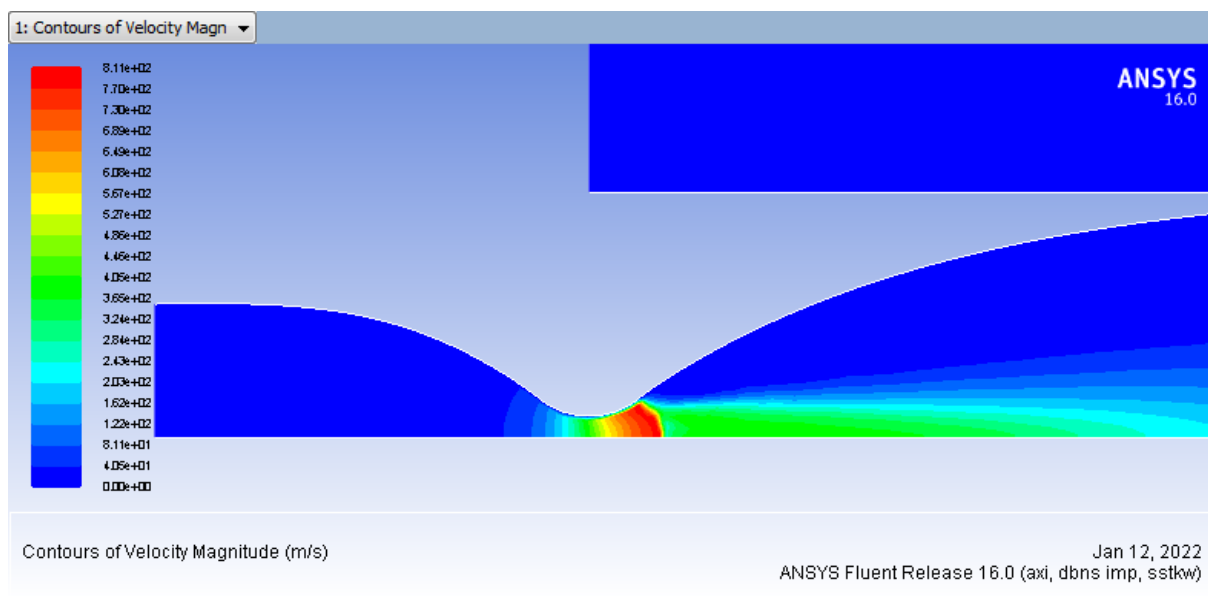


Figure 89. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère.

La Figure89 représente le Contour d'évolution de la Vitesse le long de la tuyère On voit que dans la partie convergent (la zone bleu) la vitesse est presque constante par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la première partie du divergent (la zone rouge) puis dans la partie divergent la vitesse démunie (la zone verte) à cause de la présence d'une onde de choc.

VI.2.2. Deuxième Cas : 7 bars

Condition aux limites : les conditions aux limites utilisées dans ce cas sont représentées dans le tableau 5 suivant :

Tableau 5.Représentation des conditions aux limites.

Modèle solveur fluide		2D, axisymétrique, permanent
		Couplé, implicite Air, loi des gaz parfaits
Condition aux limites à l'entrée	Pression d'entrée $\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 700000 Pa \\ P_{statique} = 690000 Pa \\ T_{Totale} = 523 K \end{array} \right.$	
Condition aux limites à la sortie	Pression de sortie $\left\{ \begin{array}{l} P_s = 101325 Pa \\ T_{Totale} = 300 K \end{array} \right.$	
Parois	Wall (parois adiabatique)	
Condition aux limites lointaine	Vélocité (vitesse ambiante) $\left\{ \begin{array}{l} V_{magnitude} = 5.2(m/s) \\ P_{statique} = 101309Pa \\ P_{sortie gauche} = 101325 Pa \end{array} \right.$	

VI.2.2.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère :

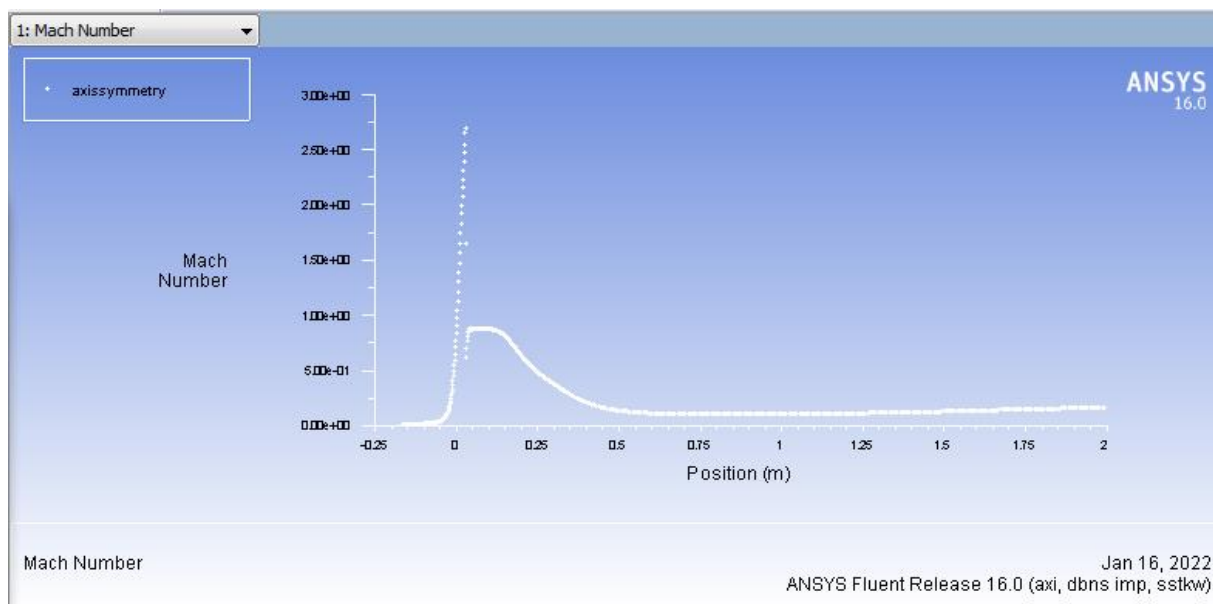


Figure 90. Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution du Nombre de Mach de la tuyère. On remarque que le nombre de Mach augmente rapidement dans la zone d'expansion initiale, jusqu'à atteindre une valeur maximale de $M= 2.70$ juste avant le choc normal caractérisé par le disque de Mach, et juste après le choc la valeur du nombre de Mach démunie d'une manière importante.

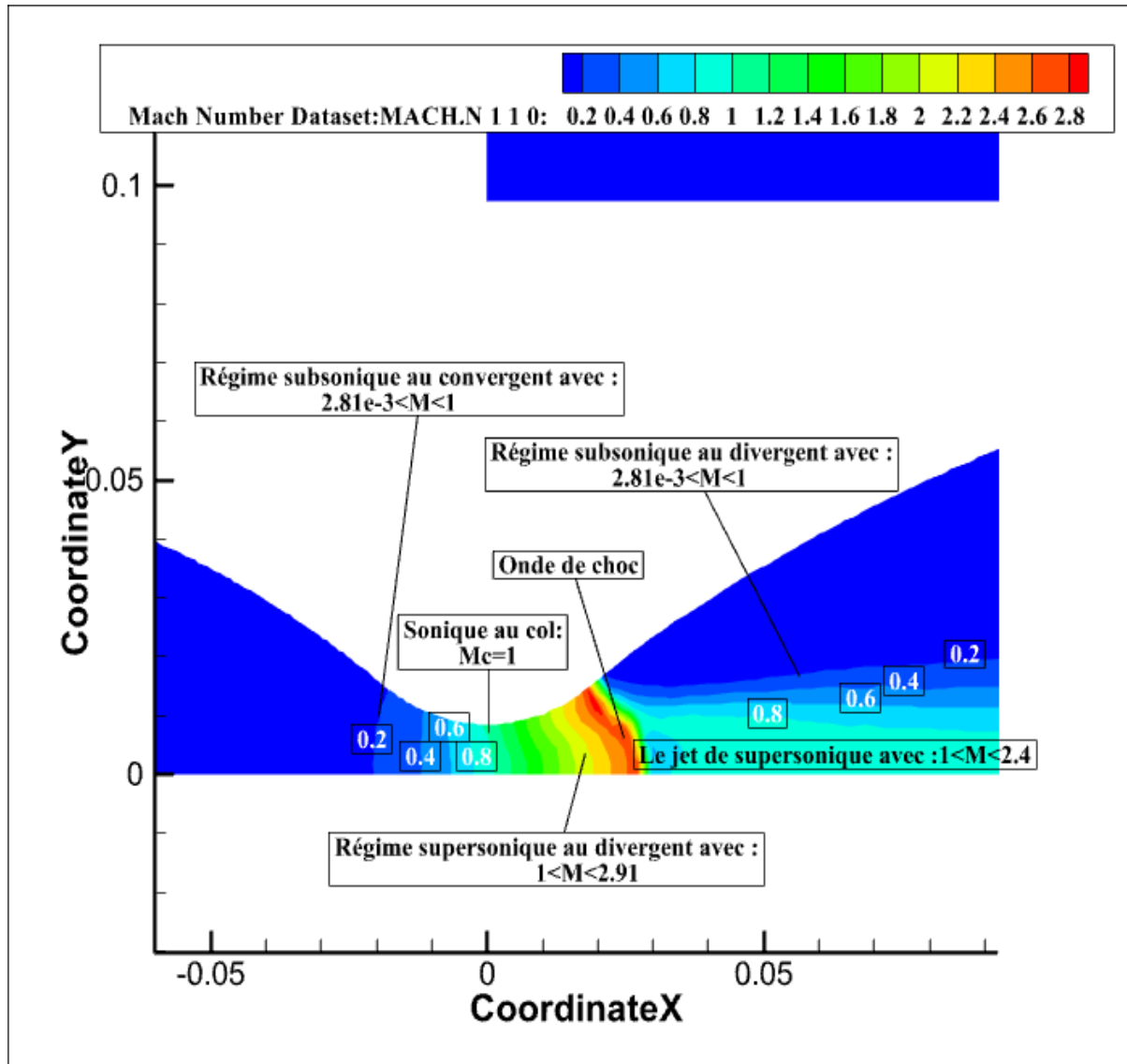


Figure 91. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.

La figure 91 Représente l'évolution du contour du Nombre de Mach Le long de l'axe de la tuyère. On remarque que Le Contour du Nombre de Mach évolue d'une manière croissante dans le convergent, ($0.0149 < \text{Mach} < 1$. L'écoulement est subsonique) dans le col l'écoulement est sonique ($M=1$).

Dans la divergent le nombre de mach augmente brièvement jusqu' a atteint une valeur max égale à 2.70 puis chute directement cela veut dire qu'il y a une existence des ondes de choc (choc normal) positionnée en $x=0.027$ à une valeur subsonique.

