

Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU



Faculté du Génie et de la Construction
Département de Génie Civil



THESE DE DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

Présentée par

ADJRAD Arezki

Sujet

**MODELISATION NON LINEAIRE DES STRUCTURES
TRIANGULEES COMPOSITES**

Devant le jury composé de :

BALI	Abderrahim	Professeur	ENP Alger	Président
BOUAFIA	Youcef	Professeur	UMMTO	Rapporteur
KACHI	Mohand Said	Professeur	UMMTO	Co-Rapporteur
TAHAKOURT	Abdelkader	Professeur	UAM Béjaia	Examineur
DAHMANI	Lahlou	Professeur	UMMTO	Examineur
NECHNECH	Ammar	Professeur	USTHB	Examineur

Soutenue le 16/09/2015

Remerciements

Cette étude a été effectuée sous la direction de M. BOUAFIA Youcef, Professeur à l'université Mouloud MAMMERY "Tizi Ouzou". Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir témoigné une grande confiance et m'avoir formé à la recherche. Son soutien, ses conseils et encouragements amicaux, furent déterminants.

Je remercie vivement monsieur KACHI Med Said, Professeur à l'université Mouloud MAMMERY "Tizi Ouzou", pour son aide et ses encouragements tout au long de la préparation de cette thèse.

Ma reconnaissance va également à Monsieur HAMIZI Mohand, Professeur à l'université Mouloud MAMMERY "Tizi Ouzou" et Doyen de la faculté de Génie et de la Construction, pour ces encouragements et son soutien moral.

J'adresse également ma profonde reconnaissance à M. BALI Abderrahim, Professeur à l'Ecole nationale polytechnique "Alger", pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de thèse.

Que messieurs les membres de jury trouvent ici mes plus vifs remerciements pour l'intérêt qu'ils ont exprimé pour examiner ce travail.

J'exprime aussi ma gratitude à l'ensemble de mes collègues de département de Génie Civil de l'université Mouloud MAMMERY "Tizi Ouzou" en particulier, Messieurs DRIZI Said, SAAD Mohammed, HAMMOUM Hocine, MANI Aomar et ATLAOUI Djamel pour leur soutien quasi quotidien.

Je voudrais également adresser mes sincères respects à monsieur KHODJA Youcef, chef de service post graduation et recherche à la faculté de Génie et de la construction, pour sa sympathie chaleureuse et spontanée et pour son aide efficace.

Qu'il me soit permis de rendre, ici, un hommage familial à mes parents, mes frères, mes sœurs, mon épouse et mes trois filles (Sofia, Lyliya et Ibtissam).

Enfin j'adresse mes amitiés et remerciements à tout le personnel de la faculté de Génie et de la construction.

Dédicaces

À la mémoire de mon père
À la mémoire de mon ami BARBACHI Kamel

Résumé

L'évolution du calcul scientifique et le développement de l'informatique ont permis de bâtir des structures très élancées ou de grande portée, ces réalisations doivent posséder une tenue mécanique assez grande pour une masse réduite du matériau. Chercher à concevoir ces structures les plus légères possible permet des avancées économiques, écologiques et esthétiques. Les méthodes constructives ont évolué avec les époques et les matériaux disponibles. Le recours à des structures triangulées pour alléger ces ossatures présente la solution adéquate. Avec les progrès de ces dernières années en matière de simulation numérique, il semble cependant possible d'aller plus loin dans cette rationalisation en proposant des solutions alternatives plus durables et plus performantes qui intègrent de nouveaux matériaux composites, plusieurs travaux et recherches ont été menées dans ce sens.

Le comportement en flexion des éléments de structure est un problème bien connu. Dans les études classiques sur ce sujet, la résistance au cisaillement est négligée ou prise en compte par une formule simple, à partir de la théorie de l'élasticité linéaire, en négligeant l'interaction flexion cisaillement. Pour cette raison, ces procédés classiques permettent de prédire les modes de rupture en flexion, et non les modes de rupture de cisaillement.

Nous présentons dans cette étude un modèle analytique capable d'analyser les structures composées de matériaux non homogènes de type (béton armé, béton précontraint, béton de fibre...) en trois dimensions (3D), soumises à la flexion, à l'effort normal et au cisaillement dans le cadre de l'élasticité non linéaire. Dans ce modèle, l'expression adoptée pour la matrice rigidité de la section ne tient pas compte d'un module de cisaillement constant $G = f(E)$ comme en élasticité linéaire, mais un module G variable qui est fonction de la variation de l'effort tranchant. Nous proposons des formules pour calculer le module de cisaillement dans les phases post fissuration du béton et post plastification des aciers. Ce modèle est intégré dans un logiciel de calcul non linéaire de structures en 3D jusqu'à rupture.

La validation de cette démarche sur plusieurs exemples de structures montre que le modèle proposé prédit d'une manière correcte le comportement réel dans tous les domaines du comportement, pré et post fissuration du béton et post plastification des aciers.

Mots clés : structures spatiales, précontrainte, béton fibré, simulation numérique, élasticité non linéaire, module de cisaillement.

Abstract

The evolution of the scientific computation and the development of computers made it possible to build very slender or large-span structures; these achievements should possess a fairly high mechanical strength for reduced mass of the material. Seeking to design these lightest possible structures enables the economic, ecological and aesthetic advances. The constructive methods have evolved with the times and materials available. The use of triangulated structures to alleviate these frames is the perfect solution. With advances in recent years in the field of numerical simulation, however, it seems possible to go further in this rationalization by offering more sustainable and more efficient alternatives that incorporate new composite materials, several studies and researches have been conducted in this direction.

The flexural behavior of reinforced concrete beams is a well-known problem. In the classical studies about this subject, shear strength is neglected or taken into account by a simple formula from the linear theory of elasticity, neglecting the bending-shear interaction. For this reason, these classical methods allow to predict only the flexural fracture modes, not shear fracture modes.

We present in this study an analytical model able to analyze structures composed of heterogeneous material type (reinforced concrete, prestressed concrete, fiber ...) in three dimensions (3D), subjected to bending, to the normal force and shear in the case of non-linear elasticity. In this model, the expression adopted for the section's stiffness matrix does not take into account of a constant shear modulus $G = f(E)$ as in linear elasticity, but a variable shearing modulus which is a function of the shear variation. We propose formulas to calculate the shear modulus in the phase of post cracking of concrete and post-plasticization of steels. This model is incorporated in a nonlinear computation of 3D structures until a rupture.

The validation of this approach on several examples of structures shows that the proposed model is able to predict the experimental behavior of structures in all areas of behavior, pre- and post concrete cracking and post plasticization of steels.

Key-words: spatial structures, prestressing, fiber concrete, numerical simulation, nonlinear elasticity, shear modulus.

Table des Matières

Remerciements	I
Dédicaces	II
Résumé	III
Abstract	IV
Table des Matières	V
Liste des figures	XI
Liste des Tableaux	XV
Liste des notations	XVI
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
1. Introduction.....	4
2. Contexte.....	4
2.1. Besoins dans le domaine de la simulation du comportement des structures du Génie Civil.....	4
2.2. Définition du Sujet.....	4
3. Structures triangulées.....	5
3.1 Introduction	5
3.2 Définitions et concepts.....	5
3.3 Méthodes de calcul.....	6
3.4 Intérêts des structures triangulées dans les ouvrages d'art (ponts).....	7
4. Les matériaux composites dans le génie civil.....	7
4.1 Généralités sur les matériaux composites.....	7
4.2 Renforcement du béton par des fibres.....	7
4.3 Application aux structures.....	7
5. Paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant.....	8

6. Comportement en cisaillement des éléments en béton armé et/ou précontraint et composite.....	9
6.1 Essais de l'université de TORONTO.....	9
6.2 Essais sur élément en béton précontraint.....	12
6.3 Essais sur portique de Vecchio et al (1990).....	13
6.4 Essais de Khalifa et al – (American Concrete Institute).....	15
6.5 Essais de Zuanfeng Pan et al.....	19
6.6 Les essais de cisaillement de l'université de Stuttgart	22
6.7 Essais de l'université Southern Denmark.....	24
6.8 Comportement a l'effort tranchant des poutres renforcées par composites	26
7 Méthodes de calcul des éléments soumis à des efforts de cisaillement.....	28
7.1 Généralités.....	28
7.1.1 Modèle de treillis (1909).....	28
7.1.2 Généralisation de l'inclinaison des bielles.....	30
7.2 Théorie du champ de compression et détermination de l'angle des bielles de compression (TCC) (1978).....	31
7.3 Modèle de Vecchio et Collins ou Théorie du champ de compression modifiée (TCCM) (1986).....	32
7.3.1 Principe de la méthode TCCM.....	32
7.3.2 Exemple de calcul de la résistance à l'effort tranchant d'une poutre.....	35
7.4 Modèle de Kachi, Bouafia, Fouré et Muller (2006).....	36
7.4.1 Hypothèses fondamentales.....	36
7.4.2 Equilibre local des couches.....	37
7.4.3 Equilibre global des sections.....	37
7.4.4 Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$	37
7.4.5 Calcul de la distorsion moyenne.....	39
7.4.6 Résolution du problème.....	39
7.4.7 Algorithme et organigramme de calcul.....	40
7.5 Modèle de Khaldoun N.Rahal (2010).....	43
7.5.1 Principe de la méthode.....	43
7.5.2 Validation de ce modèle avec les résultats expérimentaux.....	44
7.6 Modèles utilisant la rigidité effective du cisaillement d'un element fissuré....	45

8. Conclusion.....	49
CHAPITRE II : PRESENTATION DU PROBLEME ET HYPOTHESES	
GENERALES.....	51
1. Introduction.....	51
2. Les grandes lignes de l'étude.....	51
3. domaines d'application et hypothèses générales.....	51
4. Discrétisation de la structure.....	53
4.1 Modélisation des sections.....	53
4.1.1 Le béton.....	53
4.1.2 Les aciers.....	54
5. Définition des charges.....	54
6. Comportement des matériaux.....	55
6.1 Comportement du béton en compression.....	55
6.1.1 Observations expérimentales.....	55
6.1.2 Loi de BPEL.....	56
6.1.3 Loi EUROCODES 2.....	57
6.1.4 Loi générale de Sargin.....	58
6.2 Comportement du béton en traction.....	59
6.2.1 Observations expérimentales.....	59
6.2.2 Modèle de Grelat.....	59
6.3 Comportement mécanique des aciers.....	61
6.3.1 Comportement expérimentale.....	61
6.3.2 Loi de comportement des aciers passifs.....	62
6.3.2.1 Aciers naturels.....	62
6.3.2.2 Aciers écrouis.....	63
6.3.3 Comportement des aciers actifs.....	64
6.4 Loi de comportement du matériau composite.....	64
7. Conclusion.....	66
CHAPITRE III : METHODE DE CALCUL DES STRUCTURES SPATIALES..	
1. Introduction.....	67
2. Principe général de calcul.....	67

3. étude d'une section droite.....	69
3.1. Géométrie des déformations.....	69
3.1.1 Déformations normales du béton.....	69
3.1.2 Déformations tangentes du béton.....	70
3.1.3 Déformations des armatures.....	70
3.2 Calcul des sollicitations internes.....	70
3.2.1 Sollicitations normales du béton de la section.....	70
3.2.2 Sollicitations tangentes du béton de la section.....	71
3.2.3 Sollicitations normales dues aux armatures de la section.....	72
3.2.4 Sollicitations tangentes dues aux armatures de la section.....	73
3.3 Les sollicitations externes.....	74
3.4 Equilibre de la section	74
3.5 Méthode itérative de résolution.....	75
3.6 Critères de convergence.....	76
3.7 Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section.....	76
4. Etude de l'équilibre de la structure.....	77
4.1 Définition des systèmes de coordonnées.....	77
4.2 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque.....	78
4.2.1 Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de L'élément.....	79
4.2.2 Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections.....	80
4.2.3 Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément.....	81
4.3 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.....	82
4.3.1 Notations générales.....	82
4.3.2 Relation entre accroissement d'efforts et accroissements de déplacement.....	84
4.3.3 Théorème des travaux virtuels.....	85
4.4 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu.....	87
4.4.1 Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu.....	87
4.5 Séquence de calcul.....	88

