

Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU



Faculté du Génie et de la Construction
Département de Génie Civil



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures et Matériaux

Présentée par

IDDIR ABDELKADER

Sujet

**Modélisation des éléments de structure de section
Circulaire en béton armé confiné (Analyse de la
fissuration)**

Devant le jury composé de :

Abdelkader	TAHAKOURT	Professeur, U. Béjaia	Président
Mohand Said	KACHI	Professeur, UMMTO	Directeur
Youcef	BOUAFIA	Professeur, UMMTO	Co-Directeur
Mohamed	KADRI	Professeur, U. Boumerdès	Examineur
Abdellatif	ZERIZER	Professeur, U. Boumerdès	Examineur

Soutenue le 06 / 06 / 2016

REMERCIEMENTS

Une thèse de doctorat est par définition le fruit d'un travail personnel, mais qui pour ma part n'aurait jamais abouti sans le concours d'un certain nombre de personnes que je souhaite remercier ici.

Je remercie en premier lieu mon directeur de thèse Pr KACHI Mohand Said pour son encadrement, ces précieux conseils, et de m'avoir fait profiter de son expérience et de son savoir-faire ainsi que d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour l'aboutissement de cette thèse. J'ai beaucoup apprécié sa disponibilité et été touchée par son honnêteté intellectuelle.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance à mon co-directeur de thèse le Pr BOUAFIA Youcef qui a suivi de près mon travail tout au long de ces cinq années. Je le remercie particulièrement pour son soutien et son aide. Je ne saurais oublier les orientations qu'il m'a indiquées pour faire avancer ce travail et ses nombreux conseils qui ponctuent cette thèse. Je tiens à le remercier tant pour ses compétences scientifiques que pour ses qualités humaines.

Je remercie le Pr TAHAKOURT Abdelkader qui me fait l'honneur de présider le jury, je remercie également le Pr KADRI Mohamed et le Pr ZERIZER Abdellatif d'avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie amicalement tous les doctorants que j'ai rencontrés au cours de ma thèse pour leur ouverture d'esprit et leurs amitiés.

Je remercie mes proches pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de cette thèse et trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

DEDICACES

*A la mémoire de mon grand-père et de ma mère
À mon fils Aghiles*

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I.....	4
SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
I-1.Première partie : Le confinement.....	4
I.1.1. Introduction.....	4
I.1.2. Principe du confinement.....	4
I.1.3. Types de confinement.....	5
I.1.3.1. Le confinement interne.....	5
I.1.3.2. Le confinement externe.....	6
I.1.4. Poteaux mixtes.....	7
I.1.5. Quelques modèles de comportement du béton confiné en élasticité non linéaire	10
I.1.5.1. Modèle de Richart.....	10
I.1.5.2. Modèle d’Hognestad.....	10
I.1.5.3. Modèle Bousalem et al .[19].....	12
I.1.5.4. Modèle d’Ahmad et Shah.....	12
I.1.5.5. Modèle de Toutanji.....	13
I.1.5.6. Modèle Mander et al.....	13
I.1.5.7. Modèle Saatcioglu et al. [25].....	14
I.1.5.8. Modèle Hoshikuma et al. [26].....	15
I.1.5.9. Modèle de Fardis et Khalili.....	15
I.1.5.10. Modèle de Karbhari.....	16
I.1.5.11. Modèle de Mirmiran.....	16
I.1.5.12. Modèle de Xiao et Wu.....	17
I.1.5.13. Modèle de Harmon.....	17
I.1.5.14. Modèle Fujikake.....	17
I.1.5.15. Modèle de Beque.....	19
I.1.6. Discussion.....	20
I.1.7. Modèle proposé par Bouafia.Y, Iddir. A et Kachi. M.S.....	20
I-2. Deuxième partie : Méthodes de calcul non linéaire.....	22
I.2.1. Introduction.....	22
I.2.2. Proposition de VIRLOGEUX et M’RAD.....	23

I.2.3. Proposition de MULLER J [48].....	25
I.2.4. Proposition de Martins.....	27
I.2.5. Proposition de Kachi.....	30
I.2.5.1 Domaine d’application et hypothèses générales.....	31
I.2.5.2. Etude de l’équilibre d’une poutre en élasticité non linéaire	32
I.3.Conclusion	33
CHAPITRE II.....	34
MODELISATION AVEC PRISE EN COMPTE DU CONFINEMENT.....	34
II.1 Introduction.....	34
II.2 Domaine d’application et hypothèses générales.....	35
II.3. Comportement des matériaux.....	36
II.3.1. Béton comprimé	36
II.3.2. Comportement du béton en traction	37
II.3.3. Les aciers	39
II.3.3.1 Comportement des aciers passifs.....	39
II.3.3.2 Comportement des aciers actifs.....	40
II.3.3. 3. Comportement des tubes en aciers	41
II.3.4. Comportement du béton confiné	42
II.3.4.1.Cas d’une section circulaire.....	42
II.3.4.2. Cas d’une section rectangulaire.....	44
II.3.4.3. Cas d’une section circulaire confiné par tube.....	46
II.3.4.4. Modèle	49
II.4. Modélisation des sections.....	51
II.4.1. Le béton	51
II.4.2. Les aciers	51
II.5. Formulation du principe de calcul	52
II.5.1. Séquence de calcul.....	54
II.6. Élément poutre.....	57
II.6.1. Étude d’une section droite	58
II.6.2. Calcul des sollicitations internes	60
II.6.3 Déformation de la section à l’équilibre	65
II.6.4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence	66
II.6.5. Organigramme de la recherche de l’équilibre d’une section.....	67
II.6.6.Calcul de la rigidité de cisaillement de la section	68
II.6.7. Domaine d’application	70
II.6.8.Contrainte transversale dans le béton	71
II.7. Principes de la modélisation et équations générales.....	71

II.7.1. Milieux continus équivalents.....	71
II.7.1. 1. En déformations.....	71
II.7.1.2. En contraintes	72
II.7.2. Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes	72
II.7.3. Equations d'équilibre.....	73
II.7.3. 1. Equilibre local des couches	73
II.7.3. 2. Equilibre global des sections	73
II.7.4. Lois de comportement des matériaux.....	73
II.7.4.1. Comportement du béton en compression dans la direction D2.....	73
II.7.4.2. Comportement du béton en traction dans la direction D1	76
II.7.4.3. Comportement de l'acier	77
II.7.5. Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$	77
II.7.6. Calcul de la distorsion moyenne.....	79
II.7.7. Résolution du problème.....	79
II.7.7.1. Transformation des équations générales	79
II.7.7.2. Algorithme et organigramme de calcul	80
II.8.Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans son repère intrinsèque.....	83
II.9. Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local	86
II.10. Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère global lié à la structure	92
II.11. Expression des accroissements des efforts en fonction des accroissements des déplacements dans le repère global.....	94
II.12. Conclusion	94
CHAPITRE III	95
APPLICATION DU MODELE ET CONFRONTATION DES RESULTATS	95
III.1. Applications et confrontations dans le cas des sections en béton armé.....	95
III.1.1. cas des sections circulaires	95
III.1.2. cas d'une section rectangulaire	99
III.1.3. cas d'une section béton enrobées de tube en aciers (CFST : Concrete filled steel tubes)	101
III.1.4. Influence des paramètres de confinement sur le calcul des sections	103
III.1.4.1. Influence des armatures transversales.....	103
III.1.4.2. Influence du diamètre des armatures transversales	106
III.1.4.3. Influence de l'espacement des armatures transversales	107
Plus l'espacement des armatures transversales est réduit, on à un gain important de la capacité portante.....	109
III.1.4.4. Influence du diamètre des armatures longitudinales.....	110

III.1.4.5. Influence de la résistance à la compression du béton	111
III.1.4.6. Influence du diamètre de la section du béton.....	113
III.2. Calcul global des poutres armées avec prise en compte du confinement	114
III.2.1 Essais du CEBTP – Poutres hyperstatiques HZ4.....	114
III.2.2. Etude paramétrique	118
III.3. Calcul en cisaillement d’une section de poutre.....	120
III.3.1. Essais de l’Université de Toronto –Comportement de section	120
III.4. Etude de la fissuration.....	125
III.5. Pieu en béton armé soumis à une flexion composée.....	129
III.6. Conclusion.....	131
CONCLUSION GENERALE	133
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	135

LISTE DES FIGURES

Figure I.1: béton armé confiné par cadres étriers transversaux [23-24].	5
Figure I.2: béton armé confiné par cerce ou spirale en acier [23],[24].	6
Figure I.3: béton armé confiné par FRP et tube en acier.	7
Figure I.5 : Courbe contrainte-déformation du modèle Hognestad [18].	11
Figure I.6: Courbe contrainte-déformation du modèle Bousalem et al [19].	12
Figure I.7: Courbe contrainte-déformation du modèle Mander et al.	14
Figure I.8: Loi de comportement réel du béton en compression proposée par	21
Figure I. 9 : courbe Charge – flèche obtenue par DEFLECT sur l’essai du CEBTP [49]	26
Figure I.10: L’équilibre d’un voussoir.	29
Figure II.1 : Comportement du béton en compression loi de Sargin [38]	37
Figure II.2: Comportement du béton avant fissuration.	38
Figure II.3 : Contribution du béton tendu après fissuration A.Grelat [61].	38
Figure II.4: Comportement des aciers naturels.	39
Figure II.5: Comportement des aciers écrouis.	40
Figure II.6: Courbe contrainte-déformation des tubes en aciers	41
Figure II.7 : section circulaire confinée par spirale en acier	42
Figure II.8: béton effectivement confiné (cas d’une section circulaire confinée par spirale en acier).	43
Figure II.9 : béton effectivement confiné (cas d’une section rectangulaire confinée par armatures transversales).	45
Figure II.10 : béton effectivement confiné (cas d’une section circulaire confinée par tube en acier).	46
Figure II.11 :L’équilibre des forces dans une section circulaire confinée par tube en acier).	48
Figure II.12 : Loi de comportement réel du béton en compression	49
Figure II.13 : Section de béton découpée en tables trapézoïdales.	51
Figure II.14 : Représentation de la méthode de substitution utilisant les matrices cordes. ...	54
Figure II.15: Description d’une section typique d’une poutre en béton armé et précontraint	58
Figure II.16 : Organigramme simplifié de la recherche de l’équilibre de l’état d’équilibre d’une section.	68
Figure II. 17: Comportement du béton en traction.	76
Figure II.18:Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections [55].	78
Figure II. 19:Organigramme général de l’étude d’une section.	81
Figure II.20:Equilibre d’une couche à ϵ_x et τ connus.	82
Figure II.21:Organigramme de la méthode simplifiée de calcul d’une section	82
Figure II.22: Repères d’un élément poutre.	83
Figure II. 23: Élément poutre déformé.	84
Figure III.1:Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	96
Figure III. 2:Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	96
Figure III. 3 : Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	96
Figure III.4: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	97
Figure III.5: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	97

Figure III.6 : Superpositions des courbes théoriques $\sigma = f(e)$	98
Figure III.7 : Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	99
Figure III.8: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	100
Figure III.9: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	100
Figure III.10: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe	100
Figure III.11 : Confrontation des courbes théoriques avec les courbes	101
Figure III.12: Confrontation des courbes théoriques avec les courbes	102
Figure III.13: Confrontation des courbes théoriques avec les courbes	102
Figure III.14: Confrontation des courbes Moment-Courbure calculées avec et sans confinement	104
Figure III.15: Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée sans et avec confinement	105
Figure III.16 : Confrontation des courbes frontières efforts normal -moment calculée	105
Figure III.17: Confrontation des courbes Moment-Courbure confinée en T8 et T10.....	106
Figure III.18 : Confrontation des courbes Effort Normal –Déformation confinée en T8 et T10.....	107
Figure III.19: Confrontation des Courbes Moment-Courbure confinée avec espacement variable	108
Figure III.20: Confrontation des Courbes Effort Normal –Déformation.....	109
Figure III.21: Confrontation des courbes d’interactions effort normal -moment confinée avec espacement variable	109
Figure III. 22 : Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée avec les différents diamètres	110
Figure III. 23: Confrontation des courbes d’interaction avec les différents diamètres.....	111
Figure III.24: Confrontation des courbes Moment -Courbure calculées avec les différentes classes du béton	112
Figure III.25: Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée avec les différentes classes du béton.....	112
Figure III.26: Confrontation des courbes d’interactions calculées avec les différentes classes du béton	113
Figure III.27: Confrontation des courbes d’interaction avec les différents diamètres de la section.....	114
Figure III.28: Dimensions et détails de ferrailage des poutres HZ [70].	115
Figure III.29 : Disposition des armatures longitudinales pour les poutres HZ [70].	115
Figure III.30 : Evolution de la flèche en fonction de la charge pour les poutres HZ.....	117
Figure III.31: Evolution de la flèche en fonction de la charge pour les poutres HZ4 pour des espacements 10, 15,20 et 30cm.....	119
Figure III.32 : Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentaux et à ceux	124
Figure III. 33 : caractéristiques géométriques et détails de ferrailage de la poutre HZ4....	125
Figure III.34: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section avant fissuration de la poutre HZ4.....	126
Figure III.35: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section au début de la fissuration de la poutre HZ4	126
Figure III.36: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section à la rupture la poutre HZ4	127
Figure III.37: hauteur décomprimée de la section en fonction de l’espacement a la rupture de la poutre HZ4.....	128
Figure III.38 : Evolution de la flèche en fonction de la charge pour le pieu de Zhan.	130

LISTE DES TABLEAUX

Tableau III.1:Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton.	95
Tableau III.2: Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton.	98
Tableau III.3: Caractéristiques des données expérimentales des sections rectangulaires en béton.	99
Tableau III.4: Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton	101
Tableau III.5: Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures ..	104
Tableau III. 6: Caractéristiques des aciers.	104
Tableau III. 7: Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures .	106
Tableau III.8 : Caractéristiques des aciers.	106
Tableau III. 9 : Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures transversales T8 avec un espacement variable.	108
Tableau III.10: Caractéristiques des aciers.	108
Tableau III.11 : Caractéristiques du béton (section 40cm) armé avec 8T12 ,8T14 ,8T16 et des armatures transversales T8.....	110
Tableau III.12: Caractéristiques de la section en béton (section 40cm) avec les différentes classes	111
Tableau III.13: Caractéristiques du béton avec les différents diamètres de la section	113
Tableau III.14 : Caractéristiques du béton et des armatures passives [70].	116
Tableau III.15 : Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q Pour la poutre HZ4.	117
Tableau III.16. Caractéristiques du béton et des armatures passives poutre HZ4 [70].....	118
Tableau III. 17: Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q	118
Tableau III.18 : Propriétés des différentes poutres [71],[63],[66].	121
Tableau III. 19: Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l'effort tranchant.	124
Tableau III.20 : Résultats calculés des efforts au début des premières fissures de la Poutre HZ4.....	128
Tableau III.21 : Résultats calculés des efforts à la rupture de la Poutre HZ4.....	129
Tableau III.22 : Caractéristiques du béton et des armatures passives [72].	129
Tableau III.23 : Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q Au début de la première fissure et à la rupture.	130

LISTE DES SYMBOLES

- Aaj : section d'une barre d'ordre j
- Ac : section interne comprise entre les spirales.
- Ae : section effectivement confinée.
- Asl : section d'armature longitudinale.
- Ast : section d'armatures transversale.
- Asp : section des aciers transversaux.
- bj : base inférieure du trapèze d'ordre i
- bj+1 : base supérieure du trapèze d'ordre i+1
- b(y) : base de la section à une côte y
- ds : diamètre de la section pris entre centre de gravité d'une spirale
- E_{b0} : module d'élasticité longitudinale.
- E_{sc} : Paramètre de la loi de comportement qui régit la partie descendante poste pic.
- E_s : module élastique de l'acier
- f_{cc} : la contrainte du béton confiné.
- f_{c0} : la contrainte du béton non confiné à l'âge j
- f_l : pression latérale du fluide.
- f^l : pression de confinement latérale effective.
- f_{yh} : contrainte limite des aciers.
- F_{cj} : résistance à la compression du béton.
- F_{tj} : résistance à la traction du béton
- f_e : Limite élastique de l'acier
- IG : moment d'inertie de la section
- IGH : moment d'inertie de la section homogénéisée
- kc : Paramètre de la loi de Sargin avec les paramètres de confinement
- ke : coefficient de confinement effectif.
- k : paramètre qui ajuste la branche ascendante de loi de la loi de sargin
- k' : paramètre qui ajuste la branche descendante de loi de sargin
- k'c : RC: Paramètre de la loi de SARGIN avec les paramètres de confinement
- k1, k2 : coefficients, fonctions du mélange du béton et de la pression latérale.
- K_b : paramètre de la loi de Sargin
- K'b : paramètre de la loi de Sargin
- Miext : moment initial extérieur

M_{int} : moment intérieur
 N_{iext} : effort normal initiale extérieur
 N_{int} : effort normal intérieur
 N_{bt} : nombre de barres d'aciers
 N_e : nombre de trapèzes
 s : distance entre les extrémités de deux spirales adjacentes.
 s' : distance entre les centres de gravité de deux spirales adjacentes.
 S : aire de la section
 Sh : aire de la section homogénéisée
 y_{aj} : ordonnée de la barre d'ordre j
 YG : ordonnée du centre de gravité de la section
 y_j : ordonnée de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i
 y_{j+1} : ordonnée de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i+1
 YGH : ordonnée du centre de gravité de la section homogénéisée
 w'_i : la distance entre deux armatures longitudinale adjacente
 ΔN : accroissement de l'effort normal
 ΔM : accroissement du moment fléchissant
 ΔV : accroissement de l'effort tranchant
 δu : déformation axiale d'une section
 δw : rotation différentielle d'une section
 ε : Déformation du béton non confiné.
 ε_c : déformation du béton confiné
 ε_{cc0} : la déformation correspondante a la contrainte f_{cc} du béton confiné
 ε_0 : déformation correspondante à f_{c0} .
 ε_{rt} : déformation de rupture du béton en traction
 ε_e : déformation élastique limite de l'acier
 ε_a : déformation de l'acier
 ε_{cu} : déformation de rupture du béton en compression
 ε_{ccu} : déformation de rupture du béton confiné en compression
 ε_{au} : déformation de rupture de l'acier passif
 ε_i : déformation de la fibre inférieure du trapèze d'ordre i
 ε_{i+1} : déformation de la fibre supérieure du trapèze d'ordre i +1
 ε_{ft} : déformation de fissuration du béton
 ε_{65} : déformation du béton confiné correspondant à $0.65f_{cc}$

η : coefficient d'équivalence acier-béton
 Φ : Opérateur permettant le passage des déformations aux efforts internes
 Φ_{bt} : restriction de l'opérateur Φ au béton
 Φ_{at} : restriction de l'opérateur Φ aux aciers
 $\varphi(\varepsilon)$: loi de comportement d'un matériau
 $\varphi_b(\varepsilon)$: loi de comportement du béton
 $\varphi_a(\varepsilon)$: loi de comportement de l'acier passif
 γ_b, γ_s : coefficients de sécurité
 σ_e : limite élastique de l'acier passif
 σ_c : contrainte du béton en compression.
 σ_{cc} : contrainte du béton confiné en compression
 ρ_{cc} : rapport entre la section des armatures longitudinales et la section du béton.
 ρ_s : rapport entre le volume des armatures de confinement transversale et le volume du béton confiné.
 $\Delta \vec{F}_s$: Incrément de la force extérieure
 $[K_s]$: Matrice de rigidité de la section
 θ : Inclinaison de la contrainte principale de compression
 $\Delta \delta_u$: Incrément de déformation axiale
 $\Delta \delta_w$: Incrément rotation différentielle
 $\Delta \gamma_{moy}$: Incrément de la distorsion moyenne
 σ_{c1} : Contrainte principale de traction.
 σ_{c2} : Contrainte principale de compression.
 ε_1 : Déformation principale de traction.
 ε_2 : Déformation principale de compression.
 τ : Contrainte de cisaillement.
 $\Delta \tau_i$: Incrément de la contrainte de cisaillement.
 ΔP_s : Action de précontrainte initiale
 $\Delta \delta$: Incrément de la déformation de la section.

Résumé

Dans le domaine de génie civil le calcul des sections circulaires n'est pas aisé compte tenu de la disposition des armatures qui induit plusieurs inconnues dans les équations d'équilibre. L'expérience acquise, les avantages et les inconvénients ainsi que les problèmes à résoudre ont été largement discutés par de nombreux auteurs. Le calcul de telles sections présente des incertitudes sur certains aspects de leur comportement. L'effet de l'influence du béton tendue même après fissuration est d'une grande importance. L'effet confinement du béton en général lui confère une plus grande résistance et une plus grande ductilité en fonction du niveau du confinement. Dans le cadre de cette étude nous proposons un modèle de calcul basé sur les équations d'équilibres et de compatibilités qui sont formulées en termes de contrainte et déformation moyenne selon des hypothèses. Ce modèle est capable d'analyser des sections quelconques avec tous les détails de ferrailage sous l'ensemble des sollicitations (effort normal, moment fléchissant et effort tranchant). Une loi de comportement contrainte- déformation du béton confiné a été proposée. Le confinement du béton sera introduit par le biais d'un coefficient de confinement effectif, et d'une contrainte de confinement latérale. La méthode de calcul est injectée dans un logiciel de calcul non linéaire des éléments de structures afin d'étudier la contribution et l'influence du confinement du béton sur le comportement global des éléments de structures de section circulaire et sur la rigidité au cisaillement dans le cas des poutres en béton armé et précontrainte. Enfin, le modèle de prise en compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire a été également proposé, ce dernier permet de prédire le comportement des poutres en cisaillement combiné à l'existence des contraintes normales, ce qui permet alors d'estimer la rigidité réelle de cisaillement des poutres, pour un niveau de charge donné.

Mots-clés : Élasticité non linéaire, Confinement, section circulaire, effort tranchant, rigidité au cisaillement, armatures discrètes, équations d'équilibres, équations de compatibilités, rupture.

Abstract

In the civil engineering, the calculation of circular sections is not easy because there are many unknowns in the equations of equilibrium. The required experience, advantages and disadvantages and problems to solve have been widely discussed by many authors. The calculation of such sections is difficult to predict exactly their behavior. The effect of the tensioned concrete, even after cracking, has a great importance. The effect of the confinement of concrete generally gives this one greater resistance and ductility according to the level of confinement. In this study we propose a model which is based on the equilibrium, compatibility equations and which are formulated by average stresses and average strains. According to the assumption, this model is able to analyze sections having unusual forms or reinforcing details, loaded in combined bending, axial load and shear. In the case of the confined concrete, a stress-strain relation of this one is proposed. In this case, for the purpose of investigating confinement effect, an effectively confined ratio was introduced and the effects according to concrete compressive strength. Predictions of the model are compared with several calculated unconfined reinforced or prestressed beams and are shown to estimate the effect of the confinement on the shear stiffness of the sections in the case of the elastic linear domain, after concrete cracking and after reinforcement yielding. The results of the comparison give a good satisfaction.

Keywords: nonlinear elasticity, confinement, circular section, shear force, shear stiffness, ties discrete, equilibrium, compatibility, cracks.

INTRODUCTION GENERALE

Dans le domaine de génie civil le calcul des sections circulaires n'est pas aisé compte tenu de la disposition des armatures qui induit plusieurs inconnues dans les équations d'équilibre. L'expérience acquise, les avantages et les inconvénients ainsi que les problèmes à résoudre ont été largement discutées par de nombreux auteurs.

Le calcul de telles sections présente des incertitudes sur certains aspects de leur comportement. Un effort de recherche tant théorique qu'expérimental est donc nécessaire pour permettre de les comprendre et de les résoudre.

L'effet de l'influence du béton tendue même après fissuration est d'une grande importance.

De plus, l'influence de la prise en compte du confinement dans la modélisation et le calcul des structures en béton armé et en béton précontraint permet de mieux approcher le comportement réel. Et, la prise en compte de l'effet de l'effort tranchant sur le comportement des structures est aussi d'une grande importance. Dans le cas particulier des poutres, cet effet est pris en compte par l'adoption du modèle de calcul en cisaillement des poutres développé par Kachi et al [52], [55-60] .

L'effet confinement du béton en général lui confère une plus grande résistance et une plus grande ductilité en fonction du niveau du confinement. Plusieurs études ont été effectuées sur le confinement du béton [1], [18-37]. L'ensemble des modèles proposés dans ces études, pour prédire le comportement du béton confiné, présentent des coefficients de confinement difficilement maîtrisables.

Dans le cas particulier des sections circulaires, les abaques de Davidovici, basées sur les principes du BAEL91 et de l'EUROCODE2 et d'une répartition uniforme de l'acier sur toute la section, permettent de déterminer la section d'armatures longitudinales en flexion composée dans le cas d'un effort normal de compression. Une méthode de calcul par les armatures discrètes permet le calcul des armatures longitudinales et ce qu'elle que soit la nature de l'effort normal. Le confinement interne du béton γ est introduit et des confrontations ont été faites sur des sections et sur des poutres en béton armé et en béton précontraint.

Dans le cadre de cette étude nous proposons une méthode de calcul des éléments de section circulaire basée sur la méthode de calcul par les armatures discrètes développée par Kachi et al [52],

[55-60] en y introduisant différentes formes de confinement internes et externe. L'étude sera menée en élasticité non linéaire, il sera tenu compte du comportement non linéaire des différents matériaux constituant la section transversale. Le confinement du béton sera introduit par le biais d'une loi de comportement également non linéaire, du béton confiné et du béton armé confiné tenant compte du niveau de confinement, du type de confinement et de l'ensemble des sollicitations (effort normal, moment fléchissant et effort tranchant). Enfin, la méthode de calcul sera injectée dans un logiciel de calcul non linéaire des éléments de structures afin d'étudier la contribution et l'influence du confinement du béton sur le comportement global des éléments de structures de section quelconques.

En ce qui concerne les non linéarités, le calcul proposé prend en compte deux types de non linéarités :

- la non linéarité mécanique du comportement réel des matériaux (Fissuration, plasticité, etc),
- les non linéarités géométriques, liées au comportement d'ensemble de la structure (effets de second ordre).

Le modèle de prise en compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire développé par Kachi et al [52], [55-60] a été adopté, ce dernier permet de prédire le comportement des poutres en cisaillement combiné à l'existence des contraintes normales, ce qui permet alors d'estimer la rigidité réelle de cisaillement des poutres, pour un niveau de charge donné.

La présente étude est structurée comme suit :

- au chapitre 1 est présentée d'une part une étude bibliographique portant sur le confinement du béton. Cette étude porte principalement sur les types de confinement internes et externes, une comparaison entre les différentes méthodes de calcul à ce sujet et quelques modèles de confinement également à la fin de cette première partie. D'autre part, des méthodes de calcul non linéaire et des études, portant sur le comportement des éléments en béton armé et précontraint, sont aussi présentées dans ce chapitre.

- le chapitre 2 est consacré au développement du modèle de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé et précontraint en cisaillement ainsi que le comportement des différents matériaux est aussi développé dans ce chapitre.

- le chapitre 3 porte sur les résultats de calcul mené sur les sections et sur des éléments de structure en béton confiné. Une suite de résultats est présentée aussi bien sur les sections sous forme de loi de comportement reliant la contrainte à la déformation proposée comparée à celle mesurée expérimentalement. Nous avons présenté également les résultats obtenus dans l'étude du comportement globale des poutres en béton armé et en béton précontraint, une comparaison aux résultats mesurés expérimentalement a été également effectuée.

- Enfin on termine par une conclusion de la présente étude.

CHAPITRE I

SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

I-1.Première partie : Le confinement

I.1.1. Introduction

Le béton est un matériau dont les performances en traction sont faibles par rapport à celles de la compression. Pour l'utilisation efficace d'un tel matériau, il a été nécessaire de le renforcer par des aciers longitudinaux qui reprennent les efforts de traction. Ce renforcement a permis le développement du béton armé dans le domaine de la construction. Aussi, en plus de ces armatures longitudinales, le béton a été renforcé avec d'autres types d'armatures, appelées ; armatures transversales ou armatures de confinement (c'est le béton confiné).

I.1.2. Principe du confinement

C'est une autre appellation du béton armé renforcé par des armatures transversales ou par jaquette externe qui exercent des pressions latérales sur le béton. Les études récentes ont prouvé que le comportement du béton en compression dépend de sa richesse en confinement ; généré par une disposition adéquate des armatures transversales ou une épaisseur conséquente de la jaquette externe. Il en résulte par voie de conséquence un accroissement important de la résistance en compression ainsi que la déformation correspondante.

I.1.3. Types de confinement

Actuellement le confinement des sections est une méthode efficace pour augmenter la capacité portante des sections en béton armé ou en béton de fibres ; on distingue deux types de confinement à savoir :

I.1.3.1. Le confinement interne

Le confinement interne se fait par des cerces en aciers ou spires dans le cas des sections circulaires et des cadres ou étriers transversales dans le cas des sections rectangulaires. Le confinement interne du béton peut être aussi réalisé avec des fibres de carbone ou de verre-époxydes. Le Béton confiné ne sera pas considéré comme une structure, mais en tant que matériau multiple (composite), qui sera défini par les propriétés globales.

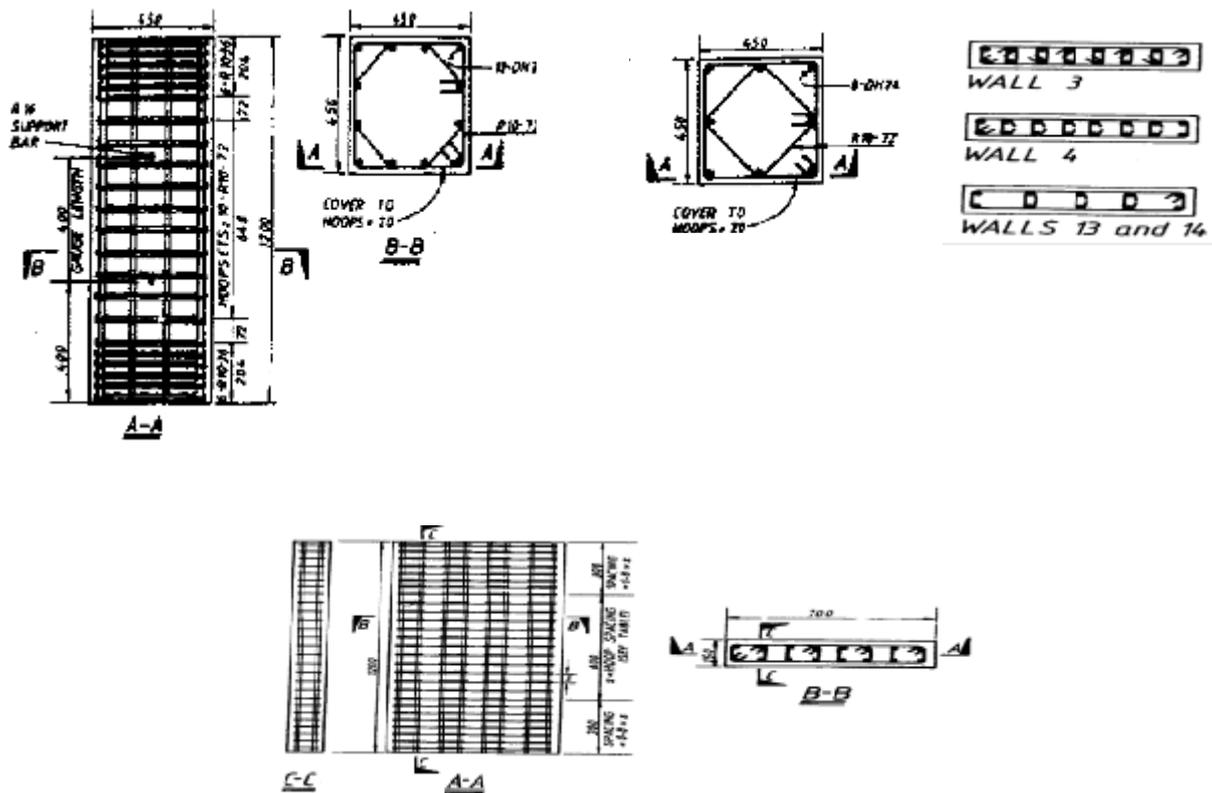


Figure I.1: béton armé confiné par cadres étriers transversaux [23-24].

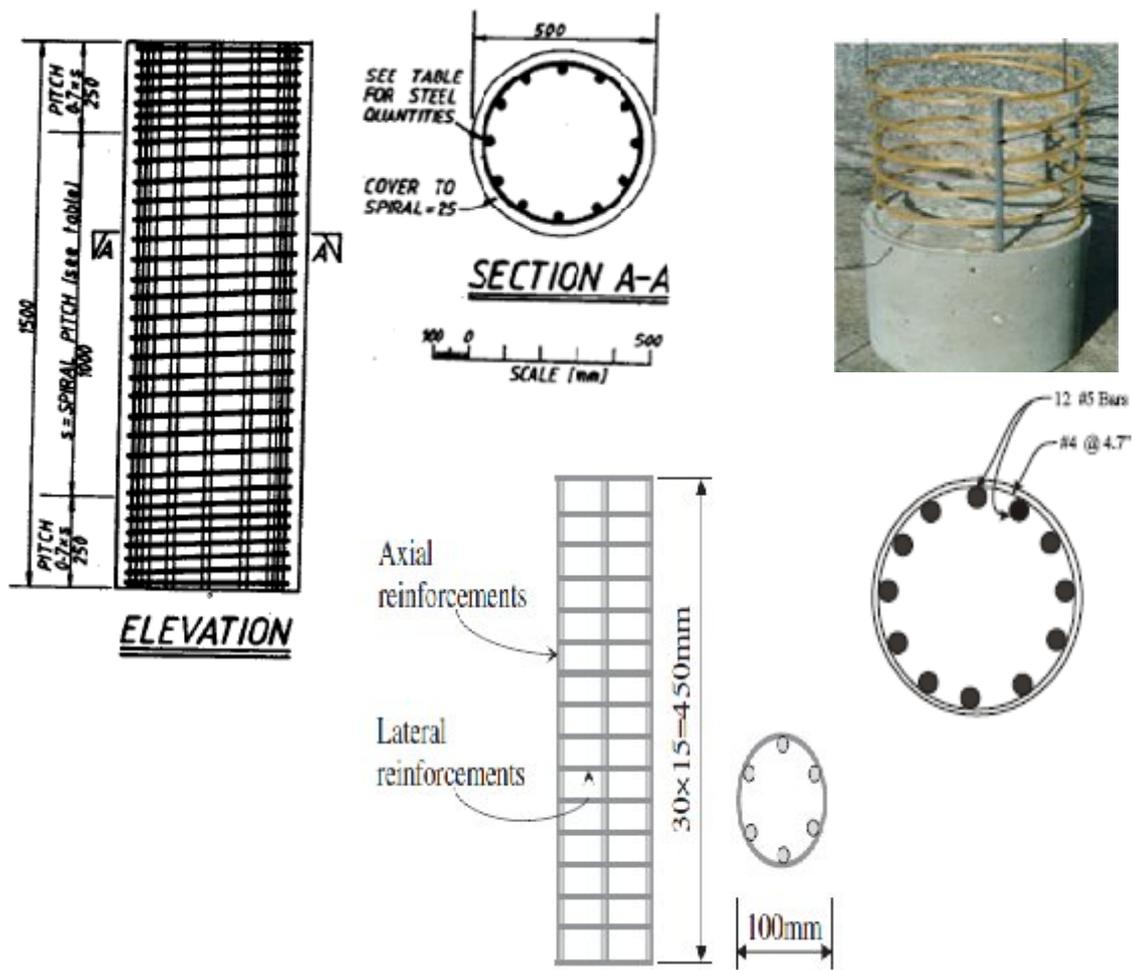


Figure I.2: béton armé confiné par cerce ou spirale en acier [23],[24].

I.1.3.2. Le confinement externe

Les fibres composites polymères de renforcement FRP (Fibre reinforced polymer) sont maintenant très utilisées pour une variété d'applications. Elles sont particulièrement attrayantes pour le renforcement et la réadaptation des structures en béton. Il est prouvé qu'elles sont souvent utilisées pour le confinement des colonnes en béton. En effet, de nombreuses études ont clairement démontré qu'envelopper avec des feuilles de FRP des colonnes circulaires est une technique très efficace pour augmenter leur résistance et ductilité.

Le confinement latéral est une méthode bien connue pour augmenter la capacité des colonnes renforcées pour porter les charges. Dès 1929, Richart et al. [1] ont prouvés qu'une contrainte de compression latérale peut mener à un perfectionnement significatif de la résistance à la compression du béton.

Le confinement externe peut être fourni par divers moyens, tels que ; les vestes, les cercles, l'emballage en acier de FRP (Fibre reinforced polymer) autour de la colonne ou par

tubes en acier (CFST : Concrete filled steel tubes); de nombreux modèles analytiques sont proposés pour prédire un tel confinement.

Dans le cas du confinement externe par tube en acier, aux premières phases du chargement, le coefficient de Poisson du béton est inférieur à celui de l'acier, et le tube en acier n'a aucun effet sur le noyau béton. Par conséquent, l'expansion latérale du béton devient graduellement plus grande que celle de l'acier. Une pression radiale se développe à l'interface acier le retenant ; de ce fait le noyau béton en développant une tension circulaire dans le tube. À ce stade, le noyau béton est soumis aux contraintes triaxiales et le tube en acier aux contraintes bi axiales, de sorte qu'il y ait un transfert de charge à partir du tube au noyau, comme le tube ne peut pas soutenir l'effort de flexion longitudinalement en présence d'une tension circulaire. La charge correspondant à ce mode de rupture peut être considérablement plus grande que la somme de celle de l'acier et du béton, mais la rupture de cisaillement peut intervenir avant que le transfert de charge soit complet [2].

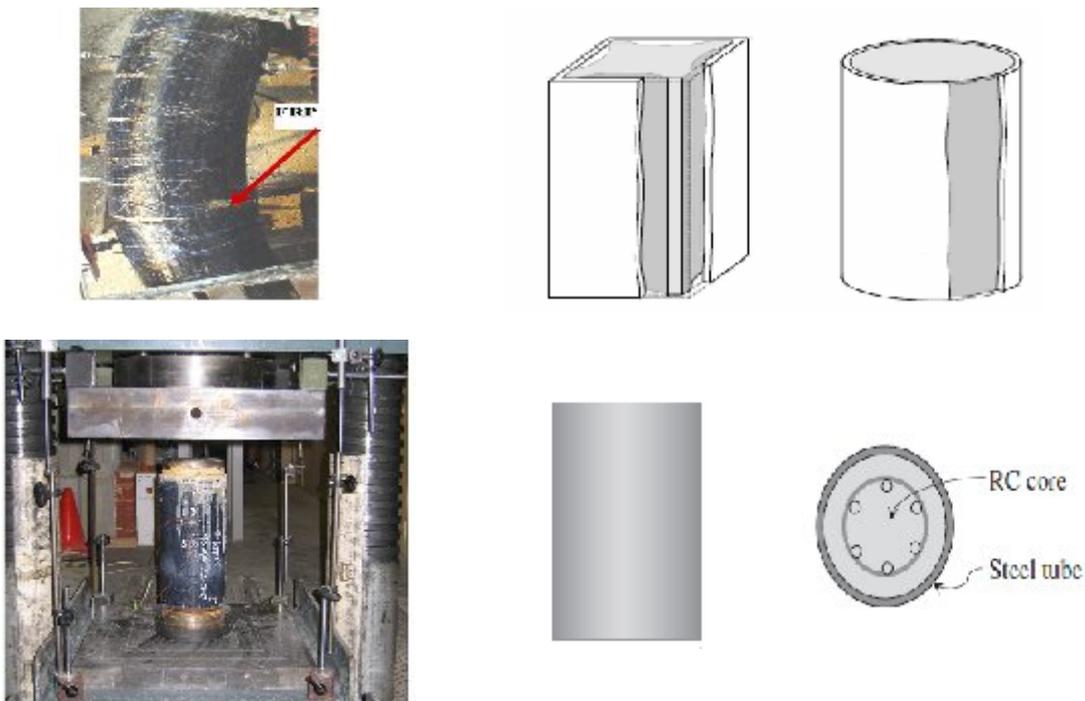


Figure I.3: béton armé confiné par FRP et tube en acier.

I.1.4. Poteaux mixtes

I.1.4.1. Poteaux mixtes remplis de béton [2]

Les poteaux mixtes remplis de béton ont été l'objet de plusieurs études. Ce genre de structure a été largement discuté par de nombreux auteurs. Y.C.Wang [3] a proposé une méthode basée sur le code Britannique BS5950 en faisant l'étude sur plusieurs type de

poteaux remplis de béton. Vu la souplesse de sa méthode Y.C.Wang [3] à conclure qu'elle prédit d'une façon claire le comportement des sections mixtes et elle est semblable à celle proposée dans l'EC4 et meilleure que celle du BS 5400.

Kefeng.T, John M.N, et Xincheng P [4] ont étudiés des colonnes tubulaires de section circulaire remplies de béton. Les résultats expérimentaux ont montrés que le confinement du béton par tube en acier peut de manière significative améliorer les propriétés mécaniques de la colonne mixte comparée à celle en béton armé. Cette amélioration était directement proportionnelle au coefficient de confinement.

Les travaux de M. Mouli, et H. Khelafi [5],[8] basé sur l'expérimental concerne les poteaux rectangulaire en acier remplis de béton ordinaire. Les propriétés du béton de remplissage utilisé étaient le facteur important de l'étude. La confrontation des résultats obtenus été satisfaisante. Il on est de même pour les travaux de Dalin Liu [6], [9], Ehab. E, Ben Young. D, et Dennis. L [7] qui ont pris pour leurs travaux des bétons de haute résistance.

Les poteaux mixtes de section rectangulaire et carrée avec raidisseurs ont pris également une grande partie dans les projets de recherches avancés, dans le but de mieux prédire le comportement de ces éléments sous n'importe quel type de chargement ou sollicitation [9] Dans la pratique, des colonnes sont soumises à la compression axiale et aux moments de flexion. Dans l'étude de telle structure non seulement les propriétés matérielles non linéaires qui doivent être prises en considération mais également les effets géométriques non linéaires.

I.1.4.2. Effets de chargement, et de sollicitations extérieurs [2]

Le comportement d'un poteau mixte soumis à des sollicitations externes est conditionné par plusieurs facteurs citant : le type du poteau, son élancement, sa section droite, et le rapport entre la longueur du poteau et les dimensions de sa section droite.

Dans la conception, le comportement interactif pour des poteaux de longueur intermédiaire est pris en considération par une constante empirique. La prévision de tels constants en fonction de la géométrie, les propriétés de matériaux, et les imperfections du poteau était l'objet de recherche d'Ever .J. Barber [11]. Qui a trouvé que les sections mixtes restent ainsi linéaires pour de grandes contraintes en tenant compte de l'interaction entre les différents modes de voilement [11-12] et de l'élancement des poteaux.

Le comportement des poteaux est défini par l'approche d'EULER, si les imperfections sont négligés, quand en augmente la longueur du poteau on risque d'avoir un problème d'instabilité à cause de l'augmentation de la valeur du moment fléchissant secondaire à mi-hauteur, ce qui amène à la rupture du poteau par moment fléchissant, et non pas par compression.

L'influence des charges axiales de compression sur les sections droites des poteaux courts est moins importante comparée aux poteaux élancés [13].

Actuellement, les poteaux mixtes de section circulaire sont de plus en plus employés dans la construction des bâtiments modernes. L'information disponible sur les modèles de comportement de ce type de structure sous les différentes conditions de chargement est limitée. Les poteaux mixtes de section circulaire sous des charges axiales, et des charges de flexion cycliquement croissantes ont été l'objet de certains travaux de recherche ou plusieurs paramètres ont été inclus dans l'étude.

Dans l'EC4, Un model mécanique a été développé sur des poteaux [14], et ce pour le calcul du coefficient de ductilité des poteaux mixtes sous chargement cyclique.

I.1.4.3. Tube en acier [2]

La totalité des sections classiques des poteaux tubulaires remplis de béton sont produites de l'acier de différentes nuances, et limites élastiques, des aciers de haute résistance pour améliorer le comportement des poteaux mixtes, mais dernièrement on a pu développer d'autres matériaux de construction dont l'objectif est d'améliorer les propriétés physiques, chimiques, ainsi que comportement mécanique des tubes produits à base de ces matériaux.

Lorsque le béton tend à prendre de l'expansion dans la direction transversale au chargement dû à l'effet de Poisson, il engendre des efforts dans l'acier qui s'oppose à cette expansion. Le confinement qui est bénéfique pour le béton peut donc se révéler néfaste pour la section d'acier. Dans le cadre de la plupart des projets de recherches, le niveau de confinement que fournit la section d'acier au béton est complexe ; car il n'est pas uniforme variant selon les directions. Il dépend également d'un ensemble de paramètres pouvant varier selon le niveau de chargement. Il n'existe donc pas de solution simple pour évaluer ce niveau de confinement et son influence sur le béton.

Les sections creuses circulaires fournissent une quantité significative de confinement tandis que cet effet est négligeable dans le cas des sections rectangulaires. La force supplémentaire se produit en raison de l'augmentation de la résistance à la compression du noyau béton qui est retenu latéralement par le tube en acier dans le cas des sections circulaires. L'effet

d'emprisonnement n'est pas présent dans les sections creuses rectangulaires remplies de béton, excepté dans les régions de coin, où une tension de cercle se développe sur les murs latéraux [15-17].

I.1.5. Quelques modèles de comportement du béton confiné en élasticité non linéaire

I.1.5.1. Modèle de Richart

Professeur Richart, F.E. de l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign est un pionnier dans la recherche du béton confiné [1]. Dans ses premiers travaux sur l'effet de confinement transversal sur le comportement du béton en compression [1928,1929], Richart a découvert que la résistance du béton à confinement actif par pression latérale hydrostatique était approximativement la même que pour le béton avec une pression de confinement passive par spirales en acier circulaires rapprochées provoquant une pression latérale équivalente. La force et la déformation longitudinale correspondante à la résistance du béton confinée par une pression de fluide hydrostatique active peuvent être représentées par les relations simples:

$$f'_{cc} = f'_{co} + k_1 f_l \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(1 + k_2 \frac{f_l}{f'_{co}} \right) \quad (1.2)$$

Où : f'_{cc} et ε_{cc} sont la résistance du béton confiné et la déformation correspondante, respectivement. f'_{co} et ε_{co} sont la résistance du béton non confiné et la déformation correspondante. f_l est la pression latérale de confinement. k_1 et k_2 sont des coefficients. Basé sur les résultats des essais, Richart et al. [1], ont trouvé que les valeurs moyennes des coefficients k_1 et k_2 sont égales à $k_1 = 4.1$ et $k_2 = 5k_1$.