VI.2.2.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :

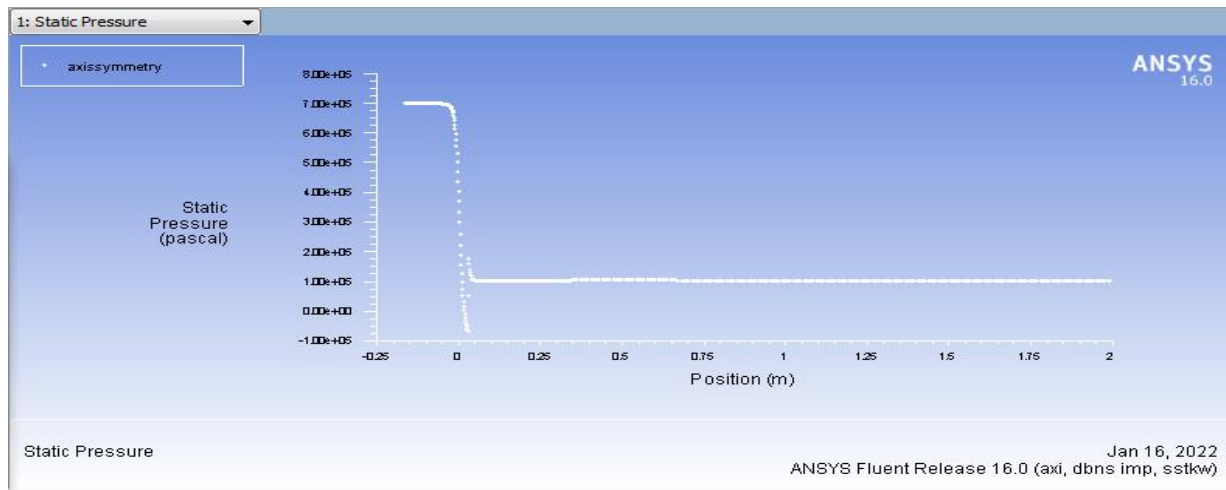


Figure 92. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la pression statique le long de la tuyère, On remarque que la pression statique est presque constante dans la partie convergente et diminue rapidement dans la région du col jusqu'à la position du point de décollement (-66824.3Pas) (une dépression). Le choc de décollement provoque une croissance rapide de la pression puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée.

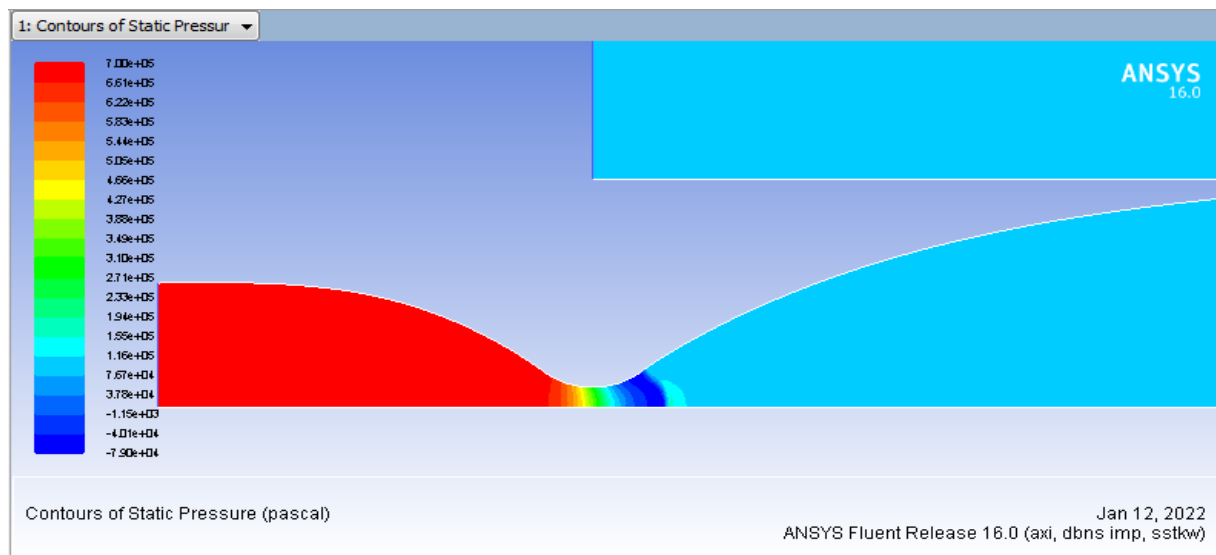


Figure 93. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.

La figure ci-dessous représente le Contour de l'évolution de la Pression Statique sur notre tuyère depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Le Contour de la Pression Statique évolue d'une manière décroissante depuis l'entrée (la zone en rouge) jusqu'au col, puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée (la zone en bleu ciel).

VI.2.2.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :

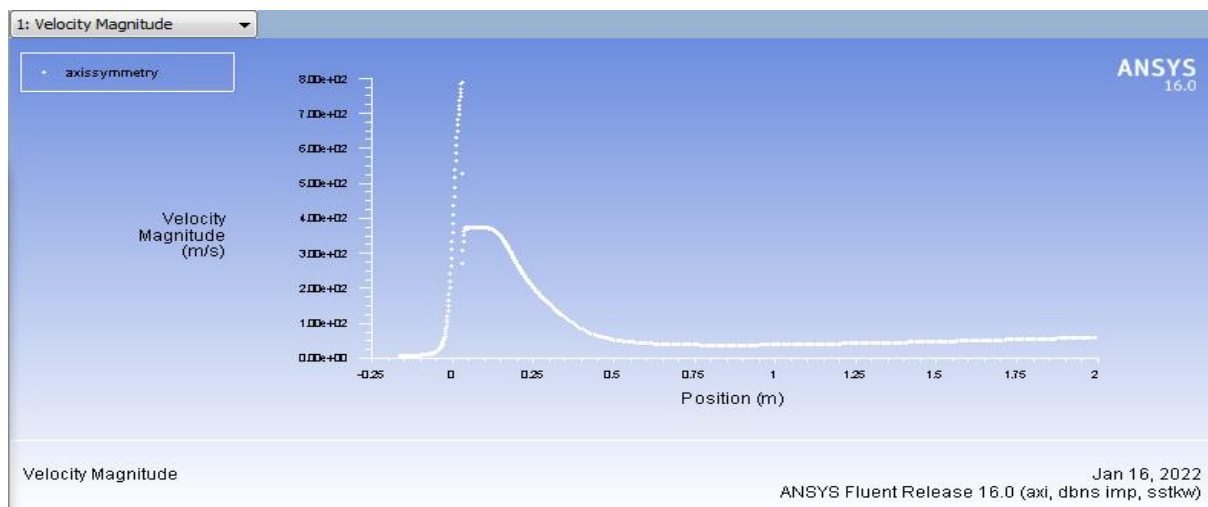


Figure 94. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la vitesse le long de la tuyère. On voit que dans la partie convergent la vitesse est égale 6.86718 m/s, par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la première partie du divergent) ($V = 38.42 \text{ m/s}$). Ensuite, la vitesse diminue brusquement à cause de la présence d'une onde de choc.

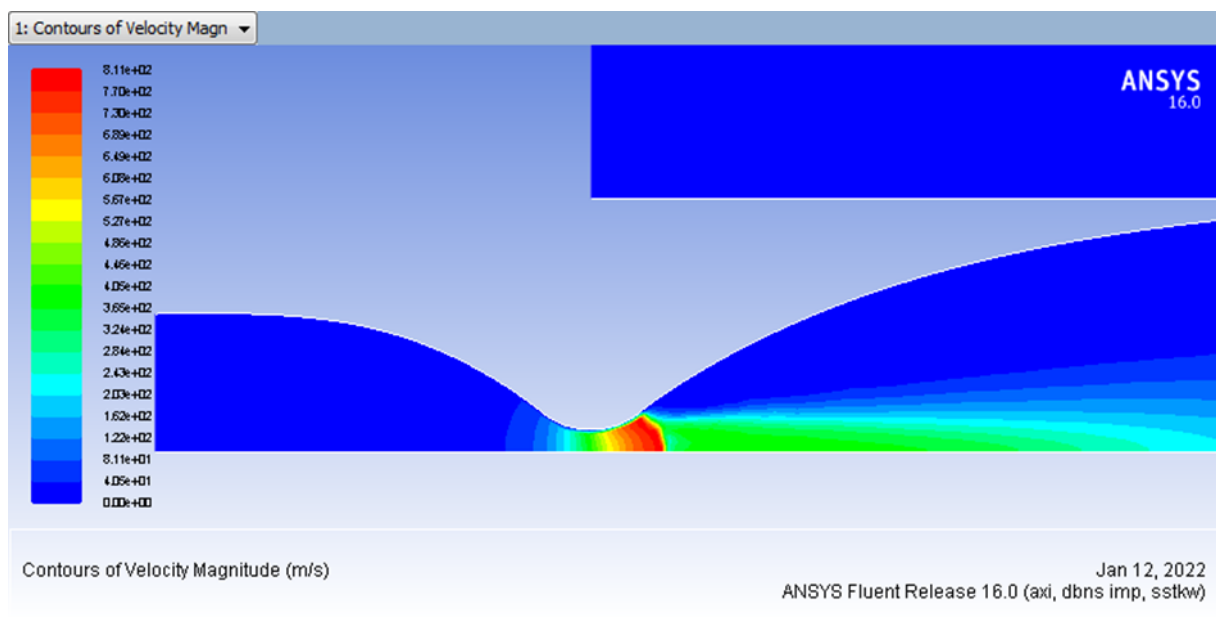


Figure 95. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère

La Figure 95 représente le Contour d'évolution de la Vitesse le long de la tuyère. On voit que dans la partie convergent (la zone bleu) la vitesse est presque constante. Par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la première partie du divergent) (la zone rouge) puis dans la partie divergent la vitesse diminue (la zone verte) à cause de la présence d'une onde de choc.

VI.2.3. Troisième Cas : 67.8 bar

Condition aux limites : les conditions aux limites utilisées dans ce cas sont calculées avec langage de programmation FORTRAN (Plato) est représentées sur les annexes [B.8, B.9, B.10, B.11 et B.14] et dans le tableau 6 suivant :

Tableau 6.Représentation des conditions aux limites.

