

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

Option : PROBABILITES ET STATISTIQUE

Présentée par :

Mme Farida ACHEMINE

Sujet :

Théorèmes Limites Fonctionnels et Application aux Systèmes d'Attente

Devant le jury d'examen composé de :

M. Mohamed Aidene ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Président
M. Djamel Hamadouche ;	Professeur ;	U.M.M.T.O ;	Rapporteur
Mme Natalia Djellab ;	Professeur ;	U. Annaba ;	Examinatrice
Mme Hafida Guerbyenne ;	Professeur ;	U.S.T.H.B. ;	Examinatrice
Mme Faiza Belarbi ;	Professeur ;	U. Sidi Bel Abbès ;	Examinatrice
M. Youcef Berkoun ;	M.C.A. ;	U. Tizi-Ouzou ;	Examineur

Soutenue le 17 /10 /2012 .

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements au professeur D. HAMADOUCHE, mon directeur de thèse, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, sa disponibilité et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont au professeur M. AIDENE pour avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie également les professeurs N. DJELLAB, H. GUERBYENNE et F. BELARBI de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

J'adresse également mes remerciements à Y. BERKOUNE de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

J'aimerais aussi remercier le professeur A. AISSANI pour ses précieux conseils et sa contribution dans la deuxième partie de ce travail.

Je remercie vivement mon cher mari pour l'aide, le soutien, l'amour et les encouragements dont il a toujours fait preuve à mon égard. Je remercie mes frères et soeurs et mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu.

Pour terminer, mon affection va pour mes deux adorables filles Rachel et Lamys à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction générale	3
1 Théorèmes limites fonctionnels	7
1.1 Introduction	7
1.2 Convergence faible et équitension dans les espaces métriques	7
1.2.1 Convergence faible	7
1.2.2 Convergence en loi	8
1.2.3 Théorème du Portemanteau	9
1.2.4 Equitension	9
1.3 Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$	10
1.3.1 Définitions	10
1.3.2 Convergence faible et équitension	10
1.4 Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$	11
1.4.1 Définitions	11
1.4.2 Convergence faible et équitension	13
2 Principes d'invariance hölderiens dans le cas indépendant	14
2.1 Introduction	14
2.2 Les espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$	15
2.2.1 Définitions	15
2.2.2 Analyse par les fonctions triangulaires	15
2.2.3 Compacité dans H_α^0	17
2.2.4 Dual de H_α^0	18
2.2.5 Processus à trajectoires dans H_α	19
2.2.6 Convergence faible hölderienne	19
2.3 Principes d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes	21

2.3.1	Lissage polygonal du processus de sommes partielles	21
2.3.2	Lissage par convolution du processus de sommes partielles . .	24
3	Principes d'invariance hölderiens pour des suites dépendantes	26
3.1	Introduction	26
3.2	Cas de suites de variables aléatoires α -mélangeantes	26
3.3	Cas de suites de variables aléatoires associées	29
3.4	Cas de suites de variables aléatoires faiblement dépendantes au sens de Doukhan-Louhichi	31
3.4.1	Définitions	31
3.4.2	Principes d'invariance dans $D[0,1]$	34
3.4.3	Coefficients de dépendance faible	35
3.4.4	Principes d'invariance dans H_α	36
4	Application aux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels	48
4.1	Introduction	48
4.2	Le système M/G/1 avec rappels	49
4.3	Période active et période inactive de l'orbite	50
4.4	L'évolution du système par alternance de périodes actives et inac- tives du serveur	55
4.5	Exemples numériques	57
	Conclusion générale	62
	Annexe A : Processus gaussiens et mouvement brownien	64
	Annexe B : Généralités sur les systèmes d'attente avec rappels	72
	Bibliographie	80

Introduction générale

La convergence en loi de processus stochastiques est très utilisée dans les applications physiques telles qu'en statistique et les phénomènes d'attente. Ces applications sont basées sur des fonctionnelles continues de trajectoires de ces processus. Plus précisément, on utilise le théorème de la fonction continue qui énonce que pour toute fonction h continue sur un espace métrique E , à valeurs dans un espace métrique E' et toute suite de variables aléatoires (S_n) convergeant en loi dans l'espace E vers une limite W , $h(S_n)$ converge aussi en loi vers $h(W)$.

Parmi les processus stochastiques les plus utilisés dans ces applications, on retrouve notamment le processus des sommes partielles, le processus empirique et le processus quantile. En occurrence, la convergence en loi du processus de sommes partielles est largement utilisée dans les tests de rupture épidémique et l'étude asymptotique de certains paramètres de systèmes d'attente (cf. [65],[68] et [74] à [77]). Cette convergence en loi est également connue sous le nom de principe d'invariance.

Le principe d'invariance, connu sous le nom du théorème de Donsker-Prohorov, énonce que pour toute suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles (v.a.r.) indépendantes et de même loi (i.i.d.), centrées et réduites, la suite des sommes partielles normalisées

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{i=[nt]} X_i, \quad t \in [0,1]$$

converge faiblement vers le mouvement brownien standard W , dans l'espace de Skorokhod $D[0, 1]$, muni de la métrique uniforme. Une variante de ce résultat est la convergence dans l'espace $C[0,1]$ vers la même limite, du processus lissé

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{i=[nt]} X_i + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \right], \quad t \in [0,1].$$

D'autre part, il est bien connu que le mouvement brownien est à trajectoires hölderiennes pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{2}$ et l'espace de Hölder possède une topologie plus fine que celles des espaces D et C (donc possède plus de fonctionnelles continues). Ceci est la motivation principale de Lamperti [50] à étendre le principe d'invariance de Donsker dans les espaces de Hölder.

Ce résultat établit la convergence de la suite de processus de sommes partielles lissés, basés sur des variables aléatoires i.i.d. centrées vers le mouvement brownien dans les espaces de Hölder pour tout ordre $\alpha < \frac{1}{2}$. Kerkyacharian et Roynette [49] ont redémontré le théorème de Lamperti en utilisant la base de Faber-Schauder. Résultat par ailleurs, étendu au cas de v.a.r dépendantes (α -mélange, association) par Hamadouche [43]. Le cas indépendant et non de même loi est également traité dans Hamadouche et Taleb [44]. Pour des applications de ces principes d'invariance hölderiens, on renvoie aux travaux de Suquet & Răckauskas ([65] à [68]) et de Suquet & Viano [74].

Pour une suite de processus empiriques, basés sur des v.a.r. indépendantes et de même loi uniforme, Hamadouche [41] a établi la convergence de cette suite vers le pont brownien B dans H_α , pour tout $\alpha < \frac{1}{4}$. Notons ici que, contrairement au principe d'invariance de Lamperti, la borne obtenue pour l'ordre de régularité hölderienne est inférieure à celle du processus limite B ($\alpha < 1/2$). Le caractère surprenant de la borne $\alpha < \frac{1}{4}$ s'explique par les propriétés des espacements d'une suite i.i.d. et le type de lissage utilisé (lissage polygonal). Avec le lissage par convolution les choses rentrent dans l'ordre, Hamadouche et Suquet [42] ont établi cette convergence pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$. Le résultat est également étendu au cas de v.a.r. dépendantes par Merabet et Hamadouche [51].

La première partie de ce travail consiste en l'extension du théorème de Lamperti au cas de suites strictement stationnaires de v.a. r. vérifiant la notion de faible dépendance introduite par Doukhan et Louhichi [30]. Dans l'espace $D[0,1]$, cette notion est largement étudiée et présente des propriétés meilleures que le mélange. Cette dépendance est plus générale que l'association et le mélange fort, et permet de traiter ces deux notions dans une approche unifiée. Le premier principe d'invariance

pour ce type de dépendance dans l'espace de Skorohod est établi par Doukhan et Louhichi [30] sous la condition d'existence des moments d'ordre supérieur à 4. Par la suite, cette condition de moments a été améliorée par Dedecker et Doukhan [26] sous les conditions de θ -faible dépendance, par Bulinski et Shashkin [13] dans le cas de k' -faible dépendance et par Doukhan & Wintenberger [33] pour des variables k et λ -faiblement dépendantes, en requérant uniquement l'existence des moments d'ordre supérieur à 2. Plusieurs applications à l'économétrie sont étudiés dans [31], [32] et [33].

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse au comportement asymptotique de la période d'activité du modèle M/G/1 avec rappels exponentiels. L'analyse de cette caractéristique est très importante du point de vue du serveur et aussi très utile dans l'organisation effective des ressources du système d'attente. Plusieurs méthodes basées sur la transformée de Laplace-Steiltjes ont été élaborées pour étudier cette caractéristique; voir Artalejo [5], Falin [37] et Falin & Templeton [38]. Parmi les approches utilisées dans l'estimation de la densité de la période d'activité ordinaire du système, on peut citer l'approche du principe du maximum d'entropie et l'approche de la file d'attente tronquée (Artalejo et Gomez-Corall [7]).

Dans notre démarche, on propose deux approches.

- La première approche repose sur le résultat donné par Artalejo et Falin [36]. Les auteurs ont montré qu'on peut étudier certaines caractéristiques de la file d'attente M/G/1 avec rappels en décrivant l'évolution du système en termes de périodes actives $L_k^{(b)}$ et de périodes inactives $L_k^{(i)}$ de l'orbite. En utilisant ces notions et le principe d'invariance hölderien donné par Hamadouche et Taleb [44], on donne la loi asymptotique d'une période d'activité du système.

- Dans la deuxième approche, en utilisant l'évolution du système selon la suite (R_i, S_i) de périodes inactives et de périodes actives du serveur, une période d'activité ordinaire du système s'écrit comme la somme de n variables aléatoires dépendantes et non de même loi, sachant que n est le nombre de clients servis pendant cette période. On terminera l'étude en utilisant un principe d'invariance dans le cas dépendant (Hamadouche [43]).

La thèse est structurée comme suit :

Le premier chapitre comporte une synthèse des résultats de convergence faible de

processus stochastiques dans les espace métriques $D[0,1]$ et $C[0,1]$.

La première partie du chapitre 2 est consacrée aux espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$, $0 < \alpha \leq 1$. On commence par rappeler les résultats de Ciesielski [20] sur ces espaces. Ensuite, les principaux résultats d'équitension et les critères de convergence en loi dans les espaces de Hölder sont passés en revue. On termine le chapitre, en rappelant les principes d'invariance hölderiens dans le cas des variables aléatoires indépendantes obtenus par Lamperti [50], Hamadouche [43] et Hamadouche & Taleb [44].

Dans le troisième Chapitre, on rappelle les résultats de convergence faible hölderienne établis par Hamadouche dans le cas des suites de variables aléatoires faiblement dépendantes (le α -mélange et association) [43]. Certains de nos résultats sont concentrés dans la deuxième partie de ce chapitre. Ils consistent en l'extension du théorème de Lamperti au cas de suites de variables aléatoires faiblement dépendantes au sens de Doukhan et Louhichi. En utilisant quelques inégalités de moments établies, on montre une version du principe d'invariance de Lamperti pour les lignes polygonales d'interpolation du processus de sommes partielles. Le même résultat est établi pour le lissage par convolution du processus de sommes partielles.

Dans le chapitre 4, on présente une étude du comportement asymptotique de la période d'activité d'une file d'attente M/G/1 avec rappels. Nous proposons deux approches. La première approche est basée sur les notions de périodes actives et de périodes inactives de l'orbite[4] et le principe d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes. Dans la seconde approche, on utilise la description de l'évolution du système en termes de périodes d'activité et de périodes d'inactivité du serveur et on propose également de conclure avec un principe d'invariance hölderien.

- Quelques propriétés du mouvement brownien sont présentées en Annexe A.
- L'annexe B est consacrée aux généralités sur les systèmes d'attente avec rappels.

Chapitre 1

Théorèmes limites fonctionnels

1.1 Introduction

La convergence faible d'une suite de processus stochastiques dans les espaces fonctionnels est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et la relative compacité de la suite de mesures associées à cette suite de processus. Lorsque l'espace est polonais (séparable, métrisable et complet), Prohorov a établi que la relative compacité d'une famille de mesures de probabilités est équivalente à l'équitension de cette famille.

Dans ce chapitre, après un rappel des définitions de la convergence faible, on énoncera des critères d'équitension et de convergence faible pour chacun des espaces polonais $(C[0,1], \mathcal{C})$ et $(D[0,1], \mathcal{D})$.

1.2 Convergence faible et équitension dans les espaces métriques

1.2.1 Convergence faible

Soient E un espace métrique muni d'une distance d et \mathcal{B} la tribu borélienne engendrée par les parties ouvertes de E . On note par P une mesure de probabilité sur (E, \mathcal{B}) .

Définition 1.1. (Billingsley [9])

On dit que la suite de mesures de probabilité (P_n) sur (E, \mathcal{B}) converge faiblement vers la mesure de probabilité P si et seulement si pour toute fonction réelle, continue et bornée f

sur E , on a

$$\int_E f dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f dP$$

Cette convergence faible est notée par $P_n \Longrightarrow P$.

Théorème 1.1. (*Billingsley [9]*)

On dit que deux mesures de probabilités P et Q sur (E, \mathcal{B}) coïncident si

$$\int_E f dP = \int_E f dQ,$$

pour toute fonction réelle, continue et bornée f sur E .

Remarque 1.1.

Le théorème 1.1 garantit l'unicité de la limite dans la convergence faible.

Notons aussi que deux distances qui engendrent la même topologie donnent le même ensemble de fonctions continues sur E . Par conséquent, elles mènent à la même notion de convergence faible : la convergence faible dépend uniquement de la topologie de l'espace et non pas de la métrique l'ayant engendrée.

1.2.2 Convergence en loi

Soit X un élément aléatoire d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans l'espace métrique (E, \mathcal{B}) .

Définition 1.2. On dit qu'une suite d'éléments aléatoires (X_n) , à valeurs dans E , converge en loi (faiblement) vers l'élément aléatoire X , si et seulement si, la suite (P_n) des lois de probabilité des variables (X_n) converge faiblement vers la loi de probabilité P de X dans E et on écrit $X_n \xrightarrow{L} X$.

Définition 1.3. On dit que la suite de processus $(X_n(t))_{t \in T}$ converge en loi fini-dimensionnelles vers $(X(t))_{t \in T}$ si pour tout k -uplet $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in T^k$, la suite de vecteurs $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k))$ converge en loi vers $(X(t_1), \dots, X(t_k))$.

Théorème 1.2. (*Théorème de la fonction continue*) (*Billingsley [9]*)

Si (X_n) converge faiblement vers X , et si Φ est une fonction continue de E dans E' (deux espaces métriques), alors $\phi(X_n)$ converge faiblement vers $\Phi(X)$.

1.2.3 Théorème du Portemanteau

Les résultats de la convergence faible sont basés sur le théorème du Portmanteau.

Théorème 1.3. (*Billingsley [9]*)

Soient P_n et P des mesures de probabilités sur (E, \mathcal{B}) . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1) $P_n \Longrightarrow P$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f dP_n = \int_E f dP$ pour toute fonction réelle, bornée et continue sur E .
- 3) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ pour tout fermé F de \mathcal{B} .
- 4) $\liminf_n P_n(O) \geq P(O)$ pour tout ouvert O de \mathcal{B} .
- 5) $\lim_n P_n(A) = P(A)$ pour tout ensemble de continuité A de P .

A est dit ensemble de continuité de P , si $P(\partial A) = 0$, avec ∂A la frontière de A .

Ce théorème possède une version exprimée en terme de convergence en loi.

Théorème 1.4. (*Billingsley [9]*)

Soient (X_n) et (X) des éléments aléatoires de (E, \mathcal{B}) . Les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1) $X_n \xrightarrow{L} X$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$, pour toute fonction réelle f , bornée et uniformément continue sur E .
- 3) $\limsup_n P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$ pour tout fermé F de \mathcal{B} .
- 4) $\liminf_n P(X_n \in O) \geq P(X \in O)$ pour tout ouvert O de \mathcal{B} .
- 5) $\lim_n P(X_n \in A) = P(X \in A)$ pour tout ensemble de continuité A de X .

1.2.4 Equitension

Définition 1.4. Soit Π une famille de mesures de probabilités sur (E, \mathcal{B}) . On dit que Π est équitendue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \text{ un compact } K_\epsilon \text{ tel que } P(K_\epsilon) > 1 - \epsilon \text{ pour tout } P \in \Pi.$$

La famille Π est dite relativement compact si de toute suite de Π , on peut extraire une sous suite qui converge faiblement.

Théorème 1.5. (*Prohorov [63]*)

Si la famille Π de lois de probabilités est équitendue, alors elle est relativement compact.

La réciproque n'est cependant pas valable sauf sous la condition que l'espace E soit séparable et complet.

Théorème 1.6. *(La réciproque du théorème de Prohorov)(Billingsley [9])*

Supposons l'espace E séparable et complet. Si Π est relativement compact, alors elle est équitendue.

1.3 Convergence de processus stochastiques dans $C[0,1]$

1.3.1 Définitions

On note par $C[0,1]$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie uniforme \mathcal{C} définie par la distance d .

$$d(f, g) = \sup_t |f(t) - g(t)|; \quad f, g \in C[0,1]$$

L'espace $C[0,1]$ muni de la topologie uniforme \mathcal{C} est séparable et complet.

Définition 1.5. (Billingsley [9])

On définit le module de continuité d'un élément f de $C[0,1]$ par

$$w_f(\delta) = \sup_{|t-s| \leq \delta} |f(t) - f(s)|, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Remarque 1.2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle f , définie sur $[0,1]$, soit dans $C[0,1]$ est

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_f(\delta) = 0.$$

1.3.2 Convergence faible et équitension

$C[0, 1]$ muni de la topologie uniforme est séparable et complet, donc la convergence faible est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles et l'équitension.

Théorème 1.7. (Billingsley [9])

Soient (P_n) et P des lois de probabilité sur (C, \mathcal{C}) . Si les lois fini-dimensionnelles de (P_n) convergent faiblement vers celles de P et si la suite (P_n) est équitendue, alors $P_n \Longrightarrow P$.

Voici deux résultats qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes d'équitension dans l'espace (C, \mathcal{C}) .

Théorème 1.8. (*Billingsley [9]*)

La suite (P_n) est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites.

1) pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ et n_0 tels que

$$P_n\{f, |f(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

2) Pour tout ϵ et η positifs, il existe δ , $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tels que

$$P_n\{f, w_f(\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Théorème 1.9. (*Billingsley [9]*)

La suite des lois de probabilité (P_n) est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées.

1) pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ et n_0 tels que

$$P_n\{f, |f(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

2) Pour tout ϵ et η positifs, il existe δ , $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tel que

$$\frac{1}{\delta} P_n\{f, \sup_{t \leq s \leq t+\delta} |f(t) - f(s)| \geq \epsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0,$$

pour tout $t \in [0,1]$.

1.4 Convergence de processus stochastiques dans $D[0,1]$

1.4.1 Définitions

On note par $D[0,1]$ l'espace des fonctions définies sur $[0,1]$, continues à droite et admettant une limite à gauche. Autrement dit,

1) pour tout t tel que $0 \leq t < 1$, on a $f(t+) = \lim_{s \searrow t} f(s)$ existe et $f(t+) = f(t)$,

2) pour tout t tel que $0 < t \leq 1$, on a $f(t-) = \lim_{s \nearrow t} f(s)$ existe.

Définition 1.6. (Billingsley [9]) On définit le module de continuité d'une fonction $f \in D$ par

$$w_f(\delta) = \sup_{0 \leq t \leq 1-\delta} w_f[t, t + \delta],$$

où $w_f(T_0) = \sup_{s, t \in T_0} |f(t) - f(s)|$, $T_0 \subset [0, 1]$.

On définit un autre module de continuité w'_f , qui jouera le même rôle que le module de continuité w_f dans $C[0, 1]$, par

$$w'_f(\delta) = \inf_{\{t_i\}} \max_{(0 < i \leq r)} w_f[t_{i-1}, t_i],$$

où l'infimum est pris sur les ensembles finis $\{t_i\}$ des point vérifiant.

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 \\ t_i - t_{i-1} > \delta, \quad i = 1, \dots, r, \quad r \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

Soit Λ la classe des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, strictement croissantes. Si $\lambda \in \Lambda$, alors $\lambda(1) = 1$ et $\lambda(0) = 0$.

Soit ϵ pour lequel il existe une fonction $\lambda \in \Lambda$ telle que

- a) $\sup_t |\lambda(t) - t| = \sup_t |t - \lambda^{-1}t| < \epsilon$.
- b) $\sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| = \sup_t |f(\lambda^{-1}(t)) - g(t)| < \epsilon$.

La distance qui définit la topologie de Skorokhod sur l'espace $D[0, 1]$ est donnée par

$$d(f, g) = \inf_{\lambda} (\|\lambda - I\|, \|f - g(\lambda)\|),$$

avec les notations: $\|f\| = \sup_t |f(t)|$ et I la fonction identité sur $[0, 1]$.