I.1.5.2. Modèle d'Hognestad

Le modèle d'Hognestad, (1951), [18] permet de reproduire l'adoucissement après fissuration, le comportement unilatéral du béton (fermeture des fissures) ainsi que l'adoucissement après avoir atteint la résistance en compression et la prise en compte du confinement sur cet adoucissement et la résistance en compression. Deux fonctionnements d'ouverture et fermeture de fissures sont possibles, (Figure I.5).

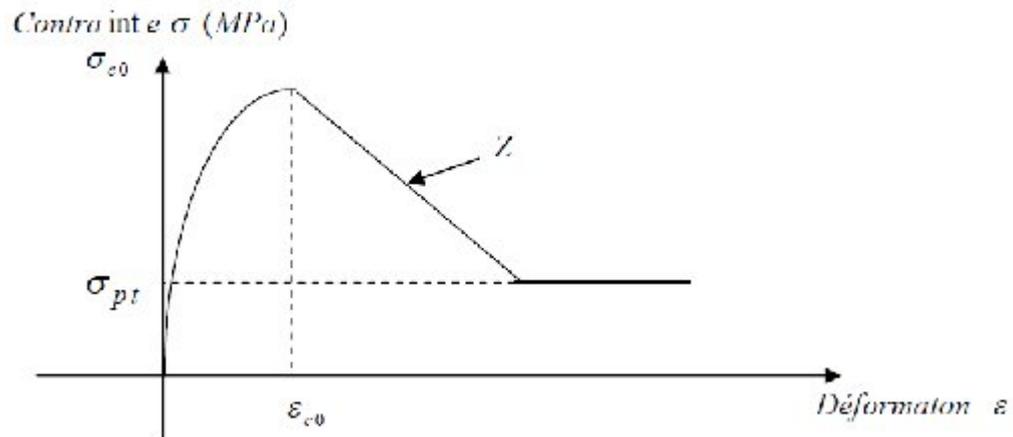


Figure I.4 : Courbe contrainte-déformation du modèle Hognestad [18].

Sous chargement monotone, la loi est du type parabole puis linéaire avec adoucissement. Un plateau avec une contrainte résiduelle non nulle peut-être défini après l'adoucissement. En utilisant les conventions du signe (déformation positive en compression) :

$$\text{Pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c0} \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \left[2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \right]$$

$$\text{Pour } \varepsilon_{c0} < \varepsilon \quad \frac{\sigma}{\sigma_{c0}} = 1 + z \cdot [\varepsilon - \varepsilon_{c0}]$$

Avec:

- $\varepsilon_{c0} = 2 \cdot \frac{\sigma_{c0}}{E}$ et de plus il faut prendre la contrainte résiduelle ;
- $\sigma_{pt} = 20\%$ de la contrainte maximale ;
- $(\varepsilon_{c0}, \sigma_{c0})$ Sont les coordonnées du pic de la courbe de compression ;
- Z : pente après le pic ;
- σ_{pt} : contrainte résiduelle.

I.1.5.3. Modèle Bousalem et al .[19]

$$\sigma_{cc} = \frac{f_{cc} x^n}{n - 1 + x^n} \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \geq 0.3 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$E_s = \frac{4 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

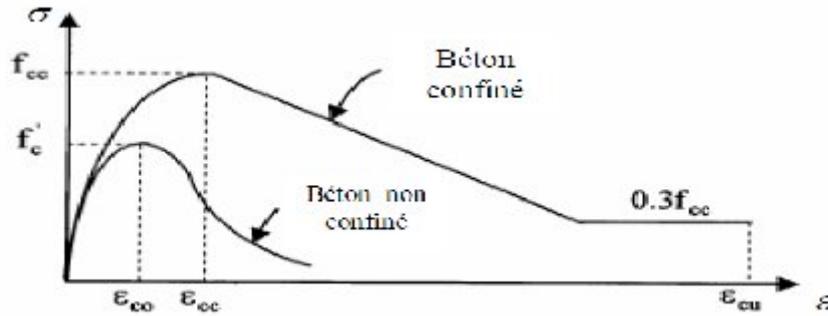


Figure I.5: Courbe contrainte-déformation du modèle Bousalem et al [19].

I.1.5.4. Modèle d’Ahmad et Shah

S.H. Ahmad et S.P. Shah [20-21] ont proposé leur modèle pour prédire la courbe contrainte-déformation du béton confiné basé sur les propriétés des spirales de renforcement et la relation constitutive du béton ordinaire.

Pour les essais de pression de confinement actifs, des échantillons de béton sont soumis à une augmentation de la contrainte axiale tandis que la pression de confinement latéral est maintenue constante. Dans le modèle de Shah, pour un béton soumis à un état général de compression triaxiale, la relation contrainte- déformation est :

$$y = \frac{A_i x_i + (D_i - 1)x_i^2}{1 + (A_i - 2)x_i + D_i x_i^2}$$

Ou : $y = f_i / f_{cc}$ et $x_i = \varepsilon_i / \varepsilon_{ci}$,

f_i = la plus grande contrainte principale de compression,

f_p = le plus grande résistance principale à la compression,

ε_i = la déformation dans la $i^{\text{ème}}$ direction principale ($i = 1, 2$ ou 3),

ε_{ip} = la déformation au pic dans le $i^{\text{ème}}$ direction,

$A_i = E_i / E_{ip}$, E_i est la pente initiale de la courbe contrainte-déformation;

$E_{ip} = f_p / \varepsilon_{ip}$. D_i est le paramètre qui régit la partie descendante de la courbe contrainte-déformation.

La résistance à la compression f_p a été déterminée par un critère de résistance basé sur une théorie octaédrique.

$$\frac{\tau_{oct}}{f_o} = 0.2261 + 0.7360 \frac{\tau_{oct}}{f_o}$$

L'équation équivalente est:

$$f'_{cc} = f'_{co} = 4.255 f_l$$

I.1.5.5. Modèle de Toutanji

Un modèle d'Ahmad et Shah modifié a été proposé par Toutanji (1998) [22].

$$f = \frac{A\varepsilon}{1 + B\varepsilon + C\varepsilon^2}$$

$$f'_{cc} = f'_c \left(1 + 2.2 \left(\frac{2f_{com}}{df'_c} \right)^{0.84} \right)$$

Où : f_{com} est la résistance à la traction du composite confiné.

Sur la base des résultats des tests, la relation modifiée de Rishart a été utilisé dans Modèle de Toutanji.

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left(1 + \left(537 \varepsilon_l + 2.6 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_c} - 1 \right) \right) \right)$$

I.1.5.6. Modèle Mander et al.

Mander et al. [23-24] a mis au point un modèle général pour le béton confiné par divers type de renforcement transversaux. Ce modèle a été largement utilisé dans l'analyse du renforcement des colonnes en béton (Xiao, Priestley et Seible, 1993,1994). Dans ce modèle, l'application de la charge peut être soit statique ou, dynamique et appliquée de façon monotone ou par des cycles de charge. Le renforcement transversal peut être également de configuration multiples, par exemple, circulaire ou en spirale, et des cerceaux rectangulaires

avec ou sans traverses. La résistance à la compression du béton confiné peut être estimée par l'équation suivante:

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}}} \right)$$

La relation unique contrainte déformation proposée par Mander et al. est :

$$\sigma_{cc} = \frac{f_{cc} x^n}{n - 1 + x^n}$$

Avec :

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc0}}$$

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}}, \quad E_c = 5,000 \sqrt{f_{c0}} \quad \text{et} \quad E_{sec} = \frac{f_{cc}}{\varepsilon_{cc}}$$

$$\varepsilon_{cc0} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right]$$

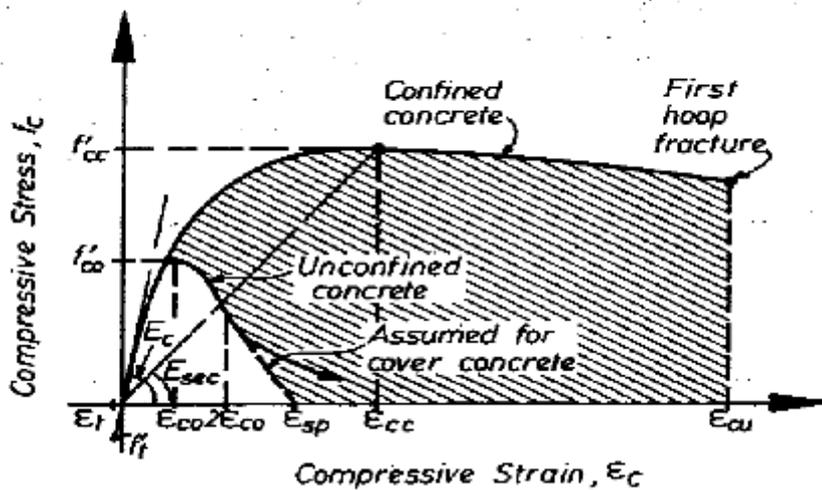


Figure I.6: Courbe contrainte-déformation du modèle Mander et al.

I.1.5.7. Modèle Saatcioglu et al. [25]

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \left[2x - (x)^2 \right]^{\frac{1}{(1+2K)}} \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - Z (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \geq 0.2 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$Z = \frac{0.15 \times f_{cc}}{(\varepsilon_{85} - \varepsilon_{cc0})}$$

I.1.5.8. Modèle Hoshikuma et al. [26]

$$\sigma_{cc} = E_c \varepsilon_c \left[1 - \frac{1}{n} x^{n-1} \right] \quad (\text{Partie ascendante})$$

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_{des} (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}) \geq 0.5 f_{cc} \quad (\text{Partie descendante})$$

$$E_{des} = \frac{11.2 \times f_{c0}^2}{\rho_{sh} \times f_{yh}}$$

Ou :

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc0}}$$

Avec :

ε_c : déformation du béton confiné

ε_{cc0} : la déformation correspondante a la contrainte f_{cc} du béton confiné

I.1.5.9. Modèle de Fardis et Khalili

Fardis et Khalili (1981) [27] ont étudié le comportement du béton enrobé de fibre de verre. La résistance à la rupture et la contrainte ultime de béton confiné par fibres de verre sont augmenté de manière significative avec le nombre de couches. Un modèle de béton confiné a été proposé (1982)

$$f'_{cc} = f'_c \left(1 + 4.1 \left(\frac{f_{com} t}{df'_c} \right) \right)$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.01 \left(\frac{E_{com} t}{df'_c} \right)$$

Où E_{com} est le module d'élasticité du confinement dans la direction transversale.

Ce modèle de contrainte-déformation a été proposé sur la base du modèle de Richart et al. (1928,1929).

I.1.5.10. Modèle de Karbhari

Karbhari et al. [28] ont suggéré l'équation suivante pour prédire la contrainte ultime et la déformation ultime des cylindres composite en béton enveloppés sous une compression uniforme.

$$f'_{cc} = f'_c \left(1 + 2.1 \left(\frac{2tf_{com}}{df'_c} \right)^{0.87} \right)$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.01 \left(\frac{2tf_{com}}{df'_c} \right)$$

Cette loi contrainte-déformation a également été proposée sur la base du modèle proposé par Richart et al. (1928,1929). Ce modèle ne comprend pas le comportement contrainte-déformation bilinéaire du béton confiné par FRP.

I.1.5.11. Modèle de Mirmiran

Mirmiran et al. [29] ont développé un modèle pour le béton confiné avec des fibres composites. Dans ce modèle, la relation à quatre paramètres de Richard et Abbott (1975) a été utilisée:

$$\sigma = \frac{(E_1 - E_2) \varepsilon}{\left(1 + \left| \frac{(E_1 - E_2) \varepsilon}{\sigma_0} \right|^n \right)^{1/n}} + E_2 \varepsilon.$$

Cependant, dans ce modèle E_1 et E_2 ont été déterminés directement par des résultats expérimentaux. Ils n'ont pas de signification physique claire.

$$E_2 = 245.61 f'_c{}^{0.2} + 1.3456 \frac{E_j^t j}{D} [MPa]$$

$$\sigma_0 = 0.872 f'_c + 0.371 f_r + 6.258 [MPa]$$

I.1.5.12. Modèle de Xiao et Wu

Xiao et Wu [30] ont étudié le comportement du béton confiné avec matériaux composites avancés. Ils ont dérivé les expressions de E_1 et E_2 puis ils ont établi leur sens physique dans le modèle proposé.

$$f'_{cc} = f'_c + kf_1 = f'_c + \left(4.1 - 0.45 \left(\frac{f'_c}{C_j} \right)^{1.4} \right) f_l \quad \varepsilon_r = \varepsilon'_{ro} - \nu' \varepsilon_{cz}$$

$$\nu' = 10 \left(\frac{f'_{co}}{C_j} \right)^{0.9} \quad E_1 = kC_j \nu' \quad E_2 = kC_j$$

I.1.5.13. Modèle de Harmon

Harmon et al. (1998) [31] ont développé un modèle pour le béton confiné avec FRP sur la base du concept de propagation de la fissure dans le béton.

Pour prédire la déformation radiale, Harmon a proposé le concept de frottement interne. Deux modèles ont été proposés par Harmon et al (1998) basés sur le frottement interne dans le béton confiné. Ce modèle suppose que la déformation du béton est composée de trois parties.

$$\varepsilon = \varepsilon_{elastic} + \varepsilon_{crack} + \varepsilon_{void}$$

Où $\varepsilon_{elastic}$, ε_{crack} et ε_{void} sont la déformation élastique, la déformation due aux fissures, et la déformation du au vide respectivement.

I.1.5.14. Modèle Fujikake

Sur la base du modèle de comportement orthotrope de Darwin, Fujikake et al (2004) [32] ont proposé un modèle analytique pour prédire le comportement du béton confiné avec FRP sous charge de compression axiale.

Un modèle constitutif pour le béton brut a été formulé à base des résultats expérimentaux de compression triaxiale du béton.

La jaquette FRP a été supposée comme un matériau élastique linéaire. Le modèle de comportement orthotrope est décrit dans la direction des contraintes principales, lorsque les axes orthotropes coïncident avec les axes principaux:

$$\begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) & E_1(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) \\ E_2(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}) \\ E_3(\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}) & E_3(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Où :

$$\phi = 1 - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{21}\nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$$

Dans laquelle :

$d\sigma_i$ ($i = 1,2,3$) = incrément de contrainte principale dans la direction i ;

$d\varepsilon_i$ ($i = 1,2,3$)= Incrément de déformation principale dans la direction i ;

E_i ($i = 1,2,3$) = module sécant total de élasticité dans la direction i d'orthotropie ;

ν_{ij} ($i, j = 1,2,3$) = coefficient d'anisotropie transversale de déformation dans la direction i causée par la contrainte dans la direction j . le modèle peut être écrit sous une forme simple tel que:

$$\{d\sigma_i\} = [D]\{d\varepsilon_i\}$$

Où $[D]$ = matrice de rigidité.

La relation équivalente de contrainte-déformation uni-axiale est donnée comme suit :

$$\sigma_i = \frac{AX_i + (B-1)X_i^2}{1 + (A-2)X_i + BX_i^2} \sigma_p \quad (i = 1, 2, 3)$$

Où

- A, B = constantes; X_i = déformations uni-axiales équivalentes normalisées;
- σ_p = contrainte ultime correspondante à l'état actuel.
- Les constantes A et B et X_i sont définis par les équations suivantes:

$$A = \frac{E_0 \varepsilon_p}{\sigma_p}$$

$$B = \frac{1}{\alpha^2 \beta (1 - \beta)} \left[(A-1)^2 \alpha \beta + A^2 (1 - \alpha) + \alpha (\alpha - 1) \beta \right] \quad B \geq 1-A$$

Avec :

$$\alpha = E_0 / E_c, \beta = 0.45 f'_c / \sigma_p, X_i = \frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_p}$$

$$B = \frac{\sigma_p}{\sigma_p - \sigma_R} \quad (\varepsilon_{ui} > \varepsilon_p)$$

$$X_i = \left(\frac{\varepsilon_{ui}}{\varepsilon_p} \right)^m$$

Ou :

$$m = 1.04 + 2.0 \left(\frac{f'_c}{100} \right)^2$$

1.1.5.15. Modèle de Beque

Beque et al. (2003) [33] ont proposé un modèle basé sur le modèle Octaédral de Gerstle (1981) avec quelques modifications. Les modules de cisaillement et élastiques sont pris comme fonctions scalaires des invariants. Ainsi, l'état des contraintes peut être défini par les deux contraintes Octaédrales, la contrainte normale Octaédrale et σ_0 et la contrainte de cisaillement Octaédrale τ_0 :

$$\sigma_m = K_s \varepsilon_{kk}$$

$$S_{ij} = 2G_s e_{ij}$$

Avec :

$\sigma_m = \sigma_{kk} / 3 = \sigma_0$ est la contrainte normale moyenne et K_s et G_s sont appelés le module sécant module de cisaillement sécant, respectivement. les expressions de E_s et ν_s peuvent être obtenus par K_s et G_s

$$K_s = \frac{\sigma_{oct}}{3\varepsilon_{oct}} = \frac{E_s}{3(1-2\nu_s)}$$

$$G_s = \frac{\tau_{oct}}{\gamma_{oct}} = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$$

Ce modèle dépend essentiellement du module K_s et du module de cisaillement G_s . Modifications faite par rapport aux modèles originaux de Gerstle.

I.1.6. Discussion

La plupart des modèles proposés sont composés de deux phases (partie ascendante et partie descendante) excepté certains modèles [20-24], [29] qui proposent une seule relation.

La majorité de ces modèles sont développées sur la base des données expérimentales et contiennent des paramètres donnés par des essais expérimentaux.

Les différentes confrontations effectuées par ces auteurs montrent clairement :

- Deux relations (ascendante puis descendante) ne suffisent pas à elles seules de représenter correctement le comportement d'une section confinée.
- La relation unique proposée par Mander et al. [23-24] est aussi limitative, l'expression mathématique n'est pas assez souple pour tenir compte de l'exactitude des paramètres.
- Le confinement est introduit par un coefficient de confinement effectif, le pourcentage d'armatures transversales et la limite élastique de l'acier dans le cas de confinement par armature transversales et des propriétés de la jaquette dans le cas de confinement externe.
- Le domaine d'application de ces modèles se limite à des pourcentages de confinement allant de 20 à 25 %, on observe en effet un écart très important (dans la branche poste pic) entre l'expérimental et le calcul pour des pourcentages inférieurs à 20 %.
- Pour tous ces modèles, la partie ascendante est plus au moins représentative, par contre, la partie descendante après le pic de déformation, s'éloigne des résultats expérimentaux.

I.1.7. Modèle proposé par Bouafia.Y, Iddir. A et Kachi. M.S

Le modèle de confinement proposé par Bouafia,Y., Iddir, A. et Kachi, M.S. [34-37] est développé suite à une analyse rigoureuse des modèles analytiques existants et une exploitation des données expérimentales. La courbe définissant la relation contrainte –déformation du béton confiné est défini par les trois relations suivantes :

La première partie est une courbe ascendante non linéaire, la loi de Sargin [38] a été modifiée pour tenir compte du confinement :

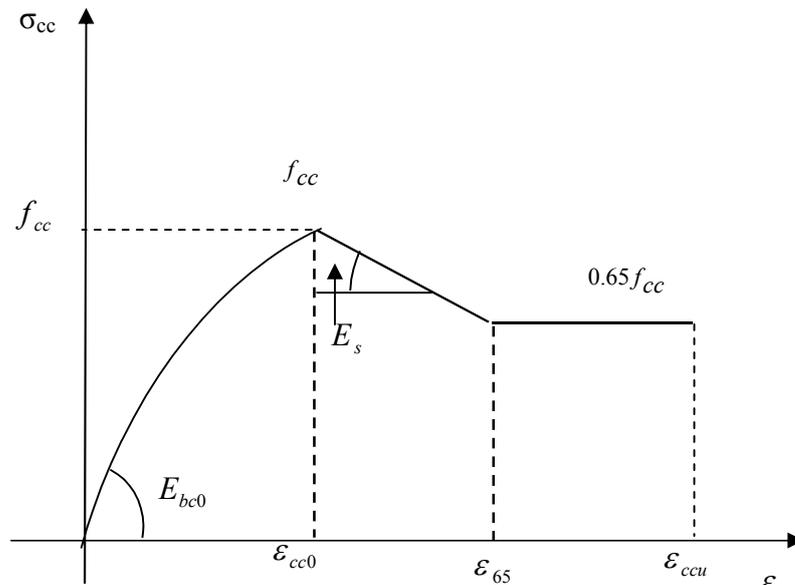


Figure I.7: Loi de comportement réel du béton en compression proposée par Bouafia, Y. Iddir, A. et Kachi, M.S. [34]

La première partie est une courbe ascendante non linéaire est régie par la loi de Sargin modifiée :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \bar{\varepsilon}_c + (k'_c - 1) \times \bar{\varepsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\varepsilon}_c + k'_c \times \bar{\varepsilon}_c^2} \quad \text{Pour : } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cc0}$$

Avec :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc0}}$$

$$\varepsilon_{cc0} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right]$$

$$k_c = \frac{E_{bc0} \times \varepsilon_{cc0}}{f_{cc}}$$

$$E_{bc0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cc}}$$

$$k'_c = k_c - 1$$

Suivie d'une partie descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \quad \text{Pour : } \varepsilon_{cc0} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{65}$$

Avec :

$$E_s = \frac{6 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

$$\varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_s} + \varepsilon_{cc}$$

Et la troisième partie est un palier linéaire, la relation contrainte –déformation est donnée par :

$$\sigma_{cc} = 0,65 f_{cc} \quad \text{Pour : } \varepsilon_{65} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{ccu}$$

$$\varepsilon_{ccu} = 0.4x \frac{f_l}{f_{c0}} + \varepsilon_{cu} = 0.0035 + 0.4x \frac{f_l}{f_{c0}}$$

L'avantage de ce modèle est la proposition de trois relations qui dépendent de plusieurs paramètres et permet ainsi de mieux approcher le comportement post- pic et de tenir compte d'une plus large bande de pourcentage d'aciers.

I-2. Deuxième partie : Méthodes de calcul non linéaire

I.2.1. Introduction

Plusieurs logiciels de calcul ont été développés pour étudier le comportement des structures dans le domaine non linéaire. Certains utilisent la formulation par éléments finis, d'autres utilisent des approches plus simples. Cependant, dans tous les cas, le domaine d'étude reste la flexion plane.

I.2.2. Proposition de VIRLOGEUX et M'RAD

Plusieurs publications de M. VIRLOGEUX [39-46] font état d'analyses théoriques sur le comportement des poutres à précontrainte extérieure. Certaines de celles-ci ont servi de base à l'étude numérique, développée par M'RAD [47], sur le comportement des poutres à précontrainte partiellement ou totalement extérieure au béton, de sections droites symétriques par rapport au plan moyen de la structure et chargées dans leur plan en admettant les hypothèses suivantes :

- conservation de la planéité des sections,
- principe de fissuration : répartie pour les poutres monolithes, et concentrée pour les poutres à voussoirs,
- absence de glissement entre les différents matériaux composant la section.

Le principe du calcul utilisé est celui pas à pas, du fait du caractère non linéaire du problème. Les valeurs initiales sont celle obtenues à l'état à vide, les étapes du calcul itératif sont les suivantes :

- calcul de l'allongement initial des différents câbles de précontrainte,
- calcul des déformations (ε_g, φ_z), sous l'effet des charges extérieures, de la section, sans considérer la surtension des câbles,
- première évaluation de la surtension des câbles,
- recalcul des déformations (ε_g, φ_z) de la section jusqu'à l'équilibre de la section.

Dans le cas des poutres à voussoirs, le processus est modifié de façon à tenir compte de la concentration des déformations dans les joints.

La formulation des efforts intérieurs est donnée par :

$$N_{int}(\varepsilon_g, \varphi_z) = \iint_A \sigma(\varepsilon_b) dydz + \sum_{j=1}^n \sigma(\varepsilon_{s_j}) A_{s_j}$$

$$M_{int}(\varepsilon_g, \varphi_z) = \iint_A \sigma(\varepsilon_b) y dydz + \sum_{j=1}^n \sigma(\varepsilon_{s_j}) y_j A_{s_j}$$

Avec : $\varepsilon_b = \varepsilon_g + \varphi_z y$

La résolution du problème consiste à déterminer l'accroissement des déformations en fonction des efforts extérieurs (N_{ext} , M_{ext}), qui sont les sollicitations dues aux charges extérieures appliquées.

En linéarisant les fonctions des efforts intérieurs au voisinage du point $(\varepsilon_g, \varphi_z)$, dans l'espace vectoriel des déformations et en supposant que les efforts au point $(\varepsilon_g, \varphi_z)$ sont connus. Les efforts au point $(\varepsilon_{g\ i+1}, \varphi_{z\ i+1})$ doivent être égaux aux efforts extérieurs (N_{ext} , M_{ext}), l'estimation d'ordre $i+1$ des déformations est alors donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{g\ i+1} \\ \varphi_{z\ i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{g\ i} \\ \varphi_{z\ i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{int} - N_{ext} \\ M_{int} - M_{ext} \end{Bmatrix}$$

Le calcul des tensions des câbles se fait par itérations successives à partir des estimations successives des déformations des sections.

Le modèle de calcul est appliqué aux poutres isostatiques à précontrainte extérieure. Pour celle-ci les cas suivants sont étudiés :

- câbles extérieur maintenus transversalement sans frottement,
- câble extérieur libre,
- câble dévié.

Ce modèle tient compte uniquement du cas du glissement isolé des câbles sur déviateur, il utilise alors un processus itératif correcteur pour déterminer la surtension des câbles extérieurs, ce qui peut poser certains problèmes d'ordre numérique (problème de convergence). Pour palier à cette difficulté M'RAD [47] a proposé de ralentir le calcul itératif, de telle façon à n'ajouter qu'une partie de la surtension calculée à la tension du câble obtenue dans l'itération précédente.

En ce qui concerne les poutres à voussoir, le modèle de fissuration concentré est appliqué, car la poutre se déforme par l'ouverture des joints et non par une fissuration régulièrement répartie.

Pour trouver une relation qui lie l'ouverture de la fissure à la déformation de la structure dans la zone du joint ouvert, le modèle introduit des sections de calcul intermédiaires de part et d'autre du joint fissuré, définies par l'angle de diffusion de la compression.

La variation de la déformation est alors linéaire entre les sections intermédiaires et celle du joint.

La surtension est corrigée par un terme qui tient compte de la valeur moyenne des tensions dans les sections intermédiaires et celle du joint.

I.2.3. Proposition de MULLER J [48]

Le logiciel DFLECT a été développé par le bureau Jean Muller International Inc [48], il permet d'analyser le comportement des poutres isostatiques et hyperstatiques à précontrainte extérieure. Dans le cas des ponts à voussoirs, l'accroissement des charges au-delà de celle de service, ne produit de fissures en dehors de l'ouverture des joints : cela est vrai dans le cas de joints secs, mais il ne l'est pas pour les joints à résine chimique.

Le programme tient compte du changement de rigidité d'un segment à un autre en utilisant la relation moment courbure, construite par la méthode des éléments finis pour chaque segment. L'ensemble de l'analyse est basé sur les hypothèses suivantes :

- la distribution de la contrainte est élastique linéaire dans chaque segment,
- conservation de la planéité de la section du joint,
- le béton en traction entre deux joints successif reste intègre (pas de fissuration),
- le comportement des aciers de précontrainte est élastique non linéaire.

Le programme tient compte également du tracé, des déviateurs et de l'adhérence des câbles aux déviateurs.

La relation moment-courbure pour les segments est obtenue par la méthode des éléments finis en supposant que le comportement des matériaux est élastique linéaire. Ce ci est dû au fait qu'il n'y a pas de contrainte limite de fissuration du béton en compression [49]. La relation moment-courbure est élargie même aux très grandes valeurs. En effet, à la rupture la courbure de la section est de l'ordre de 450 fois plus grande que celle correspondant à la même section complètement comprimée. Cela peut s'expliquer par le

fait que le programme DEFLECT ne tient pas compte de la plastification du béton à la rupture.

La validation du logiciel DEFLECT est faite par la comparaison des résultats obtenus des essais du CEBTP et du CTL. Pour le premier cas, un essai du CEBTP est modélisé deux fois avec les mêmes caractéristiques géométriques, les mêmes matériaux et le même tracé des câbles. Dans le premier cas les câbles sont considérés comme extérieurs au béton et dans le second ils sont considérés comme intérieurs au béton et adhérant sur toute la longueur de la poutre.

La différence entre les trois cas (CEBTP et les deux modélisations) est insignifiante pour tous les stades de chargement jusqu'à la charge ultime, figure (I.9)

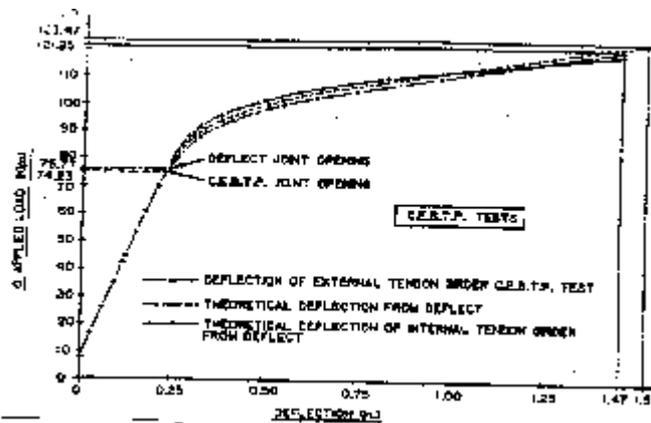


Figure I. 8 : courbe Charge – flèche obtenue par DEFLECT sur l'essai du CEBTP [49]

Cependant on peut noter que le comportement de la poutre pour les deux cas de modélisation (précontrainte intérieure et précontrainte extérieure) présente une très petite différence pour tous les stades de chargement, alors que les résultats expérimentaux obtenus au CEBTP montrent, cependant, que les rotations sont concentrées dans les joints où se produit la rupture par écrasement du béton dans le cas des poutres à précontrainte extérieure, de plus DEFLECT ne tient également pas compte de la plastification du béton à la rupture, mais il admet un comportement élastique linéaire du béton sans limitation de la contrainte ou de la déformation.

I.2.4. Proposition de Martins

MARTINS [50] a développé un logiciel de calcul permettant d'analyser le comportement des poutres isostatiques, à voussoirs ou coulées sur place, en béton armé ou précontraint par des câbles extérieurs au béton ou par un câblage mixte, soumises à un chargement symétrique. Le tracé du câblage extérieur est limité au cas d'un tracé symétrique.

Dans son travail Martins utilise l'approche classique de l'élasticité non linéaire pour résoudre le cas des poutres coulées en place. Pour les poutres à voussoirs, il utilise, pour tenir compte des voussoirs, l'approche développée par GURIANI [51] pour la distribution de la déformation du béton dans un élément fissuré.

Ainsi, pour le cas des poutres coulées en place, Martins admet les hypothèses suivantes :

- les déplacements sont petits et donc la relation moment courbure est donnée par

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{E I(x)}$$

- les sections restent planes après déformation, l'hypothèse de BERNOULLI-NAVIER reste valable dans tout le domaine de travail,
- l'adhérence acier béton est parfaite jusqu'à rupture,
- les lois de comportement des matériaux sont celle de la sollicitation unidirectionnelle,
- le chargement est quasi statique, monotone et croissant,
- les effets différés sont négligés,
- on tient compte de la contribution du béton tendu entre les fissures.

Le système d'équations à résoudre dans la recherche de l'équilibre d'une section transversale sollicitée par les efforts (N_{ext}, M_{ext}) est le suivant :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{g\ i+1} \\ \varphi_{z\ i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{g\ i} \\ \varphi_{z\ i} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial N_{int}}{\partial \varphi_z} \\ \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_g} & \frac{\partial M_{int}}{\partial \varphi_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{int} - N_{ext} \\ M_{int} - M_{ext} \end{Bmatrix}$$

N_{int} et M_{int} étant les efforts résistants correspondant à un état de déformation (ε_g, φ_z) donné par :

$$Nint(\varepsilon_g, \varphi_z) = \iint_A \sigma(\varepsilon_b) dydz + \sum_{j=1}^n \sigma(\varepsilon_{sj}) A_{sj}$$

$$Mint(\varepsilon_g, \varphi_z) = \iint_A \sigma(\varepsilon_b) y dydz + \sum_{j=1}^n \sigma(\varepsilon_{sj}) y_j A_{sj}$$

Avec $\varepsilon_b = \varepsilon_g + \varphi_z y$

$$\varepsilon_{sj} = \varepsilon_g + \varphi_z y_j$$

ε_b étant la déformation dans le béton au niveau du point d'ordonnée y et ε_{sj} la déformation de l'acier d'ordonnée y_j .

La section est discrétisée en m fibres de béton et le système d'équations est résolu par la méthode de NEWTON-RAPHSON.

Dans le cas des poutres a voussoir cette approche est modifiée pour tenir compte des voussoirs. Une formulation plus générale est alors développée pour étudier les poutres a voussoirs à précontrainte extérieure en tenant compte de la dégradation de l'adhérence acier-béton après ouverture des fissures (joints). Cette formulation peut être appliquée aux poutres monolithes présentant un schéma de fissuration non régulier. Elle est basée sur la méthode moment-courbure ainsi que sur le modèle de GURIANI [51] pour la distribution de la déformation du béton dans un élément fissuré.

Cette approche admet qu'une section fissurée (ou de joint) se déforme après ouverture de la fissure (joint) en tournant autour de l'axe de déplacement nul ($u_c = 0$) par rapport à la section médiane entre deux fissures (joints) successives. Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- Une section fissurée se déforme après ouverture de la fissure en tournant autour de l'axe de déplacement nul ($u_c = 0$) par rapport à la section médiane entre deux fissures consécutives, figure(I.10).

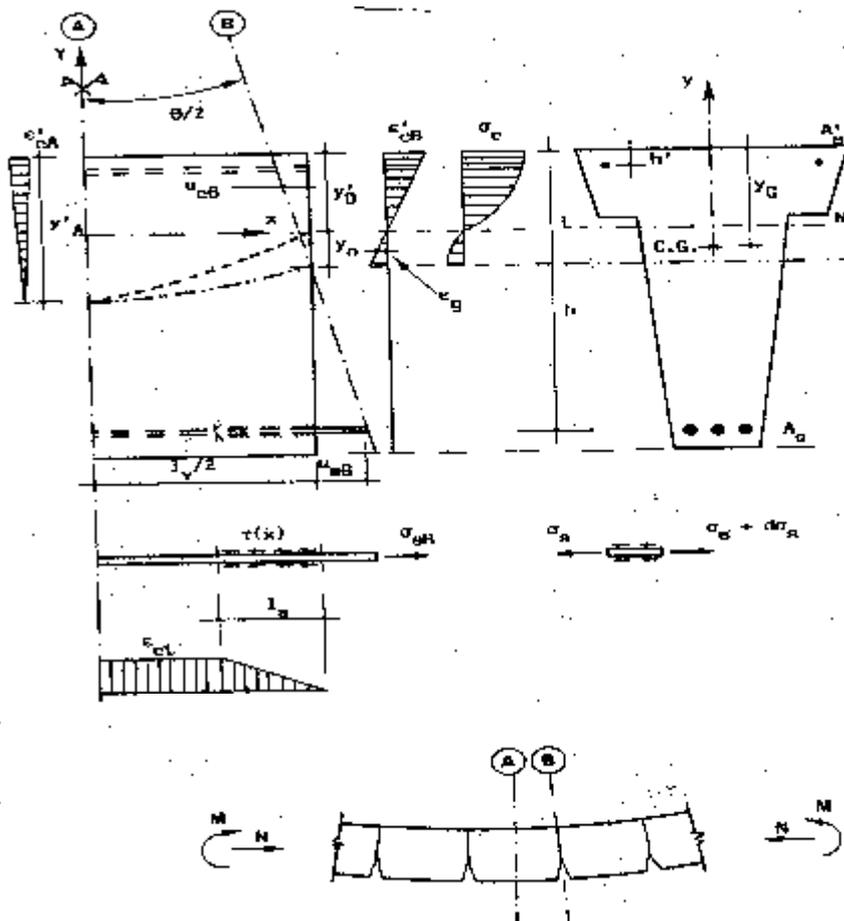


Figure I.9: L'équilibre d'un voussoir.

- la section reste plane, au moins dans la partie du béton comprimé après fissuration,
- le moment fléchissant est constant le long d'un voussoir,
- les effets de l'effort tranchant sont négligés,
- l'aire des diagrammes des déformations de compression dans les sections médiane et de fissure ou joint sont égales,
- la déformation du béton sur la fibre la plus comprimée évolue selon une loi parabolique entre la section de fissure ou joint et celle à mi-voussoir,
- la distribution des déformations de compression dans la section du joint est linéaire ainsi que celle dans la section à mi-voussoir.

Une modification a été introduite dans la formulation classique de l'élasticité non linéaire, pour tenir compte, du comportement d'un voussoir. Cette modification porte sur la relation liant les variables classiques (ϵ_g , φ_z) aux variables $\bar{\theta} = \frac{\theta}{L_v}$ et $f(y)$ de la

formulation du comportement d'un voussoir, où θ est la rotation de la section j du joint par rapport à la section médiane du voussoir, rapportée à l'unité de longueur du voussoir L_v , et où $f(y)$ une fonction permettant d'obtenir la déformation des fibres de béton dans la section du joint (fissure).

La détermination de l'ouverture des fissures (joint) n'est pas simple, les valeurs calculées par MARTINS sont des valeurs moyennes probables.

En effet, le modèle tient compte de la dégradation de l'adhérence entre l'acier et le béton, par une loi polygonale d'adhérence - glissement des câbles, proposée par Martins comme résultat de l'analyse d'essais rapportés dans la littérature technique.

I.2.5. Proposition de Kachi

La méthode de calcul présentée par Kachi [52] a pour objectif l'introduction de la précontrainte extérieure en tenant compte des différentes dispositions des câbles au droit des déviateurs (câbles adhérent et n'adhérant pas aux déviateurs), ainsi que l'effet de l'effort tranchant dans le domaine élastique non linéaire dans un logiciel de calcul des poutres hyperstatiques développé à partir des travaux de Nait Rabah[53] et de Garcia [54] au CEBTP.

L'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire est introduit dans le modèle de calcul par une estimation du module de cisaillement réel d'une section de poutre par la méthode présentée et par son introduction dans la matrice de rigidité corde de la section.

La méthode de calcul a pour objectif la simulation du comportement jusqu'à rupture de poutres hyperstatiques en béton armé, béton précontraint (par des câbles intérieurs ou extérieurs au béton). Elle tient compte de trois types de non linéarités :

- celles résultant des lois de comportement intrinsèques des matériaux. Ces non-linéarités conduisent à des relations non-linéaires entre les sollicitations et déformations ;
- les non-linéarités géométriques dues au comportement d'ensemble de la structure. Il est indispensable de tenir compte de ce type de non-linéarités dans l'analyse structurale des systèmes où les effets du second ordre ou bien la stabilité des éléments ou de l'ensemble du système sont très importants ;
- celles résultant du glissement des câbles extérieurs sur les déviateurs provoquant la modification dans les surtensions et des déformations dans l'ensemble de la structure.

I.2.5.1 Domaine d'application et hypothèses générales

La structure étudiée par Kachi, MS. [52], Kachi, MS., Bouafia, Y., Fouré, B., Muller, P. [55-60] est modélisée en une ossature constituée par deux types d'éléments : un élément poutre et un élément câble lié aux éléments poutre par des éléments rigides, qui font dans leur ensemble l'objet d'une analyse non linéaire.

La procédure de calcul est basée sur la méthode des déplacements pour résoudre l'équation d'équilibre de la structure qui lie les accroissements des déplacements aux accroissements de sollicitation de charges extérieures et à l'action éventuelle de la précontrainte, par des câbles intérieurs à la mise en tension.

La structure étudiée est considérée comme soumise à un système de charges instantané. Les charges appliquées sont supposées concentrées aux nœuds de la structure.

Le système de chargement considéré comporte :

- des charges Q_{01} et $Q_{0\epsilon}$ fixes, appliquées avant et après précontrainte
- des charges αQ_v variables, d'intensité proportionnelle à un paramètre α .

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes de α . La précontrainte intérieure au béton est étudiée par une méthode basée sur la formulation de Nait Rabah [53].

L'analyse de l'état des déformations d'un élément est effectuée dans un repère intrinsèque lié à la position déformée de cet élément. Dans cette analyse les hypothèses faites sont les suivantes :

- l'analyse est effectuée en élasticité non linéaire ;
- les déformations sont petites ;
- les déplacements sont petits ;
- la longueur des éléments est faible et donc la non linéarité géométrique attachée à la déformation de l'élément est négligeable ;
- les déformations des nœuds situés à la jonction de plusieurs éléments sont négligeables ;
- le glissement des câbles extérieurs est nul.

Les caractéristiques de déformabilité d'un élément sont obtenues en étudiant le comportement mécanique d'une ou plusieurs sections droites de cet élément.

L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations dues à l'effort normal et au moment fléchissant que celle due à l'effort tranchant. Les effets différés et à longue durée ne sont pas pris en compte.

I.2.5.2. Etude de l'équilibre d'une poutre en élasticité non linéaire

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une poutre en béton armé et précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K]. [\Delta U]$$

Où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et $[K]$ représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections $[Ks]$.

L'expression de cette matrice adoptée par les auteurs Kachi, MS. [52], Kachi, MS., Bouafia, Y., Fouré, B., Muller, P. [55-60] pour tenir compte de l'effort tranchant. En élasticité non linéaire, pour une poutre en béton armé, est :

$$[Ks] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta N}{\Delta \delta w} & 0 \\ \frac{\Delta M}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta M}{\Delta \delta w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}} \end{bmatrix}$$

Où ΔN est l'accroissement de l'effort normal de la section, ΔM est l'accroissement du moment fléchissant de la section, $\Delta \delta u$ est l'accroissement de la déformation au niveau centre de gravité de la section et $\Delta \delta w$ est l'accroissement de la rotation différentielle (courbure) de la section.

Ces déformations répondent à l'hypothèse de planéité des sections (Navier-Bernoulli) ; la déformation longitudinale ε_x est une fonction linéaire de l'abscisse transversale y :

$$\varepsilon_x (y) = \delta u + \delta w. y$$

ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section et $\Delta\gamma_{\text{moy}}$ est l'accroissement de la distorsion **moyenne** de la section.

L'expression adoptée ci-dessus pour $[K_s]$ est déjà une simplification. En effet, les termes de couplage entre ΔN et $\Delta\delta w$, et entre ΔM et $\Delta\delta u$, sont incontournables dans l'analyse de flexion composée, mais les auteurs ont supposé que les termes de couplage entre ΔN et $\Delta\gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta\delta u$), et entre ΔM et $\Delta\gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta\delta w$), étaient négligeables. Le couplage entre les déformations dues à V et celles dues à (N, M) évoqué dans l'introduction va se trouver dans la dépendance de $\Delta\gamma_{\text{moy}}$ avec les contraintes et déformations dues à N et M .

Pour les poutres en béton précontraint, la matrice $[K_s]$ est complétée par des termes dus à l'effet de la précontrainte, dans l'équilibre de flexion composée et dans l'équilibre d'une partie de l'effort tranchant par la composante transversale de l'effort des câbles inclinés – Nait-Rabah (1990) [53].

I.3.Conclusion

Le développement des calculs aux états limites impose l'élaboration de méthodes de calcul tenant compte du comportement non linéaire des matériaux. Le développement parallèle de l'outil informatique permet de mettre au point des méthodes numériques assez complexes pour mieux caractériser le comportement des sections particulièrement en béton confiné.

Cette synthèse sur les modèles de confinement et le calcul non linéaire des structures nous permet de mieux appréhender son application aux cas des structures de sections circulaires.

Vu la complexité des modèles existants et la difficulté de maîtriser certains de leurs paramètres, nous sommes amenés à proposer un modèle simple dont les paramètres sont facilement maîtrisables.

Le confinement est introduit par un coefficient de confinement effectif, le pourcentage d'armatures transversales et la limite élastique de l'acier ainsi que l'épaisseur des tubes en acier dans le cas des poteaux mixtes.

CHAPITRE II

MODELISATION AVEC PRISE EN COMPTE DU CONFINEMENT

II.1 Introduction

La méthode de calcul qu'on présente a pour objectif l'introduction du confinement en tenant compte des différentes dispositions des armatures transversales ou des tubes, ainsi que l'effet de l'effort tranchant dans le domaine élastique non linéaire dans un logiciel de calcul des poutres hyperstatiques développé à l'université de Tizi-Ouzou Kachi [52], Kachi, Fouré, Bouafia, Muller [52-60]. Le confinement est introduit par une loi de comportement proposée par Bouafia, Y. et Iddir, A. et Kachi, M.S. [34-37] qui permet de mieux simuler le comportement des sections en béton armé confiné.

Certains problèmes spécifiques, tels que les effets du second ordre, sont pris en compte dans la formulation du système d'équations d'équilibre de la structure.

L'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire est introduit dans le modèle de calcul par une estimation du module de cisaillement réel d'une section de poutre par la méthode développée par Kachi et al. [52], [55-60] et par son introduction dans la matrice de rigidité corde de la section.

La méthode de calcul a pour objectif la simulation du comportement jusqu'à rupture de poutres hyperstatiques en béton armé avec prise en compte du confinement, Elle tient compte de deux types de non linéarités :

- celles résultant des lois de comportement intrinsèques des matériaux. Ces non-linéarités conduisent à des relations non-linéaires entre les sollicitations et déformations.

- les non-linéarités géométriques dues au comportement d'ensemble de la structure. Il est indispensable de tenir compte de ce type de non-linéarités dans l'analyse structurale des systèmes où les effets du second ordre ou bien la stabilité des éléments ou de l'ensemble du système sont très importants.

II.2 Domaine d'application et hypothèses générales

La structure étudiée est modélisée en une ossature constituée par deux types d'éléments : un élément poutre et un élément câble lié aux éléments poutre par des éléments rigides, qui font dans leur ensemble l'objet d'une analyse non linéaire.

La procédure de calcul est basée sur la méthode des déplacements pour résoudre l'équation d'équilibre de la structure qui lie les accroissements des déplacements aux accroissements de sollicitation de charges extérieures et à l'action éventuelle de la précontrainte, par des câbles intérieurs à la mise en tension.

La structure étudiée est considérée comme soumise à un système de charges instantané. Les charges appliquées sont supposées concentrées aux nœuds de la structure.

Le système de chargement considéré comporte :

- des charges Q_{01} et Q_{0e} fixes, appliquées avant et après précontrainte
- des charges αQ_v variables, d'intensité proportionnelle à un paramètre α .

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes de α . La précontrainte intérieure au béton est étudiée par une méthode basée sur la formulation de Nait Rabah [53].