Modèle solveur fluide	2D, axisymétrique, permanent Couplé, implicite Air, loi des gaz parfaits
Condition aux limites à l'entrée	Pression d'entrée $\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 6783696.84505 \text{ Pa} \\ P_{statique} = 6782637.36346 \text{ Pa} \\ T_{Totale} = 997.158138065 \text{ K} \end{array} \right.$
Condition aux limites à la sortie	Pression de sortie $\left\{ \begin{array}{l} P_S = 101325 \text{ Pa} \\ T_{Totale} = 300 \text{ K} \end{array} \right.$
Parois	Wall (parois adiabatique)
Condition aux limites lointaine	Vélocité (vitesse ambiante) $\left\{ \begin{array}{l} V_{magnitude} = 5.2(m/s) \\ P_{statique} = 101309Pa \\ P_{sortie\ gauche} = 101325 \text{ Pa} \end{array} \right.$

VI.2.3.1. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère

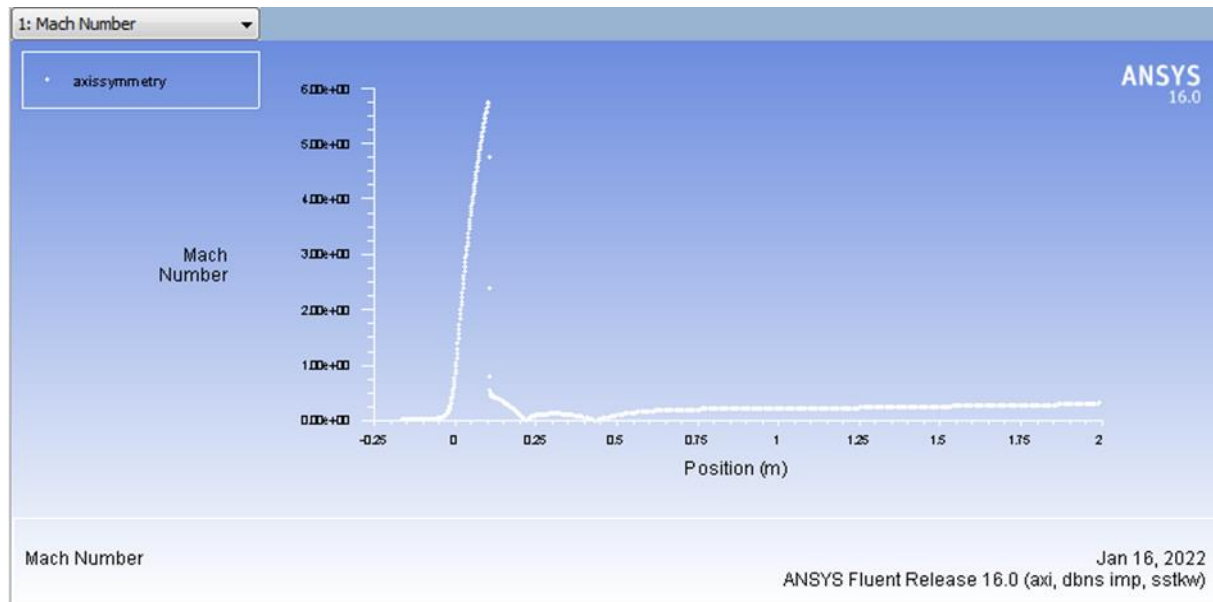


Figure 96.Evolution de la Courbe du Nombre de Mach dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution du Nombre de Mach de la tuyère. On remarque que le nombre de Mach augmente rapidement dans la zone d'expansion initiale, jusqu'à atteindre une valeur maximale de $M= 5.76$ juste avant le choc normal caractérisé par le disque de Mach, et juste après le choc la valeur du nombre de Mach démunie d'une manière importante.

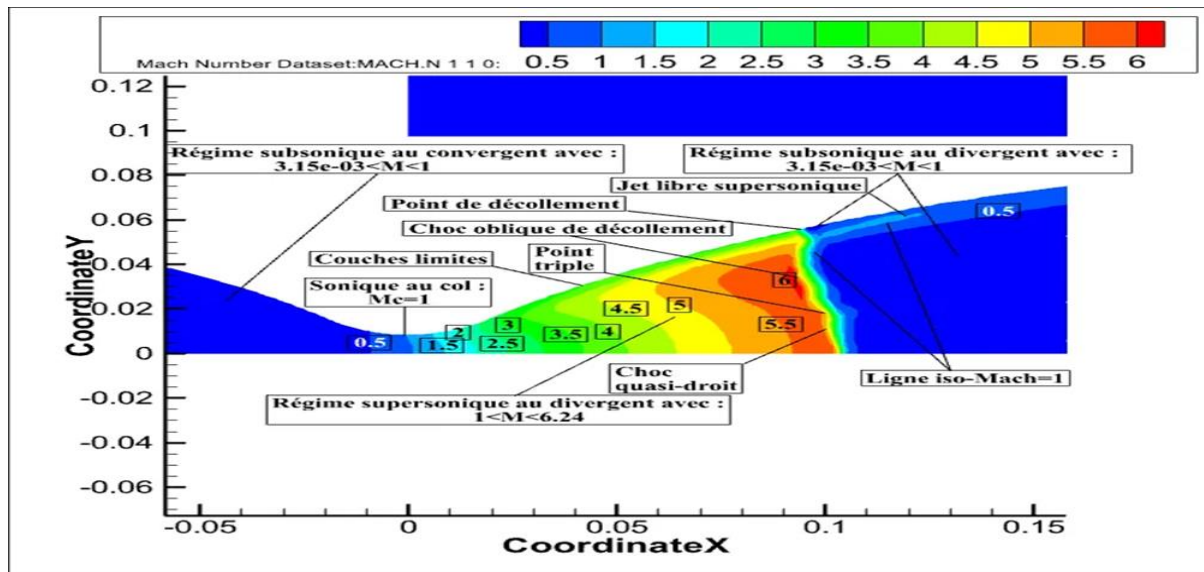


Figure 97. Contour d'évolution du Nombre de Mach dans la tuyère.

La figure 97. Représente l'évolution du contour du Nombre de Mach Le long de l'axe de la tuyère. On remarque que Le Contour du Nombre de Mach évolue d'une manière croissante dans le convergent, ($0.0149 < Mach < 1$. L'écoulement est subsonique) dans le col L'écoulement est sonique ($M=1$).

Dans la divergent le nombre de mach augmente brièvement jusqu' a atteint une valeur max égale à 5.76 puis chute directement cela veut dire qu'il y a une existence des ondes de choc (choc normal) positionnée en $x=0.101$ à une valeur subsonique.

VI.2.3.2. Evolution de la pression statique dans la tuyère :

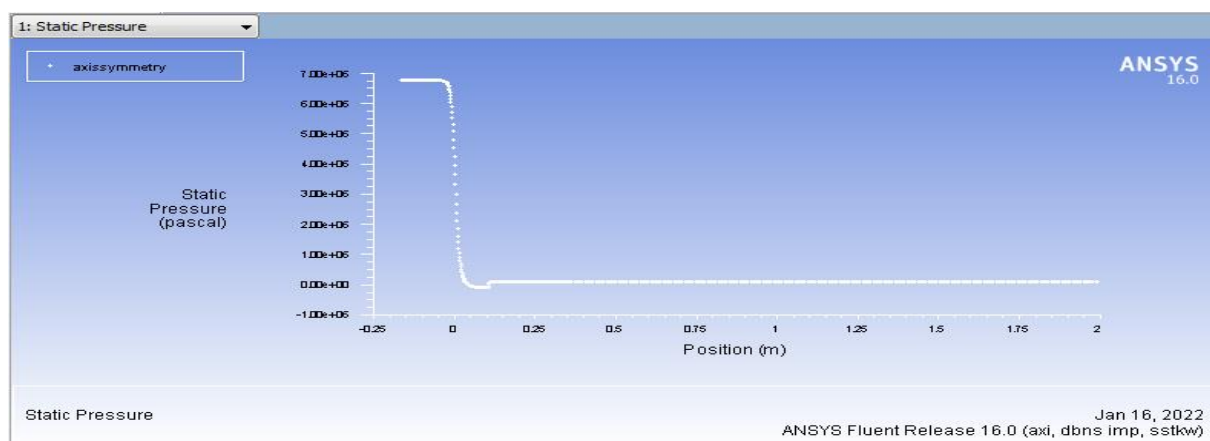


Figure 98. Evolution de la Courbe de la pression statique dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la pression statique le long de la tuyère, On remarque que la pression statique est presque constante dans la partie convergente et diminue rapidement dans la région du col jusqu'à la position du point de décollement (-96011.2 Pa) (une dépression). Le choc de décollement provoque une croissance de la pression puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée.

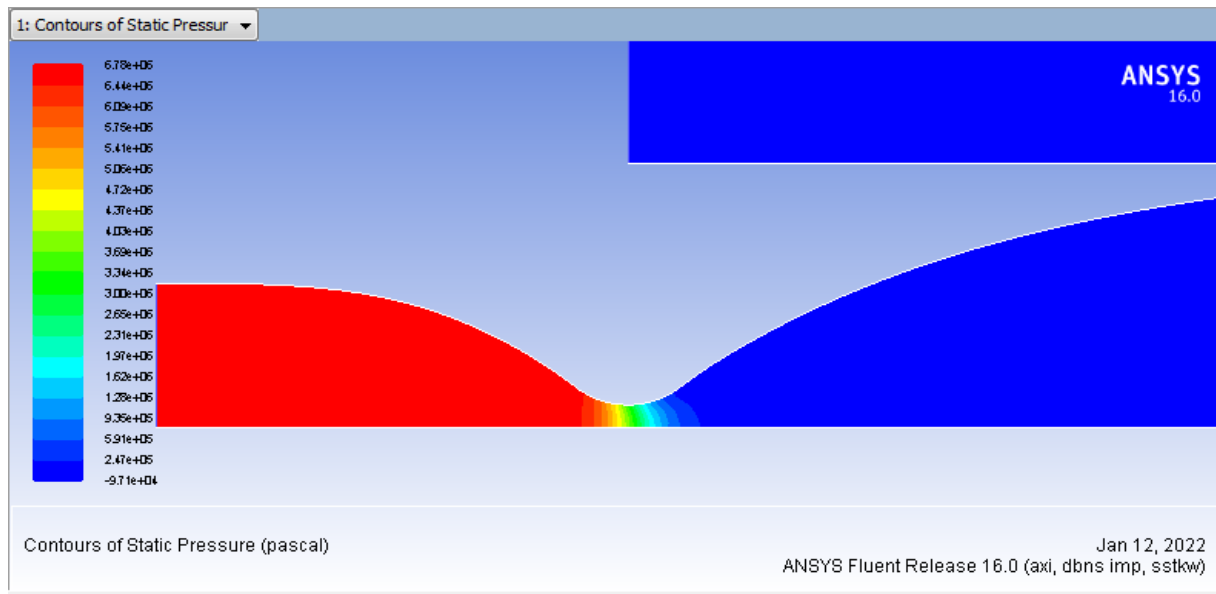


Figure 99. Contour d'évolution de la pression statique dans la tuyère.

La figure ci-dessous représente le Contour de l'évolution de la Pression Statique sur notre tuyère depuis l'entrée jusqu'à la sortie. Le Contour de la Pression Statique évolue d'une manière décroissante depuis l'entrée (la zone en rouge) jusqu'au col, puis augmente lentement dans le reste de la tuyère jusqu'à atteindre la pression atmosphérique imposée (la zone en bleu).

VI.2.3.3. Evolution du Vitesse magnitude dans la tuyère :

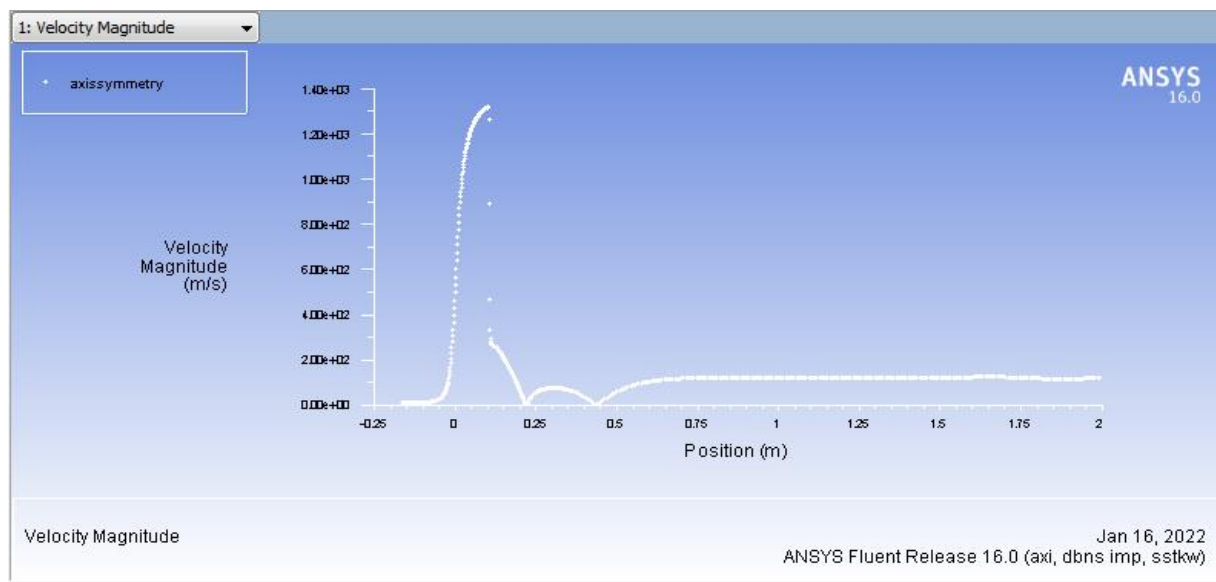


Figure 100. Evolution de la Courbe de la Vitesse magnitude dans la tuyère.

