

*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique*

*Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou
Faculté de Sciences
Département de Mathématiques*

*Mémoire de Magister en Mathématiques
Option : Probabilités et Statistique*

*CHAINES DE MARKOV ET APPLICATIONS A LA
CINETIQUE DES REACTIONS CHIMIQUES*

présenté par BESSAD Baya

le 04/ 07/ 2011, devant le Jury :

<i>M^r. Hocine FELLAG :</i>	<i>Professeur, (U.M.M.T.O),</i>	<i>Président ;</i>
<i>M^r. Mohand Arezki BOUDIBA :</i>	<i>Maître de conférences (A), (U.M.M.T.O),</i>	<i>Rapporteur ;</i>
<i>M^r. Djamel HAMADOUCHE :</i>	<i>Professeur, (U.M.M.T.O),</i>	<i>Examineur ;</i>
<i>M^r. Youcef BERKOUN :</i>	<i>Maître de conférences (A), (U.M.M.T.O),</i>	<i>Examineur.</i>

Remerciements

Je remercie Monsieur **FELLAG Hocine** pour l'intérêt qu'il accorde à ce travail et l'honneur qu'il me fait en présidant ce Jury.

Je remercie également, Monsieur **HAMADOUCHE Djamel** et Monsieur **BERKOUN Youcef** pour l'intérêt qu'ils accordent à ce travail et l'amabilité qu'ils me font de bien vouloir participer à ce Jury.

Je tiens à remercier, particulièrement, Monsieur **BOUDIBA Mohand Arezki**, pour ses orientations, ses encouragements, et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie enfin tous ceux qui m'ont aidé à mener à terme ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à la mémoire de mon cher père. C'est grâce à ses conseils et son soutien moral et financier que je tiens toujours debout. Que Dieu lui ouvre les portes de son vaste Paradis.

*Je dédie ce travail à ma chère mère, que Dieu lui donne une longue vie ;
A mon mari qui m'a soutenu moralement et financièrement pour réaliser ce travail ;*

A tous mes frères et leurs familles ;

A toutes mes soeurs et leurs familles ;

A toute ma famille ;

A toute ma belle famille ;

A tous mes enseignants depuis la première année primaire. C'est grâce à eux que je suis arrivée à ce stade ;

A tous ceux qui m'ont aidé pour la réalisation de ce travail et à tous mes amis.

Table des matières

<i>Introduction</i>	6
<i>I Chaînes de Markov et Cinétique des Réactions Chimiques</i>	8
<i>1 Processus et Chaînes de Markov</i>	9
1.1 <i>Introduction</i>	9
1.2 <i>Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable</i>	9
1.3 <i>Chaînes de Markov à espace d'états quelconque</i>	24
1.4 <i>Processus de Markov</i>	33
<i>2 Chaînes de Markov et Cinétique des Réactions Chimiques</i>	40
2.1 <i>Eléments de Cinétique des réactions chimiques.</i>	40
2.2 <i>Chaînes de Markov à flot.</i>	46
<i>II Introduction aux systèmes dynamiques</i>	59
<i>3 Introduction aux systèmes dynamiques</i>	60
<i>Conclusion</i>	75
<i>Annexe</i>	76

Introduction

Le mémoire est composé de deux parties. La première partie comporte une synthèse générale sur la propriété de Markov et son application à la cinétique des réactions chimiques, et la deuxième est une introduction aux systèmes dynamiques.

Dans le premier chapitre de la première partie, nous présentons une synthèse sur la propriété de Markov.

Les marches aléatoires sont des exemples fondamentaux de chaînes de Markov. Dans le cas des marches aléatoires dans \mathbb{Z}^d , où d est un entier positif, nous précisons la notion de récurrence, puis nous étudions une condition nécessaire et suffisante pour la majoration d'une marche aléatoire dans \mathbb{Z} (cf. [2]). Dans le cas des marches aléatoires dans \mathbb{R} , nous proposons une démonstration d'une propriété sur l'ensemble des valeurs de récurrence (cf. [6]).

Dans le deuxième chapitre, nous donnons quelques éléments de base de la cinétique des réactions chimiques, puis nous introduisons un modèle de chaînes de Markov associé à la cinétique des réactions chimiques : "Les Chaînes de Markov à flot". Nous définissons ainsi le vecteur de flot total d'une chaîne de ce type, et nous donnons la signification de ses composantes, grâce à un résultat énoncé (cf. [12]), dont nous proposons une démonstration, en utilisant le théorème érgodique.

La deuxième partie est consacrée à une introduction à la dynamique des populations et aux systèmes dynamiques.

Un modèle d'évolution d'une population, dans le cas déterministe, est

décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dP_t}{dt} = KP_t$$

ou

$$\frac{dP_t}{dt} = \mu P_t(1 - P_t),$$

où P_t est la taille de la population à l'instant t (cf. [15]).

En discrétisant le temps, ces deux équations deviennent respectivement :

$$P_{n+1} = KP_n \tag{1}$$

et

$$P_{n+1} = \mu P_n(1 - P_n). \tag{2}$$

Un modèle plus riche est obtenu en considérant que les coefficients K et μ sont des variables aléatoires. Les équations (1) et (2) donnent lieu alors à des systèmes dynamiques.

Enfin pour terminer, nous faisons quelques observations et remarques sur les chaînes de Markov $(X_n)_n$ associées, définies respectivement, par :

$$X_n = Y_n X_{n-1} \tag{I}$$

et

$$X_n = Y_n X_{n-1}(1 - X_{n-1}), \tag{II}$$

où $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Première partie

Chaînes de Markov et Cinétique des Réactions Chimiques

Chapitre 1

Processus et Chaînes de Markov

1.1 Introduction

Nous rappelons dans cette introduction les idées de base sur la propriété de Markov. Soit T un ensemble et $(X_t)_{t \in T}$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) . Intuitivement, le processus $(X_t)_{t \in T}$ vérifie la propriété de Markov si son futur et son passé sont conditionnellement indépendants relativement au présent. Nous allons préciser cette propriété dans les différents cas, suivant que les ensembles T et E sont dénombrables ou non.

1.2 Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable

Définition 1.2. 1. *Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et soit E un espace dénombrable. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov si :*

$$\forall n \geq 0, \forall i, j, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0 \in E, \text{ on a :}$$

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0] = P[X_{n+1} = j | X_n = i].$$

La chaîne $(X_n)_n$ est dite homogène ou à probabilité de transition stationnaire si la probabilité $P[X_{n+1} = j | X_n = i]$ ne dépend pas de n .

Les nombres $p_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$ sont les probabilités de transition de la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et la matrice $[p_{ij}]_{i, j \in E}$ est dite matrice de transitions de la chaîne. Si $\{p_i, i \in E\}$ est la loi de X_0 , on dit que $\{p_i, i \in E\}$ est la loi initiale de la chaîne $(X_n)_n$.

Remarque 1.2. 1. La loi initiale $\{p_i\}$ et les probabilités de transition $\{p_{ij}\}$, avec $i, j \in E$ vérifient les relations suivantes : Pour tous $i, j \in E$

$$\begin{cases} p_i \geq 0, & \sum p_i = 1; \\ p_{ij} \geq 0, & \sum_j p_{ij} = 1. \end{cases}$$

Théorème 1.2. 1 (Théorème de l'existence (cf. [1])).

Soit E un ensemble dénombrable, et soient la suite $\{p_i, i \in E\}$ et la matrice $[p_{ij}]_{i, j \in E}$ données et vérifiant les conditions de la remarque précédente, alors il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) sur lequel est définie une chaîne de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ dont l'espace des états E , la distribution initiale $\{p_i, i \in E\}$ et la matrice de transition $[p_{ij}]_{i, j \in E}$

Définition 1.2. 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à espace des états E . Pour $x \in E$ un état, soit ν_x la variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\nu_x = \begin{cases} \inf\{n > 0 / X_n = x\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

ν_x est le premier instant d'entrée dans l'état x , pour la chaîne $(X_n)_n$.

• x est un état récurrent pour la chaîne $(X_n)_n$ si :

$$P[\nu_x < \infty | X_0 = x] = 1.$$

et transient sinon.

- Une classe essentielle $C \subset E$ est dite récurrente si tous ses états sont récurrents. Et comme la récurrence est une propriété de classe, alors C est récurrente si elle contient un état récurrent.
- Une chaîne de Markov irréductible est dite récurrente si elle a un état récurrent.

Marches aléatoires dans \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$:

Soit $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans \mathbb{Z} . La marche aléatoire engendrée par les Y_n est la suite $(X_n)_n$ de v.a. à valeurs dans \mathbb{Z} définie par X_0 , et pour $n > 0$, $X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, où X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} indépendante des Y_n , $n \geq 1$.

X_n est par exemple, la position d'une particule sur l'axe \mathbb{Z} à l'instant n , qui se déplace sur \mathbb{Z} en effectuant des sauts Y_n indépendants et de même amplitude à gauche ou à droite après chaque unité du temps et en démarrant à l'instant 0, de la position X_0 . Y_n est le n^{ime} pas de la marche.

Plus généralement, la donnée d'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et de même loi à valeurs dans \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$ et d'une variable aléatoire X_0 à valeurs dans \mathbb{Z}^d indépendante des Y_n , $n \geq 1$, définit une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{Z}^d , en posant pour $n > 0$,

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Pour les marches aléatoires sur \mathbb{Z} , nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.2. 1. Soit $(X_n)_n$ la marche aléatoire irréductible sur \mathbb{Z} , définie par $X_0 = 0$, et pour $n > 0$,

$$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

avec $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans \mathbb{Z} , et indépendantes de X_0 . Pour que $(X_n)_n$ soit récurrente, il est nécessaire et suffisant que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P[X_n = 0 | X_0 = 0] = +\infty.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} P[\nu_0 < \infty | X_0 = 0] &= P_0[\nu_0 < \infty] = \sum_{k=1}^{\infty} P_0[\nu_0 = k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\lambda \nearrow 1} \lambda^k P_0[\nu_0 = k] \\ &= \lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0[\nu_0 = k]. \end{aligned}$$

Calculons $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0[\nu_0 = k]$

$\forall x \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} P_0[X_n = x] &= P_0[X_n = x, \nu_x \leq n] \\ &= \sum_{k=1}^n P_0[X_n = x, \nu_x = k] \\ &= \sum_{k=1}^n P_0[X_n - X_k = 0, \nu_x = k]. \end{aligned}$$

Les événements $\{X_n - X_k = 0\}$ et $\{\nu_x = k\}$ sont indépendants, donc

$$\begin{aligned} P_0[X_n = x] &= \sum_{k=1}^n P_0[X_n - X_k = 0] \cdot P_0[\nu_x = k] \\ &= \sum_{k=1}^n P_0[X_{n-k} = 0] P_0[\nu_x = k]. \end{aligned}$$

En multipliant $P_0[X_n = x]$ par λ^n ($0 < \lambda < 1$) on obtient

$$\lambda^n P_0[X_n = x] = \sum_{k=1}^n \lambda^n P_0[X_{n-k} = 0] P_0[\nu_x = k]$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = x] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^n P_0[X_{n-k} = 0] P_0[\nu_x = k] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \lambda^{n+k} P_0[X_n = 0] P_0[\nu_x = k] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0] \sum_{k=1}^n \lambda^k P_0[\nu_x = k]. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^n \lambda^k P_0[\nu_x = k] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0] \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = x] \right)$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0[\nu_x = k] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0] \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = x] \right)$$

Pour $x = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0[\nu_0 = k] &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0] \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0] \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0]}. \end{aligned}$$

Et comme $P_0[\nu_0 < \infty] = \lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k P_0[\nu_0 = k]$, alors

$$\begin{aligned} P_0[\nu_0 < \infty] &= 1 - \lim_{\lambda \nearrow 1} \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0]} \\ &= 1 - \frac{1}{\lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0]}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_0[X_n = 0]$ converge uniformément sur $[0,1]$, donc

$$P_0[\nu_0 < \infty] = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_0[X_n = 0]}$$

Alors,

$$\begin{aligned} P_0[\nu_0 < \infty] = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_0[X_n = 0]} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_0[X_n = 0] = +\infty. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. 2. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire dans \mathbb{Z} , définie par $X_0 = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$$

avec les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi sur \mathbb{Z} , et indépendantes de X_0 . Pour $x \in \mathbb{Z}$, notons

$$P[X_n = x | X_0 = 0] = P_n(0, x),$$

alors si $\Phi(t)$ est la fonction caractéristique de Y_1 , nous avons :
 $\forall n \geq 0, P_n(0, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iyt} \Phi^n(t) dt$, pour tout $y \in E$.

Démonstration. (Cf. [3]). \square

Proposition 1.2. 3. Si $\Phi(t)$ est la fonction caractéristique de Y_1 , alors $(X_n)_n$ est transiente ssi :

$$\lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} \right] dt < \infty.$$

Démonstration. D'après la proposition (1.2.1), $(X_n)_n$ est transiente si et seulement si :

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0, 0) < \infty, \text{ avec } P_n(0, 0) = P[X_n = 0 | X_0 = 0]$$

mais

$$G = \lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P_n(0, 0)$$

D'où et d'après la proposition (1.2.2),

$$\begin{aligned} G &= \lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^0 \Phi^n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Phi^n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda \Phi(t)]^n dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} dt. \end{aligned}$$

En remarquant que, pour $0 \leq \lambda < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} dt = \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} \right] dt.$$

On a alors :

$$G = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} \right] dt$$

et alors

$$G < \infty \text{ ssi } \lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} \right] dt < \infty$$

C'est à dire :

$(X_n)_n$ est transiente ssi :

$$\lim_{\lambda \nearrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \Phi(t)} \right] dt < \infty$$

□

Exemple 1.2. 1.

Si $(X_n)_n$ est la marche aléatoire définie par

$$X_n = \sum_{k=0}^n Y_k$$

où les Y_k sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$P[Y_k = 1] = P[Y_k = -1] = \frac{1}{2}$$

alors $(X_n)_n$ est récurrente. En effet, si $\phi(x)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y_k , alors :

$$\phi(x) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix} = \cos x.$$

Et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \lambda \phi(x)} \right] dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos x} dx.$$

Posons $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, alors :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}(1 + t^2).$$

D'où :

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

On a

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-\lambda \cos x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-\lambda \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\frac{(1+t^2) - \lambda(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1+t^2 - \lambda + \lambda t^2} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\lambda + (1+\lambda) t^2} dt \\ &= \frac{4}{(1-\lambda)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} t^2} dt \\ &= \frac{4}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} t \right]^2} dt. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} t = u &\Rightarrow du = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} dt \\ &\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} du \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} t \right]^2} dt &= \frac{4}{1-\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} du \\
&= \frac{4}{1-\lambda} \left[\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \cdot \operatorname{arctg} u \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{4}{1-\lambda} \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{1+\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \longrightarrow +\infty \text{ quand } \lambda \nearrow 1.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition (1.2.3), la marche aléatoire $(X_n)_n$ est récurrente.