L'analyse de l'état des déformations d'un élément est effectuée dans un repère intrinsèque lié à la position déformée de cet élément. Dans cette analyse les hypothèses faites sont les suivantes :

- l'analyse est effectuée en élasticité non linéaire ;
- les déformations sont petites ;
- les déplacements sont petits ;
- la longueur des éléments est faible et donc la non linéarité géométrique attachée à la déformation de l'élément est négligeable ;
- les déformations des nœuds situés à la jonction de plusieurs éléments sont négligeables ;

Les caractéristiques de déformabilité d'un élément sont obtenues en étudiant le comportement mécanique d'une ou plusieurs sections droites de cet élément.

L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations dues à l'effort normal et au moment fléchissant que celle due à l'effort tranchant. Les effets différés et à longue durée ne sont pas pris en compte.

Le calcul des déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque est effectué par intégration des déformations des sections de calcul.

La longueur des éléments et le nombre de sections droites de calcul ont une influence sur les déplacements calculés. Grelat [61] a montré que, pour les éléments de faible longueur, la prise en compte de trois sections de calcul est en générale suffisante. L'approche utilisée pour le calcul des déplacements est basée sur la formulation de Nait Rabah [53] conduisant à la formation de la matrice de souplesse reliant les accroissements des déplacements aux accroissements d'efforts aux extrémités de l'élément. Les effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds sont introduits essentiellement par la transformation non linéaire des déplacements des extrémités de l'élément dans le passage du repère intrinsèque à un repère fixe.

II.3. Comportement des matériaux

Les lois de comportement uni axiales sont usuellement utilisées dans l'étude du comportement des matériaux. Cette hypothèse est acceptable dans le cas d'un chargement instantané croissant proportionnellement à un paramètre α .

II.3.1. Béton comprimé

Pour décrire le comportement du béton en compression, on admet un comportement élastique non linéaire qui sera décrit par la loi de Sargin [38] (figure II.1).

La contrainte est donnée par :

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k_b - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k_b \bar{\varepsilon}^2} \quad (2.1)$$

Où $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

- Le paramètre k_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par:

$$k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

. f_{cj} : résistance à la compression du béton à l'âge j ,

. ε_0 : déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

. E_{b0} : module élastique du béton à l'origine.

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

- Avec $K'_b = 0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

- Avec $K'_b = 1$, on obtient au contraire des courbes assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile.

Pour un béton normal, on prend généralement $k'_b = k_b - 1$

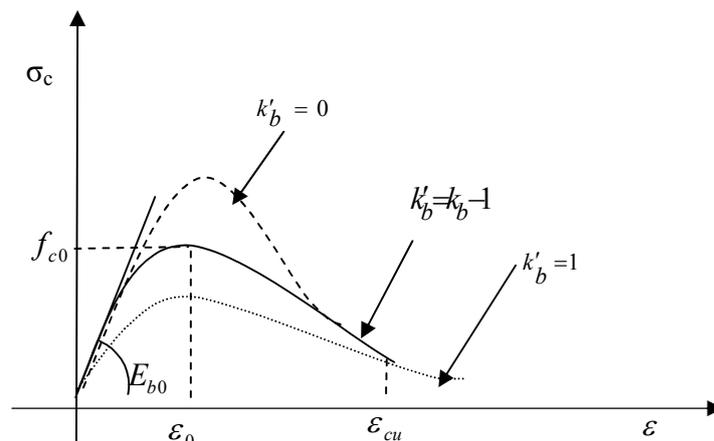


Figure II.10 : Comportement du béton en compression loi de Sargin [38]

II.3.2. Comportement du béton en traction

Généralement, dans la pratique (règlements), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

La prise en compte de la contribution du béton tendu entre les fissures, permet une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, ainsi qu'une estimation meilleure de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques et dans les cas sensibles aux effets du second ordre. Elle permet ainsi de mieux estimer les déplacements.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la loi de Grelat [61]. Elle attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (figure II.2).

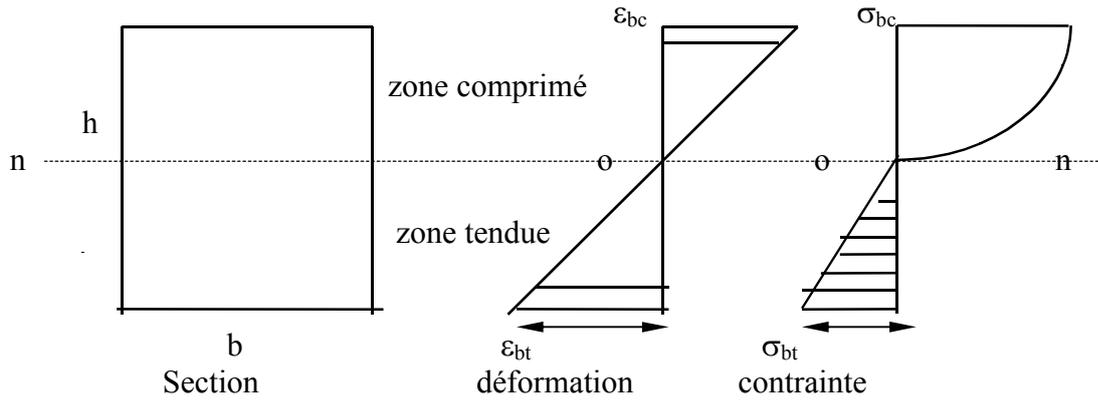


Figure II.11: Comportement du béton avant fissuration.

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \tag{2.2}$$

Au - delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît selon une loi parabolique (figure II.3). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre.

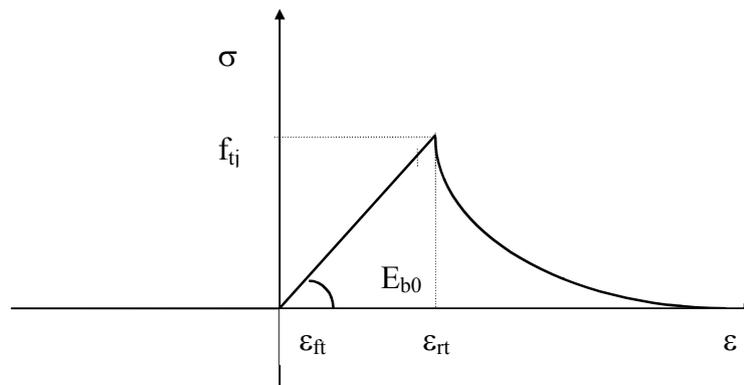


Figure II.12 : Contribution du béton tendu après fissuration A.Grelat [61].

f_{tj} : résistance du béton à la traction,

ε_{ft} : déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

E_{bo} : module d'élasticité longitudinal du béton.

- $\sigma_{bt} = E_{bo} \cdot \varepsilon_{bt}$ si $|\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{ft}$ (2.3)
- $|\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt}$ et $|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{ft}$ fissuration avec participation du béton tendu.

$$\sigma_{bt} = - f_{ft} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} \quad (2.4)$$

- $|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}$ fissuration sans participation du béton tendu

$$\sigma_{bt} = 0$$

II.3.3. Les aciers

La loi contrainte-déformation est supposée identique en traction et en compression sous chargement monotone, elle dépend de la nature de l'acier.

II.3.3.1 Comportement des aciers passifs

On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

A) Aciers naturels: Ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite (figure II.4)

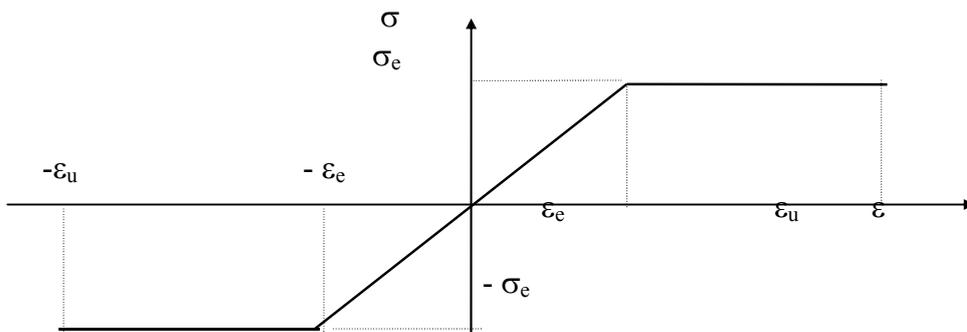


Figure II.13: Comportement des aciers naturels.

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \varepsilon && \text{pour } \varepsilon \leq \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e && \text{pour } \varepsilon_e < \varepsilon < \varepsilon_u \\ \sigma &= 0 && \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{aligned} \quad (2.5)$$

Du côté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10 ‰

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

b) Aciers écrouis

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83 qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au - delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (figure II.5).

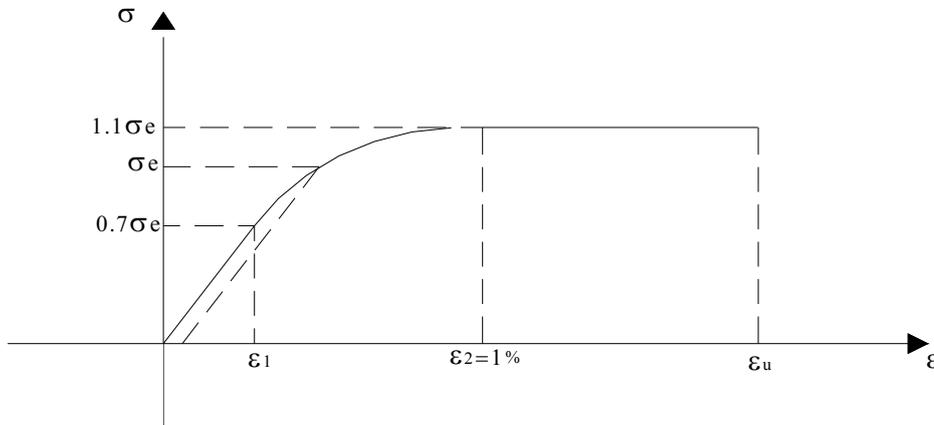


Figure II.14: Comportement des aciers écrouis.

Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_s \cdot \varepsilon && \text{pour } \sigma < 0.7 \sigma_e \\
 \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_d} + 0.823 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7 \right)^5 && \text{pour } 0.7 \sigma_e < \sigma < 1.1 \sigma_e \\
 \sigma &= 1.1 \sigma_e && \text{pour } 1 \% < \varepsilon < \varepsilon_u \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

(Avec les relations qui se déduisent en traction par symétrie).

II.3.3.2 Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 83.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_a \varepsilon_p && \text{pour } 0 < \sigma < 0.9 \sigma_e \\
 \varepsilon_p &= \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_e} - 0.9 \right)^5 && \text{pour } 0.9 \sigma_e < \sigma_p < 1.06 \sigma_e \\
 \varepsilon_p &= 1.06 \sigma_e && \text{pour } \varepsilon > 2 \% \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

(Avec les relations qui se déduisent par symétrie du coté de la traction).

II.3.3. 3. Comportement des tubes en aciers

La section métallique est habituellement faite à partir de l'acier de construction. Pour expliquer les propriétés mécaniques de l'acier de construction, l'essai le plus approprié est un essai de traction sous chargement statique. La relation de contrainte- déformation pour un spécimen en traction d'un tel acier est montrée sur la figure II.6 [2].

Au commencement, la relation de contrainte- déformation est linéaire avec un module élastique E_a qui pour la plupart des qualités des aciers est de près de 200 GPa. Si l'effort est dans la phase élastique, l'acier récupère parfaitement en déchargement. Le comportement élastique linéaire continue jusqu'à ce que la force limite f_y soit atteinte, à une déformation limite ϵ_{ay} .

Autres déformations résultent en phase d'écoulement plastique avec peu ou pas d'augmentation d'effort jusqu'à ce que l'écroutissement soit atteint à une contrainte σ_{oh} . Alors, l'effort dans l'acier augmente jusqu'à atteindre la résistance limite en traction f_u .

La déformation commence alors à se localiser, ayant pour résultat une grande réduction de l'aire de la section droite qui cause une diminution de contrainte jusqu'à la rupture.

Cependant, la dernière partie de la relation de contrainte- déformation est légèrement fallacieuse concernant le comportement du matériau.

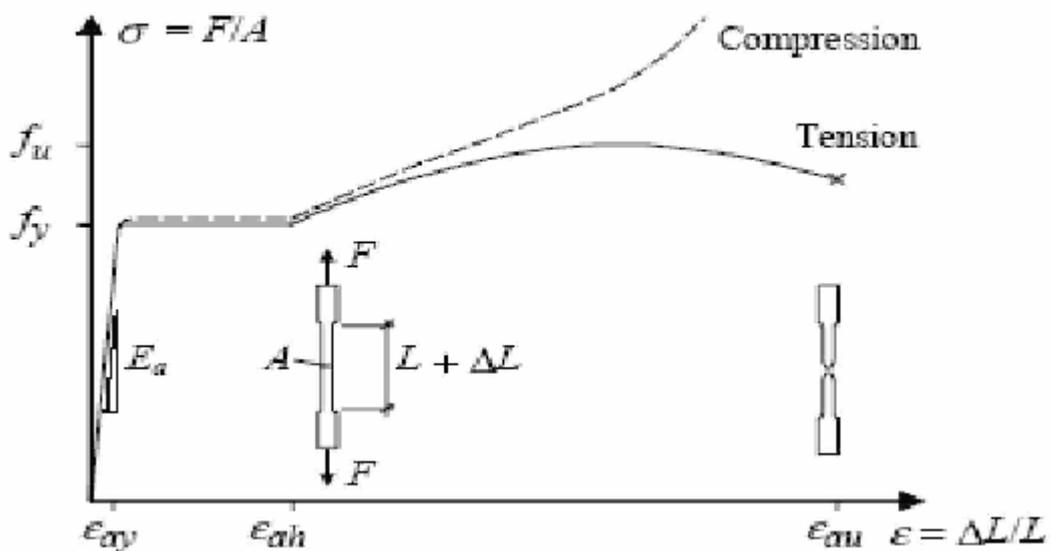


Figure II.15: Courbe contrainte-déformation des tubes en aciers

II.3.4. Comportement du béton confiné

II.3.4.1. Cas d'une section circulaire

- Résistance à la compression du béton confiné f'_{cc}

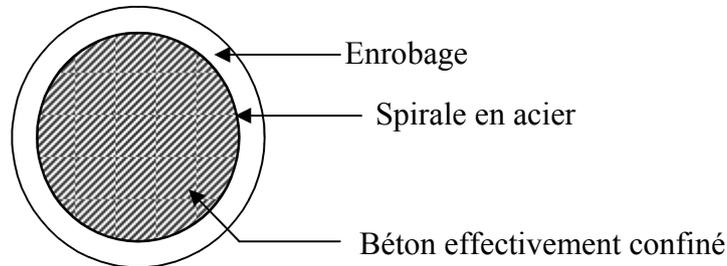


Figure II.16 : section circulaire confinée par spirale en acier.

La résistance à la compression du béton confiné est donnée par [23-24] :

$$f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}}} \right) \quad (2.8)$$

- f_{c0} : résistance à la compression du béton non confiné.
- f'_l : pression de confinement latérale effective.

$$f'_l = f_l \times k_e \quad (2.9)$$

- f_l : pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.
- k_e : coefficient de confinement effectif.

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (2.10)$$

- A_e : section effectivement confinée.

$$A_{cc} = A_c (1 - \rho_{cc}) \quad (2.11)$$

- ρ_{cc} : rapport entre la section des armatures longitudinales et la section du béton.
- A_c : section interne comprise entre les spirales.

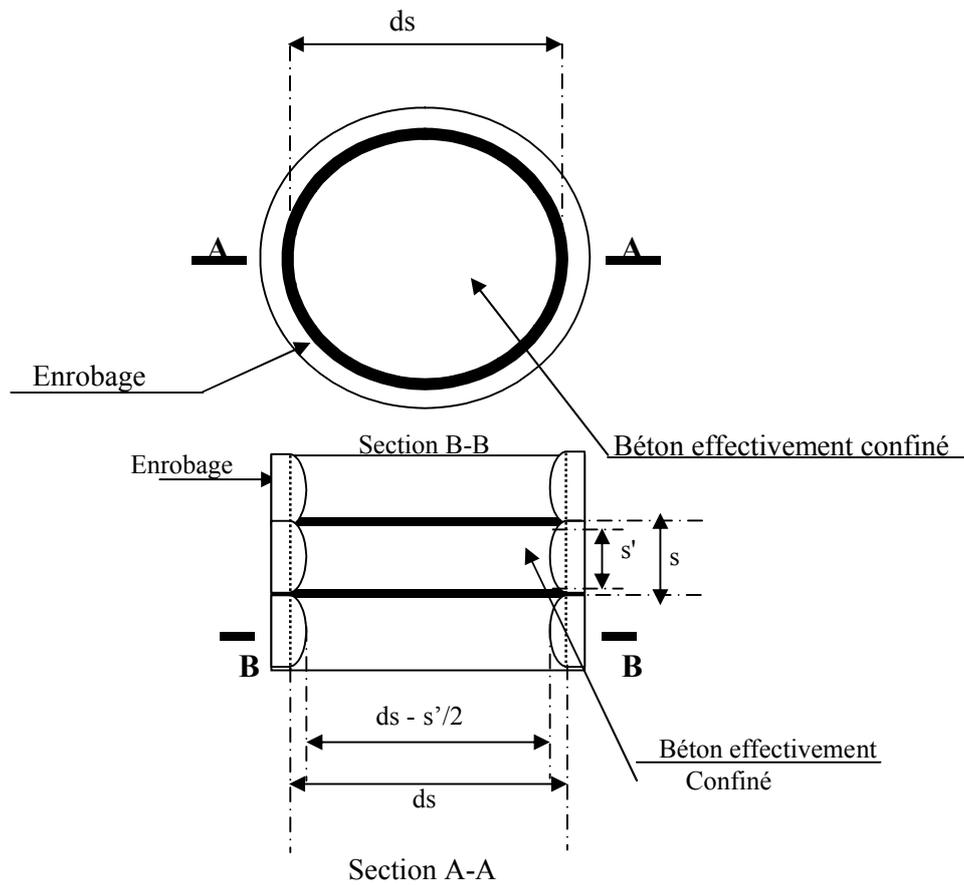


Figure II.17: béton effectivement confiné (cas d'une section circulaire confinée par spirale en acier).

$$A_e = \frac{\pi}{4} \left(ds - \frac{s'}{2} \right)^2$$

$$A_e = \frac{\pi}{4} ds^2 \left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)^2 \tag{2.12}$$

$$A_{cc} = \frac{\pi}{4} ds^2 (1 - \rho_{cc}) \tag{2.13}$$

Donc :

$$Ke = \frac{A_e}{A_{cc}} = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)}{1 - \rho_{cc}}$$

$$Ke = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds} \right)}{1 - \rho_{cc}} \tag{2.14}$$

L'équilibre des forces dans une section donnée est :

$$2f_{yh} \times A_{sp} = f_l \times s \times ds \quad (2.15)$$

- f_{yh} : contrainte limite des aciers transversaux.
- A_{sp} : section des aciers transversaux.
- f_l : contrainte de confinement latérale.
- s : distance entre les extrémités des spirales (voir section A-A).
- ρ_s : rapport entre le volume des armatures de confinement transversales et le volume du béton confiné.

$$\rho_s = \frac{4A_{sp}}{ds \times s} \quad ; \quad s \times ds = \frac{4A_{sp}}{\rho_s}$$

$$f_l = \frac{2f_{yh} \times A_{sp}}{s \times ds} \quad (2.16)$$

$$\text{Donc } f_l = \frac{1}{2} \rho_s \times f_{yh} \quad (2.17)$$

En remplaçant (2.14) et (2.17) dans (2.9) :

$$f'_l = \frac{1}{2} \rho_s \times f_{yh} \times \frac{\left(1 - \frac{s'}{2ds}\right)}{1 - \rho_{cc}}$$

$$f'_l = \frac{1}{2} \rho_s \times ke \times f_{yh} \quad (2.18)$$

II.3.4.2. Cas d'une section rectangulaire

Pour une section rectangulaire la section effectivement confinée est celle obtenue après avoir soustraire toutes les paraboles non confiné.

Pour une parabole la section est de $(\omega'_i)^2/6$.

- (ω'_i) : la distance entre deux armatures longitudinales adjacente.

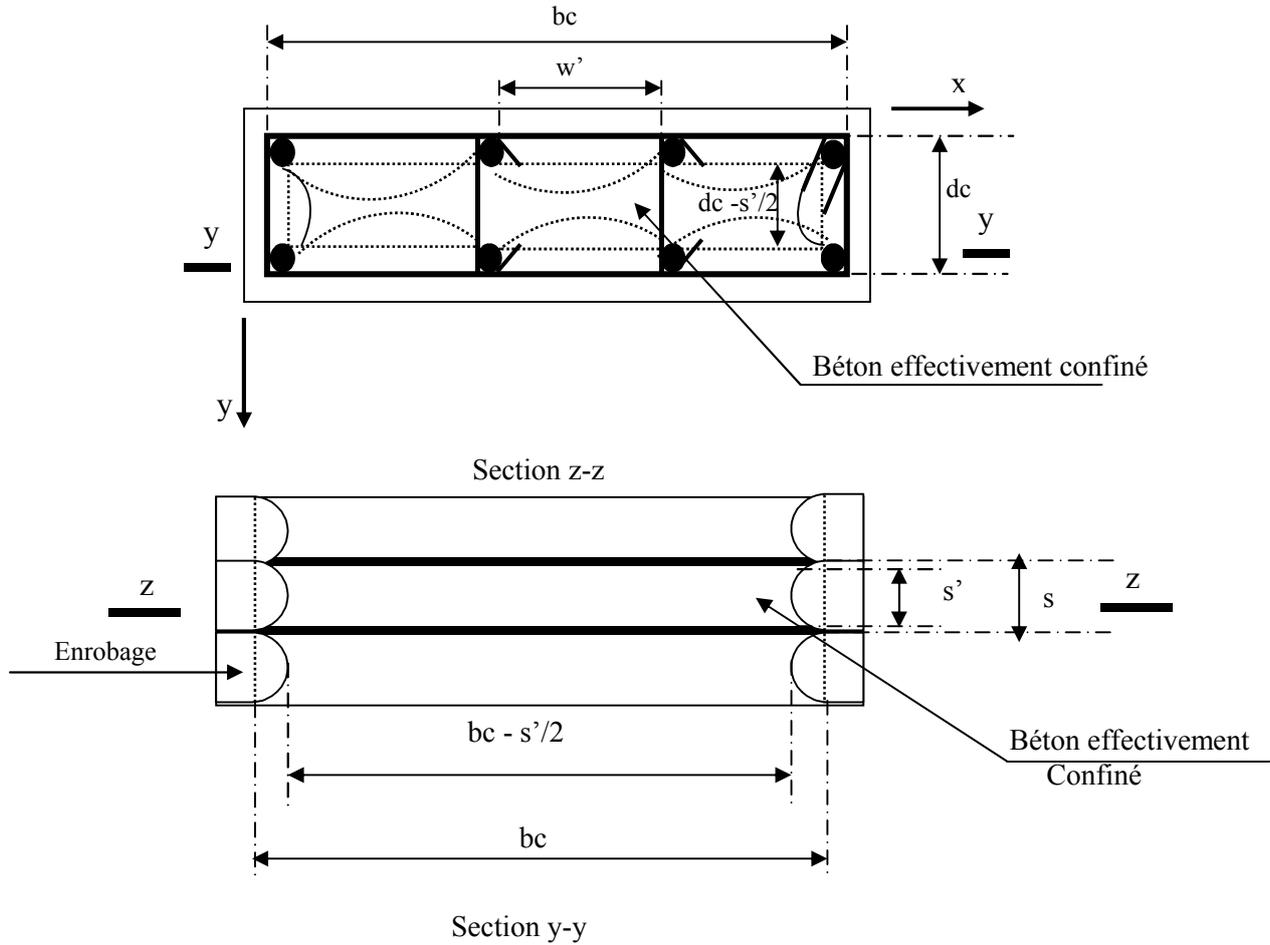


Figure II.18 : béton effectivement confiné (cas d'une section rectangulaire confinée par armatures transversales).

Pour une section de n barres longitudinales la section non confiné à soustraire est :

$$A_i = \sum_{i=1}^n \frac{(\omega'_i)^2}{6} \quad (2.19)$$

$$A_e = \left(bc \times dc - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i)^2}{6} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc} \right) \quad (2.20)$$

$$A_{cc} = bc \times dc (1 - \rho_{cc}) \quad (2.21)$$

$$ke = \frac{A_e}{A_{cc}} = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i)^2}{6 \times bc \times dc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc} \right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc} \right)}{(1 - \rho_{cc})}$$

$$k_e = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(\omega_i')^2}{6 \times bc \times dc}\right) \times \left(1 - \frac{s'}{2bc}\right) \times \left(1 - \frac{s'}{2dc}\right)}{(1 - \rho_{cc})} \quad (2.22)$$

On peut exprimer :

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{s \times dc}$$

$$\rho_y = \frac{A_{sy}}{s \times bc}$$

$$f'_{lx} = \frac{A_{sx}}{s \times dc} f_{yn} = \rho_x \times f_{yh} \quad (2.23)$$

$$f'_{ly} = \frac{A_{sy}}{s \times bc} f_{yn} = \rho_y \times f_{yh} \quad (2.24)$$

On aura :

$$f'_{lx} = k_e \times \rho_x \times f_{yh} \quad (2.25)$$

$$f'_{ly} = k_e \times \rho_y \times f_{yh} \quad (2.26)$$

La distribution de la contrainte de confinement latérale se fait selon un angle de 45°, la valeur de f_l est donnée par :

$$f_{l45} = \frac{f'_{lx} + f'_{ly}}{2}$$

II.3.4.3. Cas d'une section circulaire confinée par tube (CFST :Concrete filled steel tubes)

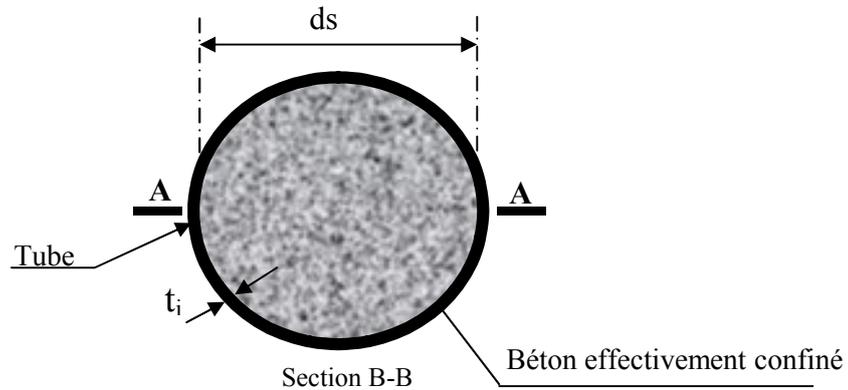


Figure II.19 : béton effectivement confiné (cas d'une section circulaire confinée par tube en acier).

- f'_l : pression de confinement latérale effective.

$$f'_l = f_{le} \times k_e \quad (2.27)$$

- f_{le} : pression latérale du renforcement transversale supposer uniformément distribuée sur la surface du béton.
- k_e : coefficient de confinement effectif.

$$k_e = \frac{A_e}{A_{cc}} \quad (2.28)$$

- A_e : section effectivement confinée.

$$A_e = \frac{\pi}{4} \left(ds - \frac{s'}{2} \right)^2$$

Dans le cas d'un tube l'espace s' , est égale à zéro ($s'=0$), donc :

$$A_e = \pi ds^2 / 4$$

$$- A_{cc} = A_c (1 - \rho_{cc}) \quad (2.29)$$

A_c : section interne comprise entre les spirales

$$A_c = \pi ds^2 / 4$$

- ρ_{cc} : rapport entre la section des armatures longitudinales et la section du béton.

$$\rho_{cc} = A_{sl} / A_c$$

- A_{sl} : section des aciers longitudinaux.

Dans le cas d'un tube la section des aciers longitudinaux, est égale à zéro ($A_{sl}=0$),

Donc : $\rho_{cc}=0$,

D'où : $A_{cc} = A_c$,

Finalement : $k_e = \frac{A_e}{A_c} = 1$,

Et pression de confinement latérale effective : $f'_l = f_{le}$

L'équilibre des forces dans une section donnée est :

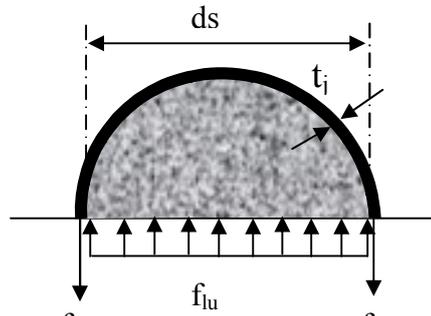


Figure II.20 :L'équilibre des forces dans une section circulaire confinée par tube en acier).

$$2f_{ju} \times t_j = f_{le} \times ds$$

$$f_{le} = \frac{2f_{ju} \times t_j}{ds}$$

- f_{ju} : contrainte limite du tube.
- f_l : contrainte de confinement latérale.
- t_j : épaisseur du tube (voir figure II.11).
- ds : diamètre de la section du béton

Introduisant le pourcentage de confinement ρ_j : rapport entre le volume du tube et le volume du béton confiné.

$$\rho_j = \frac{\pi \times ds \times t_j \times l}{\frac{\pi \times ds^2}{4} \times l}$$

Donc :
$$\rho_j = \frac{4 \times t_j}{ds}$$

D'où :
$$f_{le} = \frac{1}{2} \times \rho_j \times f_{ju}$$

Finalement :
$$f'_l = \frac{1}{2} \times ke \times \rho_j \times f_{ju} = \frac{1}{2} \times \rho_j \times f_{ju} \tag{2.30}$$

II.3.4.4. Modèle

Le modèle de confinement utilisé dans cette étude est celui développé Bouafia, Y. et Iddir, A. et Kachi, M.S. [34-37].

La courbe définissant la relation contrainte –déformation du béton confiné est défini par trois relations (figure II.12) ;

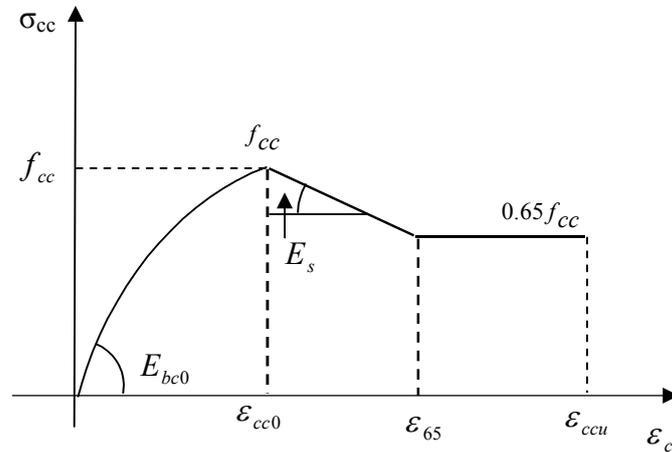


Figure II.21 : Loi de comportement réel du béton en compression

La première partie est une courbe ascendante non linéaire est régie par la loi de Sargin modifiée :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \times \frac{k_c \times \bar{\epsilon}_c + (k'_c - 1) \times \bar{\epsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\epsilon}_c + k'_c \times \bar{\epsilon}_c^2} \quad \text{Pour : } 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cc0} \quad (2.31)$$

Avec :

$$\bar{\epsilon}_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc0}}$$

$$\epsilon_{cc0} = \epsilon_{c0} \times \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right]$$

$$k_c = \frac{E_{b0} \times \epsilon_{cc0}}{f_{cc}}$$

$$E_{bc0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cc}}$$

$$k'_c = k_c - 1$$

Suivie d'une partie descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \quad \text{Pour : } \varepsilon_{cc0} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{65} \quad (2.32)$$

Avec :

$$E_s = \frac{6 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

$$\varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_s} + \varepsilon_{cc}$$

Et la troisième partie est un palier linéaire, la relation contrainte –déformation est donnée par :

$$\sigma_{cc} = 0,65 f_{cc} \quad \text{Pour : } \varepsilon_{65} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{ccu} \quad (2.33)$$

Le béton non armé possède une capacité de déformation à la rupture ε_{cu} très limitée, de l'ordre de 3,5‰. Cette valeur est 14 fois plus petite que la déformation ε_{au} , de l'armature (50‰). La déformation à rupture ε_{cu} est de l'ordre de 2 fois le raccourcissement élastique maximum ε_{c0} du béton. Soit 20 fois moins que celle de l'armature.

ε_{cu} peut être relevé par un facteur de l'ordre de 2 à 4 si le béton est bien confiné par une armature transversale, circonstance qui augmente aussi sa résistance. L'armature de confinement empêche l'expansion transversale du béton (effet Poisson) ; elle est soumise à une pression perpendiculaire à la surface, qui la met en traction (de type « circonférentielle »).

La déformation à la rupture ε_{ccu} d'un béton confiné d'après: L'Eurocode 2 est donnée :

$$\varepsilon_{ccu} = \varepsilon_{cu} + 0,2 f_{c0} / f_l$$

Où, f_l est la contrainte de compression latérale effective due au confinement.

La ductilité du béton est alors de l'ordre de 4 ou plus, mais seulement dans la zone intérieure au confinement ; la zone extérieure à l'armature transversale se désagrège en cas de déformation importante. La déformation à rupture ε_{ccu} , du béton confiné peut être estimée en fonction de l'armature transversale. La contrainte de confinement est l'ordre 1/10 de f_{c0} , par conséquence, et afin de faire participer l'acier jusqu'à sa plastification puis rupture autour de 40‰ en terme de déformation, nous proposons la relation suivante :

$$\varepsilon_{ccu} = 0.4x \frac{f_l}{f_{c0}} + \varepsilon_{cu} = 0.0035 + 0.4x \frac{f_l}{f_{c0}} \quad (2.33 \text{ Bis})$$

II.4. Modélisation des sections

II.4.1. Le béton

Pour mieux approcher le domaine délimité par le contour d'une section transversale de forme quelconque, on définit la section de béton par une succession de tables trapézoïdales. Chaque table est définie par les largeurs des fibres extrêmes b_j , b_{j+1} et les ordonnées de ces fibres y_j , y_{j+1} par rapport à un axe de référence (figure II.13).

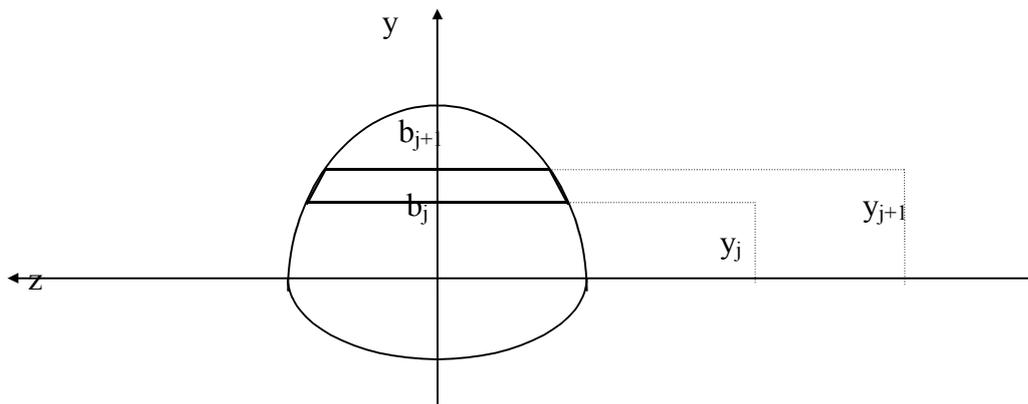


Figure II.22 : Section de béton découpée en tables trapézoïdales.

Le procédé d'intégration étant numérique, il est nécessaire d'exprimer la largeur du trapèze d'ordre j à une cote y par une relation compatible avec le calcul numérique.

$$B(y) = b_j + (b_{j+1} - b_j)(y - y_j) / (y_{j+1} - y_j) \tag{2.34}$$

II.4.2. Les aciers

La section de chaque armature est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini par son ordonnée y_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} .

Les armatures actives sont définies par leur excentricité e_{pk} et leur aire A_{pk} .

n_s : nombre de lit d'armatures passives,

n_p : nombre de câbles de précontrainte.

A la mise en tension, les câbles subissent un allongement initial ϵ_{p0} . L'action de la précontrainte sur la section est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section. Quand le câble est rendu solidaire de la poutre (ancrage, injection de la gaine) il

subit les mêmes variations de déformation que le béton situé au même niveau. Il devient alors un élément résistant, et possède une pré-déformation par rapport à la section.

II.5. Formulation du principe de calcul

La structure réelle est modélisée en une ossature formée par des éléments poutre et des éléments câbles liés aux éléments poutres par des éléments rigides, dont les extrémités constituent l'ensemble des nœuds de la structure.

La structure est supposée soumise à un système de charge instantané. Les charges exercées sont appliquées aux nœuds de la structure.

Le système de charges considéré comporte des charges d'intensité fixe et des charges d'intensité variable proportionnellement à un paramètre α .

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes de α .

Le problème non linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative, basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle on recalcule à chaque étape la matrice de rigidité tangente reliant les accroissements des déplacements aux accroissements des efforts.

Les ancrages des câbles sont des nœuds fixes (glissement nul) et tous les autres nœuds des éléments câble sont identifiés et associés aux éléments câbles de part et d'autre de chaque déviateur où le glissement doit être testé après chaque étape d'équilibre de la structure. La rotation des nœuds des éléments câbles est libre.

Pour un accroissement de chargement extérieur $\{\Delta Q\}$ donné, on construit la matrice rigidité $[K]$ de la structure et le vecteur $\{\Delta P\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles intérieurs. Il contient aussi la variation de la tension, dans les éléments câbles extérieurs, générée par un éventuel glissement de ceux-ci sur les déviateurs.

Pour chaque étape de chargement, le problème consiste à chercher l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ solution du système d'équations non linéaire suivant :

$$\{\Delta Q\} + \{\Delta P\} = [K] \cdot \{\Delta U\} \quad (2.35)$$

La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur $\{\Delta P\}$ sont formés respectivement à partir des matrices $[K_x]$ et des vecteurs $\{\Delta P_x\}$ des différents éléments dans le repère absolu de la structure, compte tenu de l'équilibre des nœuds de la structure.

La matrice de rigidité $[K_x]$ et le vecteur $\{\Delta P_x\}$ de chaque élément de la structure sont calculés en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections transversales le long de l'élément dans un repère dit " intrinsèque " lié à la position déformée de l'élément. La non linéarité géométrique liée à la déformation propre de l'élément est supposée négligeable. Les effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds sont introduits dans le passage du repère intrinsèque au repère local lié à la position initiale de l'élément, sous l'hypothèse des petits déplacements. Le passage au repère global, lié à la structure, est effectué au moyen d'une matrice de rotation T_G qui ne dépend que de l'inclinaison initiale de l'élément.

La recherche de l'équilibre de la structure sous un accroissement du chargement extérieur est effectuée d'abord en admettant que les glissements des câbles extérieurs sur les déviateurs sont nuls. Une fois l'équilibre de la structure acquis, on teste la condition de non glissement sur chaque déviateur. Si cette condition est vérifiée, les résultats obtenus en efforts, déplacements et déformations sont validés, on passe alors à une nouvelle étape de chargement. Une étape de correction sera alors nécessaire pour tenir compte de la modification des tensions dans les câbles due à leur glissement et de leur conséquence sur l'ensemble de la structure. Dans ce cas, le vecteur $\{\Delta Q\}$ de l'équation (2.35) est nul.

A chaque accroissement du chargement $\{\Delta Q\}$ donné, le système d'équation (2.35) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives basée sur les matrices cordes reliant l'accroissement des déplacements des nœuds de la structure à celui du chargement extérieur appliqué (figure 2.14).

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions $\Delta \vec{U}_0 \quad \Delta \vec{U}_1 \quad \dots \quad \Delta \vec{U}_i$; $\Delta \vec{U}_r$ est calculée à partir de $\Delta \vec{U}_{r-1}$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\Delta \vec{Q} + \Delta \vec{P}_{r-1} = [K]_{r-1} \Delta \vec{U}$$

Où $[K]_{r-1}$ représente la matrice de rigidité corde de la structure à l'itération r-1 et $\Delta \vec{P}_{r-1}$ le vecteur tenant compte de l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles intérieurs ou de la surtension des câbles extérieurs résultant du glissement éventuel de ceux-ci sur les déviateurs.

Pour le démarrage de l'algorithme la condition initiale en déplacements est donnée par $\Delta \vec{U}_0 = \vec{0}$.

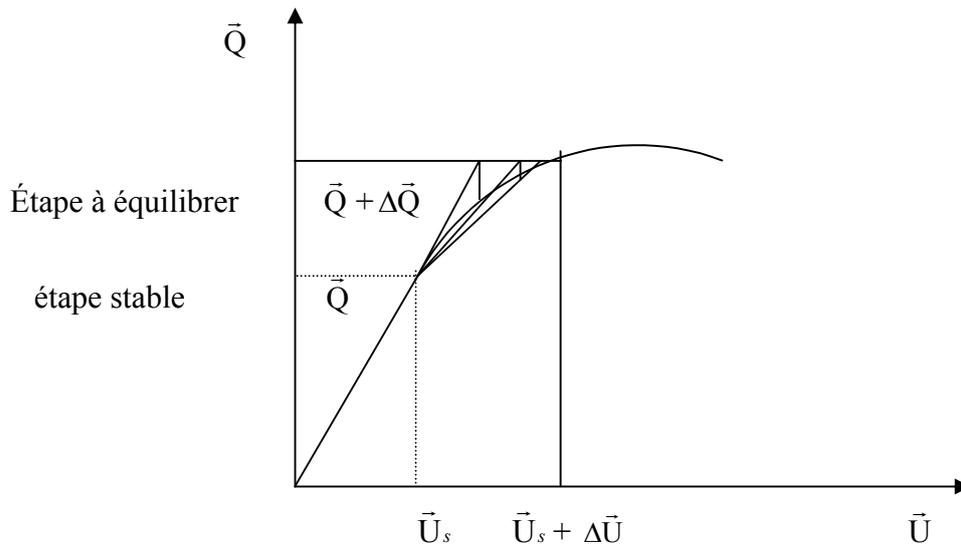


Figure II.23 : Représentation de la méthode de substitution utilisant les matrices cordes.

Le critère de convergence des déplacements est analogue à celui utilisé pour la résolution de l'équilibre d'une section en déformation. Les critères de rupture utilisés sont ceux classiques en flexion composée et ceux de rupture en cisaillement (Ecrasement des bielles de béton, rupture des aciers transversaux).

II.5.1. Séquence de calcul

L'analyse de la structure est effectuée " pas à pas " pour des valeurs croissantes d'un paramètre α . On suppose connu l'état complet de la structure (déplacements, sollicitations, déformations et glissements des câbles extérieurs sur les déviateurs) à l'étape r où le paramètre α vaut α_r .

Soit $\{\Delta P\}$ le vecteur des accroissements des charges extérieures, appliquées aux nœuds, lorsque le paramètre α passe de α_r à α_{r+1}

$$\alpha_{r+1} = \alpha_r + \Delta\alpha .$$

L'organigramme de résolution d'une étape de calcul sous l'accroissement des charges extérieures, sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension et éventuellement aux glissements des éléments câbles sur les déviateurs est le suivant :

1. On suppose connue la valeur des accroissements de déplacements $\{\Delta U\}_0$ des nœuds. Cette valeur est prise égale à $\{0\}$, pour la première itération, ensuite c'est celle fournie par l'itération précédente.

2. Le vecteur $\{\Delta S_N\}$ des accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément est calculé à partir de $\{\Delta U\}_o$. On calcule la valeur des accroissements d'efforts intérieurs $\{\Delta F_N\}$ aux extrémités des éléments, dans leur repère intrinsèque, en utilisant pour chaque élément, la relation (2.94). La valeur de la matrice $[K_N]$ est celle obtenue à l'itération précédente.

3. La connaissance de $\{\Delta F_N\}$ et des déformations $\{\delta\}$ des sections, correspondant à l'étape précédente, nous permet d'étudier l'équilibre des sections. En effet le vecteur des accroissements de sollicitations $\{\Delta F_s\}$ dans une section de calcul est déterminé à partir de $\{\Delta F_N\}$ en utilisant la relation (2.80). L'action éventuelle de la précontrainte sur la section est donnée par les relations (2.59) et (2.60). L'équilibre d'une section est exprimé en résolvant le système non linéaire (2.62) par le procédé itératif (méthode de substitution utilisant les matrices cordes. Cependant, si l'équilibre d'une section n'est pas vérifié, ceci provient du fait d'une rupture de la section, ou du fait que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour aboutir à la convergence du processus itératif. Dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement $\{\Delta P\}$ plus petit.

4. Du fait de l'équilibre des sections, l'accroissement des déformations $\{\Delta \delta\}$ est connu. L'intégration selon la méthode numérique donne la matrice de rigidité $[K_N]$ de chaque élément ainsi que le vecteur ΔP_N .

5. La matrice $[K_U]$ et le vecteur $\{A_U\}$ dans le repère local intermédiaire s'en déduisent par les équations (2.117) et (2.121).

6. La matrice $[K_L]$ et le vecteur $\{A_L\}$ dans le repère local sont ensuite obtenus par les relations (2.119) et (2.120).

7. Le passage à $[K_X]$ et $\{A_X\}$ dans le repère absolu, lié à la structure, est effectué par l'intermédiaire de la matrice de rotation $[RT]$.

8. La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur second membre $\{A\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles sont construits en écrivant l'équilibre des nœuds dans le repère absolu lié à la structure.

9. Les accroissements de déplacement des nœuds de la structure $\{\Delta U\}$ correspondant à l'itération en cours s'obtiennent en résolvant le système (2.35) mentionné plus haut, en tenant compte des conditions aux limites de la structure.

10. Après avoir obtenu l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$, on procède à la vérification de la convergence. Si le test de convergence n'est pas vérifié, le calcul est répété avec la nouvelle valeur $\{\Delta U\}$. Toutefois un défaut de convergence peut apparaître du fait de l'instabilité d'ensemble ou du fait de ce que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence. Dans ce cas ; le calcul est repris avec un pas de chargement plus petit.

11. À la fin de chaque étape on calcul les déformations totales de chaque section, Les efforts totaux $\{F_U\}$ et les déplacements totaux $\{S_U\}$ aux extrémités des éléments dans le repère local, ainsi que les déplacements totaux des nœuds $\{U\}$ et les charges extérieures totales $\{P\}$ dans le repère absolu lié à la structure, en cumulant les accroissements de cette étape avec les valeurs de l'étape précédente.