4.6 Organigramme global de calcul.....	91
5. Conclusion.....	92
CHAPITRE IV : MODELISATION DU MODULE DE CISAILLEMENT	
DANS LES PHASES POST FISSURATION DU BETON ET	
POST PLASTIFICATION DES ACIERS.....	
	93
1. Introduction.....	93
2. Exposé général de la modélisation.....	94
3 Observations expérimentales des courbes contraintes déformations de	
Cisaillement.....	95
3.1 Essais de Vecchio et Collins (1986).....	95
3.2 Essais de l’université de Toronto.....	96
3.3 Etude par éléments finis Vecchio (1989).....	97
3.4 Essais sur poutre de Vecchio et Mohamed Basil Emara (1992).....	98
4 Analyse et présentation schématique.....	99
5. Evaluation du module de déformation transversale G.....	100
5.1 Zone 1 : Phase avant fissuration du béton.....	100
5.2 Zone 2 : Phase post fissuration et avant plastification des aciers.....	100
5.3 Zone 3 : Phase post plastification des aciers.....	101
6 Détermination des bornes de déformation de cisaillement.....	104
7. Conclusion.....	105
CHAPITRE V : VERIFICATION EXPERIMENTALE ET VALIDATION DU	
MODELE PROPOSE.....	
	106
1. Introduction.....	106
2. Poutre isostatique soumise à l’effort tranchant (Essais Stuttgart).....	106
2.1 Définition des essais.....	106
2.2 Résultats et confrontation.....	107
3. validation sur une structure en BHP (Essais CEBTP).....	110
3.1 Présentation des poutres OG.....	110
3.2 Interprétations des résultats.....	111
4. Poutre continue hyperstatique (Essai Pera).....	112
4.1 Caractéristique de la poutre et mode opératoire.....	112

4.2 Comparaison des résultats et interprétation.....	114
5. Portique bi articulé (Essai Cranston).....	115
5.1 Dimensions et mode de chargement du portique.....	115
5.2 Résultats de la modélisation et confrontation.....	115
6. Poutres en béton armé et béton précontraint (Essais CEBTP).....	117
6.1 Programme de l'essai et caractéristiques des poutres.....	117
6.2 Comparaison des résultats de calcul et d'essai.....	118
7. Etude d'une structure triangulée.....	119
7.1 Description de la structure.....	119
7.2 Analyse des courbes charge déplacement.....	120
8. Conclusion.....	122
CONCLUSION GENERALE.....	123
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	126

Liste des figures

Figure I.1 :	Présentation schématique d'une structure triangulée.....	6
Figure I.2 :	Structures triangulées 3D (modèle ferme).....	6
Figure I.3 :	Interactions à l'interface de fissuration : engrenement ou interaction béton- béton des surfaces fissurées.....	8
Figure I.4 :	Interactions à l'interface de fissuration : effet de goujon ou interaction acier – béton (Mestat et al. 1997).....	9
Figure I.5 :	Les essais de cisaillement (Université de Toronto).....	10
Figure I.6 :	Comportement de l'élément PV12.....	11
Figure I.7 :	Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20.....	11
Figure I.8 :	Mode rupture des poutres à l'appui ouest.....	12
Figure I.9 :	Direction des contraintes principales pour les poutres.....	13
Figure I.10 :	Schéma de chargement du portique.....	14
Figure I.11 :	Comportement de la structure.....	15
Figure I.12:	Evolution de la déformation de cisaillement au niveau des éléments du portique en fonction du chargement.....	15
Figure I.13 :	Détails et dimensions des poutres ; Essais de Khalifa et al.....	16
Figure I.14:	Détails de chargement des différentes poutres ; Essais de Khalifa et al...	17
Figure I.15 :	Mode de fissuration de la poutre CW1 ; Essais de Khalifa et al	17
Figure I.16 :	Courbe effort tranchant deflection a mi travée series CW.....	18
Figure I.17 :	Courbe effort tranchant deflection a mi travée series CO.....	18
Figure I.18 :	Courbe effort tranchant déflexion à mi travée séries CF.....	18
Figure I.19 :	Conception des poutres du groupe 1.....	19
Figure I.20 :	Conception des poutres du groupe 2.....	19
Figure I.21 :	mode de fissuration des poutres en T.....	20
Figure I.22 :	mode de fissuration des poutres rectangulaires.....	20
Figure I.23 :	Courbes charge déplacement des poutres à mi travée des poutres L1, L2, L4 et L5.....	21
Figure I.24 :	caractéristiques géométriques et détails de ferrailage des essais à l'effort tranchant. Poutres Stuttgart.....	22
Figure I.25 :	Mode de fissuration des différentes poutres.....	23

Figure I.26 :	courbes effort déplacement des poutres ET1, ET2, ET3 et ET4 ; Comparaison des valeurs expérimentales à la modélisation.....	24
Figure I.27 :	Vue longitudinale des spécimens testés par U.G.Jensen (université Southern Denmark).....	25
Figure I.28 :	Section transversale et détails de ferrailage.....	25
Figure I.29 :	effort tranchant déflexion a mi travée pour l'ensemble des poutres.....	25
Figure I.30 :	Fibres d'aciers utilisées et forme de cadres transversaux.....	26
Figure I.31 :	Dimensions et détails de ferrailage des poutres.....	27
Figure I.32 :	Courbes effort flèche des poutres avec et sans armatures transversales...	27
Figure I.33 :	Mode de fissuration des poutres avec des fibres d'aciers sans entries.....	28
Figure I.34 :	L'analogie du treillis.....	29
Figure I.35 :	Equations du modèle des bielles à 45°.....	29
Figure I.36 :	Modèle du treillis à angle variable.....	31
Figure I.37 :	Transfert de force à travers les fissures.....	34
Figure I.38 :	Espacement des fissures inclinées.....	34
Figure I.39 :	Section de poutre en T et détails des données pertinents.....	35
Figure I.40 :	comportement de la section à l'effort tranchant.....	36
Figure I.41 :	Section de poutre discrétisée en couches.....	37
Figure I.42 :	Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.....	38
Figure I.43 :	Organigramme général de l'étude d'une section.....	41
Figure I.44 :	Equilibre d'une couche à ϵ_x et τ connus.....	42
Figure I.45 :	Organigramme de la méthode simplifiée de calcul d'une section.....	42
Figure I.46 :	courbe contrainte deformation de cisaillement ;expérimentalement observée sur element béton armé.....	43
Figure I.47 :	détails de poutre calculée et confrontation.....	45
Figure I.48 :	observation expérimentale et calcul du module de déformation transversal.....	45
Figure I.49 :	modélisation élément type poutre de C. Dundar.....	47
Figure I.50 :	Organigramme de calcul des ossatures spatiales utilisant le module de cisaillement effectif de C. Dundar.....	48
Figure I.51 :	Dimensions et detail de ferrailage du portique étudié.....	49
Figure I.52 :	comparaison du modele utilisant la rigidité effective et d'autre modeles..	49

Figure II.1 :	discrétisation de la structure en éléments poutres.....	53
Figure II.2 :	élément type poutre 3D a deux nœuds ; 6ddl par nœud.....	53
Figure II.3 :	Section de béton découpée en trapèzes.....	54
Figure II.4 :	Comportement du béton en compression simple.....	55
Figure II.5 :	Loi de BPEL 91.....	57
Figure II.6 :	Loi de comportement du béton sous contrainte de compression (Loi de Sarin générale).....	59
Figure II.7 :	Comportement du béton en traction simple [Terrien 1980].....	60
Figure II.8 :	Comportement du béton avant fissuration.....	60
Figure II.9 :	Contribution du béton tendu après fissuration.....	61
Figure II.10 :	Comportement de l'acier en traction simple.....	62
Figure II.11 :	Comportement des aciers naturels.....	63
Figure II.12 :	Comportement des aciers écrouis.....	63
Figure II.13 :	Diagramme contrainte - déformation d'un acier de précontrainte.....	64
Figure II.14 :	Loi de comportement des bétons armés de fibres en traction.....	65
Figure III.1 :	Représentation de la méthode de substitution utilisant les matrices- cordes.....	69
Figure III.2 :	déformation de la section sollicitée dans le plan oxz.....	70
Figure III.3 :	Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section.....	77
Figure III.4 :	Systèmes de coordonnées spatiales.....	78
Figure III.5 :	Efforts et déplacements correspondants dans le plan xy.....	78
Figure III.6 :	Efforts et déplacements correspondants dans le plan xz.....	78
Figure III.7 :	repère local de référence et notations.	83
Figure III.8 :	organisation générale de la méthode de calcul.....	91
Figure IV.1 :	Allure des courbes (τ - γ) des voiles n°10 et n°12.....	95
Figure IV.2 :	comportement de quelques voiles testées par Vecchio et Collins.....	96
Figure IV.3 :	courbes expérimentales contraintes déformations de cisaillement, université de Toronto.....	97
Figure IV.4 :	voiles analysé par Vecchio (1989).....	98
Figure IV.5 :	détails des poutres étudiées par Vecchio et al (1992).....	98

Figure IV.6 :	allure des courbes efforts déformation de cisaillement Vecchio et al(1992).....	99
Figure IV.7 :	Présentation schématique du comportement globale (contraintes-déformation de cisaillement).....	99
Figure IV.8 :	Evaluation du module G (Phase post fissuration du béton).....	102
Figure IV.9 :	Evaluation du module G (Phase après plastification des aciers).....	102
Figure IV.10:	Confirmation de G calculé par rapport à G expérimental pour les deux phases.....	104
Figure V.1 :	Dimensions et détails de ferrailage ; essais Stuttgart.....	107
Figure V.2 :	Caractéristiques géométriques des spécimens ET1, ET2, ET3 et ET4....	107
Figure V.3 :	Comparaison des résultats d'expérience et de simulation pour les poutres ET1, ET2, ET3 et ET4	110
Figure V.4 :	Description schématique des poutres testées au CEBTP.....	111
Figure V.5 :	Prédiction du comportement des poutres en BN et BHP ; Essai OG.....	112
Figure V.6 :	Caractéristiques géométrique de la poutre testée par Pera.....	113
Figure V.7 :	Comparaison des résultats de simulation et d'expérience ; Poutre hyperstatique de Pera.....	114
Figure V.8 :	Dimensions et détails de ferrailage du portique.....	115
Figure V.9 :	Courbe effort flèche à mi travée de la poutre ; Portique bi articulé.....	116
Figure V.10 :	Dimensions et détails de ferrailage des poutres HZ [Trinh (1995)].....	117
Figure V.11 :	Courbes effort flèche ; Poutres HZ.....	119
Figure V.12 :	Caractéristiques géométriques, système de chargement pour les poutres (NM).....	119
Figure V.13 :	Modélisation des poutres NM en structure triangulée.....	120
Figure V.14 :	Courbes Charge-déplacement à mi travée-Poutres NM.....	121

Liste des Tableaux

Tableau I.1 :	Propriété des matériaux (essais Khalifa et al).....	16
Tableau I.2 :	caractéristiques mécanique des matériaux et détails de ferrailage transversal (essais Zuanfeng).....	20
Tableau I.3 :	caractéristiques des matériaux (essais Stuttgart).....	22
Tableau IV.1 :	détail des essais expérimentaux et vérification du module de déformation transversal G – Zone 2 : Post fissuration du béton.....	103
Tableau IV.2 :	détail des essais expérimentaux et vérification du module de déformation transversal G – Zone 3 : Post plastification des aciers.....	103
Tableau V.1 :	Propriétés mécaniques des matériaux.....	107
Tableau V.2 :	Principales caractéristiques des matériaux poutres OG.....	110
Tableau V.3 :	caractéristiques mécaniques des matériaux poutre Pera.....	113
Tableau V.4 :	caractéristiques des matériaux ; portique Cranston.....	115
Tableau V.5 :	comparaison des valeurs ultimes. portique Cranston.....	116
Tableau V.6 :	caractéristiques mécanique des matériaux ; Poutres HZ.....	118