Dans le cas symétrique et irréductible, il est connu que pour $d \leq 2$ la marche aléatoire est récurrente et pour $d \geq 3$ la marche est transiente (cf. [4]).

Si $d = 1$, cela est immédiat (cf. [exemple précédent]), et directement, il suffit de montrer que 0 est récurrent, et comme les probabilités de retour sont :

$$P[X_{2n} = 0 | X_0 = 0] = C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}}$$

et

$$\sum_n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = +\infty,$$

le résultat s'en suit.

Les marches aléatoires dans \mathbb{Z}^d , $d \in \mathbb{N}^*$, sont des exemples fondamentaux de chaînes de Markov. Nous nous intéressons ci-dessous au cas où $d = 1$, en donnant un théorème de majoration. Pour cela, rappelons la loi de 0 ou 1 de Kolmogorov.

Théorème 1.2. 2. *Loi de 0-1 de Kolmogorov (Loi de tout ou rien). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, et soit \mathcal{F} la tribu définie par $\mathcal{F} = \bigcap_n \bar{\mathcal{F}}_n$ où : $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ alors*

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, $\bar{\mathcal{F}}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$
 \mathcal{F}_n est engendrée par la classe C_1 d'événements de la forme :

$$\{\omega, X_i(\omega) \leq x_i; 1 \leq i \leq n\}, \quad x_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

$\bar{\mathcal{F}}_n$ est engendrée par la classe C_2 d'événements de la forme :

$$\{\omega, X_j(\omega) \leq x_j; n+1 \leq j \leq n+r\}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad x_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

mais les v.a $(X_i)_i \in \mathbb{N}$ sont indépendantes, donc C_1 et C_2 sont indépendantes et par conséquent, \mathcal{F}_n et $\bar{\mathcal{F}}_n$ sont indépendantes. On a aussi \mathcal{F}_n et \mathcal{F} sont indépendantes, en effet :

$\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{F}}_n, \forall n$, et comme $\bar{\mathcal{F}}_n$ et \mathcal{F}_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors \mathcal{F} est indépendante de \mathcal{F}_n

Soit $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_n, n \in \mathbb{N})$ alors \mathcal{F}_∞ et \mathcal{F} sont indépendantes, en effet :

\mathcal{F}_∞ est engendrée par $\bigcup_n \mathcal{F}_n$, et comme \mathcal{F}_n ne dépend pas de \mathcal{F} pour tout n , alors $\bigcup_n \mathcal{F}_n$ ne dépend pas de \mathcal{F} , et par conséquent, \mathcal{F}_∞ ne dépend pas de \mathcal{F} . D'autre part, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty \forall n$, donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\infty$. D'où $\forall A \in \mathcal{F}$ on a $A \in \mathcal{F}_\infty$.

Et comme \mathcal{F} et \mathcal{F}_∞ sont indépendantes, alors A est indépendant de A . Par conséquent : $P(A \cap A) = P(A).P(A)$.

C'est à dire : $P(A) = [P(A)]^2$

D'où : $P(A).[1 - P(A)] = 0$

Donc : $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$ \square

Proposition 1.2. 4. Pour $x \geq 0$, soit τ_x la variable aléatoire, définie par :

$$\tau_x = \begin{cases} \inf\{ n/ X_n > x \} & \text{si cet ensemble n'est pas vide;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

τ_x est le premier instant d'entrée de la chaîne $(X_n)_n$ dans l'intervalle $]x, \infty]$.

Si $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire définie par $X_0 = 0$, et pour $n \geq 1$, $X_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, où $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, et indépendantes de X_0 , et si τ_0 est fini, alors sa fonction génératrice pour $|\lambda| < 1$, est :

$$\phi_{\tau_0}(\lambda) = \mathbb{E}(\lambda^{\tau_0}) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n} P\{X_n > 0\} \right\}$$

Démonstration. (cf. [2]) \square

Théorème 1.2. 3. Pour que la marche aléatoire $(X_n)_n$ soit majorée, i.e.

$$P\{\sup_n X_n < +\infty\} = 1,$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{X_n > 0\} < \infty.$$

Démonstration.

\Leftarrow) Supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0] < \infty,$$

et montrons que

$$P[\sup_n X_n < \infty] = 1.$$

On a :

$$\begin{aligned} P[\tau_0 = \infty] &= 1 - P[\tau_0 < \infty] \\ &= 1 - P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_0 = n\}\right] \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P[\tau_0 = n] \\ &= 1 - \lim_{\lambda \nearrow 1} \lambda^n \sum_{n=1}^{\infty} P[\tau_0 = n] \\ &= 1 - \lim_{\lambda \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n P[\tau_0 = n] \\ &= 1 - \lim_{\lambda \nearrow 1} \mathbb{E}(\lambda^{\tau_0}). \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition (1.2.4), on a :

$$\begin{aligned} P[\tau_0 = \infty] &= 1 - \left[1 - \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0]\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0]\right\}. \end{aligned}$$

On admet que

$$e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = +\infty.$$

Donc, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0] < \infty,$$

alors

$$\exp\left\{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0]\right\} > 0.$$

C'est à dire

$$P[\tau_0 = \infty] > 0.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\{\tau_0 = \infty\} &= \{\inf\{n/X_n > 0\} = +\infty\} \\ &= \{X_n \leq 0, \forall n\} \\ &= \{\sup_n X_n \leq 0\} \subseteq \{\sup_n X_n < +\infty\}.\end{aligned}$$

Donc,

$$P[\sup_n X_n < +\infty] \geq P[\tau_0 = +\infty] > 0$$

D'où, et d'après la loi de 0-1 (tout ou rien),

$$P[\sup_n X_n < +\infty] = 1$$

C'est à dire $(X_n)_n$ est majorée.

\Rightarrow) Réciproquement, Supposons que

$$P[\sup_n X_n < +\infty] = 1.$$

et montrons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0] < +\infty.$$

Pour cela supposons le contraire, c'est à dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0] = +\infty.$$

Et alors,

$$P[\tau_0 = +\infty] = 0.$$

* Si $P[Y_1 > 0] = 1$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k = +\infty$ presque sûrement, et par suite

$$P[\sup_n X_n = +\infty] = 1.$$

D'où :

$$P[\sup_n X_n < +\infty] = 0.$$

Contradiction avec l'hypothèse.

*Si $P[Y_1 > 0] \neq 1$, alors $P[Y_1 \leq 0] > 0$. C'est à dire

$$\exists m \leq 0 \text{ tel que } p_m = P[Y_1 = m] > 0.$$

Pour tout n on a :

$$\begin{aligned} & P[Y_1 = m, \dots, Y_n = m, \sup_{k \geq 0} (X_{n+k} - X_n) \leq -nm] = \\ &= P[Y_1 = m, \dots, Y_n = m, X_{n+1} - X_n \leq -nm, X_{n+2} - X_n \leq -nm, \dots] \\ &= P[Y_1 = m, \dots, Y_n = m, X_{n+1} \leq -nm + nm, X_{n+2} \leq -nm + nm, \dots] \\ &= P[Y_1 = m, \dots, Y_n = m, X_{n+1} \leq 0, X_{n+2} \leq 0, \dots] \\ &\leq P[X_l \leq 0, \forall l] \\ &\leq P[\sup_l X_l \leq 0] = P[\tau_0 = +\infty] = 0. \end{aligned}$$

On a donc,

$$P[Y_1 = m, \dots, Y_n = m, \sup_{k \geq 0} (X_{n+k} - X_n) \leq -nm] \leq 0.$$

C'est à dire

$$P[Y_1 = m] \dots P[Y_n = m] \cdot P[\sup_l X_l \leq -nm] \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est à dire

$$(p_m)^n P[\sup_l X_l \leq -nm] \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$P[\sup_l X_l \leq -nm] = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme $n \leq -nm$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$[\sup_l X_l \leq n] \subset [\sup_l X_l \leq -nm].$$

Par conséquent,

$$P[\sup_l X_l \leq n] = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$P\left[\sup_l X_l > n\right] = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$P[\sup_l X_l = +\infty] = 1.$$

Par conséquent,

$$P[\sup_n X_n < \infty] = 0.$$

Contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P[X_n > 0] < +\infty.$$

□

1.3 Chaînes de Markov à espace d'états quelconque

Définition 1.3. 1. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et μ une mesure de probabilité sur E . Une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov homogène d'espace d'états E et de loi initiale μ si :

1. μ est la loi de X_0 ;
2. Pour toute fonction f , \mathcal{E} -mesurable et bornée sur E , nous avons :

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n] \text{ p.s}$$

Cette définition peut être reformulée en termes de probabilité conditionnelle de la manière suivante :

Définition 1.3. 2. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable et μ une mesure de probabilité sur E . Une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov d'espace d'états E et de loi initiale μ si :

1. μ est la loi de X_0 ;
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall n \geq 0$, on a

$$P[X_{n+1} \in A | X_n, \dots, X_1, X_0] = P[X_{n+1} \in A | X_n] \text{ p.s}$$

C'est à dire

$$P[X_{n+1} \in A | \sigma(X_n, \dots, X_1, X_0)] = P[X_{n+1} \in A | \sigma(X_n)] \text{ p.s}$$

où $\sigma(X_n)$ est la tribu engendrée par la variable aléatoire X_n , et $\sigma(X_n, \dots, X_1, X_0)$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires X_n, \dots, X_1 et X_0 .

Remarque 1.3. 1. La définition (1.3.1) est équivalente à la définition (1.3.2).

Démonstration.

• Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de loi initiale μ , vérifiant la définition (1.3.1), alors

$\forall f$ une fonction \mathcal{E} -mesurable et bornée sur E on a :

$$\forall n \geq 0, \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n] \text{ p.s}$$

Nous avons $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{1}_A$ est mesurable et bornée, donc

Pour $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{E}$ nous avons, d'après la définition (1.3.1),

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{n+1}) | X_0, \dots, X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{n+1}) | X_n]$$

C'est à dire

$P[X_{n+1} \in A | X_0, \dots, X_n] = P[X_{n+1} \in A | X_n]$ (par définition de la probabilité conditionnelle.)

• Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de loi initiale μ , vérifiant la définition (1.3.2). Nous avons, donc

$$\forall A \in \mathcal{E}, P[X_{n+1} \in A | X_0, \dots, X_n] = P[X_{n+1} \in A | X_n].$$

C'est à dire

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_{n+1}) | X_n] \text{ (par définition de la probabilité conditionnelle.)}$$

Soit f une fonction mesurable et bornée, alors f est une limite d'une suite croissante de fonctions élémentaires $(f_k)_k$, c'est à dire

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$$

avec

$$f_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

où α_i est un scalaire réel pour tout $i = 1, \dots, k$

et $\forall i, A_i \in \mathcal{E}$.

$$\text{Montrons que } \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[f(X_{n+1}) | X_n].$$

$\forall i = 1, \dots, k$, pour tout k de \mathbb{N} on a :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n].$$

D'où

$$\alpha_i \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \alpha_i \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n].$$

C'est à dire

$$\mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n].$$

D'où

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n].$$

D'où

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n\right].$$

D'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0\right] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(X_{n+1}) | X_n\right].$$

C'est à dire

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n]. \quad (1.3.1)$$

Par convergence monotone, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(X_{n+1}) | X_n, \dots, X_1, X_0\right]$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(X_{n+1}) | X_n\right].$$

En effet :

* D'une part nous avons :

- $f_k \in \mathbb{L}^1$, $\forall k$
- $(f_k)_k$ est une suite croissante vers f
- f est bornée, i.e $\exists M$ tel que $f(X) \leq M$, $\forall X$. Et comme $f_k \nearrow f$, alors $\forall k$, $\int_{\Omega} f_k(X_{n+1}) dP \leq \int_{\Omega} f(X_{n+1}) dP \leq M \int_{\Omega} dP = M$.

Donc, par la convergence monotone, nous avons :

$$\lim_k \int_{\Omega} f_k(X_{n+1}) dP = \int_{\Omega} \lim_k f_k(X_{n+1}) dP. \quad (1.3.2)$$

* D'une autre part, nous avons :

- $\mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n] \in \mathbb{L}^1 \forall k$
- $(\mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n])_k$ est une suite croissante.
- $\exists M$ tel que : $\forall A \in \sigma(X_n)$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}) | X_n] dP &= \int_A f_k(X_{n+1}) dP \text{ (par définition de l'espérance conditionnelle.)} \\ &\leq \int_A f(X_{n+1}) dP \text{ (par hypothèse, } f_k \nearrow f \text{)} \\ &\leq M \int_A dP = M.P(A) \leq M.1 = M. \end{aligned}$$

Donc, par convergence monotone nous avons :

$$\lim_k \int_{\Omega} \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}|X_n)] dP = \int_{\Omega} \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}|X_n)] dP. \quad (1.3.3)$$

On a alors pour tout k et pour tout $A \in \sigma(X_n)$,

$$\begin{aligned} & \int_A \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}|X_n)] dP = \lim_k \int_A \mathbb{E}[f_k(X_{n+1}|X_n)] dP \quad (\text{d'après (1.3.3)}) \\ &= \lim_k \int_A f_k(X_{n+1}) dP \quad (\text{par définition de l'espérance conditionnelle.}) \\ &= \int_A \lim_k f_k(X_{n+1}) dP \quad (\text{d'après (1.3.2)}) \\ &= \int_A \mathbb{E} [\lim_k f_k(X_{n+1})|X_n] dP \quad (\text{d'après la définition de l'espérance conditionnelle.}) \end{aligned}$$

et par unicité presque sûre de l'espérance conditionnelle, nous avons :

$$\mathbb{E}[\lim_k f_k(X_{n+1})|X_n] = \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_n]$$

D'une manière analogue, on peut montrer que :

$$\mathbb{E}[\lim_k f_k(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] = \lim_k \mathbb{E}[f_k(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n]$$

Par conséquent, et d'après (1.3.1), nous avons :

$$\mathbb{E} [f(X_{n+1})|X_0, \dots, X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n]$$

$(X_n)_n$ vérifie alors la définition (1.3.1).

□

Définition 1.3. 3. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Une application

$$N : E \times \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$$

est un noyau de transition sur E si :

1. Pour tout $x \in E$, l'application $N(x, \cdot) : \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur (E, \mathcal{E}) ;
2. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $N(\cdot, A) : E \longrightarrow [0, 1]$ est mesurable.