La courbe ci-dessus représente l'évolution de la vitesse le long de la tuyère On voit que dans la partie convergent la vitesse est égale 9490 m/s, par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la première partie du divergent) ($V = 122.092$ m/s) Ensuite, la vitesse diminue brusquement à cause de la présence d'une onde de choc.

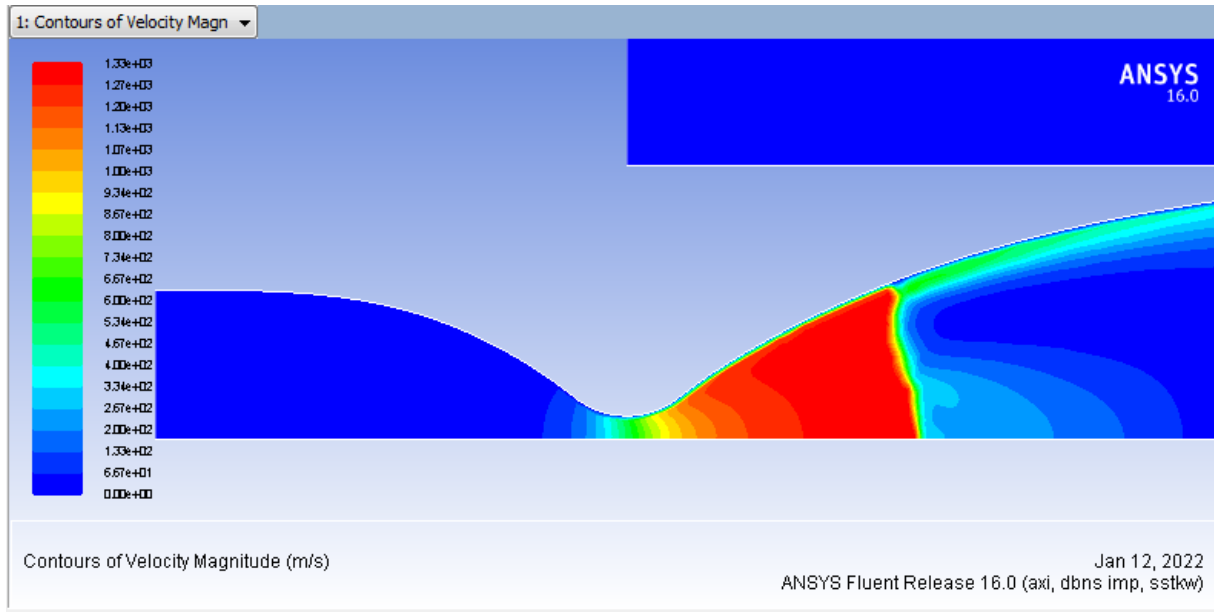


Figure 101. Contour d'évolution de la Vitesse magnitude dans la tuyère.

La Figure. 101 représente le Contour d'évolution de la Vitesse le long de la tuyère On voit que dans la partie convergent (la zone bleu) la vitesse est presque constante par la suite on remarque une augmentation rapide de la vitesse de l'écoulement juste après le col (la zone rouge) puis dans la partie divergent la vitesse démunie (la zone verte) à cause de la présence d'une onde de choc.

VI.3. Evolution du Nombre de Mach dans la tuyère avec des pressions différentes :

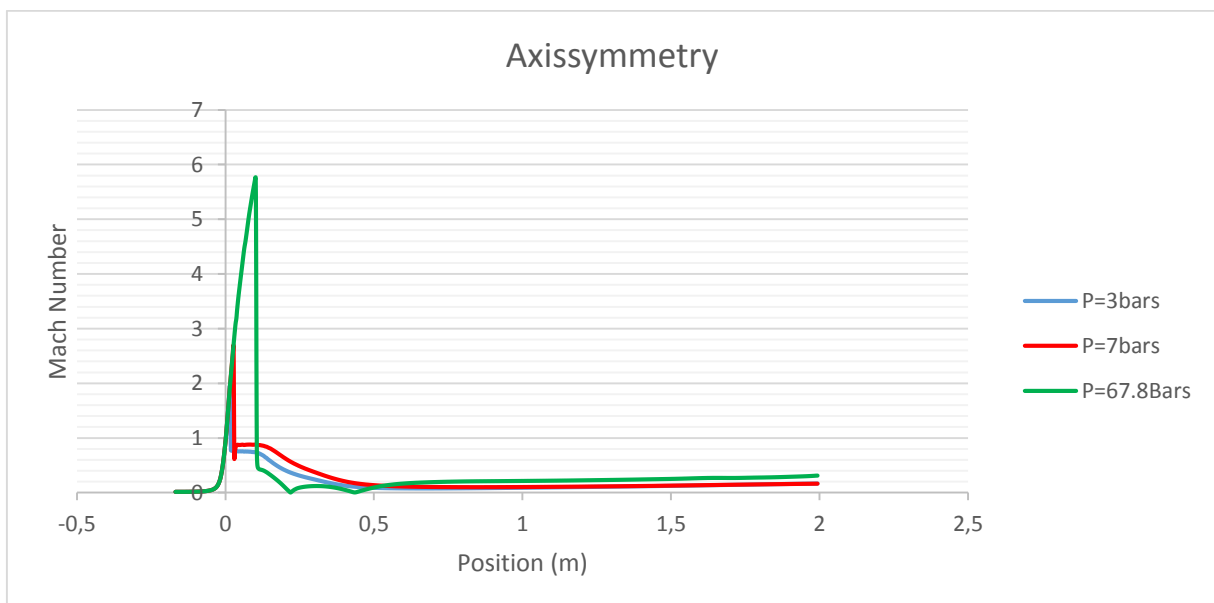


Figure 102. Evolution des Courbes du Nombre de Mach dans la tuyère avec des pressions différentes.

La figure ci-dessus représente l'évolution du Nombre de Mach à des différentes cas ($P=3$ bars, $P=7$ bars et $P=67.8$ bars,). Pour le Cas $P=3$ bars on a la valeur maximal $M=1.95$, pour le Cas ou $P=7$ bars on a la valeur maximal $M=2.70$, pour le Cas ou $P=67.8$ bar on a la valeur maximal $M=5.76$, Donc ce que on peut dire par ce graph c'est que plus on augmente la pression à l'entrée de la tuyère plus le Nombre de Mach augmente. Et la taille de disque de Mach augmente.

VI.4. Evolution de la vitesse statique dans la tuyère avec des pressions différentes :

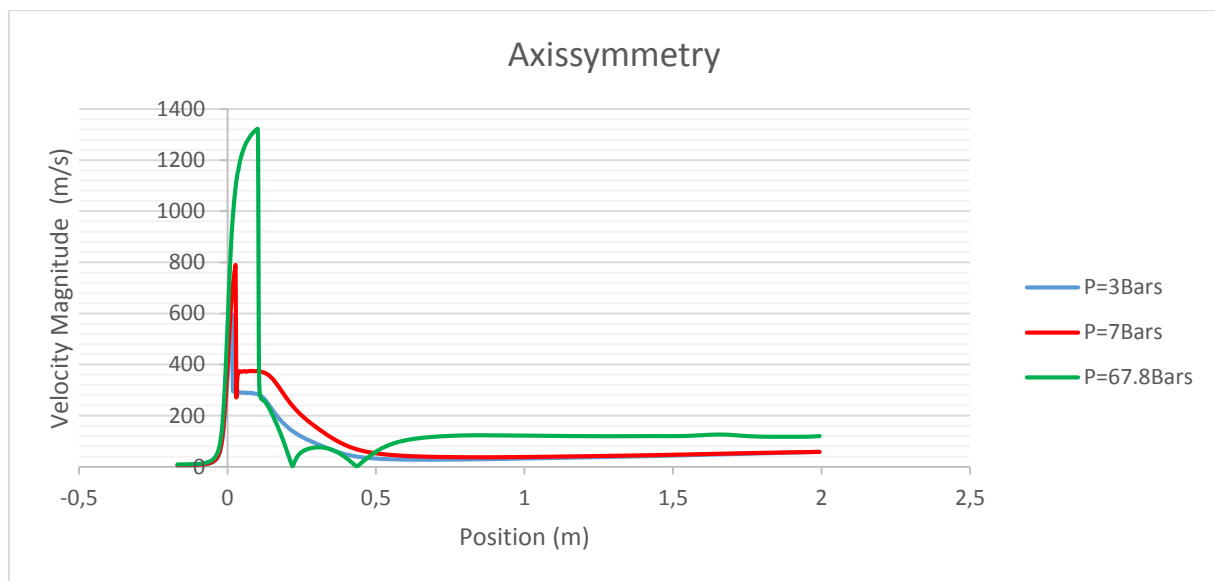


Figure 103. Evolution des Courbes de la vitesse dans la tuyère avec des pressions différentes.

La figure ci-dessus représente l'évolution de la vitesse à des différentes cas ($P=3$ bar, $P=7$ bar et $P=67.8$ bar,). Pour le Cas $P=3$ bar on a la valeur maximal $V=596.784$ m /s, pour le Cas ou $P=7$ bar on a la valeur maximal $V=789.823$ m /s pour le Cas ou $P=67.8$ bar on a la valeur maximal $V=1322.42$ m /s, Donc ce que on peut dire par ce graph c'est que plus on augmente la pression à l'entrée de la tuyère plus la vitesse augmente.

VI.5. Conclusion :

Dans ce chapitre une brève définition du logiciel fluent ainsi que son préprocesseur ANSYS 16.0 a été faite, ensuite un exemple d'application dans lequel on avait calculé un écoulement interne dans une tuyère convergente divergente à l'aide d'un logiciel de simulation numérique des écoulements. On a simulé l'écoulement pour trois pressions différentes ($P=3$ bars= 7 bars et $P=67.8$ bars), on a remarqué, quand en augmentant la pression le nombre de mach augmente, et la taille de disque de Mach augment et la vitesse augmente

CONCLUSION GENERALE

Ce projet de fin d'étude nous a permis de découvrir un sujet d'actualité et de recherche qui concerne le domaine des turbomachines, l'aéronautique et le spatial ; la motivation principale de ce travail a été l'étude et la compréhension des phénomènes physiques rencontrés dans des domaines pratiques tels que les turbines, les souffleries supersoniques, les avions supersoniques et les lanceurs spatiaux cette étude fait appel, non seulement, aux notions de base de la mécanique des fluides, mais également à celles de la thermodynamique par l'intermédiaire des équations d'état et de celles des transformations particulières telles que la transformation isothermique et la transformation isentropique. Notre projet se limite essentiellement au traitement par simulation numérique des écoulements compressibles.