$D[0, 1]$ muni de cette distance n'est pas complet. On définit une autre métrique d_0 équivalente à d et qui fait de $D[0, 1]$ un espace complet. Pour deux fonctions $f \in \Lambda$ et $g \in \Lambda$ vérifiant les conditions

- c) $\|\lambda\|^\circ < \epsilon$, avec $\|\lambda\|^\circ = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|$,
- d) $\sup_t |f(t) - g(\lambda(t))| < \epsilon$, on pose

$$d_0(f, g) = \min_{\lambda} (\|\lambda\|^\circ, \|f - g(\lambda)\|).$$

1.4.2 Convergence faible et équitension

Soient t_1, \dots, t_k des points de l'intervalle $[0,1]$ et π la projection donnée par

$$\begin{aligned} \pi_{t_1, \dots, t_k} : D &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ f &\longrightarrow (f(t_1), \dots, f(t_k)). \end{aligned}$$

Étant donné une loi de probabilité P sur l'espace (D, \mathcal{D}) , on note par T_P l'ensemble des points $t \in [0,1]$ pour lesquels la projection π_t est continue sauf aux points appartenant à un ensemble de mesure nulle. Si $0 < t < 1$, alors $t \in T_P$ si et seulement si $P(S_t) = 0$ où $S_t = \{f, f(t) \neq f(t_-)\}$.

Les résultats essentiels de convergence faible et d'équitension sont donnés par les théorèmes ci-dessous.

Théorème 1.10. (*Billingsley [9]*)

Soient P_n, P des lois de probabilités sur (D, \mathcal{D}) telles que

- 1) (P_n) est équitendue ;
- 2) $P_n \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1} \implies P \pi_{t_1, \dots, t_k}^{-1}$, pour tout $t_1, \dots, t_k \in T_P$, alors

$$P_n \implies P.$$

Théorème 1.11. (*Billingsley [9]*)

La suite des lois de probabilités P_n est équitendue si et seulement si les deux assertions suivantes sont satisfaites.

- 1) pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ tel que

$$P_n\{f, |f(0)| > a\} \leq \eta, \quad n \geq 1.$$

- 2) Pour tout ϵ et η positifs, il existe δ avec $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tel que

$$P_n\{f, w'_f(\delta) \geq \epsilon\} \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Chapitre 2

Principes d'invariance hölderiens dans le cas indépendant

2.1 Introduction

Généralement, les théorèmes limites fonctionnels établissent la convergence en loi dans l'espace $C[0,1]$ ou $C(\mathbb{R})$ d'une suite de processus stochastiques (ξ_n) vers un processus ξ , lorsque ceux-là ont des trajectoires continues. Dans le cas de processus à saut, on a recours à l'espace de Skorokhod $D[0,1]$ ou $D(\mathbb{R})$. Mais souvent, les trajectoires des processus de la suite considérée, même le processus limite (mouvement brownien, pont brownien,...), ont une régularité supérieure à la seule continuité, par exemple hölderienne. D'où l'intérêt de travailler dans l'espace de Hölder. De plus, cet espace possède plus de fonctionnelles continues de trajectoires pour des applications.

Le premier principe d'invariance hölderien est dû à Lamperti [50] et traite le cas du processus polygonale (ξ_n) de sommets $(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{\sqrt{n}})$, où $S_n = \sum_{k=1}^{k=j} X_k$ et les X_k sont i.i.d. et centrées. Lamperti établit la convergence de (ξ_n) , vers le mouvement brownien, dans l'espace $H_\alpha[0,1]$, avec $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ sous la condition $E(|X|^p) < +\infty$, pour un $p > 2$. Hamadouche et Taleb [44] ont traité le cas de suites de variables aléatoires indépendantes et non de même loi.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord quelques résultats sur les espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$. Ensuite, nous présentons les résultats essentiels sur la convergence faible et l'équitension dans $H_\alpha^0[0,1]$. Pour finir, nous rappelons les principes d'invariance hölderiens dans le cas indépendant (cf. [43], [44] et [50]).

2.2 Les espaces de Hölder $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$

2.2.1 Définitions

On définit l'espace de Hölder d'ordre α ($0 < \alpha \leq 1$), noté $H_\alpha[0,1]$, comme l'espace des fonctions f définies sur $[0,1]$, nulles en 0 et telles que

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0 < |t-s| \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < +\infty.$$

On note $\omega_\alpha(f, \delta)$ le module de continuité hölderien de f

$$\omega_\alpha(f, \delta) = \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

On définit le sous-espace $H_\alpha^0[0,1]$ de $H_\alpha[0,1]$ par

$$f \in H_\alpha^0[0,1] \iff f \in H_\alpha[0,1] \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

Notations

Dans toute la suite de ce travail, et sans perte de généralité, on notera H_α et H_α^0 au lieu de $H_\alpha[0,1]$ et $H_\alpha^0[0,1]$.

Remarque 2.1. Nous avons les propriétés suivantes :

- 1) $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable.
- 2) $(H_\alpha, \|\cdot\|_\beta)$ est séparable pour tout $0 < \beta < \alpha$. De plus H_α s'injecte continûment dans H_β .
- 3) $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est un sous-espace fermé séparable de $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.

2.2.2 Analyse par les fonctions triangulaires

On note $C_0[0,1]$ l'hyperplan fermé des fonctions de $C[0,1]$.

Pour définir la base de Faber-Schauder, on considère la fonction triangulaire $\Delta(t)$ définie par

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, on pose

$$\begin{aligned}\Delta_n(t) &= \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \quad t \in [0,1], \\ \Delta_0(t) &= t.1_{[0,1]}(t), \\ \Delta_{-1}(t) &= 1_{[0,1]}(t).\end{aligned}$$

$\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de l'hyperplan $C_0[0,1]$.

Lemme 2.1. (Faber-Schauder)

Pour toute fonction f de $C_0[0,1]$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f) \Delta_n(t), \tag{2.1}$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k$, ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) :

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\left(\frac{k + \frac{1}{2}}{2^j}\right) - \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{k}{2^j}\right) + f\left(\frac{k+1}{2^j}\right) \right\}.$$

La série (2.1) converge uniformément sur $[0,1]$, autrement dit, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $C_0[0,1]$.

Comme $H_\alpha^0[0,1] \subset C_0[0,1]$, alors toute fonction de H_α^0 admet la décomposition précédente comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.1. (Ciesielski [21])

Pour toute fonction f de H_α^0 , la série

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} \lambda_n(f) \Delta_n(t),$$

converge au sens de la norme $\|\cdot\|_\alpha$. La famille $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$.

Nous adoptons la notation classique ℓ^∞ pour l'espace de Banach des suites bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |u_n|$.

Théorème 2.2. (Ciesielski [21])

On pose $\Delta_n^{(\alpha)} = 2^{-(j+1)\alpha} \cdot \Delta_n$ pour $n = 2^j + k$, ($j \geq 0, 0 \leq k < 2^j$) et $\Delta_0^{(\alpha)} = \Delta_0$.

Les espaces $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ et $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ sont isomorphes par les opérateurs S_α et $T_\alpha = S_\alpha^{-1}$ linéaires définis comme suit

$$\begin{aligned} S_\alpha : H_\alpha &\longrightarrow \ell^\infty \\ f &\longmapsto u = (u_n)_{n \geq 0}, \end{aligned}$$

avec $u_n = 2^{(j+1)\alpha} \cdot \lambda_n(f)$, $n \geq 1$ et $u_0 = \lambda_0(f)$.

$$\begin{aligned} T_\alpha : \ell^\infty &\longrightarrow H_\alpha \\ u = (u_n)_{n \geq 0} &\longmapsto f = \sum_{n \geq 0} u_n \Delta_n^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

De plus $\|S_\alpha\| = 1$ et

$$\frac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \leq \|T_\alpha\| \leq \frac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)}.$$

En utilisant la base de Faber-Schauder, on peut définir aussi un isomorphisme entre H_α^0 et un sous-espace de ℓ^∞ .

Théorème 2.3. (Ciesielski [21])

H_α^0 est isomorphe par S_α à $C_{o,\alpha}$ sous espace des suites de ℓ^∞ vérifiant

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0 \leq k < 2^j} |u_{j,k}| = 0.$$

Ainsi, on a

$$f \in H_\alpha \iff \sup_{j \geq 0} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0 \leq k < 2^j} |\lambda_{j,k}(f)| < +\infty, |\lambda_0(f)| < +\infty$$

et

$$f \in H_\alpha^0 \iff f \in H_\alpha \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0 \leq k < 2^j} |\lambda_{j,k}(f)| = 0.$$

2.2.3 Compacité dans H_α^0

La convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite et à sa relative compacité dans l'espace des mesures de probabilités sur H_α^0 muni de la topologie de la convergence étroite. D'après le théorème de Prohorov, cette relative compacité est équivalente à l'équitension de la suite des lois.

Pour connaître les compacts de H_α^0 , on donne une condition suffisante de relative compacité.

Lemme 2.2. (Hamadouche [41])

Si $0 < \alpha < \beta < 1$ et si K est borné dans H_β , alors K est relativement compact dans H_α^0 .

Le lemme 2.3 fournit une condition nécessaire et suffisante de relative compacité, qui est une version hölderienne du théorème d'Ascoli.

Lemme 2.3. (Suquet [72])

K est relativement compact dans H_α^0 si et seulement si

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in K} \omega_\alpha(f, \delta) = 0.$$

2.2.4 Dual de H_α^0

On note $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$, l'espace des suites réelles $a = (a_0, a_1, \dots)$ telles que

$$\|a\|_{\ell^1} = \sum_{n \geq 0} |a_n| < +\infty.$$

Une caractérisation du dual de H_α^0 est donnée par le théorème de Ciesielski.

Théorème 2.4. (Ciesielski [21])

Toute fonctionnelle linéaire continue φ sur $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est de la forme

$$\varphi(f) = \sum_{n \geq 0} a_n u_n,$$

avec $u_0 = \lambda_0(f)$, $u_n = 2^{(j+1)\alpha} \lambda_n(f)$, $n = 2^j + k$; $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$ et $a = (a_0, a_1, \dots) \in \ell^1$.

De plus

$$\|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'} \leq \|S_\alpha\| \|a\|_{\ell^1},$$

$$\|a\|_{\ell^1} \leq \|T_\alpha\| \|\varphi\|_{(H_\alpha^0)'}$$

et les constantes $\|S_\alpha\|$ et $\|T_\alpha\|$ sont optimales.

2.2.5 Processus à trajectoires dans H_α

Étant donné un processus $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$, quelques conditions pour qu'il ait une version à trajectoires presque sûrement dans H_α sont données par les théorèmes suivants :

Théorème 2.5. (*Kolmogorov*)

Soit $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$ un processus défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Supposons qu'il existe $\delta > 0$, $\gamma > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$\forall \lambda > 0, P(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \leq \frac{C}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors il existe une version de ξ à trajectoires dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Théorème 2.6. (*Ibragimov [46]*)

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , croissante telle que pour tous s, t dans $[0,1]$:

$$\mathbb{E} |\xi_t - \xi_s|^p \leq f^p(|t - s|). \quad (2.2)$$

Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ soient dans H_α est que

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+\frac{1}{p}}} du < +\infty.$$

Remarque 2.2. Dans le cas où l'intégrale diverge, Ibragimov [46] a montré qu'il existe un processus ζ vérifiant (2.2), tel que

$$P \left\{ \sup_{s \neq t} \frac{|\zeta_t - \zeta_s|}{|t - s|^\alpha} = +\infty \right\} = 1.$$

2.2.6 Convergence faible hölderienne

On considère un processus à trajectoires hölderiennes comme un élément aléatoire de l'espace fonctionnel H_α . Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α , la convergence faible dans H_α^0 entraîne celle dans H_α .

L'étude de la convergence faible des éléments aléatoires de H_α^0 repose sur le résultat suivant.

Proposition 2.1. (Hamadouche [43])

La convergence en loi dans H_α^0 d'une suite de processus $(\xi_n, n \geq 1)$ équivaut à l'équitension sur H_α^0 de la suite des lois $P_n = P_{\xi_n^{-1}}$ des éléments aléatoires ξ_n et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de (ξ_n) .

L'équitension hölderienne

Des conditions d'équitension sont indispensables pour l'étude de la convergence faible des suites de processus dans H_α . En raison de cette notion d'équitension, on travaillera sur l'espace polonais $(H_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$. Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α , la convergence en loi sur H_α^0 entraîne celle sur H_α .

Une condition suffisante d'équitension est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.7. (Kerkyacharian, Roynette [49])

Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\delta > 0, \gamma > 0$ et $c > 0$

$$\forall \lambda > 0, P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient la version moments du théorème 2.7.

Corollaire 2.1. (Lamperti [50])

Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\delta > 0, \gamma > 0$ et $c > 0$

$$\mathbb{E} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq c |t - s|^{1+\delta}.$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 , pour $0 < \alpha < \frac{\delta}{\gamma}$.

Le résultat suivant est plus maniable pour la vérification des conditions de moments.

Théorème 2.8. (Hamadouche [43])

Soit $(\xi_n(t))_{n \geq 1}$ une suite de processus à trajectoires dans H_α^0 , vérifiant les conditions suivantes :

a) Il existe des constantes $a > 1, b > 1, c > 0$ et une suite de nombres positifs $(a_n) \searrow 0$ telles que

$$\mathbb{E} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^a \leq c |t - s|^b, \quad (2.3)$$

pour tout n et tous s, t tels que $\|t - s\| \geq a_n$;

b) $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega_\alpha(\xi_n, a_n) > \varepsilon\} = 0$.

Alors pour tout $\alpha < a^{-1}\{\min(a, b) - 1\}$, la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est équitendue dans H_α^0 .

2.3 Principes d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes

2.3.1 Lissage polygonal du processus de sommes partielles

Le premier principe d'invariance dans H_α , établi par Lamperti [50], concerne les variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Théorème 2.9. (Lamperti [50])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., centrées et réduites. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ tel que $\mathbb{E}|X_j|^\gamma < \infty$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\xi_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{[nt]} X_i + (nt - [nt])X_{[nt]+1} \right], \quad t \in [0, 1].$$

La loi de ξ_n converge étroitement vers la mesure de Wiener P_w dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Il existe deux démonstrations de ce résultat. La première est donnée par Lamperti [50] et consiste à démontrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de ξ_n vers celles du mouvement brownien ainsi que l'équitension de la suite de ses lois.

Ce résultat a été redémontré par Kerkyacharian et Roynette en utilisant la base de Faber-Schauder [49].

La généralisation de ce résultat au cas de suites de variables aléatoires indépendantes et non de même loi est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.10. (Hamadouche, Taleb [44])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées, non de même loi.

On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que

$$m \leq E|X_j|^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j < n$,

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1}, \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \right]$$

Alors la suite (ξ_n) converge faiblement vers la mesure de Wiener P_w dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, avec $s_n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i^2)$.

Soit $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $i \geq 1$, on pose $X_i = Y_i - 1$. Dans ce qui suit, on donne des trajectoires simulées de la suite

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^{[nt]} X_i + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1 \right]$$

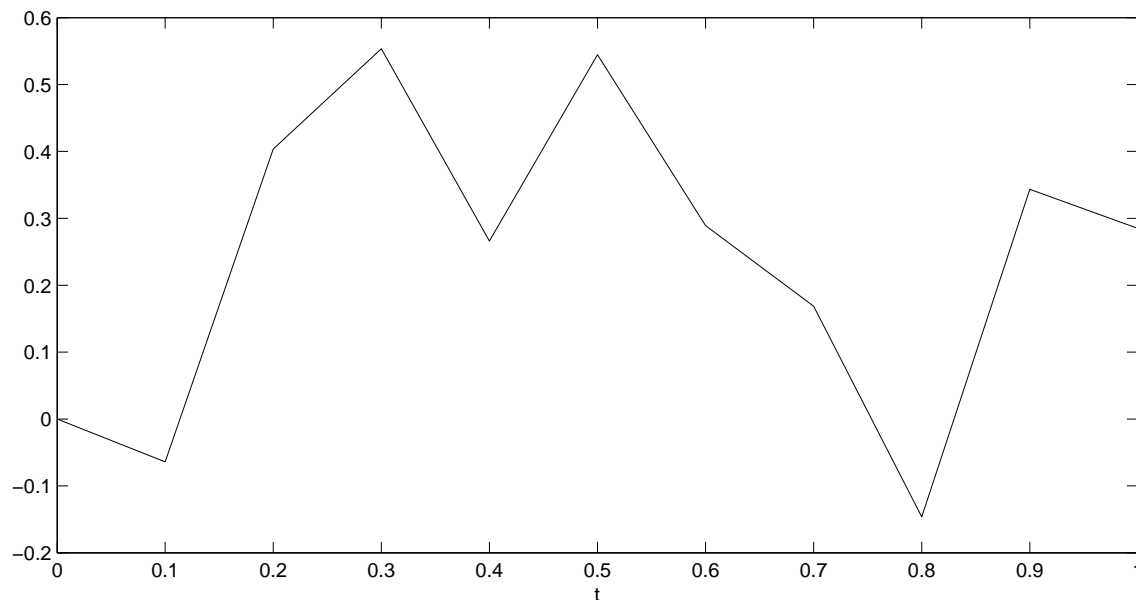


FIG. 2.1 – Simulation d'une trajectoire de ξ_n , avec $n = 10$.

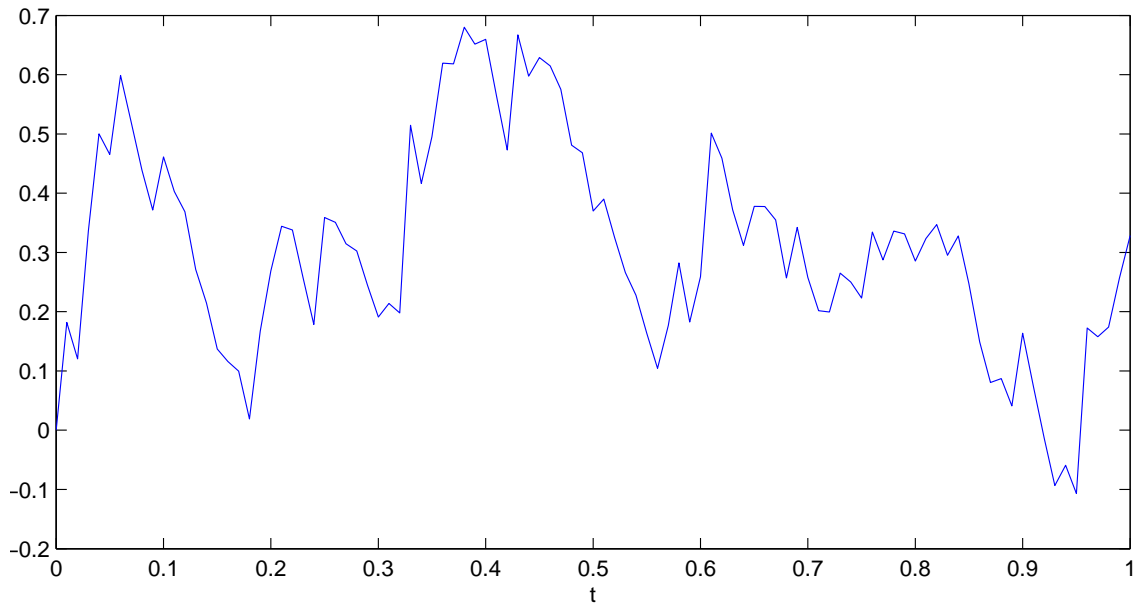


FIG. 2.2 – Simulation d'une trajectoire de ξ_n , avec $n = 100$.

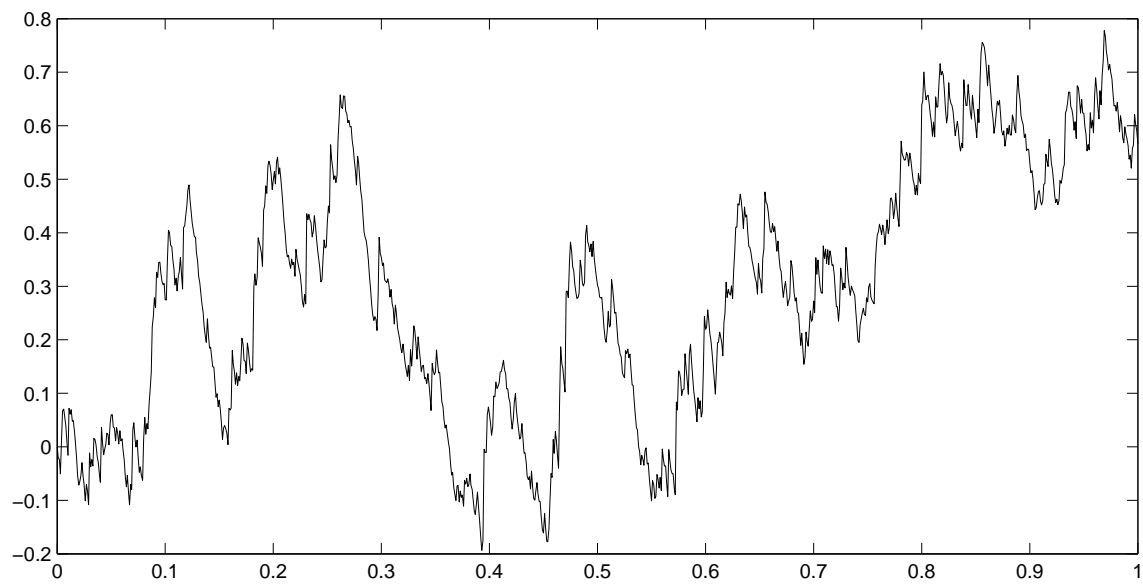


FIG. 2.3 – Simulation d'une trajectoire de ξ_n , avec $n = 1000$.