Exemple 1.3. 1. Si P est une probabilité sur l'espace (Ω, \mathcal{A}) et $(X_n)_n$ une chaîne de Markov d'espace des états (E, \mathcal{E}) , alors l'application \mathbb{P} définie par :

$$\mathbb{P}[X_n, A] = P[X_{n+1} \in A | X_n], \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{E}$$

est un noyau de transition sur E .

Marches aléatoires dans \mathbb{R} :

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, de loi μ . $(X_n)_n$ est une marche aléatoire dans \mathbb{R} , engendrée par la suite $(Y_n)_n$ si : X_0 est une variable aléatoire réelle indépendante des Y_n et $\forall n \geq 1$, $X_n = Y_n + X_{n-1}$.

Notons que $(X_n)_n$ est alors une chaîne de Markov à espace d'états \mathbb{R} et de noyau de transition \mathbb{P} défini, pour tout $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et tout $n \geq 0$ par : $P[X_{n+1} \in A | X_n] = P[X_n, A]$, avec $P[X_n, A] = P[Y_{n+1} \in A - X_n]$.

Définition 1.3. 4. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire sur \mathbb{R} .

1. Un point x de \mathbb{R} est un état possible pour $(X_n)_n$ si :

$$\exists k \text{ tel que } : \forall \varepsilon > 0, P[|X_k - x| < \varepsilon] > 0.$$

2. Un point $x \in \mathbb{R}$ est une valeur de récurrence pour $(X_n)_n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, P \left[\limsup_n \{ |X_n - x| < \varepsilon \} \right] = 1.$$

Proposition 1.3. 1. Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire sur \mathbb{R} engendrée par une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, alors : si \mathcal{R} est l'ensemble de valeurs de récurrence de la marche $(X_n)_n$, on a $\mathcal{R} = \emptyset$ ou \mathcal{R} est un sous groupe de \mathbb{R} . Et dans ce dernier cas, on a :

- $\mathcal{R} = \mathbb{R}$

ou

- $\mathcal{R} = \{0\} \Leftrightarrow X_n = 0 \text{ p.s}$

ou

- $\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \mathcal{R} = \{\mp nz, z \in \mathbb{R}\}$

Démonstration.

- Si $(X_n)_n$ n'admet pas de valeurs de récurrence, alors $\mathcal{R} = \emptyset$.
- Si $\mathcal{R} \neq \emptyset$, montrons que : $\forall x, y \in \mathcal{R}$, alors $y - x \in \mathcal{R}$. C'est à dire, on montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, P \left[\bigcap_m \bigcup_{n \geq m} \{ |X_n - (y - x)| < \varepsilon \} \right] = 1$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, P \left[\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - (y - x)| \geq \varepsilon \} \right] = 0$$

Pour cela, supposons le contraire, c'est à dire :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que : } P \left[\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - (y - x)| \geq \varepsilon \} \right] \neq 0$$

D'où :

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ et } \exists m \text{ tels que : } P \left[\bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - (y - x)| \geq \varepsilon \} \right] > 0$$

C'est à dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists m \text{ tels que : } P \left[\bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - (y - x)| \geq 2\varepsilon \} \right] > 0$$

On a $x \in R \Rightarrow x$ est un état possible, c'est à dire : $\exists k$ tel que : $\forall \varepsilon > 0, P[|X_k - x| < \varepsilon] > 0$.

Considérons les événements suivants :

$$\{ |X_k - x| < \varepsilon \} \text{ et } \{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \} \text{ avec : } n > k.$$

Si l'événement

$$\{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \}$$

se réalise, alors l'événement

$$\{ |X_k - x| + |X_n - y| \geq 2\varepsilon \}$$

se réalise. C'est à dire, l'événement

$$\{ |X_n - y| \geq 2\varepsilon - |X_k - x| \}$$

se réalise.

Si de plus $|X_k - x| < \varepsilon$, alors l'événement $\{ |X_n - y| > \varepsilon \}$ se réalise. Donc :

Si $\omega \in \{ |X_k - x| < \varepsilon \} \cap \{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \}$, alors

$$\omega \in \{ |X_n - y| > \varepsilon \}$$

C'est à dire :

$$\{ |X_k - x| < \varepsilon \} \cap \{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \} \subset \{ |X_n - y| > \varepsilon \}$$

Donc :

$$P[|X_n - y| > \varepsilon] \geq P[\{ |X_k - x| < \varepsilon \} \cap \{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \}]$$

On remarque que les événements $\{ |X_k - x| < \varepsilon \}$ et $\{ |X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon \}$ sont indépendants, donc

$$P[|X_n - y| > \varepsilon] \geq P[|X_k - x| < \varepsilon] \cdot P[|X_n - X_k - (y - x)| \geq 2\varepsilon]$$

C'est à dire :

$$P[|X_n - y| > \varepsilon] \geq P[|X_k - x| < \varepsilon] \cdot P[|X_{n-k} - (y - x)| \geq 2\varepsilon]$$

où :

$P[|X_k - x| < \varepsilon] > 0$, par hypothèse (x est un état possible pour $(X_n)_n$.)

Et

$P[|X_{n-k} - (y - x)| \geq 2\varepsilon] > 0$, pour $n - k \geq m$, d'après l'hypothèse, c'est à dire $n \geq m + k$.

On a alors :

$$P[|X_n - y| > \varepsilon, \forall n \geq m + k] \geq P[|X_k - x| < \varepsilon] \cdot P[|X_{n-k} - (y - x)| \geq 2\varepsilon, \forall n \geq m + k]$$

c'est à dire :

$$P \left[\bigcap_{n \geq m+k} \{ |X_n - y| > \varepsilon \} \right] \geq P[|X_k - x| < \varepsilon] \cdot P \left[\bigcap_{n \geq m+k} \{ |X_{n-k} - (y - x)| \geq 2\varepsilon \} \right]$$

où :

$$P \left[\bigcup_{n \geq m+k} \{ |X_{n-k} - (y - x)| \geq 2\varepsilon \} \right] > 0, \text{ par hypothèse.}$$

Donc :

$$P \left[\bigcap_{n \geq m+k} \{ |X_n - y| \geq \varepsilon \} \right] > 0.$$

D'où :

$$P \left[\bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{ |X_n - y| \geq \varepsilon \} \right] > 0.$$

Et donc :

$$P \left[\bigcap_{m} \bigcup_{n \geq m} \{ |X_n - y| < \varepsilon \} \right] \neq 1$$

c'est à dire : $y \notin \mathcal{R}$. Contradiction, car on a supposé que $y \in \mathcal{R}$. Et par conséquent, $y - x \in \mathcal{R}$, et \mathcal{R} est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. C'est à dire : $\mathcal{R} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{R} = \{0\}$ ou, $\mathcal{R} = \{ \pm nz, z \in \mathbb{R} \}$, $n \in \mathbb{N}$.

□

1.4 Processus de Markov

1. Cas dénombrable :

Définition 1.4. 1. Soit E un ensemble dénombrable, et soit $T = \mathbb{R}^+$. Une matrice de transition est une matrice dont les éléments sont des fonctions $(p_{ij}(\cdot))_{i,j \in E}$ ou tout simplement $(p_{ij})_{i,j \in E}$ définies sur T satisfaisant au trois conditions suivantes :

Pour tous $i, j \in E$ et $s, t \in T$,

1. $p_{ij}(t) \geq 0$,
2. $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$,
3. $\sum_{k \in E} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t)$.

Définition 1.4. 2. Soit E un espace dénombrable, $T = \mathbb{R}^+$. et $(X_t)_{t \in T}$ un processus aléatoire à valeurs dans E . $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de Markov si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ tels que $n \geq 2$ et $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, et $\forall i_1, i_2, \dots, i_n \in E$ on a :

$$\begin{aligned} P[X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_{n-2}} = i_{n-2}, \dots, X_{t_1} = i_1] = \\ = P[X_{t_n} = i_n | X_{t_{n-1}} = i_{n-1}] \end{aligned}$$

Le processus de Markov $(X_t)_{t \in T}$ est dit homogène si pour tous $i, j \in E$ et $t, s \in T$, la probabilité $P[X_{s+t} = j | X_s = i]$ est une fonction de t qui ne dépend pas de s . On note, alors :

$$p_{ij}(t) = P[X_{t+s} = j | X_s = i] = P[X_t = j | X_0 = i].$$

Pour tout $t \in T$, $p_{ij}(t)$ représente la probabilité de transition de processus $(X_t)_{t \in T}$ de l'état i à l'état j , à l'instant t . La matrice des fonctions $[p_{ij}(t)]_{i, j \in E}$ est une matrice de transition pour le processus $(X_t)_{t \in T}$. En effet,

1) $\forall i, j \in E$, $p_{ij}(t) \geq 0$, par définition d'une probabilité.

2) $\forall i \in E$, $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$. En effet, soit $s \in T$ et soit $i \in E$ tels que :

$P[X_s = i] > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P[X_s = i] &= \sum_{j \in E} P[X_s = i, X_{t+s} = j] \\ &= \sum_{j \in E} P[X_s = i] P[X_{t+s} = j | X_s = i] \\ &= P[X_s = i] \sum_{j \in E} P[X_{t+s} = j | X_s = i] \\ &= P[X_s = i] \sum_{j \in E} p_{ij}(t). \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$$

(3) $\forall i, j \in E$ et $\forall s, t \in T$, on a :

$$\sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t).$$

En effet, soit $u \in T$ tel que : $P[X_u = i] > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
p_{ij}(s+t) &= P[X_{t+s+u} = j | X_u = i] \\
&= \frac{P[X_{s+t+u} = j, X_u = i]}{P[X_u = i]} \\
&= \frac{\sum_{k \in E} P[X_{s+t+u} = j, X_{s+u} = k, X_u = i]}{P[X_u = i]} \\
&= \frac{\sum_{k \in E} P[X_u = i] P[X_{s+u} = k | X_u = i] P[X_{s+t+u} = j | X_{s+u} = k, X_u = i]}{P[X_u = i]} \\
&= \frac{P[X_u = i] \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t)}{P[X_u = i]} \\
&= \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t).
\end{aligned}$$

Définition 1.4. 3.

1. $(X_t)_t$ est dit stationnaire si la loi conjointe de $X_{t+t_1}, X_{t+t_2}, \dots, X_{t+t_n}$ ne dépend pas de t .
2. Un processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit à accroissements indépendants si :
 $\forall t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$, les variables aléatoires $(X_{t_1} - X_{t_0})$, $(X_{t_2} - X_{t_1})$, \dots , $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes, et on le note "P.A.I". On dit qu'il est à accroissements stationnaires si pour tous $s, t \in T$, $(X_{t+s} - X_t)$ ont la même loi, et on le note "P.A.S". Si $(X_t)_t$ est en même temps "P.A.I" et "P.A.S", alors on dit qu'il est un processus à accroissements indépendants et stationnaires et on le note "P.A.I.S".

Remarque 1.4. 1.

Si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, on a, d'après les propriétés de la probabilité

conditionnelle et la propriété de Markov :

$$P[X_{t_\nu}(\omega) = i_\nu, 1 \leq \nu \leq n | X_{t_0}(\omega) = i_0] = \prod_{\nu=1}^n p_{i_{\nu-1}i_\nu}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

Exemple 1.4. 1.

Tout processus de Poisson est Markovien. En effet, soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus de Poisson à taux $\lambda > 0$. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un P.A.I.S, et vérifie : $X_0 = 0$, et pour $t \geq 0$ fixé, la variable aléatoire X_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ une suite croissante d'instants, et $j_0 = 0, j_1 = 1, \dots, j_{n-1}, j_n$ des états. Montrons que :

$$P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0] = P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}].$$

Nous avons d'une part :

$$P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \dots, X_{t_1} = j_1, X_0 = 0] = P[X_{t_n - t_{n-1}} = j_n - j_{n-1}],$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}] &= \frac{P[X_{t_n} = j_n, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]}{P[X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]} \\ &= \frac{P[X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = j_n - j_{n-1}, X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]}{P[X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]} \\ &= \frac{P[X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = j_n - j_{n-1}] \cdot P[X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]}{P[X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]} \text{ car } (X_t)_t \text{ est un P.A.I} \\ &= P[X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = j_n - j_{n-1}] \\ &= P[X_{t_n - t_{n-1}} = j_n - j_{n-1}]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}, \dots, X_{t_1} = j_1, X_0 = 0] = P[X_{t_n} = j_n | X_{t_{n-1}} = j_{n-1}]$$

et donc $(X_t)_{t \in T}$ est un processus de Markov homogène. Sa matrice de transition est $\mathbb{P}(t) = [p_{ij}(t)]_{i, j \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P[X_{t+s} = j | X_s = i] \\
&= \frac{P[X_{t+s} = j, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= \frac{P[X_{t+s} - X_s = j - i, X_s = i]}{P[X_s = i]} \\
&= \frac{P[X_{t+s} - X_s = j - i] \cdot P[X_s = i]}{P[X_s = i]}, \text{ car } (X_t)_t \text{ est un P.A.I} \\
&= P[X_{t+s} - X_s = j - i] \\
&= P[X_t = j - i] \text{ car } (X_t)_t \text{ est un P.A.S.} \\
&= \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Cas général :

Pour terminer avec la propriété de Markov, nous donnons quelques définitions dans le cas général.

Soit $T = [0, +\infty[$, E un espace métrique séparable et localement compact, et \mathcal{E} sa tribu borélienne.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus aléatoire à valeurs dans E , $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \in [0, t])$, et $\mathcal{F}'_t = \sigma(X_s, s \in [t, +\infty[)$. Intuitivement, un événement dans \mathcal{F}_t est déterminé par l'état du processus $(X_t)_{t \in T}$ avant l'instant t , et un événement dans \mathcal{F}'_t est déterminé par l'état du processus après l'instant t . \mathcal{F}_t et \mathcal{F}'_t représentent, respectivement, le passé et le futur de ce processus, relativement à l'instant présent t .

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration dans \mathcal{E} , adaptée au processus $(X_t)_{t \in T}$. Donnons

la définition suivante :

Définition 1.4. 4. *Le processus $(X_t)_{t \in T}$ est dit Markovien si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :*

1. $\forall t \in T, \forall A \in \mathcal{F}_t, \forall B \in \mathcal{F}'_t : P(A \cap B | X_t) = P(A | X_t) \cdot P(B | X_t).$
2. $\forall t \in T, B \in \mathcal{F}'_t : P(B | \mathcal{F}_t) = P(B | X_t).$
3. $\forall t \in T, \forall A \in \mathcal{F}_t : P(A | \mathcal{F}'_t) = P(A | X_t).$

Les probabilités $P(B | X_t)$ sont appelées "probabilités de transitions de processus $(X_t)_t$ ".