12. Avant de passer au test de glissement des câbles sur les déviateurs, on effectue une étape de correction des déplacements des nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette opération est indispensable pour le cas des structures sensibles aux effets du second ordre. En effet, lors de la recherche de l'accroissement des déplacements $\{\Delta U\}$ des nœuds, les matrices $[B]$ et $[D]$ exprimant la non-linéarité géométrique, sont gardées constantes pendant l'étape, avec les valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente. Cette procédure a pour effet de sous-estimer l'ensemble des déplacements dus aux effets du second ordre. Pour pallier à ce défaut, on effectue donc une étape de correction dans l'étape en cours, en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictif $\{\Delta P^*\}$ qui est la différence entre les charges réelles $\{P\}$ et les charges $\{P^*\}$ qui sont en équilibre avec les efforts $\{F_x\}$ calculés, compte tenu des déplacements des nœuds $\{U\}$ calculés :

$$\{\Delta P^*\} = \{P\} - \{P^*\}$$

Le vecteur des charges $\{P^*\}$, est obtenu en écrivant, pour chaque nœud, la somme des forces $\{F_x\}$ exercées par le nœud sur les éléments qui le croisent. Toutefois, les réactions d'appuis qui résultent de l'équilibre des nœuds ne sont pas prises en compte dans ce vecteur.

L'algorithme est dispensé de l'étape de correction si la norme euclidienne η_f des efforts est inférieure ou égale à une certaine tolérance T_f choisie à priori :

$$\eta f = \left[\frac{\langle \Delta P^* \rangle \cdot \{ \Delta P \}}{\langle P \rangle \cdot \{ P \}} \right]^{1/2} \langle T_f \rangle$$

Dans le cas où la norme ηf est supérieure à T_f , une étape de correction suffit en général pour obtenir une valeur correcte des déplacements des nœuds.

13. Avant de continuer avec un nouveau pas de chargement extérieur, on vérifie la convergence sur les efforts des éléments câble. Si cette convergence n'est pas respectée, une étape de correction est alors effectuée pour équilibrer la modification des surtensions dans les éléments câbles induite par leur glissement sur les déviateurs et leur conséquence sur l'ensemble de la structure.

Pour cela on introduit le vecteur de surtension des éléments câbles due au glissement $\{ \Delta P^* \}$ défini par :

$$\{ \Delta P^* \} = \{ P \} - \{ P^* \}$$

Où $\{ P \}$ est le vecteur des efforts dans les éléments câble dans l'étape en équilibre et $\{ P^* \}$ le vecteur des efforts dans les éléments câble après leur glissement sur les déviateurs.

Le vecteur $\{ \Delta P^* \}$ est remplacé dans l'équation qui s'écrit :

$$\{ \Delta P^* \} = [K] \{ \Delta U \}$$

14. Après cette étape de correction, on vérifie si ces modifications de surtension des éléments câbles ne produisent pas de nouveaux glissements sur les déviateurs. S'il n'y a pas de nouveaux glissements, on continue l'analyse avec une nouvelle étape de chargement. Si non, on recommence avec la séquence 12 jusqu'à garantir la convergence des efforts.

15. La charge de ruine est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de charge inférieur ou égal à une précision fixée a priori.

II.6. Élément poutre

Les éléments d'une structure sont modélisés par des éléments poutre à six degrés de liberté. La section transversale de ces éléments peut être en béton armé, en béton confiné, en béton précontraint (câbles intérieurs) ou mixte. La figure (II.15) montre une section transversale d'un élément poutre en béton précontraint. Le comportement non linéaire du béton, des armatures passives et des armatures actives, peut être modélisé en discrétisant la

section en une succession de fibres et en adoptant les lois de comportement réelles des matériaux.

La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non-linéaire. Elle est définie dans son repère principal.

La section droite d'un élément est sollicitée en flexion. L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M_z que les sollicitations tangentes dues à un effort tranchant T_y .

II.6.1. Étude d'une section droite

Nous nous intéressons à l'étude d'une section droite d'un élément de poutre en béton armé, en béton confiné et/ou précontraint. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et du comportement élastique non linéaire.

En admettant que les sections restent planes après déformation, que les aciers passifs et les câbles de précontrainte intérieurs après mise en tension, sont parfaitement solidaires au béton, que les aciers passifs et actifs ne reprennent que les efforts axiaux.

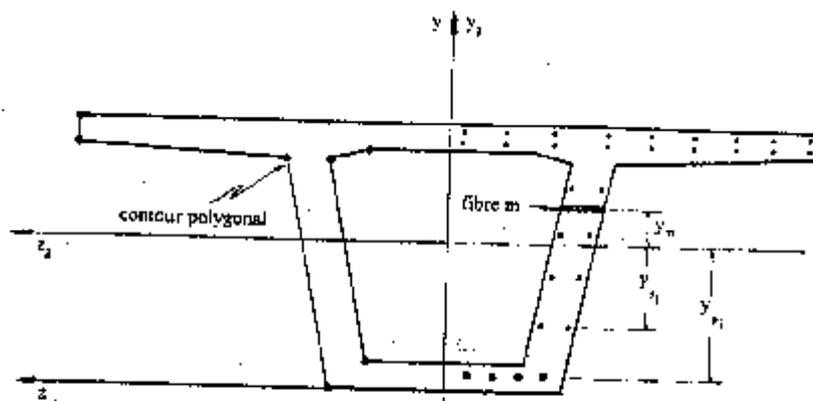


Figure II.24: Description d'une section typique d'une poutre en béton armé et précontraint

L'effet de la précontrainte est introduit en tenant compte du phasage éventuel sur la mise en tension des câbles. A la mise en tension, l'action de la précontrainte, sur la section, est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble, au point où il traverse la section.

Les câbles de précontrainte deviennent des éléments résistants, immédiatement après leur mise en tension, et possédant une pré-déformation par rapport à la section.

Dans le cadre de cette étude, l'analyse non-linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et à un moment de flexion M , agissant dans le plan zy . Que la sollicitation tangente, dans le béton, due à l'effort tranchant T dans le plan zy . On admet que la distorsion due à l'effet de T influe peu sur les déformations normales de la section.

Compte tenu de l'hypothèse des sections planes et de l'adhérence parfaite entre les matériaux constituant la section et on négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations normale de la section, la déformation longitudinale ε comptée positivement dans le sens des raccourcissements en un point courant de la section est donnée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_g + y_m \cdot \phi_z \quad (2.36)$$

Où :

ε_g est l'allongement unitaire au centre de gravité de la section, on désigne par ϕ_z la rotation unitaire de flexion autour de l'axe Gy et y_m l'ordonnée du centre de gravité de la fibre d'ordre m .

La déformation tangente notée, γ_y , désigne la déformation de cisaillement de la section dans le plan xy .

Les déformations normales (ε_g, ϕ_z) peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\vec{\delta}_n$, défini par

$$\vec{\delta}_n = (\varepsilon_g, \phi_z)^T \quad (2.37)$$

De plus, la déformation tangente peut s'écrire sous forme :

$$\vec{\delta}_t = \gamma_y \quad (2.38)$$

Nous notons $\vec{\delta}_n$ le vecteur contenant l'accroissement de déformation de la section droite sous sollicitations normales et $\vec{\Delta\delta}_t$ la déformation de la section droite sous sollicitations tangentes.

$$\vec{\Delta\delta}_n = (\Delta\varepsilon_g, \Delta\phi_z)^T \quad (2.39)$$

$$\Delta \bar{\delta}_t = \Delta \gamma_y \quad (2.40)$$

A une déformation $\bar{\delta}_n$ et $\Delta \bar{\delta}_t$ de la section droite correspond, dans une armature adhérente et inclinée à la section, une déformation ε_{si} , défini par Nait Rabah [53]. Dans l'hypothèse des armatures passives et actives qui ne reprennent que les efforts axiaux son expression est :

$$\varepsilon_{si} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{si}\} \bar{\delta}_n \quad (2.41)$$

où α est l'angle que fait la ligne moyenne du câble avec l'axe Gx normal à la section droite.

Dans le cas d'une armature active, la mise en tension produit sur chaque section de l'élément un effort de compression opposé à l'effort de traction du câble, appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point de passage de celui-ci dans la section. La relation (2.41) doit être corrigée pour tenir compte de la pré-déformation ε_p^* du câble par rapport à la section droite. La déformation ε_p^* dans le câble correspond à l'état de la décompression du béton. Elle exprime la différence entre la déformation du câble et celle de la section, dans la direction du câble, au moment de la mise en tension. La déformation dans l'armature de précontrainte d'ordre i et également définie par Kachi [52] elle s'écrit dans les hypothèses admises dans cette étude sous forme :

$$\varepsilon_{pi} = \cos^2 \alpha_i \{1, y_{pi}\} \bar{\delta}_n + \varepsilon_{pi}^* \quad (2.42)$$

II.6.2. Calcul des sollicitations internes

Les sollicitations normales à la section droite dues aux matériaux constituant la section, peuvent s'écrire sous la forme d'un vecteur \bar{F}_n , défini dans le repère principal Gzy, lié à la section droite par :

$$\bar{F}_n = \begin{Bmatrix} N_m \\ M_m \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} 1 \\ y \end{Bmatrix} \sigma_m \, dydz \quad (2.43)$$

Où :

σ_m est la contrainte normale en un point courant de la section transversale A de l'élément.

La section droite est composée généralement de béton et des armatures passives et actives. On peut écrire comme suit en tenant compte de la contribution de chaque matériau constituant la section:

$$\vec{F}_n = \vec{F}_{nb} + \vec{F}_{ns} + \vec{F}_{np} \quad (2.44)$$

Où \vec{F}_{nb} représente la contribution du béton. Ce vecteur est donné par :

$$\vec{F}_{nb} = \iint_A \left\{ \frac{1}{y_m} \right\} \sigma_m dydz \quad (2.45)$$

La contribution des armatures passives, considérée comme concentrée dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{ns} défini par :

$$\vec{F}_{ns} = \sum_{i=1}^{nsi} \left\{ \frac{1}{y_{si}} \right\} \sigma_{si} A_{si} \quad (2.46)$$

Où σ_{si} est la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature passive d'ordre i, A_{si} la section droite de l'armature et n_{si} le nombre d'armatures passives traversant la section droite.

La contribution des armatures actives, considérées comme concentrées dans leur lit en leur centre de gravité, est donnée par le vecteur \vec{F}_{np} défini par :

$$\vec{F}_{np} = \sum_{i=1}^{npi} \left\{ \frac{1}{y_{pi}} \right\} \sigma_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \quad (2.47)$$

Où :

σ_{pi} étant la contrainte normale au centre de gravité de la section de l'armature active d'ordre i, A_{pi} la section droite de l'armature,

α_i l'angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre i avec l'axe x,

n_{pi} le nombre d'armatures actives traversant la section droite.

La variation des déformations normales notée, $\Delta \vec{\delta}_n$ de la section droite, produit une variation de sollicitations normales dans les matériaux de la section.

La variation des sollicitations normales $\Delta \vec{F}_{nb}$ dans le béton est donnée par :

$$\Delta \bar{F}_{nb} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Où

E_m désigne le Module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton. Il relie l'accroissement de la contrainte normale $\Delta \sigma_m$ à l'accroissement de déformation longitudinale $\Delta \varepsilon_m$ correspondant au point courant.

$$\Delta \sigma_m = E_m \Delta \varepsilon_m \quad (2.49)$$

La section A étant définie comme une succession de couches, les intégrales sur la section sont effectuées dans chaque couche en utilisant la formule de SIMPSON.

La variation de la sollicitation tangente due au béton est calculée en fonction des déformations correspondantes en supposant que le comportement est élastique non linéaire. Elles peuvent s'écrire sous forme :

$$\Delta T_{ym} = [K_{2b}] \Delta \gamma \quad (2.50)$$

Où :

$\{\delta_t\}$ est la déformation de la section sous sollicitations tangentes

$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ est la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xz.

Où le terme $\frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$ constitue le module corde de cisaillement de la section.

En tenant compte des relations (2.44) et (2.46), nous pouvons écrire sous forme matricielle la relation liant les accroissements de déformations dans une section droite, et les accroissements de sollicitations internes développés dans le béton :

$$\Delta \bar{F}_b = \begin{Bmatrix} \Delta \bar{F}_{nb} \\ \Delta T_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1b} & 0 \\ 0^T & K_{2b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Avec
$$K_{1b} = \iint_A E_m \begin{bmatrix} 1 & y_m \\ y_m & y_m^2 \end{bmatrix} dy dz$$

$$\mathbf{o} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$K_{2b} = \frac{\Delta T_b}{\Delta \gamma}$$

La variation des déformations normales $\{\Delta \delta_n\}$ de la section droite produit une variation des sollicitations normales $\{\Delta F_{ns}\}$ dans les armatures passives donnée par :

$$\Delta F_{ns} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Où E_{si} est le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i . Il relie l'accroissement des contraintes à l'accroissement des déformations longitudinales correspondante au niveau du centre de gravité de l'armature.

$$\Delta \sigma_{si} = E_{si} \Delta \varepsilon_{si} \quad (2.53)$$

En négligeant la sollicitation tangente due aux armatures passives, la relation liant les accroissements des déformations aux accroissements des sollicitations internes développées dans les armatures passives s'écrit :

$$\Delta \vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta F_{ns} \\ \Delta T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1s} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

où $[K_{1s}]$ est la matrice symétrique (2x2) définie par :

$$K_{1s} = \sum_1^{ns} E_{si} A_{si} \begin{bmatrix} 1 & y_{si} \\ y_{si} & y_{si}^2 \end{bmatrix}$$

La variation des sollicitations normales à la section droite dues aux armatures de précontrainte adhérentes inclinées et supposées concentrées en leur centre de gravité, elle peut s'écrire sous la forme d'un vecteur ΔF_{np} , en négligeant l'influence de la distorsion sur les déformations longitudinales au niveau de l'armature de précontrainte, comme suit :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \cos \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

L'équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_{np} = K_{1p} \Delta \vec{\delta}_n \quad (2.56)$$

Avec

$$K_{1p} = \sum_1^{ns} E_{pi} A_{pi} \begin{bmatrix} 1 & y_{pi} \\ y_{pi} & y_{pi}^2 \end{bmatrix} \cos \alpha_i$$

La variation des sollicitations tangentes dans l'armature de précontrainte d'ordre i est donnée par :

$$\Delta \vec{F}_{np} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{Bmatrix} 1 & y_{pi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_g \\ \Delta \varphi_z \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

L'équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_{np} = K_{12p} \Delta \vec{\delta}_n \quad (2.58)$$

Avec

$$K_{2p} = \sum_1^{np} E_{pi} A_{pi} \sin \alpha_i \cos \alpha_i^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ y_{pi} \end{Bmatrix}$$

E_{pi} : Module élastique longitudinal de l'armature de précontrainte d'ordre i. Il relie l'accroissement de contrainte $\Delta \sigma_{pi}$ à l'accroissement de déformation $\Delta \varepsilon_{pi}$ au niveau de l'armature d'ordre i :

$$\Delta \sigma_{pi} = E_{pi} \Delta \varepsilon_{pi}$$

La relation matricielle liant les accroissements de déformations de la section aux accroissements de sollicitations internes développées dans les armatures de précontrainte s'écrit:

$$\Delta F_p = \begin{Bmatrix} \Delta F_{np} \\ \Delta F_{tp} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

Avec $0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

II.6.3 Déformation de la section à l'équilibre

La section droite est supposée soumise :

- d'une part aux accroissements d'efforts sollicitant dus aux forces extérieures.

$$\Delta \vec{F}_s = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \\ \Delta T_y \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

- d'autre part à l'action de la précontrainte, lors de la mise en tension des câbles :

$$\vec{P}_s = - \sum_1^{np2} \sigma_{0i} A_{pi} \begin{Bmatrix} \cos \alpha_i \\ y_{pi} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{Bmatrix} \quad (2.61)$$

Où : σ_{0i} est la contrainte initiale dans le câble d'ordre i après pertes instantanées, $np2$ le nombre de câbles de précontraintes traversant la section concernés par la mise en tension

L'équilibre de la section droite se traduit par l'égalité des accroissements d'efforts sollicitants et les accroissements d'efforts internes.

$$\Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s = \Delta \vec{F}_b + \Delta \vec{F}_a + \Delta \vec{F}_p \quad (2.62)$$

Le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension des câbles est non nul. Ces composantes sont définies par la relation (2.43). Après la mise en tension des câbles intérieurs ce vecteur devient nul et ne participe à l'équilibre de la section que si de nouveaux câbles sont mis en tension à une étape de calcul quelconque. Dans le cas où l'en tient compte des effets différés, le vecteur $\Delta \vec{P}_s$ est non nul. Ces composantes sont alors fonction des contraintes et du temps.

La condition d'équilibre de la section, tenant compte des relations (2.48), (2.50) et (2.52), peut être exprimée par la relation :

$$\Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{P}_s = [K_s] \Delta \vec{\delta} \quad (2.63)$$

$[K_s]$: Représente la matrice de rigidité de la section, donnée par :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{1b} + K_{1s} + K_{1p} & 0 \\ K_{2p}^T & K_{2b} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\Delta \vec{\delta} = \begin{Bmatrix} \Delta \delta_n \\ \Delta \gamma_y \end{Bmatrix}$$

Pour un accroissement donné d'efforts sollicitant, la résolution en déformation d'équations (2.55) est itérative. La solution peut s'exprimer par :

$$\Delta \vec{\delta} = [K_s]^{-1} \{ \Delta F_s + \Delta P_s \} \quad (2.65)$$

Où $[K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

II.6.4. Méthode itérative de résolution et critères de convergence

En élasticité non-linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur \vec{F}_s , définit par :

$$\vec{F}_s = (N, M_z, T_y)^T \quad (2.66)$$

On note par $\vec{\delta}_s$, le vecteur de déformation de la section correspondant. Il est donnée par :

$$\vec{\delta}_s = (\varepsilon_g, \phi, \gamma)^T \quad (2.67)$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\Delta\vec{F}_s$, et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\Delta\vec{\delta}_s$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\Delta\vec{\delta}_0, \Delta\vec{\delta}_1, \dots, \Delta\vec{\delta}_i$
 $\Delta\vec{\delta}_i$ étant calculé à partir de $\Delta\vec{\delta}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s = [K_s]_{i-1} \Delta\vec{\delta}_i \quad (2.68)$$

où $[K_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1)

En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\delta}_0 &= \vec{0} \\ \Delta\vec{\delta}_i &= [K_s]_{i-1}^{-1} \{ \Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{P}_s \} \end{aligned} \quad (2.69)$$

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- La limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée a priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta\delta_i - \Delta\delta_{i-1} \rangle \cdot (\{ \Delta\delta \}_i - \{ \Delta\delta \}_{i-1})}{\langle \delta_s + \Delta\delta_i \rangle \cdot (\{ \delta_s \} + \{ \Delta\delta \}_i)} \right]^{1/2} < Tu \quad (2.70)$$

Où $\{ \delta_s \}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence.

II.6.5. Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\Delta\vec{F}_s$ et de l'action due à la précontrainte \vec{P}_s à la mise en tension des câbles.

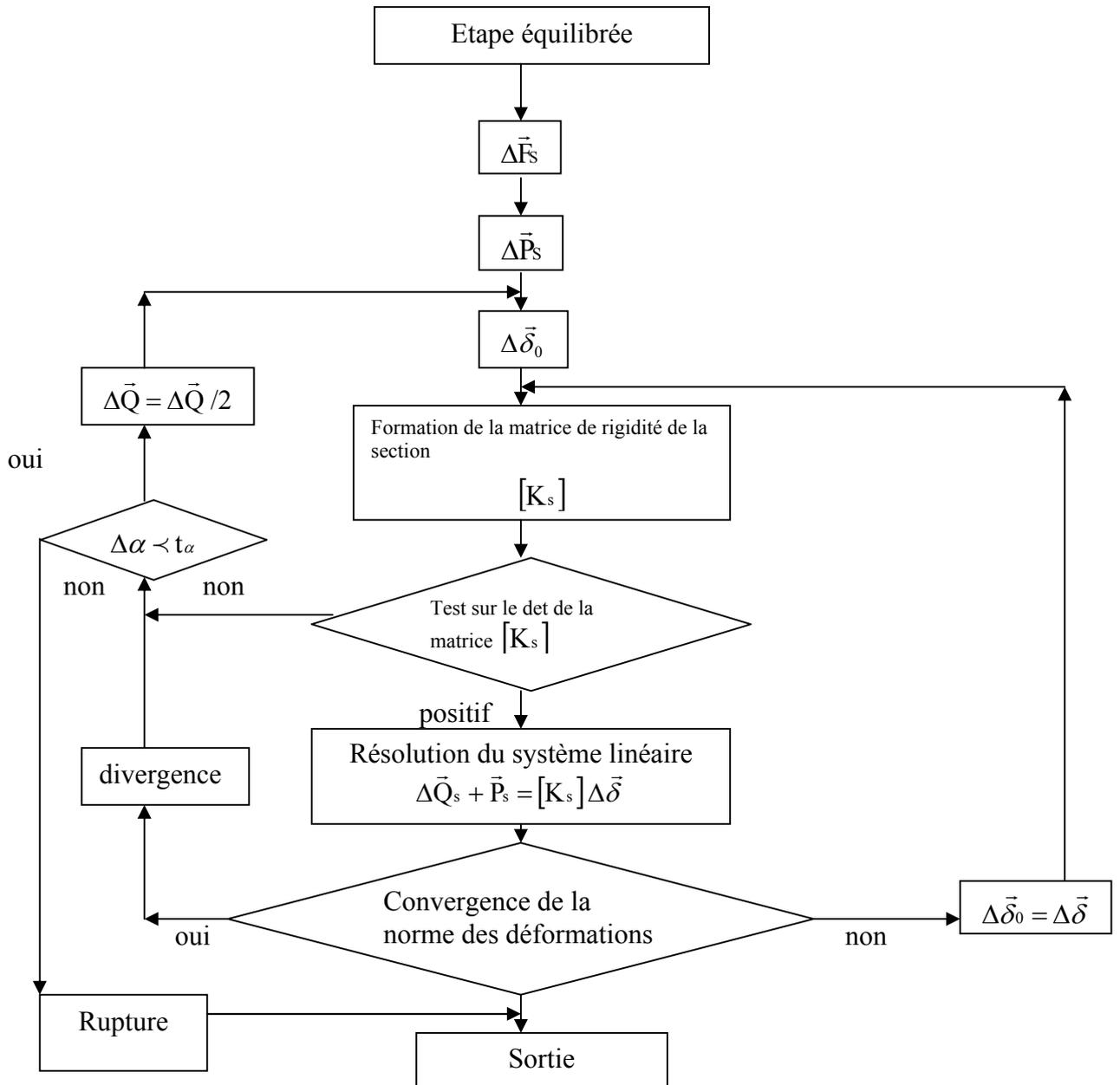


Figure II.25 : Organigramme simplifié de la recherche de l'équilibre de l'état d'équilibre d'une section.

II.6.6. Calcul de la rigidité de cisaillement de la section

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une poutre en béton armé et précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K] \cdot [\Delta U] \tag{2.71}$$

Où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et $[K]$ représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections $[K_s]$.

En élasticité linéaire (module de Young E), l'expression de cette matrice est :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} E.A & 0 & 0 \\ 0 & E.I & 0 \\ 0 & 0 & G.A_1 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Dans laquelle interviennent l'aire A et l'inertie de flexion I de la section, le module transversal $G = E / 2(1+\nu)$ et l'aire réduite A_1 pour l'effort tranchant. En élasticité non linéaire, pour une poutre en béton armé, l'expression qui sera utilisée est :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta N}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta N}{\Delta \delta w} & 0 \\ \frac{\Delta M}{\Delta \delta u} & \frac{\Delta M}{\Delta \delta w} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}} \end{bmatrix}$$

Où ΔN est l'accroissement de l'effort normal de la section, ΔM est l'accroissement du moment fléchissant de la section, $\Delta \delta u$ est l'accroissement de la déformation au niveau centre de gravité de la section et $\Delta \delta w$ est l'accroissement de la rotation différentielle (courbure) de la section.

Ces déformations répondent à l'hypothèse de planéité des sections (Navier-Bernoulli) ; la déformation longitudinale ε_x est une fonction linéaire de l'abscisse transversale y :

$$\varepsilon_x (y) = \delta u + \delta w . y \quad (2.73)$$

ΔV est l'accroissement de l'effort tranchant de la section et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ est l'accroissement de la distorsion **moyenne** de la section.

Dans beaucoup de logiciels de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est soit totalement ignoré - Grelat (1978) - soit pris égal à la valeur $G.A_1$ de l'élasticité linéaire - Nait-Rabah (1990).

Dans cette étude, on adopte le modèle de calcul développé par Kachi et al. [52], [55-60] qui évalue la rigidité à l'effort tranchant de chaque section :

$$\overline{GA}_1 = \frac{\Delta V}{\Delta \gamma_{\text{moy}}}$$

À chaque étape de calcul, sans faire intervenir explicitement un module transversal G .

L'algorithme développé simule le comportement en cisaillement jusqu'à rupture d'une section de poutre en élasticité non linéaire. La rigidité de cisaillement globale de la poutre est obtenue alors à partir de celles des sections par un processus d'intégration numérique. Il permet ainsi d'évaluer la rigidité à l'effort tranchant de la poutre à chaque étape du chargement et les flèches correspondantes.

L'expression adoptée ci-dessus pour $[K_s]$ est déjà une simplification. En effet, les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \delta w$, et entre ΔM et $\Delta \delta u$, sont incontournables dans l'analyse de flexion composée, mais on a supposé que les termes de couplage entre ΔN et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta \delta u$), et entre ΔM et $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ (ou ΔV et $\Delta \delta w$), étaient négligeables. Le couplage entre les déformations dues à V et celles dues à (N, M) évoqué dans l'introduction va se trouver dans la dépendance de $\Delta \gamma_{\text{moy}}$ avec les contraintes et déformations dues à N et M .

Pour les poutres en béton précontraint, la matrice $[K_s]$ est complétée par des termes dus à l'effet de la précontrainte, dans l'équilibre de flexion composée et dans l'équilibre d'une partie de l'effort tranchant par la composante transversale de l'effort des câbles inclinés – Nait-Rabah (1990).

II.6.7. Domaine d'application

L'étude porte sur des poutres assez élancées, soumises à une flexion plane avec effort tranchant. La section transversale est supposée constante par tronçons le long de la poutre. Elle présente une symétrie par rapport à l'axe y , ce qui permet sa décomposition en une succession de couches selon y . Le principe de Saint Venant est supposé applicable en toute section, la contrainte agissant dans le sens transversal y est alors nulle. L'hypothèse de Navier est appliquée aussi en toute section ; on ne peut donc pas traiter des poutres courtes.

Les poutres sont suffisamment armées pour être loin de la fragilité, donc présenter des fissures bien réparties.

II.6.8. Contrainte transversale dans le béton

Kachi et al [52], [55-60] ont montré que la contrainte dans le sens transversale dans le béton est une compression tan disque celle dans les armatures transversales est une traction, l'expression reliant ces deux contrainte s'écrit alors :

$$\sigma_{by} = - \rho_y \sigma_{ay} \quad (2.74)$$

II.7. Principes de la modélisation et équations générales

II.7.1. Milieux continus équivalents

II.7.1. 1. En déformations

Seules les armatures sont réellement continues. On fait l'hypothèse que les déformations moyennes du milieu continu équivalent à l'association du béton fissuré et des armatures sont gouvernées par celles des armatures ε_{ax} et ε_{ay} . Les relations générales entre les déformations moyennes sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta \quad (2.75)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta \quad (2.76)$$

$$\gamma = 2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (2.77)$$

La direction principale D_1 correspond à la plus grande déformation principale (valeur positive = allongement), la direction D_2 à la plus petite. L'angle de D_2 avec l'axe longitudinal x est :

$$\theta = (\vec{GD}_2, \vec{Gx})$$

La direction D_2 est aussi celle des fissures, du moins au début de la fissuration. Lorsque les sollicitations croissent, cette direction peut dévier de celle des fissures initiales, ce qui est physiquement admissible en raison des contraintes de cisaillement transmises par engrenement des lèvres des fissures. Ceci correspond aussi au concept des bielles d'inclinaison variable de l'Eurocode 2 (1992).

Dans les directions particulières x et y, on a :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_x \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{ay} = \varepsilon_y \quad (2.79)$$

II.7.1.2. En contraintes

Le béton doit équilibrer seul les contraintes de cisaillement τ parallèles à x et y (on néglige les contraintes qui seraient équilibrées par l' « effet de goujon » des armatures). On fait l'hypothèse d'un milieu continu équivalent pour le béton seul. Les relations générales entre les contraintes du béton sont donc :

$$\sigma_{bx} = \sigma_{b1} \sin^2 \theta_b + \sigma_{b2} \cos^2 \theta_b \quad (2.80)$$

$$\sigma_{by} = \sigma_{b1} \cos^2 \theta_b + \sigma_{b2} \sin^2 \theta_b \quad (2.81)$$

$$\tau_b = \tau = (\sigma_{b1} - \sigma_{b2}) \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (2.82)$$

On fait de plus l'hypothèse de la coïncidence des directions principales des contraintes du béton avec les directions principales des déformations moyennes :

$$\theta_b = \theta \quad (2.83)$$

II.7.2. Compatibilité partielle des déformations du béton avec les déformations moyennes

On fait l'hypothèse que les déformations du béton dans les directions principales ε_{b1} et ε_{b2} , qui sont liées aux contraintes principales σ_{b1} et σ_{b2} , sont égales aux déformations moyennes principales :

$$\varepsilon_{b1} = \varepsilon_1 \quad (2.84)$$

$$\varepsilon_{b2} = \varepsilon_2 \quad (2.85)$$

Dans la direction D_1 , qui est grosso modo perpendiculaire aux fissures, devraient intervenir les deux termes de déformation propre du béton et d'ouverture des fissures. On contourne la difficulté en faisant intervenir une loi de comportement conventionnelle qui relie la contrainte de traction σ_{b1} à la déformation ε_1 moyenne .

Dans la direction D_2 qui est grosso modo celle des bielles comprimées parallèles aux fissures, on a effectivement continuité du béton.

II.7.3. Equations d'équilibre

II.7.3. 1. Equilibre local des couches

Dans les directions x et y , les contraintes σ_x et σ_y résultent de la somme des termes dus aux armatures et au béton, compte tenu des aires respectives :

$$\sigma_x = \rho_x \sigma_{ax} + \sigma_{bx} \quad (2.86)$$

$$\sigma_y = \rho_y \sigma_{ay} + \sigma_{by} = 0$$

II.7.3. 2. Equilibre global des sections

L'équilibre doit être assuré entre les sollicitations extérieures N , M , V et les résultantes des contraintes internes N_{int} , M_{int} , V_{int} . Pour la flexion composée, on fait la somme des contributions des contraintes longitudinales dans les armatures et dans le béton (ce qui est la traduction de l'équation (2.86)) :

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} \quad (2.87)$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i \quad (2.88)$$

Pour l'effort tranchant, seules les contraintes de cisaillement dans le béton interviennent :

$$V_{int} = \sum_i b_i h_i \tau_{bi} \quad (2.89)$$

II.7.4. Lois de comportement des matériaux

II.7.4.1. Comportement du béton en compression dans la direction D_2

La contrainte principale σ_{b2} est une fonction des deux déformations principales ε_1 et ε_2 :

$$\sigma_{b2} = E_{b2}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \cdot \varepsilon_2 \quad (2.90)$$

On se base sur la relation contrainte-déformation uniaxiale de Sargin proposée à l'annexe 1 des Règles BPEL (1999) [62], qui fait intervenir la résistance f_c et le raccourcissement correspondant ε_{b0} . On la transforme pour traduire le comportement du béton des bielles comprimées selon D_2 et tendu dans la direction D_1 . La résistance est modifiée selon la relation proposée par Vecchio et Collins (1986) [63] en fonction de la déformation ε_1 , mais en bornant le rapport f_{c2}/f_c :

$$\frac{f_{c2}}{f_c} = \frac{1}{0.8 - 0.34 \varepsilon_1 / \varepsilon_{b0}} \quad \text{Avec} \quad 0.7 \leq \frac{f_{c2}}{f_c} \leq 1$$

Pour les faibles valeurs de l'allongement ε_1 on doit retrouver la loi de comportement uniaxiale de compression simple, donc $f_{c2} = f_c$. On fait l'hypothèse que la déformation correspondant à f_{c2} reste égale à ε_{b0} . La loi de comportement est alors :

$$\bar{\sigma} = \frac{k_b \times \bar{\varepsilon} + (k'_b - 1) \times \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \times \bar{\varepsilon} + k'_b \times \bar{\varepsilon}^2} \quad (2.91)$$

Avec : $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_{b0}}$ et $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{b2}}{f_{c2}}$; k_b et k'_b selon Règles BPEL 1999 [62].

Par analogie pour le béton confiné la déformation correspondant à $f_{c2} = f_{cc}$ reste égale à ε_{cc0} .

$$\text{Avec } f_{cc} = f_{c0} \left(-1,254 + 2,254 \sqrt{1 + \frac{7,94 f'_l}{f_{c0}} - \frac{2 f'_l}{f_{c0}}} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{cc0} = \varepsilon_{c0} \times \left[1 + 5 \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right]$$

La loi de comportement du béton confiné est celle proposée par Bouafia, Y. et Iddir, A. et Kachi, M.S. [34], [35], [36], [37].

La première partie est une courbe ascendante non linéaire est régie par la loi de Sargin modifiée :

$$\overline{\sigma_{cc}} = \frac{k_c \times \bar{\varepsilon}_c + (k'_c - 1) \times \bar{\varepsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \times \bar{\varepsilon}_c + k'_c \times \bar{\varepsilon}_c^2} \quad \text{Pour : } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cc0} \quad (2.92)$$

Avec :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cc0}} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma_{cc}} = \frac{\sigma_{b2}}{f_{c2}}$$

$$k_c = \frac{E_{b0} \times \varepsilon_{cc0}}{f_{cc}}$$

$$E_{b0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cc}}$$

$$k'_c = k_c - 1$$

Suivie d'une partie descendante linéaire après le pic (poste pic), la relation est décrite par :

$$\overline{\sigma_{cc}} = f_{cc} - E_s (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc0}) \quad \text{Pour : } \varepsilon_{cc0} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{65} \quad (2.93)$$

Avec :

$$E_s = \frac{6 \times f_{c0}^2}{k_e \times \rho_s \times f_{yh}}$$

$$\varepsilon_{65} = \frac{0.35 \times f_{cc}}{E_s} + \varepsilon_{cc}$$

Et la troisième partie est un palier linéaire, la relation contrainte –déformation est donnée par :

$$\overline{\sigma_{cc}} = 0,65 f_{cc} \quad \text{Pour : } \varepsilon_{65} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{ccu} \quad (2.94)$$

II.7.4.2. Comportement du béton en traction dans la direction D1

La loi contrainte-déformation du béton en traction est linéaire avant la fissuration du béton. Au-delà, la contrainte de traction diminue avec l'augmentation de la déformation moyenne de traction laquelle inclut l'effet de l'ouverture des fissures (figure II.17).

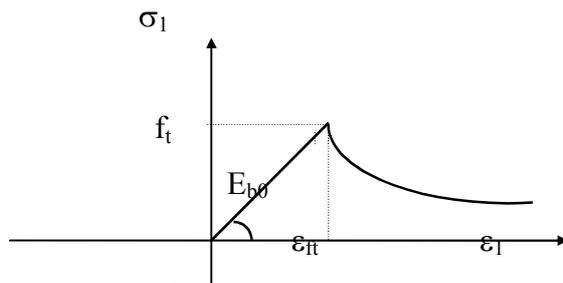


Figure II. 26: Comportement du béton en traction.

Avant fissuration du béton :

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon_{ft} \quad \sigma_1 = E_{b0} \cdot \varepsilon_1 \quad (2.95)$$

Pour décrire la branche décroissante, après fissuration, qui traduit l'influence du béton tendu entre les fissures sur la déformation moyenne, on adopte la relation proposée par Belarbi et Hsu (1994) [64] :

$$\sigma_{b1} = f_t \left(\frac{\varepsilon_{ft}}{\varepsilon_1} \right)^{0,4} \quad (2.95 \text{ bis})$$

Où $\varepsilon_{ft} = \frac{f_t}{E_{b0}}$

f_t est la résistance du béton à la traction et ε_{ft} est la déformation de fissuration du béton.

Contrairement à une idée assez répandue (Grelat 1978, par exemple) la contribution de l'adhérence, donc du béton tendu entre les fissures, ne s'annule jamais totalement (Fouré, 2003) [65]. Par conséquent, cette loi (2.95) couvre l'ensemble du champ des déformations jusqu'à la rupture des armatures. Elle s'applique aussi dans le cas particulier du

comportement uni-axial vis-à-vis des contraintes longitudinales, en remplaçant σ_{bl} par σ_{bx} et ε_1 par ε_x .

II.7.4.3. Comportement de l'acier

Les comportements des aciers passifs et de précontrainte sont caractérisés par les types de relations admises par les règles BPEL 1999 :

$$\text{- armatures longitudinales} \quad \sigma_{ax} = E_a (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x \quad (2.96)$$

$$\text{- armatures transversales} \quad \sigma_{ay} = E_{at} (\varepsilon_y) \cdot \varepsilon_y \quad (2.97)$$

$$\text{- armatures de précontrainte} \quad \sigma_{px} = E_{ap} (\varepsilon_x) \cdot \varepsilon_x \quad (2.98)$$

II.7.5. Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$

Pour calculer la distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur d'une section, on associe à chaque section de calcul une section voisine distante de d . Les contraintes tangentielles sont alors déduites de l'équilibre des couches comprises entre la section de calcul sous l'état de sollicitation (N, M, V) et la section voisine soumise aux efforts (N_1, M_1, V_1) tels que :

$$\begin{aligned} N_1 &= N \\ M_1 &= M - V \cdot d \\ V_1 &= V \end{aligned} \quad (2.99)$$

La distance entre les deux sections est généralement prise égale à $h/6$ (où h est la hauteur totale de la poutre) (Vecchio et Collins, 1988)[66]. Une étude paramétrique permet de constater que la différence entre la valeur de l'effort tranchant extérieur et la résultante des $\tau(y)$ calculée avec cette distance reste inférieure à 1 %, ce qui est négligeable.

Les deux sections sont analysées de façon à satisfaire chacune aux deux équations d'équilibre. En appliquant la méthode classique de la RDM, on étudie l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur une couche d'ordre k présentée à la figure II.18 :

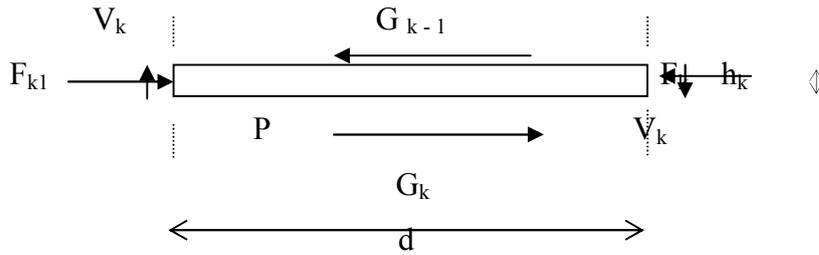


Figure II.27: Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections [55].

Où F_k et F_{k1} désignent les efforts normaux agissant sur la couche k dans les deux sections, G_{k-1} et G_k sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche k et V_k est la part de l'effort tranchant équilibrée par la couche k .

Ces efforts F_k sont déterminés à partir des contraintes normales longitudinales moyennes dans le béton et dans les armatures longitudinales s'il en existe dans la couche. Dans une couche quelconque i , on a :

$$F_i = \sigma_{bxi} b_i h_i + \sigma_{axi} A_{axi}$$

Les efforts horizontaux agissant sur les faces supérieure et inférieure de la couche de béton d'ordre k sont alors calculés comme suit :

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (F_{i1} - F_i)$$

$$G_k = G_{k-1} + F_{k1} - F_k$$

L'équilibre du tronçon permet de calculer la valeur de V_k , en écrivant que le moment des forces est nul au point P :

$$V_k = \frac{(G_{k-1} + G_k) h_k}{2 d}$$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de la couche k est alors donnée par :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{k-1} + G_k)}{2 d b_k} \tag{2.100}$$

II.7.6. Calcul de la distorsion moyenne

La distorsion varie d'une couche de béton à une autre. On définit une distorsion moyenne de la section notée γ_{moy} . Son calcul est effectué en remarquant, d'après le théorème des travaux virtuels, que l'accroissement ΔW_e du travail de l'effort tranchant extérieur est égal à l'accroissement ΔW_i du travail des contraintes tangentielles τ_i . Ces derniers peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta W_e &= \Delta V \cdot \Delta \gamma_{moy} \\ \Delta W_i &= b_i \cdot h_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \Delta \gamma_i\end{aligned}$$

On doit avoir, m étant le nombre des couches de béton :

$$\begin{aligned}\Delta W_e &= \sum_1^m \Delta W_i \\ \text{D'où : } \Delta \gamma_{moy} &= \sum_1^m \frac{\Delta \tau_i \cdot b_i \cdot h_i \cdot \Delta \gamma_i}{\Delta V}\end{aligned}\tag{2.101}$$

II.7.7. Résolution du problème

II.7.7.1. Transformation des équations générales

Pour la résolution du problème on explicite certaines grandeurs à partir des équations générales précédentes. On tire de (2.75) :

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\text{tg}^2 \theta}\tag{2.102}$$

On réécrit aussi les équations (2.80), (2.81) et (2.82) entre les contraintes du béton sous la forme suivante (en tenant compte de (2.83)):

$$\sigma_{b\ x} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} - \sigma_{by}\tag{2.103}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{bx}}{\sigma_{b2} - \sigma_{by}} \right)^{1/2}\tag{2.104}$$

$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} - \frac{\tau}{\text{tg} \theta}\tag{2.105}$$

II.7.7.2. Algorithme et organigramme de calcul

L'étude de l'équilibre d'une couche de béton armé où ε_x et τ sont connus fait appel à un système de 10 équations (2.74) (2.76) (2.77) (2.90) [(2.91) ou (2.92)] (2.93) (2.102) (2.103) (2.104) (2.105) à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, on fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines (équation (2.100)). La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier (2.73), dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N , M selon (2.87) et (2.88), **avec** un couplage à l'effort tranchant V . Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée par (2.101). La première approximation de la distribution des $\tau(y)$ est obtenue à partir de l'équilibre des deux sections voisines en flexion composée **sans** interaction de l'effort tranchant. Après le calcul de l'équilibre des couches, on corrige cette distribution par itérations, le paramètre de contrôle étant la valeur maximale de τ .

La résolution complète au niveau d'une section est décrite par les deux organigrammes ci-joints : l'organigramme général (figure II.19) et le détail de l'étude d'une couche (figure II.20).

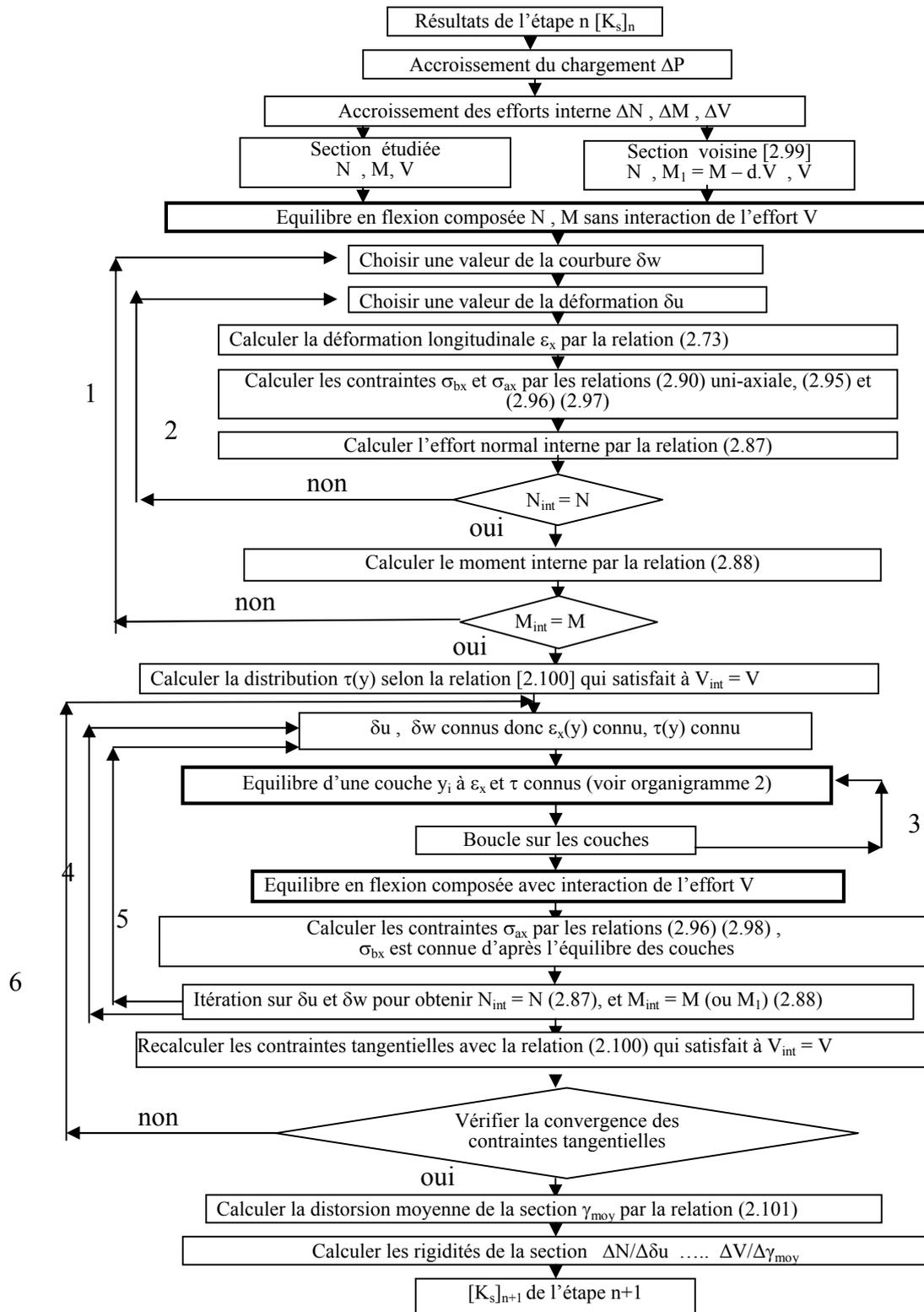


Figure II. 28:Organigramme général de l'étude d'une section.