2.3.2 Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées et $(k_n)_{n \geq 1}$ une suite de noyaux de convolution telles que

$$k_n(t) = \frac{1}{b_n} k\left(\frac{t}{b_n}\right), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

avec k une densité de probabilité sur la droite réelle et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers 0 et vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |u| k(u) du < +\infty, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{b_n} = O(n^{\frac{\tau}{2}}), \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Lemme 2.4. (Hamadouche [43])

Soit f une fonction mesurable, bornée à support dans $[0,1]$ et k un noyau de convolution tel que

$$k \in L^1([-1,1]) \cap L^{\frac{1}{2}}[-1,1], \quad (2.7)$$

$$|k(x) - k(y)| \leq a(k)|x - y|, \quad x, y \in [0,1], \quad (2.8)$$

pour une certaine constante $a(k)$. Alors la restriction à l'intervalle $[0,1]$ de $(f * k_n)(t) - (f * k_n)(0)$ est dans $H_{\frac{1}{2}}[0,1]$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$W_n(t) = \frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad t \in [0,1],$$

avec $s_n^2 = \text{Var}(S_n)$ et $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

Le processus des sommes partielles lissés par convolution est défini par

$$\zeta_n(t) = (W_n * k_n)(t) - (W_n * k_n)(0), \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1. \quad (2.9)$$

Notons que le terme $(W_n * k_n)(0)$ assure la nullité en zéro du processus ζ_n .

Théorème 2.11. (Hamadouche [43])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d., centrées et réduites. On suppose qu'il

existe $\gamma > 2$ tel que $\mathbb{E}|X_j|^\gamma < \infty$. On suppose de plus que les noyaux de convolution k_n vérifient les hypothèses (2.4)-(2.8). Alors la suite de processus lissés (ζ_n) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

Idée de la preuve.

On démontre l'équitension de la suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ en utilisant le théorème 2.8. La convergence des lois fini-dimensionnelles est obtenue à partir de celles de W_n qui convergent vers celles du mouvement brownien.

Théorème 2.12. (Hamadouche, Taleb [44])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et non forcément de même loi. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$, $m > 0$ et $M > 0$ telles que

$$\mathbb{E}|X_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1 \quad \text{et} \quad m \leq \mathbb{E}(X_j^2)$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution k_n vérifient les hypothèses (2.4)-(2.8). Alors la suite de processus lissés ζ_n converge faiblement vers W dans H_α^0 pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

Chapitre 3

Principes d'invariance hölderiens pour des suites dépendantes

3.1 Introduction

En modélisation, il est souvent peu réaliste de supposer l'indépendance. En effet, les observations dépendantes sont mieux ajustées à la réalité. C'est pourquoi, depuis plusieurs années déjà, s'est développée une vaste littérature sur les processus dépendants.

Dans ce chapitre, nous proposons l'extension du théorème de Lamperti au cas de suites de variables aléatoires faiblement dépendantes au sens de Doukhan et Louchichi [30]. Cette notion est plus générale que le mélange fort et l'association; elle permet de traiter ces deux dernières notions dans une approche unifiée.

Mais avant de présenter nos résultats, nous rappelons d'abord ceux obtenus par Hamadouche [43] dans le cas dépendant (α -mélange et association).

Dans la suite de cette thèse, le terme stationnaire désignera la stationnarité au sens strict.

3.2 Cas de suites de variables aléatoires α -mélangeantes

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Le coefficient de mélange fort entre deux sous tribus \mathbf{A} et \mathbf{B} est donné par la définition 3.1. Pour d'autres notions de mélange, le lecteur peut se référer à [15] et [28].

Définition 3.1. Pour deux sous tribus $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathcal{A}$, on définit le coefficient de mélange fort

par

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sup_{(A,B) \in \mathbf{A} \times \mathbf{B}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|.$$

Définition 3.2. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $\mathbf{M}_j^!$ la tribu engendrée par les variables X_j, \dots, X_l . On dit que la suite (X_n) est α -mélangeante (ou fortement mélangeante) si la suite de coefficients

$$\alpha_n = \sup_{k \geq 1} \alpha(\mathbf{M}_1^k, \mathbf{M}_{k+n}^\infty)$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Remarque 3.1.

- 1) Les coefficients de mélange sont définis pour les tribus engendrées par les variables aléatoires. Ce qui rend difficile l'évaluation et l'utilisation de ces mesures de dépendance.
- 2) Il est clair que lorsque deux variables ou deux tribus sont indépendantes, leur coefficients de mélange $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ sont nul.
- 3) Les chaînes de Markov et les processus linéaires, sous certaines conditions, fournissent quelques exemples de processus α -mélangeants (cf. [28], [40] et [53]).

Les inégalités sur les covariances et les inégalités de moments constituent l'une des premières applications du mélange.

Théorème 3.1. (Davydov [24])

Soient X et Y des variables aléatoires réelles centrées de variances finies. Pour $h, l, r \geq 1$ tels que $\frac{1}{h} + \frac{1}{l} + \frac{1}{r} = 1$, on a

$$|Cov(X, Y)| \leq 8\alpha(X, Y)^{\frac{1}{h}} \mathbb{E}^{\frac{1}{l}} |X|^l \mathbb{E}^{\frac{1}{r}} |Y|^r.$$

Théorème 3.2. (Yokoyama [80])

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite stationnaire, α -mélangeante telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} < +\infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\epsilon > 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} \alpha_n^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < \infty.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}|X_1 + X_2 + \dots + X_n|^\gamma \leq Cn^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Une version du principe d'invariance de Donsker pour des variables fortement mélangées est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.3. (*Odaïra, Yoshihara [56]*)

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite α -mélangeante vérifiant pour des constantes $\epsilon > 0$, $\gamma > 2$ les conditions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < +\infty;$$

$$\sup_{j \geq 1} \mathbb{E}|X_j|^{\gamma+\epsilon} < +\infty.$$

Alors $(X_j)_{j \geq 1}$ satisfait le théorème central limite fonctionnel dans $D[0,1]$.

La première extension du principe d'invariance de Lamperti pour des suites stationnaires de variables aléatoires dépendantes est donnée par Hamadouche [43].

Théorème 3.4. (*Hamadouche [43]*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\epsilon > 0$ tels que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} < \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\frac{\epsilon}{\gamma+\epsilon}} < \infty.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq j < n$:

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1} \right], \quad t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right],$$

où

$$\sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j) < \infty.$$

Les lois de ξ_n convergent faiblement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

On considère dans ce qui suit le lissage par convolution du processus de sommes partielles. Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles et centrées.

Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad t \in [0,1],$$

avec $0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2 \sum_{j=2}^{\infty} Cov(X_1, X_j) < \infty$.

Le processus des sommes partielles lissé par convolution est donné par la formule

$$\zeta_n(t) = (W_n * k_n)(t) - (W_n * k_n)(0), \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Théorème 3.5. (Hamadouche [43])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire α -mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < \infty.$$

On suppose de plus que $\sigma > 0$ et que les noyaux de convolution (k_n) vérifient les hypothèses (2.4)-(2.8). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés (ζ_n) définis par (3.1) converge en loi vers le mouvement brownien W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

3.3 Cas de suites de variables aléatoires associées

Un autre concept de dépendance faible est celui de variables aléatoires associées introduit par Esary, Proschan et Walkup [35].

Définition 3.3. On dit que X_1, X_2, \dots, X_n est une suite finie de variables associées si

$$Cov(f(X_1, \dots, X_n), g(X_1, \dots, X_n)) \geq 0 \quad (3.2)$$

pour toute paire f, g de fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissantes coordonnée par coordonnée et telles que cette covariance existe.

Définition 3.4. On dit qu'une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables associées si toute sous suite finie est associée.

Propriétés 3.1.

- 1) Une propriété fondamentale des variables associées est l'équivalence entre la non corrélation et l'indépendance.
- 2) Un sous-ensemble de variables associées est associée.
- 3) Des fonctions non décroissantes de variables associées sont associées.

Remarque 3.2.

Il est plus simple de vérifier si la condition (3.2) d'association est satisfaite ou non, plutôt

que de voir si la suite des coefficients de mélange (α_n) tend vers 0. Récemment, Doukhan et Louhichi [30] ont introduit une nouvelle notion de dépendance faible qui permet de traiter le mélange et l'association dans une approche unifiée (Voir la section 3.4).

Théorème 3.6. (Birkel [12])

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de v.a.r. associées, centrées et telles que $\sup \mathbb{E}|X_j|^{\gamma+\epsilon} < +\infty$ pour un $\epsilon > 0$ et un $\gamma > 2$. On suppose que le coefficient $u(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j:|j-k| \geq 1}^{j \geq 1} \text{Cov}(X_1, X_k)$ vérifie

$$u(n) = O(n^{-\frac{(\gamma-2)(\gamma+\epsilon)}{2\epsilon}}).$$

Alors il existe une constante b telle que pour tout $n \geq 1$

$$\sup_m |S_{n+m} - S_m| \leq b n^{\frac{\gamma}{2}} \quad \text{où} \quad S_k = \sum_{j=1}^{j=k} X_j.$$

Théorème 3.7. (Newman, Wright [54])

Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite stationnaire de v.a.r. centrées, de variance finie, associées telles que

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) + 2 \sum_{j \geq 2} \text{Cov}(X_1, X_j) < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit le processus

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^j X_k + (nt - j)X_{j+1} \right), \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}, \quad 0 \leq j < n.$$

Alors W_n convergent faiblement dans $C[0,1]$ vers le mouvement brownien W .

L'extension du principe d'invariance de Lamperti au cas d'une suite de v.a.r. associées est obtenue par Hamadouche [43].

Théorème 3.8. (Hamadouche [43])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables associées, centrées telles que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\epsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\epsilon > 0$. On suppose que

$$u(n) = 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j) = O(n^{-\frac{(\gamma-2)(\gamma+\epsilon)}{2\epsilon}}),$$

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + u(1) < \infty.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j \leq n$

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1} \right], \quad t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right].$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 , pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Théorème 3.9. (Hamadouche [43])

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables associées, centrées telles que $\mathbb{E}|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que

$$u(n) = 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \text{Cov}(X_1, X_j) = O(n^{-\frac{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)}{2\varepsilon}}),$$

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + u(1) < \infty.$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution k_n vérifient les hypothèses (2.4)-(2.8). Alors la suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ (de la formule (3.1)) converge faiblement vers W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.

3.4 Cas de suites de variables aléatoires faiblement dépendantes au sens de Doukhan-Louhichi

Dans cette section, nous commençons d'abord par rappeler quelques définitions et résultats sur la dépendance faible au sens de Doukhan-Louhichi. Ensuite, nous présentons nos deux extensions du théorème de Lamperti au cas de suites vérifiant cette dépendance.

3.4.1 Définitions

On pose

$$G = \{f/\exists u \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Définition 3.5. (Doukhan, Louhichi [30])

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dite (ϵ, F, Ψ) -faiblement dépendante si il existe un ensemble $F \subset G$, une suite $\epsilon = (\epsilon_r)_{r \in \mathbb{N}}$ décroissante vers zéro, et une fonction $\Psi : F^2 \times \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(u+v)$ -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_u, j_1, j_2, \dots, j_v)$, avec

$$i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_u < i_u + r \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_v,$$

on a

$$|\text{Cov}(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v}))| \leq \Psi(h, k, u, v) \cdot \epsilon_r,$$

pour toutes fonctions $h, k \in F$ définies (respectivement) sur \mathbb{R}^u et \mathbb{R}^v .

Remarque 3.3. Des fonctions spécifiques ψ donnent des notions différentes de dépendance faible qui sont adéquates pour décrire et étudier des classes d'importants modèles en statistique et en économétrie [31, 32, 33]. On pose

$$F = \mathcal{L}_1 = \{f : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable; } \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } Lip(f) < \infty\},$$

où $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^u} |h(x)|$ et $Lip(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{\|x - y\|_1}$ le module de continuité lipschitzien de h ,

avec $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^u |x_i|$ pour $x = (x_1, \dots, x_u)$.

La suite (X_n) est dite

- λ -faiblement dépendante si $\Psi(h, k, u, v) = uvLip(h)Lip(k) + uLip(h) + vLip(k)$, avec $\lambda_r = \epsilon_r$.
- k -faiblement dépendante si $\Psi(h, k, u, v) = uvLip(h)Lip(k)$, avec $k_r = \epsilon_r$.
- k' -faiblement dépendante si $\Psi(h, k, u, v) = vLip(h)Lip(k)$, avec $k'_r = \epsilon_r$.
- θ -faiblement dépendante si $\Psi(h, k, u, v) = vLip(k)$, avec $\theta_r = \epsilon_r$.

Remarque 3.4. Soient deux classes de fonctions F_1 et F_2 et deux fonctions φ_1 et φ_2 (toutes caractérisées selon la définition 3.5 de Doukhan-Louhichi) telles que $F_1 \subset F_2$ et $\varphi_2 \leq \varphi_1$. Alors une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ $(\epsilon, F_2, \varphi_2)$ -faiblement dépendante est $(\epsilon, F_1, \varphi_1)$ -faiblement dépendante.

En effet, soit $(X_n)_n$ une suite $(\epsilon, F_2, \varphi_2)$ -faiblement dépendante, alors pour tout $(u + v)$ -uplet $(i_1, \dots, i_u, j_1, \dots, j_v)$ avec $i_1 \leq \dots \leq i_u + r \leq j_1 \leq \dots \leq j_v$, on a

$$|Cov(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v}))| \leq \varphi_2(h, k, u, v) \cdot \epsilon_r,$$

pour tout $h, k \in F_2$ qui sont définies respectivement sur \mathbb{R}^u et \mathbb{R}^v .

Comme $F_1 \subset F_2$, alors $h, k \in F_2$. Par conséquent

$$|Cov(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v}))| \leq \varphi_2(h, k, u, v) \cdot \epsilon_r$$

et comme $\varphi_2 \leq \varphi_1$, on obtient $|Cov(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v}))| \leq \varphi_1(h, k, u, v) \cdot \epsilon_r$.

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est donc $(\epsilon, F_1, \varphi_1)$ -faiblement dépendante.

Remarque 3.5. Les notions de λ et k -faible dépendance possèdent des propriétés d'hérédité. Par exemple, soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipchitzienne. Si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est λ (ou k) faiblement dépendante alors la suite $(h(X_n))_{n \geq 1}$ est aussi λ (ou k) faiblement dépendante (cf. Dedecker et al [27]).

Dans ce qui suit, nous présentons des exemples de suites qui sont faiblement dépendantes au sens de Doukhan-Louhichi. Pour une plus large variété d'exemples, on renvoie aux références [3],[27], [31], [32] et [33]. On pose

$$\mathcal{L} = \{h : \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable; } Lip(h) < \infty, \|h\|_\infty < \infty\}.$$

Exemple 3.1. ([30])

Une suite de variables aléatoires réelles associées, stationnaires et centrées $(X_n)_{n \geq 1}$ est λ -faiblement dépendante avec $\lambda_r = O(\sup_{i \geq r} |Cov(X_0, X_i)|)$.

Exemple 3.2. ([30])

Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ α -mélangeante est aussi $(\epsilon, \mathcal{L}_1, \Psi)$ -faiblement dépendante avec $\epsilon_n = \alpha_n$ et $\Psi(h, k, u, v) = 4\|h\|_\infty\|k\|_\infty$, où (α_n) sont les coefficients de mélange.

Exemple 3.3. ([31])

Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et centrées. Le processus linéaire et causal défini par

$$X_n = \sum_{j=0}^{j=+\infty} b_j \varepsilon_{n-j}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

avec $b_j = O(|j|^{-\mu})$ pour $\mu > \frac{1}{2}$, est θ -faiblement dépendant avec $\theta_r = O(r^{-\mu+\frac{1}{2}})$.

Exemple 3.4. Dans cet exemple il y a lieu de rappeler la définition d'une suite de variables aléatoires associée négative.

Définition 3.6. Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P) est dite associée négative si pour tous les ensembles finis $I, J \subset \mathbb{N}$ tels que $I \cap J = \emptyset$ et deux fonctions non décroissantes coordonnées par coordonnées $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \leq 0$ lorsque la covariance existe. ($|I|$ étant le cardinal de l'ensemble fini I).

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles associée négative avec $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, est (k, \mathcal{L}, ψ) -faiblement dépendantes avec $k_n = \sup_{|i-j| \geq n} |cov(X_i, X_j)|$, $\Psi(h, k, u, v) = Lip(h)Lip(k)uv$.

En effet, dans Bulinski & Shabanovich [14], il a été démontré qu'une suite associée négative de variables aléatoires réelles de moments d'ordre 2 finis, vérifie pour tous les sous ensembles finis et disjoints $I; J \subset \mathbb{N}$ et deux fonctions quelconques bornées et lipschitziennes

$f : \mathbb{R}^{|I|} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{|J|} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'inégalité suivante :

$$|Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq Lip(f)Lip(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |Cov(X_i, X_j)|.$$

Pour tout $u + v$ -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_u, j_1, j_2, \dots, j_v)$, avec $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_u < i_u + r \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_v$, on pose $I = \{i_1, i_2, \dots, i_u\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_v\}$.

Donc pour $h, k \in \mathcal{L}$ deux fonctions définies respectivement sur \mathbb{R}^u et \mathbb{R}^v , on a

$$\begin{aligned} |Cov(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v}))| &\leq Lip(h)Lip(k) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |Cov(X_i, X_j)| \\ &\leq Lip(h) Lip(k) \sup_{|i-j| \geq r} |Cov(X_i, X_j)| u \cdot v. \end{aligned}$$

3.4.2 Principes d'invariance dans $D[0,1]$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées. On note

$$S_{[nt]} = \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(X_0 X_i).$$

Le principe d'invariance de Donsker $\frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} \xrightarrow{L} \sigma W(t)$, dans l'espace de Skorokhod $D[0,1]$ sous les conditions de λ et k -faible dépendance est obtenu par Doukhan & Wintenberger [33]. Dans le cas de k' -faible dépendance, le résultat est démontré par Bulinski & Shashkin [13]. Dedeker & Doukhan [26] ont obtenu cette convergence sous les conditions de θ -faible dépendance. Nous rappelons ces résultats pour une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ stationnaires de v.a. centrées.

Théorème 3.10. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de v.a.r. centrées et θ -faiblement dépendante. On suppose qu'il existe $\beta > 2$ tel que $\mathbb{E}|X_j|^\beta < \infty$ et $\theta_r = O(r^{-\theta})$ avec $\theta > 1 + \frac{1}{\beta-2}$. Alors σ^2 est bien définie et $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]})$ converge faiblement vers σW dans $D[0,1]$.*

Théorème 3.11. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de v.a.r. centrées et k' -faiblement dépendantes. On suppose qu'il existe $\beta > 2$ tel que $\mathbb{E}|X_1|^\beta < \infty$ et $k'_r = O(r^{-k})$ avec $k > 1 + \frac{1}{\beta-2}$. Alors σ^2 est bien définie et $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]})$ converge faiblement vers σW dans $D[0,1]$.*

Théorème 3.12. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de v.a.r. centrées et λ -faiblement dépendantes (resp. k -faiblement dépendantes). On suppose qu'il existe $\beta > 2$ tel que $\mathbb{E}|X_1|^\beta < \infty$ et $\lambda_r = O(r^{-\lambda})$, avec $\lambda > 4 + \frac{2}{\beta-2}$ ($k_r = O(r^{-l})$, avec $l > 2 + \frac{1}{\beta-2}$). Alors σ^2 est bien définie et $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]})$ converge en loi vers σW dans $D[0,1]$.*

3.4.3 Coefficients de dépendance faible

Les coefficients de dépendance faible sont définis par Doukhan et Louhichi de la façon suivante :

Définition 3.7. (Doukhan, Louhichi [30])

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires centrées. Pour un entier positive r , le coefficient de faible dépendance est la suite non décroissante $(C_{r,q})_{q \geq 2}$ telle que

$$C_{r,q} = \text{Sup} |Cov(X_{t_1} \dots X_{t_m}, X_{t_{m+1}} \dots X_{t_q})|,$$

où le supremum est pris sur tout les points (t_1, \dots, t_q) tels que $1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_q$ et m, r vérifiant $t_{m+1} - t_m = r$.