La forme '2' de la propriété de Markov, donnée précédemment est la plus utile. Elle est équivalente à la forme suivante :

Pour tous $u \geq t$, et pour toute fonction réelle f bornée, \mathcal{E} -mesurable,

$$\mathbb{E}(f(X_u) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_u) | X_t)$$

.

Fonction de transition :

Définition 1.4. 5. *La famille $P = \{P_{s,t}(\cdot, \cdot), 0 \leq s < t < \infty\}$ est une fonction de transition Markovienne sur (E, \mathcal{E}) si et seulement si pour tous $s < t < u$ elle vérifie les trois conditions suivantes :*

1. $\forall x \in E : A \mapsto P_{s,t}(x, A)$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{E} ;
2. $\forall A \in \mathcal{E} : x \mapsto P_{s,t}(x, A)$ est \mathcal{E} -mesurable ;
3. $\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E} : P_{s,u}(x, A) = \int_E P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A).$

Cette fonction est dite homogène (ou stationnaire), si et seulement s'il existe une collection $\{P_t(\cdot, \cdot), t > 0\}$ telle que : $\forall s < t, x \in E, A \in \mathcal{E}$, on a :

$$P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A).$$

Dans ce cas, $P_{s,t}$ est remplacée dans '1' et '2' par P_t , et '3' peut être réécrite comme suit :

$$P_{s+t}(x, A) = \int_E P_s(x, dy)P_t(y, A)$$

qui est appelée "Equation de Chapman-Kolmogorov".

Comme fonction de x et A , P est appelée aussi "Noyau de transition sur (E, \mathcal{E}) ".

Avec les notations utilisées dans cette section, pour tous $s, t \in T$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, avec $s < t$ si

$$P_{s,t}(X_s, A) = P(X_t \in A | X_s),$$

alors le noyau $P_{s,t}(x, A)$ est complètement défini.

Théorème 1.4. 1. (Théorème de l'existence). Pour tout noyau de transition P , il correspond un processus de Markov, dont les probabilités de transition sont définies par :

$$P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$$

et inversement, à tout processus de Markov on peut associer un noyau de transition, dont les valeurs sont données par les probabilités de transition de ce processus.

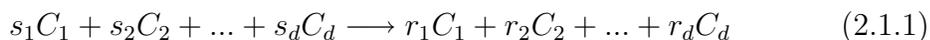
Chapitre 2

Chaînes de Markov et Cinétique des Réactions Chimiques

2.1 Eléments de Cinétique des réactions chimiques.

Nous donnons ci-après quelques éléments sur la cinétique des réactions chimiques ((Cf. [11]) pour de plus amples détails). Soit Ω un système chimique fermé, dont toutes les composantes chimiques qu'il peut contenir sont C_j ($j = 1, \dots, d$), $d \in \mathbb{N}^$. Pour $j = 1, \dots, d$ et $t \geq 0$, soit X_t^j le nombre de molécules du facteur C_j à l'instant t . Il est convenable de représenter l'état du système à l'instant t par un vecteur $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$ dans un espace d'états d -dimensionnel. L'ensemble des valeurs $X_t^j, j = 1, \dots, d$ constitue un treillis. Chaque point de ce treillis correspond à un état du système et vice versa.*

L'état du système change si des réactions chimiques se réalisent dans ce système. Une réaction chimique qui se réalise dans ce système est déterminée par un ensemble de coefficients stoechiométriques s_j, r_j sous la forme :



Si pour $j = k$, on a $r_k = s_k \neq 0$ alors la composante C_k est un catalyseur,

Cette réaction est complexe, elle se fait dans trois étapes (trois réactions élémentaires) :

1. $2N_O \longrightarrow N_2O_2$;
2. $N_2O_2 + H_2 \longrightarrow N_2 + H_2O_2$;
3. $H_2O_2 + H_2 \longrightarrow 2H_2O$.

Chaque collision de la réaction (2.1.1) change le nombre X_0^j de molécules du facteur C_j dans le système avant la réaction en $(X_0^j + r_j - s_j)$ après la réaction. Géométriquement, le vecteur d'état du système X_0 devient après la réaction $X_0 + \mu$, où μ est le vecteur dont les composantes sont $\mu_j = r_j - s_j$, $j = 1, \dots, d$.

A la réaction (2.1.1) on associe son inverse déterminée par l'équation :

$$\sum_{j=1}^d r_j C_j \longrightarrow \sum_{j=1}^d s_j C_j$$

Cette réaction change le vecteur d'état du système X_0 en nouveau vecteur d'état $X_0 - \mu$, après la réaction.

En démarrant de l'état initial X_0 , la réaction (2.1.1) et son inverse changent l'état X_0 en une chaîne discrète d'états possibles, dont le vecteur d'état final est :

$$X_t = X_0 + \xi \mu$$

où ξ est un entier.

Considérons maintenant une autre réaction avec les mêmes facteurs :

$$\sum_{j=1}^d s'_j C_j \longrightarrow \sum_{j=1}^d r'_j C_j \tag{2.1.2}$$

et son inverse. En démarrant de X_0 , cette réaction et son inverse changent le vecteur d'état X_0 à une autre chaîne discrète d'états, dont le vecteur d'état final est :

$$X_0 + \xi' \mu'. \quad (\mu'_j = r'_j - s'_j, j = 1, \dots, d)$$

Si les deux réactions (2.1.1) et (2.1.2) et leurs inverses se réalisent, à un instant t , alors l'état X_0 du système se transforme en l'état X_t tel que :

$$X_t = X_0 + \xi \mu + \xi' \mu'. \quad (\xi, \xi' = \dots, -1, 0, 1, \dots)$$

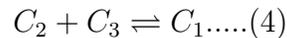
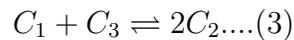
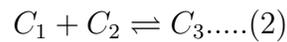
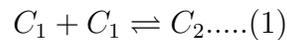
Si plusieurs réactions réversibles ρ se réalisent à un instant t , alors l'état X_0 du système, se change en l'état X_t tel que :

$$X_t = X_0 + \sum_{\rho} \xi_{\rho} \mu^{(\rho)}$$

où ξ_{ρ} prend les valeurs entières $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ pour chaque réaction ρ . Il est appelé "degré d'avancement" de la réaction ρ .

Exemple 2.1. 2.

Considérons les quatre réactions de collision suivantes, qu'on suppose réalisées à un instant t , dans un système chimique :



L'état X_t du système à l'instant t , est donné par :

$$X_t = X_0 + \sum_{\rho=1}^4 \xi_{(\rho)} \mu^{(\rho)}$$

où $X_0 = (X_0^1, X_0^2, X_0^3)$ est l'état initial du système, et $\mu^{(\rho)} = (\mu_1^{(\rho)}, \mu_2^{(\rho)}, \mu_3^{(\rho)})$, avec : $\mu_j^{(\rho)} = r_j^{(\rho)} - s_j^{(\rho)}$, pour $\rho = 1, \dots, 4$ et $j = 1, 2, 3$.

Pour $\rho = 1$ (cas de la réaction (1) de cet exemple), on a :

$$\mu_1^{(1)} = r_1^{(1)} - s_1^{(1)} = 0 - 2 = -2$$

$$\mu_2^{(1)} = r_2^{(1)} - s_2^{(1)} = 1 - 0 = 1$$

$$\mu_3^{(1)} = r_3^{(1)} - s_3^{(1)} = 0 - 0 = 0$$

Donc $\mu^{(1)} = (-2, 1, 0)$.

Pour $\rho = 2$:

$$\mu_1^{(2)} = r_1^{(2)} - s_1^{(2)} = 0 - 1 = -1$$

$$\mu_2^{(2)} = r_2^{(2)} - s_2^{(2)} = 0 - 1 = -1$$

$$\mu_3^{(2)} = r_3^{(2)} - s_3^{(2)} = 1 - 0 = 1$$

alors $\mu^{(2)} = (-1, -1, 1)$.

Pour $\rho = 3$:

$$\mu_1^{(3)} = 0 - 1 = -1$$

$$\mu_2^{(3)} = 2 - 0 = 2$$

$$\mu_3^{(3)} = 0 - 1 = -1$$

On a $\mu^{(3)} = (-1, 2, -1)$.

Pour $\rho = 4$, on a :

$$\mu_1^{(4)} = 1 - 0 = 1$$

$$\mu_2^{(4)} = 0 - 1 = -1$$

$$\mu_3^{(4)} = 0 - 1 = -1$$

et $\mu^{(4)} = (1, -1, -1)$.

Donc :

$$X_t = (X_0^1 - 2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4, X_0^2 + \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4, X_0^3 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4).$$

Définition 2.1. 2. 1. La concentration de la composante C_j dans le système à un instant t est :

$$c_t^j = \frac{X_t^j}{\Omega}$$

C'est la densité de probabilité de C_j dans le système. Si le contenu du système est homogène, alors la densité de C_j en tout point de ce système est égale à $\frac{X_t^j}{\Omega}$.

2. La vitesse de la réaction (2.1.1) est définie par le nombre de collisions par unité du temps par unité de volume. Elle est donnée par :

$$k_+ \Pi_{j=1}^d (c_t^j)^{s_j}$$

où k_+ est la constante de vitesse de la réaction directe, et $(\Pi_{j=1}^d (c_t^j)^{s_j})$ est la probabilité pour qu'il en résulte une collision à l'instant t .

Dans le cas de la réaction (2.1.1), où $\{X_0^j C_j\}$ se transforment en $\{(X_0^j + r_j - s_j)C_j\}$, la vitesse de la réaction est donnée par :

$$\frac{1}{(r_i - s_i)} \frac{dc_t^i}{dt} = k_+ \Pi_{j=1}^d (c_t^j)^{s_j}, \text{ pour } 1 \leq i \leq d$$

d'où, la vitesse de réaction par rapport à C_i est donné par :

$$\frac{dX_t^i}{dt} = \Omega k_+ (r_i - s_i) \Pi_{j=1}^d \left(\frac{X_t^j}{\Omega}\right)^{s_j}.$$

Remarque 2.1. 1.

Cette équation est vraie sous les conditions suivantes :

1. Le contenu du système doit être homogène à tout instant t , pour que la densité de C_j à un instant t donné soit égale à $\frac{X_t^j}{\Omega}$, en tout point de Ω ;
2. On suppose que le système est dans les conditions où la température est constante.

2.2 Chaînes de Markov à flot.

Définition 2.2. 1. Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans E , qui vérifie la propriété de Markov est un processus de Markov. Cependant si E dénombrable on dit aussi que $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états E . Elle est finie si E est fini.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov finie sur E , indexée par les nombres réels positifs. Le taux de transition $r(x, y)$ d'un état x à un état y est le nombre réel défini par :

$$r(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{P[X_t = y | X_0 = x]}{t} \right] \text{ pour tout } x \neq y$$

et

$$r(x, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{P[X_t = x | X_0 = x] - 1}{t} \right] \text{ pour tout } x \in E.$$

Nous avons immédiatement :

$$a) r(x, y) \geq 0, \forall x, y \in E \text{ et } x \neq y$$

$$b) \sum_{y \in E} r(x, y) = 0, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 2.2. 2.

1. Un graphe est un couple (V, W) où V et W sont deux ensembles dénombrables tels que : $W \subset V \times V$. V est alors l'ensemble des sommets, et W est l'ensemble des arcs. Un arc (a, b) à pour sommet initial a et sommet final b . Le graphe d'une chaîne de Markov a pour sommets ses états, et ses arcs sont les couples $(x, y) \in E \times E$ tels que $r(x, y) > 0$.
2. Un diagramme d'une chaîne de Markov est un sous graphe de son graphe.
3. Un produit π_D d'un diagramme D est le produit de taux de transitions de ses arcs :

$$\pi_D = \prod_{(x,y) \in D} r(x, y)$$

4. Un chemin de x à $y \in E$ dans un diagramme D d'une chaîne de Markov est toute suite d'états (x_1, \dots, x_n) telle que : $x = x_1, \dots, x_n = y$, et pour $0 \leq i < n$, (x_i, x_{i+1}) est un arc de D .
5. D est un diagramme directionnel d'un diagramme J si, pour tout $x \in E$, $x \notin J$, il existe exactement un sommet y de J et exactement un chemin de x à y dans D , et aucun arc ne commence par un sommet de J .
6. La somme \sum_J d'un diagramme J est la somme de tous les produits π_D de tous ses diagrammes directionnels. Soit \mathbb{D}_J l'ensemble de tous les diagrammes directionnels de J , on a :

$$\sum_J = \sum_{D \in \mathbb{D}_J} \pi_D.$$

Proposition 2.2. 1 ((cf. [12])). Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov à espace d'états fini E . La loi stationnaire $(p(x))_{x \in E}$ de $(X_n)_n$ est donnée pour $x \in E$, par :

$$p(x) = \frac{\sum_x}{\sum}$$

où \sum est la somme de tous les \sum_x , $x \in E$.

Réduction du diagramme :

Une chaîne de Markov dont les taux de transition se trouvent en deux ordres significativement différents, peut être approximée par une autre chaîne de Markov simple (cf. [12]), avec uniquement les taux de transition d'ordre minimal. La nouvelle chaîne est obtenue en négligeant les états que la loi stationnaire charge avec de faibles probabilités.

On ne considérera que les chaînes de Markov érgodiques, c'est à dire, on suppose que pour tous états $x \neq y$ il existe un chemin $x = x_1, \dots, x_n = y$, $n \geq 2$, tel que pour tout $1 \leq i < n$ on a $r(x_i, x_{i+1}) > 0$ (cf. [12]). Une chaîne de Markov érgodique à valeurs dans un ensemble fini E admet une unique loi stationnaire $(p(x))_{x \in E}$, vérifiant :

- 1) $p(x) > 0$ pour tout $x \in E$,
- 2) $\sum_{x \in E} p(x) = 1$, et
- 3) $p(x) \sum_{y \neq x} r(x, y) = \sum_{y \neq x} p(y)r(y, x)$, $x \in E$.

Démonstration.

1) $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, il existe un chemin $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$, $n \geq 2$ tel que $r(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $1 \leq i < n$. Donc pour tout $x \in E$ il existe au moins un diagramme directionnel de x dans E . Et alors la probabilité stationnaire $p(x) > 0$ en tout point x de E .

2) $\sum_{x \in E} p(x) = 1$, par définition de la probabilité p .