Liste des Notations

Notations matricielles

- $\{A\}$: Vecteur tenant compte de la précontrainte,
 $[B], [D]$: Matrices de transformations géométriques,
 $\{\Delta F\}$: Vecteur des accroissements des efforts internes aux nœuds,
 $[K]$: Matrice de rigidité,
 $[K_s]$: Matrice de rigidité symétrique de la section,
 $[RT]$: Matrice de passage du repère local au repère absolu,
 $[S_s]$: Matrice de souplesse de la section,
 $\{\Delta S\}$: Vecteur des accroissements des déplacements aux nœuds,
 $[T_0]$: Matrice de translation du repère intermédiaire au repère local,
 $[T_G]$: Matrice rotation du repère locale au repère global,
 $\{\Delta U\}$: Vecteur des accroissements des déplacements des nœuds,
 $\{\varepsilon\}$: Vecteur contenant les déformations,

Lettres Latines

- A_a : Section de l'acier passive,
 A_p : Section de l'acier de précontrainte,
 e : Allongement longitudinal d'un élément,
 E_{b0} : Module de déformation longitudinale du béton,
 E_a : Module de Young des aciers,
 f_{cj} : Résistance du béton à la compression,
 f_{ct} : Résistance du béton à la traction,
 f_{et} : Limite élastique des armatures transversales,
 f_{el} : Limite élastique des armatures longitudinales,
 G : Module de déformation transversal du béton,
 G_{1exp} : Module de cisaillement du béton, expérimental, dans la phase post fissuration,
 G_{2exp} : Module de cisaillement du béton, expérimental, dans la phase post plastification des aciers,
 Indice N : Repère intrinsèque de l'élément de barre,
 Indice U : Repère local intermédiaire de l'élément,
 Indice L : Repère local d'un élément,

Indice X :	Repère absolu de la structure,
k:	Coefficient permettant d'ajuster l'allure du début de la branche ascendante du diagramme réel, loi de Sargin,
k_b :	Coefficient permettant d'ajuster l'allure du début de la branche descendante du diagramme réel, loi de Sargin
L_0 :	Longueur initiale de la barre avant déformation,
L :	Longueur de la barre après déformation,
M :	Moment fléchissant,
N :	Effort Normal,
T :	Effort Tranchant,
u, v et w :	Déplacements longitudinaux des nœuds suivant x, y et z,

Lettres grecques

ε_e :	Déformation élastique des aciers,
ε_u :	Déformation ultime des aciers,
ε_0 :	Déformation du béton correspondant à f_{cj} ,
ε_{cu}	Déformation ultime du béton a la compression,
ε_{ct} :	Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,
ε_{rt} :	Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,
ϕ	Diamètre des armatures,
γ :	Déformation de cisaillement,
μ :	Coefficient de poisson,
ρ_t :	Pourcentage des armatures transversales,
ρ_l :	Pourcentage des armatures longitudinales,
θ :	Rotations des éléments,
σ :	Contrainte normale,
τ :	Contrainte de cisaillement,

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La tendance actuelle à concevoir des structures de plus en plus élancées ou de grandes portées et le besoin d'optimiser les quantités de matériaux conduit à mener des calculs prenant en compte les non-linéarités du système mécanique. En ouvrages d'art, considérer le couplage entre la non-linéarité matérielle et géométrique est impératif, d'où la nécessité de disposer d'outils informatiques adaptés.

Les structures, triangulées, formées de poutres sont largement utilisées dans les réalisations industrielles et les ossatures de grandes portées pour leur légèreté et leur facilité de mise en place par assemblages successifs des différents éléments qui les composent. L'analyse structurale est une composante importante dans la conception et l'étude des constructions.

Comme beaucoup d'autres domaines, les techniques d'analyse des structures ont bénéficié de grands progrès grâce aux développements de l'informatique et du calcul scientifique. Les anciennes méthodes d'analyse ont cédé place à des méthodes plus générales, plus précises et plus convenables pour l'analyse des systèmes complexes.

L'objectif de l'analyse structurale est de déterminer les contraintes, les déformations d'une structure soumise à un chargement donné. Cela permet de simuler le comportement de la structure pour différents chargements et d'estimer, par exemple, la charge limite ou de ruine. La théorie de l'analyse structurale est construite sur trois bases classiques de la mécanique appliquée : les relations déformations - déplacements, les équations d'équilibre et les relations constitutives du matériau. Pour certaines de ces structures, il apparaît que les résultats d'une analyse linéaire ne sont plus approximatifs : mais sont complètement erronés. Cet aspect du problème a fait l'objet de nombreux travaux de recherche de par le monde [2], [11], [15], [16], [18], [19], [24], [25], [27], [28], [37], [46], [59], [63], [66], [68], [71], [72], [102], [105], [109], [122], [131], [140], [150].

L'effet de l'effort tranchant, dans le domaine non linéaire, sur le comportement des structures est aussi d'une grande importance notamment pour l'estimation correcte de la déformation de la structure.

Dans le cas particulier des poutres, cet effet demeure encore un phénomène nécessitant une modélisation complète capable de prédire leur comportement en cisaillement. En effet, le mécanisme de résistance à l'effort tranchant habituellement admis, pour les poutres en béton

armé ou précontraint par des câbles intérieurs au béton, est celui du treillis à trois éléments : une membrure constituée par les armatures longitudinales, un montant constitué par les armatures transversales, et une diagonale constituée par les bielles de béton découpées par les fissures de cisaillement combinées à la compression dans le cas de la précontrainte. Cette approche est basée sur une inclinaison constante de 45° des bielles de béton comprimées, Il est actuellement admis à la suite de plusieurs travaux de recherche réalisés depuis des dizaines d'années [42], [43], [47], [48], [62],[64], [69], [75], [77], [84], [85],[92], [93], [95], [100], [113], [115], [132]-[137] que cette inclinaison est variable avec l'intensité de l'effort de cisaillement. Aucune théorie générale vraiment satisfaisante dans tous les cas n'existe dans ce domaine malgré l'effort de recherche entrepris de par le monde.

L'objectif de la présente étude est la mise au point d'une méthode numérique permettant de simuler le comportement non linéaire jusqu'à rupture de structures tridimensionnelles avec prise en compte de l'effet l'effort tranchant dans le domaine non linéaire. Les structures considérées sont constituées de matériaux non homogènes (béton armé, béton précontraint, béton de fibres...). La modélisation est basée sur une discrétisation par élément fini, elle couvre à la fois les analyses linéaires et non linéaires, la non-linéarité est considérée sous ces deux aspects (matérielle et géométrique).

En ce qui concerne la non-linéarité, le calcul proposé prend en compte deux types de non-linéarités :

- la non-linéarité mécanique du comportement réel des matériaux (fissuration, plasticité, etc.),
- les non-linéarités géométriques, liées au comportement d'ensemble de la structure (effets de second ordre),

Un modèle de prise en compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire a été proposé, ce dernier permet de prédire le comportement des structures formées de poutres en cisaillement combiné à l'existence des contraintes normales, ce qui permet alors d'estimer la rigidité réelle de cisaillement des poutres, pour un niveau de charge donné. Ce modèle est également intégré dans le calcul global des structures spatiales, afin d'estimer au mieux la flèche de ces dernières.

Cette thèse est organisée en cinq chapitres qui présentent les divers aspects de la modélisation des structures tridimensionnelles dans le domaine non linéaire avec une prise en compte de l'effet de l'effort tranchant.

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique. D'une part, nous présentons l'analyse des essais portant sur des structures en béton armé et béton précontraint. Cette analyse porte principalement sur les essais à l'effort tranchant et le comportement des éléments en béton armé et précontraint en cisaillement publiés dans la littérature. D'autre part, nous portons une attention particulière à des études théoriques, portant sur la modélisation de l'effort tranchant dans le domaine on linéaire.

La présentation du problème et les hypothèses générales font l'objet du chapitre 2, nous donnerons en détail les grandes lignes de l'étude ainsi que les hypothèses fondamentales utilisées pour l'analyse des structures tridimensionnelles dans le domaine non linéaire. Les lois réglementaires de comportement des matériaux sont aussi présentées.

Au chapitre trois est présenté le développement de la méthode de calcul global d'une structure formée d'élément type poutre 3D en élasticité non linéaire, jusqu'à rupture. Il s'agit de construire la matrice de rigidité d'un élément de poutre spatiale. L'organisation informatique de la méthode et l'organigramme général de la recherche de l'équilibre de la structure tridimensionnelle sont également données.

Le chapitre 4 est consacré au développement du modèle de calcul non linéaire du comportement des poutres 3D en cisaillement. L'ensemble des paramètres liés à l'effort tranchant, le pourcentage d'armatures longitudinales, le pourcentage d'armatures transversales, la résistance du béton à la compression et la résistance limite des aciers, sont alors utilisées pour calculer le module de déformation transversale G dans le domaine post fissuration du béton qui est intégré dans la matrice rigidité de la section. Un processus de calcul itératif est mené jusqu'à satisfaction de l'équilibre global de la section.

Au chapitre 5 est présenté l'examen de la validation du modèle de calcul en cisaillement. La validation se fera sous trois aspects, le premier aspect est de comparer les résultats de notre démarche aux résultats de l'élasticité linéaire (la linéarité ici concerne uniquement le module transversal G), deuxième aspect est de confronter notre modèle aux valeurs expérimentales, troisième aspect, l'analyse est portée sur la comparaison par rapport aux résultats théoriques se trouvant dans la littérature.

La dernière partie tire la synthèse finale du travail, présente les conclusions générales et propose des suggestions pour les suites possibles à donner à ce travail.

CHAPITRE I
ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les différents éléments des travaux abordés dans cette thèse. Afin de mieux situer les enjeux et susciter l'intérêt du lecteur, les problèmes et objectifs des travaux sont posés.

Ainsi, la première étape et celle de l'évaluation des études existant dans le domaine du thème abordé ; ceci nous conduit à mieux définir le sujet.

2. Contexte

2.1. Besoins dans le domaine de la simulation du comportement des structures du Génie Civil

La construction des superstructures du génie civil a toujours été un besoin indispensable à l'homme. Ces constructions à usage industriel, de transport ou d'habitation nécessitent pour leur conception, une connaissance fine des matériaux qu'elles utilisent, et des moyens de calcul puissant et fiable pour en vérifier la stabilité vis-à-vis des sollicitations auxquelles elles sont soumises.

Pour réaliser cet objectif, la simulation est un moyen efficace pour concevoir et analyser le comportement d'ouvrage complexe. Encore faut-il disposer des lois de comportement des matériaux utilisés, capables de rendre compte des principaux phénomènes physiques mis en jeu.

2.2. Définition du problème

L'évolution du calcul scientifique et le développement de l'informatique ont permis de bâtir des structures très élancées ou de grande portée, ces réalisations doivent posséder une tenue mécanique assez grande pour une masse réduite du matériau. Chercher à concevoir ces structures les plus légères possible permet des avancées économiques, écologiques et esthétiques. Les méthodes constructives ont évolué avec les époques et les matériaux disponibles. Le recours à des structures triangulées pour alléger ces ossatures présente la solution adéquate.

Avec les progrès de ces dernières années en matière de simulation numérique, il semble cependant possible d'aller plus loin dans cette rationalisation en proposant des solutions alternatives plus durables et plus performantes qui intègrent des nouveaux matériaux composites, plusieurs travaux et recherches ont été menées dans ce sens. [40], [45], [46], [47],

[49], [51], [52], [54], [58], [65], [74],[79], [90], [91], [94], [97], [127], [145], [146].

Le calcul de ces structures est mené en général à partir d'une modélisation en éléments de type « poutre »,

L'effet de l'effort tranchant, dans le domaine non linéaire, sur le comportement des structures est aussi d'une grande importance notamment pour l'estimation correcte de la déformabilité des structures. Dans le domaine des grands bâtiments, les voiles en béton armé sont utilisés pour résister efficacement aux charges latérales. En raison de la faible résistance à la traction du béton, les voiles en béton armé ont tendance à se comporter d'une manière non linéaire avec une réduction importante de la rigidité, même sous des charges de service. Pour évaluer avec précision la flexion latérale de ces éléments, la prévision de la rigidité à la flexion et au cisaillement après fissuration devient importante.

Ce sujet a fait objet de plusieurs travaux de recherche et discussions en ce qui concerne le béton armé, le béton précontraint. [8], [15], [16], [20], [23], [29], [34],[42], [43], [62], [64], [67], [77], [81], [82]. [85], [88], [101], [108], [114], [115], [126],[132], [141], [142], [143], [150].