Une inégalité de moments de type Marcinkiewicz-Zygmund est obtenue dès qu'on sait contrôler les coefficients $(C_{r,q})$ ([30]).

Théorème 3.13. (Doukhan, Louhichi [30])

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires centrées, on suppose qu'il existe $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ tel que $C_{r,q} = O(r^{-\frac{q}{2}})$. Alors il existe une constante C_1 telle que

$$|\mathbb{E}(S_n^q)| \leq C_1 n^{\frac{q}{2}}.$$

Remarque 3.6. Si on considère, dans le théorème 3.13, $q = 2p$, $p \geq 1$ (paire), on a l'inégalité $\mathbb{E}|(S_n)|^{2p} = |\mathbb{E}S_n^{2p}| \leq C_1 n^p$.

Le lemme 3.1, donne une estimation des coefficient $(C_{r,q})$ en fonction des termes de la suite réelle (ϵ_r) donnée dans la définition 3.5.

Lemme 3.1. (*Doukhan, Newmann [33]*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. k -faiblement dépendantes (ou λ -faiblement dépendantes) et on suppose qu'il existe $m > q$, $\mathbb{E}|X_i|^m \leq M_m$, pour tout $i \geq 1$. Alors

$$C_{r,q} \leq q^4 2^{q+3} M_m^{\frac{q-1}{m-1}} k_r^{1-\frac{q-2}{m-2}}$$

$$\left(\text{respectivement } C_{r,q} \leq q^4 2^{q+3} M_m^{\frac{q-1}{m-1}} \lambda_r^{1-\frac{q-1}{m-1}} \right).$$

3.4.4 Principes d'invariance dans H_α

On considère une suite de variables aléatoires réelles λ , k , k' ou θ -faiblement dépendante et on démontre la convergence en loi de la suite de processus des sommes partielles lissé polygonal vers le mouvement brownien dans les espaces de Hölder H_α . La démonstration se base essentiellement sur des théorèmes limites dans l'espace de Skorokhod et la conséquence 3.1, du théorème 3.13 et du lemme 3.1, donnée ci-dessous. Le même résultat est établi pour le lissage par convolution du processus de sommes partielles.

Conséquence 3.1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles et centrées telles que $\mathbb{E}|X_t|^m \leq M_m$, pour un certain $m > q \geq 2$ avec $M_m > 0$ une constante positive. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est soit λ -faiblement dépendante vérifiant $\lambda_r = O(r^{-\nu})$, $\nu \geq \frac{q}{2}(\frac{m-1}{m-q})$ ou k -faiblement dépendante vérifiant $k_r = O(r^{-\nu})$, $\nu \geq \frac{q}{2}(\frac{m-2}{m-q})$. Alors il existe une constante positive C_1 ne dépendant pas de n pour laquelle

$$|\mathbb{E}(S_n^q)| \leq C_1 n^{\frac{q}{2}}. \quad (3.3)$$

Preuve. Soit (X_n) une suite λ -faiblement dépendante vérifiant les conditions de la conséquence 3.1. Par le lemme 3.1, on a

$$C_{r,q} \leq q^4 2^{q+3} M_m^{\frac{q-1}{m-1}} \lambda_r^{1-\frac{q-1}{m-1}}, \quad \forall r \geq 1.$$

Comme $\lambda_r = O(r^{-\nu})$ pour $\nu \geq \frac{q}{2}(\frac{m-1}{m-q})$, on obtient

$$C_{r,q} \leq q^4 2^{q+3} M_m^{\frac{q-1}{m-1}} \lambda_r^{1-\frac{q-1}{m-1}} \leq (q^4 2^{q+3} M_m^{\frac{q-1}{m-1}}) (b_1 r^{-\frac{q}{2}(\frac{m-1}{m-q})})^{1-\frac{q-1}{m-1}}, \quad b_1 \text{ étant une constante positive.}$$

Donc $C_{r,q} = O(\lambda_r^{\frac{-q}{2}})$, car $-\frac{q}{2}(\frac{m-1}{m-q})(1-\frac{q-1}{m-1}) = \frac{-q}{2}$.

On conclut par le théorème 3.13 à l'inégalité suivante: $|\mathbb{E}(S_n^q)| \leq C_1 n^{\frac{q}{2}}$.

Le cas de la k -faible dépendance se démontre de façon analogue.

Remarque 3.7. Nous avons les propriétés suivantes :

- 1) Une suite de v.a.r. θ -faiblement dépendante est λ -faiblement dépendante. Alors, sous la θ -faible dépendance, la conséquence 3.1 reste vrai avec $\theta_r = O(r^{-\nu})$, $\nu \geq \frac{q}{2}(\frac{m-1}{m-q})$.
- 2) Une suite de variables aléatoires k' -faible dépendante est k -faiblement dépendante. Alors, sous la k' -faible dépendance, la conséquence 3.1 reste vrai sous la condition $k'_r = O(r^{-\nu})$, pour $\nu \geq \frac{q}{2}(\frac{m-2}{m-q})$.

Exemple 3.5.

Soient $\gamma > 2$ et $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles (i.i.d.), centrées et vérifiant $\mathbb{E}|\epsilon_n|^\gamma < \infty$, pour tout entier n . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres réels tel que $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \epsilon_i$ converge dans L^γ . Alors la suite $X_n = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \epsilon_{n-i}$, $n \geq 1$, avec $a_k = O(|k|^{-\mu})$, pour $\mu > \frac{1}{2}$, est λ -faiblement dépendante avec $\lambda_r = O(\frac{1}{r^{\mu-\frac{1}{2}}})$ ([31]).

Cette suite satisfait la propriété : $\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n X_{i+h}|^\gamma = \mathbb{E}|\sum_{i=1}^n X_i|^\gamma$, pour tout entier $n \geq 1$ et $h \geq 0$ ([52]).

On suppose qu'il existe $d > \gamma + 2$ tel que $\mathbb{E}|X_n|^d < M < \infty$.

On pose $\mu = v + \frac{1}{2}$, pour $v > \frac{([\frac{\gamma}{2}] + 1)(d-1)}{d-\gamma-2}$, on aura $\lambda_r = O(r^{-v})$.

En prenant $q = 2[\frac{\gamma}{2}] + 2$ et $m = d$, on a les conditions de la conséquence 3.1 qui sont satisfaites. Par conséquent,

$$C_{r,q} \leq q^4 2^{q+3} M^{\frac{q-1}{m-1}} \lambda_r^{1-\frac{q-1}{m-1}}.$$

En utilisant la propriété $\lambda_r = O(\frac{1}{r^{\mu-\frac{1}{2}}})$, pour $v > \frac{([\frac{\gamma}{2}] + 1)(d-1)}{d-\gamma-2} \geq \frac{(\frac{q}{2})(d-1)}{d-q}$, on obtient

$$C_{r,q} \leq (q^4 2^{q+3} M^{\frac{q-1}{m-1}}) (b_2 \cdot r^{\frac{(\frac{q}{2})(d-1)}{d-q}})^{1-\frac{q-1}{d-1}}, \quad b_2 \text{ étant une constante positive.}$$

Ce qui mène à l'estimation suivante : $C_{r,2[\frac{\gamma}{2}]+2} = O(r^{-[\frac{\gamma}{2}]-1})$.

On obtient alors, l'inégalité

$$|\mathbb{E}(S_n^{2[\frac{\gamma}{2}]+2})| \leq C_1 n^{[\frac{\gamma}{2}]+1}.$$

A) Lissage polygonal du processus de sommes partielles

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. réelles et centrées.

Le processus des sommes partielles lissé polygonal est donné comme suit :

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1} \right], \quad t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} \right[, \quad 0 \leq j < n, \quad n \geq 1,$$

avec $0 < \sigma^2 = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}(X_1 X_k) < \infty$.

Théorème 3.14. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles centrées telles que $\mathbb{E}|X_n|^m < \infty$ pour $m > 2 + \gamma$ et $\gamma > 2$. On suppose que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est soit λ -faiblement dépendante vérifiant*

$$\lambda_r = O(r^{-\lambda}), \quad \text{pour } \lambda > \max\left(4 + \frac{2}{m-2}, \frac{(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(m-1)}{m-\gamma-2}\right),$$

ou k -faiblement dépendante, avec

$$k_r = O(r^{-l}) \quad \text{pour } l > \max\left(2 + \frac{1}{m-2}, \frac{(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(m-2)}{m-\gamma-2}\right),$$

ou k' -faiblement dépendante, avec

$$k'_r = O(r^{-l}), \quad \text{pour } l > \max\left(1 + \frac{1}{m-2}, \frac{(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(m-2)}{m-\gamma-2}\right),$$

ou θ -faiblement dépendante, avec

$$\theta_r = O(r^{-\theta}), \quad \text{pour } \theta > \max\left(1 + \frac{1}{m-2}, \frac{(\lfloor \frac{\gamma}{2} \rfloor + 1)(m-1)}{m-\gamma-2}\right).$$

Alors la suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers W dans H_α^0 , pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

Preuve du théorème 3.14

Convergence des lois fini-dimensionnelles

Toutes les conditions du théorème 3.10, 3.11 ou 3.12 (relativement à la notion de dépendance faible) sont satisfaites. Par conséquent, les lois fini-dimensionnelles de $W_n(t) = (\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]})$ convergent vers celles du mouvement brownien W . Donc, il suffit de montrer que la distance dans \mathbb{R}^k entre $(\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k))$ et $(W_n(t_1), \dots, W_n(t_k))$ converge vers zéro en probabilité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$.

Nous considérons la norme euclidienne dans \mathbb{R}^k

$$\|\xi_n - W_n\|_{\mathbb{R}^k}^2 = \sum_{i=1}^k \left| \xi_n(t_i) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt_i]} \right|^2.$$

Pour montrer que $\xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$, il suffit de montrer que

$$\xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \xrightarrow{L^2} 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Soit $t \in [0,1]$, alors il existe $j \in \mathbb{N}$; $\frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \right|^2 &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1} \right] - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (nt - [nt]) X_{[nt]+1} \right|^2 \\ &\leq \left| \frac{1}{\sigma^2 n} (nt - [nt])^2 \right| \mathbb{E} |X_{[nt]+1}|^2, \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2 n} \mathbb{E} |X_{[nt]+1}|^2, \quad \text{car } (nt - [nt])^2 \leq 1. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{E} |X_{[nt]+1} \times 1|^2$, on obtient

$$\mathbb{E} \left| \xi_n(t) - \frac{1}{\sigma} S_{[nt]} \right|^2 \leq \frac{1}{\sigma^2 n} (\mathbb{E} (|X_{[nt]+1}|^\gamma))^{\frac{2}{\gamma}} \leq \frac{1}{\sigma^2 n} M^{\frac{2}{\gamma}}, \quad \text{avec } \mathbb{E} (|X_1|^\gamma) < M.$$

On obtient la convergence suivante

$$\xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \xrightarrow{L^2} 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Il s'en suit que

$$\xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$\|\xi_n(t) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}\|_{\mathbb{R}^k}^2 = \sum_{i=1}^k \left| \xi_n(t_i) - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt_i]} \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } \infty.$$

Equitension

D'après le corollaire 2.1, il suffit de montrer que sous les hypothèses du théorème 4.14, on a

$$\mathbb{E} |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq B |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}, \quad s, t \in [0,1],$$

où B est une constante positive.

Soit $s, t \in [0,1]$, on considère deux cas:

Cas 1 : $\frac{j}{n} \leq s \leq t \leq \frac{j+1}{n}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma &= \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (nt - j)X_{j+1} \right] - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[\sum_{i=1}^j X_i + (ns - j)X_{j+1} \right] \right|^\gamma \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \right)^\gamma (nt - ns)^\gamma \mathbb{E}|X_{j+1}|^\gamma \\ &= \left(\frac{1}{\sigma} \right)^\gamma (n(t - s))^{\frac{\gamma}{2}} (t - s)^{\frac{\gamma}{2}} \mathbb{E}|X_{j+1}|^\gamma, \\ &\leq \left(\frac{1}{\sigma} \right)^\gamma (t - s)^{\frac{\gamma}{2}} \mathbb{E}|X_{j+1}|^\gamma, \text{ car } n(t - s) \leq 1, \end{aligned}$$

alors, en posant $B_1 = \left(\frac{1}{\sigma} \right)^\gamma M$, on obtient

$$\mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq B_1 |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (3.4)$$

Cas 2 : $\frac{j-1}{n} \leq s \leq \frac{j}{n} \leq \dots \leq \frac{j+k}{n} \leq t \leq \frac{j+k+1}{n}$.

Par l'inégalité de Jensen, on aura

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma &= \mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) + \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) + \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_n(s)|^\gamma \\ &\leq 3^{\gamma-1} (\mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right)|^\gamma + \mathbb{E}|\xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right)|^\gamma + \mathbb{E}|\xi_n\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_n(s)|^\gamma). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on montre que

$\exists B_1, B_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right)|^\gamma \leq B_2 |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}|\xi_n\left(\frac{j}{n}\right) - \xi_n(s)|^\gamma \leq B_3 |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (3.6)$$

Pour le terme du milieu, en utilisant la propriété suivante :

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^p X_{i+h} \right|^r = \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^p X_i \right|^r \quad (3.7)$$

qui est vérifiée sous la condition de la stationnarité pour tout entier $p \geq 1, h \geq 0$ et pour tout réel positif r , on a

$$\mathbb{E} \left| \xi_n\left(\frac{j+k}{n}\right) - \xi_n\left(\frac{j}{n}\right) \right|^\gamma = \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=j+1}^{j+k} X_i \right|^\gamma = \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^k X_i \right|^\gamma.$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}|\xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n})|^\gamma \leq (\mathbb{E}|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^k X_i|^{2[\frac{\gamma}{2}]+2})^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}}.$$

Toutes les conditions de la conséquence 3.1, sont satisfaites sous la λ et k -faible dépendance et d'après la remarque 3.7 pour la θ et k' -faible dépendance, donc en utilisant (3.3), avec $q = 2[\frac{\gamma}{2}] + 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=j+1}^{j+k} X_i|^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} &\leq (\frac{1}{\sigma\sqrt{n}})^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} C_1 k^{[\frac{\gamma}{2}]+1} \\ &\leq (\frac{1}{\sigma})^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} C_1 (\frac{k}{n})^{[\frac{\gamma}{2}]+1} \\ &\leq (\frac{1}{\sigma})^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} C_1 |t - s|^{[\frac{\gamma}{2}]+1}, \text{ car } \frac{k}{n} \leq t - s. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{E}|\xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n})|^\gamma \leq ((\frac{1}{\sigma})^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} C_1 |t - s|^{[\frac{\gamma}{2}]+1})^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} = (\frac{1}{\sigma})^\gamma C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Finalement

$$\mathbb{E}|\xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(\frac{j}{n})|^\gamma \leq B_4 |t - s|^{\frac{\gamma}{2}}, \text{ avec } B_4 = (\frac{1}{\sigma})^\gamma C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}}. \quad (3.8)$$

De (3.4) à (3.6) et (3.8), on conclut que

$$\forall t, s \in [0,1], \mathbb{E}|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq B |t - s|^{1+\delta}$$

avec $B = \max(B_1, 3^{\gamma-1}(B_2 + B_3 + B_4))$ et $\delta = \frac{\gamma}{2} - 1 > 0$.

Par le Corollaire 2.1, on déduit que $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est équitendue dans H_α^0 , pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$. Ce qui termine la preuve du théorème 3.14.

B) Lissage par convolution du processus de sommes partielles

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles, centrées. On pose $\sigma^2 = \mathbb{E}X_1^2 + \sum_{k \geq 2} \mathbb{E}(X_1 X_k)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Sous l'hypothèse $0 < \sigma < \infty$, on considère le processus des sommes partielles normalisées de Donsker-Prohorov

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i, \quad t \in [0,1].$$

Selon les besoins, on utilisera également les notations de W_n ci-dessous,

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i 1_{[\frac{i}{n}, 1[}(t), \quad t \in [0, 1].$$

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n S_i 1_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[}(t), \quad t \in [0, 1].$$

Soit le processus lissé défini par

$$\zeta_n(t) = (W_n * k_n)(t) - (W_n * k_n)(0), \quad t \in [0, 1], \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Théorème 3.15. *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite stationnaire de variables aléatoires λ , θ , k' ou k -faiblement dépendantes. On suppose que les conditions du théorème 3.14 sont vérifiées et les noyaux de convolution k_n vérifient les conditions (2.4)-(2.8). Alors la suite $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ définie par (3.9) converge faiblement vers W dans H_α^0 , pour tout $\alpha < \frac{1}{2} - \max(\tau, \frac{1}{\gamma})$.*

Preuve du théorème 3.15

Convergence des lois fini-dimensionnelles

Par l'un des théorèmes 3.10, 3.11 ou 3.12, les lois fini-dimensionnelles de W_n convergent vers celles de W (suivant la notion de dépendance faible). Alors il suffit de montrer la convergence vers zéro de $\mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2$.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} [W_n(t-u)k_n(u) - W_n(t)] du \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} W_n(t-u)k_n(u) du - \int_{\mathbb{R}} W_n(t)k_n(u) du \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} (W_n(t-u) - W_n(t))k_n(u) du \right|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})k_n(u) du \right|^2 \\ &= \mathbb{E} |\mathbb{E}_{k_n} [\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})]|^2. \end{aligned}$$

Où \mathbb{E}_{k_n} est l'espérance mathématique par rapport à la mesure de probabilité $k_n(u)du$.

Par l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 \leq \mathbb{E} [\mathbb{E}_{k_n} |\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})|^2].$$

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 &\leq \mathbb{E}_{k_n} [\mathbb{E} |(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}})^2 (S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})|^2] \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \mathbb{E} |(S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})|^2 k_n(u) du. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathbb{E}|(S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})|^2 = \mathbb{E}|(S_{[n(t-u)]-[nt]})|^2.$$

L'inégalité de Hölder nous donne,

$$\mathbb{E}|(S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]})|^2 \leq (\mathbb{E}|(S_{[n(t-u)]-[nt]})|^{2[\frac{\gamma}{2}]+2})^{\frac{1}{[\frac{\gamma}{2}]+1}}.$$

En appliquant l'inégalité (3.3) avec $q = 2[\gamma/2] + 2$, on a

$$(\mathbb{E}|(S_{[n(t-u)]-[nt]})|^2 \leq (C([n(t-u)] - [nt])^{[\frac{\gamma}{2}]+1})^{\frac{1}{[\frac{\gamma}{2}]+1}},$$

où C est une constante positive. Par conséquent,

$$\mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \right|^2 C^{\frac{1}{[\frac{\gamma}{2}]+1}} ([n(t-u)] - [nt])k_n(u)du.$$

Comme $[n(t-u)] - [nt] \leq n(|u| + \frac{2}{n})$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sigma^2 n} C^{\frac{1}{[\frac{\gamma}{2}]+1}} [|u|] + \frac{2}{n} k_n(u)du \\ &\leq C' \int_{\mathbb{R}} [|u| + \frac{2}{n}] k_n(u)du, \text{ avec } C' = \frac{1}{\sigma^2} C^{\frac{1}{[\frac{\gamma}{2}]+1}}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse 2.4 et le changement de variable $v = \frac{u}{b_n}$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 &\leq C' \int_{\mathbb{R}} [|vb_n| + \frac{2}{n}] k_n(vb_n) b_n dv \\ &\leq C' \int_{\mathbb{R}} [b_n|v| + \frac{2}{n}] \frac{1}{b_n} k(v) b_n dv \\ &\leq C' (b_n \int_{\mathbb{R}} |v| k(v) dv + \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{n} k(v) dv) \\ &\leq C' (b_n \int_{\mathbb{R}} |v| k(v) dv + \frac{2}{n}). \end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} |v| k(v) dv < \infty$ et $b_n \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini, on déduit que

$$W_n * k_n(t) - W_n(t)$$

converge vers zéro dans L^2 pour tout $t \in [0,1]$.

En particulier pour $t = 0$, $\mathbb{E}|W_n * k_n(0) - W_n(0)|^2 = \mathbb{E}|W_n * k_n(0)|^2$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Comme pour $t \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{E}|\zeta_n(t) - W_n(t)|^2 = \mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n * k_n(0) - W_n(t)|^2.$$

Alors en utilisant l'inégalité de Jensen, on aura

$$\mathbb{E}|\zeta_n(t) - W_n(t)|^2 \leq 2(\mathbb{E}|W_n * k_n(t) - W_n(t)|^2 + \mathbb{E}|W_n * k_n(0)|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

A partir de cette inégalité, on déduit que pour tout $t \in [0,1]$, $\zeta_n(t) - W_n(t) \xrightarrow{L^2} 0$, et donc $\zeta_n(t) - W_n(t) \xrightarrow{P} 0$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$, on a

$$\sum_{i=1}^k |\zeta_n(t_i) - W_n(t_i)|^2 = \|\zeta_n - W_n\|_{\mathbb{R}^k}^2 \xrightarrow{P} 0.$$

On conclut que les lois fini-dimensionnelles de ζ_n convergent vers celles de W .