3) π est une loi stationnaire pour $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, alors $\forall x \in E$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\pi(x) = P[X_t = x] = P[X_0 = x].$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\pi(x) = P[X_t = x] &= \sum_{y \in E} P[X_t = x, X_0 = y] \\ &= \sum_{y \in E} P[X_0 = y] \cdot P[X_t = x | X_0 = y] \\ &= \sum_{y \in E} \pi(y) P[X_t = x | X_0 = y].\end{aligned}$$

D'une autre part, on a :

$$\begin{aligned}\pi(x) = P[X_0 = x] &= \sum_{y \in E} P[X_0 = x, X_t = y] \\ &= \sum_{y \in E} P[X_0 = x] \cdot P[X_t = y | X_0 = x] \\ &= \pi(x) \sum_{y \in E} P[X_t = y | X_0 = x].\end{aligned}$$

D'où nous avons l'égalité suivante :

$$\pi(x) \sum_{y \in E} P[X_t = y | X_0 = x] = \sum_{y \in E} \pi(y) P[X_t = x | X_0 = y].$$

D'où :

$$\pi(x) \sum_{y \in E, y \neq x} P[X_t = y | X_0 = x] = \sum_{y \in E, y \neq x} \pi(y) P[X_t = x | X_0 = y].$$

On a alors

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \pi(x) \sum_{y \in E, y \neq x} \frac{P[X_t = y | X_0 = x]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{y \in E, y \neq x} \pi(y) \frac{P[X_t = x | X_0 = y]}{t}.$$

D'où

$$\pi(x) \sum_{y \in E, y \neq x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P[X_t = y | X_0 = x]}{t} = \sum_{y \in E, y \neq x} \pi(y) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P[X_t = x | X_0 = y]}{t}.$$

C'est à dire :

$$\pi(x) \sum_{y \in E, y \neq x} r(x, y) = \sum_{y \in E, y \neq x} \pi(y) r(y, x).$$

□

Considérons un système chimique fermé dont toutes les composantes chimiques qu'il puisse contenir sont C_j , $j = 1, \dots, d$, avec d entier positif, dans lequel des réactions chimiques ont lieu. Le nombre de particules de chaque composante du système, varie dans le temps suivant ces réactions chimiques. Nous faisons l'hypothèse que le taux de cette variation ne dépend pas du nombre présent de particules des composantes dans le système, mais du type de réactions chimiques survenues. Si X_t représente le nombre de particules dans le système à l'instant t , avec X_t^j le nombre de particules de la composante C_j à l'instant t , alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{Z}^d .

La deuxième hypothèse que nous faisons est que le système chimique décrit peut se mettre dans un ensemble fini d'états E , et que les transitions d'un état à un autre ne dépendent que des principes des réactions chimiques, et de l'état du système juste avant la transition, et non pas du passé, c'est à dire des états occupés par le système dans le passé. Ce qui est une hypothèse très réaliste. Si donc on note par x_t l'état du système à l'instant t , $(x_t)_{t \geq 0}$ est une chaîne de Markov finie à valeurs dans E .

Globalement, le système chimique considéré, peut être décrit par la chaîne de Markov $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $E \times \mathbb{Z}^d$ (cf. [12]). Un état de cette chaîne à un instant t est un couple (x_t, X_t) qui signifie qu'à l'instant t , le système est à l'état $x_t \in E$, et les nombre de particules des composantes du système à cet instant sont donnés par les composantes de vecteur $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d)$. Une transition de $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ est définie par ses états initial (x, X) et final (y, Y) et le taux de la transition r . Soit $(x, X) \rightarrow (y, Y)$ une transition de la chaîne $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$, et soit $\Delta \in \mathbb{Z}^d$ le vecteur représentant le taux de variation de la chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$ par cette transition. C'est à dire, $Y = X + \Delta$. Le vecteur Δ ne dépend pas du nombre présent de particules dans le système,

c'est à dire Δ ne dépend pas de X . A partir d'un état (x, X) la chaîne $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ peut atteindre deux états (y, Y_i) , $i = 1, 2$ ou plus, avec des vecteurs Y_i différents. Et alors entre deux états $x, y \in E$ on peut avoir deux transitions ou plus pour la chaîne de Markov $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$, avec des taux de variations de $(X_t)_{t \geq 0}$ différents. La chaîne $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ peut aussi avoir des transitions $(x, X_i) \rightarrow (y, Y_i)$ dont les mêmes états initial $x \in E$ et final $y \in E$, un même taux de transition, et un même taux de variation, mais avec des vecteurs X_i différents et Y_i différents.

On peut, alors résumer la chaîne $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ par une chaîne de Markov finie $(z_t)_{t \geq 0}$ à espace d'états E . La chaîne $(z_t)_{t \geq 0}$ représente chaque classe de transitions de la chaîne $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ qui ont des mêmes états initial et final, respectivement $x, y \in E$, un même taux de transition, et un même taux de variation, par une seule transition u définie par le quadruplet (x, y, r_u, Δ_u) , où $x, y \in E$ sont, respectivement, les états initial et final de la transition u , $r_u \in \mathbb{R}^+$ est le taux de la transition u , et $\Delta_u \in \mathbb{Z}^d$ est le vecteur représentant le taux de variation de la chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$ par u .

Supposons que l'ensemble U de toutes les transitions de la chaîne $(z_t)_{t \geq 0}$ est fini, alors d'après Kurka, $(z_t)_{t \geq 0}$ est appelée chaîne de Markov à flot, et pour $u \in U$, Δ_u est le vecteur de flot de u . Définissons alors, formellement la chaîne de Markov à flot.

Définition 2.2. 3. Une chaîne de Markov à flot est définie par le triplet (E, U, d) , où E est un ensemble fini d'états, d est un entier positif (nombre de composantes dans le système), et U est un ensemble fini de transitions.

Soit $u \in U$,

$u = (i_u, f_u, r_u, \Delta_u)$, où $i_u, f_u \in E$ sont les états initial et final de la transition u , $r_u \in \mathbb{R}^+$ est le taux de la transition u , et $\Delta_u \in \mathbb{Z}^d$ est le vecteur de flot de u .

Une chaîne de Markov à flot est une chaîne de Markov dont les transi-

tions ont l'effet d'augmenter ou diminuer le nombre de particules de certaines composantes du système. Ces accroissements ou décroissements sont donnés par les vecteurs de flot des transitions.

On s'intéresse aux taux de variation (croissance ou décroissance) des nombres de particules des composantes du système, dans l'intervalle du temps $[0, t]$. Ces taux sont les composantes de vecteur $X_t - X_0$. Les composantes de vecteur de flot total F , défini par la suite, donnent les taux de variation moyens des nombres de particules des composantes dans le système, par unité du temps. Cela nous permettra d'énoncer le résultat principal du chapitre ainsi qu'une idée de sa démonstration.

Proposition 2.2. 2. Soit $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov infinie correspondante à une chaîne de Markov à flot $(z_t)_{t \geq 0}$, et F le vecteur défini par :

$$F = \sum_{u \in U} p(i_u) r_u \Delta_u$$

où $(p(x))_{x \in E}$ est la loi stationnaire de la chaîne $(X_t)_{t \geq 0}$. F est le flot total de la chaîne $(z_t)_{t \geq 0}$, i_u un état (état initial) soumis à la transition u , avec un taux de transition r_u et un Δ_u le vecteur de flot. Alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} [X_t - X_0] = F, \quad p.s.$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition repose sur les travaux de P. Kurka et I. Dvorak. Nous en donnons ci-dessous une idée.

Soit $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtration de tribus, définies pour $t > 0$ par $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_u, u \leq t\}$. Définissons la suite croissante $(T_k)_k$ de temps optionnels ou temps d'arrêts relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, en posant : $T_0 = 0$,

$$T_1 = \begin{cases} \inf\{t > 0 \text{ tel que } X_t - X_0 \neq 0\} \\ +\infty, \quad \text{si } \forall t > 0, X_t - X_0 = 0. \end{cases}$$

Et pour $k > 1$

$$T_k = \begin{cases} \inf\{t > T_{k-1} \text{ tel que } X_t - X_{T_{k-1}} \neq 0\} \\ +\infty, \quad \text{si } \forall t > T_{k-1}, X_t - X_{T_{k-1}} = 0. \end{cases}$$

Remarquons que $T_k \uparrow \infty$ quand $k \uparrow \infty$. Considérons le processus $(X_{T_k} - X_{T_{k-1}})_k$. Nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X_t - X_0}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_{T_n} - X_0}{T_n}.$$

Et comme

$$\frac{X_{T_n} - X_0}{T_n} = \frac{1}{T_n} \sum_1^n (X_{T_k} - X_{T_{k-1}})$$

si nous admettons que le processus $(Z_n)_n$ défini pour $n > 0$ par

$$Z_n = X_{T_n} - X_{T_{n-1}}$$

est stationnaire, alors d'après le Théorème Ergodique, nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_1^{n-1} Z_k \rightarrow \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[\Delta_u] = F$$

et par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} [X_t - X_0] = F, \text{ p.s.}$$

Ce qui établit le théorème.

□

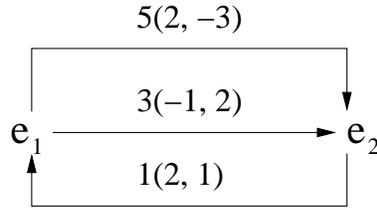
EXEMPLES

Nous terminons par quelques exemples pour illustrer la méthode exposée (cf. [12])

Exemple 2.2. 1. Considérons un exemple d'une chaîne de Markov à flot $(z_t)_{t \geq 0}$ en donnant la chaîne de Markov infinie correspondante $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$, et le vecteur de flot total F . Soit alors la chaîne de Markov à flot $(z_t)_{t \geq 0}$ définie par le triplet $(E, U, 2)$ avec :

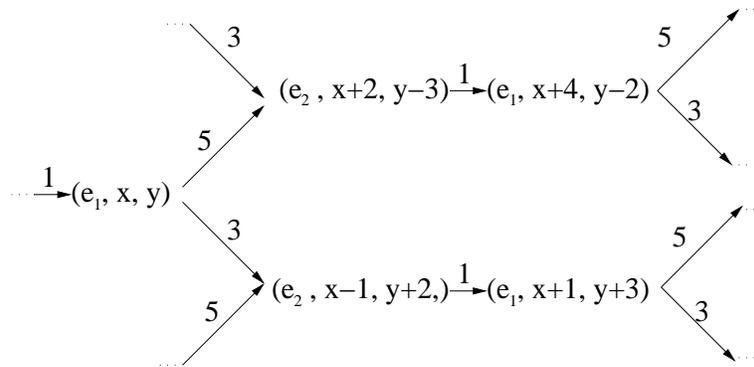
$$E = \{e_1, e_2\}, U = \{(e_1, e_2, 5, (2, -3)), (e_1, e_2, 3, (-1, 2)), (e_2, e_1, 1, (2, 1))\},$$

et représentée par le schéma suivant :



Elle a deux états e_1 et e_2 , deux composantes ($d = 2$), et trois transitions : $(e_1, e_2, 5, (2, -3))$, $(e_1, e_2, 3, (-1, 2))$ et $(e_2, e_1, 1, (2, 1))$.

Elle représente (résume) la chaîne de Markov infinie $(x_t, X_t)_{t \geq 0}$ expliquée par le schéma suivant :



Les probabilités stationnaires des états e_1 et e_2 pour la chaîne $(z_t)_{t \geq 0}$ sont données comme suit :

$$p(e_1) = \frac{1}{\sum} \quad \text{et} \quad p(e_2) = \frac{3+5}{\sum}$$

où :

$$\sum = 1 + 8 = 9$$

C'est à dire :

$$p(e_1) = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad p(e_2) = \frac{8}{9}.$$

Le flot total de la chaîne $(z_t)_{t \geq 0}$ est donné par F , tel que :

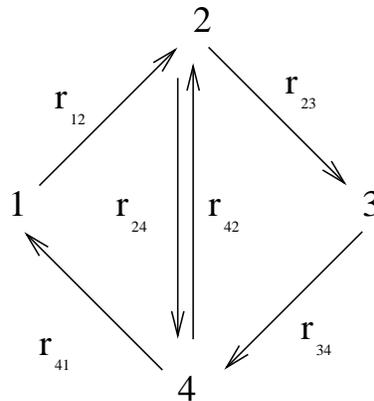
$$F = p(e_1)5(2, -3) + p(e_1)3(-1, 2) + p(e_2)1(2, 1) = (7p(e_1) + 2p(e_2), p(e_2) - 9p(e_1)).$$

On a, alors :

$$F = \left(\frac{23}{9}, \frac{-1}{9}\right).$$

C'est à dire que le nombre de particules de la première composante augmente dans le système par la moyenne de $\frac{23}{9}$ particules par unité du temps, et le nombre de particules de la deuxième composante diminue dans le système par la moyenne de $\frac{1}{9}$ particule par unité du temps.

Exemple 2.2. 2. Considérons la chaîne de Markov représentée par le graphe suivant :



Les probabilités stationnaires de cette chaîne sont données par :

$$p(1) = \frac{(r_{24}r_{34}r_{41} + r_{23}r_{34}r_{41})}{\Sigma}$$

$$p(2) = \frac{(r_{12}r_{42}r_{34} + r_{12}r_{41}r_{34})}{\Sigma}$$

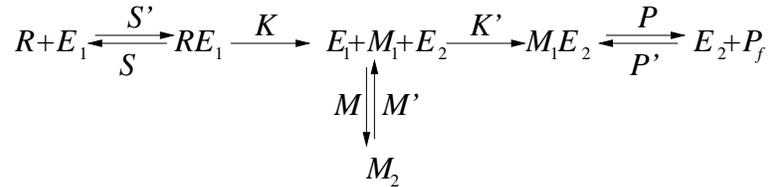
$$p(3) = \frac{(r_{41}r_{12}r_{23} + r_{12}r_{23}r_{42})}{\Sigma}$$

$$p(4) = \frac{(r_{12}r_{24}r_{34} + r_{12}r_{23}r_{34})}{\Sigma}$$

où :

$$\Sigma = r_{24}r_{34}r_{41} + r_{23}r_{34}r_{41} + r_{12}r_{42}r_{34} + r_{12}r_{41}r_{34} + r_{41}r_{12}r_{23} + r_{12}r_{23}r_{42} + r_{12}r_{24}r_{34} + r_{12}r_{23}r_{34}.$$

Exemple 2.2. 3. Donnons un exemple d'application des chaînes de Markov à flot aux réactions chimiques. Pour cela, considérons la réaction enzymatique suivante, dans un système chimique :



où R est le réactif, P_f est le produit final de cette réaction, E_1 et E_2 sont deux enzymes, et M_1 est un produit intermédiaire qui peut se transformer en un autre produit intermédiaire M_2 , par un processus (taux M et M') supposé très lent. Cependant les taux K et K' sont supposés considérablement plus grands que les autres taux.