Dans la suite, et après avoir défini les structures triangulées et les matériaux composites dans le génie civil, nous allons nous intéresser plus particulièrement au problème du cisaillement. Après une présentation des principaux paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant, plusieurs méthodes de dimensionnement du comportement des éléments en béton armé soumis à des efforts tranchants seront détaillées. (Vu la similitude du comportement des voiles avec des poutres, les méthodes développées pour le dimensionnement de ces dernières sont aussi utilisées). Les conclusions tirées de cette recherche bibliographique seront exploitées pour le développement d'une nouvelle stratégie de modélisation simplifiée 3D, dans le domaine non linéaire, présentée dans le chapitre IV.

3. Structures triangulées

3.1 Introduction :

Les structures triangulées offrent plusieurs avantages, notamment par leur légèreté, et leur facilité de mise en place par assemblages successifs des différents éléments qui les composent.

3.2 Définitions et concepts

Le système triangulé est une structure spatiale, formé de poutres où les efforts principaux sont des efforts axiaux de traction ou de compression. La géométrie présente une membrure

inférieure et supérieure et les diagonales ainsi que des montants, ce qui lui confère une grande rigidité.

Ils sont spatiaux car ils peuvent rester en équilibre sous des actions extérieures de direction quelconque. Ces actions sont supposées appliquer sur les nœuds pour ne pas engendrer de sollicitation de flexion ou de torsion dans les éléments. Ce type de système est représenté à la figure (I.1). Ces structures sont modélisées par des éléments poutre 3D à deux nœuds.

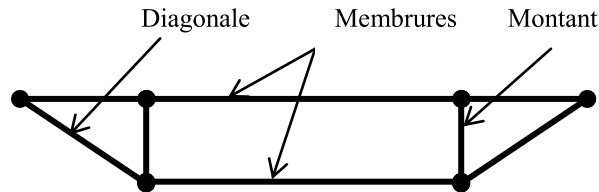


Figure I.1 : Présentation schématique d'une structure triangulée.

3.3 Méthodes de calcul

Hsu et Mo (1985) ont adopté un modèle de ferme et une relation constitutive de béton pour étudier le comportement de la structure statique de faible hauteur des murs de refend. Ils ont également vérifié leur modèle en le comparant avec des résultats expérimentaux, et démontré que leur méthode peut prédire la réponse d'un mur durant le processus de chargement, Mau et Hsu (1986), ont suivi le modèle de Hsu et Mo (1985), ils ont analysé le comportement en cisaillement des murs de faible hauteur. Plus tard, Mau et Hsu (1987) ont étudié le comportement à l'effort tranchant des ossatures à treillis (voir figure I.2) et ont proposé des formules pour prédire la résistance au cisaillement. Mo (1988) a étudié la réponse dynamique des murs de faible hauteur au cisaillement en utilisant le modèle de poutre à treillis. Récemment, Pang et Hsu (1995,1996) ont introduit le modèle de treillis modifié en utilisant le test grandeur nature. Wood (1990) a adopté un modèle de treillis pour étudier la résistance à l'effort tranchant des murs de faible hauteur et valider son modèle en comparant des résultats expérimentaux avec ses résultats numériques.

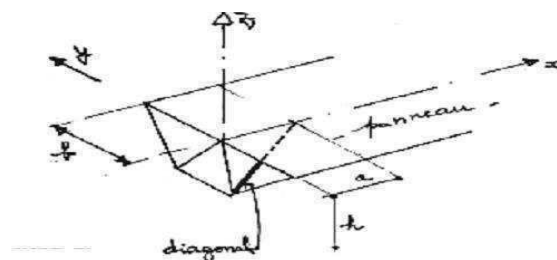


Figure I.2 : Structures triangulées 3D (modèle ferme).

3.4 Intérêts des structures triangulées dans les ouvrages d'art (ponts)

Dans la construction des ouvrages de grandes portées, cas des ponts, on cherche à concevoir les structures les plus légères possible, les structures triangulées semblent être la solution recherchée, ces structures permettent d'économiser la matière, et leur conception sont faciles à mettre en œuvre. Pour caractériser la légèreté d'une structure, il est d'usage de considérer le rapport entre les deux principaux types de chargements auxquels elle est soumise : les chargements permanents ou de poids propre et les chargements variables comme le vent, la neige ou les charges liées à l'exploitation de l'ouvrage [6].

4. Les matériaux composites dans le génie civil

4.1 Généralités sur les matériaux composites

Les matériaux composites sont formés d'au moins deux matériaux issus de familles différentes (béton armé, béton précontraint, fibres). Les matériaux composites sont employés depuis très longtemps dans le génie civil, terre grasse argileuse malaxée avec de la paille hachée ou du foin, utilisé pour lier les pierres d'un mur ou pour former le hourdis d'une construction constitue un bel exemple, nous pouvons, aussi, cité d'autres exemples tels que le béton armé ou le béton précontraint, plus récent : les fibres d'aciers sont noyées dans le mortier et constituent un renfort [51].

4.2 Renforcement du béton par des fibres

Dès les années 1990, de nombreux chercheurs ont entrepris de remplacer les armatures métalliques, dans le cas du béton armé, par des composites verre/résine et carbone/résine ou renforcer ce matériau par des fibres métalliques. Ces programmes de recherche butent encore pour la plupart car les problèmes posés par ce changement de technologie sont nombreux. En effet la liaison entre les fibres et le béton pose de nombreux problèmes, Quelle géométrie pour les composites pour obtenir le maximum d'adhérence et un rendement maximum de toutes les fibres ? Comment gérer les différences de coefficients de dilatation thermique etc.....

À l'état actuel de la recherche, deux technologies semblent intéressantes : les bétons textiles renforcés par des tissus souples et les bétons armés de barres composites appelées rebars (barre de renforcement). Pour l'une comme pour l'autre de ces techniques, les réalisations sont peu nombreuses.

4.3 Application aux structures

Les applications dans lesquelles les composites sont utilisés comme éléments structurels porteurs sont peu nombreuses. Dans le domaine des ouvrages d'art, les composites sont employés pour trois postes principales: le haubanage, les poutres principales et le tablier.

De nombreux ouvrages expérimentaux avec des haubans en fibre de carbone ont alors vu le jour, L'évolution du prix du carbone n'ayant pas été très favorable par la suite, les aciers hautes performances sont restés la solution la plus rentable pour la réalisation des haubans[51].

5. Paramètres contribuant à la résistance à l'effort tranchant

Les paramètres couramment admis contribuant à la résistance à l'effort tranchant d'un élément en béton armé ou béton précontraint sont les suivants [85]:

1. La résistance du béton non fissuré ;
2. La capacité du béton fissuré à transmettre des contraintes de traction («tension stiffening») ;
3. Le frottement et l'effet d'engrènement entre les lèvres des fissures ;
4. La présence d'aciers transversaux qui empêche l'ouverture des fissures ;
5. La résistance de l'acier longitudinal au cisaillement (effet de goujon).

L'effet d'engrènement - «aggregate interlock» - est dû au fait que les deux lèvres d'une fissure dans du béton ne sont pas parfaitement planes, figure (I.3). Lorsqu'il y a glissement relatif (mode II), des forces de contact entre agrégats apparaissent, résistant au cisaillement de la fissure. Plus particulièrement, le glissement engendre une contrainte de cisaillement parallèle à la fissure et opposée au mouvement ainsi qu'une contrainte normale qui tend à ouvrir la fissure (phénomène de dilatance). Ces contraintes sont inversement proportionnelles à l'ouverture de la fissure. Le phénomène d'engrènement, même s'il semble primordial pour certains modèles, est négligeable pour d'autres (Davenne 1990) [85].

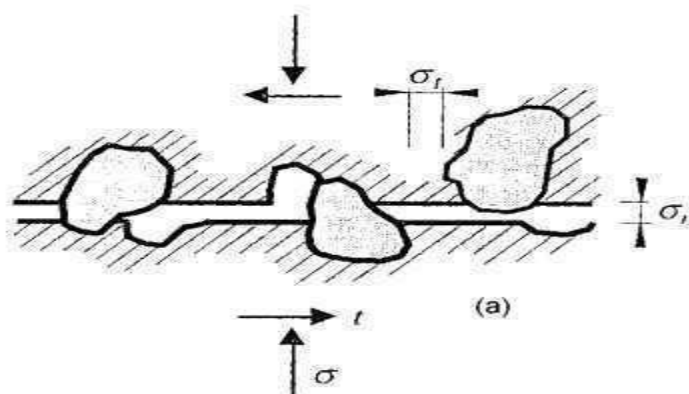


Figure I.3 : Interactions à l'interface de fissuration : engrènement ou interaction béton-béton des surfaces fissurées [85].

L'effet de goujon - «dowel effect» - est un phénomène assez complexe où intervient, en plus du cisaillement de l'acier, l'interaction avec le béton et les armatures transversales,

figure(I.4). Il apparaît lorsqu'une fissure est traversée par le ferrailage : le glissement des lèvres est gêné par le ferrailage qui travaille en flexion et en tension. De plus, il exerce sur le béton avoisinant des efforts très élevés qui l'écrasent. Ainsi, sous chargement cyclique, les courbes force-déplacement ont la même allure que celle caractérisant le phénomène d'engrènement (pincement) : autour de la position neutre, le ferrailage peut fléchir facilement car le béton qui s'y opposait a été détruit au cours des cycles précédents. Il peut être réduit à un problème du matériau avec une loi de comportement convenable faisant intervenir la résistance à la traction du béton et la liaison acier béton. Comme le phénomène d'engrènement, l'effet de goujon est souvent négligé dans les modèles [85].

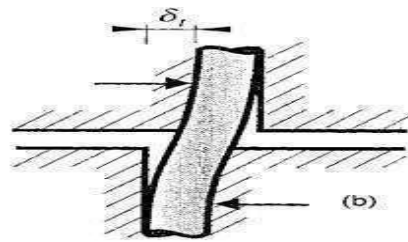


Figure I.4 : Interactions à l'interface de fissuration : effet de goujon ou interaction acier-béton (Mestat et al. 1997) [85].

6. Comportement en cisaillement des éléments en béton armé et/ou précontraint et composite

6.1 Essais de l'université de TORONTO

Cette étude a été menée avec pour objectif de déterminer le comportement des éléments voile en béton armé soumis à différents systèmes de chargement : Cisaillement pur, cisaillement-flexion, cisaillement compression. Il s'agit d'une étude expérimentale sur des éléments voile de 890 mm x 890 mm et de 70 mm d'épaisseur, pour cela un dispositif spécialement conçu a été développé figure (I.5) [136], armés de deux lits d'armature dans les deux sens. Les armatures sont placées parallèlement au côté de l'élément dans les deux sens. Des clés d'effort tranchant ont été prévues et ancrées dans le béton des éléments voiles sur tout le périmètre du voile.

L'élément voile est alors chargé par le biais de forces appliquées sur les clés de cisaillement, le long de son périmètre

Trente éléments en béton armé sont alors testés. La majorité des éléments ont été testés au cisaillement pur, d'autres en cisaillement-traction. En plus des conditions de chargement, cette étude a pris en compte la variation du pourcentage des armatures transversales, celle des armatures longitudinales ainsi que la variation des caractéristiques mécaniques du béton [136]

Les résultats expérimentaux obtenus ont permis l'analyse du comportement des éléments en cisaillement

Les déformations dans les directions longitudinale et transversale et dans les deux directions diagonales ont été mesurées au moyen de jauges collées à la surface du béton. La géométrie du cercle de Mohr ainsi construit permet de déterminer :

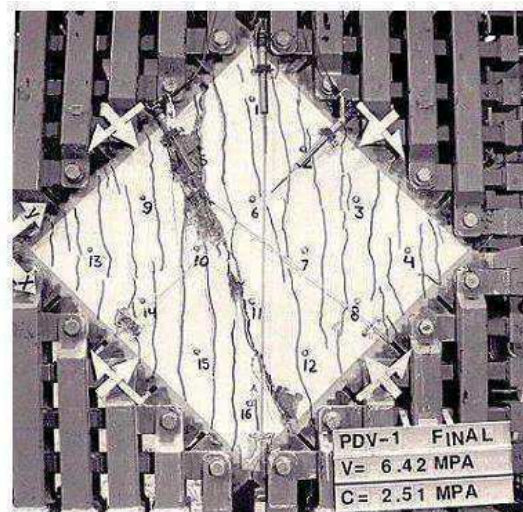
- la déformation principale de compression,
- la déformation principale de traction,
- la distorsion dans le plan XY,
- la distorsion maximale,
- l'angle d'inclinaison des déformations principales de compression.