Equitension de $(\zeta_n)_{n \geq 1}$

Nous allons utiliser le théorème 2.8 avec $a_n = \frac{1}{n}$.

Soit $s, t \in [0,1]$ et sans perte de généralité on suppose que $t > s$. On considère deux cas.

Cas $t - s \geq \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &= \mathbb{E}|(W_n * k_n)(t) - (W_n * k_n)(s)|^\gamma \\ &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[n(t-u)]} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[n(s-u)]} \right) k_n(u) du \right|^\gamma \\ &= \mathbb{E} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i k_n(u) \right) du \right|^\gamma \\ &= \mathbb{E} \left| \mathbb{E}_{k_n} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right) \right|^\gamma. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\mathbb{E}|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq \mathbb{E} \mathbb{E}_{k_n} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right|^\gamma.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \mathbb{E}_{k_n} \left(\mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right|^\gamma \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right|^\gamma k_n(u) du \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\gamma \mathbb{E} \left| \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right|^\gamma k_n(u) du.$$

La stationnarité de la suite (X_n) , nous donne

$$\mathbb{E} \left| \left(\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i \right) \right|^\gamma = \mathbb{E} \left| \left(\sum_{i=1}^{[n(t-u)]-[n(s-u)]} X_i \right) \right|^\gamma.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\mathbb{E} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\gamma \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{[n(t-u)]-[n(s-u)]} X_i \right|^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} \right)^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} k_n(u) du.$$

En utilisant l'inégalité (3.3) avec $q = 2[\gamma/2] + 2$, on a

$$\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{[n(t-u)]-[n(s-u)]} X_i \right|^{2[\frac{\gamma}{2}]+2} \leq C_1 (|[n(t-u)] - [n(s-u)]|)^{[\frac{\gamma}{2}]+1}.$$

Par conséquent

$$\mathbb{E} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\right)^\gamma C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} ([n(t-u)] - [n(s-u)])^{\frac{\gamma}{2}} k_n(u) du.$$

Comme $|[n(t-u)] - [n(s-u)]| \leq n(t-s) + 2$ et $\frac{1}{n} \leq |t-s|$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})^\gamma} C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} (n(t-s) + 2)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sigma^\gamma n^{\frac{\gamma}{2}}} C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} n^{\frac{\gamma}{2}} \left((t-s) + \frac{1}{n} 2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sigma^\gamma} C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} (|t-s| + |t-s| 2)^{\frac{\gamma}{2}}, \quad (|t-s| \geq \frac{1}{n}) \\ &\leq \left(\frac{1}{\sigma^\gamma} C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} 3^{\frac{\gamma}{2}} \right) |t-s|^{\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

Il existe ainsi une constante $C_2 = \left(\frac{1}{\sigma^\gamma} C_1^{\frac{\gamma}{2[\frac{\gamma}{2}]+2}} 3^{\frac{\gamma}{2}} \right)$ telle que pour $t-s \geq \frac{1}{n}$, on ait

$$\mathbb{E} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq C_2 |t-s|^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Cas $t-s < \frac{1}{n}$. On a

$$\begin{aligned} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &= |(W_n * k_n)(t) - (W_n * k_n)(s)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} [W_n(u)k_n(t-u) - W_n(u)k_n(s-u)] du \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} W_n[k_n(t-u) - k_n(s-u)] du \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |X_i| 1_{[\frac{i}{n}, 1[}(u) |k_n(t-u) - k_n(s-u)| du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |X_i| \left| \frac{1}{b_n} k\left(\frac{t-u}{b_n}\right) - \frac{1}{b_n} k\left(\frac{s-u}{b_n}\right) \right| 1_{[\frac{i}{n}, 1[}(u) du. \end{aligned}$$

Par l'inégalité (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |X_i| \left(\frac{1}{b_n} a(k) \frac{t-s}{b_n}\right) 1_{[\frac{i}{n}, 1[}(u) du \\ &\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |X_i| \frac{1}{b_n} a(k) |t-s| \left(1 - \frac{i}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{b_n} a(k) \sum_{i=1}^n |X_i| |t-s|, \text{ car } \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{b_n^2} a(k) \sum_{i=1}^n |X_i| |t-s|^{1-\alpha}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \omega_\alpha\left(\zeta_n, \frac{1}{n}\right) &= \sup_{0 < |t-s| < \frac{1}{n}} \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \frac{1}{b_n^2} a(k) \sum_{i=1}^n |X_i| \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \\ &\leq a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right). \end{aligned}$$

Pour montrer que $\omega_\alpha\left(\zeta_n, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{P} 0$, il suffit de montrer que

$$a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right) \xrightarrow{P} 0.$$

L'inégalité de Markov nous donne

$$\mathbb{P}\left[\left(a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right)\right) > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|\right).$$

Par l'inégalité de Hölder

$$\mathbb{E}|X_i| \leq (\mathbb{E}|X_i|^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \leq M^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Par suite

$$\mathbb{P}\left[\left(a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|\right)\right) > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda} a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} a(k) \frac{1}{\sigma} \frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \left(\frac{1}{n} n M^{\frac{1}{\gamma}} \right) \leq M^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\lambda} a(k) \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \right).$$

Il est clair que $M^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\lambda} a(k) \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{b_n^2} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ quand $\alpha < \frac{1}{2} - \tau$.

On conclut alors par le théorème 2.8 à l'équitension de $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ dans H_α^0 pour tout $\alpha < \min[(\gamma)^{-1}(\min(\gamma, \frac{\gamma}{2}) - 1), \frac{1}{2} - \tau] = \frac{1}{2} - \max(\frac{1}{\gamma}, \tau)$. Ce qui termine la preuve de l'équitension et du théorème 3.15.

Chapitre 4

Application aux systèmes d'attente M/G/1 avec rappels

4.1 Introduction

Les systèmes d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée tous les serveurs occupés quitte le système et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit en orbite. Ces systèmes sont très utilisés dans la modélisation des situations réelles (les réseaux de télécommunications, les systèmes d'ordinateurs,...). Une description complète de situations où les systèmes d'attente avec rappels se présentent est donnée dans la monographie de Falin & Templeton [38], le livre de Artalejo & Gomez-Corral [7], les travaux de Falin [36] et ceux de Yang & Templeton [79]. Notre intérêt dans ce chapitre sera focalisé sur la période d'activité du système M/G/1 avec rappels exponentiels. L'analyse de cette caractéristique est très importante du point de vue du serveur et aussi très utile dans l'organisation effective des ressources du système.

La structure de la période d'activité de ce modèle et son analyse avec la transformée de Laplace-Stieltjes ont été étudiées par plusieurs méthodes (cf. [5], [37] et [38]). Parmi les approches utilisées dans l'estimation de la densité de la période d'activité, on peut citer l'approche du principe du maximum d'entropie et l'approche de la file d'attente tronquée [7].

Dans ce chapitre, on examinera le comportement asymptotique de la période d'activité du système en utilisant des principes d'invariance hölderiens.

4.2 Le système M/G/1 avec rappels

On décrit la file d'attente $M/G/1$ avec rappels comme suit : Les arrivées se font selon un processus de Poisson de paramètre λ . Tout client qui arrive pour la première fois dans le système (client primaire) et trouve le serveur occupé, quitte le système et se met en orbite pour faire des rappels aléatoires jusqu'à ce qu'il trouve le serveur libre et entrer en service. Les intervalles entre les rappels d'un même client sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre μ . Un client (appel primaire ou rappel) qui trouve le serveur libre est immédiatement servi et quitte le système. La suite des temps de service est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi générale B sur R_+ . Soit $B(t)$, $t \geq 0$, la loi de probabilité du temps de service de transformée de Laplace-Stieltjes $\beta(s)$ et de moments d'ordre k , $\beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$. On suppose que $B(0+) = 0$.

Les intervalles de temps entre deux arrivées successives, les temps de service et les rappels sont mutuellement indépendants.

On utilisera les notations suivantes : η_k l'instant de fin de service du client k , ξ_k l'instant de début du $k^{\text{ème}}$ service et π_k l'instant d'arrivée du $k^{\text{ème}}$ client primaire.

On a $\rho = \lambda\beta_1$.

Le système évolue de la façon suivante : A l'instant η_{i-1} le $(i-1)^{\text{ème}}$ client termine son service (les appels sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre. Même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent occuper le service immédiatement. Donc le $i^{\text{ème}}$ appel suivant, entre en service après un intervalle de temps R_i durant lequel le serveur est libre, bien qu'en général il y a des clients qui attendent. Si le nombre de client N_{i-1} dans l'orbite à l'instant η_{i-1} est égale à n , alors R_i est de distribution exponentielle de paramètre $\lambda + n\mu$. Le $i^{\text{ème}}$ client sera un appel primaire avec probabilité $\frac{\lambda}{\lambda + n\mu}$ et un rappel avec probabilité $\frac{n\mu}{\lambda + n\mu}$. Le service S_i du $i^{\text{ème}}$ client débute à l'instant $\xi_i = \eta_{i-1} + R_i$. Tous les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'ont aucun effet sur le système. A l'instant $\eta_i = \xi_i + S_i$, le $i^{\text{ème}}$ client achève son service et le serveur devient de nouveau libre et ainsi de suite.

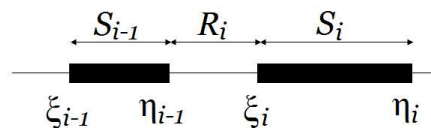


FIG. 4.1 – L'évolution du système.

4.3 Période active et période inactive de l'orbite

Dans le travail de Artalejo et Falin [4], on trouve une description de l'évolution du système en terme de périodes actives ($L^{(b)}$) et de périodes inactives ($L^{(i)}$) de l'orbite. Ces deux caractéristiques sont définies comme suit.

Définition 4.1. (Artalejo, Falin [4])

Une période inactive $L^{(i)}$ de l'orbite commence au moment où le dernier client de l'orbite entre en service et se termine lorsqu'un client primaire (un client qui arrive pour la première fois) trouve le serveur occupé et rejoint l'orbite.

Définition 4.2. (Artalejo, Falin [4])

Une période active de l'orbite $L^{(b)}$ débute au moment où, lorsqu'un client primaire arrive, il trouve le serveur occupé et l'orbite vide; il va dans ce cas dans l'orbite. Elle se termine au moment où un rappel de l'orbite trouve le serveur libre et entre en service et laisse l'orbite vide.

Soit T_k le temps aléatoire qui s'est écoulé entre le début d'un temps de service et l'arrivée d'un client juste avant le début de la période $L_k^{(b)}$. T_k se termine à l'arrivée d'un client primaire.

Le schéma ci-dessous (FIG. 4.2), montre l'évolution du système suivant des périodes actives et de périodes inactives de l'orbite.

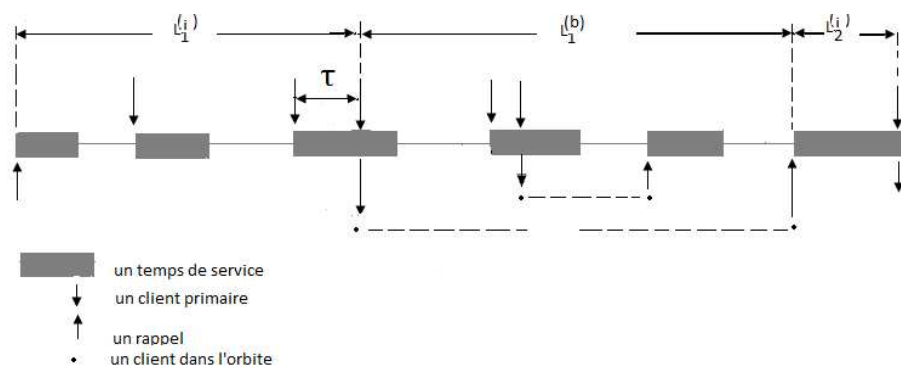


FIG. 4.2 – L'évolution du système suivant les périodes actives et inactives de l'orbite.

La durée d'une période inactive de l'orbite $L_k^{(i)}$ est déterminée par le minimum entre le temps de service et l'instant d'arrivée d'un client primaire.

La densité de probabilité de la durée de cette compétition si elle se termine par la

fin d'un temps de service est $f_1(t) = \frac{1}{\beta(\lambda)} B'(t) e^{-(\lambda t)}$ [4].

La densité de probabilité de la durée de cette compétition si elle se termine par l'arrivée d'un client primaire est $f_2(t) = \frac{1}{1-\beta(\lambda)} \lambda e^{-(\lambda t)} (1 - B(t))$ [4].

On rappelle que la période d'activité ordinaire du système débute à l'instant t_0 de l'arrivée d'un client primaire qui trouve le système vide jusqu'à l'instant t_1 où le système redevient vide (le serveur libre et l'orbite vide) pour la première fois.

En utilisant l'évolution du système selon les périodes $L^{(i)}$ et $L^{(b)}$, la période d'activité ordinaire du système se décompose en plusieurs périodes actives $L_k^{(b)}$ de l'orbite et des périodes de compétition T_k . Elle se termine par un temps aléatoire Θ [4].

La loi de $L_k^{(b)}$ dépend de la loi de T_k . Par conséquent, la suite de variables aléatoires $L_k^{(b)}$ n'est pas une suite de variables i.i.d. Cependant, la modification $C_k^{(b)} = T_k + L_k^{(b)}$, donne une suite de variables aléatoires i.i.d. [4].

Soit L une période d'activité du système. On note par $N^{(b)}$ la variable aléatoire, nombre de périodes actives de l'orbite se déroulant pendant une période L , on définit la loi conditionnelle

$$L_n = (L /_{N^{(b)}=n-1}) = \begin{cases} (\sum_{k=1}^{k=n-1} C_k^{(b)}) + \Theta, & n \geq 2, \\ \Theta, & n = 1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Le schéma ci-dessous illustre la décomposition d'une période d'activité L en fonction des termes de la suite $C_k^{(b)}$ (cf.[4]), avec τ_1, τ_2 sont des réalisations des variables aléatoires T_1 et T_2 et ω une réalisation de la variable aléatoire Θ .

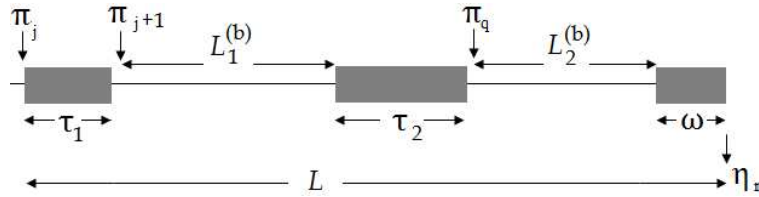


FIG. 4.3 – Période d'activité du système : L , où $t_0 = \pi_j$ et $t_1 = \eta_r$.

Dans cet exemple, nous avons

$$(L /_{N^{(b)}=2}) = T_1 + L_1^{(b)} + T_2 + L_2^{(b)} + \Theta = \Theta + \sum_{k=1}^{k=2} C_k^{(b)},$$

Remarque 4.1.

La variable aléatoire Θ est de densité f_1 (cf. [4]).

Les variables aléatoires T_k , $k \geq 1$ sont de même loi de densité, la fonction f_2 (cf. [4]).

Les variables aléatoires $L_k^{(b)}$, $k \geq 1$ sont de même loi et par conséquent les variables aléatoires $C_k^{(b)}$, $k \geq 1$ sont aussi de même loi (cf. [4]).

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes : pour $n \geq 1$,

$$a_n = \mathbb{E}(L_n) = \mathbb{E}(\Theta) + (n-1)\mathbb{E}(C^{(b)}) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} + (n-1)\frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} + \lambda\beta'(\lambda) - \beta(\lambda)}{\lambda(1-\beta(\lambda))},$$

$$s_n^2 = \text{Var}(L_n) = \text{Var}(\Theta) + (n-1)\text{Var}(C^{(b)}),$$

avec $\text{Var}(\Theta)$ et $\text{Var}(C^{(b)})$ qui sont calculées à partir des formules (4.2), (4.3) et (4.4).

Remarque 4.2. Lorsque $\rho < 1$, on a (cf. [4])

$$\mathbb{E}(L^b) = \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} - 1}{\lambda(1-\beta(\lambda))} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\beta'(\lambda)}{1-\beta(\lambda)}.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{E}(C^{(b)}) = \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} + \lambda\beta'(\lambda) - \beta(\lambda)}{\lambda(1-\beta(\lambda))}, \quad (4.2)$$

où $p_{00} = (1-\rho)\exp\left(\frac{-\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1-\beta(\lambda-\lambda u)}{\beta(\lambda-\lambda u)-u} du\right)$.

Lemme 4.1. Pour $\rho < 1$, on a

$$\mathbb{E}(\Theta) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}, \quad \mathbb{E}(\Theta^2) = \frac{\beta''(\lambda)}{\beta(\lambda)}. \quad (4.3)$$

$$\mathbb{E}((C^{(b)})^2) = \frac{\lambda^2\beta''(\lambda) - 2(p_{00}^{-1} - 1)\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda)(-\mathbb{E}(L^2) + 2(p_{00}^{-1} - 1)^2)}{\lambda^2(1-\beta(\lambda))}, \quad (4.4)$$

où $\mathbb{E}(L^2)$ est donnée par Artalejo & Lopez-Herrero [6].

$$\mathbb{E}(L^2) = \frac{1}{p_{00}} \left[\frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{2\rho\beta_1}{\mu} + \beta_2 \right) - \int_0^1 \frac{2}{\lambda\mu(\beta(\lambda-\lambda t)-t)} \times \left(1 - \frac{\lambda(1-t)\beta'(\lambda-\lambda t)}{\beta(\lambda-\lambda t)-t} - \frac{1}{1-\rho} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_t^1 \frac{1-\beta(\lambda-\lambda u)}{\beta(\lambda-\lambda u)-u} du \right\} dt \right) \right].$$

Preuve du Lemme 4.1

1) La transformée de Laplace-Stieltjes de Θ est donnée par (cf. [4])

$$\Psi(s) = \frac{\beta(s + \lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

On dérive cette fonction, on obtient

$$\Psi'(s) = \frac{\beta'(s + \lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

Comme $\Psi'(0) = -\mathbb{E}(\Theta)$, alors

$$\mathbb{E}(\Theta) = -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}.$$

Pour obtenir $\mathbb{E}(\Theta^2)$, il suffit de dériver une deuxième fois cette fonction par rapport à s et de poser $s = 0$, avec $\Psi''(0) = \mathbb{E}(\Theta^2)$.

2) Soient $g(s)$ et $\Phi(s)$ les transformées de Laplace-Stieltjes de $C^{(b)}$ et L respectivement. On a la relation suivante [4]

$$g(s) = \frac{1}{1 - \beta(\lambda)} \left(1 - \frac{\beta(s + \lambda)}{\Phi(s)}\right).$$

La première dérivée de g par rapport à s nous donne

$$g'(s) = \frac{-1}{1 - \beta(\lambda)} \left(\frac{\beta'(s + \lambda)\Phi(s) - \Phi'(s)\beta(s + \lambda)}{(\Phi(s))^2} \right).$$

En dérivant une deuxième fois

$$g''(s) = \frac{-1}{1 - \beta(\lambda)} \left[\frac{\beta''(s + \lambda)\Phi(s) + \beta(s + \lambda)(-\Phi''(s) + 2(\Phi'(s))^2\phi(s)) - 2\phi'(s)(\phi(s))^2\beta'(s + \lambda)}{\Phi^4(s)} \right].$$

On sait que $\mathbb{E}((C^{(b)})^2) = g''(0)$, par conséquent

$$\mathbb{E}((C^{(b)})^2) = \frac{1}{\lambda^2(1 - \beta(\lambda))} [\lambda^2\beta''(\lambda) - 2(p_{00}^{-1} - 1)\lambda\beta'(\lambda) + \beta(\lambda)(-\mathbb{E}(L^2) + 2(p_{00}^{-1} - 1))^2].$$

Théorème 4.1. *On suppose que les variables aléatoires Θ , $C^{(b)}$ sont non dégénérées et qu'il existe $\gamma > 2$ tel que*

$$\mathbb{E}|\Theta|^\gamma < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}|C^{(b)}|^\gamma < \infty. \quad (4.5)$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \frac{L_n - a_n}{s_n}$.

Si $\rho < 1$, alors la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est asymptotiquement gaussienne.

Preuve du Théorème 4.1.

En utilisant les notations $X_k = C_{k-1}^{(b)}$, $k \geq 2$ et $X_1 = \Theta$, on a $L_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k$.

On considère la suite centrée $(Y_k = X_k - \mathbb{E}(X_k))_{k \geq 1}$, et nous allons vérifier que les conditions du théorème de Hamadouche & Taleb [44] sont satisfaites.