Dans un premier temps notre travail s'est intéressée à l'étude théorique de l'écoulement compressible dans une tuyère en générale et dans une tuyère convergente-divergente en particulier en un régime stationnaire avec un modèle turbulent ($K\omega$ -SST) axisymétrique avec une géométrie réel raccordée à un moteur d'aviation avec un profil caractérisé d'un angle 14.8° par le biais d'une présentation des différentes relations relatives à l'évolution du fluide compressible dans une tuyère. Par la suite on a exploité la partie numérique dans le logiciel ANSYS 16.0 qui s'est déroulé en quatre phases dont : la création de la géométrie surfacique, le maillage de la géométrie, la résolution par ANSYS et la visualisation.

Toujours dans La partie numérique après avoir présenté le maillage les conditions aux limites ; les résultats ont été présentés sous forme de contours, de courbes et de valeurs numériques représentant la pression, le nombre de Mach, la température et la masse volumique de l'écoulement fluide compressible dans le convergent et le divergent.

Pour notre cas, on a simulé l'écoulement pour trois pressions différentes ($P=3$ bars= 7 bars et $P= 67.8$ bars), on a remarqué, quand en augmentant la pression le nombre de mach augmente, et la taille de disque de Mach augment et la vitesse augmente

L'intérêt de cette étude est de comprendre l'influence de pression sur l'écoulement compressible dans une tuyère convergent-divergent.

Références bibliographiques

- [1] Mécanique des fluides. J. Gosse. Edition techniques de l'ingénieur 1995
- [2] https://perso.crans.org/epalle/M2/EC/Slides_ECS1_Introduction_1415.pdf
- [3] Thermodynamique appliquée aux machines. R Vichnievsky. Edition Masson 1969.
- [4] CLAUDEL (B.). –*Propriétés thermodynamiques des fluides*. Traité Génie énergétique 8 020 (1996).
- [5] GOSSE (J.). –*Mécanique des fluides. Traité Sciences fondamentales*, A 1 870, p. 13 (1995).
- [6] RIOLLET (G.). –*Thermodynamique appliquée. Énergie, Entropie, Exergie*. Traité Génie énergétique, B 1 211, p. 6 (1992).
- [7] K.EI-KACHBOUR et B KOUDRI, "Simulation numérique sur les tuyères supersoniques tronquée", 2009.
- [8] Jean Détery, " Traité d'aérodynamique compressible, Volume 2, écoulements monodimensionnels stationnaires et surfaces de discontinuité", Lavoisier 2008.
- [9] AndreLallemend, "Ecoulement monodimensionnel des fluides Compressibles, Techniques de l'ingénieur Génie énergétique " – B 8 165.
- [10] http://www.capcomespace.net/dossiers/espace_europeen/ariane/ariane5/moteur_vulcain2.htm
- [11] CHOUICHA Rachid, "Développement de la méthode des caractéristiques pour la conception des tuyères double galbe (méthode inverse) », thèse de Master à l'université Saad dahleb de Blida 2015.
- [12] <http://psk.blog.24heures.ch/tag/super+dragon+v%C3%A9loce>
- [13] Peterson C.R. and Hill. P.G „Mechanics and Thermodynamics of Propulsion, 2nd edition. Addition-Wesley Publishing Company Inc., New York, 1992.
- [14] Malina F.J., “Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect gases,” J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, 1940.

- [15] Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2006.
- [16]. Shapiro A.H. The Dynamics and thermodynamics of compressible Fluid Flow, " Vol. 1. The Ronald Press Company, New York, 1953
- [17] <http://www.braeunig.us/space/propuls.htm>. Rocket and Space Technology.
- [18] Zebbiche T and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4699, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12- 2006.
- [19] T. Hamitouche , M. Sellam , H. Kbab and S. Bergheul , " Design and Wall Fluid Parameters Eva
- [20]. Stark, R., Génin, Ch., Wagner, B. and Koschel, W. "The Altitude Adaptive Dual Bell Nozzle," German aerospace Center (DLR), 74239, Lampoldshausen, Germany 2012. Evaluation of the Dual-Bell Nozzle", International Research Publication House, 2019.
- [21]. G. Sutton and O. Biblarz., "Rocket propulsion elements, "" Wiley and sons, 1992.
- [22] G. V. R. Rao., "Recent development in Rockets Nozzle Configuration, "" ARS Journal, pp. 1488-1494, 1961. 12. J. Mattingly, H. von Ohain., "", Elements of Propulsion: Gas Turbines and Rockets, ""
- [23] S. CANDEL, " Mécanique des Fluides ", Dunod (1995).
- [24] RYHMING. I. " Dynamiques des Fluides ", Presses Polytechniques Romandes (1985).
- [25] COMOLET. R, "Mécanique expérimentale des fluides, Tome 1", Masson, (1990)
- [26] REIJASSE. P. Aérodynamique des tuyères propulsives en sur-détente : décollement libre et charges latérales en régime stabilisé PhD Thesis, Université de Paris VI. (2005).
- [27] DELERY. J. "Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps",

Département Aérothermodynamique, E.N.S.A.E, (1989).

[28] Anderson Jr, John D., "Fundamentals of Aerodynamics, "" McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.

[29] Anderson Jr, John D., "Modern Compressible Flow with Historical Perspective", "McGrawHill Book Company, New York, 1982

[30] Rhyning I. L., "Dynamique des Fluides, " Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984

[31] CHERRAD Adel-eddine," Etude de l'écoulement transsonique autour d'un obstacle" thèse de magister, UNIVERSITE DE BATNA. Option: Energétique 2012.

[32] Zucker R. D. and Bilbarz O. Fundamentals of Gas Dynamics, John Wiley & Sons. New Jersey. 2002.

[33] Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E. Compressible Fluid Flow, "" Mc Graw- Hill, New York, 1997.

[34] JEAN DELERY, Traité d'aérodynamique compressible, Volume 1, Notions fondamentales d'aérodynamique, Lavoisier 2008.

[35] JOHN D. ANDERSON, JR, Computational fluid dynamics, McGraw-Hill 1995.

[36] CHARLES HIRSCH, Numerical computation of internal and external flows, John wiley et sons 1994.

[37] P CHASSAING, Mécanique des fluides, Eléments d'un premier parcours, Cepadues Editions 2000.

[38] INGEL RYHMING, Dynamiques des Fluides, Presses Polytechniques Romandes 1985.

[39] R. COMOLET, Mécanique expérimentale des fluides, Tome 2, Masson 1990.

[40] S. CANDE Mécanique des Fluides (cours) Dunod 1995

[41] REYNOLDS O., On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluid and the Determination of the Criterion, Phil. Tran. Ro. Soc. Lon., Series A, Vol. 186, 123-161, 1874.

- [42] FAVRE, A., Equations des gaz turbulents compressibles, part 1 : formes générales. J. de Mécanique 4, pp. 361-390, 1965.
- [43] FAVRE, A., Equations des gaz turbulents compressibles, part 2 : méthode des vitesses moyennes ; méthode des vitesses moyennes pondérées par la masse volumique. J. de Mécanique 4, pp. 391-421, 1965.
- [44] ERIC GONCALVES, Généralité sur les codes RANS en écoulement compressible, Institut National Polytechnique de Grenoble 2004.
- [45] BOUSSINESQ J., Essai sur la théorie des eaux courantes. Mem. Pres. Acad. Sci., XXIII, 46, Paris, 1877.
- [46] BOUSSINESQ, J., Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumubteur des liquides dans les lits rectilignes. Comptes Rendus de l'Acad. Des Sciences, CXXII, pp. 1293, 1896.
- [47] <http://psk.blog.24heures.ch/tag/super+dragon+v%C3%A9loce>.

Annexes

Les modèles de turbulences [48]

A.1. Modèle à 1 équation : le modèle de Spalart-Allmaras (1992)

Ce modèle utilise une seule équation de transport pour la quantité $\tilde{\nu}$ qui, loin des parois, se confond avec la viscosité turbulente ν_t . L'équation pour $\tilde{\nu}$ résulte d'une construction pas à pas par ajout de termes destinés à prendre en compte de plus en plus de phénomènes physiques.

Partant d'une forme « convection = production+diffusion » pour les écoulements libres, Spalart [49,50] ajoute les termes nécessaires pour obtenir une région logarithmique dans les profils de vitesse puis les termes de correction de faible nombre de Reynolds de turbulence pour la région de proche paroi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \text{div} \left[\vec{V} \rho \tilde{\nu} - \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{\nu}) \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\nu} \right] \\ = c_{b1} (1 - f_{12}) \tilde{s} \rho \tilde{\nu} + \frac{c_{b2}}{\sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \rho \tilde{\nu} \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{\nu} - (c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{k^2} f_{12}) \rho \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \\ v_1 = \tilde{\nu} f_{v1} ; \quad f_{v1} = \frac{x^3}{x^3 + c_{v1}^3} \quad ; \quad x = \frac{\rho \tilde{\nu}}{\mu} \\ \tilde{s} = |\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}| + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2} ; \quad f_{v2} = 1 - \frac{x}{1 + x f_{v1}} ; \quad f_{12} = c_{13} \exp(-c_{l1}) \\ f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}} ; \quad g = r + c_{w2} (r^6 - r) \quad : \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{s} k^2 d^2} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Les constantes :

$$\begin{aligned} c_{b1} = 0.1355 \quad ; \quad c_{b2} = 0.622 \quad ; \quad \sigma = \frac{2}{3} \quad ; \quad k = 0.41 \\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{(1 + c_{b2})}{\sigma} ; \quad c_{w2} = 0.3 \quad ; \quad c_{w3} = 2 \\ c_{v1} = 7.1 \quad ; \quad c_{l3} = 1.1 \quad ; \quad c_{l1} = 2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Actuellement, ces modèles sont les plus répandus dans les codes **RANS**. Dans ces équations, la variable d désigne la plus petite distance à la paroi. Dans le sillage d'un profil, d est la distance au bord de fuite.

A.2. Modèles à deux équations :

A.2.1. Le modèle C – D :

Le modèle C – D de Jones-Launder (1972)

Ce modèle, très largement utilisé, a été développé à l'origine pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradients de pression favorables [51].

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + diV \left[\rho k \vec{V} - \left(\mu + \frac{\mu_l}{\sigma_k} \right) \overrightarrow{grad} k \right] = p_k - \rho \tilde{\varepsilon} - D \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + diV \left[\rho \tilde{\varepsilon} \vec{V} - \left(\mu + \frac{\mu_l}{\sigma_\varepsilon} \right) \overrightarrow{grad} \tilde{\varepsilon} \right] = c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - \rho C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E \quad (A.4)$$

Le taux de dissipation de l'énergie cinétique peut être approximée par :

$$\rho \varepsilon = \mu \frac{\partial w_{i_l}}{\partial x_j} \frac{\partial w_{i_l}}{\partial x_j} \quad (A.5)$$

Le terme D est introduit pour intégrer la quantité $\tilde{\varepsilon}$, grandeur interprétée comme la partie isotrope de la dissipation. Elle a l'avantage de tendre vers zéro à la paroi ce qui simplifie l'écriture de la condition au limite.

$$D = 2\nu(\overrightarrow{grad}\sqrt{k}) \cdot (\overrightarrow{grad}\sqrt{k}) ; \rho \tilde{\varepsilon} = \rho \varepsilon - D \quad (A.6)$$

La viscosité turbulente, la production de k et le terme de bas nombre de Reynolds de turbulence E vérifient :

$$\mu_l = \rho c_{\mu} f_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon} ; P_k = \bar{\tau}^l : \overrightarrow{grad} \vec{V} \quad (A.7)$$

$$E = 2 \frac{\mu \mu_l}{\rho} \left(\overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{grad} \vec{V} \right) \right) : \left(\overrightarrow{grad} \left(\overrightarrow{grad} \vec{V} \right) \right) \quad (A.8)$$

Les fonctions d'amortissement sont reliées au nombre de Reynolds de turbulence :

$$R_l = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} ; f_{\mu} = \exp\left(\frac{-2.5}{1 + \frac{R_l}{50}}\right) ; f_2 = 1 - 0.3 \exp(-R_l^2) \quad (A.9)$$

Les constantes :

$$c_{\mu} = 0.09 ; c_{\varepsilon 1} = 1.57 c_{\varepsilon 2} = 2 ; \sigma_k = 1 ; \sigma_{\varepsilon} = 1.3 \quad (A.10)$$

L'échelle de temps caractéristique $T = k/\varepsilon$ représente la durée nécessaire pour dissiper un tourbillon porteur d'une énergie cinétique turbulente k .