Les contraintes dans l'acier sont déterminées à partir des déformations longitudinales et transversales. En l'additionnant à la contrainte externe appliquée à l'élément, la contrainte moyenne longitudinale et transversale dans le béton est alors calculée [136].

La figure (I.6) montre le comportement en cisaillement jusqu'à rupture de l'élément PV12, le comportement est linéaire jusqu'à la fissuration du béton. Au-delà, la rigidité de cisaillement de l'élément diminue. Ce qui conduit à une augmentation significative de la distorsion, et ce jusqu'à plastification des armatures. Au-delà, la distorsion augmente rapidement jusqu'à rupture totale de l'élément. Trois phases de comportement sont alors observées, première phase avant fissuration du béton, deuxième phase après fissuration du béton et avant plastification des aciers et la troisième phase après plastification des aciers.



(a). Dispositif expérimental



(b). Eprouvette à la fin de l'essai.

Figure I.5 : Les essais de cisaillement (Université de Toronto) [136].

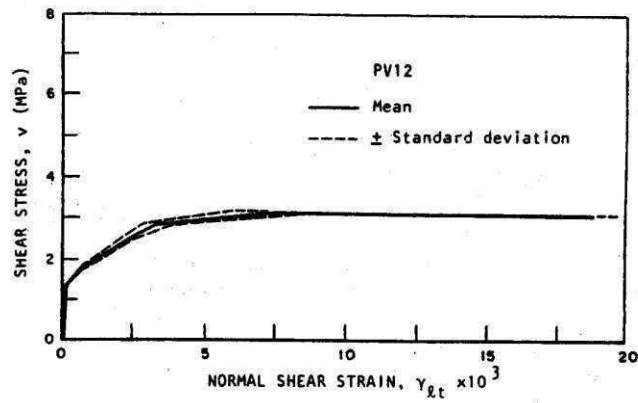


Figure I.6 : Comportement de l'élément PV12.

Les figures (I.7), montrent le comportement global des éléments PV5, PV13, PV18, et PV20 appartenant à différents groupes. Les observations sur le voile PV12 sont confirmées pour ces voiles.

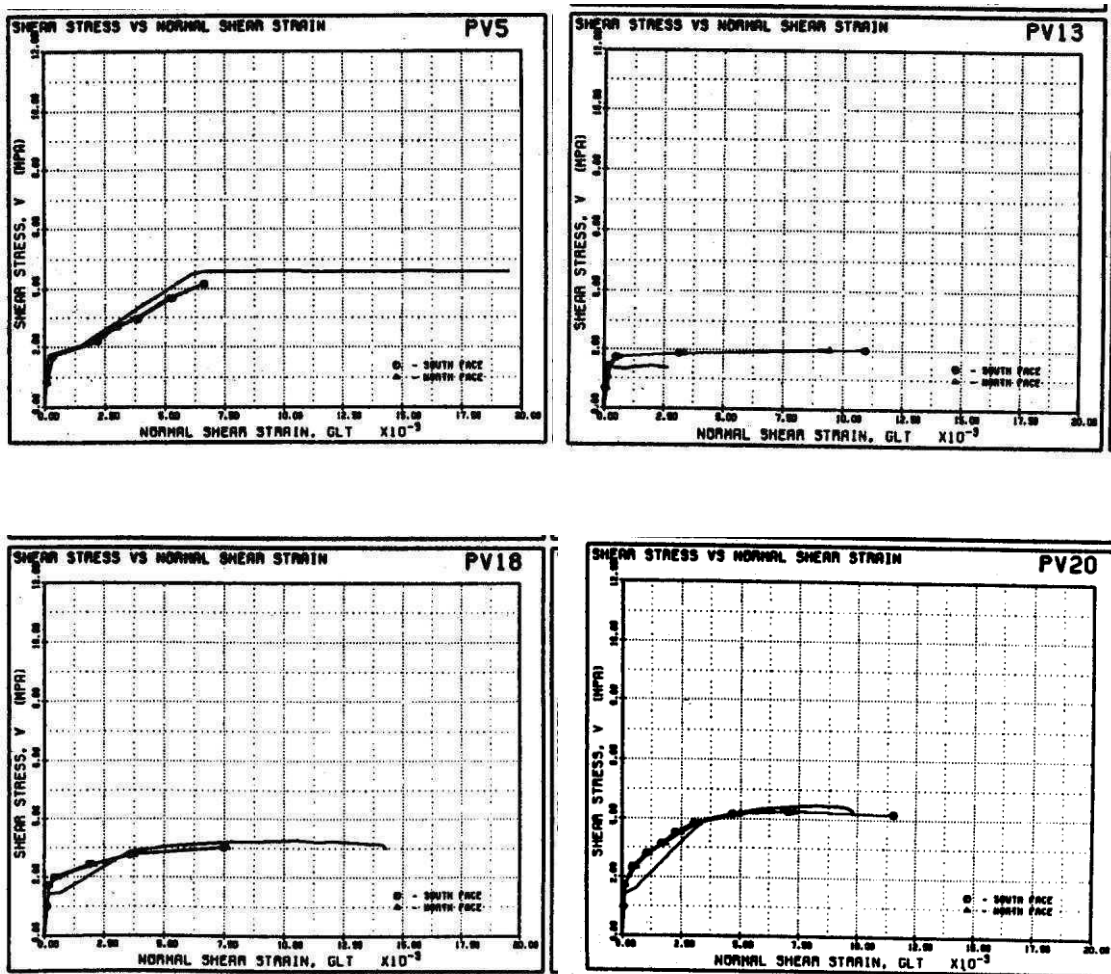


Figure I.7 : Comportement des voiles PV5, PV13, PV18, et PV20 [136].

6.2 Essais sur éléments en béton précontraint

T Gregor et MP Colins ont également mené une étude expérimentale sur des éléments en béton précontraint [43]. Il s'agit d'une étude sur 6 poutres précontraintes de section transversale en T, constituées d'une travée de 7.5 m et d'un porte-à-faux de 2.5 m simplement appuyées.

Le point d'application de la charge concentrée est constant pour toutes les poutres. La procédure de chargement appliquée est tel que pour les poutres CM1 à CM6, les charges P et Q sont augmentées simultanément en gardant la proportion ($Q/P = 1.8$) constante durant tous les stades de chargement.

Les auteurs ont observé [43] que la poutre CM1 est rompue en flexion au voisinage est de l'appui continu, la poutre CM2 est quant à elle rompue en cisaillement en travée au voisinage de l'appui ouest. La figure (I.8) montre le mode de rupture des poutres CM 3, 4, 5 et 6. Les poutres CM3 et CM4 sont rompues en flexion, au droit du moment de flexion négatif maximum, par contre, les poutres CM5 et CM6 sont rompues en cisaillement en porte-à-faux.

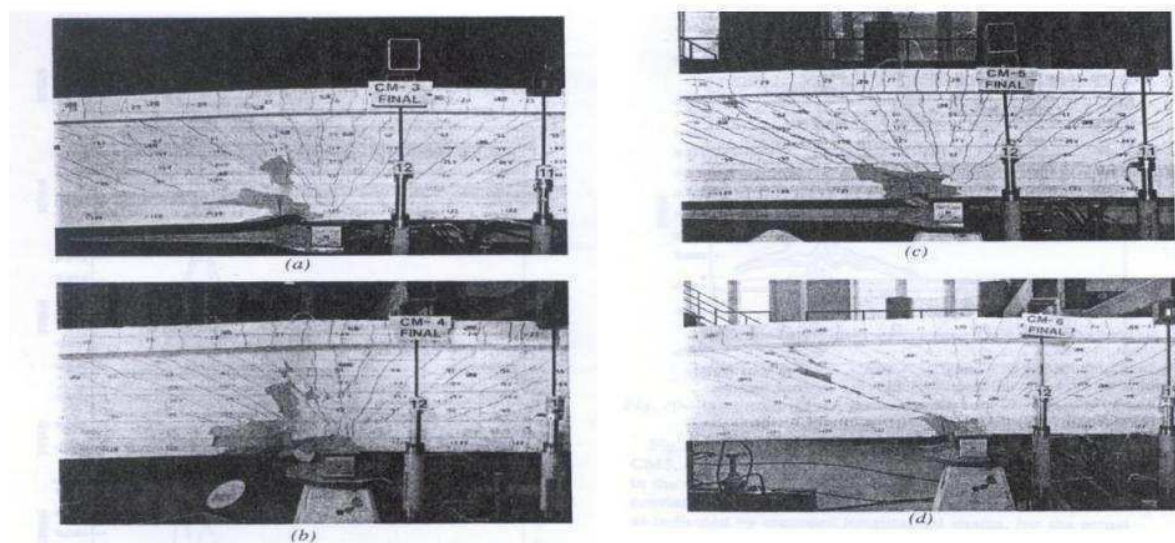


Figure I.8 : Mode rupture des poutres à l'appui ouest [43].

L'ensemble des poutres a présenté un comportement ductile. La flèche en porte-à-faux a atteint les 50 mm avant rupture. L'inclinaison des déformations principales est montrée à la figure (I.9). On y remarque bien que cette inclinaison est plus petite que 45° .

Le moment de flexion ultime observé est de 93, 95 Kn m et 59 % du moment donné par le code ACI, par contre l'effort tranchant observé est de l'ordre de 149, 156 Kn et 166% de l'effort tranchant donné par le code ACI. Ce qui montre bien qu'il existe une interaction entre la capacité portante en flexion et celle en cisaillement des poutres.

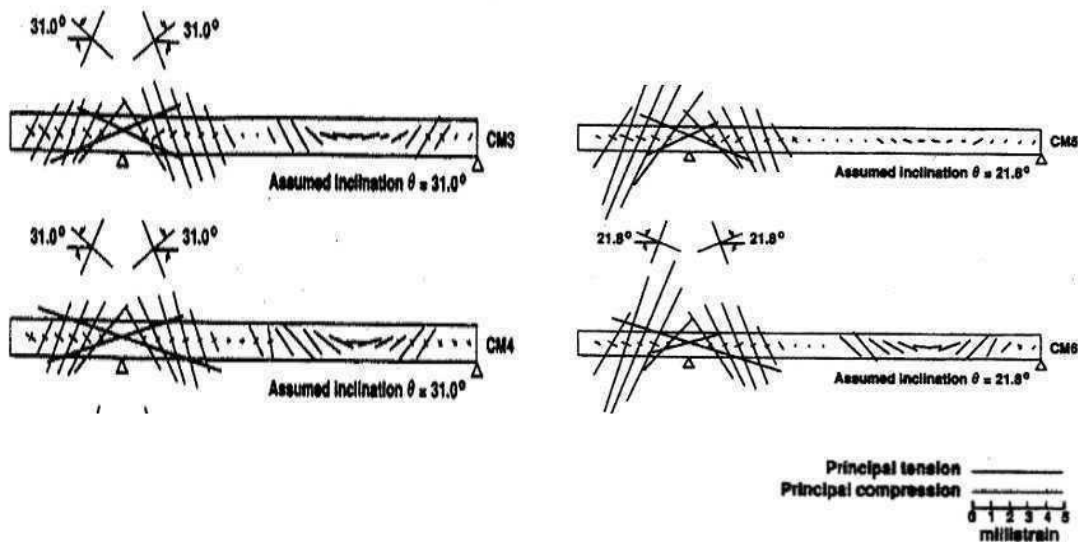


Figure 1.9 : Direction des contraintes principales pour les poutres [43].

6.3 Essais sur portique de Vecchio et al (1990)

Une étude expérimentale a été également réalisée sur un portique [62]. Il s'agit d'un portique constitué de poutre et poteaux. Les dimensions des éléments constituant le portique ainsi que les détails du renforcement sont montrés à la figure (I.10).

Le béton présente une résistance de 30 MPa, l'armature n°20 présente une limite élastique de 418 MPa et une contrainte à la rupture de 596 MPa, son module élastique est de 1925 MPa. L'armature N°10 utilisée comme renforcement transversal avec un espacement de 125mm présente une limite élastique de 454 MPa et une contrainte à la rupture de 640 MPa [62].