1) On a $\mathbb{E}(Y_1^2) = \text{Var}(X_1) = \text{Var}(\Theta)$ et pour $k \geq 2$, $\mathbb{E}Y_k^2 = \text{Var}(X_k) = \text{Var}(C^{(b)})$.

Comme les variables aléatoires Θ et $C^{(b)}$ sont non dégénérées alors, on a $\min(\text{Var}(\Theta), \text{Var}(C^{(b)})) > 0$. Il suffit donc de prendre $m = \min(\text{Var}(\Theta^2), \text{Var}(C^{(b)}))$.

2) La condition (4.5) assure que

$$M = \max(\mathbb{E}|\Theta - \mathbb{E}(\Theta)|^\gamma, \mathbb{E}|C^{(b)} - \mathbb{E}(C^{(b)})|^\gamma) < \infty.$$

Comme $Y_1 = \Theta - \mathbb{E}(\Theta)$ et $Y_k = C_k^{(b)} - \mathbb{E}(C_k^{(b)})$, $k \geq 2$, on obtient

$$\mathbb{E}|Y_j|^\gamma \leq M < \infty, \quad \forall j \geq 1.$$

3) D'autre part, on a

$b_n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \text{Var}(Y_k) = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}(Y_k^2) = \sum_{k=1}^{k=n} \text{Var}(X_k) = \text{Var}(\Theta) + \sum_{k=2}^{k=n} \text{Var}(C^{(b)})$. Il s'en suit que $b_n^2 = \text{Var}(\Theta) + (n-1)\text{Var}(C^{(b)})$. C'est à dire $b_n^2 = s_n^2$.

Par le théorème 2.10, on déduit que la suite de processus de sommes partielles lissés

$$\xi_n(t) = \frac{1}{s_n} \left[\sum_{k=1}^{[nt]} Y_k + (nt - [nt])Y_{[nt]+1} \right], \quad t \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

converge vers le mouvement brownien dans H_α pour tout $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$.

On considère la fonctionnelle continue $F : H_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(g) = g(1)$.

Par le théorème de la fonction continue, on a $F(\xi_n)$ qui converge en loi dans \mathbb{R} , vers $F(W_t) = N(0,1)$, où $N(0,1)$ est la loi normale standard.

Comme

$$\begin{aligned} F(\xi_n) &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n} (X_k - \mathbb{E}(X_k))}{s_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=n} X_k \right) - \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}(X_k)}{s_n} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=n} X_k \right) - \mathbb{E}(\Theta) - (n-1)\mathbb{E}(C^{(b)})}{s_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{k=n} X_k \right) - a_n}{s_n}, \end{aligned}$$

on obtient le résultat du Théorème 4.1.

Remarque 4.3.

La valeur moyenne de la période d'activité $\mathbb{E}(L)$ vérifie l'équation

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(L/N^{(b)} = n-1) \times P(N^{(b)} = n-1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times q_{n-1},$$

où q_n , $n \geq 0$ est la loi de probabilité de la variable aléatoire $N^{(b)}$ qui est une loi géométrique de paramètre $\beta(\lambda)$.

Nous verrons dans la section 4.5 sur des exemples numériques que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \times q_{n-1}$ converge plus rapidement vers la valeur moyenne $\mathbb{E}(L)$ lorsque ρ est proche de 0.

Nous verrons également le comportement des valeurs moyennes $\mathbb{E}(L)$, $\mathbb{E}(L^{(b)})$ et $\mathbb{E}(L_n)$ en fonction des taux de service, des rappels et des arrivées.

4.4 L'évolution du système par alternance de périodes actives et inactives du serveur

Une période d'activité du système, notée L , consiste en une alternance de périodes d'activité du serveur S_i et de périodes R_i , où le serveur est libre alors qu'il y a des clients dans l'orbite. On note par I la variable aléatoire, nombre de client servis dans cette période d'activité, on a

$$(L/I=n) = \sum_{i=1}^{i=n} (R_i + S_i), \quad n \geq 1,$$

où $R_1 = 0$.

Lemme 4.2. (Falin, Templeton [38])

La variable aléatoire R_i dépend du nombre de client dans l'orbite à l'instant η_{i-1} et possède la loi conditionnelle suivante: $G(x) = P(R_i < x/N_{i-1} = k) = 1 - e^{-(\lambda+k\mu)x}$ de moyenne $\mathbb{E}(R_i/N_{i-1}=k) = \frac{1}{\lambda+k\mu}$.

Lemme 4.3. (Falin, Templeton [38])

Les variables aléatoires $(R_i + S_i)_{i \geq 2}$ sont identiquement distribuées si et seulement si les variables aléatoires N_i son identiquement distribuées.

Dans la suite de notre travail, on supposera que $\rho < 1$ et le nombre de client dans l'orbite pendant la période d'activité L est estimé à $n_e = [\bar{n}_o] + 1$, où $\bar{n}_o = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1-\rho)}$ est le nombre moyen de client dans l'orbite (cf. [79]). On aura donc les variables

aléatoires ($U_i = S_i + R_i$) qui seront identiquement distribuées.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la loi asymptotique de $A_n = \sum_{i=1}^{i=n} U_i$, avec R_i de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda + n_e \mu}$, $i \geq 1$. Notons

$$b_n = \frac{n}{\lambda + n_e \mu} + n\beta_1, \quad n \geq 1$$

et

$$\sigma^2 = \beta_2 - \beta_1^2 + \frac{1}{(\lambda + n_e \mu)^2} + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(R_1, R_i).$$

On pose $Z_i = U_i - \mathbb{E}(U_i)$. Les variables aléatoires centrées (Z_i) sont dépendantes et de même loi. Dans le cas où (Z_i) est une suite mélangeante, on note par $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ la suite des coefficients de mélange fort de $(Z_n)_{n \geq 1}$ (Voir définition 3.2) et on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.2. *On suppose que $(R_n + S_n - E(R_n + S_n))_{n \geq 1}$ est stationnaire, α -mélangeante et qu'il existe $\gamma > 2$, $\varepsilon > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}|S_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty ; \quad \mathbb{E}|R_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < \infty.$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \frac{A_n - b_n}{\sigma \sqrt{n}}$.

Si $\rho < 1$, alors $(D_n)_{n \geq 1}$ est asymptotiquement gaussienne.

Preuve du Théorème 4.2

Sous les conditions du théorème 4.2, la suite centrée $(Z_n = U_n - \mathbb{E}(U_n))_{n \geq 1}$ est α -mélangeante et stationnaire.

L'hypothèse qu'il existe $\gamma > 2$, $\varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{E}|S_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$ et $\mathbb{E}|R_i|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$, donne $E|Z_n|^{\gamma+\varepsilon} < \infty$.

Nous avons aussi les coefficients de mélange $(\alpha_n)_n$ de la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ qui vérifient la condition $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\frac{\gamma}{2}-1} [\alpha_n]^{\frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}} < \infty$ du théorème 3.4 (Chapitre 3).

Ce qui permet de conclure, par ce théorème, que la suite de processus

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} Z_i + (nt - [nt]) Z_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1$$

converge faiblement vers W dans H_α , $\alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}$, avec

$$\bar{\sigma}^2 = E((Z_1)^2) + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(Z_1, Z_i).$$

D'autre part, on a

$$\bar{\sigma}^2 = Var(U_1) + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(U_1, U_i) = \beta_2 - \beta_1^2 + \frac{1}{(\lambda + n_e \mu)^2} + 2 \sum_{i=2}^{i=\infty} Cov(R_1, R_i) = \sigma^2.$$

En utilisant la fonctionnelle $F(g) = g(1)$, continue sur $(H_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ et à valeurs dans \mathbb{R} , on déduit la convergence en loi de $F(\xi_n) = \frac{A_n - b_n}{\sigma \sqrt{n}}$ vers $F(W_t) = N(0,1)$. Ce qui achève la preuve du théorème 4.2.

4.5 Exemples numériques

Pour les illustrations numériques, on suppose que la loi B des temps de service est la loi d'Erlang $E_2(\nu)$. Ce qui mène aux données suivantes :

La transformée de Laplace-Stieltjes est donnée comme suit $\beta(s) = (\frac{\nu}{\nu+s})^2$, $s \geq 0$.

Le premier moment $\mathbb{E}(B) = \beta_1 = \frac{2}{\nu}$ et le taux d'utilisation du serveur $\rho = \frac{2\lambda}{\nu}$. Nous obtenons l'expression de la valeur moyenne de la période active $L^{(b)}$,

$$\mathbb{E}(L^{(b)}) = \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} - 1}{\lambda(1 - \beta(\lambda))} = \frac{(\nu^2 p_{00}^{-1} - (\lambda + \nu)^2)}{\lambda(\nu^2 + 2\nu\lambda)}.$$

La valeur moyenne de la période d'activité ordinaire du système

$$\mathbb{E}(L) = \frac{p_{00}^{-1} - 1}{\lambda},$$

avec $p_{00} = (1 - \rho) \exp(\frac{-\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} du) = (1 - \rho) \exp(\frac{-\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{(1-x) + \frac{2\nu}{\lambda}}{(\frac{\nu}{\lambda})^2 - x(1-x) - \frac{2\nu}{\lambda}x} dx)$.

Nous avons également la valeur moyenne de la période d'activité

$L_n = (L/N^b = n - 1)$, $n \geq 1$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} a_n = \mathbb{E}(L_n) &= -\frac{\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} + (n-1) \frac{\beta(\lambda)p_{00}^{-1} + \lambda\beta'(\lambda) - \beta(\lambda)}{\lambda(1 - \beta(\lambda))} \\ &= \frac{2}{\nu + \lambda} + (n-1) \frac{\nu^2 p_{00}^{-1} - \nu^2 - \frac{2\nu^2 \lambda}{\nu + \lambda}}{\lambda^2(\lambda + 2\nu)}, \end{aligned}$$

et l'équation suivante qui donne

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(L/N^{(b)} = n - 1) \times P(N^{(b)} = n - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times q_{n-1},$$

où $q_n = \beta(\lambda)(1 - \beta(\lambda))^n = \frac{\nu^2}{(\nu+\lambda)^2} \left(\frac{2\nu\lambda+\lambda^2}{\nu+\lambda}\right)^n$, $n \geq 0$, est la loi de probabilité de la variable aléatoire $N^{(b)}$.

Dans le tableau ci-dessus, on effectue des calculs numériques sur la série $\sum_{n \geq 1} a_n q_{n-1}$ pour différentes valeurs de ρ .

(ν, μ, λ)	n	$\sum_{k=1}^n a_k q_{k-1}$
(1,1.5,0.4)	20	17.82686201
	$\rho = 0.8$	17.82708897
	$n \geq 37$	17.82708898 =E(L)
(1,1.5,0.3)	20	6.83941919
	$\rho = 0.6$	6.83942184
	$n \geq 27$	6.83942185=E(L)
(1,1.5,0.2)	15	3.95399468
	$\rho = 0.4$	3.95399622
	$n \geq 22$	3.95399623=E(L)

TAB. 4.1

Remarque 4.4. La série $\sum_{n \geq 1} a_n q_{n-1}$ converge plus rapidement, vers la valeur moyenne de la période d'activité $\mathbb{E}(L)$, lorsque ρ est proche de 0.

Dans ce qui suit, on présente des graphiques dans le but d'illustrer l'effet des paramètres ν , λ et μ sur les mesures $\mathbb{E}(L_n)$, $\mathbb{E}(L^{(b)})$ et $\mathbb{E}(L)$.

En prenant la loi des temps de service, la loi d'Erlang-2 de paramètre ν , on obtient

$$\mathbb{E}(L^{(b)}) = \frac{(\nu^2 p_{00}^{-1} - (\lambda + \nu)^2)}{\lambda(\lambda^2 + 2\nu\lambda)},$$

$$\mathbb{E}(L) = \frac{p_{00}^{-1} - 1}{\lambda},$$

$$\mathbb{E}(L_n) = \frac{2}{\nu + \lambda} + (n - 1) \frac{\nu^2 p_{00}^{-1} - \nu^2 - \frac{2\nu^2 \lambda}{\nu + \lambda}}{\lambda^2(\lambda + 2\nu)}, \quad n \geq 1.$$

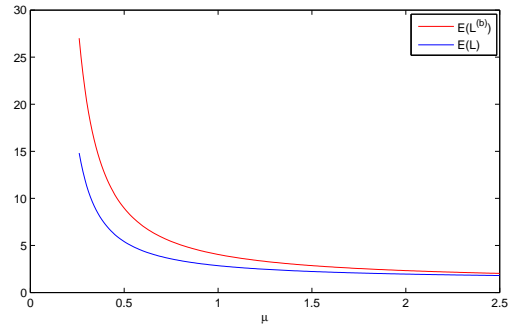


FIG. 4.4 – $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L^{(b)})$ en fonction de μ .

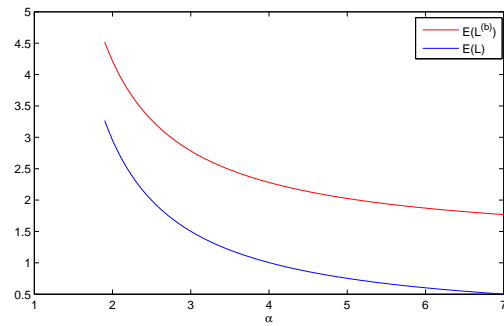


FIG. 4.5 – $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L^{(b)})$ en fonction de ν .

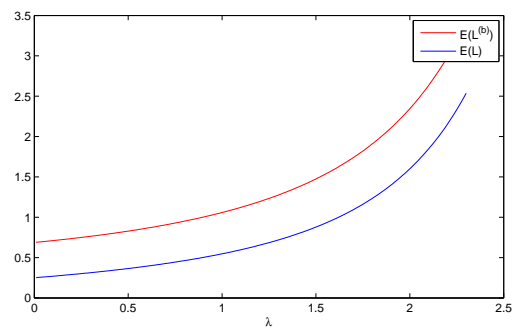


FIG. 4.6 – $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L^{(b)})$ en fonction de λ .

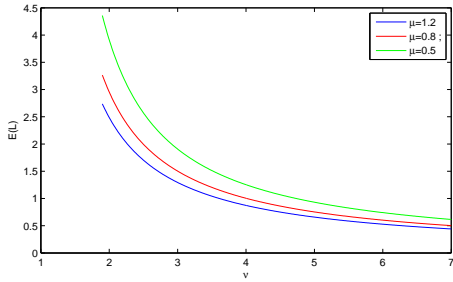


FIG. 4.7 – $E(L)$ en fonction de ν .

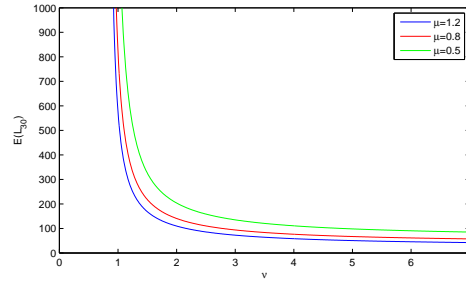


FIG. 4.8 – $E(L_{30})$ en fonction de ν .

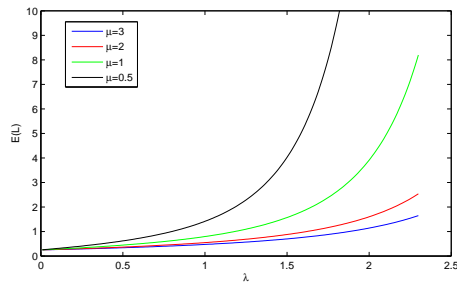


FIG. 4.9 – $E(L)$ en fonction de λ .

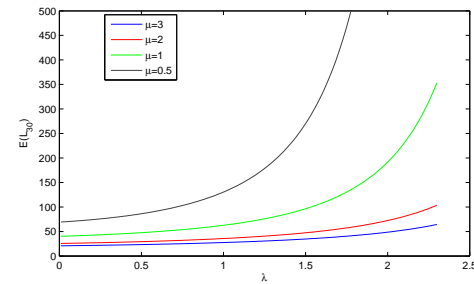


FIG. 4.10 – $E(L_{30})$ en fonction de λ .

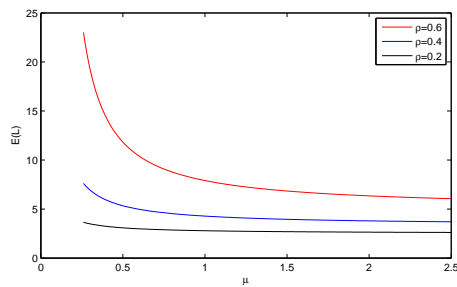


FIG. 4.11 – $E(L)$ en fonction de μ .

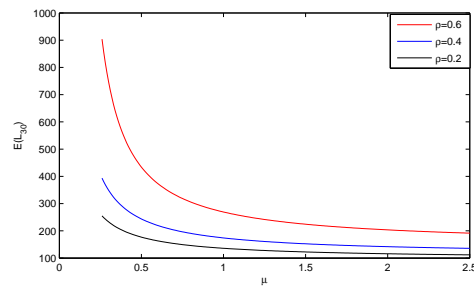


FIG. 4.12 – $E(L_{30})$ en fonction de μ .

Remarque 4.5.

Dans la figure FIG. 4.4, $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L^{(b)})$ sont comparées pour les valeurs $\nu = 3$ et $\lambda = 0.7$. FIG. 4.5 illustre le comportement des valeurs moyennes $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L^{(b)})$ pour les valeurs $\mu = 0.8$ et $\lambda = 0.4$.

Le comportement de ces deux caractéristiques est présenté dans FIG. 4.6 pour les valeurs $\mu = 2$ et $\nu = 8$.

L'effet du taux des arrivées λ sur $\mathbb{E}(L)$ est donné dans la figure FIG. 4.9. Les courbes correspondent à $\nu = 8$ et $\mu = 0.5, 1, 2, 3$. On remarque que $\mathbb{E}(L)$ croît plus vite lorsque μ est proche de 0.

Les courbes de $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L_{30})$, données dans FIG. 4.9 comme fonctions de λ montrent que ces valeurs croissent plus vite lorsque μ tend vers 0.

Les valeurs $\mathbb{E}(L)$ et $\mathbb{E}(L_{30})$, représentées dans FIG. 4.11 et FIG. 4.12 comme fonctions de μ ($\nu = 1$ et $\rho = 0.2, 0.4, 0.6$), croissent avec les valeurs de μ décroissantes.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons d'abord présenté les résultats essentiels de la convergence faible dans les espaces métriques notamment les espaces fonctionnels $C[0,1]$ et $D[0,1]$.

Nous avons ensuite introduit le cadre fonctionnel de l'espace de Hölder H_α , et rappelé les résultats essentiels de convergence faible et d'équitension dans cet espace et nous avons passé en revue les principes d'invariance déjà établis dans ces espaces.

Notre contribution consiste d'abord en l'extension du principe d'invariance de Lamperti au cas des variables aléatoires faiblement dépendantes au sens de Doukhan-Louhici. Ensuite, nous avons donné une application du principe d'invariance hölderien établi par Hamadouche et Taleb aux systèmes d'attente. Plus précisément, nous avons proposé une étude asymptotique d'une période d'activité dans la file d'attente $M/G/1$ avec rappels et nous avons terminé par des résultats numériques.

Les perspectives de ce travail sont diverses:

D'abord, on peut étendre ces résultats au cas de variables aléatoires fortement dépendantes (longue mémoire) et à d'autres types de dépendance.

Comme l'espace de Hölder $H[0,1]$ possède une topologie plus fine que celle de $C[0,1]$ et celle de $D[0,1]$, on peut étudier d'autres applications sur d'autres paramètres des systèmes d'attente et dans le domaine de la statistique.

Dans la deuxième approche du chapitre 4, le type de dépendance entre les variables aléatoires $(R_i + S_i)$, où R_i est une période d'inactivité du serveur et S_i une période

d'activité du serveur, n'est pas connu, il serait donc intéressant d'avoir ce type de dépendance et d'établir des résultats adéquats pour d'éventuelles applications.

Annexe A

Processus gaussiens et mouvement brownien

A.1 Processus gaussiens

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilités. Dans cette annexe, on prendra $T = R$ ou R_+ .

Les lois fini-dimensionnelles

Définition A1. Étant donné un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$, les lois fini-dimensionnelles de X sont les lois de tous les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ pour $t_1, \dots, t_n \in T$ et $n \in N$.

Définition A2. On dit que Y est une version (modification) du processus X si pour tout $t \in T$, $P(X_t = Y_t) = 1$. On parle encore d'équivalence au sens fort.

Régularité des trajectoires

Souvent lorsqu'on considère un processus stochastique X , on en cherche une version Y dont les trajectoires ont de bonnes propriétés de régularité.

Théorème A1 (Kolmogorov). Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus tel qu'il existe $a, b, c > 0$ vérifiant pour tout s, t

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^a) \leq |t - s|^{1+b}$$

Alors il existe une version continue \bar{X} de X . En fait, les trajectoires de \bar{X} sont mêmes γ -höldériennes pour tout $\gamma < b/a$.