Il existe de nombreux modèles $k-\varepsilon$ (Jones-Launder, Launder-Sharma, Nagano, Chieng, Shih...).

Les différences majeures entre ces modèles concernent les valeurs des constantes et les fonctions d'amortissement utilisées.

Le modèle $k - \varepsilon$ réalisable

Les conditions de réalisabilité expriment que les fluctuations de vitesse au carré doivent être positives et que les corrélations croisées doivent vérifier l'inégalité de Schwartz.

Appliquées à un modèle de turbulence $k - \varepsilon$, les conditions pour assurer la réalisabilité dans un écoulement tridimensionnel sont [52] :

$$c_{\mu} \leq \frac{1}{8\sqrt{3}} ; s = \frac{k}{\varepsilon} S ; s^2 = 2s_{ij}s_{ij} - \frac{2}{3}s_{kk}^2 \quad (A.11)$$

Ceci permet d'obtenir un modèle faiblement non-linéaire avec un coefficient) J fonction du tenseur de déformation adimensionné :

$$c_\mu = \min\left(c_\mu^\circ, \frac{c}{s\sqrt{3}}\right) \quad \text{avec } c \leq 1 \quad (\text{A.12})$$

ou c_μ° est égale à 0.09.

A.2.2. Le modèle $k - \omega$

Le modèle $k-\omega$ de de Wilcox (1988)

Ce modèle [53] présente le grand avantage de ne pas comporter de fonction d'amortissement dans les seconds membres des équations de transport ni dans l'expression de la viscosité turbulente. Par contre, il est très sensible à la condition limite à imposer sur ω aux frontières des couches limites et des sillages.

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + diV[\rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_l) \overrightarrow{grad} k] = P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + diV[\rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_l) \overrightarrow{grad} \omega] = \alpha \frac{\omega}{k} p_k - \beta \rho \omega^2 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Avec :} \quad \mu_l \frac{\rho k}{\omega}$$

Les constantes :

$$\alpha = \frac{5}{9} \quad ; \quad \beta = \frac{3}{40} \quad ; \quad \beta^* = 0.09 \quad ; \quad \sigma = \sigma^* = 0.5$$

La condition limite à la paroi pour la dissipation spécifique est :

$$\lim_{d \rightarrow 0} \omega = \frac{6\nu}{\beta d^2} \quad (\text{A.15})$$

Le modèle $k-\omega$ de Menter avec correction SST (1992) :

Il s'agit d'un modèle bicouche, $k - \omega$ de Wilcox et $k - \epsilon$ de Launder-Sharma, développé pour remédier au problème de sensibilité à la valeur de ω_e à l'extérieur des couches limites. Menter [54] espère ainsi conserver le bon comportement du modèle de

Wilcox dans la région interne des couches limites obtenir une condition limite insensible au niveau de ω_e Ceci constitue le modèle BSL de Menter :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + diV[\rho k \vec{V} - (\mu + \sigma^* \mu_l) \overrightarrow{grad} k] = P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + diV[\rho \omega \vec{V} - (\mu + \sigma \mu_l) \overrightarrow{grad} \omega] = \frac{\gamma}{\nu_l} p_k - \beta \rho \omega^2 + 2 \frac{\rho \sigma \omega}{\omega} \overrightarrow{grad} k \cdot \overrightarrow{grad} \omega \quad (\text{A.17})$$

Menter ajoute en plus une correction dite SST pour « Shear Stress Transport ». Elle repose sur la constatation que pour les modèles de turbulence à deux équations de transport utilisant

la notion de viscosité turbulente, le rapport de la contrainte de cisaillement τ à la valeur de ρk est égale à :

$$\frac{\tau}{\rho k} = \sqrt{c_{\mu} \frac{\rho k}{\varepsilon}} ; c_{\mu} = 0.09 \quad (\text{A.18})$$

Alors qu'expérimentalement ce rapport est plutôt $\frac{\tau}{\rho k} \simeq \sqrt{c_{\mu}} = 0.3$ dans une grande partie de la couche limite. Dans le cas d'écoulements en présence de gradients de pression positifs, le rapport production sur dissipation peut être nettement supérieur à 1 ce qui conduit à surestimer la contrainte de cisaillement et donc, indirectement, à sous-estimer l'effet des gradients de pression positifs.

Pour pallier cette incohérence, Menter [55] propose de limiter le coefficient de viscosité turbulente dans la région externe des couches limites :

$$\mu_l = \frac{\rho k / \omega}{\max\left(1, \frac{\Omega F_2}{\alpha_1 \omega}\right)} \quad (\text{A.19})$$

La fonction F_1 permet de passer du modèle $\mathbf{k}\text{-}\omega$ à la paroi ($F_1 = 1$) au modèle $\mathbf{k}\text{-}\varepsilon$ à l'extérieur ($F_1 = 0$) et la fonction F_2 limite la valeur de la viscosité turbulente. Elles sont données par :

$$F_1 = \tanh(\zeta^1) \quad \text{Avec } \zeta = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500v}{y^2\omega} \right) ; \frac{4\rho\omega_2 k}{D_\omega y^2} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Et } D_\omega = \max \left(\frac{\rho\sigma\omega^2}{\omega} \overrightarrow{\text{grad}k} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\omega} ; 10^{-20} \right)$$

$$F_2 = \tanh(l^1) \quad \text{Avec } l = \max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y} ; \frac{500v}{y^2\omega} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$$

$$\sigma_1^* = 0.5\sigma_1 = 0.5\beta_1 = 0.075\sigma\omega_1 = 0$$

$$\sigma_2^* = 0.85\sigma_2 = 0.856\beta_2 = 0.0828\sigma\omega_2 = 0.856$$

$$k=0.41 \quad \sigma_1 = \sqrt{\beta^*} = 0.3 \quad , \quad \gamma_i = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_i \frac{k^2}{\sqrt{\beta^*}} \quad \text{pour } i=1,2 \quad (\text{A.22})$$

Remarque : la correction SST de Menter peut être appliquée à n'importe quel modèle de turbulence à deux équations

B. Mode de calcul des paramètres et l'architecture de la tuyère collaborée à l'aide des langages (Excel et FORTRANT (Plato)) :

Annexe B.1: TABLES I : les coordonnées de la tuyère Laval et le domaine de calcul.

a) Les coordonnées de la convergent :

#Group	Points	X-cordonnées	Y-cordonnées	Z-cordonnées
1	1	-0.168303	0.0529263	0
1	2	-0.164606	0.0529843	0
1	3	-0.160909	0.053039	0
1	4	-0.157211	0.053087	0
1	5	-0.153514	0.053125	0
1	6	-0.149816	0.0531496	0
1	7	-0.146118	0.0531574	0
1	8	-0.142422	0.053145	0
1	9	-0.138724	0.053109	0
1	10	-0.135027	0.0530458	0
1	11	-0.131331	0.0529519	0
1	12	-0.127748	0.0528281	0
1	13	-0.124167	0.0526687	0
1	14	-0.120588	0.0524703	0
1	15	-0.117012	0.0522296	0
1	16	-0.113439	0.0519432	0
1	17	-0.10987	0.0516075	0
1	18	-0.106306	0.0512192	0
1	19	-0.10275	0.0507748	0
1	20	-0.0989001	0.0502253	0
1	21	-0.095062	0.0496013	0
1	22	-0.0912375	0.0488988	0
1	23	-0.0874291	0.0481137	0
1	24	-0.0836388	0.0472418	0
1	25	-0.0798718	0.0462801	0
1	26	-0.0761294	0.045225	0
1	27	-0.0726024	0.044137	0
1	28	-0.0691019	0.0429666	0

1	29	-0.0656294	0.0417154	0
1	30	-0.0621865	0.0403851	0
1	31	-0.0587745	0.0389772	0
1	32	-0.0553949	0.0374934	0
1	33	-0.0520489	0.0359352	0
1	34	-0.0487378	0.0343042	0
1	35	-0.0454628	0.0326018	0
1	36	-0.042225	0.0308296	0
1	37	-0.0391454	0.0290596	0
1	38	-0.036103	0.0272278	0
1	39	-0.0330972	0.0253346	0
1	40	-0.0301299	0.0233818	0
1	41	-0.0272019	0.0213704	0
1	42	-0.0243143	0.0193016	0
1	43	-0.0214678	0.0171766	0
1	44	-0.0186635	0.0149963	0
1	45	-0.0173205	0.0139909	0
1	46	-0.0159231	0.013062	0
1	47	-0.0144758	0.0122125	0
1	48	-0.0129834	0.0114454	0
1	49	-0.0114505	0.0107629	0
1	50	-0.00988198	0.0101673	0
1	51	-0.0082826	0.0096603	0
1	52	-0.00665727	0.0092434	0
1	53	-0.00501105	0.0089181	0
1	54	-0.00334916	0.0086853	0
1	55	-0.00167694	0.0085458	0
1	56	9.997748E-007	0.008500001	0