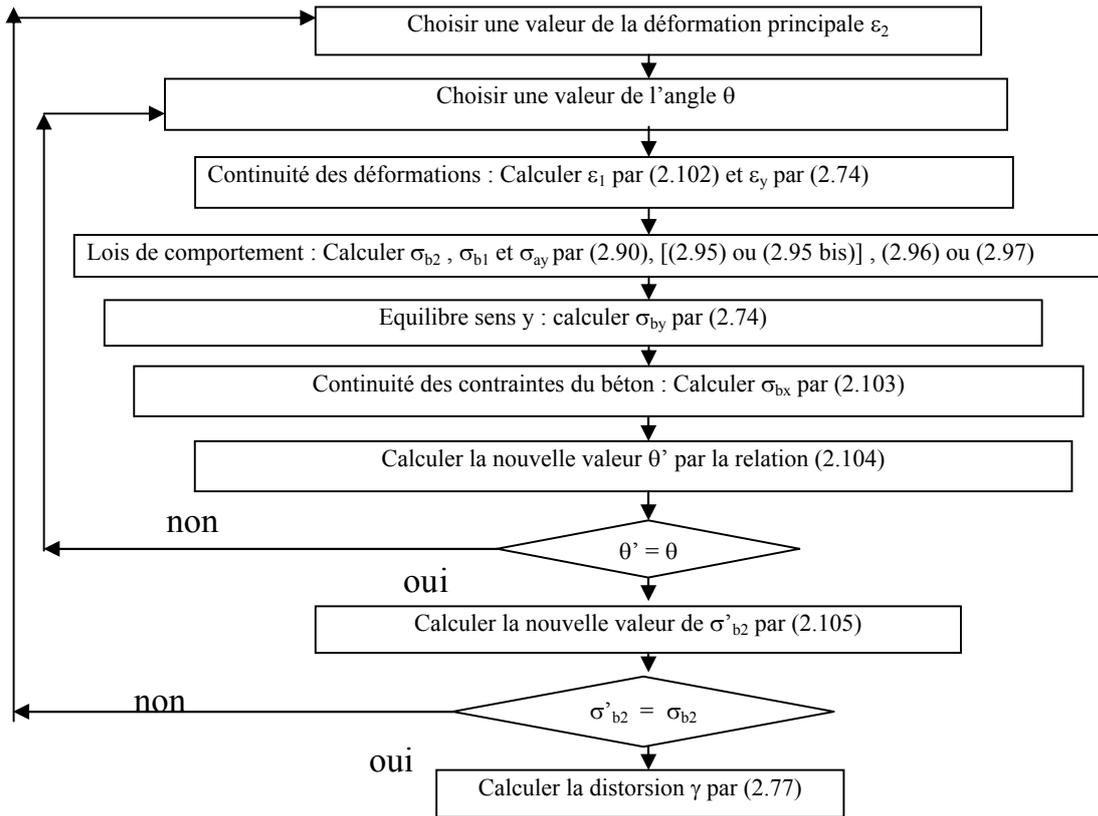


Figure II.29:Equilibre d'une couche à ϵ_x et τ connus.

Dans son état actuel, le logiciel n'effectue pas la vérification de convergence des contraintes tangentielles, c'est-à-dire qu'il n'effectue pas de correction des $\tau(y)$ calculés initialement. L'équilibre de flexion composée est calculé par la méthode classique des sections planes en sollicitations uni-axiales, c'est-à-dire la première partie de l'organigramme 1. Le couplage entre les contraintes normales σ_x et les cisaillements τ n'intervient donc que dans le calcul de l'équilibre des couches, donc dans γ_{moy} (Figure II.21).

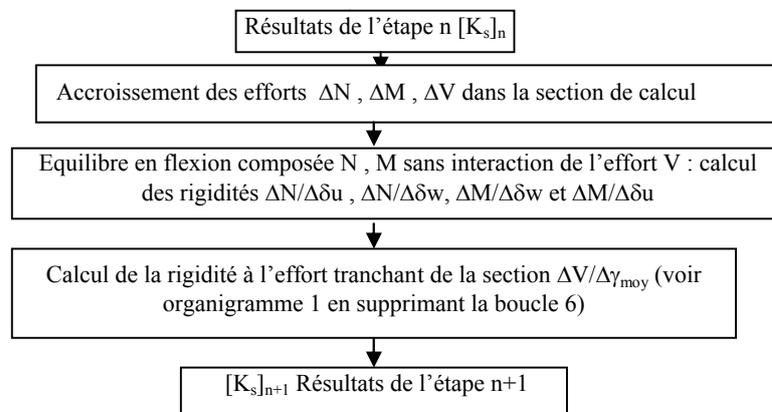


Figure II.30:Organigramme de la méthode simplifiée de calcul d'une section

II.8.Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans son repère intrinsèque

Soit un élément poutre quelconque de la structure de nœud origine I_0 et de nœud extrémité J_0 , et $x_0y_0z_0$ le repère local de référence lié à la position initiale de l'élément (figure II.22). L'origine du système des axes est en I_0

Sous l'action des efforts $F_{ix_0}, F_{iy_0}, M_{iz_0}, F_{jx_0}, F_{jy_0}, M_{jz_0}$, les nœuds se sont déplacés de (u_i, v_i) et (u_j, v_j) dans le repère local.

Pour tenir compte, dans la matrice de rigidité de l'élément, des effets des non-linéarités dues au comportement des matériaux constitutifs et de leur association, et des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds, l'état de déformation de l'élément est défini dans le repère intrinsèque xyz lié à la position déformée de l'élément, dans l'hypothèse des petites déformations, des petits déplacements et en négligeant la déformation propre de l'élément supposé suffisamment court. Les effets du second ordre sont introduits dans le passage du repère intrinsèque xyz au repère $x_0y_0z_0$ défini précédemment.

Soit un élément quelconque chargé en ces extrémités dans son repère intrinsèque lié aux extrémités de cet élément (figures II.22, et II.23). Cet élément est supposé suffisamment court en sorte qu'on puisse négliger les effets de second ordre dus à ses déformations propres dans ce repère.

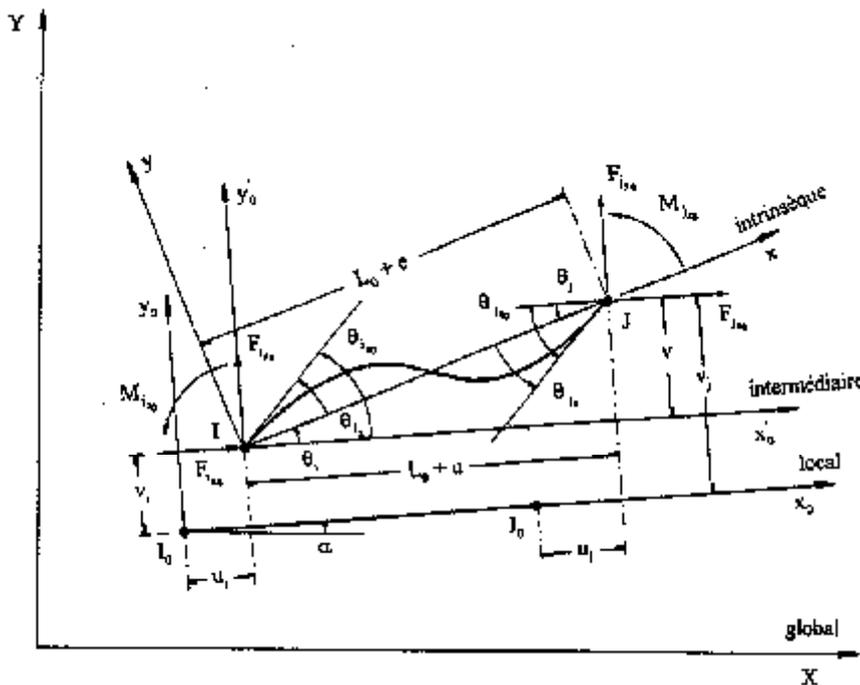


Figure II.31: Repères d'un élément poutre

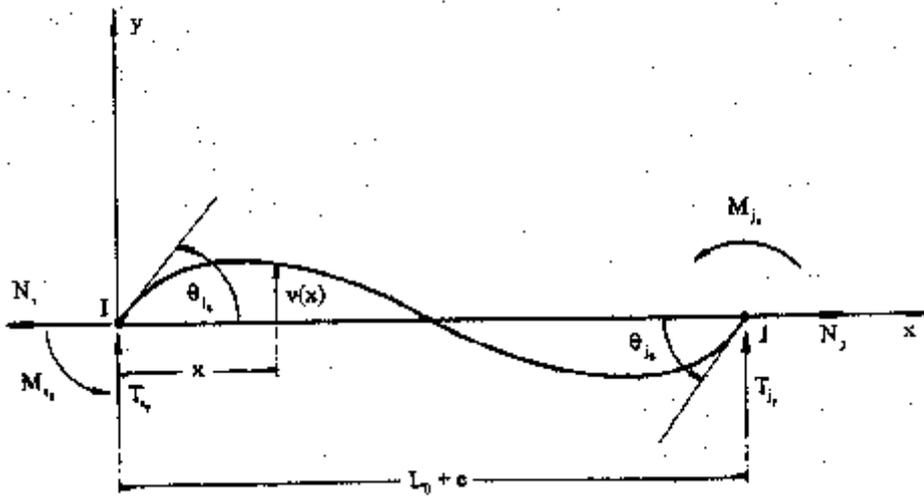


Figure II. 32: Elément poutre déformé.

Le vecteur contenant ces charges, noté \vec{F}_x , est exprimé par :

$$\vec{F}_x = \{N_i \quad T_{iy} \quad M_{iz} \quad N_j \quad T_{jy} \quad M_{jz}\}^T \quad (2.106)$$

Soit \vec{F}_n le vecteur colonne (3x1) contenant les efforts indépendants dans le repère intrinsèque.

$$\vec{F}_n = (N_j, M_{iz}, M_{jz})^T \quad (2.107)$$

La condition d'équilibre de l'élément dans le repère intrinsèque nous permet d'écrire :

$$\vec{F}_x = [T]^T \vec{F}_n \quad (2.108)$$

Avec

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

On désignera par \vec{S}_n le vecteur contenant les déplacements dans ce repère, soit:

$$\vec{S}_n = (e, \theta_{iz}, \theta_{jz})^T \quad (2.110)$$

Où e représente la variation de longueur de l'élément.

$$e = L - L_0$$

D'autre part et compte tenu du fait que l'élément est supposé suffisamment court, pour que les moments dus à l'interaction effort normal-flèche soient négligeables dans le repère intrinsèque, les efforts dans une section d'abscisse x s'écrivent :

$$\begin{aligned} N(x) &= N_j \\ M_z(x) &= x/L M_{jz} - (1-x/L)M_{iz} \\ T_y(x) &= (M_{iz} + M_{jz})/L \end{aligned} \tag{2.111}$$

On peut écrire comme suit sous forme matricielle la relation liant les sollicitations dans une section aux efforts aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque :

$$\vec{F}_s = [L(x)] \cdot \vec{F}_n \tag{2.112}$$

Avec :

$$\vec{F}_s = (N(x), M(x), T(x))^T \tag{2.113}$$

et

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-x/L) & x/L \\ 0 & 1/L & 1/L \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

En négligeant les variations de longueur dans le calcul des variations de sollicitations, on peut écrire, compte tenu de la relation (2.112) :

$$\Delta \vec{F}_s = [L(x)] \cdot \Delta \vec{F}_n \tag{2.115}$$

Le théorème des travaux virtuels nous permet d'écrire :

$$\vec{S}_n = \int_0^L [L(x)]^T \vec{\delta}(x) dx \tag{2.116}$$

Où

$$\vec{\delta}(x) = \begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \varphi_z(x) \\ \gamma_y(x) \end{Bmatrix}$$

En remplaçant ces relations on obtient la matrice de souplesse de l'élément

$[\mathbf{K}_n]^{-1}$ Telle que :

$$\Delta \vec{S}_n = [\vec{\mathbf{K}}_n]^{-1} \Delta \vec{F}_n + \vec{G}_n \quad (2.117)$$

Avec :

$$[\mathbf{K}_n]^{-1} = \int_0^L [\mathbf{L}(x)]^T [\mathbf{K}_s]^{-1} [\mathbf{L}(x)] dx$$

$$\vec{G}_n = \int_0^L [\mathbf{L}(x)] [\mathbf{K}_s]^{-1} \Delta \vec{P}_s dx \quad (2.118)$$

L'intégration est effectuée par la règle de SIMPSON, en considérant pour chaque élément un certain nombre de sections de calcul dans lesquelles les matrices $[\mathbf{K}_s]$ sont déterminées a chaque étape.

Finalement, la relation liant l'accroissement des déplacements et des efforts aux extrémités de l'élément s'écrit :

$$\Delta \vec{F}_n + \vec{P}_n = [\mathbf{K}_n] \Delta \vec{S}_n \quad (2.119)$$

Où $[\mathbf{K}_n]$ est la matrice de rigidité corde de l'élément dans son repère intrinsèque et où \vec{P}_n est donné par :

$$\vec{P}_n = [\mathbf{K}_n] \vec{G}_n \quad (2.120)$$

II.9. Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local

Dans ce paragraphe, on établit la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements

du repère intrinsèque xyz (indice n) au repère local $x_0y_0z_0$ (indice L) lié à la position initiale de l'élément.

Nous noterons $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$ les vecteurs contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local.

$$\vec{F}_L = (F_{x_0}, F_{y_0}, M_{z_0}, F_{jx_0}, F_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (2.121)$$

$$\vec{S}_L = (u_i, v_i, \theta_{izo}, u_j, v_j, \theta_{jzo})^T \quad (2.122)$$

Sous l'action des forces $F_{jx_0}, F_{jy_0}, M_{izo}, M_{jzo}$ les nœuds se sont déplacés de (u_i, v_i) et (u_j, v_j) dans le repère local. Dans une phase intermédiaire de calcul, on utilise un repère intermédiaire du système d'axes $x_0'y_0'z_0'$. Ces vecteurs s'écrivent alors sous la forme :

$$\vec{F}_U = (F_{jx_0}, F_{jy_0}, M_{izo}, M_{jzo})^T \quad (2.123)$$

$$\vec{S}_U = (u, v, \theta_{izo}, \theta_{jzo})^T \quad (2.124)$$

Où :

$$\begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ v &= v_j - v_i \end{aligned} \quad (2.125)$$

La relation liant les déplacements dans ces deux repères est donnée par :

$$\vec{S}_U = [T_0] \cdot \vec{S}_L \quad (2.126)$$

De même les vecteurs efforts sont liés par :

$$\vec{F}_L = [T_0]^T \vec{F}_U \quad (2.127)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

Les déplacements de l'élément dans le repère intrinsèque sont donnés par :

$$\begin{aligned} e &= L - L_0 \\ \theta_{iz} &= \theta_{izo} - \theta \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\theta_{jz} = \theta_{jz0} - \theta$$

$$\theta = \text{Arcsin}(v/L)$$

Avec :
$$L = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2}$$

Le déplacement axial e du nœud J est fonction des déplacements relatifs u et v des nœuds I et J dans le repère intermédiaire. En effet :

$$e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2} - L_0$$

Où :

u et v sont définis par la relation (2.125).

La différenciation des expressions (2.129) permet d'établir la relation entre les accroissements de déplacements nodaux $\Delta\vec{\delta}_n$ dans le repère intrinsèque, et les accroissements des déplacements nodaux $\Delta\vec{\delta}_U$ dans le repère intermédiaire.

$$\Delta\vec{\delta}_n = [B]\Delta\vec{\delta}_U \quad (2.130)$$

Où [B] est la matrice de transformation géométrique qui s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} e_{,u} & e_{,v} & 0 & 0 \\ -\theta_{,u} & -\theta_{,v} & 1 & 0 \\ -\theta_{,u} & -\theta_{,v} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

En ne tenant compte que des termes du premier ordre, dans le développement en séries des dérivées partielles, cette matrice s'écrit alors :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L & 0 & 0 \\ v/L^2 & -1/L_0 + u/L^2 & 1 & 0 \\ v/L^2 & -1/L_0 + u/L^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Selon le théorème des travaux virtuels, le travail virtuel des forces appliquées aux nœuds \vec{F}_n dans le repère intrinsèque dû à un déplacement virtuel $\Delta\vec{S}_n$ est égal au travail des forces appliquées aux nœuds \vec{F}_U du à un déplacement $\Delta\vec{S}_U$, dans le repère local, c'est à dire :

$$\vec{F}_n^T \Delta\vec{S}_n = \vec{F}_U^T \Delta\vec{S}_U \quad (2.133)$$

Compte tenu de la relation (2.120), nous pouvons écrire :

$$\vec{F}_n [B] \delta\vec{S}_U = \vec{F}_U^T \delta\vec{S}_U \quad (2.134)$$

La variation de $\Delta\vec{S}_n$ est arbitraire, d'où :

$$\vec{F}_U = [B]^T \vec{F}_n \quad (2.135)$$

La différenciation de l'équation (2.135) nous conduit à :

$$\Delta\vec{F}_U = [B]^T \Delta\vec{F}_n + \Delta[B]^T \vec{F}_n \quad (2.136)$$

Compte tenu des relations (2.130) et (2.120), nous avons :

$$\Delta\vec{F}_U + \vec{P}_U = [B]^T [K_n][B] \Delta\vec{S}_U + \Delta[B]^T \vec{F}_n \quad (2.137)$$

Où \vec{P}_U est le vecteur contenant l'action de la précontrainte à la mise en tension dans le repère intermédiaire. Il est donné par :

$$\vec{P}_U = [B]^T \vec{P}_n \quad (2.138)$$

D'autre part, les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles des fonctions e et θ , qui sont fonction des déplacements relatifs u et v des nœuds I et J respectivement. On a alors :

$$\Delta[B]^T = [B]_{u}^T \Delta u + [B]_{v}^T \Delta v \quad (2.139)$$

On peut donc écrire :

$$\Delta[B]^T \vec{F}_h = [D] \Delta \vec{S}_U \quad (2.140)$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Avec :

$$\begin{aligned} d_{11} &= N_j e_{,uu} - (M_{iz} + M_{jz}) \theta_{,uu} \\ d_{12} &= d_{21} = N_j e_{,uv} - (M_{iz} + M_{jz}) \theta_{,uv} \\ d_{22} &= N_j e_{,vv} - (M_{iz} + M_{jz}) \theta_{,vv} \end{aligned} \quad (2.142)$$

En ne tenant compte que des termes du premier ordre dans le développement des termes de la matrice $[D]$ on obtient :

$$\begin{aligned} d_{11} &= -2 v (M_{iz} + M_{jz}) / L_0^3 \\ d_{12} &= d_{21} = -v N_j / L_0^2 - (2u - L_0) (M_{iz} + M_{jz}) / L_0^3 \\ d_{22} &= (L_0 - u) N_j / L_0^2 + 2 v (M_{iz} + M_{jz}) / L_0^3 \end{aligned} \quad (2.143)$$

L'équation (2.138) nous permet d'exprimer les efforts appliqués aux nœuds de l'élément dans le repère intrinsèque en fonction des efforts appliqués aux extrémités de l'élément dans le repère intermédiaire. En effet :

$$\begin{Bmatrix} F_{jx_0} \\ F_{jy_0} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} N_j \\ -(M_{iz} + M_{jz}) / L_0 \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -v / L_0 \\ v / L_0 & 1 - u / L_0 \end{bmatrix}$$

On a également

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ -(M_{iz} + M_{jz}) / L_0 \end{Bmatrix} = [C]^{-1} \begin{Bmatrix} F_{jxo} \\ F_{jyo} \end{Bmatrix}$$

Si bien que finalement

$$\begin{Bmatrix} N_j \\ -(M_{iz} + M_{jz}) / L_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 (L_0 - u) / B_1 & v L_0 / B_1 \\ -v L_0 / B_1 & L_0^2 / B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{jxo} \\ F_{jyo} \end{Bmatrix}$$

Avec

$$B_1 = L_0^2 - u L_0 + v^2$$

Alors les termes de la matrice [D] deviennent :

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 v^2 / L_0 B_1 & 2 v / B_1 \\ u v / L_0 B_1 & B_2 / L_0 B_1 \\ B_3 / L_0 B_1 & -(v L_0 + u v) / L_0 B_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{jxo} \\ F_{jyo} \end{Bmatrix}$$

Avec

$$d_{12} = d_{21}$$

$$B_2 = -L_0^2 + 2 u L_0 - v^2$$

$$B_3 = (L_0 - u)^2 + 2 v^2$$

Si on néglige les termes non linéaires en v et la contribution du déplacement longitudinal, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 v / L_0^2 \\ 0 & -1 / L_0 \\ 1 / L_0 & -v / L_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{jxo} \\ F_{jyo} \end{Bmatrix} \quad (2.144)$$

Et par conséquent l'équation (2.127) peut s'écrire :

$$\Delta \vec{F}_U + \vec{P}_U = [B]^T \Delta \vec{F}_n + [D] \Delta \vec{S}_U \quad (2.145)$$

En remplaçant les équations (2.119) et (2.130) dans l'équation (2.145), on obtient la relation liant les accroissements des efforts à ceux des déplacements dans le repère intermédiaire. Son expression est alors :

$$\Delta \vec{F}_U + \vec{P}_U = ([B]^T [K_n][B] + [D]) \Delta \vec{S}_U \quad (2.146)$$

Finalement, en substituant les équations (2.119), (2.126) et (2.127) dans l'équation (2.146), on arrive à l'expression liant les accroissements des efforts et des déplacements des nœuds de l'élément dans son repère local, lié à sa position initiale, qui fait intervenir la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local notée $[K_L]$ sous la forme :

$$\Delta \vec{F}_L + \vec{P}_L = [K_L] \Delta \vec{S}_L \quad (2.147)$$

L'expression de la matrice de rigidité de l'élément dans son repère local est donnée par :

$$[K_L] = [T_o]^T ([B]^T [K_n][B] + [D])[T_o] \quad (2.148)$$

Et

$$\vec{P}_L = [T_o]^T [B]^T \vec{P}_n \quad (2.149)$$

II.10. Expression de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère global lié à la structure

La matrice de rigidité de la structure, notée $[R]$, est formée à partir des matrices de rigidité des éléments définissant la structure dans le repère global lié à la structure XYZ. Pour permettre l'assemblage de la matrice de rigidité de la structure, il est nécessaire de former les matrices de rigidité des différents éléments dans le repère global.

On notera \vec{F}_G le vecteur contenant les efforts appliqués aux extrémités d'un élément, et \vec{S}_G celui contenant les déplacements des nœuds dans le repère global XYZ (indice G). On a :

$$\vec{F}_G = \{F_{ix} \ F_{iy} \ M_{iz} \ F_{jx} \ F_{jy} \ M_{jz}\} \quad (2.150)$$

$$\vec{S}_G = \{U_i \ V_i \ \Theta_{iz} \ U_j \ V_j \ \Theta_{jz}\} \quad (2.151)$$

La relation liant ces grandeurs (et leur accroissement) dans les deux systèmes s'obtient au moyen d'une matrice de rotation $[T_G]$ dont les termes ne dépendent que de l'orientation initiale des éléments. La relation liant les déplacements des nœuds dans le repère local et les déplacements des nœuds dans le repère global s'écrit :

$$\vec{S}_L = [T_G] \vec{S}_G \quad (2.152)$$

De même celle liant les efforts s'écrit :

$$\vec{F}_G = [T_G]^T \vec{F}_L \quad (2.153)$$

Avec

$$[T_G] = \begin{bmatrix} r_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_0 \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Où

$$r_0 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

L'équation (2.147) s'écrit alors en faisant intervenir la matrice de rigidité dans le repère global :

$$\Delta \vec{F}_G + \vec{P}_G = [K_G] \Delta \vec{S}_G \quad (2.156)$$

Avec

$$[K_G] = [T_G]^T [K_L] [T_G] \quad (2.157)$$

$$\vec{P}_G = [T_G]^T \vec{P}_L \quad (2.158)$$

Où $[K_G]$ représente la matrice de rigidité de l'élément dans le repère global lié à la structure XYZ.

II.11. Expression des accroissements des efforts en fonction des accroissements des déplacements dans le repère global

La relation liant les accroissements des efforts à ceux des déplacements dans le repère global, lié à la structure, s'obtient au moyen de la matrice de rotation T_{G1} définie par :

$$T_{G1} = \begin{bmatrix} r_{01} & 0 \\ 0 & r_{01} \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

Où

$$r_{01} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Finalement, l'équation d'équilibre de l'élément câble, dans le repère global lié à la structure s'écrit :

$$\Delta \vec{F}_G + \Delta \vec{P}_G = K_{G1} \Delta \vec{S}_G \quad (2.161)$$

Avec

$$\begin{aligned} K_{G1} &= T_{G1}^T K_{L1} T_{G1} \\ \Delta \vec{P}_G &= T_{G1}^T \Delta \vec{P}_L \end{aligned} \quad (2.162)$$

II.12. Conclusion

Une méthode de calcul des éléments de section circulaire est développée dans ce chapitre en y introduisant différentes formes de confinement interne et externe. L'étude est menée en élasticité non linéaire, il est tenu compte du comportement non linéaire des différents matériaux constituant la section transversale. Le confinement du béton est introduit par le biais d'une loi de comportement également non linéaire, du béton confiné et du béton armé confiné tenant compte du niveau de confinement, du type de confinement et de l'ensemble des sollicitations (effort normal, moment fléchissant et effort tranchant). Enfin, la méthode de calcul est injectée dans un logiciel de calcul non linéaire des éléments de structures afin d'étudier la contribution et l'influence du confinement du béton sur le comportement global des éléments de structures de section circulaire. Les résultats de la confrontation feront l'objet du chapitre III.

CHAPITRE III

APPLICATION DU MODELE ET CONFRONTATION DES RESULTATS

III.1. Applications et confrontations dans le cas des sections en béton armé

III.1.1. cas des sections circulaires

Cette application est effectuée sur une série d'essais effectués par J .B. Mander et al. [23-24] dont les propriétés des sections d'étude et des données expérimentales sont résumées dans le tableau III.1:

Tableau III.1:Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton.

<i>N° Essai</i>	f_{c0} (MPa)	d_s (cm)	s (cm)	A_{sl} (cm ²)	A_{sp} (cm ²)	ρ_s (%)
1	29	43 ,8	4,1	24,12	1,13	2,5
2	29	43 ,8	6,9	24,12	1,13	1,5
3	29	43 ,8	10,3	24,12	1,13	1,0
4	29	44,0	11,9	24,12	0,79	0,6
5	29	44,0	3,6	24,12	0,79	2,0
6	29	43,4	9,3	24,12	2,01	2,0
7	32	43 ,8	5,2	49,24	1,13	1,98
8	30	43 ,8	5,2	49,74	1,13	1,98
9	32	43 ,8	5,2	50,24	1,13	1,98
10	30	43 ,8	5,2	48,23	1,13	1,98

Les confrontations des courbes obtenues par le modèle et les courbes expérimentales proposées par J .B.Mander et al. [23-24] pour le cas d'une section circulaire sont représentées sur les figures suivantes :

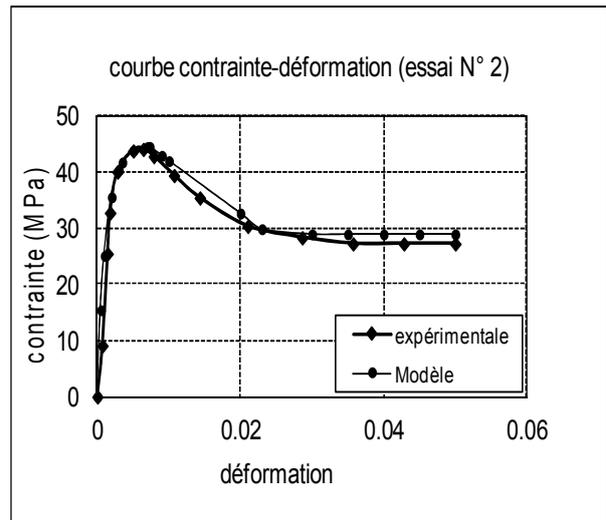
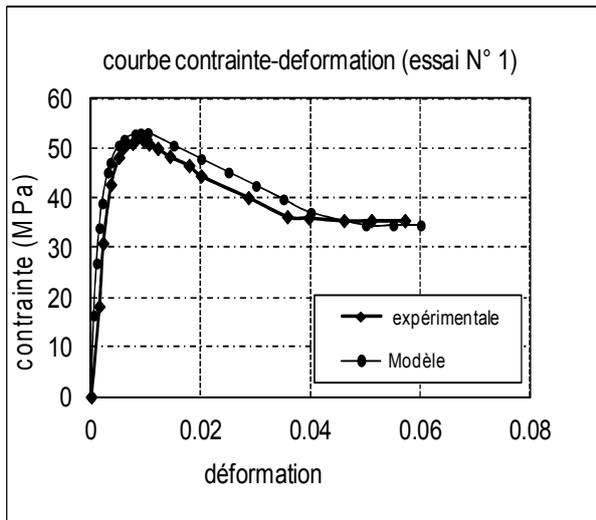


Figure III.33: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N° 1 et essais N°2)

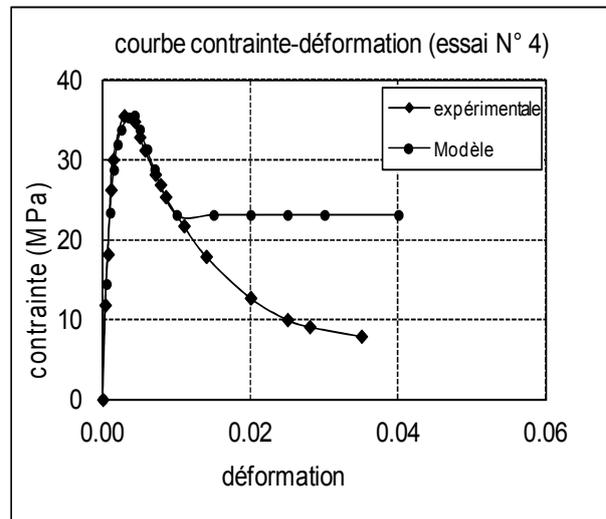
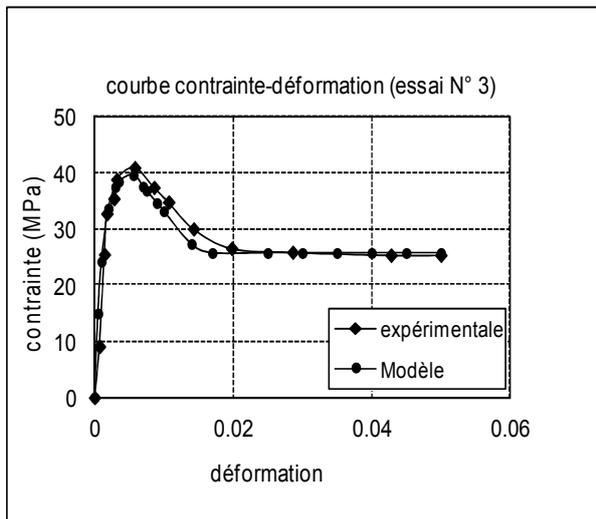


Figure III. 34: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N° 3 et essais N°4)

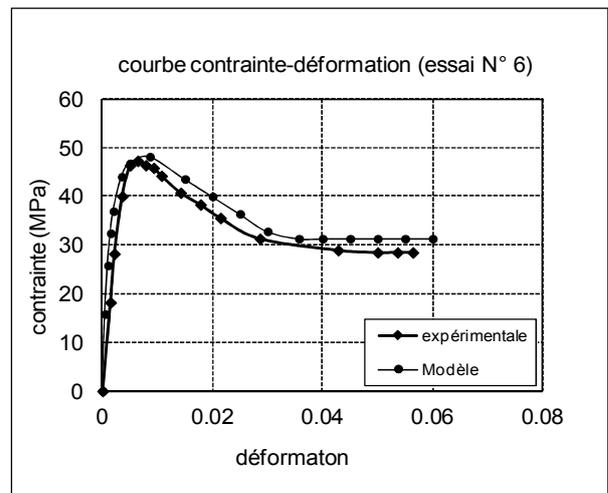
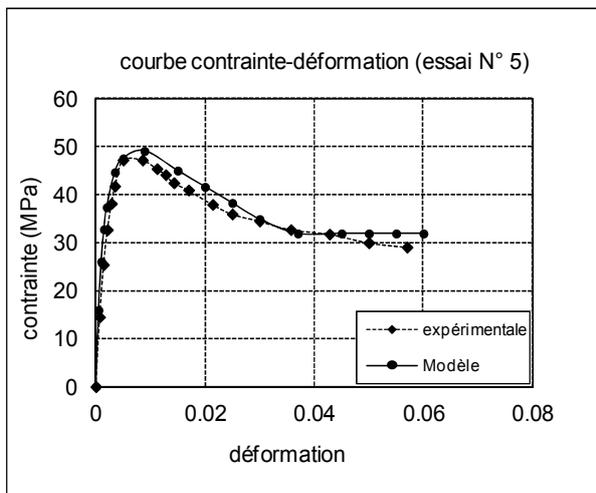


Figure III. 35 : Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N° 5 et essais N°6)

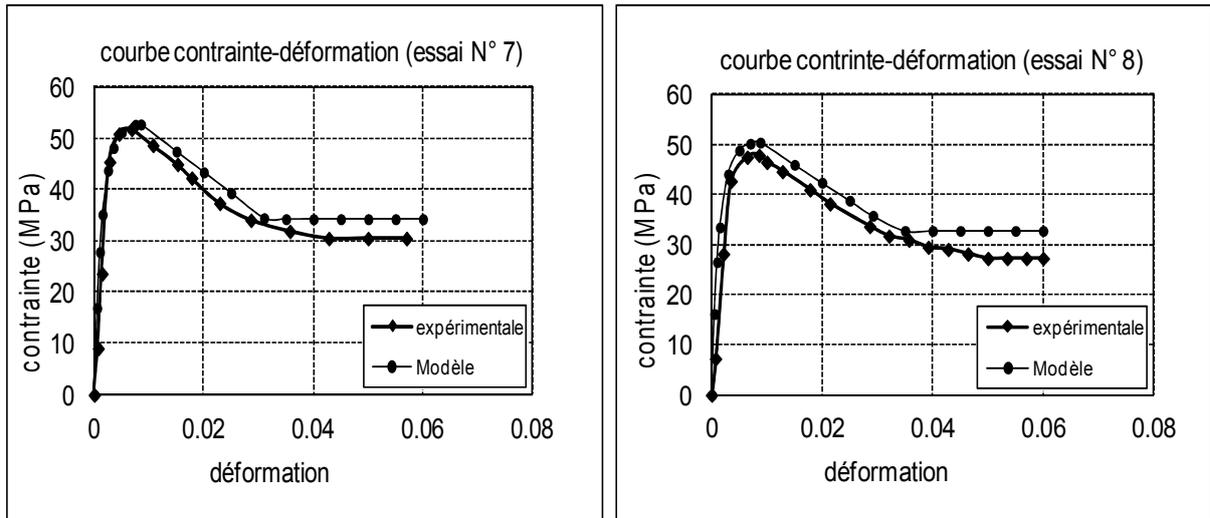


Figure III.36: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N° 7 et essais N°8)

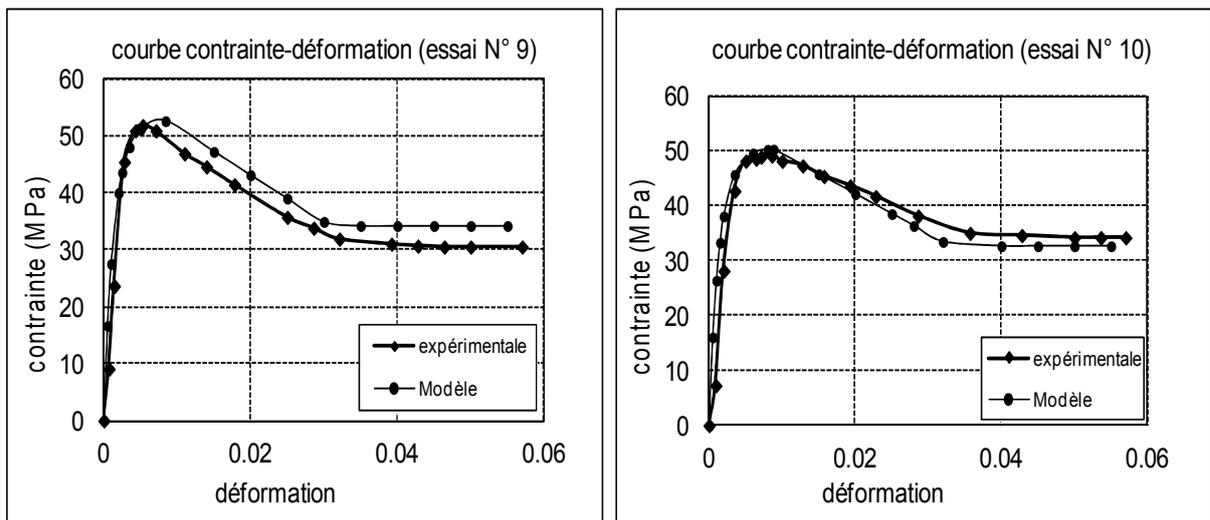


Figure III.37: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N° 9 et essais N°10)

Remarque

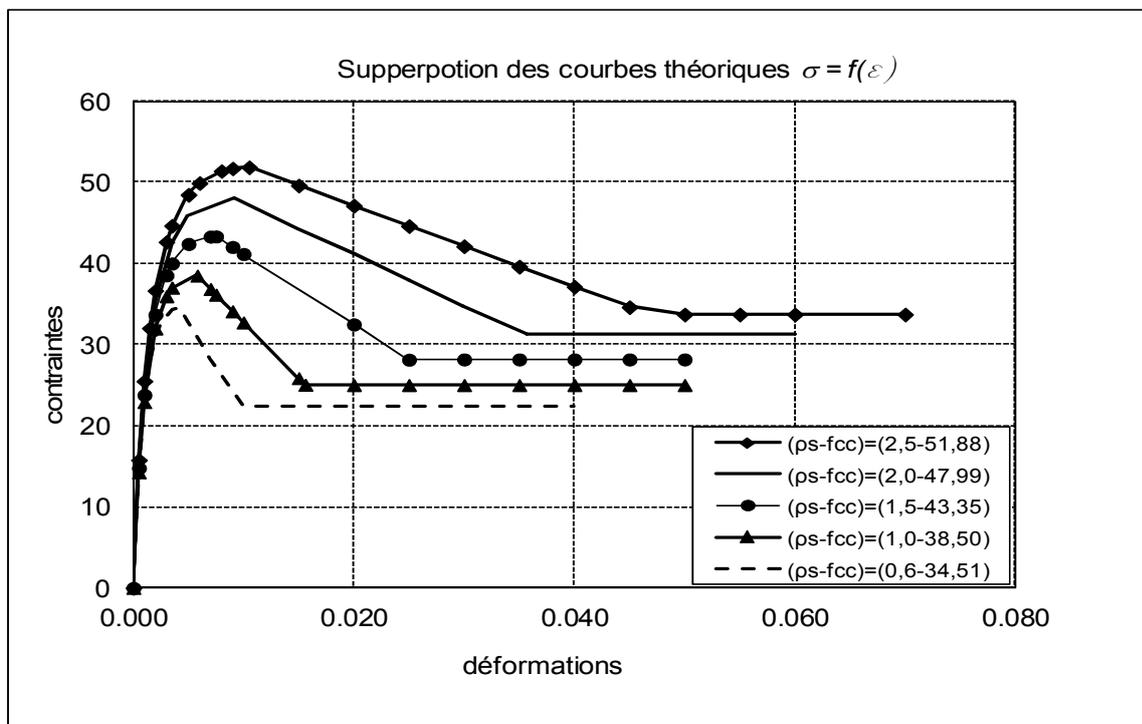
On remarque que les courbes calculées à l’aide du modèle actuel sont proches des courbes expérimentales : le modèle est assez représentatif. Il faut noter que, dans le cas des sections étudiées, le pourcentage d’acier de confinement varie de 0,6 à 2,5 %.

Le tableau III.2 résume les résultats de calcul de la résistance à la compression des sections circulaires des essais menés par J .B.Mander et al. [23-24] en fonction du pourcentage de confinement.

Tableau III.2: Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton.

N° Essai	1	2	3	4	5
ρ_s (%)	2,5	1,5	1,0	0,6	2,0
f_{cc} (MPa)	51,88	43,35	38,50	34,51	47,99

La figure III.6 nous montre la superposition des courbes calculées par le modèle proposé en termes de contrainte-déformation des sections circulaires des essais menés par J .B.Mander et al. [23-24] .On remarque que la contrainte maximale est proportionnelle au pourcentage de confinement.

Figure III.38 : Superpositions des courbes théoriques $\sigma = f(\varepsilon)$

On observe clairement que les courbes de comportement se superposent graduellement avec le pourcentage de confinement ainsi que la contrainte maximale et la déformation à la rupture .Ce qui signifie que le comportement des sections est proportionnel au pourcentage de confinement.

III.1.2. cas d'une section rectangulaire

Les données expérimentales et propriétés des sections rectangulaires d'étude sont résumées dans le tableau III.3 :

Tableau III.3: Caractéristiques des données expérimentales des sections rectangulaires en béton.

N° essais	f_{c0} MPa	A_{sl} cm ²	A_{sp2} cm ²	dc cm	bc cm	w cm	s cm	s' cm	ρ_{cc}	ρ_{sy}	ρ_s (%)
1	26	18,09	0,28	9,40	7,74	2,50	1,90	0,0229	0,0238	0,0139	3,77
2	29	18,09	0,28	9,40	7,74	2,50	1,90	0,0229	0,0238	0,0139	3,77
3	26	18,09	0,28	9,40	7,74	5,00	4,40	0,0229	0,0119	0,0122	2,41
4	26	18,09	0,28	9,40	7,74	2,50	1,90	0,0229	0,0238	0,0139	3,77
10	43	32,15	0,28	9,00	7,28	2,50	1,90	0,0558	0,0249	0,0140	3,89
11	43	32,15	0,28	9,40	7,28	5,00	4,40	0,0531	0,0119	0,0122	2,41
12	43	32,15	0,79	9,00	7,17	4,20	3,20	0,0558	0,0418	0,0235	6,53
13	43	11,30	0,79	9,00	14,50	3,00	2,00	0,0196	0,0558	0,0206	7,91

Les confrontations des courbes obtenues par le modèle et les courbes expérimentales proposées par J.B.Mander et al. Pour le cas d'une section rectangulaire sont représentées sur les figures suivantes :

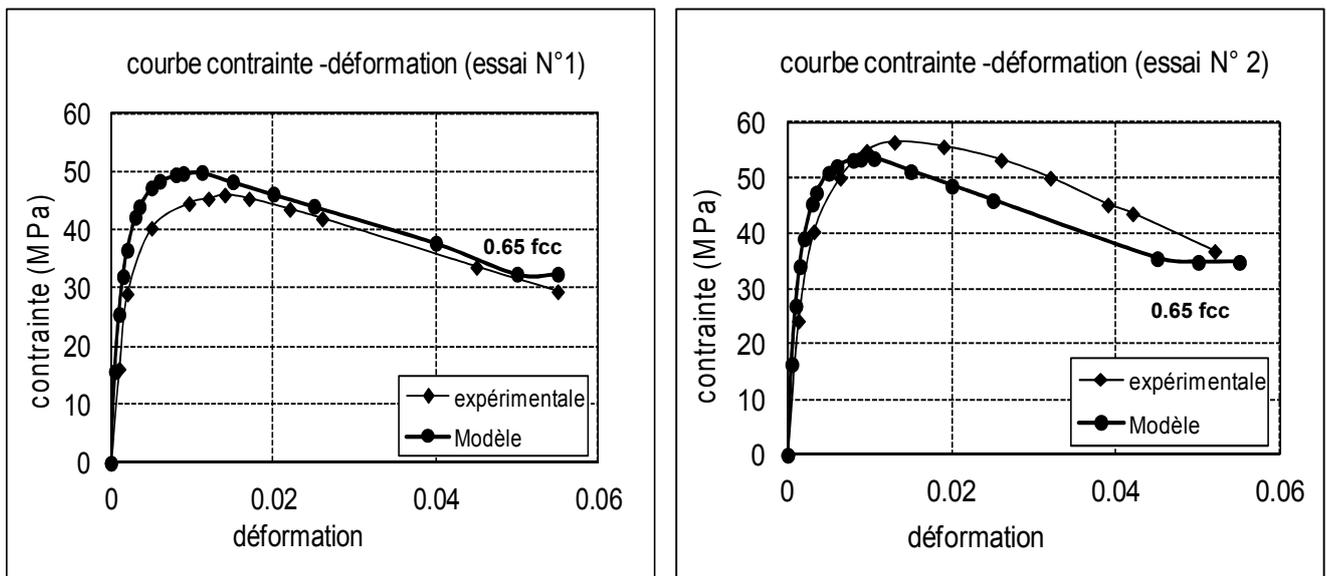


Figure III.39 : Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N°1 et essais N°2)

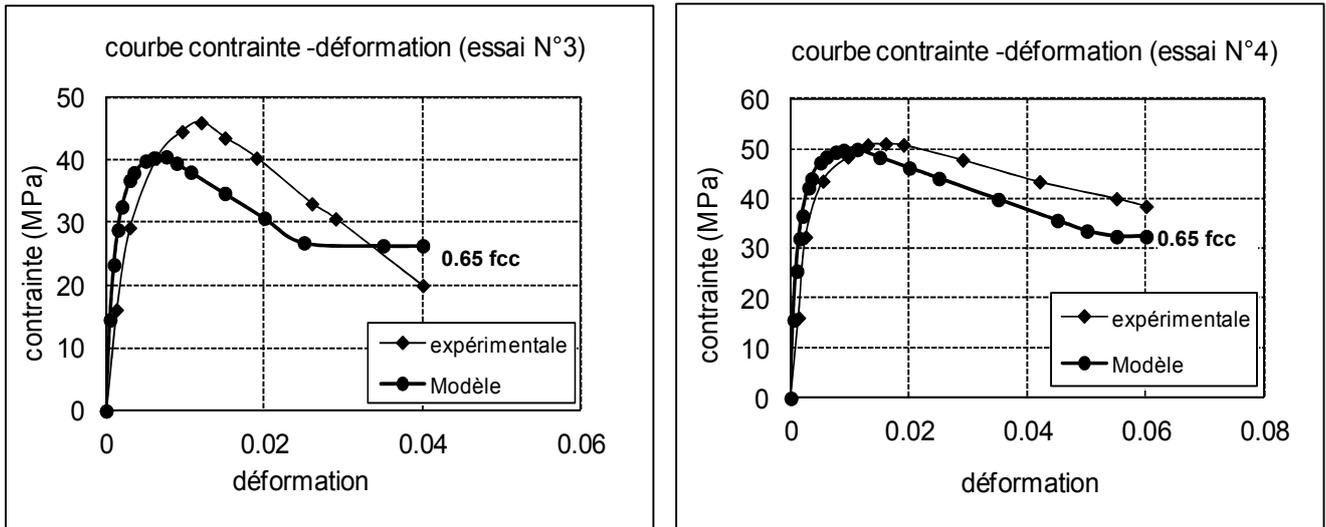


Figure III.40: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N°3 et essais N°4)

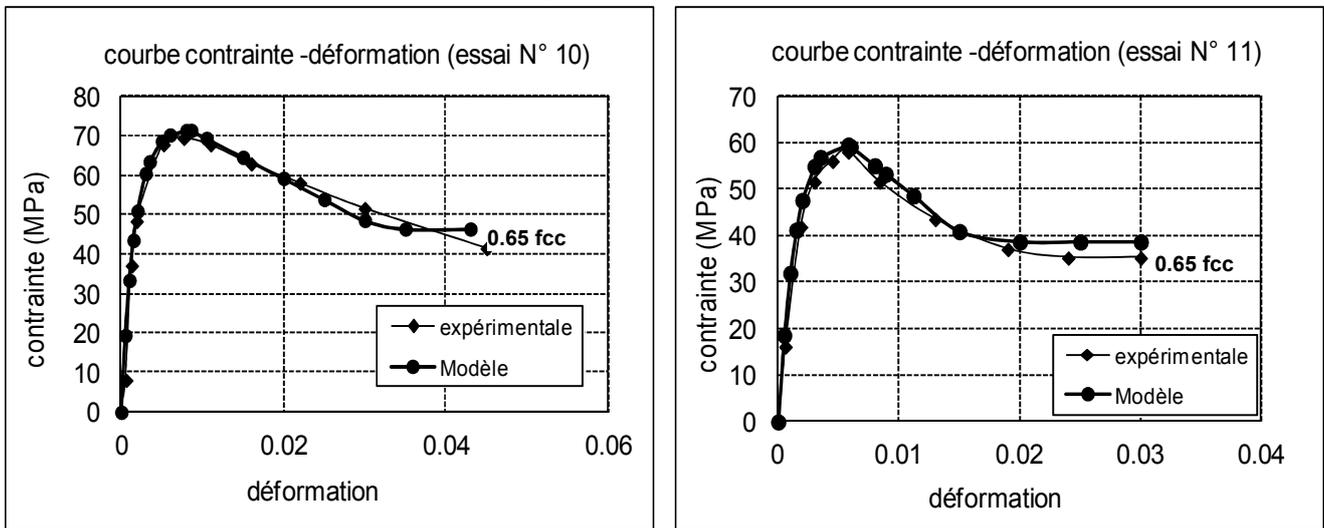


Figure III.41: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N°10 et essais N°11)

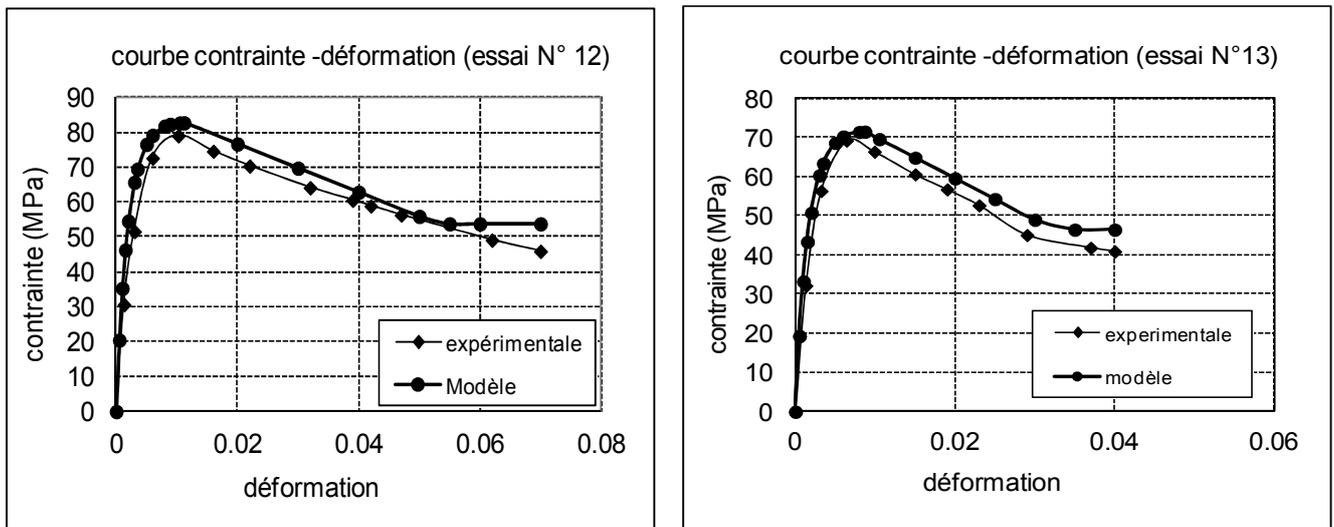


Figure III.42: Confrontation de la courbe théorique avec la courbe Expérimentale (essais N°12 et essais N°13)

Remarque :

On remarque que les courbes calculées à l'aide du modèle actuel sont proches des courbes expérimentales : le modèle est assez représentatif. Il faut noter que, dans le cas des sections étudiées, le pourcentage d'acier de confinement varie de 24 à 79 %.