Définition A3. Un processus est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ sont gaussiennes ($\forall n \in N, \forall t_1, \dots, t_n \in T$). Autrement dit $X = (X_t)_t$

est gaussien si toute combinaison linéaire $a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$).

La loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est connue (via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne $(\mathbb{E}[X_{t_1}], \dots, \mathbb{E}[X_{t_n}])$ et la matrice de covariance

$$(Cov(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

On comprend dès lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne $a(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et l'opérateur de covariance $K(s, t) = Cov(X_s, X_t)$. En effet, la loi fini dimensionnelle de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est alors la loi normale de dimension n , $N(a_n; K_n)$ avec $a_n = (a(t_1), \dots, a(t_n))$ et $K_n = (K(t_i; t_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Les fonctions a et K définissent donc toutes les lois fini-dimensionnelles de X et donc aussi sa loi.

Des conditions pour avoir une version assez régulière d'un processus gaussien sont données dans le résultat suivant dû au théorème A1.

Théorème A2 (Régularité). Soit X un processus gaussien centrée ($\mathbb{E}[X_t] = 0$), de fonction de covariance $r(s; t)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s, t

$$r(t, t) + r(s, s) - 2r(s, t) \leq c|t - s|^\alpha.$$

Alors il existe une version continue \bar{X} de X . De plus, pour tout $\gamma < \alpha/2$, les trajectoires de \bar{X} sont p.s. höldériennes.

A.2 Mouvement brownien et pont brownien

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert Brown en 1828. Il en résulte une dispersion des micro-particules dans l'eau, on dit aussi une "diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

- particules microscopiques en suspension,
- prix d'actions en bourse,
- erreurs de mesures physiques,
- comportement asymptotique des files d'attente,

- tout comportement dynamique avec part aléatoire (équations différentielles stochastiques).

A.2.1 Mouvement brownien

On se donne un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) .

Définition. Un mouvement brownien est un processus gaussien $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t) &= t\mu, \\ \text{Cov}(X_s, X_t) &= \Gamma(s, t) = \sigma^2(s \wedge t), \quad \forall s, t \geq 0,\end{aligned}$$

où μ et σ^2 sont fixés.

En faisant le changement de variable $Y_t = \frac{X_t - \mu t}{\sigma}$, on a

$$\mathbb{E}(Y_t) = 0, \quad \Gamma(s, t) = s \wedge t \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y_t^2) = t, \quad \forall s, t \geq 0.$$

Un tel processus $(W_t)_{t \geq 0}$ est dit mouvement brownien canonique ou standard.

Dans ce qui suit on appellera mouvement brownien, le mouvement brownien standard.

A.2.2 Propriétés du mouvement brownien

Nous rappelons ici quelques propriétés du mouvement brownien.

Propriété 1 : Le mouvement brownien est à accroissements indépendants, stationnaires et gaussiens.

Le mouvement brownien W_t est à accroissements indépendants signifie que pour toute suite $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, on a les accroissements $(U_j = W_{t_j} - W_{t_{j-1}})_{j=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendants.

Le mouvement brownien est à accroissement stationnaires signifie que la loi de U_j ne dépend que des écarts $(t_j - t_{j-1})$.

$$P(U_j \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2(t_j - t_{j-1})}\right) du$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le mouvement brownien est à accroissement gaussiens :

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \stackrel{\text{Loi}}{=} \sqrt{(t_j - t_{j-1})} N(0,1).$$

On tire de ces propriétés que le vecteur $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)^t$ suit une loi normale $N_n(0_n, \mathbf{M})$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} t_1 - t_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 - t_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix}$.

Propriété 2 : Le mouvement brownien est continu en probabilité et en moyenne quadratique en tout t fixé.

En effet, pour un t fixé, on a $\text{Var}(W_{t+\mu_n} - W_t) = |\mu_n|$, alors $(W_{t+\mu_n} - W_t) \xrightarrow{m.q} 0$ en $m.q$ quand $\mu_n \rightarrow 0$.

Notons que ce résultat n'implique pas la continuité de la trajectoire $(X_t(w))_t$ à w fixé.

Propriété 3 : Continuité P-p.s des trajectoires pour une modification de X_t .

Théorème A.3 (Kolmogorov- Chantsov). Soit un processus (X_t) sur (Ω, A, P) tel que

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\alpha) \leq c|t - s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0, T],$$

où α et β des constantes positives, alors il existe un processus (Y_t) sur (Ω, A, P) tel que

$$\begin{aligned} 1) & P\{X_t = Y_t\} = 1, \quad \forall t \in [0, T]; \\ 2) & P \left\{ \sup_{\substack{0 < |t-s| \leq h \\ s, t \in [0, T]}} \frac{|Y_t - Y_s|}{|t - s|^\gamma} \leq \delta \right\} = 1, \end{aligned}$$

où δ est une constante, h une variable aléatoire p.s positive et $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[$.

On appelle (Y_t) une modification de (X_t) γ -hölderienne.

Ces conditions étant vérifiées dans le cas du mouvement brownien, alors il existe une modification dont toutes les trajectoires sont localement γ -hölderiennes pour tout $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$.

Propriété 4 : Mesurabilité du mouvement brownien.

Pour t fixé, l'application: $\omega \longrightarrow W_t(\omega)$ est mesurable. Grâce à la continuité des trajectoires, on a le résultat suivant :

Théorème A.4. L'application

$$\begin{aligned} W : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (w, t) &\longrightarrow W(w, t) = W_t(w) \end{aligned}$$

est mesurable pour $(\mathcal{A} \otimes B(\mathbb{R}^+), B(\mathbb{R}))$.

Propriété 5 : Invariance du mouvement brownien.

Le mouvement brownien (W_t) est préservé par les transformations suivantes :

1) Changement d'échelle : pour $c > 0$, $U^c = (\frac{1}{\sqrt{\lambda}}W_{\lambda t})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

2) Symétrie : $W^{(1)} = (-W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

3) Inversion du temps : $W^{(2)} = (W_t^{(2)})_{t \geq 0}$ défini par $W_t = \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est un mouvement brownien.

4) Décalage : pour $t_0 \geq 0$, $W^{(3)} = (W_{t_0+t} - W_{t_0})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Propriété 6 : La propriété de Markov.

Le mouvement brownien est un processus de markov, c-à-d: $\forall t \leq s$ et $A \in B(\mathbb{R})$,

$$P\{W_s \in A / F_t\} = P\{W_s \in A / W_t\},$$

avec $F_t = \sigma(W_\tau, \tau \leq t)$.

Propriété 7 : La propriété de Markov forte.

C'est une généralisation de la propriété suivante (qui est une conséquence directe de l'indépendance des accroissements). Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, le processus $(W_{t+s} - W_t)_{s \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien indépendant de F_t . Cette propriété reste vraie lorsque t est un temps d'arrêt. Avant de généraliser, rappelons d'abord la définition d'un temps d'arrêt.

Définition A.5. La variable aléatoire $\tau \in \mathbb{R}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ si

$$\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in F_t.$$

Si τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt, alors $\tau_1 \wedge \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2$ et $\tau_1 + \tau_2$ le sont aussi.

Théorème A.5. Soit τ un temps d'arrêt pour la suite de tribus $(F_t)_{t \geq 0}$, engendrée par le mouvement brownien.

$U = W_{\tau+s} - W_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de F_τ .

Propriété 8 : Irrégularité des trajectoires de (W_t) .

On suppose que (Ω, \mathcal{A}, P) est complet.

Théorème A.6. Pour presque tout w , $(W_t(w))_{t \geq 0}$ n'est en aucun point γ -höldérienne pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

A.2.3 Pont brownien

Le pont brownien est un processus gaussien centré, défini sur $T = [0,1]$ de la façon suivante :

$$B_t = W_t - tW_1,$$

où W_t est le mouvement brownien.

Remarques

1) $B_1 = 0$ P -p.s et cela signifie que toutes les courbes viennent P -p.s de 0 à l'instant $t = 0$, vers 0 à l'instant $t = 1$. C'est la raison pour laquelle on l'appelle pont brownien.

2) On peut considérer le pont brownien B_t^y entre 0 et y sous la forme suivante.

$$B_t^y = W_t - t(W_1 - y) = B_t + ty, 0 \leq t \leq 1.$$

B_t est le pont brownien standard issu de 0 vers 0.

B_t^y est appelé le pont brownien fractionnaire.

A.2.4 Simulation d'un mouvement brownien canonique

Pour simuler un mouvement brownien qui est un processus à temps continu, il faut d'abord discrétiser le temps.

Soit Δt la longueur d'une période de temps. Nous simulerons le mouvement brownien au temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$

On a $\{W_{j\Delta t} - W_{(j-1)\Delta t}; j \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d., toute de loi $N(0, \Delta t)$. Pour simuler une trajectoire du mouvement brownien jusqu'à l'instant $n\Delta t$, nous allons générer n variables aléatoires indépendantes $\{Z_j, j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ de loi normale $N(0,1)$. Comme

$$W_0 = 0, W_{j\Delta t} = W_{(j-1)\Delta t} + (\sqrt{\Delta t})Z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nous simulerons

$$W_0 = 0, W_{j\Delta t}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Par induction sur j , on obtient

$$W_{j\Delta t} = (\sqrt{\Delta t}) \sum_{k=1}^{k=j} Z_k, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Plus la longueur de l'intervalle de temps Δt est petite, meilleure sera notre approximation. Sous Matlab, le programme correspondant à l'algorithme précédent est donné comme suit (cf.[17]) :

```
clear all;
m=3 % le nombre de trajectoire simulées
n=1000 % le nombre de périodes de temps
Delta_t = 0.001 % la longueur d'une période de temps
Z = normrnd(0,1,n,m); % matrice composée de nm v.a.i.i.d N(0,1)
W = zeros(n + 1,m); % initialisation: trajectoire du M.B
temps = zeros(n + 1,1);
for i = 1 : n
W(i + 1, :) = W(i, :) + sqrt(Delta_t) * Z(i, :);
temps(i + 1,1) = temps(i,1) + Delta_t;
end
```

$\text{plot}(\text{temps}, W);$

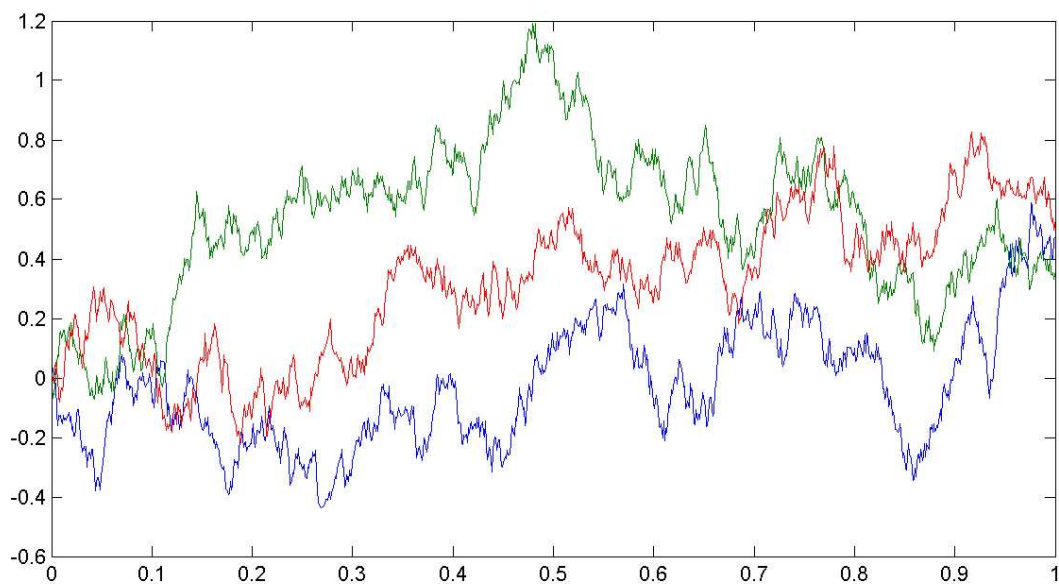


FIG. 4.13 – *Trajectoires d'un mouvement brownien.*

Pour plus de détails sur le contenu de cette Annexe, se référer à [10], [16] et [45].

Annexe B

Généralités sur les systèmes d'attente avec rappels

B.1 Introduction

Un système d'attente classique peut être résumé comme suit. Des clients arrivent à un certain endroit et réclame un certain service. Les instants d'arrivée et les durées de service sont en général aléatoires. Si un poste de service est libre, un client qui arrive se dirige vers ce poste où il est servi. Sinon il prend sa place dans une file d'attente et attend son tour selon la discipline du système: FIFO, LIFO,... Quelquefois les clients impatients quittent définitivement la file, mais il est aussi supposé qu'ils quittent le système définitivement. Cependant, la supposition de perte de clients qui ont choisi de quitter le système est juste une première approximation des situations réelles. Habituellement un tel client après une durée aléatoire revient dans le système et essaie d'obtenir encore le service. Les modèles des files d'attente classique ne prennent pas en considération ce phénomène (les rappels) et par conséquent ne peuvent pas être utilisés dans le traitement de plusieurs problèmes importants.

Les files d'attente avec rappels ont été introduites pour résoudre ce problème. La description d'un systèmes d'attente avec rappels se caractérisent par la propriété qu'un client arrivant dans le système et qui trouve tous les serveurs occupés quitte le système définitivement, ou rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs, le client est dit "en orbite". Si un système de files d'attente classique est défini complètement par la connaissance du processus des arrivées, la discipline d'attente et le mécanisme de service, pour un système avec rappels, il y a lieu d'ajouter un élément décrivant la loi des répétitions d'appels. Ces systèmes

de files d'attente sont largement utilisés dans la modélisation du service d'abonnés dans une centrale téléphonique.

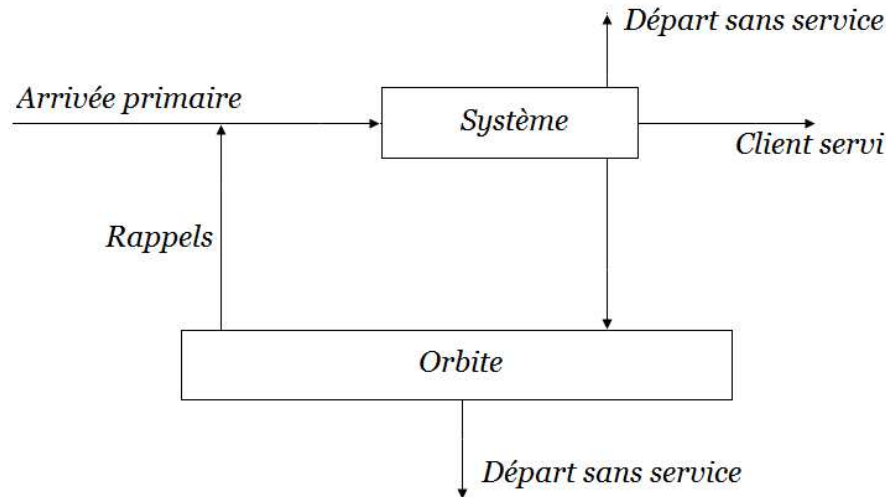


FIG. 4.14 – Schéma général d'un système avec rappels.

B.2. Modèles markovien avec rappels M/M/s

Considérons un système à s serveur ($s \geq 1$). Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ . Si un appel primaire (un client qui arrive pour la première fois) trouve au moins un serveur libre, il est immédiatement pris en charge et quitte le système après avoir achevé son service. S'il trouve tous les serveurs occupés, il rejoint l'orbite et devient source d'appels secondaires. Le temps de service est exponentiel de taux α et la durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentielle de taux μ .

L'état du système peut être décrit par le processus markovien homogène $(S(t), N(t))$ à espace d'état $\{0, 1, \dots, s\} \times N$. Où

$S(t)$ est le nombre de clients en cours de service à l'instant t .

$N(t)$ est le nombre de clients en régime de rappels (en orbite) à l'instant t .

Soit

$$P_{in}(t) = P(S(t) = i, N(t) = n), \quad i = 0, 1, \dots, s.$$

Les conditions d'existence d'un régime stationnaire ont été établies par Falin [38]. Dans ce cas, les limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{in}(t) = P_{in}$$

existent.

B.3 Modèles semi-markovien avec rappels

B.3.1 Le système M/G/1 avec rappels

Ce système décrit dans le chapitre 4, est le modèle avec rappels le plus étudiés par les spécialistes et il existe une documentation abondante sur ses diverses caractéristiques. Le premier résultat sur le système $M/G/1$ avec rappel a été obtenu Par Alexandrov [2] et Keilson, Cozzolino & Young [48], en utilisant la méthode de la variable auxiliaire. Ils ont obtenu les probabilités d'états et les fonctions génératrices du nombre de clients dans le système.

L'état du système peut être décrit par le processus

$$Y(t) = \begin{cases} N(t), & \text{si } C(t) = 0. \\ (C(t), N(t), H(t)) & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

Où, $C(t) = 0$ ou 1 selon que le serveur est libre ou actif;

$H(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et désignant la durée de service résiduelle à la date t , si $C(t) = 1$;

$N(t)$ représente le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t .

Le nombre de clients dans le système à l'instant t s'écrit

$$X(t) = C(t) + N(t).$$

Notons

$$P_{0j}(t) = P(C(t) = 0, N(t) = j),$$

$$P_{1j}(t, x) = P(C(t) = 1, N(t) = j, x < H(t) < x + dx), \quad j > 0.$$

En régime stationnaire ($\rho < 1$), la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par

$$Q(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\beta(\lambda - \lambda z)}{\beta(\lambda - \lambda z)} \exp\left(-\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda x)}{x - \beta(\lambda - \lambda x)} dx\right).$$

Posons

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\beta(\lambda-\lambda z)}{\beta(\lambda-\lambda z) - z},$$

$$\phi(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu} \int_0^z \frac{(1-\beta(\lambda-\lambda x))}{x-\beta(\lambda-\lambda x)} dx\right).$$

On aura la décomposition stochastique

$$Q(z) = \pi(z) \frac{\phi(z)}{\phi(1)}.$$

Cette formule signifie que le nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels X_r s'écrit comme la somme de deux variables : $X_r = X_c + V$.

X_c : est le nombre de clients dans le système $M/G/1$ classique.

V : une variable aléatoire positive de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$.

Sous l'hypothèse $\rho = \lambda\beta_1 < 1$, les probabilités limites

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j),$$

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = i, N(t) = j), \quad j \in \mathbb{Z}_+, i = 0, 1.$$

existent et sont positives.

B.3.2 Chaîne de Markov induite

La méthode de la chaîne de Markov induite a été utilisée pour la première fois par Choo et Conolly [19].

Soit $N_i = N(\eta_i)$ le nombre de clients dans l'orbite à l'instant η_i du $i^{\text{ème}}$ départ. Il est facile de voir que

$$N_i = N_{i-1} - \delta_{N_i} + \nu_i,$$

où ν_i est le nombre d'appels primaires durant le $i^{\text{ème}}$ service.

δ_{N_i} est une variable aléatoire de Bernoulli

$$\delta_{N_i} = \begin{cases} 1, & \text{si le } i^{\text{ème}} \text{ client servi provient de l'orbite.} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi conditionnelle de δ_{N_i} est donnée par

$$\left. \begin{aligned} P(\delta_{N_i} = 0 / N_{i-1} = n) &= \frac{\lambda}{\lambda + n\mu} \\ P(\delta_{N_i} = 1 / N_{i-1} = n) &= \frac{n\mu}{\lambda + n\mu} \end{aligned} \right\}.$$

La variable aléatoire ν_i ne dépend pas des événements qui se sont produits avant l'instant ξ_i du début du $i^{\text{ème}}$ service. La distribution de ν_i est

$$a_n = P(\nu_i = n) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dB(x), \quad n \geq 0$$

de fonction génératrice

$$k(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n = \beta(\lambda - \lambda z)$$

et de moyenne

$$\mathbb{E}(\nu_i) = \sum_{n=0}^{n=\infty} n a_n = \rho.$$

La suite de variables aléatoires (N_i) forme une chaîne de Markov (dite chaîne de Markov induite) dont les probabilités de transition en un pas $r_{m,n} = P(N_i = n/N_{i-1} = m)$ sont données comme suit :

$$r_{m,n} = \frac{\lambda}{\lambda + m\mu} a_{n-m} + \frac{m\mu}{\lambda + m\mu} a_{n-m+1}.$$

Preuve

$$\begin{aligned} \text{On a } r_{m,n} &= P(N_i = n/N_{i-1} = m) \\ &= P(N_{i-1} - \delta_{N_i} + \nu_i = n/N_{i-1} = m) \\ &= P(\nu_i = n - m + \delta_{N_i}/N_{i-1} = m) \\ &= P(\nu_i = n - m/N_{i-1} = m, \delta_{X_i} = 0) \cdot P(\delta_{N_i} = 0/N_{i-1} = m) \\ &\quad + P(\nu_i = 1 + n - m/N_{i-1} = m, \delta_{X_i} = 1) \cdot P(\delta_{N_i} = 1/N_{i-1} = m) \\ &= P(\nu_i = n - m)P(\delta_{N_i} = 0/N_{i-1} = m) \\ &\quad + P(\nu_i = 1 + n - m)P(\delta_{N_i} = 1/N_{i-1} = m) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + m\mu} a_{n-m} + \frac{m\mu}{\lambda + m\mu} a_{n-m+1}. \end{aligned}$$

Régime stationnaire

La chaîne de Markov N_i admet une distribution stationnaire notée π_n ssi $\rho < 1$ (cf. [38]).