La procédure de chargement du portique est constituée par une force verticale constante de 780 kN appliquée sur les poteaux à leur tête, conjuguée à un effort latéral appliqué au niveau de la poutre supérieure et incrémentée jusqu'à 1000kN. Le schéma de chargement est montré à la figure (I.9).

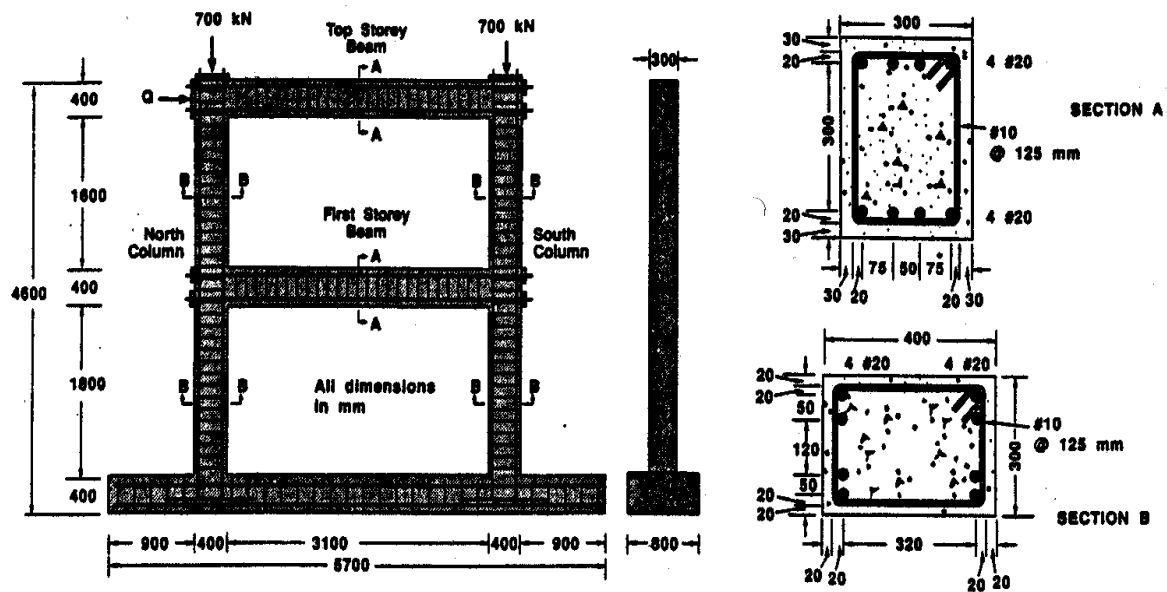


Figure I.10 : Schéma de chargement du portique [62].

Les auteurs se sont principalement intéressés à l'influence des déformations d'effort tranchant sur le comportement du portique. Les données représentatives décrivant la réponse observée sont données dans la figure (I.11).

La figure (I.12) montre l'évolution de la déformation de cisaillement dans les éléments de la structure en fonction du chargement. La distorsion observée dans les éléments de la structure présente une magnitude importante, particulièrement à l'approche de la charge maximale.

À partir de la déformation de cisaillement mesurée, la contribution de la déformation de cisaillement au déplacement et latéral du portique a été estimée. La flèche de l'effort tranchant le long de la colonne a été estimée à 6mm, soit 10% de la flèche totale mesurée [62]. Les auteurs ont conclu que les déformations de cisaillement dans la poutre et la détérioration de la rigidité de flexion due au cisaillement dans chaque élément réduisent également la rigidité totale de la structure. Trois phases de comportement sont observées :

- phase 1 : avant fissuration du béton
- phase 2 : après fissuration du béton et avant plastification des aciers
- phase 3 : après plastification des aciers.

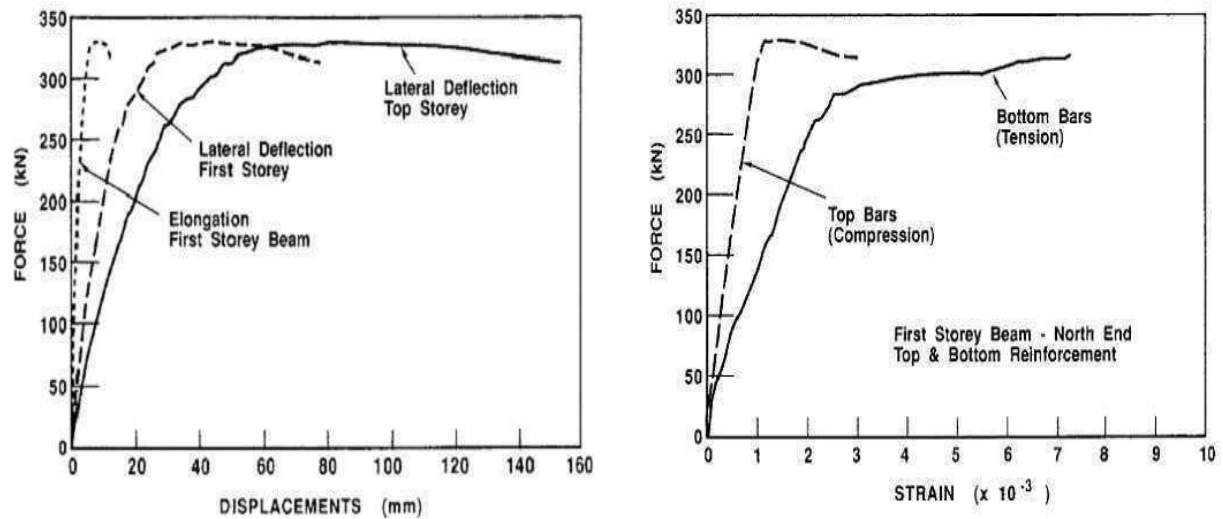


Figure I.11: Comportement de la structure [62].

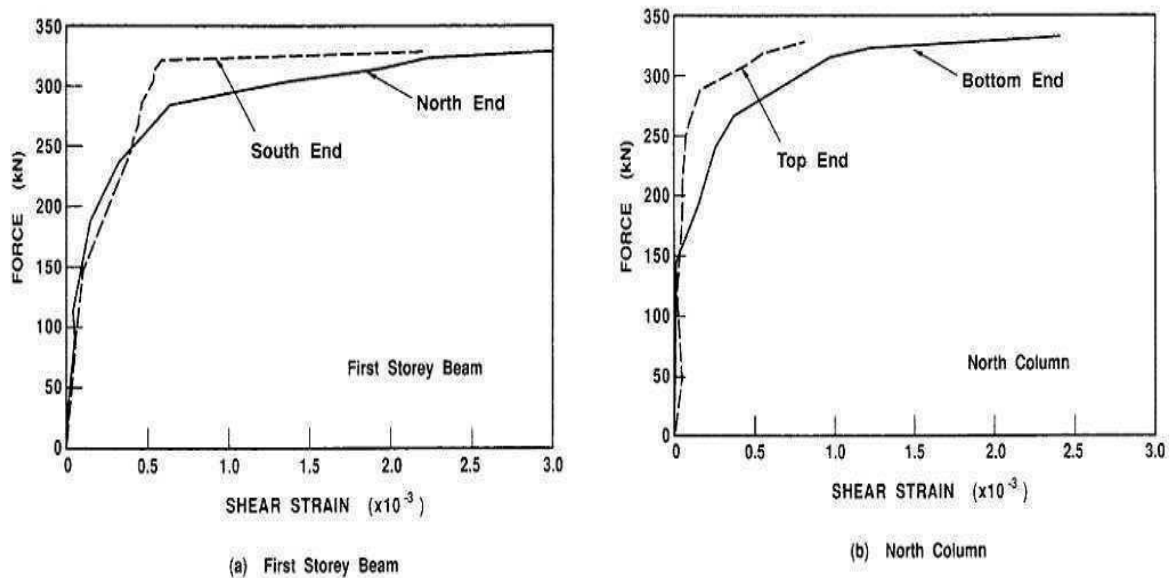


Figure I.12: Evolution de la déformation de cisaillement au niveau des éléments du portique en fonction du chargement [62].

6.4 Essais de Khalifa et al – (American Concrete Institute).

Le programme expérimental mené par Khalifa et al à l'institut américain de béton comporte des poutres continues de sections rectangulaires de 150 par 305 mm. Les poutres sont groupées en trois séries CW, CO, et CF de mêmes longueurs mais avec différents pourcentages d'armatures longitudinales et transversales. La série CW comporte deux poutres (CW1, CW2), la série CO trois poutres (CO1, CO2, CO3) et la série CF quatre poutres (CF1, CF2, CF3 et CF4), nous nous intéressons uniquement aux poutres CW1, CO1 et CF1. Les détails des spécimens sont donnés par la figure I.13 [89]. Le tableau I.1 résume les propriétés des matériaux utilisés.

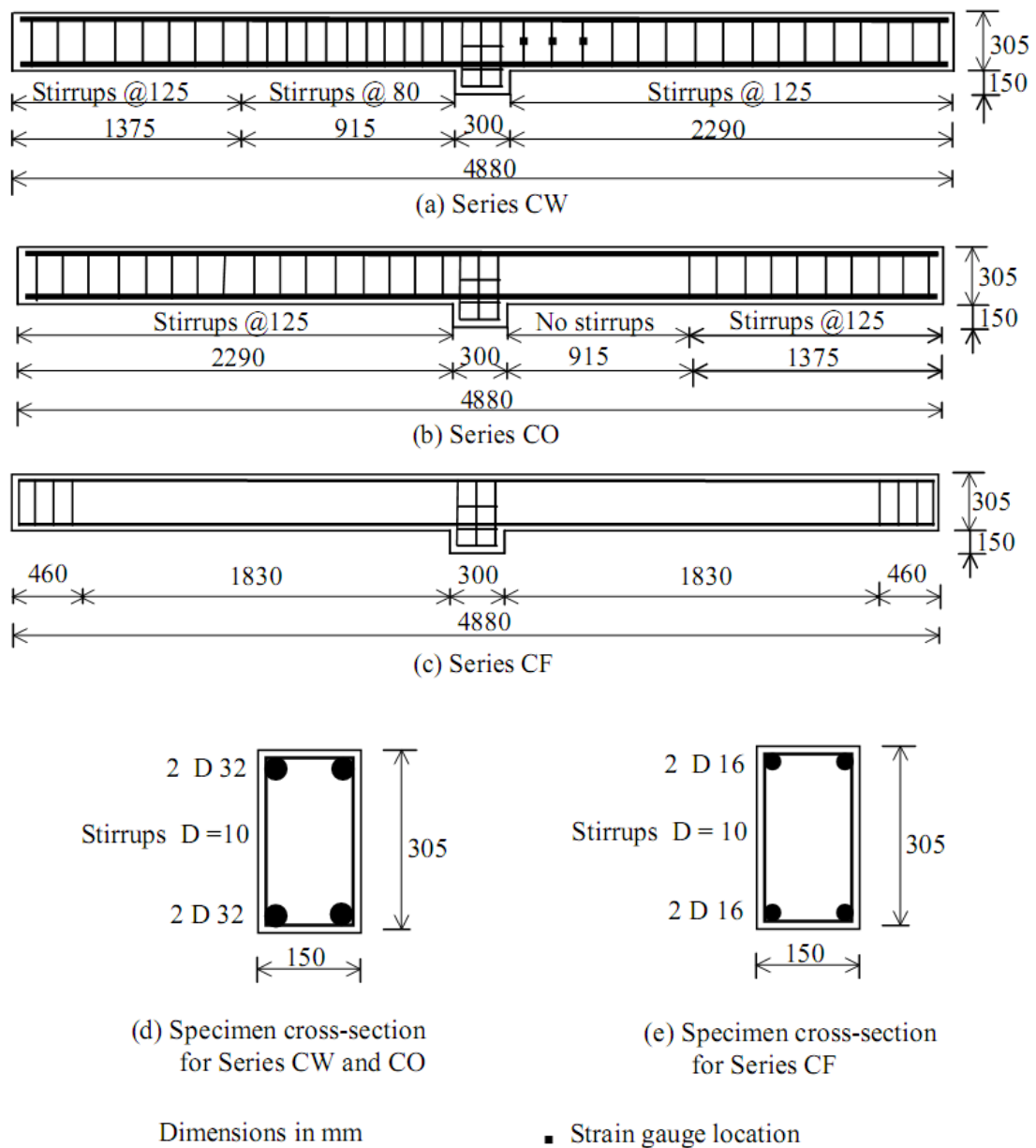


Figure I.13 : Détails et dimensions des poutres ; Essais de Khalifa et al [89].