III.1.3. cas d'une section béton enrobée de tube en acier (CFST : Concrete filled steel tubes)

Cette application est effectuée sur une série d'essais proposés par Lahlou [67]. Les sections sont en béton enrobées de tube en acier (CFST) dont les propriétés des données expérimentales sont résumées dans le tableau III.4:

Tableau III.4: Caractéristiques des données expérimentales des sections circulaires en béton

N° Essai	f_{c0} (MPa)	d_s (mm)	t_j (mm)	F_{uj} (MPa)
1	44	150	3.2	457
2	95	150	6,4	321
3	131	150	6.4	321

Les confrontations des courbes obtenues par le modèle, les courbes expérimentales proposées par Lahlou et al. [67] pour le cas d'une section circulaire sont représentées sur les figures suivantes III.11, III.12 et III.13 :

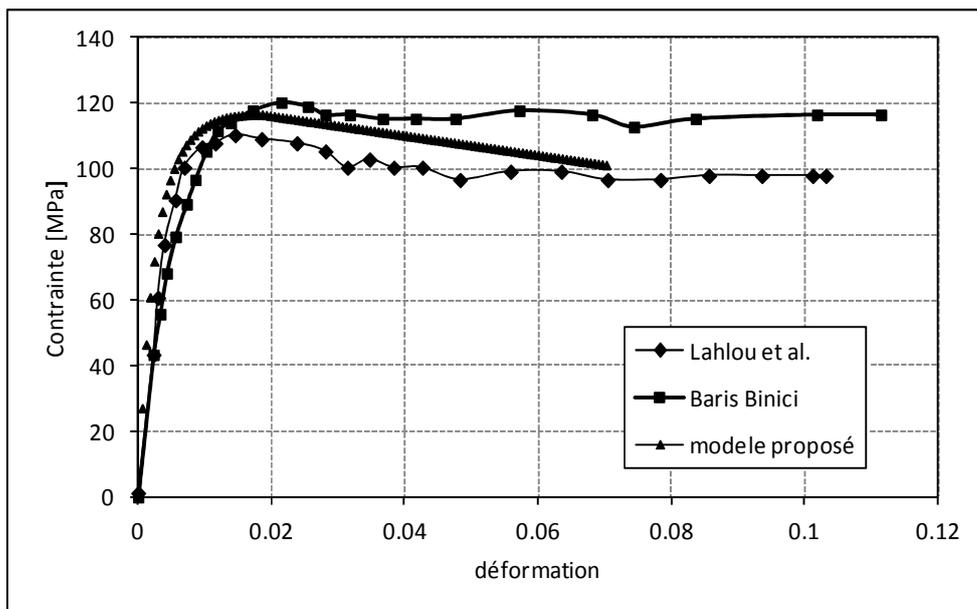


Figure III.43 : Confrontation des courbes théoriques avec les courbes expérimentales proposées par Lahlou (essais N° 1)

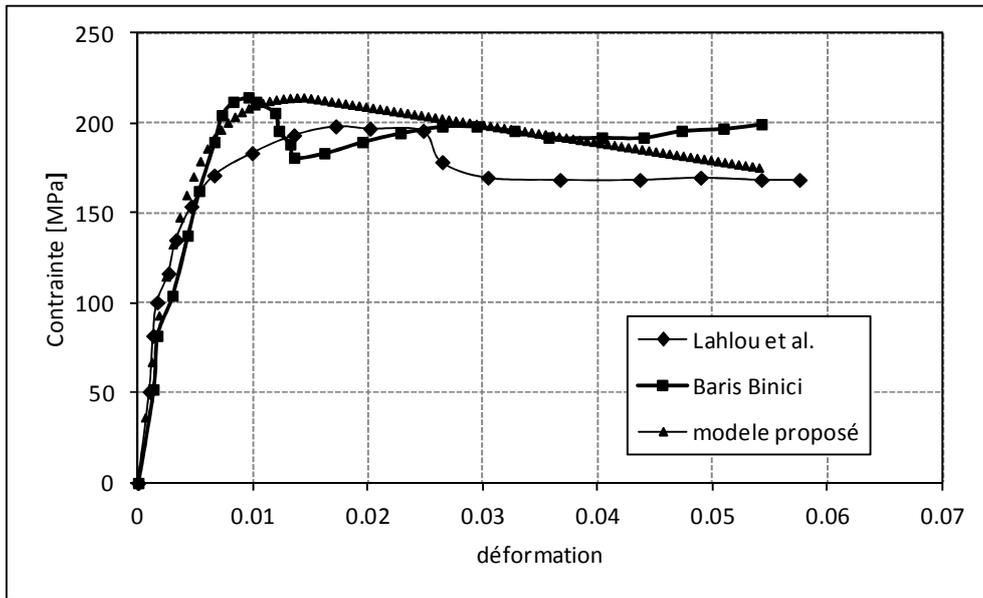


Figure III.44: Confrontation des courbes théoriques avec les courbes Expérimentales proposées par Lahlou (essais N° 2)

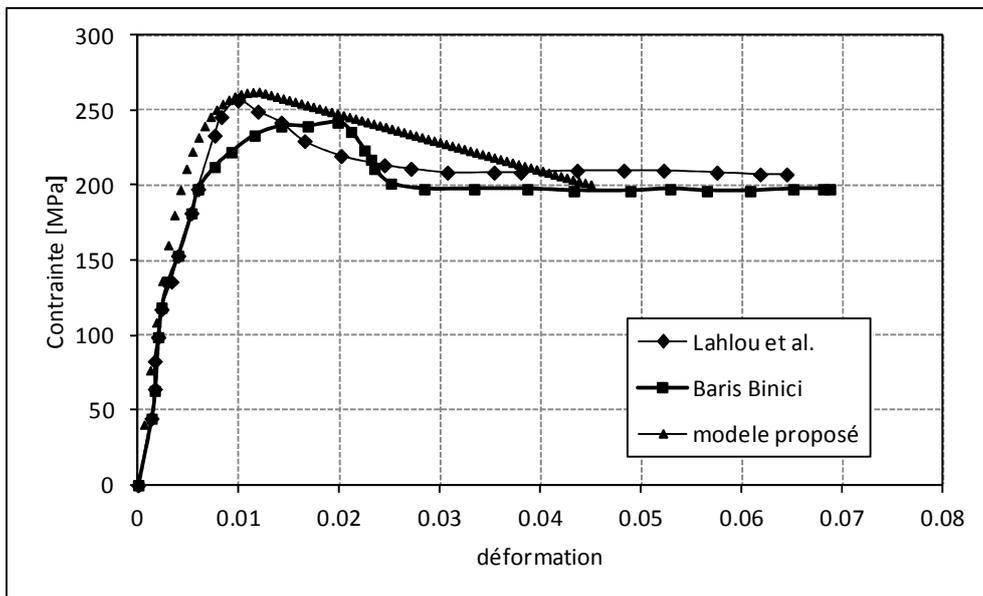


Figure III.45: Confrontation des courbes théoriques avec les courbes Expérimentales proposées par Lahlou (essais N° 3)

La confrontation des courbes obtenues par le modèle de comportement du béton confiné aux résultats expérimentaux donne une bonne concordance.

On remarque, dans cette série d'essais, qu'il y a absence de palier à $0.65f_{cc}$; la déformation à la rupture pour ces données expérimentales est atteinte dans la zone descendante (voir le calcul de la déformation ε_{ccu} formule 2.33 Bis §II.3.3).

Le modèle tient compte des paramètres suivant :

- La résistance à la compression du béton.
- Le diamètre, l'espacement, et le pourcentage des armatures transversales.
- Le diamètre des armatures longitudinales.
- La géométrie de la section en béton
- La limite élastique des armatures de confinement
- l'épaisseur du tube en acier dans le cas d'une section confiné par tube (CFST)

Son application, pour des pourcentages de confinement allant de 6 à 25 % dans le cas des sections circulaires, et allant de 24 à 79 % dans le cas des sections rectangulaires, est satisfaisante. L'application du modèle actuel pour des sections confinées par tube en acier est satisfaisante

III.1.4. Influence des paramètres de confinement sur le calcul des sections

La simulation numérique, concerne une section circulaire en béton confiné soumise à une flexion composée plane. Le calcul est effectué en élasticité non linéaire jusqu'à rupture, les algorithmes développés ont été repris pour le calcul des déformations internes à partir efforts appliqués.

Des applications ont été faites pour des sections en béton armé confiné avec des armatures en aciers puis une étude comparative a été effectuée.

III.1.4.1. Influence des armatures transversales

Le calcul est effectué pour une section circulaire de diamètre 40 cm. Elle est armée de barres d'acier de diamètre 12 mm et armatures transversales de diamètre 8mm pour la section confinée et sans armatures transversales pour la section non confinée [68-69].

Les caractéristiques des matériaux et les courbes de chargement ainsi que les courbes d'interactions (effort normal N en fonction du moment fléchissant M) obtenues, en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur les tableaux et figures suivantes :

Caractéristiques de la section :

Tableau III.5: Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures transversales T8 avec un espacement constant $e = 10$ cm.

sections	F_{cc} (MPa)	F_{ij} (MPa)	E_{bc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	E_s (MPa)
Confinée	31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	1874.6
Non confiné	25	2.1	32164.200	2.316	1.316	-0.002	0.002	0.0035	/

Tableau III. 6: Caractéristiques des aciers.

σ_e (Mpa)	E_a (MPa)	ϵ_u	σ_r (MPa)
400	200000	0.06	440

La confrontation des courbes moment-courbure avec et sans tenir en compte des armatures transversales de confinement est représentée sur les figure III.14.

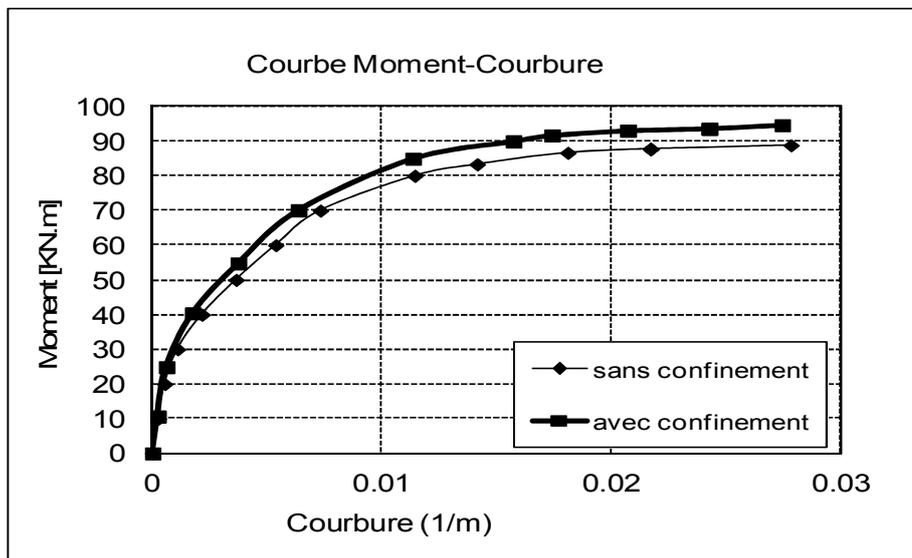


Figure III.46: Confrontation des courbes Moment-Courbure calculées avec et sans confinement

Le moment ultime calculé en tenant compte des armatures transversales de confinement est égal à 94.63 kN.m, et sans armatures transversales le moment ultime calculé est égal à 88.8 kN .m ; soit une augmentation de 6%.

En terme d'effort normal les courbes efforts normal-déformation et la confrontation des courbes avec et sans confinement sont représentées sur les figures III .15.

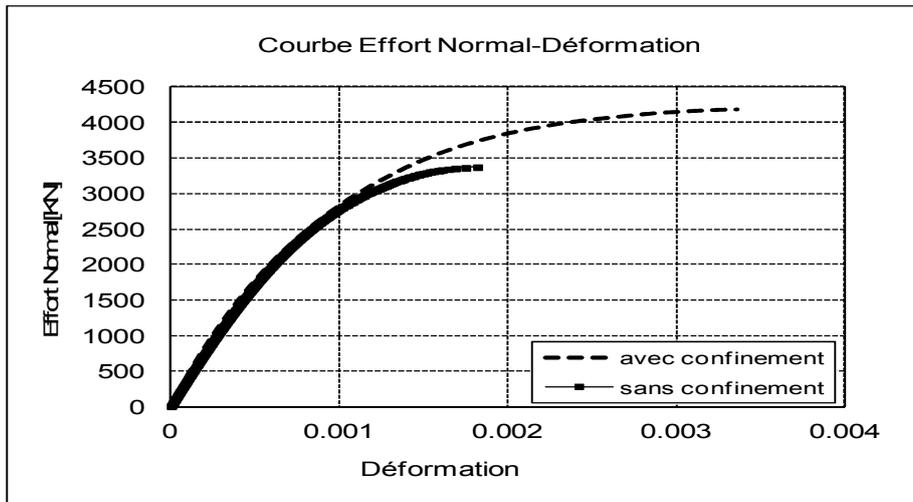


Figure III.47: Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée sans et avec confinement

On voit bien qu'il y a une augmentation de l'effort normal ultime calculé en tenant compte des armatures transversales de confinement. On passe d'un effort normal ultime égale à 3370 kN sans armatures transversales à un effort normal ultime égale à 4175.25 kN avec armatures transversale. Soit une augmentation de l'ordre de 20 %.

Pour la déformation maximale on remarque un grand écart observé, on passe d'une valeur de 2.8 % sans armatures transversales à une valeur de 3.5 % avec armatures transversales.

La confrontation des courbes d'interactions effort normal-moment avec et sans confinement est représentée sur la figure III.16

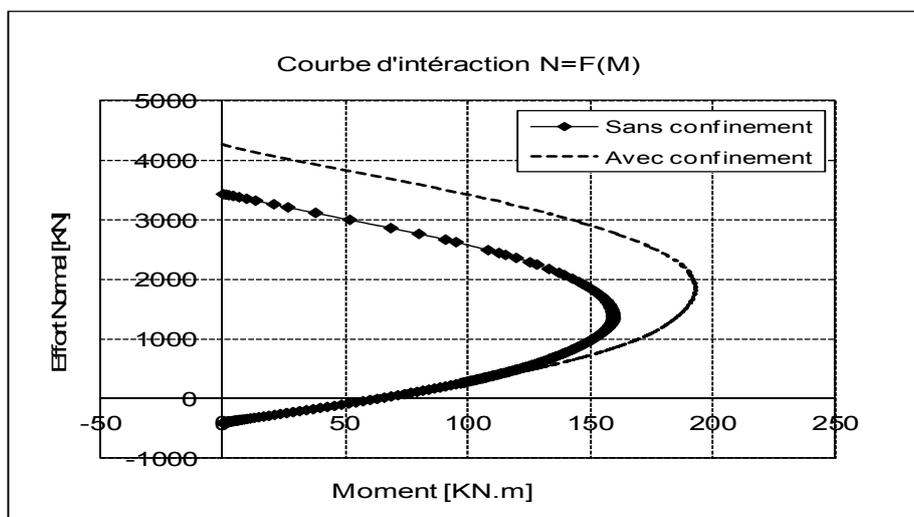


Figure III.48 : Confrontation des courbes frontières efforts normal -moment calculée avec et sans confinement

III.1.4.2. Influence du diamètre des armatures transversales

Le calcul est effectué pour une section circulaire de diamètre 40 cm. Elle est armée de barres d'acier de diamètre 12 mm et armatures transversales de diamètre 8mm, 10mm.

Les caractéristiques des matériaux et les courbes de chargement ainsi que les courbes d'interactions (effort normal N en fonction du moment fléchissant M) obtenues, en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur les tableaux et figures suivantes :

Tableau III. 7: Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures transversales T8, T10 avec un espacement constant e = 10 cm.

sections	F_{cc} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bcc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	E_s (MPa)
Confinée T10	31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	1874.6
Confinée T8	34.59	2.87	35840	6.01	5.01	-0.002	0.0058	0.05	1180.7

Tableau III.8 : Caractéristiques des aciers.

σ_e (Mpa)	E_a (MPa)	ϵ_u	σ_r (MPa)
400	200000	0.06	440

La confrontation des deux courbes (confinement en T8 et T10) est représentée sur la figure III.17 suivante:

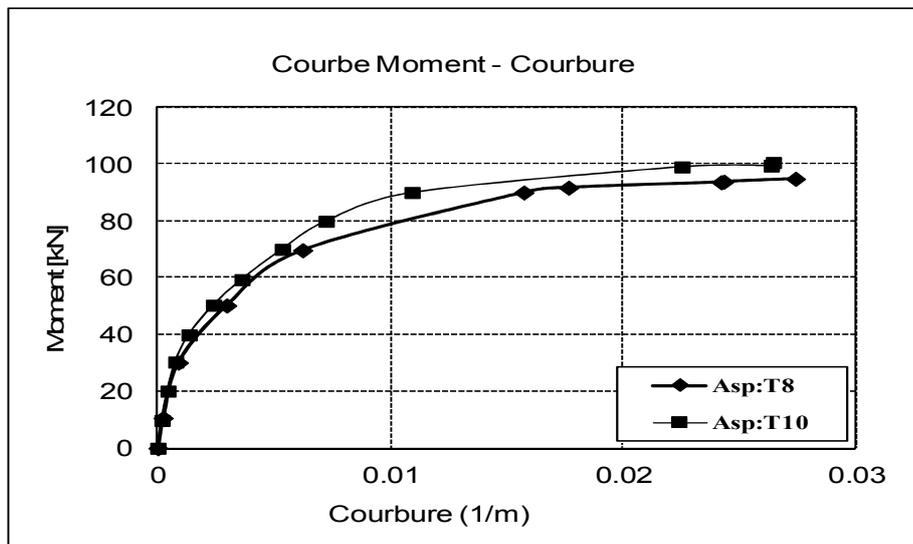


Figure III.49: Confrontation des courbes Moment-Courbure confinée en T8 et T10

On voit bien qu'il y a une augmentation du moment ultime avec des armatures transversales de diamètre 10mm par rapport au diamètre 8mm. On passe d'un moment ultime égale à 94.63 kN .m à un moment ultime égale à 100.49 kN .m, soit une augmentation de 5.8 %.

la confrontation la confrontation des courbes de chargement en termes d'effort normal-déformation avec un confinement en T8 et T10 sont représentées sur les figures III.18.

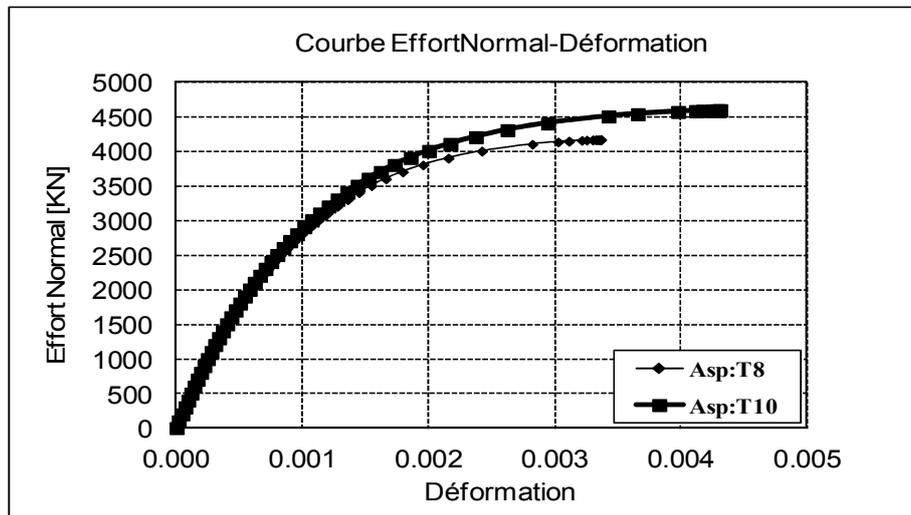


Figure III.50 : Confrontation des courbes Effort Normal –Déformation confinée en T8 et T10

Il y a une augmentation de l'effort normal ultime calculé avec des armatures transversales de diamètre 10mm par rapport au diamètre 8mm. On passe d'un effort normal ultime égale à 4597.65 kN avec des armatures transversales de 10mm à un effort normal ultime égale à 4175.25 kN avec armatures transversale de 8mm. Soit une augmentation de l'ordre de 10 % .en terme de déformation ultime soit un écart de l'ordre de 21%.

III.1.4.3. Influence de l'espacement des armatures transversales

Le calcul est effectué pour la même section, de diamètre 40 cm armée de barres de diamètre 12 mm, et des aciers transversale de diamètre 8mm .en faisant varier l'espacement des aciers transversaux de confinement de 5 à 20 cm, Les caractéristiques du béton et des aciers sont données aux tableaux III.9, III.10. Les courbes de chargement, les courbes d'interaction (effort normal N en fonction du moment fléchissant M), et la confrontation en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur les figures III.19, III.20 et III.21 :

Tableau III. 9 : Caractéristiques du béton section 40cm armé avec 8T12 et des armatures transversales T8 avec un espacement variable.

F_{cc} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	E_s (MPa)	esp
37.53	2.85	36830	6.88	5.88	-0.002	0.007	0.05	865.25	5
31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	1874.6	10
28.79	2.34	33785	4.18	3.18	-0.002	0.0036	0.05	3093	15
27.74	2.26	33300	3.72	2.72	-0.002	0.0031	0.05	4560.9	20

Tableau III.10: Caractéristiques des aciers.

σ_e (Mpa)	E_a (MPa)	ϵ_u	σ_r (MPa)
400	200000	0.06	440

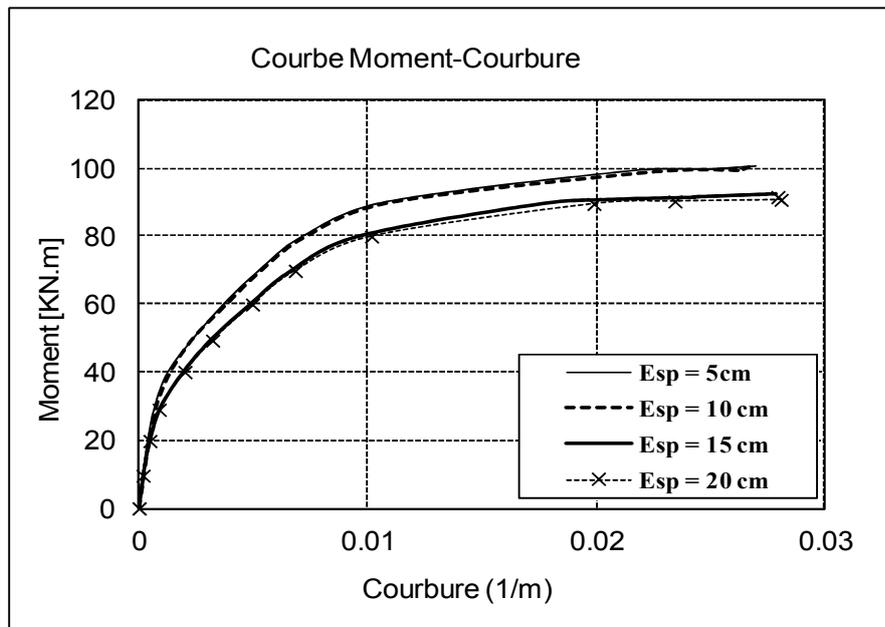


Figure III.51: Confrontation des Courbes Moment-Courbure confinée avec espacement variable

On remarque que le moment ultime est plus important dans le cas d'un espacement de 5 et 10 cm par rapport à la valeur du moment ultime pour un espacement de 15 et 20cm. soit une variation de 8% ; l'espacement est inversement proportionnel à la valeur du moment ultime.

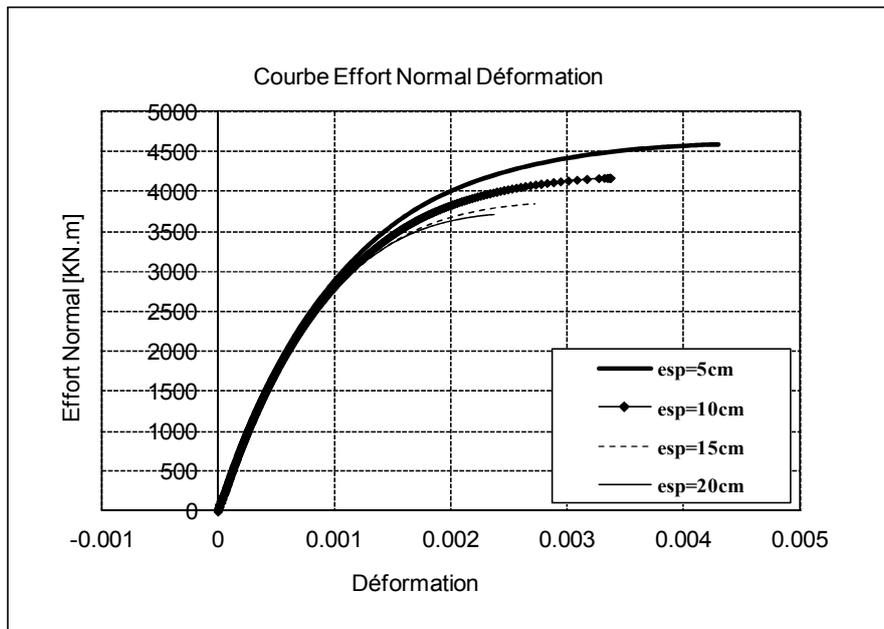


Figure III.52: Confrontation des Courbes Effort Normal –Déformation

On passant d’un espacement de 5 à 20 cm, on a un gain de déformation et d’effort normal soit de 0.0024 à 0.0043 pour la déformation soit 44% et de 3389.44 KN à 4595.4 KN en terme d’effort normal ultime soit une augmentation de 26%.

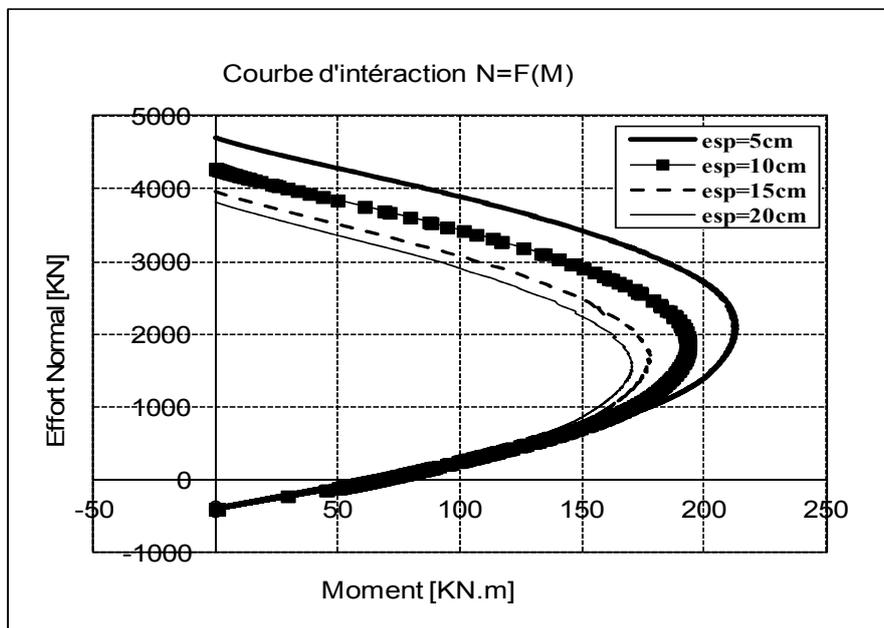


Figure III.53: Confrontation des courbes d’interactions effort normal -moment confinée avec espacement variable

Plus l’espacement des armatures transversales est réduit, on à un gain important de la capacité portante.

III.1.4.4. Influence du diamètre des armatures longitudinales

Le calcul est effectué pour une section circulaire de diamètre 40 cm. Elle est armée de barres d’acier de diamètre 12 mm, 14mm, 16mm et d’armatures transversales de diamètre 8mm.

Les caractéristiques des matériaux et les courbes de chargement ainsi que les courbes d’interactions (effort normal N en fonction du moment fléchissant M) obtenues, en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur les tableaux et figures suivantes :

Tableau III.11 : Caractéristiques du béton (section 40cm) armé avec 8T12 ,8T14 ,8T16 et des armatures transversales T8

F_{cc} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	Dia(mm)
31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	12
31.33	2.48	34679	5.02	4.02	-0.002	0.0045	0.05	14
31.35	2.48	34688	5.03	4.03	-0.002	0.0045	0.05	16

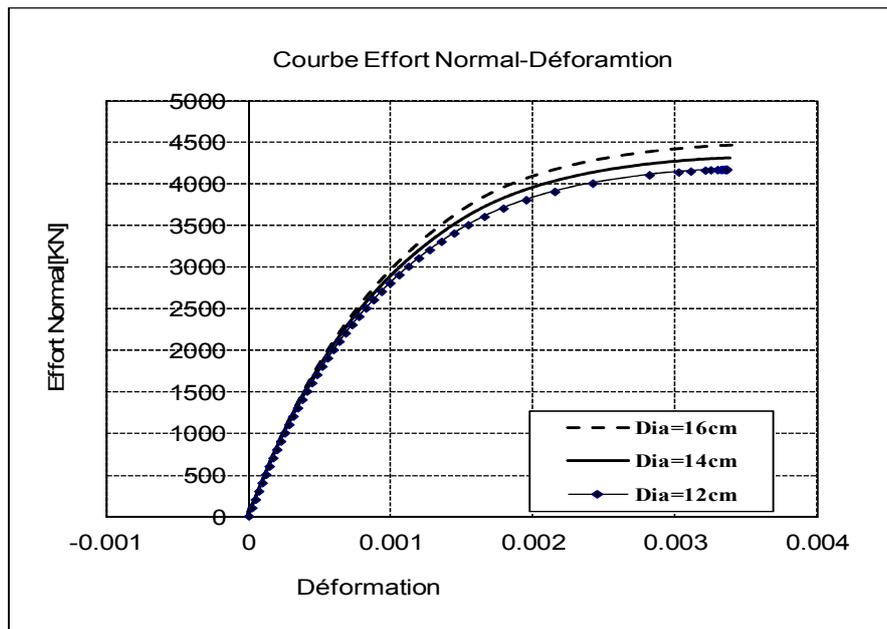


Figure III. 54 : Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée avec les différents diamètres

On remarque qu’il n’y a pas une grande influence du diamètre des aciers longitudinaux sur la valeur de l’effort normal et la déformation de rupture.

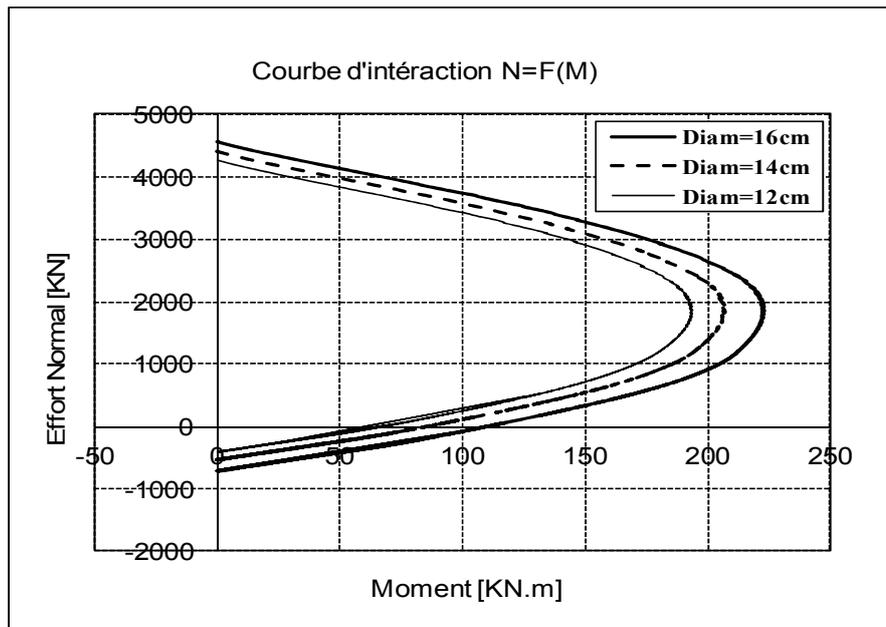


Figure III. 55: Confrontation des courbes d’interaction avec les différents diamètres

Il n’y a pas une grande influence du diamètre des aciers longitudinaux sur la capacité portante de la section.

III.1.4.5. Influence de la résistance à la compression du béton

Le calcul est effectué pour une section circulaire de diamètre 40 cm de classe de béton variable (C25, C30, C40). Elle est armée de barres d’acier de diamètre 12 mm et d’armatures transversales de diamètre 8mm. Les caractéristiques des matériaux et les courbes de chargement ainsi que les courbes d’interactions (effort normal N en fonction du moment fléchissant M) obtenues, en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur les tableaux et figures suivantes :

Tableau III.12: Caractéristiques de la section en béton (section 40cm) avec les différentes classes

F_{cc} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	f_c (MPa)
31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	25
36.40	2.78	36456	4.14	3.14	-0.002	0.0041	0.05	30
39.52	3.39	39562	3.09	2.09	-0.002	0.0036	0.05	40

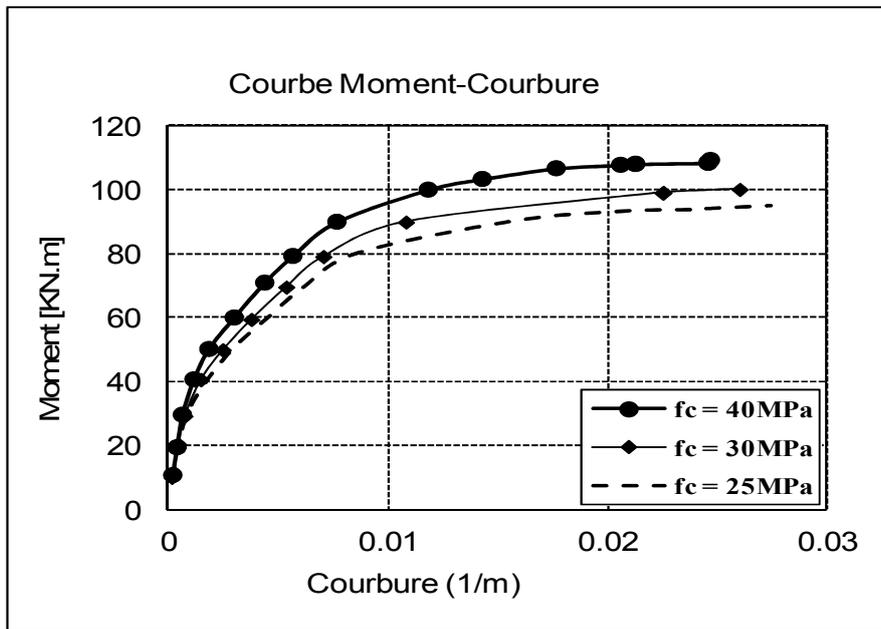


Figure III.56: Confrontation des courbes Moment -Courbure calculées avec les différentes classes du béton

Le moment ultime croit avec l'accroissement de la résistance à la compression du béton.

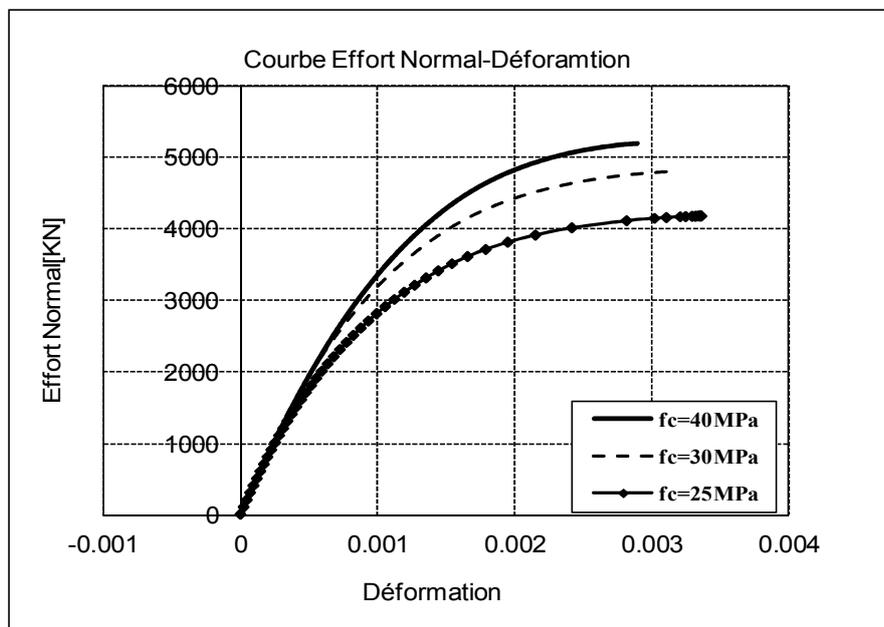


Figure III.57: Confrontation des courbes Effort Normal -Déformation calculée avec les différentes classes du béton

Plus la résistance à la compression du béton est importante plus l'effort normal ultime est important.

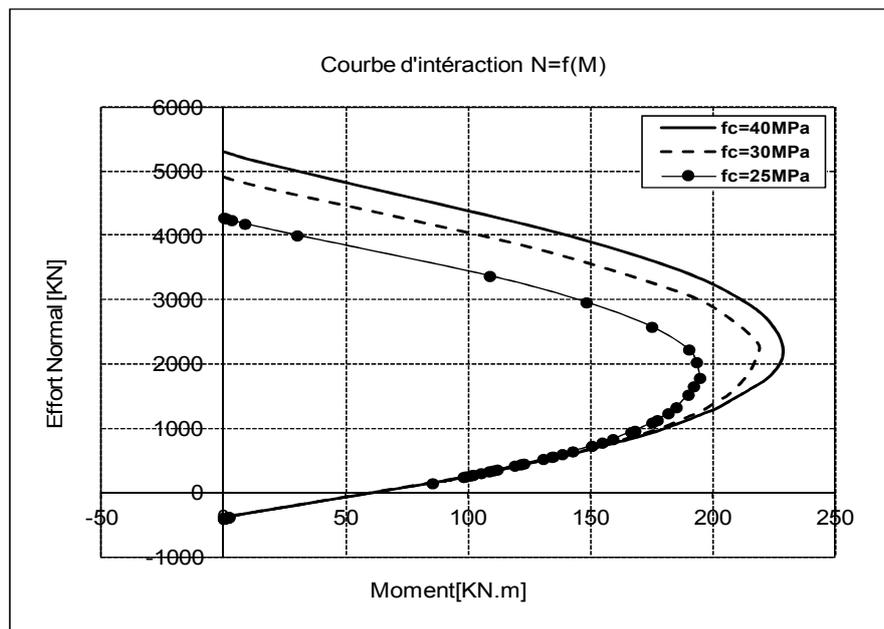


Figure III.58: Confrontation des courbes d'interactions calculées avec les différentes classes du béton

La capacité portante devient importante avec l'accroissement de la résistance à la compression du béton.

III.1.4.6. Influence du diamètre de la section du béton

Le calcul est effectué pour une section circulaire de diamètre variable. Elle est armée de barres d'acier de diamètre 12 mm et d'armatures transversales de diamètre 8mm. Les caractéristiques des matériaux et les courbes obtenues, en utilisant les lois de comportement réelles des matériaux, sont représentées sur le tableau III.13 et figure III.27 :

Tableau III.13: Caractéristiques du béton avec les différents diamètres de la section

F_{cc} (MPa)	F_{tj} (MPa)	E_{bc0} (MPa)	K_c	K_c'	ϵ_{rt}	ϵ_{cc0}	ϵ_{ccu}	Dsec(cm)
33.26	2.56	35376	5.6	4.6	-0.002	0.005	0.05	30
31.31	2.48	34671	5.01	4.01	-0.002	0.0045	0.05	40
30.09	2.4	34217	3.6	2.6	-0.002	0.004	0.05	50

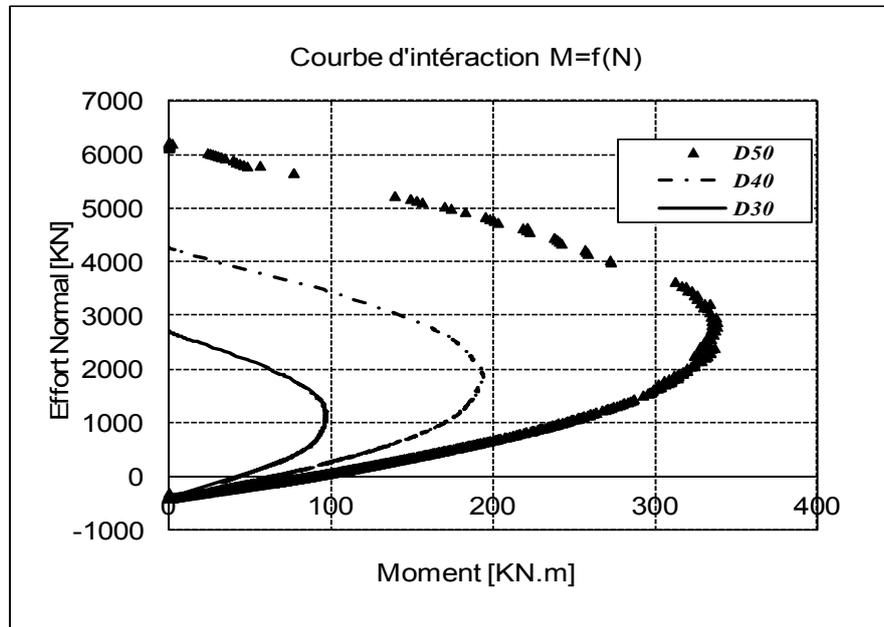


Figure III.59: Confrontation des courbes d'interaction avec les différents diamètres de la section

La capacité portante s'amplifie proportionnellement avec l'accroissement du diamètre de la section du béton.

III.2. Calcul global des poutres armées avec prise en compte du confinement

Afin de valider le modèle proposé, d'estimer la cohérence de son approche et de voir l'apport du confinement sur le calcul des structures en béton armé confiné on a effectué le calcul de plusieurs poutres en béton armé et précontraint qui ont fait l'objet de plusieurs essais.