L'état du système peut être exprimé par trois variables aléatoires X , Y et Z , définies comme suit :

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si } E_1 \text{ est libre.} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si le produit intermédiaire existe sous la forme } M_1. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{si } E_2 \text{ est libre.} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'état du système peut alors être représenté par la chaîne de Markov à flot, définie par (E, U, d) tel que :

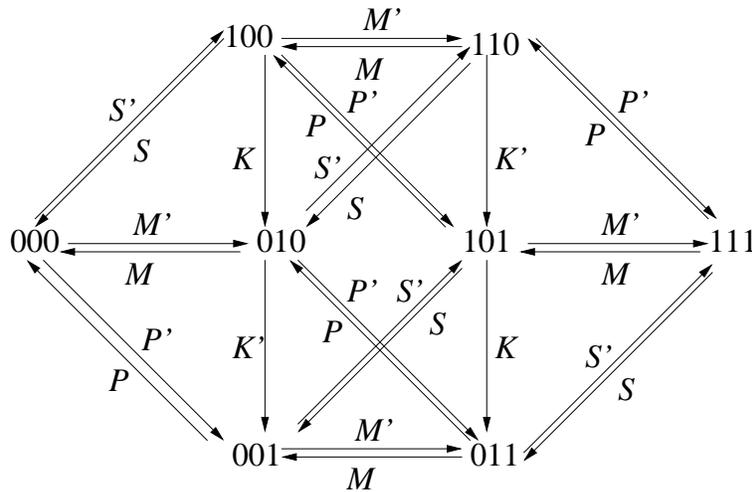
$E = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$ est l'ensemble d'états ;

$$U = \{S(1, 0, 0), M(0, 1, 0), P(0, 0, 1), k(0, 0, 0), S'(-1, 0, 0), \\ P'(0, 0, -1), M'(0, -1, 0), k'(0, 0, 0)\}$$

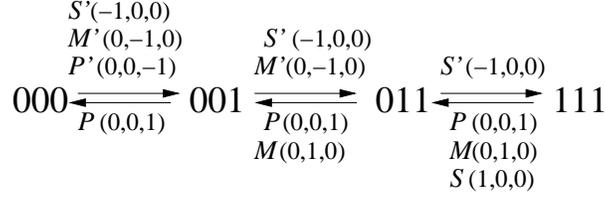
est l'ensemble des transitions définies par leurs taux et les vecteurs de flot associés ;

et $d = 3$ est le nombre de composantes, qui sont : Le réactif R , le produit intermédiaire M_2 , et le produit final P_f .

Elle est représentée par le graphe suivant :



Puisque k et k' sont supposés, considérablement plus grands que les autres taux, alors les états 100, 010, 110, et 101 sont transients, et notre chaîne se réduit à :



Les probabilités stationnaires des états 000, 001, 011 et 111 sont respectivement, données par p_0 , p_1 , p_2 et p_3 telles que :

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{P(M+P)(S+M+P)}{\sum} \\
p_1 &= \frac{(S'+M'+P')(M+P)(S+M+P)}{\sum} \\
p_2 &= \frac{(S'+M'+P')(S'+M')(S+M+P)}{\sum} \\
p_3 &= \frac{(S'+M'+P')(S'+M')S'}{\sum}
\end{aligned}$$

où

$$\sum = (S'+M'+P'+P)(S+M+P)(M+P) + (S'+M'+P')(S'+M')(S+M+P+S').$$

Le vecteur de flot total de cette chaîne est donné par :

$$\begin{aligned}
F &= p_0P'(0, 0, -1) + p_0M'(0, -1, 0) + p_0S'(-1, 0, 0) + \\
&+ p_1P(0, 0, 1) + p_1S'(-1, 0, 0) + p_1M'(0, -1, 0) + \\
&+ p_2P(0, 0, 1) + p_2M(0, 1, 0) + p_2S'(-1, 0, 0) + \\
&+ p_3P(0, 0, 1) + p_3M(0, 1, 0) + p_3S(1, 0, 0). \\
&= (-S'(p_0+p_1+p_2)+Sp_3, -M'(p_0+p_1)+M(p_2+p_3), -P'p_0+P(p_1+p_2+p_3)).
\end{aligned}$$

Deuxième partie

Introduction aux systèmes dynamiques

Chapitre 3

Introduction aux systèmes dynamiques

La cinétique des réactions chimiques fait penser à la dynamique des populations et aux systèmes dynamiques. On s'intéresse à présent, à l'évolution dans le temps de la taille d'une population donnée. Le cas le plus simple est celui où la taille P_t de la population à l'instant t obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dP_t}{dt} = KP_t \quad \text{avec } K \text{ une constante positive (cf. [15]).}$$

En discrétisant le temps, cette équation devient :

$$P_{n+1} = KP_n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.1.}$$

Si nous supposons que L est la limite que doit atteindre la taille de la population P_t , alors le modèle qui convient pour décrire l'évolution de P_t est défini par l'équation différentielle :

$$\frac{dP_t}{dt} = \mu P_t(L - P_t) \quad \text{avec } \mu \text{ une constante positive (cf. [15])}$$

En discrétisant le temps, cette équation devient :

$$P_{n+1} = \mu P_n(L - P_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

On s'intéresse au cas où $L = 1$, en considérant les pourcentages de la population, relativement à la limite qu'elle doit atteindre. Le modèle devient alors dans ce cas celui qui est défini par l'équation :

$$P_{n+1} = \mu P_n(1 - P_n) \quad (3.2).$$

Un modèle plus fin que (3.1) (respect. (3.2)), est obtenu en supposant que le coefficient K (respect. μ) est une variable aléatoire. Ce coefficient agira alors dans le modèle suivant une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que K (respect. μ).

L'évolution dans le temps de la taille P_n est alors décrite par la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par X_0 et pour $n > 0$,

$$X_n = Y_n X_{n-1} \quad (I)$$

avec $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire K ,

ou la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par X_0 et pour $n > 0$,

$$X_n = Y_n X_{n-1}(1 - X_{n-1}) \quad (II)$$

avec $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire μ .

Nous présentons quelques observations et remarques sur le comportement limite de ces deux chaînes de Markov.

I. La chaîne $X_n = Y_n X_{n-1}$ (I) :

Il est immédiat que dans le cas où $X_0 > 0$, si $Y_n > 1$ pour tout n , la chaîne de Markov $(X_n)_n$ croît indéfiniment, et la la taille de la population croît indéfiniment. Par contre, si $0 < Y_n < 1$, pour tout n , la chaîne $(X_n)_n$ est décroissante indéfiniment, et la population finira par l'extinction. Dans

ces deux cas, la chaîne est transiente. Si $Y_n = 1, \forall n$, alors $X_n = X_0, \forall n$ et $(X_n)_n$ est stationnaire.

Dans le cas où $(Y_n)_n$ peut prendre des valeurs inférieures à 1 comme elle peut prendre des valeurs supérieures à 1, nous faisons ci-dessous quelques exemples de trajectoires.

1. Cas où $X_0 = 5$ et $P[Y_n = \frac{2}{3}] = P[Y_n = \frac{8}{5}] = \frac{1}{2}$.

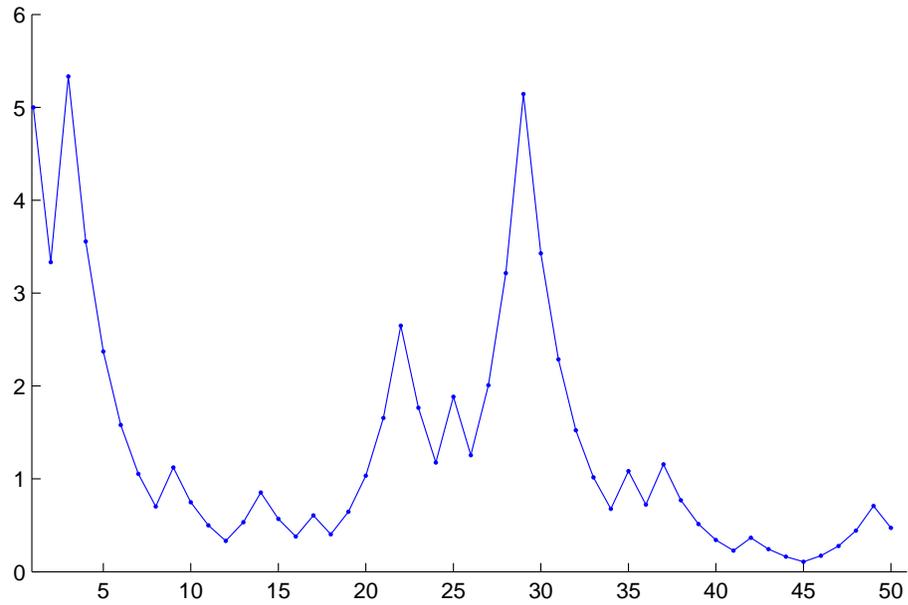


Figure 1: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1)$, pour les 50 premiers pas, avec: $X(0)=5$ et $P[Y(n)=\frac{8}{5}]=P[Y(n)=\frac{2}{3}]=\frac{1}{2}$.

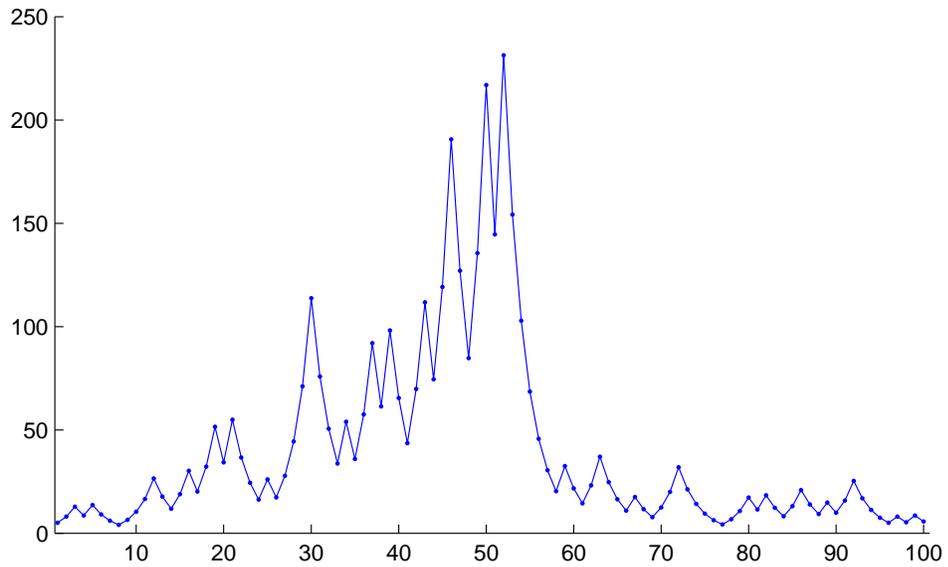


Figure2: Trajectoire de la chaine: $X(n)=Y(n).X(n-1)$ pour les 100 premiers pas, avec: $X(0)=5$ et $P[Y(n)=8/5]=P[Y(n)=2/3]=1/2$.

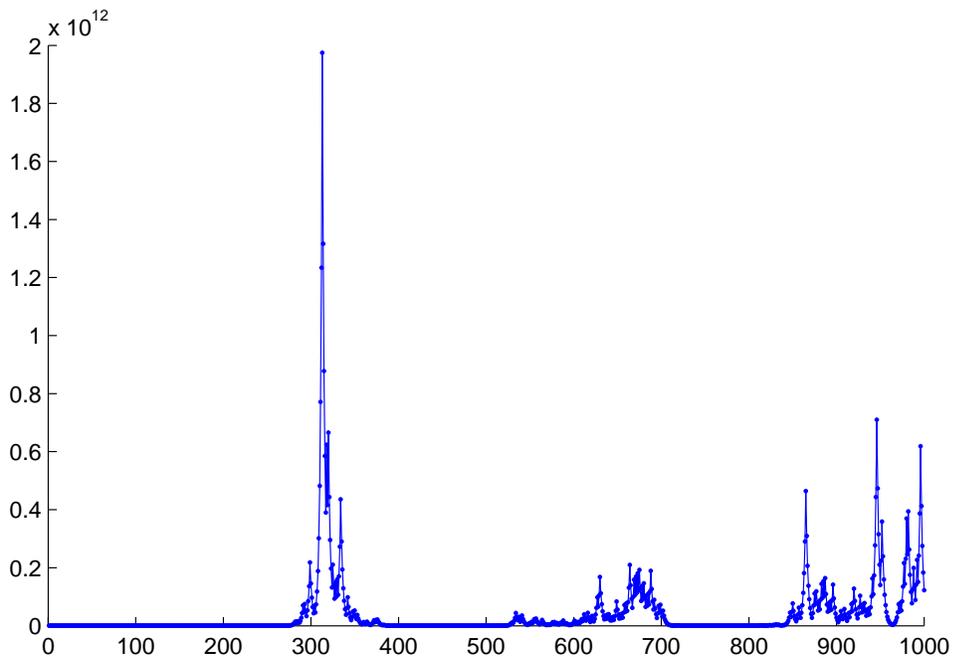
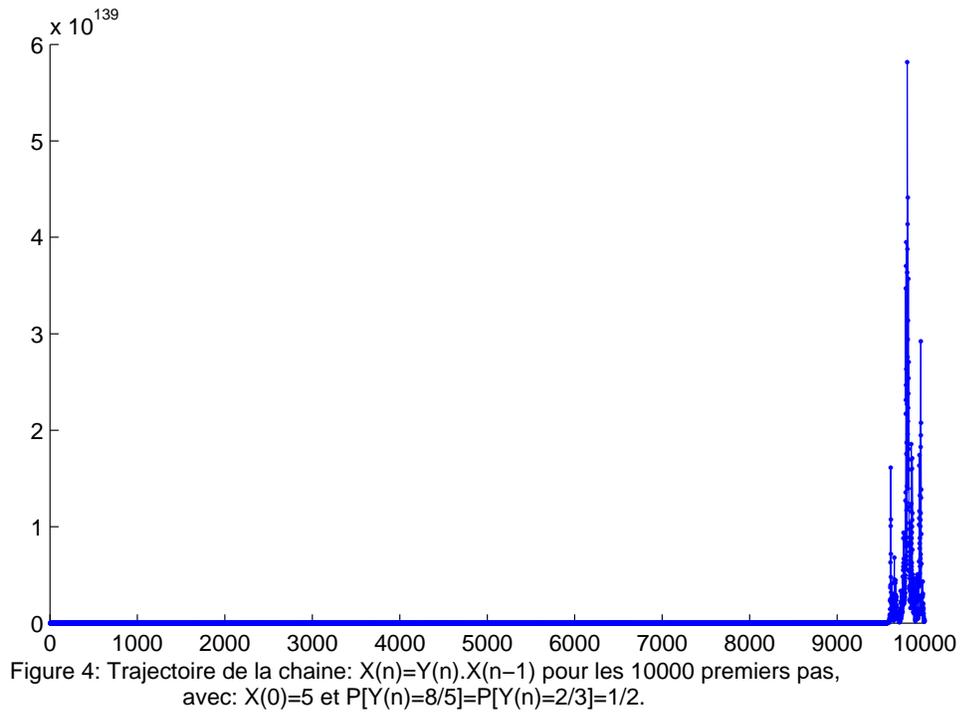
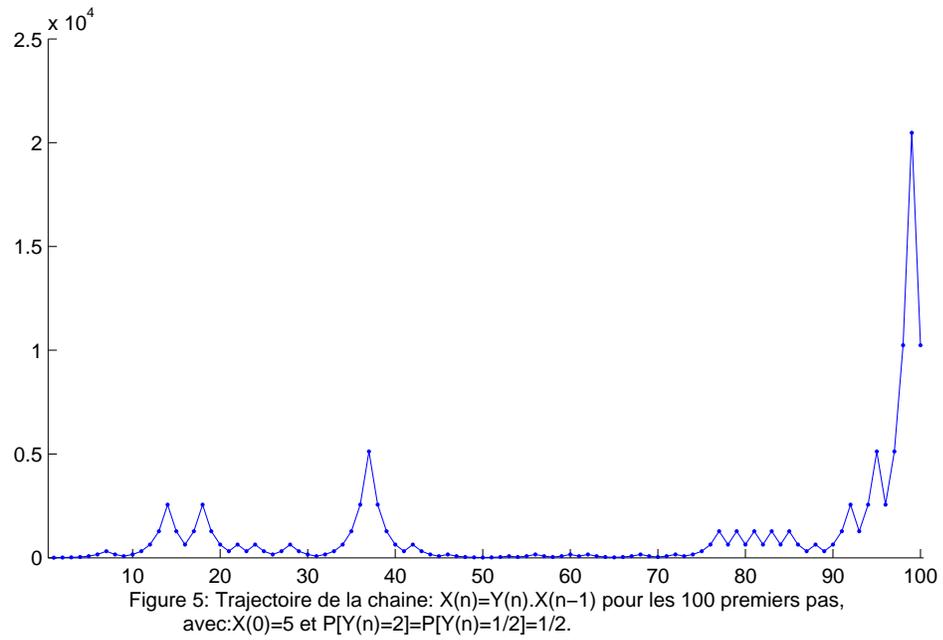