Material	Specifications	Compressive strength (MPa)	Yield point (MPa)	Ultimate tensile strength (MPa)	Modulus of elasticity (GPa)
Concrete	Series CW	27.5	----	----	25
	Series CO	20.5	----	----	22
	Series CF	50.0	----	----	33
Steel	D = 32 mm	----	460	730	200
	D = 16 mm	----	430	700	200
	D = 10 mm	----	350	530	200

Tableau I.1 : Propriété des matériaux ; Essais Khalifa et al [89].

La figure I.14 montre le schéma de chargement, les spécimens ont été testés en tant que poutres continues sous charges concentrées appliquées au point médian de chaque travée. Des

capteurs pour surveiller le chargement ont été placés au niveau des appuis et à mi-travée de chaque portée. Ceci a permis le calcul de l'effort tranchant exact, indépendamment des phénomènes de redistribution. Également des jauges sont placées, aux mêmes endroits, afin de mesurer les déformations.

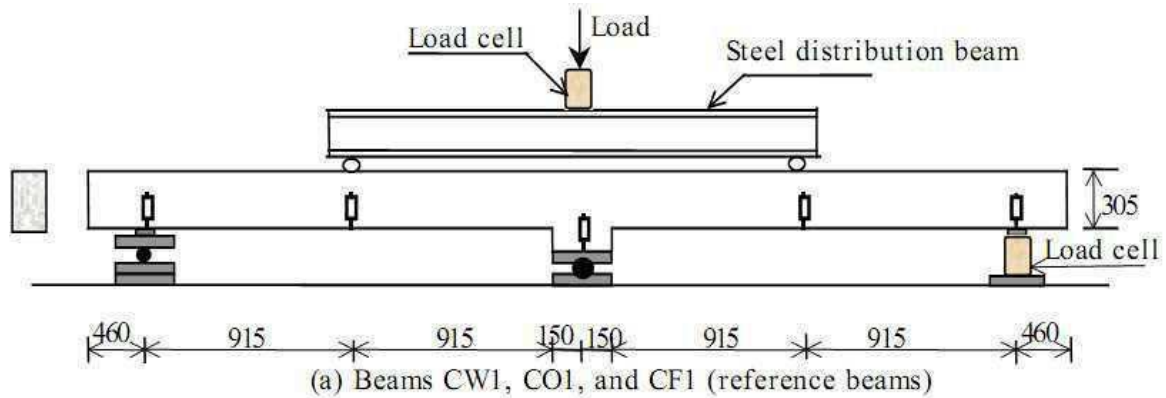


Figure I.14 : Détails de chargement des différentes poutres ; Essais Khalifa et al [89].

Les auteurs ont observé des fissures diagonales dans les poutres CW1 près de l'appui central quand la charge est de 150 kN approximativement. À mesure que la charge augmentait, des fissures diagonales de cisaillement sont formées de plus en plus et se sont propagé jusqu'à la rupture, figure (I.15).

Les figures (I.16), (I.17), (I.18) montrent l'évolution de la déflexion à mi-travée en fonction de l'effort tranchant des poutres CW1, CO1 et CF1.



Figure I.15 : Mode de fissuration de la poutre CW1 ; Essais Khalifa et al [89].

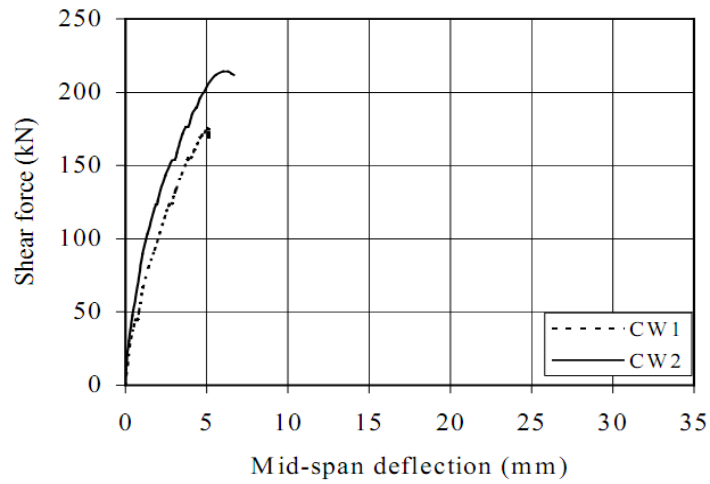


Figure I.16: Courbe effort tranchant déflexion à mi-travée séries CW.

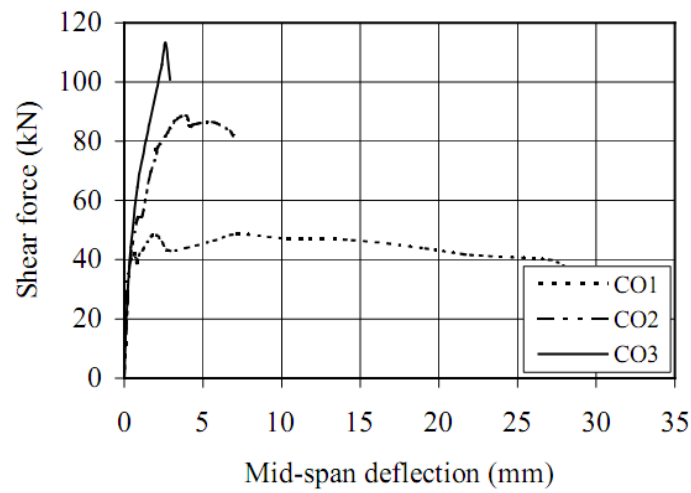


Figure I.17: Courbe effort tranchant déflexion à mi-travée séries CO.

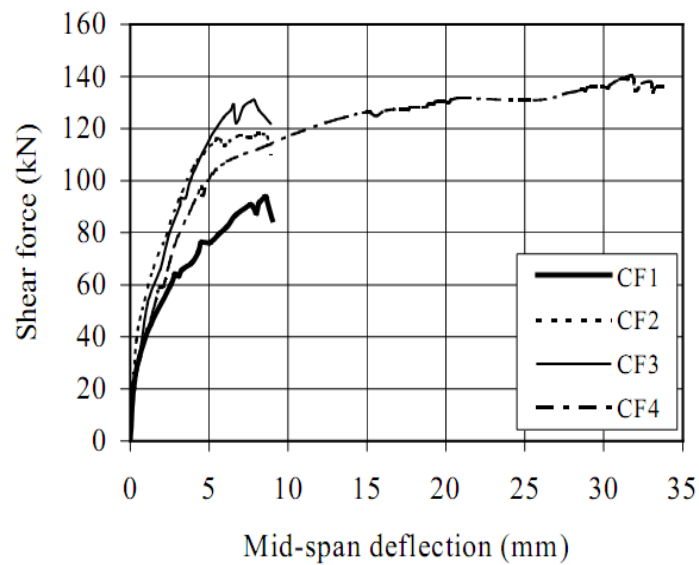


Figure I.18: Courbe effort tranchant déflexion à mi-travée séries CF.

L'analyse des courbes efforts tranchant déflexion correspondant aux poutres CW1, CO1 et CF1 nous permet de tirer deux conclusions principales.

- L'effort tranchant maximal, correspondant à la rupture des poutres et plus important lorsque les armatures transversales au voisinage des appuis sont importants.
- L'allure des courbes comporte trois phases.

6.5 Essais de Zuanfeng Pan et al

L'expérience a été entreprise sur deux groupes de poutres, le premier groupe composé de trois poutres de section en T de 3600 mm de longueur figure (I.19), le deuxième groupe composé de deux poutres de section rectangulaire et de 4000 mm de portée figure (I.20). Pour chaque groupe, la résistance à la compression, la section transversale et le ferrailage longitudinal sont les mêmes. Dans le groupe 1 les auteurs ont fait varier l'espacement des cadres par contre pour le groupe 2 les deux poutres sont identiques, le tableau 2 résume les détails pour les deux groupes.

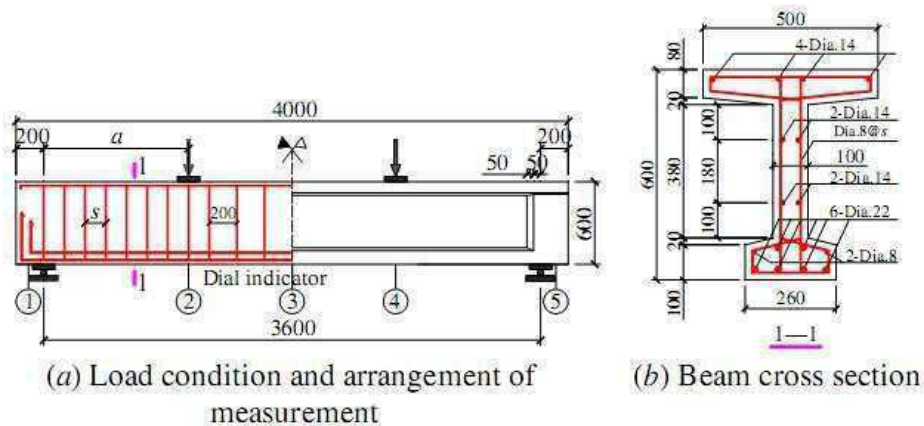


Figure I.19: Conception des poutres du groupe 1 [150]

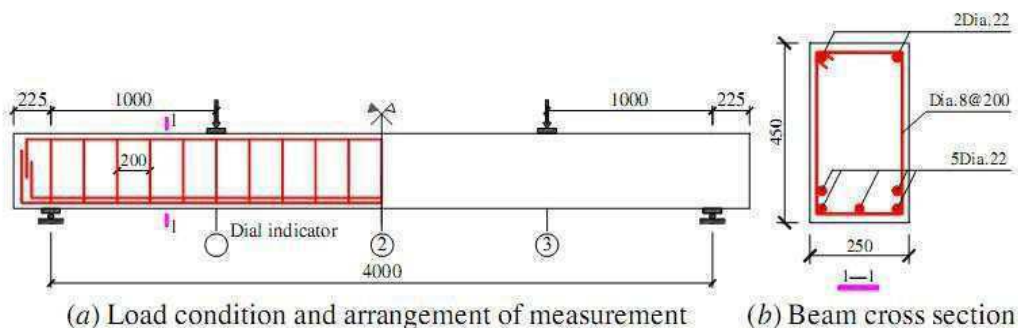


Figure I.20: Conception des poutres du groupe 2 [150].

Group	No.	f'_c (MPa)	d (mm)	a/d	Longitudinal steel		Stirrup		
					f_y (MPa)	A_s	f_{vy} (MPa)	s (mm)	ρ_v (%)
1	L1	62.0	546	1.92	373	2380	360	150	0.67
	L2	62.0	546	1.92	373	2380	360	200	0.50
	L3	62.0	546	1.47	373	2380	360	150	0.67
2	L4	37.0	400	2.50	366	1900	469	200	0.20
	L5	37.0	400	2.50	366	1900	469	200	0.20

Tableau I.2 : caractéristiques mécaniques des matériaux et détails de ferrailage transversal (essais Zuanfeng) [150].

Pour le mode d'essai, les poutres sont chargées symétriquement à l'effort tranchant comme indiqué sur les figures I.19 et I.20. Des capteurs de pression sont posés sous chaque chargement pour enregistrer l'effort tranchant appliqué. Le mode de fissuration des poutres est montré par les figures I.21 et I.22.