III.2.1 Essais du CEBTP – Poutres hyperstatiques HZ4

Il s'agit d'un programme d'essais réalisé au CEBTP (Trinh, 1995) [70]. Ce programme comporte quatre poutres différenciées principalement par le degré de précontrainte qui varie de 100 % (précontrainte totale) à 0 % (béton armé) et le pourcentage des armatures transversales. Les quatre poutres sont identiques en forme et dimensions. Elles présentent une section transversale en double T et une longueur totale de 10.40 m constituée de deux travées de 5 m de portée chacune. Elles sont soumises à un chargement croissant jusqu'à rupture, par

deux charges concentrées d'intensité égale, Q , appliquées au milieu des travées. La figure III.28 montre les caractéristiques géométriques et le détail de ferrailage de ces poutres.

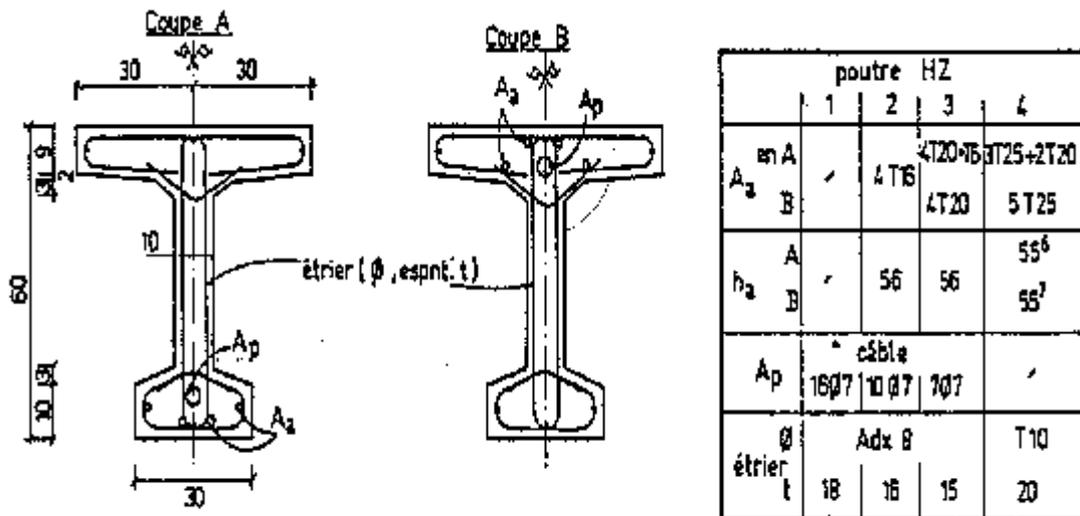


Figure III.60: Dimensions et détails de ferrailage des poutres HZ [70].

La figure III.29 montre la disposition assez complexe des armatures passives longitudinales dans les membrures inférieure et supérieure des différentes poutres HZ2, 3, 4. La poutre HZ1, la plus précontrainte, est néanmoins munie d'un minimum d'armatures passives, filantes sur toute la longueur de la poutre, en barres lisses $\phi 6$ mm (en acier FeE 22). Il n'y a pas d'armatures longitudinales dans l'âme. Chaque corps d'épreuve comporte une armature transversale disposée en cours successifs dans des sections droites avec un espacement t constant (voir tableau dans la figure III.28).

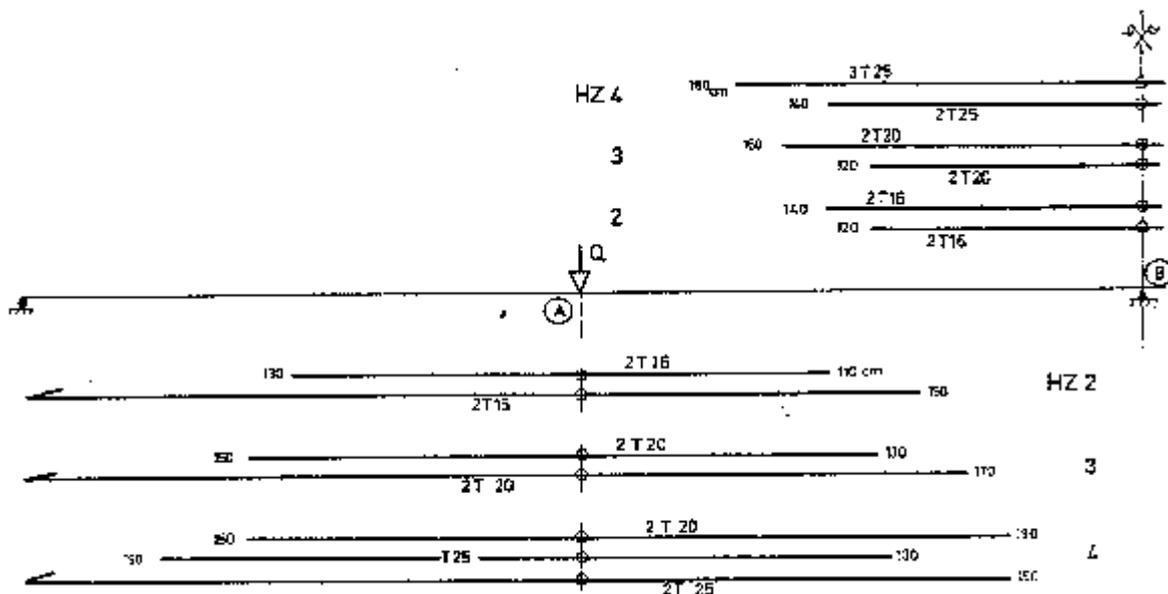


Figure III.61 : Disposition des armatures longitudinales pour les poutres HZ [70].

Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont résumées dans tableau III.14.

Tableau III.14 : Caractéristiques du béton et des armatures passives [70].

Béton				Armatures passives			
Repère	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{ij} (MPa)	Barres	f_e	E_a (GPa)	f_u (MPa)
HZ1	39	3.4	35400	ϕ 6	340	206	435
HZ2	33	3.0	31250	HA10	428	198	545
HZ3	34	3.4	32080	HA16	430	213	526
HZ4	32	3.3	32000	HA20	424	195	543
				HA25	450	230	558

La précontrainte des poutres est réalisée en post-tension. Les câbles, un par poutre, sont constitués d'un nombre variable de fils $\phi 7$: 16, 10 et 7 respectivement pour les poutres HZ1, HZ2 et HZ3. Le fil $\phi 7$ est caractérisé par une limite d'élasticité de 1540 MPa, un module élastique de 175 GPa et une contrainte de rupture de 1970 MPa.

Pour notre cas l'application du modèle avec prise en compte du confinement a été faite uniquement pour la poutre HZ4 qui est en béton armé. La figure III.30 montre l'évolution de la flèche, au droit de la charge, en fonction de la charge appliquée pour la poutre HZ4. Le calcul non linéaire en flexion est effectué d'une part, en considérant comme rigidité à l'effort tranchant la valeur de l'élasticité linéaire, et d'autre part dans un deuxième calcul, en considérant la rigidité à l'effort tranchant et tout en tenant compte du confinement.

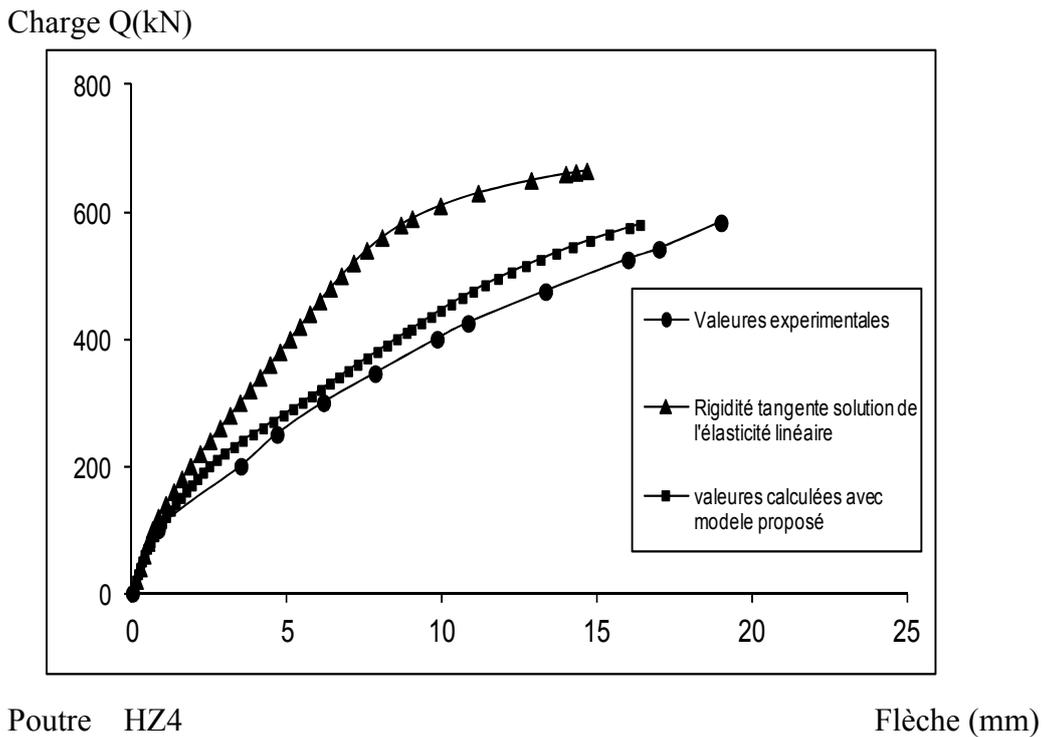


Figure III.62 : Evolution de la flèche en fonction de la charge pour les poutres HZ.

Le tableau III.15 montre que les valeurs ultimes de la charge Q calculées par le présent modèle sont proches de celles relevées expérimentalement.

Tableau III.15 : Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q Pour la poutre HZ4.

Valeur ultime de l'effort Q_u kN					
Poutre	Expérimentale	Calculée Kachi et al.2006	Calculée Présente étude	Exp/Cal kachi	Exp/présente étude
HZ4	590	570	580.023	1.03	1.01

On peut noter que le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement à la charge ultime des poutres en béton armé. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement. Les efforts maximaux et les déplacements à la rupture des poutres sont correctement estimés. Le logiciel développé permet ainsi de prédire le mode de rupture réel des poutres, notamment dans le cas d'une rupture à l'effort tranchant. En effet, dans un calcul classique des poutres, la rigidité de cisaillement reste constante ; elle est solution de l'élasticité linéaire. Le calcul ne prédit alors

que les ruptures en flexion ; la résistance à l'effort tranchant doit être vérifiée indépendamment par des formules empiriques.

III.2.2. Etude paramétrique

Le calcul a été fait pour la poutre HZ4 de l'essai réalisé au CEBTP [70]. la poutre est en béton armé dont les caractéristiques géométriques et le détail de ferrailage est résumé dans le tableau III.16 :

Tableau III.16. Caractéristiques du béton et des armatures passives poutre HZ4 [70].

Béton			Armatures longitudinales				Armatures transversales			
Repère	f_{cj} (MPa)	f_{ij} (MPa)	E_{ij} (MPa)	Barres	f_e (MPa)	E_a (GPa)	f_u (MPa)	Barres	f_e (MPa)	E_a (GPa)
HZ4	32	3.3	32000	HA20	424	195	543	HA10	424	195
				HA25	450	230	558	esp=20cm	/	/

Le calcul a été fait pour des espacements allant de 10 cm à 30 cm.

Le tableau III.17 montre que les valeurs ultimes de la charge Q et de la flèche ultime calculée par le présent modèle pour les différents espacements.

Tableau III. 17: Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q

Poutre	Espacement Cm	Charge ultime Q_u kN	Flèche ultime (mm)	Exp/présente étude
HZ4	10	590.0253	17.26	0.99
	13	590.0247	17.20	0.99
	15	590.0246	17.00	0.99
	20	580.0232	16.37	1.017
	25	525.0176	13.02	1.124
	30	525.0176	13.02	1.124

On observe que la charge ultime et la flèche ultime augmente avec l'augmentation du confinement dans le cas des poutres en béton armé .On remarque qu'il y'a un apport de 11,02% en terme de charge ultime pour un espacement de 10 à 30 cm et un apport de 24,56 % flèche ultime.

Charge Q (kN)

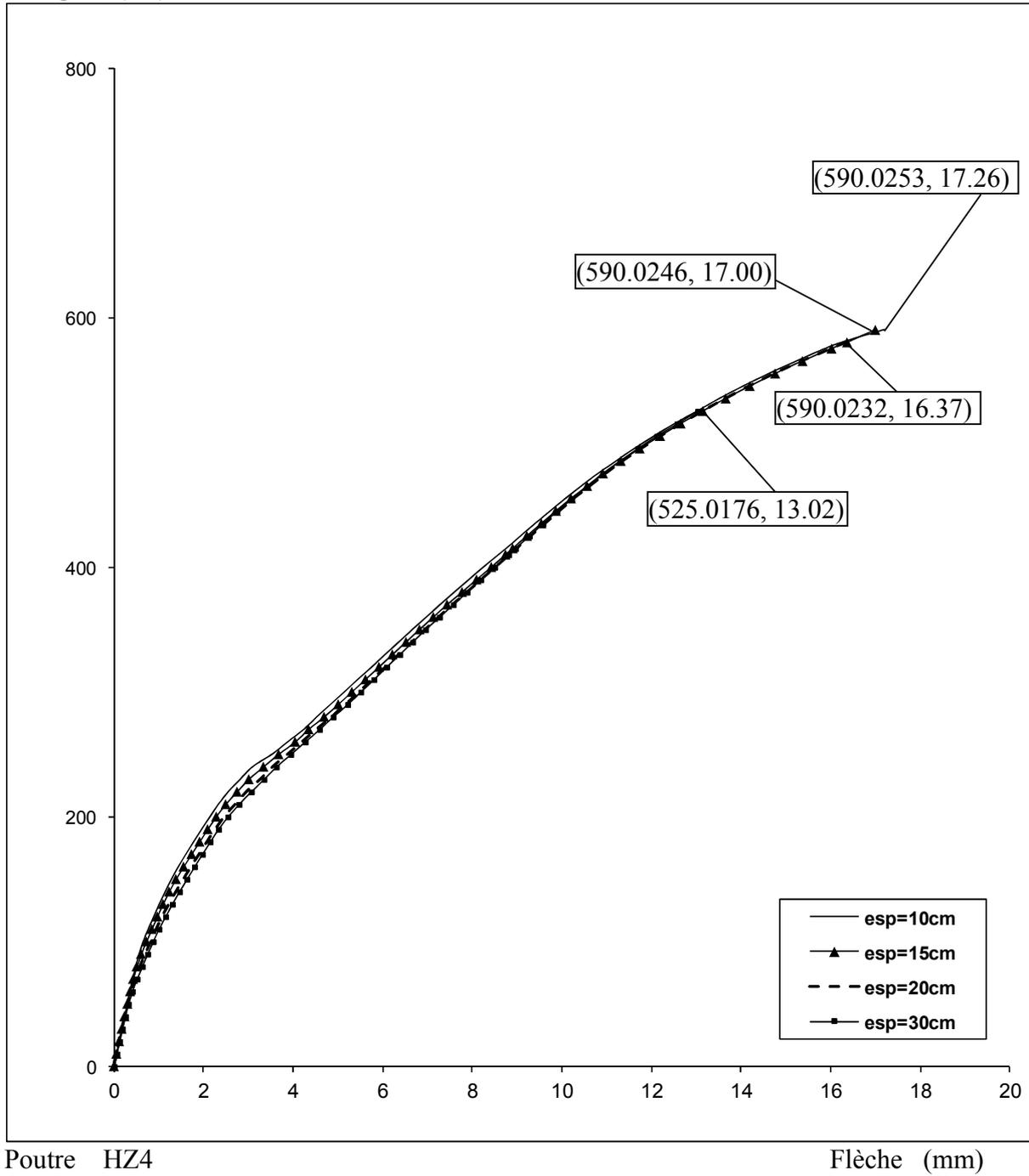


Figure III.63: Évolution de la flèche en fonction de la charge pour les poutres HZ4 pour des espacements 10, 15, 20 et 30cm

III.3. Calcul en cisaillement d'une section de poutre

Un programme de calcul en cisaillement-flexion des sections de poutres a été élaboré. Afin de vérifier l'influence des simplifications admises dans cette étude ainsi que la cohérence de son approche, le confinement de ces sections a été introduit dans le calcul. Nous avons effectué le calcul de plusieurs sections de poutre avec des formes et des détails de ferrailage variés.

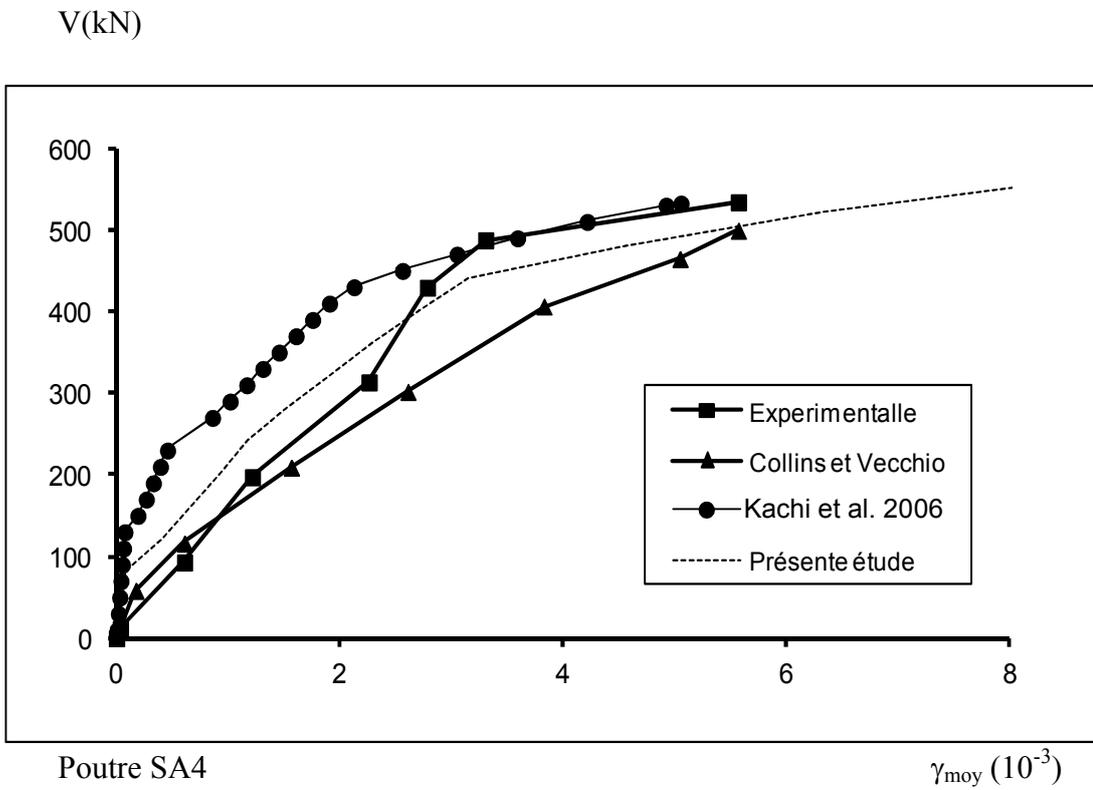
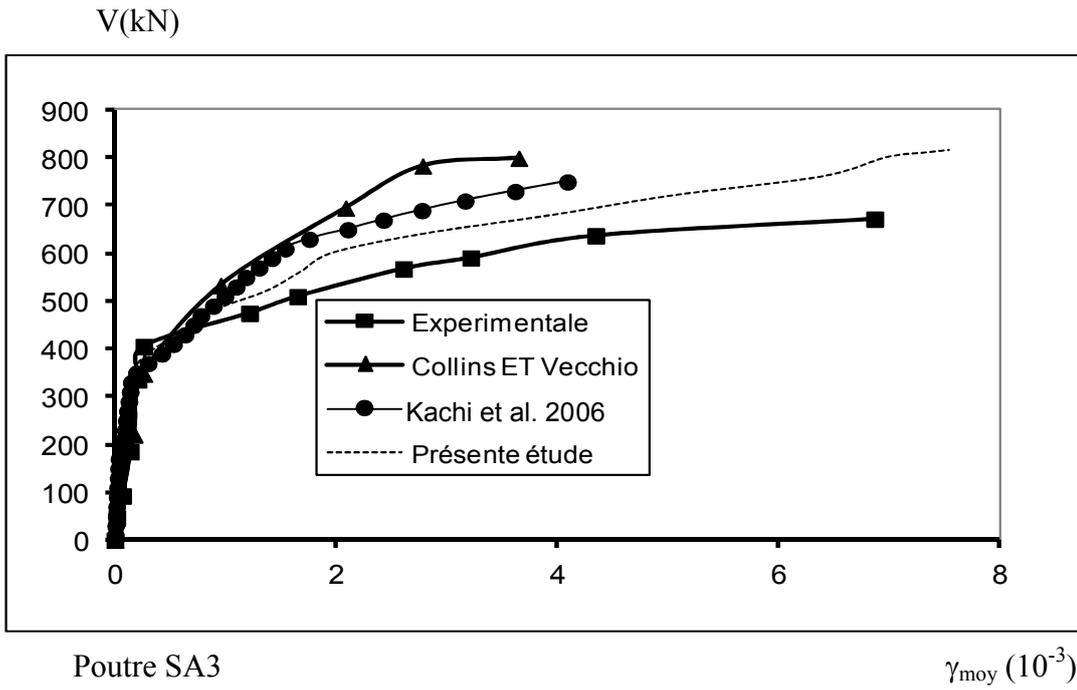
III.3.1. Essais de l'Université de Toronto – Comportement de section

Le modèle a été utilisé pour simuler le comportement de plusieurs poutres testées par différents chercheurs à l'Université de Toronto (Vecchio Collins, [71], [63], [66]). Les poutres ont une section transversale rectangulaire pleine ou creuse. Elles sont en béton armé ou précontraint. La précontrainte est soit adhérente soit non adhérente (dans ce dernier cas, elle est équivalente à une force axiale extérieure). Pour le calcul, les armatures passives sont concentrées en deux lits inférieur et supérieur ; il n'y a pas d'armatures longitudinales réparties. Différents modes de chargement ont été appliqués ; cependant, dans tous les cas, le moment fléchissant est nul dans la zone de poutre où se produit la rupture par effort tranchant et où on a mesuré la distorsion. Les caractéristiques géométriques et les propriétés des différents matériaux sont données au tableau (III.18).

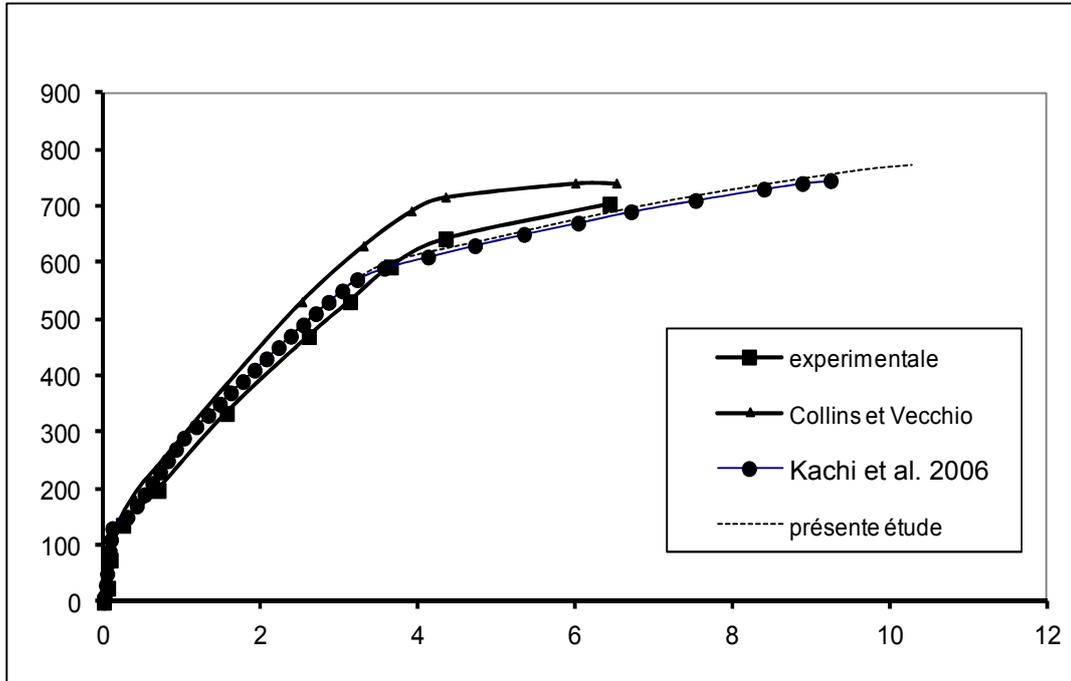
Tableau III.18 : Propriétés des différentes poutres [71],[63],[66].

Repère de la poutre	Dimensions		Béton		Armatures transversales			Armatures longitudinales		Armatures de précontraintes		
	EXT Mm	INT mm	f_c MPa	ϵ_{b0} 10^{-3}	Barres s ϕ (m)	s_t mm	f_e Mpa	Nb.x ϕ (mm)	f_e Mpa	A_p mm^2	f_{pe} Mpa	$\Delta\epsilon_p$ 10^{-3}
SA3	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SA4	305x610	152x406	40.0	2.8	9.5	72	373	12x 29 4 x 22	345 462	-	-	-
SK1	305x610	-	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK2	305x610	121x381	26.9	2.25	9.5	100	400	8 x 25	442	1540	1450	4.82
SK3	305x610	-	28.2	2.2	9.5	100	400	8 x 25	442	-	-	-
SK4	305x610	121x381	28.2	2.2	9.5	100	400	16x 25	442	-	-	-
SP0	305x610	152x406	25.0	2.3	9.5	150	373	16x 25	421	-	-	-
SP1	305x610	152x406	33.5	2.3	9.5	150	373	12x 22	421	510	1450	4.21
SP2	305x610	152x406	32.0	2.0	9.5	150	373	12x 22	421	1010	1450	4.11
SP3	305x610	152x406	32.2	2.0	9.5	150	373	12x 22	421	1520	1450	4.26
SM1	305x610	152x406	29.0	2.4	9.5	175	424	12x 22	452	-	-	-
CF1	305x610	152x406	38.6	3.0	9.5	150	367	6 x 9.5	367	930	1450	5.17

Les résultats obtenus pour les poutres SA3, SA4, SK1, SK2, SK3 sont présentés à la figure III.32 sous forme de courbes comparatives avec les résultats expérimentaux d'une part, et les résultats obtenus par Vecchio et Collins [71], [63], [66] ainsi que ceux obtenus par Kachi et al. [52-60]. d'autre part. Il faut bien noter qu'il s'agit de la relation effort tranchant V – distorsion γ_{moy} d'une zone de poutre soumise au cisaillement (éventuellement combiné à un effort normal) sans gradient des déformations longitudinales et en tenant compte du confinement.



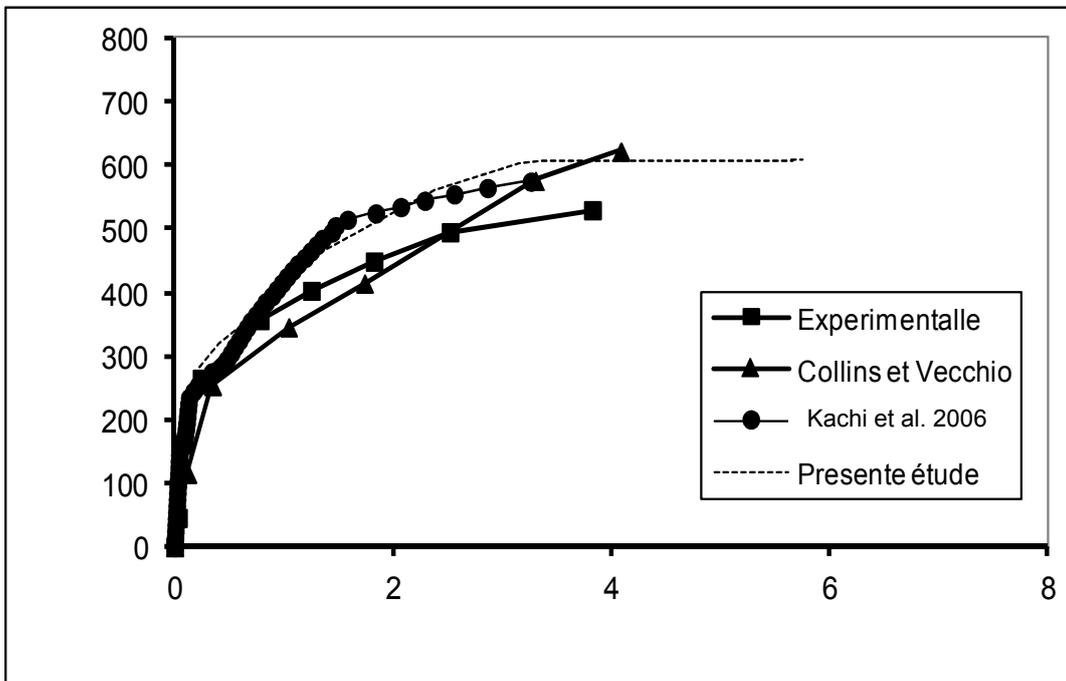
V(kN)



Poutre SK1

$\gamma_{moy} (10^{-3})$

V(kN)



PoutreSK2

$\gamma_{moy} (10^{-3})$

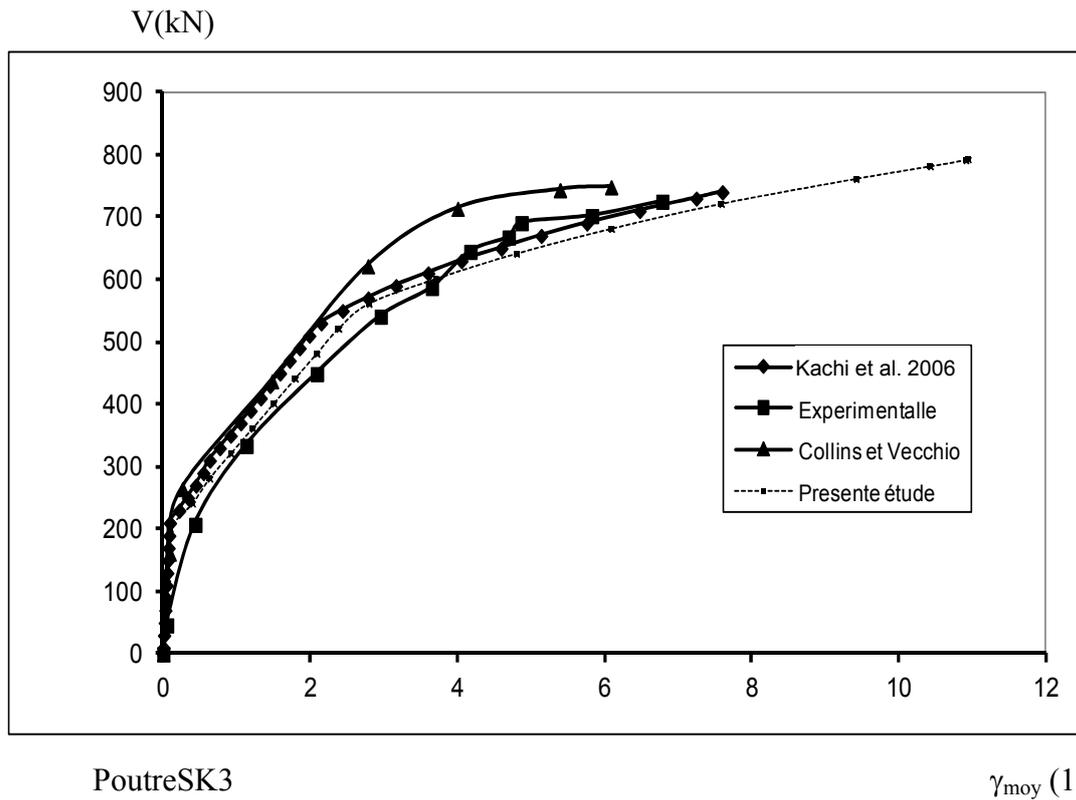


Figure III.64 : Comparaison des résultats du calcul aux résultats expérimentaux et à ceux obtenus par le modèle de Vecchio et Collins et le modèle de Kachi et al.2006.

Le tableau III.19 compare les valeurs ultimes de l’effort tranchant calculées par le présent modèle à celles relevées expérimentalement.

Tableau III. 19: Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de l’effort tranchant.

Valeur ultime de l’effort tranchant V_u Kn			
Poutre	Expérimentale	Calculée	Exp/Cal
SA3	716	771	0.93
SA4	534	569.75	0.94
SK1	672	818.5	0.82
SK2	530	609.75	0.87
SK3	725	792.25	0.91
Moyenne des rapports (Exp/Cal) de l’ensemble des poutres			0,894

On peut noter que les résultats du calcul, comparés aux résultats expérimentaux, montrent que le modèle approche bien le comportement réel de l'ensemble des poutres étudiées, aussi bien avant qu'après la fissuration du béton. L'erreur commise sur les valeurs ultimes de la charge varie entre 0 et 18 %. Le calcul prévoit assez correctement l'évolution de γ_{moy} avec V , donc la rigidité à l'effort tranchant en tenant compte du confinement.

Le terme de cisaillement (rigidité $\Delta v / \Delta \gamma_{moy}$) est pratiquement le même pour le béton confiné et non confiné. Mais une fois la limite des aciers est atteinte, on remarque un léger accroissement de la rigidité au cisaillement dans le cas du béton confiné. La déformation et l'effort à la rupture augmentent avec le confinement.

Dans le cas du béton précontraint on remarque que le confinement augmente la rigidité au cisaillement correspondante à la déformation et l'effort à la rupture.

III.4. Etude de la fissuration

Le calcul a été fait pour la poutre HZ4 de l'essai réalisé au CEBTP [70]. la poutre est en béton armé dont les caractéristiques sont donnés dans figure III.33 et le détail de ferrailage est donné dans le tableau III.16.

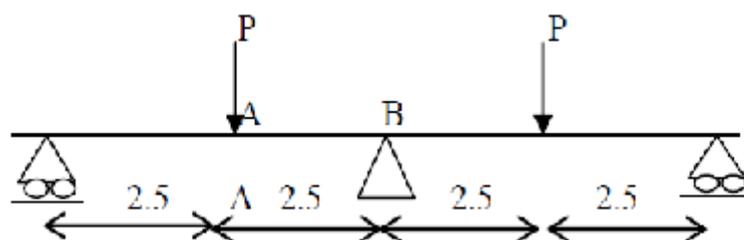


Figure III. 65 : caractéristiques géométriques et détails de ferrailage de la poutre HZ4

Les figures III.34, III.35, III.36 montrent la confrontation des résultats obtenus de la hauteur décomprimée en fonction de la déformation ϵ_x ; avant la fissuration, au début de la fissure et à la rupture pour la poutre HZ4 par la présente étude en tenant compte du confinement et les résultats obtenus par Kachi et al. En 2006 pour la poutre HZ4 sans tenir compte du confinement.

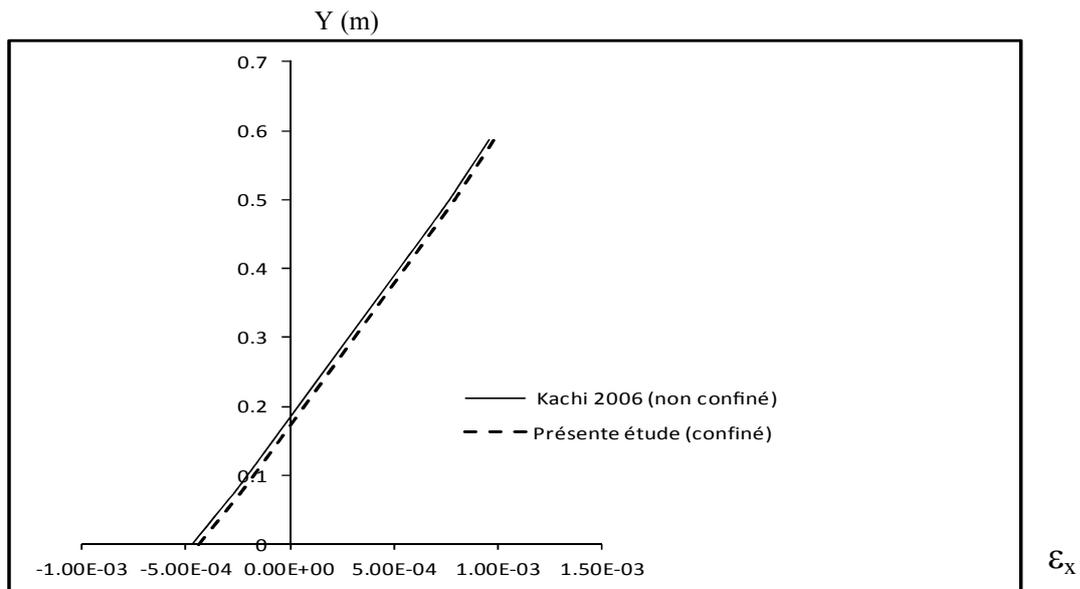


Figure III.66: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section avant fissuration de la poutre HZ4.

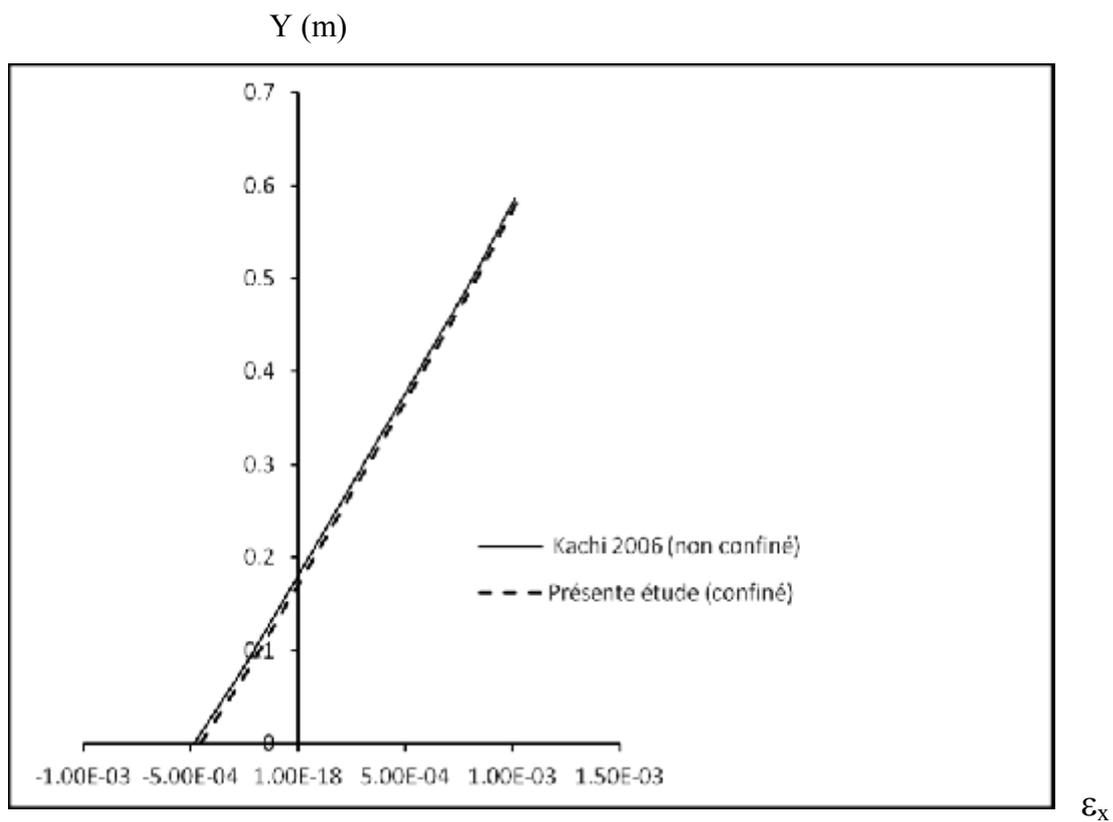


Figure III.67: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section au début de la fissuration de la poutre HZ4.

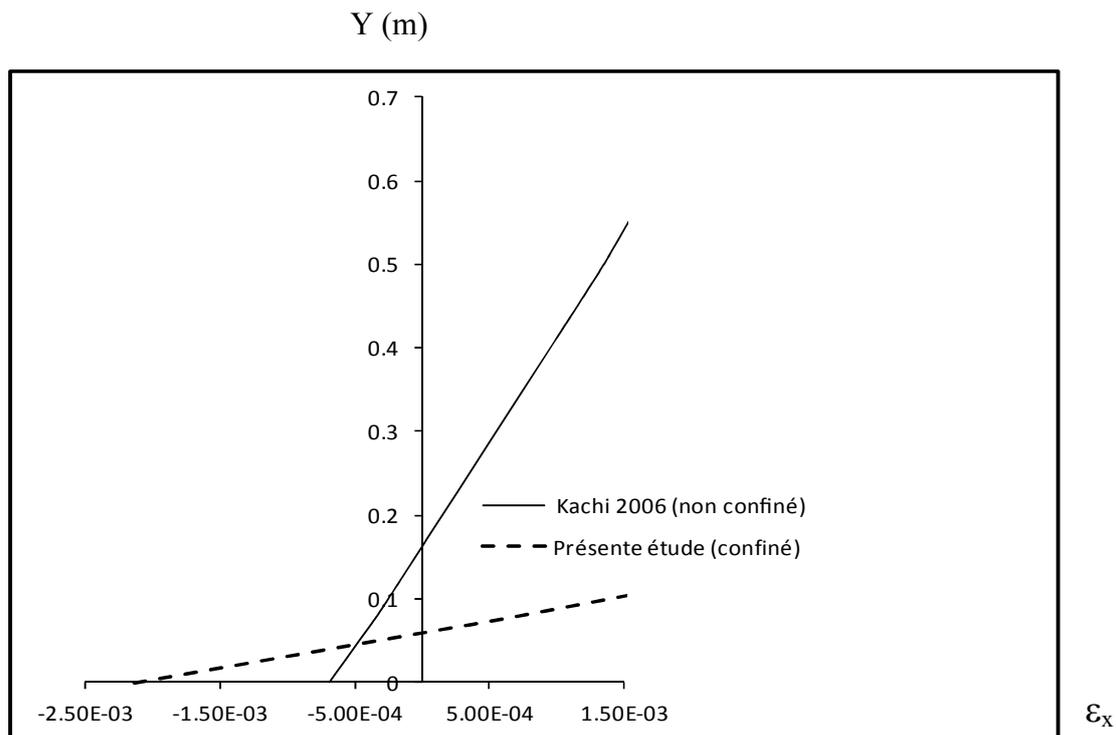


Figure III.68: Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section à la rupture de la poutre HZ4.

On remarque bien d'après ces figures que le confinement retarde la fissuration et la rupture de la poutre. La hauteur comprimée à la rupture est de 17cm sans confinement et de 5.1cm en tenant compte du confinement par conséquent la hauteur décomprimée est de 43 cm sans confinement et de 54.9 cm en tenant compte du confinement

En faisant varier l'espacement de 5 cm à 25 cm. Les résultats de calcul pour la Distribution des déformations longitudinales moyennes sur la hauteur de la section à la rupture de la poutre HZ4 montre que la hauteur décomprimé est inversement proportionnelle au pourcentage de confinement. La figure III.37 montre la variation de la hauteur décomprimée en fonction de l'espacement :

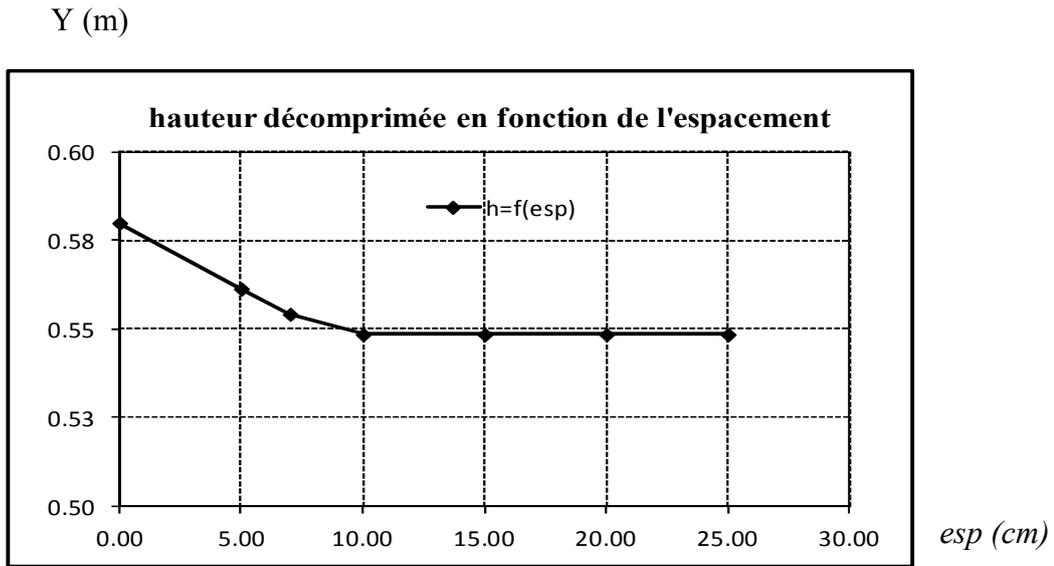


Figure III.69: hauteur décomprimée de la section en fonction de l'espacement a la rupture de la poutre HZ4.

Il y a une variation très forte de la hauteur décomprimée et ce jusqu'à un espacement de 10 cm, au-delà de cette valeur, la hauteur décomprimée varie très peu. Le confinement se fait sentir pour des valeurs d'espacement inférieures à 10 cm.

En faisant varier l'espacement de 7 cm à 25 cm. Les résultats de calcul pour les efforts internes effort tranchant, Moment de flexion et effort normal au début des premières fissures et à la rupture de la poutre HZ4 sont montés dans le tableau III.20:

Tableau III.20 : Résultats calculés des efforts au début des premières fissures de la Poutre HZ4.

Poutre	Espacement Cm	Effort tranchant T kN	Moment M kN.m	Effort normal N x10 ⁻² kN
HZ4	7	155.28	201.43	6.00
HZ4	10	154.68	198.42	6.61
HZ4	15	153.95	194.76	7.30
HZ4	17	153.71	193.57	7.30
HZ4	20	153.34	191.68	7.74
HZ4	25	153.25	191.22	7.99

Tableau III.21 : Résultats calculés des efforts à la rupture de la Poutre HZ4.