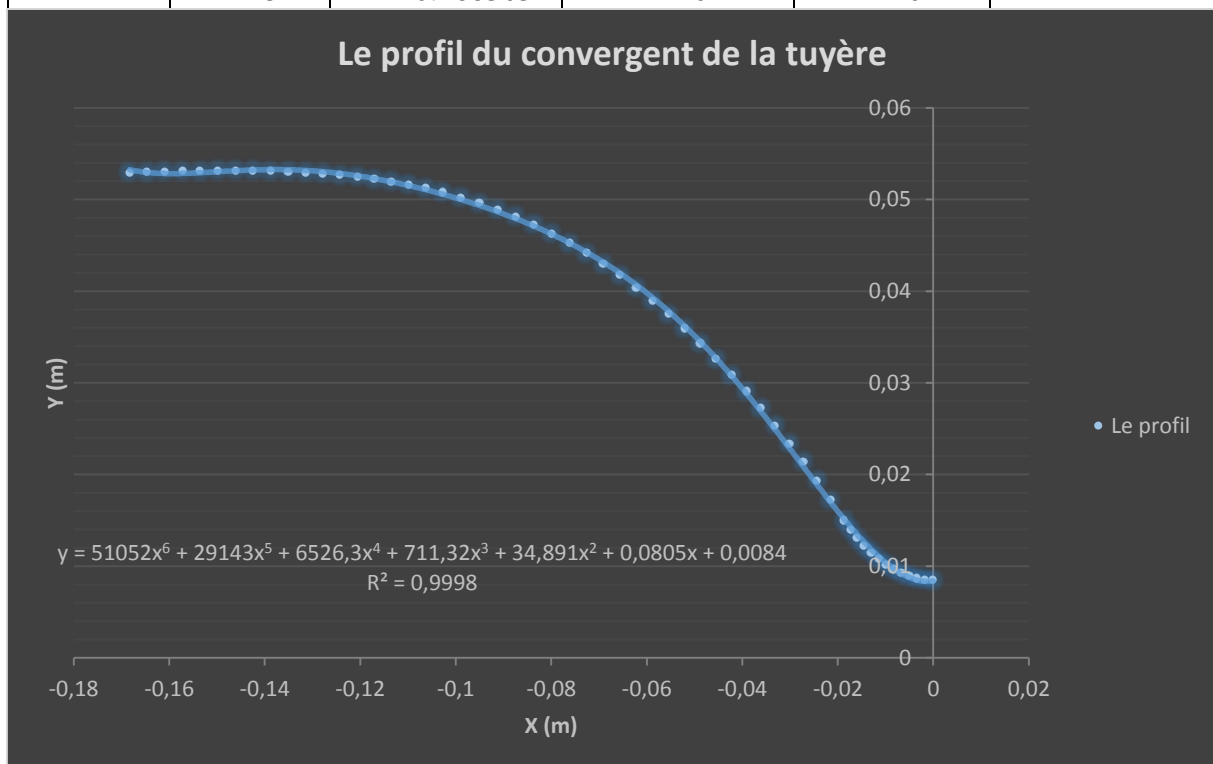
b) Les coordonnées de la divergent :

#Group	Points	X-cordonnées	Y-cordonnées	Z-cordonnées
1	1	0.336606	0.09745249992	0
1	2	0.036103	0.0272278	0
1	3	0.0330972	0.0253346	0
1	4	0.0301299	0.0233818	0
1	5	0.0272019	0.0213704	0

1	6	0.0243143	0.0193016	0
1	7	0.0214678	0.0171766	0
1	8	0.0186635	0.0149963	0
1	9	0.0173205	0.0139909	0
1	10	0.0159231	0.013062	0
1	11	0.0144758	0.0122125	0
1	12	0.0129834	0.0114454	0
1	13	0.0114505	0.0107629	0
1	14	0.00988198	0.0101673	0
1	15	0.0082826	0.0096603	0
1	16	0.00665727	0.0092434	0
1	17	0.00501105	0.0089181	0
1	18	0.00334916	0.0086853	0
1	19	0.00167694	0.0085458	0
1	20	9.997748E-007	0.008500001	0

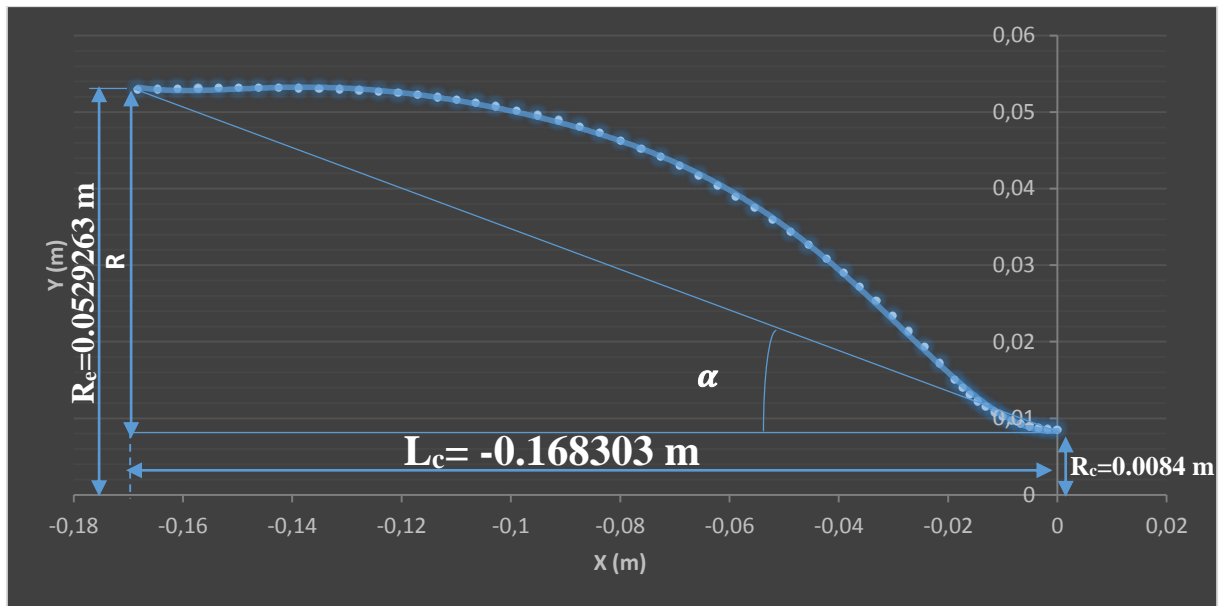
c) Les coordonnées de domaine de calcul :

#Group	Points	X-cordonnées	Y-cordonnées	Z-cordonnées
2	1	0	0.09745249992	0
2	2	0	0.779619999	0
2	3	1.993298499	0.779619999	0
2	4	1.993298499	0	0
2	5	-0.168303	0	0



Annexe B.2: Le profil du convergent de la tuyère

Calcule l'angle α de profil du convergent de la tuyère :

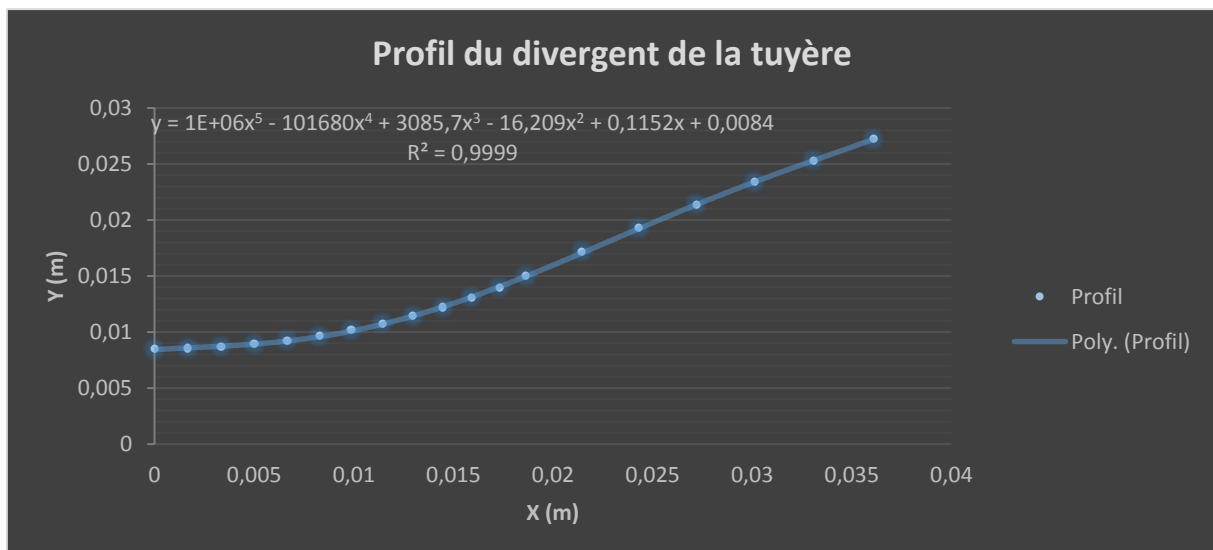


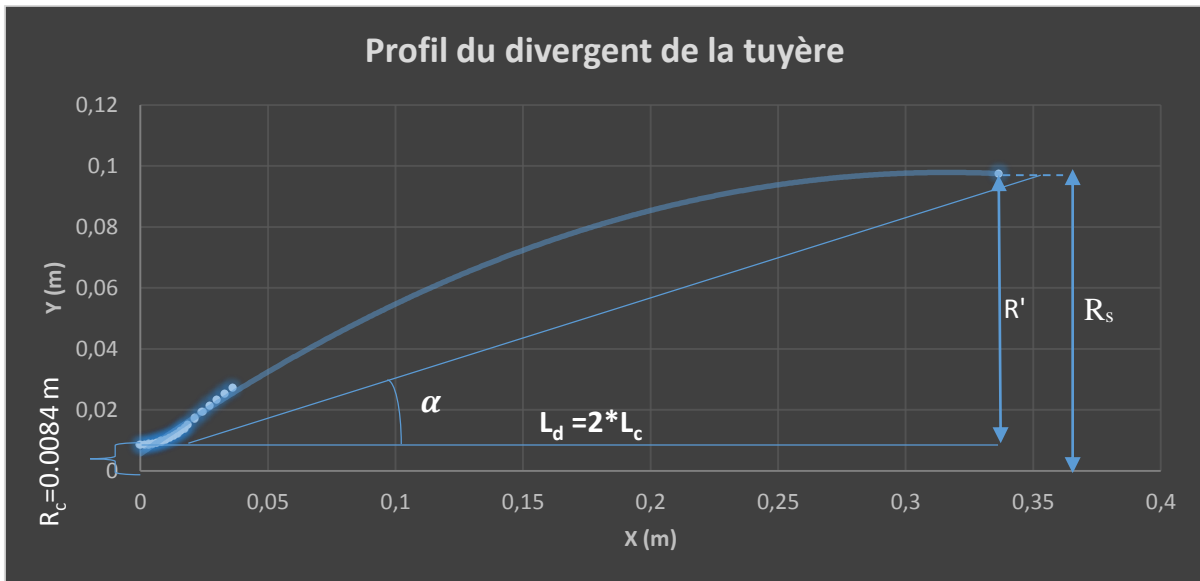
Annexe B.3 : Schéma dimensionnel de profil du convergent de la tuyère

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{R}{|L_c|} = \tan^{-1} \frac{R_e - R_c}{|L_c|}$$

AN :

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{0,0529263 - 0,0084}{|-0,168303|} = 14^{\circ}8'18,6711991''$$





Annexe B.4: Schéma dimensionnel de profil du divergent de la tuyère

Calcul de rayon de sortie R_s :

On a : $R_s = R' + R_c$

D'abord calcul de R' ;

$$R' = L_d * \tan \alpha$$

$$\text{AN : } R' = 2 * |-0.168303| * \tan 14^\circ 8' 18.67111991'' = 0.08905249992 \text{ m}$$

$$\text{Donc : } R_s = R' + R_c \rightarrow R_s = 0.08905249992 + 0.0084 = 0.09745249992 \text{ m}$$