Figure 3: Trajectoire de la chaine: $X(n)=Y(n).X(n-1)$ pour les 1000 premiers pas, avec: $X(0)=5$ et $P[Y(n)=8/5]=P[Y(n)=2/3]=1/2$.



Ces trajectoires montrent bien que la chaîne visite tous les états en oscillant indéfiniment sur l'espace des états E défini par X_0 et $\text{supp}(Y_n) = \{\frac{2}{3}, \frac{8}{5}\}$ avec Y_n équiprobables.

2. Cas où $X_0 = 5$ et $P[Y_n = \frac{1}{2}] = P[Y_n = 2] = \frac{1}{2}$.



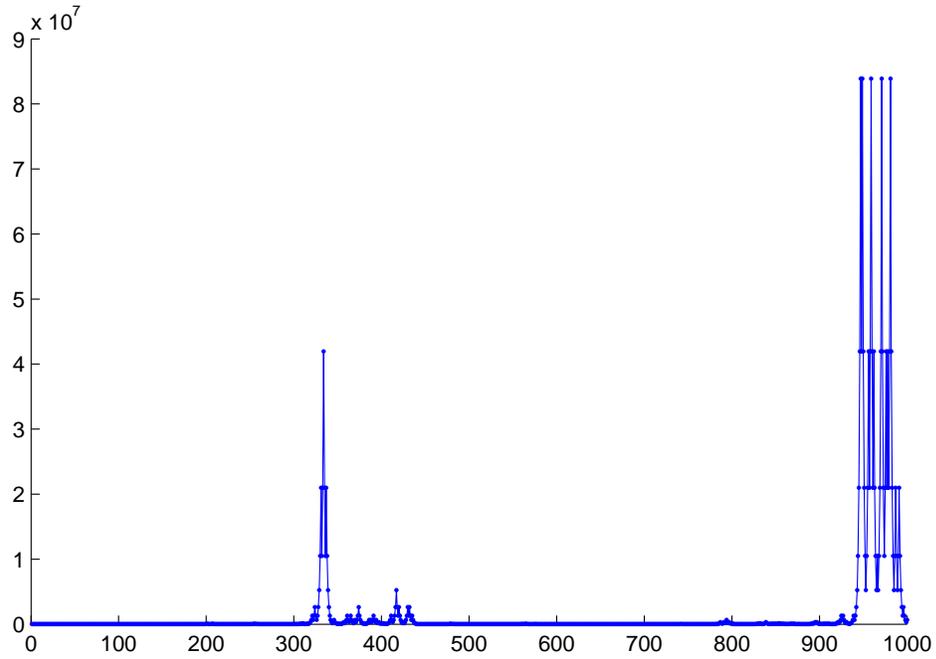


Figure 6: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1)$ pour les 1000 premiers pas, avec: $X(0)=5$ et $P[Y(n)=2]=P[Y(n)=1/2]=1/2$.

Dans ce dernier cas, nous savons que la chaîne de Markov $(X_n)_n$ est récurrente (Cf. [17]).

Nous terminons l'étude de cette chaîne, par la proposition suivante, dont la démonstration est immédiate.

Proposition 3. 1. Soit $(Y_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telle que : $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définie par X_0 , et pour $n \geq 1$:

$$X_n = Y_n \cdot X_{n-1},$$

où X_0 est une variable aléatoire indépendante des Y_n , et $\mathbb{E}[X_0] < \infty$. Alors relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ engendrée par les X_n , nous avons :

1. Si $\mathbb{E}[Y_1] = 1$, $(X_n)_n$ est une martingale ;

2. Si $\mathbb{E}[Y_1] > 1$, $(X_n)_n$ est une sous-martingale ;
3. Si $\mathbb{E}[Y_1] < 1$, $(X_n)_n$ est une sur-martingale.

Remarque 3. 1. Il est immédiat de noter que le modèle mis en place contient le cas déterministe (cas où Y_n est constante pour tout $n \geq 1$).

II. La chaîne $X_n = Y_n \cdot X_{n-1}(1 - X_{n-1})$ (II) :

Dans le cas général, on ne connaît pas la nature de cette chaîne de Markov. Cependant, nous présentons ci-dessous quelques observations sur le comportement des trajectoires, dans quelques cas simples.

1. Cas où $X_0 = 0.5$ et $P[Y_n = \frac{2}{3}] = P[Y_n = \frac{8}{5}] = \frac{1}{2}$.

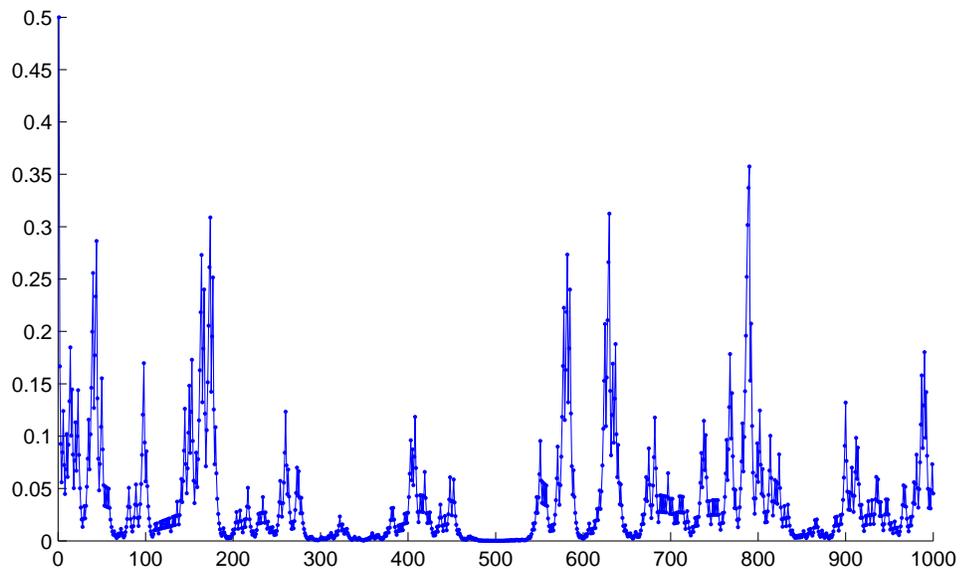


Figure 7: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1).[1-X(n-1)]$ au cours des 1000 premiers pas, pour $X(0)=0.5$ et $P[Y(n)=2/3]=P[Y(n)=8/5]=1/2$.

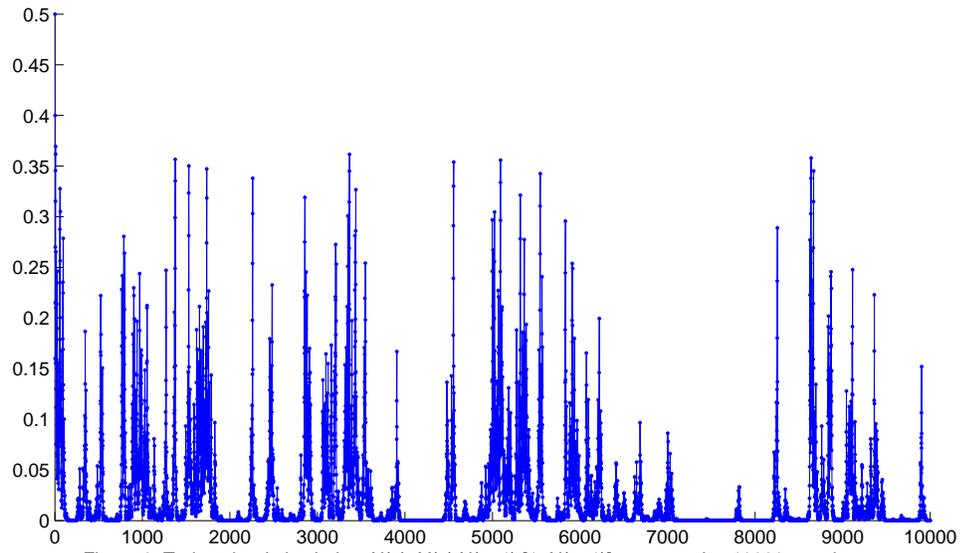


Figure 8: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1).[1-X(n-1)]$ au cours des 10000 premiers pas, pour $X_0=0.5$ et $P[Y(n)=2/3]=P[Y(n)=8/5]=1/2$.

2. Cas où $X_0 = 0.5$ et $P[Y_n = \frac{1}{2}] = P[Y_n = \frac{3}{2}] = \frac{1}{2}$.

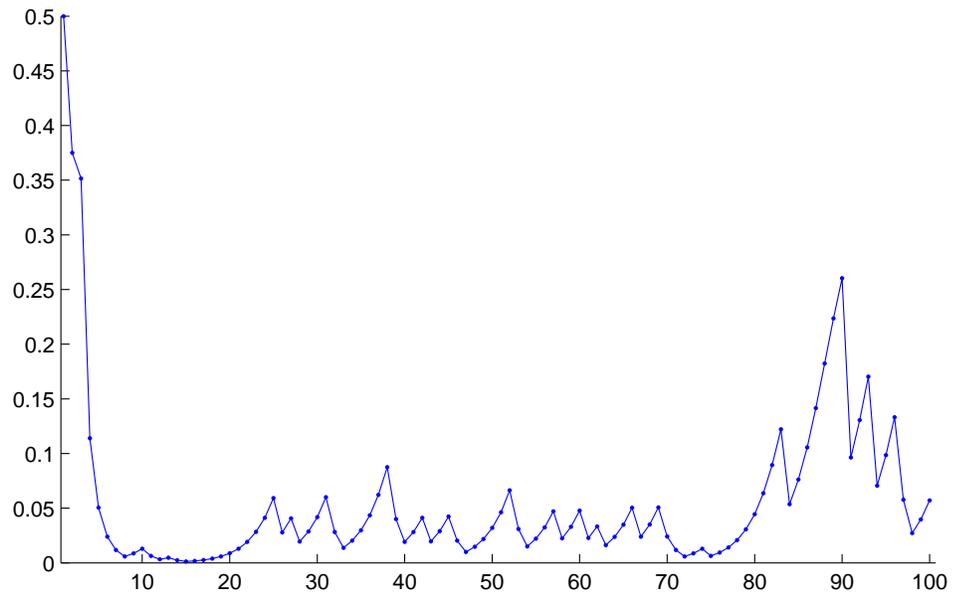


Figure 9: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1).[1-X(n-1)]$ au cours des 100 premiers pas, pour $X(0)=0.5$ et $P[Y(n)=1/2]=P[Y(n)=3/2]=1/2$.

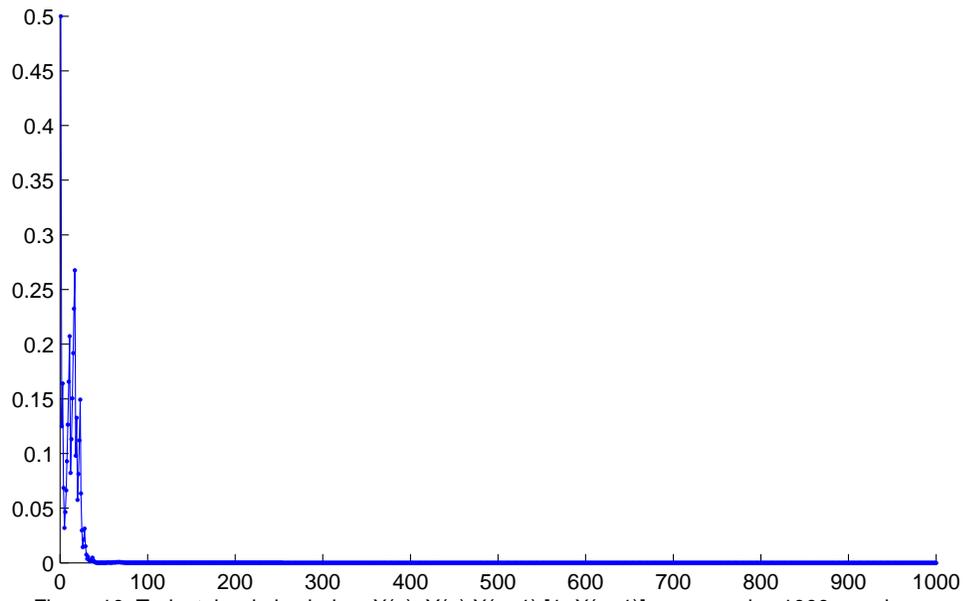


Figure 10: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n-1).[1-X(n-1)]$ au cours des 1000 premiers pas, pour $X(0)=0.5$ et $P[Y(n)=1/2]=P[Y(n)=3/2]=1/2$.