Poutre	Espacement Cm	Effort tranchant T kN	Moment M kN.m	Effort normal N x10 ⁻¹ kN
HZ4	7	375.66	426.65	8.06
HZ4	10	368.88	419.25	8.09
HZ4	15	368.63	417.96	8.11
HZ4	17	368.55	417.58	8.19
HZ4	20	368.45	417.09	8.27
HZ4	25	335.11	316.90	8.99

On remarque que les efforts T et M sont proportionnel au pourcentage de confinement .on voit que le confinement retarde légèrement la fissuration et la rupture.

III.5.Pieu en béton armé soumis à une flexion composée

Nous avons effectué le calcul avec le programme sur un pieu dont l'étude expérimentale a été réalisée au CEBTP [72].

Le pieu à un diamètre de 500 mm et de 4m de long .Il est soumis à une flexion composée. L'effort normal de compression est de 1370 kN (appliqué à l'aide d'une précontrainte extérieure). Le pieu est renforcé longitudinalement par 5 barres d'acier HA de diamètre 16mm (correspondant à 0,5 % en volume) selon le min du DTU 13.2 et transversalement par des HA 6.les caractéristiques géométriques et le détail de ferrailage est résumé dans le tableau(III.22) suivant :

Tableau III.22 : Caractéristiques du béton et des armatures passives [72].

Béton			Armatures logitudinales				Armatures transversales			
Repère	f _{cj} (MPa)	f _{tj} (MPa)	E _{ij} (MPa)	Barres	f _e (MPa)	E _a (GPa)	f _u (MPa)	barres	f _e (MPa)	E _a (GPa)
Pieu zhan	42.41	4.35	38059.47	5HA 16	475	20	475	HA6	428	200

La confrontation du calcul par la présente étude aux résultats expérimentaux en terme de charge flèche est illustrée à la Figure III.38.

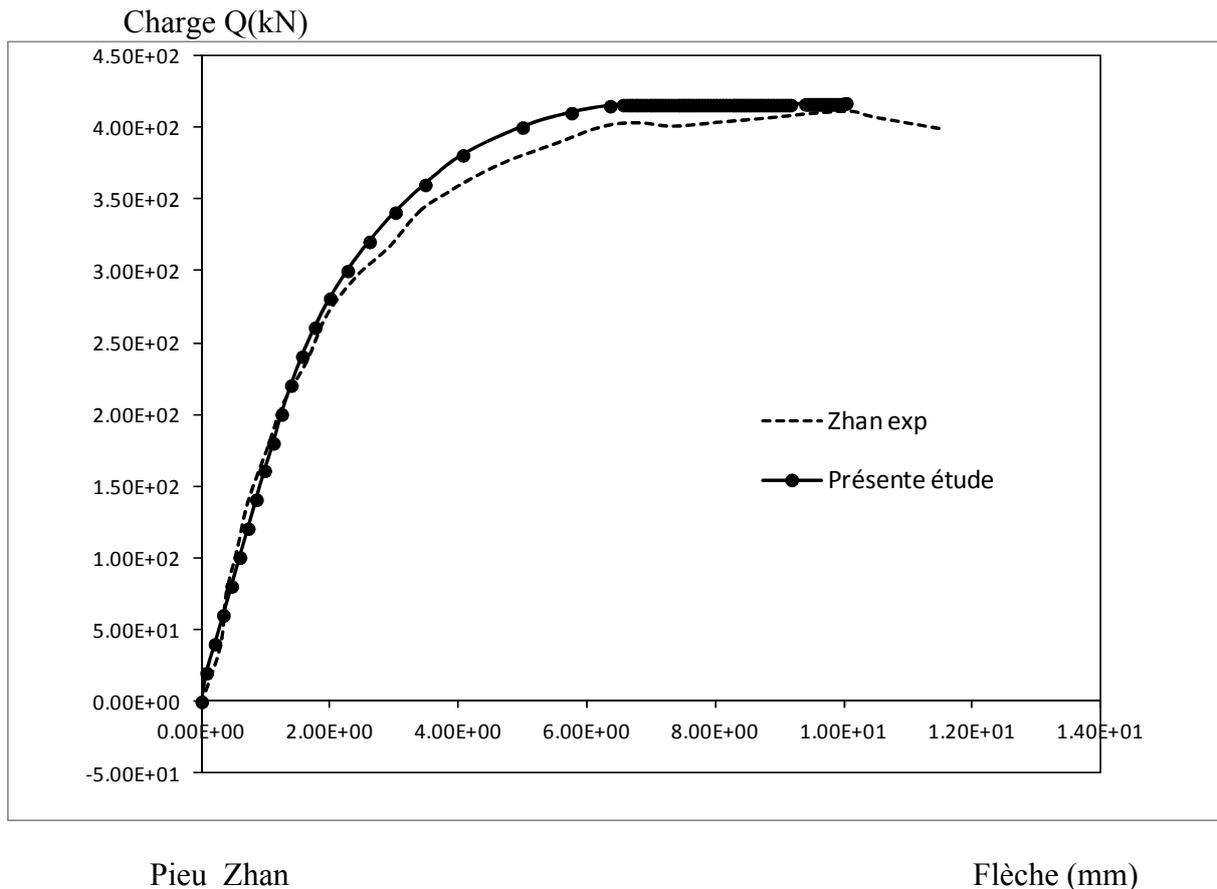


Figure III.70 : Évolution de la flèche en fonction de la charge pour le pieu de Zhan.

Le tableau III.23 montre que les valeurs ultimes de la charge Q calculées par le présent modèle sont proches de celles relevées expérimentalement soit une erreur de 2%.

Tableau III.23 : Comparaison des valeurs ultimes expérimentales et calculées de la charge Q Au début de la première fissure et à la rupture.

Valeur ultime de l'effort Q_u kN			
Pieu	Expérimentale	Présente étude	Exp/présente étude
Apparition des 1 ^{ères} fissures	200	200.11	0.99
A la rupture	410	417	0.98

On peut noter que le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion composée avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement (soit 98% de précision).

III.6. Conclusion

La méthode de calcul présentée dans le cadre de ce travail a pour objectif l'introduction du confinement en tenant compte des différentes dispositions des armatures transversales ou des tubes, ainsi que l'effet de l'effort tranchant dans le domaine élastique non linéaire dans un logiciel de calcul des poutres hyperstatiques. Le confinement est introduit par une loi de comportement également non linéaire qui permet de mieux simuler le comportement des sections en béton armé confiné.

L'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire a été pris en compte dans le modèle de calcul par une estimation du module de cisaillement réel d'une section de poutre.

La simulation du comportement des poutres hyperstatiques en béton armé avec prise en compte du confinement, a été faite jusqu'à la rupture.

Le modèle tient compte des paramètres suivant :

- La résistance à la compression du béton.
- Le diamètre, l'espacement, et le pourcentage des armatures transversales.
- Le diamètre des armatures longitudinales.
- La géométrie de la section en béton
- La limite élastique des armatures de confinement
- l'épaisseur du tube en acier dans le cas d'une section confiné par tube (CFST)

Son application, pour des pourcentages de confinement allant de 6 à 25 % dans le cas des sections circulaires, et allant de 24 à 79 % dans le cas des sections rectangulaires, est satisfaisante.

Le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement et de l'effort tranchant à la déformabilité des poutres. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion composée avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement.

Les résultats du calcul, comparés aux résultats expérimentaux, montrent que le modèle approche bien le comportement réel de l'ensemble des poutres étudiées, aussi bien avant qu'après la fissuration du béton. Le calcul prévoit assez correctement l'évolution de γ_{moy} avec V , donc la rigidité à l'effort tranchant en tenant compte du confinement.

Le confinement augmente la rigidité au cisaillement correspondante à la déformation et l'effort à la rupture.

La hauteur décomprimée a une variation très forte et ce jusqu'à un espacement de 10 cm, au-delà de cette valeur, la hauteur décomprimée varie très peu. Le confinement se fait sentir pour des valeurs d'espacement inférieures à 10 cm.

Le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion composée avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement.

CONCLUSION GENERALE

La prise en compte du confinement dans la modélisation et le calcul des structures en béton armé et en béton précontraint à donner des résultats satisfaisants et à permis de mieux approcher le comportement réel.

Vue la complexité des modèles existants et la difficulté de maîtriser certain de leur paramètres, nous avons proposé dans le cadre de cette étude un modèle simple dont les paramètres sont facilement maîtrisable.

Le confinement est introduit par un coefficient de confinement effectif, le pourcentage d'armatures transversales et la limite élastique de l'acier dans le cas d'un béton confiné par armatures transversales ainsi que l'épaisseur du tube dans le cas d'un béton confiné par CFST.

L'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire a été pris en compte dans le modèle de calcul par une estimation du module de cisaillement réel d'une section de poutre.

La simulation du comportement des poutres hyperstatiques en béton armé avec prise en compte du confinement, a été faite jusqu'à la rupture.

Le modèle tient compte des paramètres suivant :

- La résistance à la compression du béton.
- Le diamètre, l'espacement, et le pourcentage des armatures transversales.
- Le diamètre des armatures longitudinales.
- La géométrie de la section en béton
- La limite élastique des armatures de confinement
- l'épaisseur du tube en acier dans le cas d'une section confiné par tube (CFST)

Son application, pour des pourcentages de confinement allant de 6 à 25 ‰ dans le cas des sections circulaires, et allant de 24 à 79 ‰ dans le cas des sections rectangulaires, est satisfaisante.

Le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement et de l'effort tranchant à la déformabilité des poutres. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion composée avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement.

Les résultats du calcul, comparés aux résultats expérimentaux, montrent que le modèle approche bien le comportement réel de l'ensemble des poutres étudiées, aussi bien avant

qu'après la fissuration du béton. Le calcul prévoit assez correctement l'évolution de γ_{moy} avec V , donc la rigidité à l'effort tranchant en tenant compte du confinement.

Le confinement augmente la rigidité au cisaillement ainsi que la déformation et l'effort à la rupture.

La hauteur décomprimée a une variation très forte et ce jusqu'à un espacement de 10 cm, au-delà de cette valeur, la hauteur décomprimée varie très peu. Le confinement se fait sentir pour des valeurs d'espacement inférieures à 10 cm.

Le modèle développé estime de façon satisfaisante la contribution du confinement. Il permet donc de bien simuler le comportement, jusqu'à rupture, des poutres soumises à la flexion composée avec effort tranchant en tenant compte des armatures transversales de confinement.

Le modèle analytique présenté repose sur la modélisation multicouche des sections. L'équilibre global des sections est analysé sur la base de la planéité des sections dans le sens longitudinale. Le modèle introduit un terme de cisaillement diagonal non linéaire dans la matrice de rigidité de la section pour prédire le comportement global jusqu'à rupture des poutres en flexion composée. Les résultats de la confrontation sont très satisfaisants.

Le confinement interne du béton est introduit et des confrontations ont été faites sur des sections de poutre ainsi que sur des poutres en béton armé et en béton précontraint, les résultats du calcul confrontés aux résultats expérimentaux sont très satisfaisants.

Dans le cadre de cette étude nous proposons une méthode de calcul des éléments de section circulaire basée sur la méthode de calcul par les armatures discrètes est développée en y introduisant différentes formes de confinement internes et externe. L'étude est menée en élasticité non linéaire, il est tenu compte du comportement non linéaire des différents matériaux constituant la section transversale. Le confinement du béton est introduit par le biais d'une loi de comportement également non linéaire, du béton confiné et du béton armé confiné tenant compte du niveau de confinement, du type de confinement et de l'ensemble des sollicitations (effort normal, moment fléchissant et effort tranchant). Enfin, la méthode de calcul est injectée dans un logiciel de calcul non linéaire des éléments de structures afin d'étudier la contribution et l'influence du confinement du béton sur le comportement global des éléments de structures de section quelconques. Les résultats de la confrontation sont très satisfaisants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Richart, F.E., Brandtzaeg, A., and Broun, R.L. ,« The failure of plain and spirally reinforced concret in compression. » Bulletin 190, 1929, Univ.of Illinois, Engineering Experimental Station, Champaing III.
- [2] Belounis, R.et al., « Etude de la performance des poteaux Mixtes acier-beton sous differentes Sollicitations », mémoire de magister, Université Mentouri Constantine, 2008.
- [3] Y.C.Wang, «Tests on slender composite columns», Journal of Constructional Steel Research 49 (1999) 25–41.
- [4] Kefeng.T., John.M.N., Xincheng.P., « Mechanical properties of high strength concrete filled steel tubular columns Part1: Concentrically loaded », ACI Journal 22 April 2003.
- [5] M.Mouli, H.Khelafi, «Strength of short composite rectangular hollow section columns filled with lightweight aggregate concrete », Engineering Structures (2006), doi:10.1016/j.engstruct.2006.10.00.
- [6] Dalin,Liu, CTests on high-strength rectangular concrete-filled steelhollow section stub columns»,Journal of Constructional Steel. Research 61 (2005) 902–911.
- [7] Ehab Ellobody,Ben Young, Dennis Lam, « Behaviour of normaland high strength concrete-filled compact steel tube circular stub columns », Journal of Constructional Steel Research 62 (2006) 706–715.
- [8] M.Mouli, H.Khelafi, «Strength of short composite rectangular hollow section columns filled with lightweight aggregate concrete », Engineering Structures (2006), doi:10.1016/j.engstruct.2006.10.00.
- [9] Dalin Liu., «Tests on high-strength rectangular concrete-filled steel hollow section stub columns»,
Journal of Constructional Steel, Research 61 (2005) 902–911.

- [10] Muhammad Naseem Baig, FAN Jiansheng, NIE Jianguo, «Strength of Concrete Filled Steel Tubular Columns», ISSN 1007-0214 05/15 pp657-666 Volume 11, Number 6, December 2006.
- [11] Ever.J.Barbero, «Prediction of buckling mode interaction in composite columns», ACI Journal December 10, 1999.
- [12] A.A. Marinopoulou,V.D. Balopoulos, C.N. Kalfas, «Simulation of partially encased composite steel concrete columns with steel columns»,Journal of Constructional Steel Research (2006),doi:10.1016/j.jcsr.2006.11.003.
- [13] S.Ramana Gopal, P. Devadas Manoharan,«Expérimental behaviour of eccentrically loaded slender circular hollow steel columns in-filled with fibre reinforced concrete»,Journal of Constructional Steel Research 62 (2006) 513–520.
- [14] Eurocode 4 – Conception ET Dimensionnement des Structures Mixtes Acier –Béton. Partie 1-1: règles générales et règles pour les bâtiments.
- [15] Mohanad Mursi, Brian Uy “Strength of slender concrete filled high strength steel box columns”. Journal of Constructional Steel Research 60 (2004) 1825–1848
- [16] Richard Maranda “Analyse par éléments finis de poteaux mixtes avec section d’acier en I de classe 4”.Mémoire présentée en vue de l’obtention du diplôme de maîtrise des sciences appliquées (génie civil) décembre1998. Département des génies civil, géologique, et des mines, Ecole polytechnique de MONTRÉAL.
- [17] Mathias Johansson “Composite Action and Confinement Effects in Tubular Steel-Concrete Columns”. Steel and Composite Structures.
- [18]Hognestad E. “A study of combined bending and axial load in reinforced concrete members”. Bulletin series no. 399, Engineering Experiment Station,Univ. of Illinois, Urbana Ill; 1951.
- [19] Bousalem B., Chikh N., « Development of a Confined Model for Rectangular Ordinary Reinforced Concrete Columns » ;materials and structures, 2007, vol. 40, pp 605-613.

- [20] Ahmad, S. M., and Shah, S. P. (1982). "Complete triaxial stress-strain curves of concrete confined by spiral reinforcement," J. Struct.Div. ASCE, 108(4), 728-742.
- [21] Ahmad, S. M., and Shah, S. P. (1982). "Stress-strain curves of concrete confined by spiral reinforcement," ACI Struct. J., 79(6),484-490.
- [22] Toutanji, Houssam A., (1999), "Stress-Strain Characteristics of concrete Columns Externally Confined with Advanced Fiber Composite Sheets," ACI Material Journal, V.96, No. 3, May-June 1999, pp. 397-404.
- [23] Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R., Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete." J. Struct. Engrg., ASCE, 114(8), 1827-1849,1988.
- [24] Mander, J. B., Priestley, M. J. N., and Park, R., "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete." J. Struct. Engrg., ASCE, 114(8), 1804-1826,1988.
- [25] saatcioglu M. and Razvi S.R., « Strength and Ductility of Confined Concrete », journal of structural engineering , 1992, vol .118,No.6 pp 1590-1607.
- [26] Hoshikuma J,K . Kawashima,K. Nayaga and A.W. Taylor, « Strass-Strain Model for Confined RC in bridge Piers », Journal of structural engineering, 1994, vol .123,No.0.5 pp 624-633.
- [27] Fardis, M.N., and Khalili, H. (1981) "Concrete encased in fiberglass-reinforced plastic." ACI J., 78(6), 44-446.
- [28] Karbhari, V. M., and Gao, Y. (1997), "Composite jacketed concrete under uniaxial compression –Verification of simple design equations." J. Mater. Civ. Eng.,9(4), 185-193.
- [29] Mirmiran, A., and Shahawy, M., (1997), "Behavior of Concrete Columns Confined by Fiber Composites," ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 123,No. 5, 583-590.

- [30] Wu, H., and Xiao, Y., (2000), “Compressive Stress Strain Behavior of Concrete Confined by Carbon Fiber Jackets,” Proceedings of the Sixth ASCCS Conference on Composite and Hybrid Structures, Y. Xiao, and S. A. Mahin, eds., Los Angeles, Calif., Mar. 22-24, 2000. pp.
- [31] Harmon, T. G.; Ramakrishnan, S. and Wang, E. H., (1998), “Confined Concrete Subjected to Uniaxial Monotonic Loading,” ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No. 12, December, 1303-1309.
- [32] Fujikake, Kazunori; Mindess, Sidney and Xu, Hanfeng (2004), “Analytical Model for Concrete Confined with Fiber Reinforced Polymer Composite,” J.Compos. for Constr., Volume 8, Issue 4, pp. 341-351 July/August 2004.
- [33] Becque, J., Patnaik, A. K., and Rizkalla, S. H. (2003), “Analytical models for concrete confined with FRP tubes,” J. compos. Constr., 7(1), pp 31-38.
- [34] Bouafia Y, Idir A, Kachi MS., « Influence of the taking account of the confined concrete on the structures non linear calculation », ACMA 2010 May19-21 2010. Marrakech, Morocco.
- [35] Iddir. A., « influence de la prise en compte du béton confiné dans le calcul non lineaire des sections », mémoire de magister, université mouloud mammeri, tizi ousou, 2009.
- [36] Iddir, A., Bouafia, Y., Kachi. Ms., « La prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des sections », CMMS 08 Les 16, 17 & 18 November 2008, Université M. M. de Tizi-Ouzou, Algérie.
- [37] Bouafia Y, Idir A, Kachi MS., Dumontet H. « stress- strain relationship for the confined concrete », WCCM XI-ECCM V-ECFD VI, July 20 - 25, 2014, Barcelona, Spain.
- [38] Sargin M., « Stress –Strain Relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections » PHD thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada; Mar; 334 p, 1968.

[39] Virlogeux M., « la précontrainte extérieure, Innovation dans le domaine des ouvrages d'arts en béton précontraint », Annales de l'ITBTP, Décembre, 1983.

[40] Virlogeux M., « étude d'une section de poutre en élasticité non linéaire », Annales de l'ITBTP, Mai, 1986.

[41] Virlogeux M., « Calcul des structures en élasticité non linéaire », Annales des ponts et chaussées n°39 et 40, 1986.

[42] Virlogeux M., M'rad, A., « étude d'une section de poutre en élasticité non linéaire », Annales de l'ITBTP, n°444, Mai, 1986.

[43] Virlogeux M., « Calcul des structures en élasticité non linéaire », Annales des ponts et chaussées, 3ème trim.1986.

[44] Virlogeux M., « la précontrainte extérieure au béton », X congrès International de la FIP, New delhi, 1986.

[45] Virlogeux M. M'rad A., « Flexural behavior of externally prestressed structures for ultimate loads, workshop behavior of external prestressing in structures », Rémy –lès – Chevreuses, juin 1993.

[46] Virlogeux M., « External prestressing : from construction history to modern technique and technology, External prestressing in bridges », ACI, SP-120, Ed Antoine Naamane and John Breen, 1990.

[47] M'rad A., « Calcul à la rupture des ponts à précontrainte extérieure au béton »,Thèse de doctorat de 3ème cycle, université pierre et Marie curie (Paris VI), 1984.

[48] Muller J., Gautier Y., « Ultimate behavior of precast segmental box girders with external tendons », External prestressing in bridges, ACI, SP-120, Ed Antoine Naamane and John Breen, 1990.

[49] Kihg-Hwee.,Chee Khoon NG., « effect of behavior and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams »,ACI structural journal. V.94 N°1, janvier, fevrier 1997.

[50] Rezendi-Martin P.L., « Modélisation du comportement jusqu'à la rupture en flexion des poutres en béton à précontrainte extérieure ou mixte », Thèse de doctorat à l'école centrale de paris, 1989.

[51] Guriani E., « on the effective axial stiffness of a bar in cracked concrete Bond in concrete », Ed. P. Bartos, Applied science publishers, Londres, 1982.

[52] Kachi M.S., « modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure », Thèse de doctorat, Université de Tizi - ouzou, Algérie, février 2006.

[53] Nait-Rabah O., « Simulation numérique des ossatures spatiales », Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1990.

[54] Garcia J.F., « Elaboration d'une méthode d'évaluation de la vulnérabilité sismique des bâtiments », INSA Strasbourg, Spécialité- Juillet 2007.

[55] Kachi, MS., Fouré, B., Bouafia, Y., Muller, P., « L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint », Revue Européenne de Génie Civil Volume 10, Décembre 2006, pages 1235-1264.

[56] Kachi, M S., Bouafia Y., Muller P., Fouré B ., « Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire », Colloque international Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures CMMS08 » Tizi Ouzou – Algérie. Le 16, 17 et 18 Nov 2008.

[57] Kachi, MS., Bouafia Y., Muller, P., « Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint », Conférence Internationale Maitrise et Management des Risques Industriels (M2RI'08) Oujda 24-25 avril 2008.

[58] Kachi, MS., Bouafia Y., Muller, P., « Modelization of Prestressed or Reinforced Concrete beams until fracture in Non Linear Elasticity », 12th International Conference on Fracture (ICF12). Ottawa, Canada, July 12-17, 2009.

[59] Bouafia, Y., Kachi, M S., Muller, P., « Model ling of Externally Prestressed Beams Until Fracture on Non Linear Elasticity », International Conference on Structural analysis of Advanced Materials. (IC SAAM-2009) Ecole Nationale D'Ingénieurs de Tarbes, France September 7-10, 2009.

[60] Bouafia, Y., Fouré, B., Kachi, MS., « Shear strength of externally prestressed beams ». II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association with European Cement Association. Sept. 6 - 10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 522-531.

[61] Grelat A., « Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé », Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI, 1978.

[62] BPEL rules, « Technical design and costing and prestressed concrete structures according to limit state method », DTU-BPEL Rules 91, Revised 99.

[63] Vecchio F.J., Collins M.P., « The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear », ACI Journal, March-April 1986, p. 219-231.

[64] Belarbi A; Thomas T.C.HSU, « Constitutive low of softened concrete in biaxial tension-compression », ACI Structural Journal September-October 1995.

[65] Foure, B., «Déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des stuctures », VI Colloque National AFPS, juillet 2003, vol II ,pp 67-74.

[66] Vecchio F.J., Collins M.P., « Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory », ACI Structural Journal, May-June 1988, p. 258-268.

[67] Lahlou K, Lachemi M, Aitcin PC., « Behavior of HSC filled tube columns under dynamic compressive loading », ASCE, Journal of Structural Engineering 1999;125(10):1100–8.

[68] Bouafia, Y., kachi, M.S., Ait tahar, K., Ghazi, F., « Prédiction de la rupture des sections circulaires en béton armé, et béton armé de fibres », JET 2006, association franco - maghrébine de mécanique et des matériaux, 26-28 Avril 2006, Marrakech, Maroc.

[69] Ghazi F., « Evaluation de la Resistance à la Rupture en Flexion Composée des Sections Circulaire en Béton Armé et en Béton Armé de Fibres », Mémoire de magistère, Université de Tizi - ouzou, Algérie, 2005.

[70] Thrin J.L., « Précontrainte partielle essais de poutres continues », Annales de l'I.T.B.T.P.N°530, série béton 318, janvier 1995.

[71] Vecchio F.J., Collins M.P., « The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses », University of Toronto, Department of civil Engineering, Publication No.82-03, March 1982.

[72] Zhan Z.F., Foure B. Trinh L.J., « contribution au dimensionnement des pieux en béton de fibres » .Doctorat, Université D'orleans C .E.B.T.P 1991.

[73] Kachi, Ms., Bouafia, Y., Saad, M., Bouhrat, S., « Contribution au calcul des sections circulaires en béton armé par les armatures discrètes », ACMA 2012, May09-12 2012. Fès, Morocco.

[74] Dall'Asta A., Zona A., « Three field mixed formulation for the non linear analysis of composites beams with deformable shear connection », Finit element in analysis and design. 40. (2004).PP425-448.

[75] Dehousse N., « Fiber reinforced cement and concret », Ryhlem symposium, G.B., communication 4.1. The construction press L.T.D., ED. Adam Neuilly, 1975.

[76] Di Prisco M., Gombrova G., « compressive model for study of shear in thin-webbed RC and PC beams », Journal of structural engineering. December 1995.

[77] Drizi S., « contribution à l'étude du comportement des voiles porteurs en béton vis-à-vis des sollicitations sismiques », Thèse de doctorat, ParisVI, avril 1993.

[78] Dronnadulla V. and all., « Ultimate load behaviour of precast single-cell segmental box bridges with externally post-tensioning », Workshop behavior of external prestressing in structures.Saint Rémy-lés-Chevreuse, juin 1993.

[79] Edington J., Hannant D.J., « Stel fiber reinforced concrete, the effect of fiber oriantation of compacting by vibration », Matériaux et construction 5, n°25, pp41-44, janvier –février 1972.

[80] Espion B., « contribution à l’analyse non linéaire des ossatures planes, Application aux structures planes en béton armé », Thèse de doctorat, Université libre de Bruxelles, 1986.

[81] Falkner H., Teutsch M., Huang Z., « prestressed segmental box girders winth unbonded tendons under combined torsion bending and shear », Workshop behavior of external prestressing in structures.Saint Rémy-lés-Chevreuse, juin 1993.

[82] Ferraro Maia A.C, Grelat A., Foure B., « Analyse non linéaire des ossatures en béton armé ou précontraint compte tenu de retrait, du fluage et de la relaxation », Annales de l’I.T.B.T.P. N°412, Février 1983.

[83] Foure B., « déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des structures », VI colloque national AFPS. juillet 2000, vol. II,pp 67-74.

[84] Foure B., « Béton à haute résistance », rapport interne OG, C.E.B.T.P., Nov.1985.

[85] Foure B., Rezende-Martins P.C. DE., Howang L.M., « Problème de sécurité à rupture et de modelisation du comportement des poutres en béton à précontrainte extérieure », Annales de l’I.T.B.T.P. Février 1991.

[86] Zhong.T, Lin.Hai.H, Zhi-Bin.Wang, « Experimental behaviour of stiffened concrete filled thin walled hollow structural (HSS) stub column », Journal of Constructional Steel. Research 61 (2005) 962–983.

[87] Mohanad Mursi, Brian Uy., « Strength of slender concrete filled high strength steel box column », Journal of Constructional Steel Research 60 (2004) 1825–1848.

[88] Muhammad Naseem Baig, FAN Jiansheng, NIE Jianguo, «Strength of Concrete Filled Steel Tubular Columns »,ISSN 1007-0214 05/15 pp657-666 Volume 11, Number 6, December2006.

[89] Ever.J.Barbero, «Prediction of buckling mode interaction in composite columns »,ACI Journal December 10, 1999.

[90] A.A. Marinopoulou,V.D. Balopoulos, C.N. Kalfas, « Simulation of partially encased composite steel–concrete columns with steel columns », Journal of Constructional Steel Research (2006)

[91] N.E.Shanmugan, B.Lakshmi, «State of art report on steel –concrete composite columns », Journal of Constructional Steel. Research 57 (2001) 1041–1080.

[92] Lin-Hai Han, You-Fu Yang, «Cyclic performance of concretefilled steel CHS columns under flexural loading », Journal of Constructional Steel. Research 61 (2005) 423–452.

[93] Richard Maranda, «Analyse par éléments finis de poteaux mixtes avec section d’acier en I de classe 4», Mémoire présentée en vue de l’obtention du diplôme de maîtrise des sciences appliquées (génie civil) décembre1998. Département des génies civil, géologique, et des mines, Ecole polytechnique deMONTRÉAL.

[94] Johansson M. and Gylltoft K., «Mechanical Behaviour of Circular Steel-Concrete Composite Stub Columns», Journal of Structural Engineering, Vol. 128, No. 8, August 2002,ASCE, 1073-1081.

[95] C.C. Weng, S.I. Yen, « Comparisons of concrete-encased composite column strength provisions of ACI code and AISC specification», Engineering Structures 24 (2002) 59–72.

[96] Kachi M.S., « Calcul non linéaire, jusqu’à rupture, d’une section en béton armé de fibres métalliques », Thèse de magister, Université de Tizi - ouzou, Algérie, février 1997.

[97] Bouafia, Y., Kachi, MS., Fouré, B., « Relation contrainte - déformation dans le cas du béton armé de fibres d'acier », Annales de l'ITB, Ed. ESKA, France, N°3, juin 2002, pp. 5-17.

[98] Bouafia, Y., Kachi, MS., Fouré, B., « Numerical modeling of the behavior of steel fiber reinforced concrete », II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association – European Cement Association. Sept. 6 - 10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp.582-591.

[99] Bouafia, Y., Fouré, B., Kachi, MS., « Relation effort - ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier », Annales de l'ITB, Ed. ESKA, France, N°2, avr. 1998, pp. 5-14.

[100] Victor, Davidovici., «Formulaire du béton armé 1 », Edition du moniteur paris, 1996.

[101] Sheikh, S. A. and Uzumeri S., « Analytical Model for Concrete Confinement in Tied Columns », journal of structural Division, ASCE,1982, vol .108,No.12 pp 2703-2722.

[102] Montoya E., Vecchio F.J and Sheikh S. A., « Compression Field Modeling of Confined Concrete », structural engineering mechanics, 2001, vol. 24,No.3 pp 231-248.

[103] Virlogeux anales l'I.T.B.T.P N°444, mai 1986

[104] Bouafia Y., Kachi MS., « calcul non linéaire jusqu'à rupture d'une section de poutre soumise a une flexion plane », Journées scientifiques, CTC-Centre- Université M.M. de Tizi-Ouzou, 25-26 juin 1997.

[105] Vecchio F.J., Collins M.P., « Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory», ACI Structural Journal, May-June 1988, p. 258-268.

[106] Foure B., Rezende-Martins P.C. DE., « comportement en flexion jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure », AFPCXI congrès de la FIP Hambourg, 1990.

[107] Foure B., Bouafia Y., Soubret R., Thomas P., « shear test on keyed joints between precast segments », Workshop behavior of external prestressing in structures. Saint Rémy-lès-Chevreuse, France juin 1993.

[108] Garcia-Vargas JA., « la précontrainte extérieure appliquée à des poutres hyperstatiques », Thèse de doctorat, Ecole centrale des Arts et Manufactures, Paris 1994.

[109] Grelat A., « comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé », Annales de l'I.T.B.T.P. N°336, Novembre 1978.

[110] Grelat A., « Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé », Thèse de doctorat Ingénieur, Université Paris VI, 1978.

[111] Grelat A., Nait Rabah O., « simulation numérique du comportement des structures en béton armé ou précontraint hors du domaine linéaire », Rapport du SES-CEBTP, Octobre 1988.

[112] R. Mahtout, A. Iddir, Y. Bouafia, Ms. Kachi., « la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des sections », J.S. UMMTO 20-21 November Université M. M. de Tizi-Ouzou, Algérie.

[113] Gongchen D. Xuekang T., « contrainte ultime dans les câbles non adhérents de poutres en béton à précontrainte partielle », Annales de l'I.T.B.T.P. N°412, Février 1988.

[114] Higer F.J., Mcgrath T.J., « Shear strength of pipe box section and other one-way flexural members », ACI journal November-December 1982

[115] Hindi A., Kreger M. et Breen J., « Enhancing the strength and ductility of post-tensioned segmental box-girder bridges », Rapport de recherche n°1209-2F. Center for transportation research. Université du Texas à Austin, avril 1991.

[116] Hindi A., Kreger M. et Breen J., « Enhancing the strength and ductility of post-tensioned segmental box-girder bridges », Workshop behavior of external prestressing in structures. Saint Rémy-lès-Chevreuse, France juin 1993.

[117] Hyo-Gyoung Kwak., Sun-Pil Kim., «Non linear analysis of RC beams based on moment-curvature relation», Computers and structures.80,pp615-628,2002.

[118] Kachi M.S.,Bouafia Y.,Drizi S.,«Calcul non linéaire jusqu'à rupture d'une section en béton armé, béton précontraint et section mixtes», Premier séminaire national en Génie civil. Biskra Algérie. 8 et 9 décembre 1996.

[119] Adjrad A., Bouafia Y., Kachi MS., Dumontet H., « Modeling of Externally Prestressed Beams until Fracture in Non Linear Elasticity », Applied Mechanics and Materials, Vol. 749 (2015), pp 379-385.

[120] Kaverchin M., « Recherche sur les structures en béton », Annales de l'I.T.B.T.P.N°360, Avril 1978.

[121] Kaverchin M., « Utilisation de la précontrainte extérieur » Annales de l'I.T.B.T.P. Juin 1983.

[122] Lim T.Y., Pramasivam P., Lee S., «Analytical model for tensile behavior of steel fiber reinforced concrete J.ACI,July-August 1987.

[123] Macleod I.A.,Houmsi A., «shear strength of haunched beams without shear reinforcement», ACI structural journal, Janury-Febrery 1994.

[124] Mansour M.Y., Dicleli M., Lee J.Y.,Zhang J., « Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using artificial neural networks», Engineering Structures.26.(2004).PP781-799.

[125] Mahtout R., «Vulnérabilité des structures poteaux-poutres en béton armé vis-à-vis des efforts sismiques», mémoire de magister, université mouloud mammeri, tizi ouzou, 2009.

[126] Richart FE, Brandtzaeg A, Brown RL., « A study of the failure of concrete under combined compressive stresses », Engineering Experiment Station, Univ. ofIllinois, Urbana, I11; 1928.

[127] Teng JG, Jiang T, Lam L, Luo YZ., « Refinement of a design-oriented stress–strain model for FRP confined concrete », *J Compos Constr ASCE* 2009;13(4):268–78.

[128] Jiang T, Teng JG., « Analysis-oriented stress–strain models for FRP-confined concrete », *Eng. Struct* 2007;29:2968–86.

[129] Teng JG, Huang YL, Lam L, Ye LP., « Theoretical model for fiber-reinforced polymer-combined concrete », *J Compos Constr* 2007;11(2):201–10.

[130] Becque J, Patnaik AK, Rizkalla SH., « Analytical models for concrete confined with FRP tubes ». *J Compos Constr* 2003;7(1):31–8.

[131] Harmon TG, Ramakrishnan S, Wang EH., « Confined concrete subjected to uniaxial monotonic loading », *J Eng Mech* 1998;124(12):1303–8.

[132] Toutanji HA. , « Stress–strain characteristics of concrete columns externally confined with advanced fiber composite sheets », *ACI Mater J* 1999;96(3):397–404.

[133] Saafi M, Toutanji HA, Li Z., « Behavior of concrete columns confined with fiber reinforced polymer tubes », *ACI Mater J* 1999;96(4):500–9.

[134] Lillistone D, Jolly CK., « An innovative form of reinforcement for concrete columns using advanced composites », *Struct Eng* 2000;78(23/24):20–8.

[135] Li YF, Lin CT, Sung YY., « A constitutive model for concrete confined with carbon fiber reinforced plastics », *Mech Mater* 2003;35:603–19.

[136] Jin XN, Pan JL, Liu GY, Lai WH., « Research of stress–strain curve of concrete confined by fiber reinforced plastics under axial compression ». *J Build Struct* 2003;24(4):47–53 [in Chinese].

[137] Lam L, Teng JG., « Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete », *Constr Build Mater* 2003;17:471–89.

[138] Lam L, Teng JG., « Design-oriented stress–strain model for FRP-confined concrete in rectangular columns », *J Reinf Plast Compos* 2003;22(13):1149–86.

- [139] Harajli MH, Hantouche E, Soudki K. , « Stress–strain model for fiber-reinforced polymer jacketed concrete columns », *ACI Struct J* 2006;103(5):672–82.
- [140] Baris B., « An analytical model for stress–strain behavior of confined concrete », *Engineering Structures* 27 (2005) 1040–1051, February 2005.
- [141] Orito Y, Sato T, Tanaka N, Watanabe Y., « Study on the unbonded steel tube composite system. In: Composite construction in steel and concrete proceedings », ASCE engineering foundation. 1987,p. 786–804.
- [142] McAteer P, Bonacci JF, Lachemi M., « Composite response of highstrength concrete confined by circular steel tube. *ACI, Structural », Journal* 2004;101(4):466–74.
- [143] Saad, M., Kachi, MS.,Bouafia, Y., Muller, P., Fouré, B., « Influence du pourcentage d'acier sur le comportement du béton tendu fissuré », *European Journal of Environmental and Civil Engineering* Volume 14, Issue 3, March 2010, pages 303-327.
- [144] DiPrisco M.,Gombrova G.,« Comprehensive model for study of shear in thin webbed RC and PC beams », *Journal of structural engineering*. December 1995.
- [145] Falkner H.,Teutsch M.,Huang Z., « Prestressed segmental box girders with unbounded tendons under combined torsion bending and shear », workshop behavior of external prestressing in structures . Saint Remy-les-Chevreuse,juin 1993.
- [146] Gregor T.,Collins M.P., « Test of large partially prestressed concrete girders », *ACI structural journal* January-February 1995.
- [147] Heger F. J.,Mcgrath T.J., « Shear strength of pipe box section and other one-way flexural members », *ACI Journal* November-December 1982.
- [148] HUANG J., EIBL J., « Design of segmental bridges under combined bending, shear and torsion fe-study », Workshop Behavior of external prestressing in structures. Saint Remy- Les-Chevreuse,juin 1993.

[149] Keun Hyeok Yang, Heon-Soo Chung, Eun-Taik Lee, Hee-Shang Eun, « shear characteristics of high-strength concrete deep beams without shear reinforcement », *Engineering Structures*.25.(2003).PP1343-1352.

[150] Kishi N., Nikami H., Hatsuoka K.G., Ando T., « Impact Behavior of Shear-Failure-type RC beams without shear bar », *International Journal of impact Engineering*.27 (2002).PP955-968. 92.

[151] Mau S.T., Thomas T.C.Hsu, « Shear design and analysis of low-rise structural walls », *ACI Structural Journal* March-April 1986.

[152] Ramirez G., Macgregor R., Kreger M.E., Roberts-Wollmann R., Breen J., « Shear strength of segmental structures », *Workshop Behavior of external prestressing in structures*. Saint Remy-les-Chevreuse, juin 1993.

[153] Salandra M.A., Shuaib H.A., « Shear capacity of reinforced lightweight high strength concrete beams », *ACI structural Journal* November-December 1989.

[154] Stanciulescu-Panea I., « Modélisation de l'influence de l'effort tranchant dans le comportement non linéaire des poutres en béton armé », mémoire de DEA de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Juillet 1996.

[155] Stroband J., « Shear capacity of high strength concrete beams with shear reinforcement », *Progress in concrete research* vol num 5 1997.

[156] Thomas T.C.Hsu, « softened truss model theory for shear and torsion », *Research Rapport UHCE-86-9* University Of Houston August 1986.

[157] Thomas T.C.Hsu, « Non-linear analysis of concrete membranes elements », *ACI Structural Journal* September-October 1991.

[158] Thomas T.C.Hsu, Mo Y.L., « Softening concrete in low-rise shear walls », *ACI Structural Journal* November-December 1985.

[159] Eurocod 2, Env 1992-1-1, Nf P 18 711, « Calcul des structures en béton, Partie 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments », Décembre 1992.

[160] Panagiotis Kotronis, « Cisaillement Dynamique De Murs En Beton Arme Modeles Simplifiés 2D et 3D », thèse de doctorat-Ecole Normale Supérieure de Cachan ; décembre 2000.

[161] Davidovici V. et al. , « Génie Parasismique », Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1985.

[162] Martin-Pérez B. & Pantazopoulou S. J. , « Mechanics of concrete participation in cyclic shear resistance of RC », Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No 6, June, pp. 633-641, 1998.

[163] Lampert P. & Thurlimann B., « Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending », IABSE, No. 31-I, 107,131, 1971.

[164] Moy.L. & Rothert. H., « Effect of softening models on behavior of reinforced concrete framed shearwalls », ACI Structural journal, V.94, No.6, November- December, 1997.

[165] Davenne L., « Modélisation de l'influence des armatures transversales sur le comportement non linéaire d'éléments de béton armé », Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, 1990.

[166] Baby F, Marchand P, Atrach M, Toutlemonde F., « Analysis of flexure-shear behavior of UHPFRG beams based on stress field approach », Engineering structures 56 (2013) pp 194-206.

[167] Iddir, A., Bouafia, Y., Kachi. Ms., « Simulation of the influence of the confinement, until fracture, on the shear stiffness of the reinforced or prestressed concrete », 20th European Conference on Fracture (ECF20), Procedia Materials Science 3 (2014) 679 – 685.

[168] Bouafia Y., « Résistance à l'effort tranchant des poutres à précontrainte extérieure - Etude expérimentale et calcul à la rupture », Thèse de Docteur (Nouvelle thèse), Ecole Centrale Paris, 288 p, Nov. 1991.

[169] Bouafia Y., « Simulation numérique du comportement moyen, jusqu'à rupture, d'une zone de poutre. Application au béton armé ou précontraint et béton de fibres », Mémoire DEA, Université de Paris 6, 77 p, juin 1987.

[170] Adjrad A., Bouafia Y., Kachi MS, Dumontet H., « Modeling of internally or externally prestressed concrete beams until fracture in non linear elasticity », IACSIT, International Journal of Engineering and Technology (IJET), july, 2014.

[171] Saad M., Bouafia Y., Kachi M. S. « Contribution à l'évaluation d'ouverture des fissures dans les éléments en béton armé », Annales du bâtiment et travaux publics, Ed. ESKA, n° 4, Juin 2014.

[172] Adjrad A., Kachi, MS., Bouafia Y., Iguetoulène F., « Nonlinear modeling structures on 3D », The International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials, ICSAAM 2011, 7-11 september, Sinaia, Romania, pp. 1 – 9.

[173] Adjrad A., Bouafia Y., Kachi MS., Dumontet H., « Modeling of Externally Prestressed Beams until Fracture in Non Linear Elasticity », International Conference on Intelligent Materials and Manufacturing Engineering, IMME 2015 - M060, Phuket Island, Thailand, 16 – 17 January 2015.

[174] Bouafia, Y., Saad, M., Kachi, MS., « Relations contraintes – déformations moyennes et ouvertures des fissures dans le cas d'un tirant en béton armé ». Société Marocaine des Sciences Mécaniques - Réseau Universitaire de mécanique, El jadida - Maroc, 8 è Congrès de Mécanique, 17 - 20 avril 2007.

[175] Bouafia, Y., Saad, M., Kachi, MS., « Influence du pourcentage d'acier sur le comportement du béton fissuré en traction ». Société Marocaine des Sciences Mécaniques - Réseau Universitaire de mécanique, Maroc (Casablanca), 7 è Congrès de Mécanique, 19 - 22 avril 2005.

Abstract

In the civil engineering, the calculation of circular sections is not easy because there are many unknowns in the equations of equilibrium. The required experience, advantages and disadvantages and problems to solve have been widely discussed by many authors. The calculation of such sections is difficult to predict exactly their behavior. The effect of the tensioned concrete, even after cracking, has a great importance. The effect of the confinement of concrete generally gives this one greater resistance and ductility according to the level of confinement. In this study we propose a model which is based on the equilibrium, compatibility equations and which are formulated by average stresses and average strains. According to the assumptions. This model is able to analyze sections having unusual forms or reinforcing details, loaded in combined bending, axial load and shear. In the case of the confined concrete, a stress-strain relation of this one is proposed. In this case, for the purpose of investigating confinement effect, an effectively confined ratio was introduced and the effects according to concrete compressive strength. Predictions of the model are compared with several calculated unconfined reinforced or prestressed beams and are shown to estimate the effect of the confinement on the shear stiffness of the sections in the case of the elastic linear domain, after concrete cracking and after reinforcement yielding. The results of the comparison give a good satisfaction.

Keywords: nonlinear elasticity, confinement, circular section, shear force, shear stiffness, ties discrete, equilibrium, compatibility, cracks.

Résumé

Dans le domaine de génie civil le calcul des sections circulaires n'est pas aisé compte tenu de la disposition des armatures qui induit plusieurs inconnues dans les équations d'équilibre. L'expérience acquise, les avantages et les inconvénients ainsi que les problèmes à résoudre ont été largement discutés par de nombreux auteurs. Le calcul de telles sections présente des incertitudes sur certains aspects de leur comportement. L'effet de l'influence du béton tendue même après fissuration est d'une grande importance. L'effet confinement du béton en général lui confère une plus grande résistance et une plus grande ductilité en fonction du niveau du confinement. Dans le cadre de cette étude nous proposons un modèle de calcul basé sur les équations d'équilibres et de compatibilités qui sont formulées en termes de contrainte et déformation moyenne selon des hypothèses. Ce modèle est capable d'analyser des sections quelconques avec tous les détails de ferrailage sous l'ensemble des sollicitations (effort normal, moment fléchissant et effort tranchant). Une loi de comportement contrainte-déformation du béton confiné a été proposée. Le confinement du béton sera introduit par le biais d'un coefficient de confinement effectif, et d'une contrainte de confinement latérale. La méthode de calcul est injectée dans un logiciel de calcul non linéaire des éléments de structures afin d'étudier la contribution et l'influence du confinement du béton sur le comportement global des éléments de structures de section circulaire et sur la rigidité au cisaillement dans le cas des poutres en béton armé et précontrainte. Enfin, le modèle de prise en compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire a été également proposé, ce dernier permet de prédire le comportement des poutres en cisaillement combiné à l'existence des contraintes normales, ce qui permet alors d'estimer la rigidité réelle de cisaillement des poutres, pour un niveau de charge donné.

Mots-clés : Elasticité non linéaire, Confinement, section circulaire, effort tranchant, rigidité au cisaillement, armatures discrètes, équations d'équilibres, équations de compatibilités, rupture.