Calcul de du rapport de section A_e/A_c sur langage de programmation Plato est coder comme suit :

```

Plato - ra.f95
File Edit View Project Build Tools Window Help
ra.f95 x
program rapportdessections
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8, dimension(6) :: Re, Rc, PI, Ae, Ac, r
real*8 r, Ae, Ac
real*8 r, Ae, Ac
Re=0.0529263
Rc=0.0084
PI=3.1415926535897932384626433832795028841971
!Section entree Ae
Ae(:) = PI(:)*Re(:)**2
write(*,*) 'Ae (m^2) '
write(*,*) Ae
!section au col Ac
Ac(:) = PI(:)*Rc(:)**2
write(*,*) 'Ac (m^2) '
write(*,*) Ac
! calcul de r=Ae/Ac
r(:)=Ae(:)/Ac(:)
write(*,*) 'r=Ae/Ac'
write(*,*) r
end program rapportdessections

Plato
Ae<m^2>
8.800207734540E-03 8.800207734540E-03 8.800207734540E-03
8.800207734540E-03 8.800207734540E-03 8.800207734540E-03
Ac<m^2>
2.216707679979E-04 2.216707679979E-04 2.216707679979E-04
2.216707679979E-04 2.216707679979E-04 2.216707679979E-04
r=Ae/Ac
39.6994507396 39.6994507396 39.6994507396 39.6994507396
Press RETURN to close window...

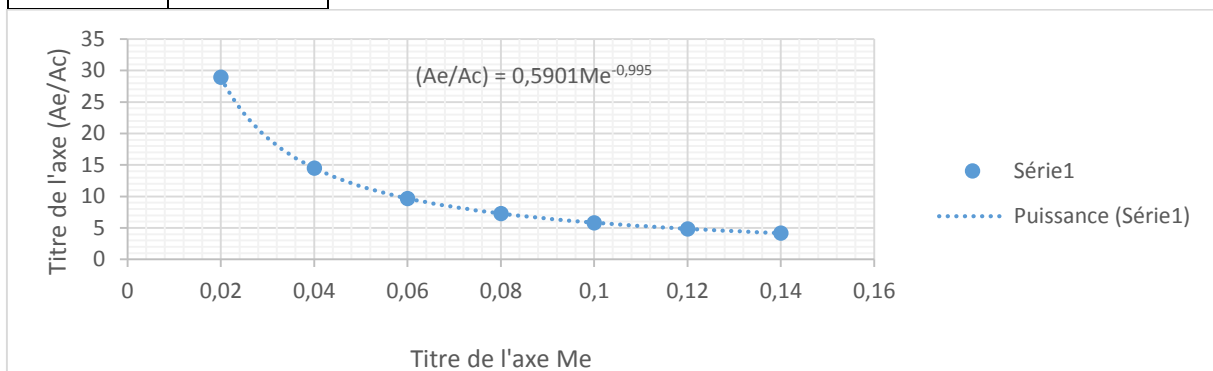
```

Annexe B.5: Code de calcul de rapport de sections sur Plato

D'après ce rapport de sections nous pouvons calculer le nombre de mach à l'entrée de la tuyère en utilisant quelques valeurs de la TABLE I : Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ($\gamma = 1.4$) pour faire la méthode de l'interpolation avec une équation de rapport de sections en fonction de nombre de mach extraite dans l'Excel ;(voir l'annexe 6 et 7).

Annexe B.6: TABLE II : Ecoulement isentropique d'un gaz parfait ($\gamma = 1.4$)

Ma	$r=A/A^*$
0,02	28,9421
0,04	14,4815
0,06	9,6659
0,08	7,2616
0,1	5,8218
0,12	4,8643
0,14	4,1824



Annexe B.7 : La courbe de rapport de sections en fonction de nombre de mach

Calculer le nombre de mach sur langage de programmation Plato est codé comme suit :

```

Plato - mach.f95
File Edit View Project Build Tools Window Help
mach.f95 x
program nombredeMachEntreeMe
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8,dimension(2) ::r,Me
real*8 r,Me
real*8 r,Me
r=39.6994507396
!calcul de Me
Me(:) = 0.5901/r(:)**1/0.995
write(*,*)'Me'
write(*,*)Me
end program nombredeMachEntreeMe

Plato
Me      1.493887931699E-02      1.493887931699E-02
Press RETURN to close window...

```

Annexe B.8 : Code de calcul de nombre de mach sur Plato

Le fait qu'on a trouvé le nombre de mach à l'entrée de la tuyère par l'interpolation, il suffit de calculer avec cette expression le rapport NPR_{trans} comme suit [56] :

$$NPR_{trans} = \frac{1}{M_e} * \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2} * M_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (B.1)$$

Calcul du rapport de NPR_{trans} sur langage de programmation Plato est coder comme suit :

```

Plato - tauxdedetentedetuyere.laval.f95
File Edit View Project Build Tools Window Help
tauxdedetentedetuyere.laval.f95 x
program tauxdedetentedetuyere.laval
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8,dimension(3) ::gamma,Me,NPRtrans
real*8 gamma,Me,NPRtrans
real*8 gamma,Me,NPRtrans
gamma=1.4
Me=1.493887931699E-02
!calcul de NPRtrans=Pinlet/Poutlet
NPRtrans(:) = 1/Me(:)*(1+(gamma(:)-1)/2*Me(:)**2)**((gamma(:))/(gamma(:)-1))
write(*,*) 'NPRtrans=Pinlet/Poutlet'
write(*,*)NPRtrans
end program tauxdedetentedetuyere.laval

Plato
NPRtrans=Pinlet/Poutlet
66.9498813832          66.9498813832          66.9498813832
Press RETURN to close window...

```

Annexe B.9 : Code de programmation de NPR_{trans} sur Plato

Le calcul de la pression totale à l'entrée de la tuyère sur langage de programmation Plato est coder comme suit :

```

Plato - p0.f95
File Edit View Project Build Tools Window Help
p0.f95 x
program pressiontotaledelatuyere.laval
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8,dimension(3) ::NPRtrans,Pinlet,Patm
real*8 NPRtrans,Pinlet,Patm
real*8 NPRtrans,Pinlet,Patm
NPRtrans=66.9498813832
Patm=101325
!calcul temperature inlet (totale) de la tuyere laval
Pinlet(:) =NPRtrans(:)*Patm(:)
write(*,*) 'Pinlet=Ptotale(Pascal)'
write(*,*) Pinlet
end program pressiontotaledelatuyere.laval

Plato
Pinlet=Ptotale(Pascal)
6783696.84505          6783696.84505          6783696.84505
Press RETURN to close window...

```

Annexe B.10 : Code de programmation de la pression totale sur Plato.

Pour Calculer la pression statique de la tuyère en utilisant l'expression de PRANDTL-MEYER sur langage de programmation Plato est code comme suit :

```

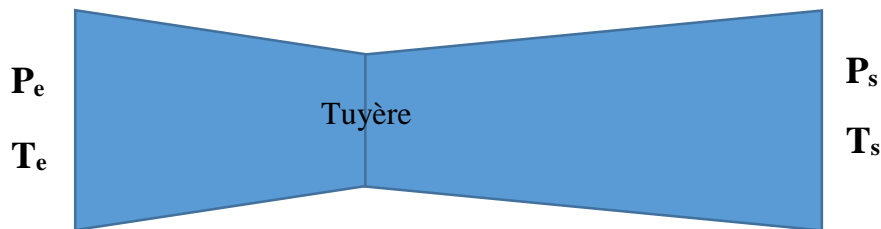
Plato - pstatique.f95
File Edit View Project Build Tools Window Help
pstatique.f95 x
program pressionstatiquedelatuyere
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8, dimension(4) :: gamma, Me, Pinlet, Pstatique
real*8 gamma, Me, Pinlet, Pstatique
real*8 gamma, Me, Pinlet, Pstatique
gamma=1.4
Me=1.493887931699E-02
Pinlet=6783696.84505
!calcul de pressions tatique de latuyere laval
Pstatique(:) = Pinlet(:) / ((1+(gamma(:)-1)/2*Me(:)**2))**(gamma(:)/(gamma(:)-1))
write(*,*) 'Pstatique(Pascal)'
write(*,*) Pstatique
end program pressionstatiquedelatuyere

Plato
Pstatique(Pascal)
6782637.36346      6782637.36346      6782637.36346
Press RETURN to close window...

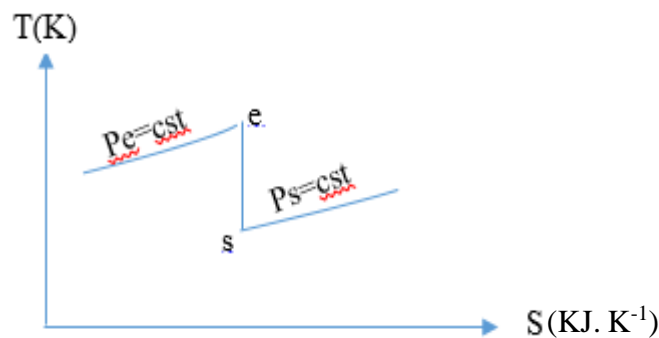
```

Annexe B.11 : Code de programmation de la pression statique sur Plato.

Pour calculer la température totale à l'entrée de la tuyère d'abord en déduire l'expression de la détente à travers de schéma explicatif et le diagramme isentropique sont démontrés comme suit :



Annexe B.12 : schéma de la tuyère



Annexe B.13 : Diagramme isentropique dans la tuyère

La température T_e est calculée par la relation isentropique suivante :

$$T_e = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} * T_s \tag{B.2}$$

Pour calculer la température totale à l'entrée de la tuyère en utilisant l'expression de PRANDTL-MEYER sur langage de programmation Plato est code comme suit :

The screenshot shows the Plato software interface. The top window, titled 'Tinlet.f95', contains the following Fortran code:

```

program temperatureinletdelatuyerealaval
! ce programme permet de résoudre l'équation de 2 degré
implicit none
real*8, dimension(4) :: NPRtrans, gamma, Tinlet, Ts
real*8 NPRtrans, gamma, Tinlet, Ts
real*8 NPRtrans, gamma, Tinlet, Ts
NPRtrans=66.9498813832
Ts=300
gamma=1.4
!calcul temperature inlet (totale) de la tuyere laval
Tinlet(:) =Ts(:)*(NPRtrans(:))**((gamma(:)-1)/gamma(:))
write(*,*) 'Tinlet=Ttotale (K) '
write(*,*) Tinlet
end program temperatureinletdelatuyerealaval

```

The bottom window, titled 'Plato', shows the output of the program:

```

Tinlet=Ttotale(K)
          997.158138065           997.158138065           997.158138065
          997.158138065
Press RETURN to close window...

```

Annexe B.14 : Code de programmation de la température totale sur Plato.

Références (ANNEXE)

- [48] ERIC GONCALVES, Généralité sur les codes RANS en écoulement compressible, Institut National Polytechnique de Grenoble 2004.
- [49] P.R. SPALART and S.R. ALLMARAS. A one- equation turbulence model for aerodynamic flow. In AIAA 92-0439, 30th Aerospace Sciences Meeting-Reno, Nevada, January 6-9 1992.
- [50] P R SPALART and S.R. ALLMARAS. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. La Recherche Aérospatiale, (1) : 5-21, 1994.
- [51] W.P. JONES and B.E. LAUNDER. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. Int.J.Heat Mass Transfer, 15: 301-314 1972.
- [52] P.A. DURBIN. On the $\xi - Q$ stagnation point anomaly. International Journal of Heat and fluid flow, 17 (1):89-90, 1996.
- [53] D.C. WILCOX. Reassement of the scale-determing equation for advanced turbulence models. AIAA Journal, 26(11): 1299-1310, Nouvember 1988.
- [54] F.R. MENTER. Improved two-equation $\xi - \bar{\Delta}$ turbulence models for aerodynamic flows. Technical report, NASA Technical Memorandum 103975, October 1992.
- [55] F.R. MENTER. Two-equation eddy- viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA. Journal, 32(8) :1598-1605, 1994.
- [56]https://www.researchgate.net/publication/335453641_Design_and_Wall_Fluid_Parameter_s_Evaluation_of_the_Dual-Bell_Nozzle/link/5d6ea8d292851c1b3b278006/down