3. Cas où $X_0 = 0.5$ et $P[Y_n = \frac{3}{2}] = P[Y_n = \frac{5}{2}] = P[Y_n = \frac{1}{4}] = \frac{1}{3}$.

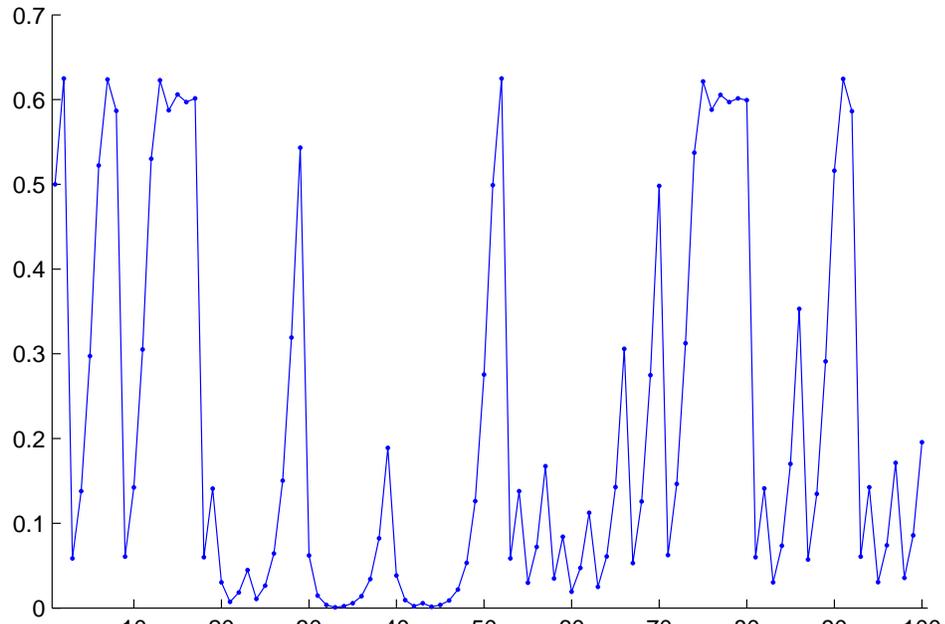


Figure 11: Trajectoire de la chaîne: $X(n)=Y(n).X(n).[1-X(n)]$ au cours des 100 premiers pas, pour $X(0)=0.5$ et $P[Y(n)=\frac{3}{2}]=P[Y(n)=\frac{1}{4}]=P[Y(n)=\frac{5}{2}]=\frac{1}{3}$.

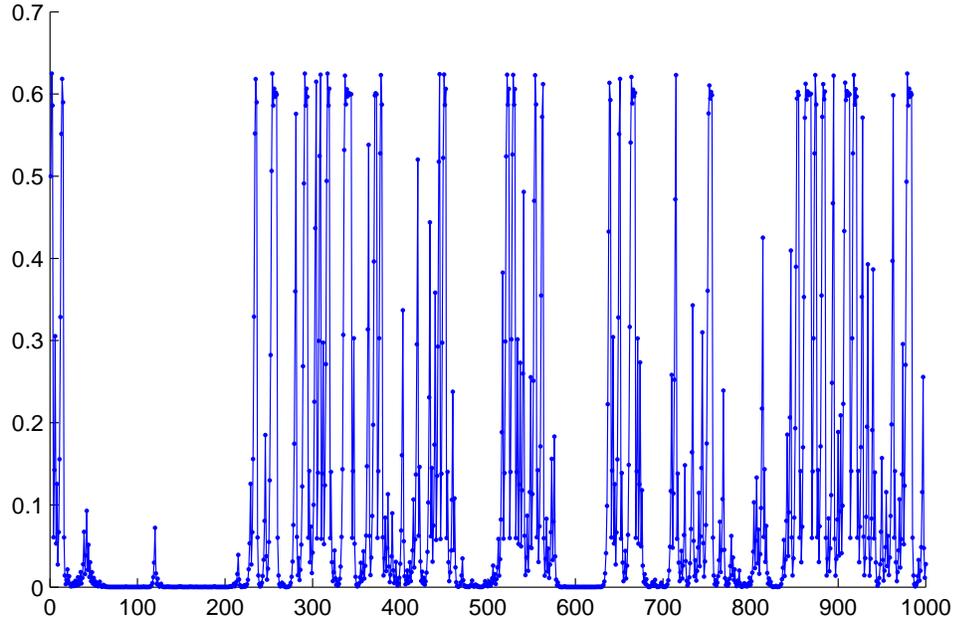


Figure 12: Trajectoire de la chaîne: $X(n) = Y(n) \cdot X(n-1) \cdot [1 - X(n-1)]$ au cours des 1000 premiers pas, pour $X(0) = 0.5$ et $P[Y(n) = 3/2] = P[Y(n) = 1/4] = P[Y(n) = 5/2] = 1/3$.

Remarque 3. 2.

Dans le cas où $0 < Y_n < 1$, $\forall n$ et $0 < X_0 < 1$, on a $0 < X_n < 1$ p. s., $\forall n$ et $(X_n)_n \searrow$ p. s., donc $X_n \rightarrow 0$, p. s.

Conclusion :

Si $0 < X_0 < 1$ et $\mathbb{E}[Y_n] \leq 1$, on observe dans les cas simulés que $0 < X_n < 1$. Ce qui nous suggère le résultat suivant modulo la condition suivante : Les Y_n vérifient l'hypothèse

$$(H) : \forall n, Y_n \leq \frac{1}{X_{n-1}(1 - X_{n-1})}.$$

Proposition 3. 2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à support dans \mathbb{Q} , $Y_n \in \mathbb{L}^1$ et $\mathbb{E}[Y_n] < 1$. Soit X_0 une variable aléatoire indépendante des Y_n telle que $0 < X_0 < 1$ et

$X_0 \in \mathbb{L}^1$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov définie par X_0 , et pour $n > 0$, $X_n = Y_n \cdot X_{n-1}(1 - X_{n-1})$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X_\infty$ existe presque sûrement, et $X_\infty \in \mathbb{L}^1$.

Démonstration.

Remarquons d'abord que sous l'hypothèse (H), $\forall n \geq 0, 0 < X_n < 1$. La démonstration découle alors du théorème de convergence des surmartingales, car $(X_n)_n$ est dans ce cas, une surmartingale. En effet, pour $n \geq 0$ soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_0, Y_1, \dots, Y_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Y_{n+1} \cdot X_n(1 - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n(1 - X_n) \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n(1 - X_n) \cdot \mathbb{E}[Y_{n+1}]. \end{aligned}$$

Comme sous l'hypothèse (H) nous avons $0 < X_n < 1 \forall n$, et $\mathbb{E}[Y_{n+1}] < 1$ par hypothèse, alors

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] < X_n, \forall n.$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une surmartingale.

□

Remarque 3. 3. Nous ne savons pas encore interpréter la condition (H).

Remarquons que si on pose : $f_y(x) = yx(1 - x)$, alors

$$\forall n \geq 1, X_n = f_{Y_n} \circ f_{Y_{n-1}} \circ \dots \circ f_{Y_1}(X_0).$$

Théorème 3. 1 (Letac (1985)). Soient (E, \mathcal{B}_E) un espace mesurable avec E localement compact et \mathcal{B}_E sa tribu borellienne, (F, \mathcal{F}, Q) un espace de probabilité et $f : E \times F \rightarrow E$ une application mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{B}_E \otimes \mathcal{F}$ telle que pour tout y fixé dans F , $x \mapsto f_y(x) = f(x, y)$ est continue. Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi Q ,

à valeurs dans F , et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans E indépendante de $(Y_n)_n$. La suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ définie par X_0 et pour $n \geq 0$ par

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1}) ,$$

est une chaîne de Markov d'espace des états E , de loi initiale $\mu = \mathcal{L}(X_0)$ et de noyau de transition P , la loi image de Q par f_x . De plus si $(Z_n)_n$ est la suite de variables aléatoires définies par $Z_n = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \cdots \circ f_{Y_n}(X_0)$, si $Z = \lim_n Z_n(x)$ existe presque sûrement, et si π est la loi de Z , alors elle est unique et $(X_n)_n$ admet comme mesure stationnaire π , la loi de Z .

Pour terminer, nous conjecturons grâce à ce théorème, que $(X_n)_n$ admet une mesure stationnaire π bornée, et la récurrence en sera alors une conséquence. Ce qui viendrait alors confirmer nos observations dans les cas simulés. Le cas général où la loi des Y_n est à support non dénombrable reste un problème.

Conclusion :

A partir du mémoire, deux directions du travail se précisent en perspective :

- 1. L'étude des réactions chimiques par l'introduction des chaînes de Markov à flot peut se généraliser comme moyen de description des propriétés de la réaction chimique, en considérant les chaînes de Markov infinies associées. Les exemples donnés sont assez significatifs pour cela.*
- 2. Le parallèle fait avec les systèmes dynamiques débouche sur un problème ouvert : Nature de la chaîne de Markov $(X_n)_n$ définie par :*

$$X_{n+1} = X_n \cdot Y_{n+1}(1 - X_n),$$

de noyau P tel que, $\forall g$ une fonction mesurable et bornée, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Pg(x) = \int f_y(x) \cdot g(y) \mu(dy),$$

où $f_y(x) = yx(1 - x)$, avec $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ .

Annexe : Programmes simulant des marches aléatoires dans \mathbb{Z} par le langage de programmation 'MATLAB 7.0' :

1- Programme simulant la marche aléatoire : $X_n = Y_n X_{n-1}$, avec

$$P[Y_n = val1] = P[Y_n = val2] = \frac{1}{2} :$$

```
clear all
close all
clc
p=0.5;
n=input('Le nombre de points :');
x(1)=input('la taille initiale de la population :');
for i=2 :n;
t(i)=rand;
if(t(i)<p)
y(i)=val1;
else
y(i)=val2;
end
x(i)=y(i)*x(i-1);
end
for i=1 :n;
hold on
plot (i,x(i),'.')
end
hold on
plot (x)
```

**2- Programme simulant la marche aléatoire : $X_n = Y_n X_{n-1}(1 - X_{n-1})$,
avec $P[Y_n = val1] = P[Y_n = val2] = \frac{1}{2}$:**

```
clear all
close all
clc
p=0.5;
n=input('Le nombre de points :');
x(1)=input('la taille initiale de la population :');
for i=2 :n;
t(i)=rand;
if(t(i)<p)
y(i)=val1;
else
y(i)=val2;
end
x(i)=y(i)*x(i-1)*(1-x(i-1));
end
for i=1 :n;
hold on
plot (i,x(i),'.')
end
hold on
plot (x)
```

3- Programme simulant la marche aléatoire : $X_n = Y_n X_{n-1} (1 - X_{n-1})$,
avec $P[Y_n = val1] = P[Y_n = val2] = P[Y_n = val3] = \frac{1}{3}$:

```
clear all
close all
clc
p=1/3;
n=input('Le nombre de points :');
x(1)=input('la taille initiale de la population :');
for i=2 :n;
t(i)=rand;
if(0<t(i)<1/3)
y(i)=val1;
else
if (1/3<t(i)<2/3)
y(i)=val2;
else
y(i)=val3
end
end
x(i)=y(i)*x(i-1)*(1-x(i-1));
end
for i=1 :n;
hold on
plot (i,x(i),'.')
end
hold on
plot (x)
```

Bibliographie

- [1] *K. L. Chung*, Markov Chains With Stationary Transition Probabilities
2nd Edition, Springer-Verlag New York, 1967.
- [2] *I. Guikhman et A. Skorokhod*, Introduction à la théorie des processus aléatoires
Editions Mir, Moscou, 1980.
- [3] *F. Spitzer*, Principles of Random Walks
2nd Edition, Springer-Verlag New York, 1976.
- [4] *Sheldon M. Ross*, Introduction to Probability Models.
5th Edition, Academi Press, Inc, 1993.
- [5] *Guivarch's et Roynette*, Marches aléatoires dans un Groupe *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1975.*
- [6] *A. Revuz*, Markov Chains
North Holland, 1975.
- [7] *Leo Breiman*, Probability. *Society for Industrial and Applied Mathematics*
2nd Edition, Philadelphia 1992.
- [8] *K. L. Chung, and John B. Walsh*, Markov Processes, Brownian Motion, and Time symmetry
2nd Edition, Springer, 2005.

- [9] *M. Loève*, Probability Theory II.
4th Edition, Springer-Verlag New York Inc, 1978.
- [10] *Sheldon M. Ross*, Stochastic Processes.
2nd Edition, John Wiley et Sons, Inc, 1996.
- [11] *N.G. van Kampen*, Stochastic Processes in Physics and Chemistry
1st Edition, Elsevier, 1992.
- [12] *P. Kurka et I. Dvorak*. MATHEMETICAL BIOSCIENCES 60 : 1-16.
Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1982.
52 Vanderbilt Ave., New York, NY 10017.
- [13] *W. Feller*, An Introduction to Probability Theory and Its Applications.
Volume II, 2nd Edition, Willey and Sons, N-Y, 1966.
- [14] *G. Letac*, A contraction principle for certain Markov Chains and its applications.
Contemporary Mathematics, Volume 50, AMS publications, N-Y, 1986.
- [15] *R.L. Devaney*, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
2nd Edition, Willey, N-Y, 1985.
- [16] *M. A. Boudiba*, La Chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ et les Chaînes associées .
Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II, Probab. Appl. 5, p. 91-132, Clermont-Ferrand. 1986.
- [17] *G. Larabi*, Chaînes de Markov et applications.
Mémoire de Magister en Mathématiques (opion : Calcul de Probabilités) UMMTO, 2007.
- [18] *P. Billingsley*, Ergodic Theory and Information.
John Wiley and Sons, Inc., 1965.