- Les équations de Kolmogorov de la distribution π_n sont

$$\pi_n = \sum_{m=0}^{m=n} \pi_m \frac{\lambda}{\lambda + m\mu} a_{n-m} + \sum_{m=1}^{m=n+1} \pi_m \frac{m\mu}{\lambda + m\mu} a_{n-m+1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\pi_0 = (1 - \rho) \exp\left(\frac{-\lambda}{\mu} \int_0^1 \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda u)}{\beta(\lambda - \lambda u) - u} du\right).$$

- La fonction génératrice de π_n est donnée par

$$H(z) = (1 - \rho) \frac{1 - z}{k(z) - z} k(z) \exp\left(\frac{\lambda}{\mu} \int_1^z \frac{1 - k(u)}{k(u) - u} du\right).$$

- La distribution stationnaire π_n vérifie

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\pi_n}{\lambda + n\mu} = \frac{1 - \rho}{\lambda}.$$

- Les probabilités p_j et p_{ij} peuvent être calculées par les formules de récurrence

$$p_0 = 1 - \rho, \quad p_1 = \frac{1 - a_0}{a_0} p_0, \quad p_2 = \frac{1 - a_0 - a_1}{a_0} (p_0 + p_1)$$

$$p_{j+1} = \frac{1 - \sum_{i=0}^j a_i}{a_0} \sum_{i=0}^j p_i + \sum_{i=2}^{ij} p_i \sum_{k=j-i+2}^j \frac{a_k}{a_0}, \quad j \geq 2,$$

$$p_{0j} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu j} \pi_j, \quad p_{1j} = \frac{(j+1)\mu}{\lambda} p_{0,j+1}, \quad j \geq 0,$$

B.3.3 Caractéristiques moyennes

Les caractéristiques du système $M/G/1$ avec rappels sont données dans l'article de Yang et Templeton [79] par

- 1) Nombre moyen de clients dans le système

$$\bar{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

- 2) Nombre moyen de clients dans l'orbite.

$$\bar{n}_o = \bar{n} - \rho = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

3) Temps d'attente et nombre de rappels. Le temps d'attente d'un client est mesuré à partir du temps d'entrée dans le système jusqu'au temps du commencement du service.

Pour trouver le temps moyen d'attente \bar{W} , on utilise la formule de Little $\bar{n} = \bar{w}\lambda$ et on aura

$$\bar{w} = \frac{\lambda\beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Une fois \bar{w} obtenu, il est facile d'obtenir $\bar{\eta}$, le nombre moyen de rappels par client

$$\bar{\eta} = \bar{w}\mu = \frac{\mu\lambda\beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}.$$

B.3.4 Période d'activité ordinaire du système

Une période d'activité est définie comme étant la période qui débute à l'instant t_0 d'arrivée d'un premier client primaire dans un système vide ($C(t_0+0) = 1, N(t_0+0) = 0$) jusqu'à l'instant t_1 où le système redevient vide pour la première fois

$$t_1 = \inf\{t : t > 0, C(t) = 0, N(t) = 0\}.$$

On note $L = t_1 - t_0$, la durée de la période d'activité du système, cette période est constituée d'une alternance de période d'activité S_i et de période d'inactivité R_i du serveur.

On note $Y(s) = E(e^{-sL})$, la transformée de Laplace de la période d'activité.

Si I est le nombre de clients servis dans la période d'activité L , alors on note $\pi(s,y) = E(e^{-sLy^I})$, la transformée conjointe de ces deux variables.

Falin [38] procède à une étude de la période d'activité en utilisant la méthode des catastrophes qui permet de donner des résultats plus explicites dans le cas du système M/G/1. La période d'activité à été étudié par Coo et Conolly [19] pour le modèle M/M/1 qui donnent une procédure récursive de calcul des moments de la variable L .

Théorème B2 [38].

Pour le système M/G/1 avec rappels, la transformée de Laplace-Steiltjes de la distribution conjointe de la période d'activité L du nombre de clients I servis au cours de cette période $\pi(s,y)$ est solution de l'équation

$$s + \lambda - \lambda\pi(s,y) = \mu \int_0^{\pi_\infty(s,y)} \exp\left\{\frac{-1}{v} \int_0^x \frac{s + \lambda y\beta(s + \lambda - \lambda u)}{y\beta(s + \lambda - \lambda u) - u} du\right\} \frac{dx}{y\beta(s + \lambda - \lambda x) - x}.$$

où $\pi_\infty(s,y)$ est l'équivalent de $\pi(s,y)$ dans la file M/G/1 classique.

- Si $\rho > 1$, alors $P(L = 1) = P(I = \infty) > 0$
- Si $\rho = 1$, alors $P(L = 1) = P(I = \infty) = 0$
- Si $\rho < 1$, alors

$$\mathbb{E}(L) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda(1-\rho)}\phi(1) \quad \text{et} \quad E(I) = \frac{1}{1-\rho}\phi(1).$$

Le moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(L^2)$ est obtenu par Artalejo & Lopez-Herrero [6].

$$E(L^2) = \frac{1}{p_{00}} \left[\frac{1}{1-\rho^2} \left(\frac{2\rho\beta_1}{\mu} + \beta_2 \right) - \int_0^1 \frac{2}{\lambda\mu(\beta(\lambda-\lambda t)-t)} \times \left(1 - \frac{\lambda(1-t)\beta'(\lambda-\lambda t)}{\beta(\lambda-\lambda t)-t} - \frac{1}{1-\rho} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\mu} \int_t^1 \frac{1-\beta(\lambda-\lambda u)}{\beta(\lambda-\lambda u)-u} du \right\} dt \right) \right].$$

Bibliographie

- [1] Achemine F. and Hamadouche D., *Lamperti's invariance principle for weak dependent sequences in Hölder spaces*, Journal of Probability and Statistical Science Vol. 8., N° 2, pp: 125-141 (2010).
- [2] Alexandrov A. M., *A queueing system with repeated orders*, Engineering Cybernetics Review, Vol.12, N° 3, pp: 1-4 (1974).
- [3] Ango-Nze P. and Doukhan P., *Weak dependence, models and applications to econometrics*, Econometric Theory, Vol.20, N° 6, pp: 995-1045 (2004).
- [4] Artaléjo J.R. and Falin G.I., *On the orbit characteristics of the M/G/1 retrial queue*, Naval research logistics, Vol. 43, pp: 1147-1161 (1996).
- [5] Artaléjo J.R. (Ed.), *Retrial queueing Systems*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 30, pp: 1-228 (1999).
- [6] Artaléjo J.R. and Lopez Herrero M.G., *On the busy period of M/G/1 retrial queue*, Naval Research Logistics, Vol. 47, pp: 115-127 (2000).
- [7] Artalejo J.R. and Gomez-Corall A., *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*, Springer (2008).
- [8] Baldi P. and Royenette B., *Some exact equivalents for the Brownien motion in Hölder norm*, Probability Theory and Related Fields, Vol. 93, pp: 457-484 (1993).
- [9] Billingsley P., *Convergence of probability measures*, J. Willy, New York (1968).
- [10] Billingsley P., *Probability and measure*, Second Edition, J. Willey, New York (1986).
- [11] Birkel T., *Moments bounds for associated sequences*, Ann. Probab., Vol. 16, pp: 1184-1193 (1988).
- [12] Birkel T., *The invariance principle for associated processes*, Stochastic processes and their Applications, Vol. 27, pp: 57-71 (1988).

- [13] Bulinski A. and Shashkin A., *Strong invariance principle for dependent multi-indexed random variables*, Doklady mathematics, Vol.72, N° 1, pp: 503-506 (2005).
- [14] Bulinski, A. and Shahabanovich, E., *Asymptotical behaviour of somme functionals of positively and negatively dependent random fields*, Fundman. Appl. Math., Vol. 4, pp: 479-492 (1998) (in Russian).
- [15] Bradley, R., *Basic properties of strong conditions, A survey and some open questions*, Probability survey Vol 2, pp: 107-144 (2005).
- [16] Breton J.C., *Processus Gaussiens*, Master IMA 2ème année Université de La Rochelle (2006).
- [17] Briand P., *Equation différentielles stochastique*, (2005).
- [18] Chanda K. G., *Strong mixing proprieties of stochastic processes*, Jour. Appl. Prob., Vol. 11, pp: 401-408, (1974).
- [19] Choo Q.H. and Conolly B.W., *New results in the theory of repeated orders queueing systems*, J. Appl. Probab., Vol. 16, pp:631-640 (1979).
- [20] Ciesielski Z., *On the isomorphisms of the spaces H_α and m* , Bull. Acad. Polon. Sci., Vol. 8, pp: 217 - 222 (1960).
- [21] Ciesielski Z., *Hölder conditions for realisations of Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 99, pp: 403-413 (1961).
- [22] Ciessielski Z. and Kerkyacharian G., Royenette B., *Quelques espaces fonctionels associés à des processus gaussien*, Studia-Math., Vol. 107, pp: 171-204 (1993).
- [23] Cox J. T. and Grimmet G., *Central limit theorems for associated random variables and the percolation model*, Ann. Probab., Vol. 12, pp: 514-528 (1984).
- [24] Davydov Y., *The invariance principle for stationary processes*, Theory Probab. Appl., Vol. 15, pp: 487-498 (1970).
- [25] Davydov Y., *Weak convergence of discontinous processes to continous ones*, Th. of Probab. and Math. Stat., Proc. of the seminar dedicated to the memory of Kolmogorov march-may 1993, st Petersburg, I. Ibragimov, A. Zaitser Eds. Gordon and Breach, pp: 15-16 (1996).
- [26] Dedecker J. and Doukhan P., *A new covariance inequality and applications*, Stoch. Process. App., Vol. 106, N° 1, pp: 63-80 (2003).

- [27] Dedecker J., Doukhan P., Lang G., Leon J. R., Louhichi S. and Prieur C., *Weak dependence: Models, Theory and Applications*, Lecture Note in Statistics, Vol. 190, Springer verlag (2007).
- [28] Doukhan P., *Mixing*, Lecture Notes in Statistics 85 (1994).
- [29] Doukhan P., Massart P. and Rio E., *The functional central limit theorem for strongly mixing processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., Vol. 30, pp: 63-82 (1994).
- [30] Doukhan P. and Louhichi S., *A new weak dependence condition and application to moment inequalities*, Stoch. proc. Appl., Vol. 84, 313-342 (1999).
- [31] Doukhan P. and Lang G., *Rates in the empirical central limit theorem for stationary weakly dependent random fields*, Stat. Inference Stoch. Process, Vol. 5, pp: 199-228 (2002).
- [32] Doukhan P. and Wintenberger O., *An invariance principle for new weakly dependent stationary general models*, Probability And Mathematical Statistics, Vol. 27, N° 1, pp:45-73 (2007).
- [33] Doukhan P. and Newmann M.H., *Probability and moment inequalities for sums of weakly dependent random variables with applications*, Stoch. Process. App., Vol. 117, pp: 878-903 (2007).
- [34] Doukhan P. and Neumann M.H., *The notion of ψ -weak dependence and its applications to bootstrapping time series*, Probability Surveys, Vol. 5, pp: 146–168 (2008).
- [35] Esary J., Proschan F. and Walkup D., *Association of random variables with applications*, Ann. Math. Statist., Vol. 38, pp: 1466-1476 (1967).
- [36] Falin G.I., *A survey of retrial queues*, Queueing Systems, Vol. 7, pp: 127-168 (1990).
- [37] Falin G.I., *On the single-line system with secondary orders*, Engineering Cybernetics Rev., Vol. 17, pp: 76-83 (1979).
- [38] Falin G.I. and Templeton J.G.C., *Retrial Queues*, Chapman and Hall, London (1997).
- [39] Falin G.I., *Aggregate arrival of customers in one-line system with repeated calls*, Ukrainian Math.J., Vol. 28, pp: 437-440 (1976).
- [40] Gorodotsky H., *On strong mixing proprieties of linear sequences*, Theory of Probability and it's Applications, pp: 411-413 (1977).

- [41] Hamadouche D., *Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder space*, Stat. Prob. Letters, Vol. 36, pp: 393-400 (1998).
- [42] Hamadouche D. and Suquet Ch., *Weak Hölder convergence of processes with application to the perturbed empirical processes*, Applicationes Mathematicae, Vol. 26, pp: 68-83 (1999).
- [43] Hamadouche D., *Invariance principles in Hölder spaces*, Portugaliae Mathematica, Vol. 57, pp: 127-151 (2000).
- [44] Hamadouche D. and Taleb Y., *Hölderian version of Donsker-Prohorov's invariance principle*, International Journal of Applied Mathematics, Vol. 39, pp: 1-8 (2009)
- [45] Hida T. *Brownien motion*, Springer (1980).
- [46] Ibragimov I., *Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 289, pp: 545-547 (1979).
- [47] Joag-Dev K. and Prochan F., *Negative association of random variables, with applications*, Ann. Statist., Vol. 11, pp: 286-295 (1983).
- [48] Keilson J., Cozzolino V.A. and Young A., *A service system with unfilled request repeated*, Operations Research, Vol. 16, pp: 1126–1137, (1968).
- [49] Kerkyacharian G. and Roynette R., *Une démonstration simple des théorème de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. Math. I 312, pp: 877-882 (1991).
- [50] Lamperti J., *On convergence of stochastic processes*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 104, pp: 430-435 (1962).
- [51] Merabet D. and Hamadouche D., *The uniform empirical process under dependence in Hölder norm*, International Journal of Statistics and Economics, Vol. 3 N° S09, pp: 1-13 (2009).
- [52] Miamee A.G. and Pourahmadi M., *Wold decomposition and parametrization of stationary processes with infinite variance*, Probab. Th. Rel. Fields, Vol. 79, pp: 145-164 (1988).
- [53] Mokkadem P., *Propriétés de mélanges des modèles autoregréssif polynomiaux*, Ann. I.H.P. ser. B 26-2, pp: 219-260 (1990).
- [54] Newman C. M. and Wright A. L., *An invariance principle for certain dependent sequences*, Ann. Probab., Vol. 9, pp: 671-675 (1981).
- [55] Nobelis Ph., *Fonctions aléatoires lipschitziennes*, Lecture Notes Math., Vol. 850, pp: 38-43 (1981).

- [56] Odaira H. and Yoshihara K. I., *Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition*, Kodai Math. Sem. Rep., Vol. 24, pp: 259-269 (1972).
- [57] Oliveira P. E., *Invariance principles in $L^2[0,1]$* , Comment. Math. Univ. Carolinae, Vol. 31, N° 2, pp: 357-366 (1990).
- [58] Oliveira P. E. and Suquet Ch., *An invariance principle in $L^2(0,1)$ for non stationary φ -mixing sequences*, Comm. Math. Univ. Carolinae, Vol. 36, N° 2, pp: 293-302 (1995).
- [59] Oliveira P. E. and suquet Ch., *$L^2(0,1)$ weak convergence of the empirical process for dependent variables*, Lecture Notes in Statistics , A. Antoniadis and G. Oppenheim (Eds) Wavelets and Statistics, Vol. 103, pp: 331-344 (1995).
- [60] Oliveira P. E. and Suquet Ch., *An $L^2(0,1)$ invariance principle for LPQD random variables*, Portugaliae Mathematica, Vol. 53, pp: 367-379 (1995).
- [61] Pang G. and Whitt W., *Two-parameter Heavy-Traffic Limits For Infinite-Server Queues*, Queueing Systems, Vol.65, N°4, pp: 325-364 (2010).
- [62] Prieur C., *An emperical functional central limit theorem for weakly dependent sequences*, Probab. Math. Statist., Vol. 22, N°2, pp: 259-287 (2002).
- [63] Prohorov Y. V., *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*, Theor. Prob. Appl., Vol. 1, pp: 157-214 (1956).
- [64] Prohorov Y. V. and Rosanov Y., *Théorie des probabilités, (Notions fondamentales. Théorèmes limites. Processus aléatoires)*, M., Nauka, (1973).
- [65] Račkauskas A. and Suquet Ch., *Central limit theorem in Hölder spaces*, Probab. Math. Stat., Vol. 9, pp: 155–174 (1999).
- [66] Račkauskas A. and Suquet Ch., *Hölder norm test statistics for epidemic change*, Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 126, N° 2, pp: 495–520 (2004).
- [67] Račkauskas A. and Suquet Ch., *Hölderian invariance principles and some applications for testing epidemic changes*, In A. Kirman and G. Teyssière, editors, Long Memory in Economics, pages 129–156. Springer, ISBN: 3-540-22694-X (2005).
- [68] Račkauskas A. and Suquet Ch., *Testing epidemic changes of infinite dimensional*, Statistical Inference for Stochastic Processes, Vol. 9, pp: 111–134 (2006).
- [69] Račkauskas A. and Suquet Ch., *Estimating a changed segment in a sample*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 97, pp: 189–210 (2007).

- [70] Robert P., *Réseaux de files d'attente méthodes probabilistes*, Springer Verlag Berlin Heidelberg (2000).
- [71] Rosenblatt, M., *A central limit theorem and strong mixing conditions*, Proceeding of the national academy of sciences, Vol.42, N°1, pp: 43-47 (1956).
- [72] Suquet Ch., *Tightness in Schauder decomposable Banach spaces*, Amer. Math. Soc. Transl., Vol. 193, pp: 201–224. (1999).
- [73] Suquet Ch., *Communication privée* (1997).
- [74] Suquet Ch. and Viano M.C., *Change point detection in dependent sequences: invariance principles for some quadratic statistics*, Math. Methods of Stat., Vol. 7, pp: 157–191 (1998).
- [75] Taleb Y., Achemine F, Hamadouche D. and Aissani A, *Asymptotic study of a busy period in a retrial queue*, PUB. IRMA, LILLE, Vol. 71, N° VI (2011).
- [76] Whitt W., *Complements to Heavy Traffic Limit Theorems for the GI/G/1 Queue*, Journal of Applied Probability, Vol. 9, N°. 1 pp. 185-191 (1972).
- [77] Whitt W. and Glyn P., *Heavy-Traffic Extreme-Value Limits for Queues*, Operations Research Letters, Vol. 18, pp: 107-111 (1995).
- [78] Withers C.S., *Conditions for linear processes to be strong mixing*, Z. Wahr. Verws, Vol. 57, pp: 477-480 (1981).
- [79] Yang Y. and Templeton J.G.C., *A survey on retrial queues*, Queueing systems, Vol. 2, pp: 203– 233, (1987).
- [80] Yokoyama R., *Moments bounds for stationary mixing sequences*, Z. Wahrsh. Verw. Gebiete, Vol. 52, pp: 45-57 (1980).

Résumé

Dans la première partie de ce travail, on considère le principe d'invariance de Lamperti pour des variables aléatoires vérifiant la condition de dépendance faible introduite par Doukhan et Louhichi. En utilisant quelques inégalités de moments établies, on montre une version du principe d'invariance de Lamperti pour les lignes polygonales d'interpolation du processus de sommes partielles. Le même résultat est établi pour le lissage par convolution du processus de sommes partielles.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique de la période d'activité d'une file d'attente $M/G/1$ avec rappels. Nous proposons deux approches. La première approche est basée sur la modélisation de Artalejo et Falin (1996) et le principe d'invariance pour des variables aléatoires indépendantes. Dans la seconde approche, on utilise la modélisation de l'évolution du système en termes de périodes d'activité et de périodes d'inactivité du serveur et on propose également de conclure avec un principe d'invariance hölderien.

Mots clés: Mouvement brownien, Espace de Hölder, Principe d'invariance, Système avec rappels, Décomposition de Schauder, Equitension, Faible dépendance.

Abstract

We consider Lamperti's invariance principle in Hölder spaces for random variables satisfying Doukhan-Louhichi dependence condition. With some moment inequalities, we obtain a version of Lamperti's invariance principle for the polygonal interpolation of the partial sums process. Similar results are proved for the convolution smoothing of partial sums process.

In the second part of this work, we propose two approaches to study the convergence in distribution of the busy period of the M/G/1 retrial queue. The first approach rely on the modeling of Artalejo and Falin (1996) and an invariance principle for independent randoms variables. In the second one, we use the evolution of the system in terms of idle periods and busy periods of the server and we conclude too with an hölderian invariance principle.

Keywords : Brownian motion, Hölder space, Invariance principle, Retrial queue, Schauder decomposition, Tightness, Weak dependence.