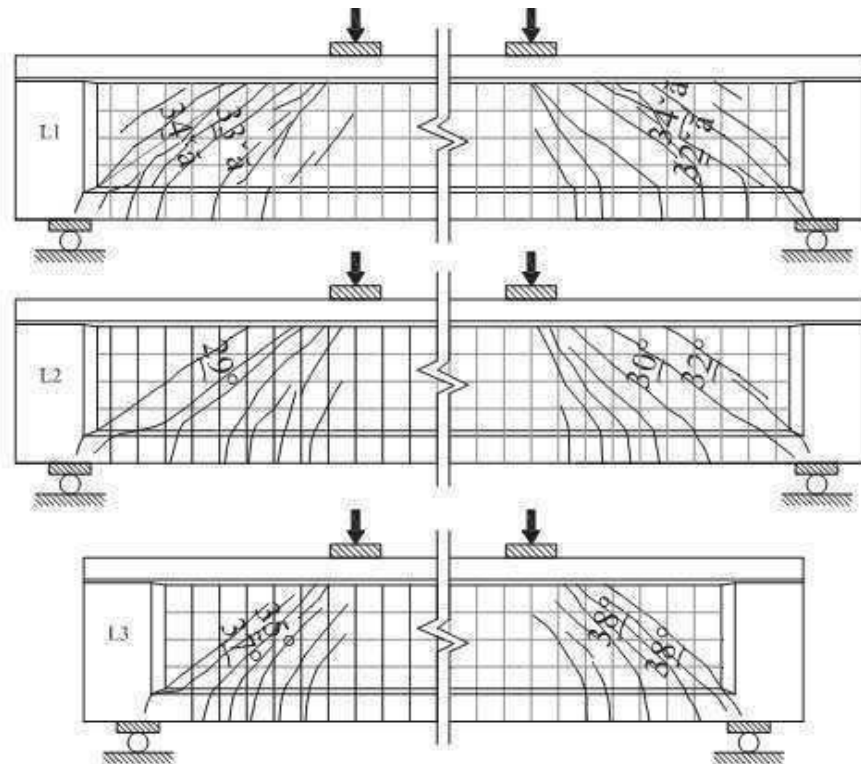


Figure I.21 : mode de fissuration des poutres en T [150].

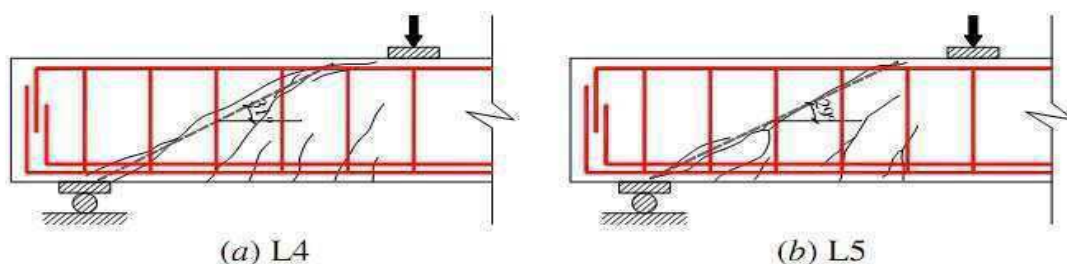
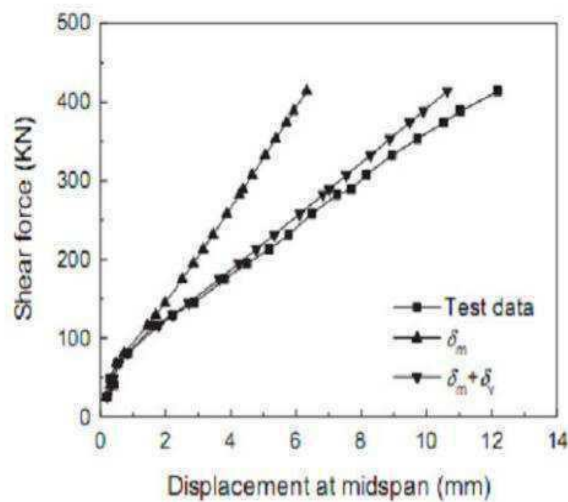


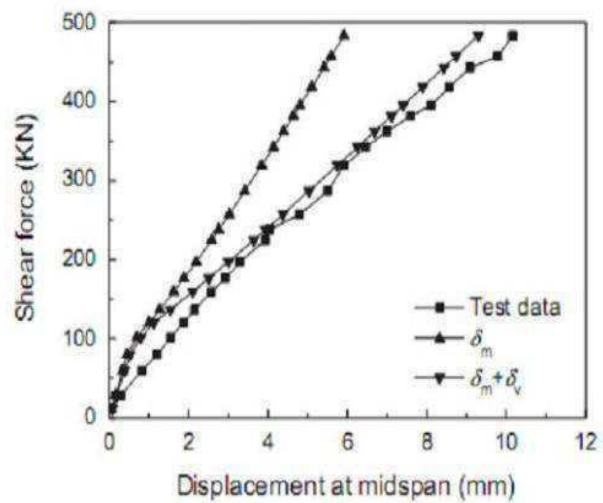
Figure I.22 : mode de fissuration des poutres rectangulaires [150].

Les auteurs ont mesuré les angles des fissures inclinées, pour les poutres L1, L2, L3, L4 et L5 sont respectivement de 32° , 29° , 35° , 31° , et 29° . Les auteurs confirment que les angles des bielles ne sont pas à 45° .

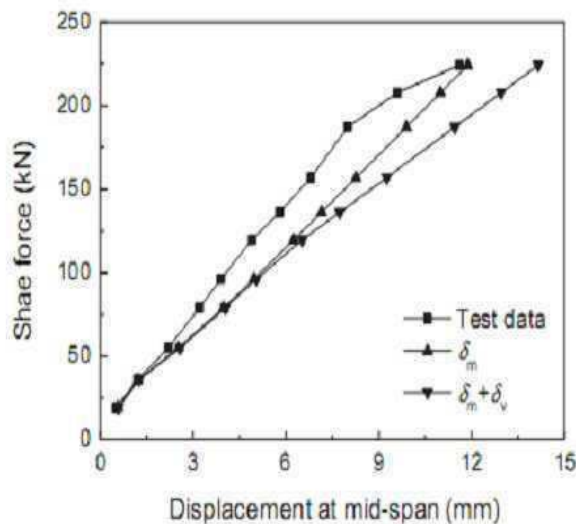
L'allure des courbes efforts déplacement à mi-travée des poutres est donnée à la figure (I.23). Les auteurs comparent les valeurs expérimentales à celles calculées par les codes de calculs qui ne considèrent pas la contribution du cisaillement, ils remarquent que les déformations calculées avec ces codes sont petites par rapport aux valeurs expérimentales. Ceci indique, que dans certains cas, en sous-estimant la déflexion réelle peut constituer un risque pour la structure.



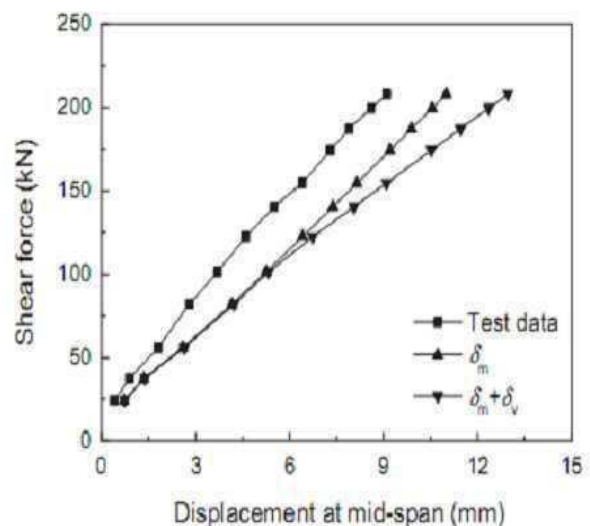
(a) L1



(b) L2



(c) L4



(d) L5

Figure I.23 : Courbes charge déplacement des poutres à mi travée des poutres L1, L2, L4 et L5 [150].

6.6 Les essais de cisaillement de l'université de Stuttgart

Les poutres sont soumises à des charges en deux points symétriques comme indiqués par la figure I.24. Cette figure présente, aussi, les caractéristiques géométriques et les détails de ferrailage des poutres testées à l'Université de Stuttgart (Allemagne). Les caractéristiques des matériaux sont données dans le tableau I.

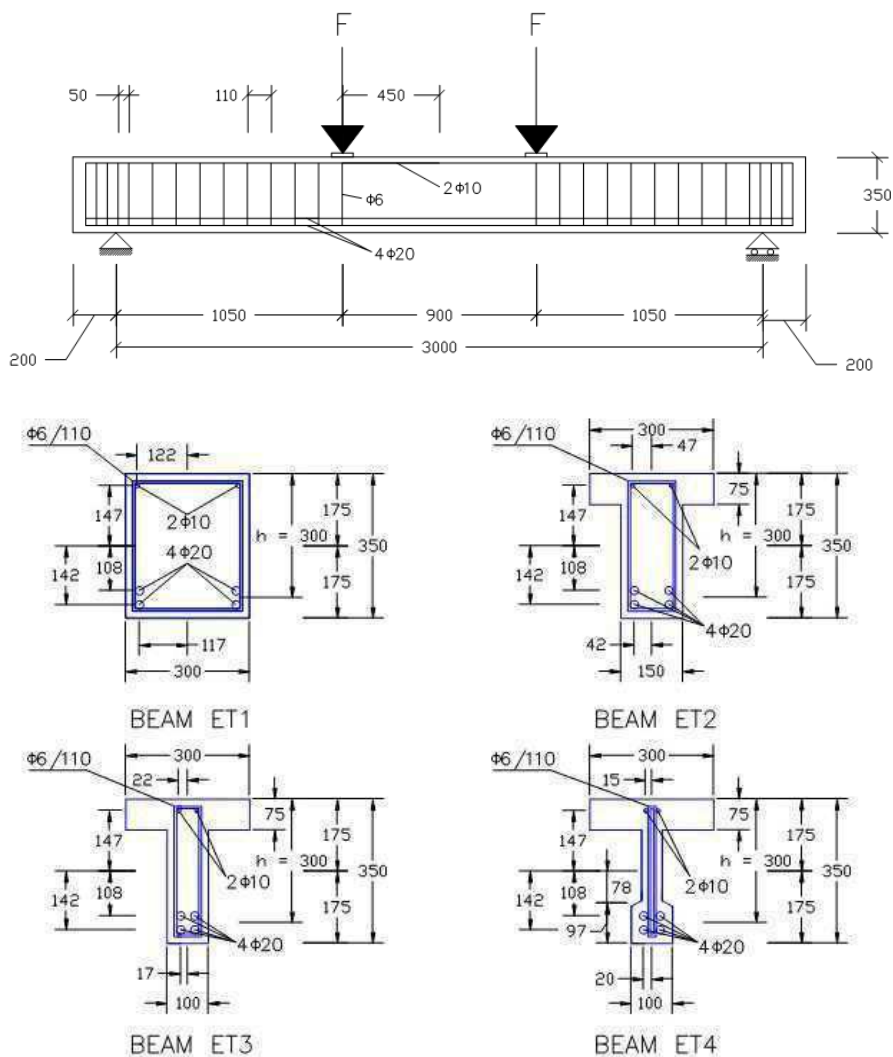


Figure I.24 : caractéristiques géométriques et détails de ferrailage des essais à l'effort tranchant. Poutres Stuttgart [101].

Concrete [N/mm ²]	Longitudinal reinforcement [N/mm ²]	Transversal reinforcement [N/mm ²]
$E_c = 23,800$	$E_s = 210,000$	$E_s = 200,000$
$f_c = 28.5$	$f_y = 420$	$f_y = 320$

Material properties of Stuttgart shear tests

Tableau I.3 : caractéristiques des matériaux (essais Stuttgart) [101].

La figure (I.25) Présente le mode de fissuration des différentes poutres, les bielles présentent des angles variants de 20° à 70° ces fissures sont plus accentuées au voisinage des appuis. Pour la poutre ET1 à section rectangulaire les fissures sont moins importantes par rapport aux poutres ET2, ET3 et ET4, ceci montre que la rigidité tangente du béton contribue à ce phénomène.

D'autres par, ces résultats ont été repris par Steffen Mohr et al à l'université Catalonia (Espagne) [101]. Les auteurs comparent les courbes, efforts déplacements à mi-travée, expérimentales à celles trouvées par des modèles de calcul figure (I.26), ils mettent en évidence d'une part l'existence de l'interaction effort tranchant moment fléchissant et d'autre part l'importance d'une modélisation correcte de ce phénomène.

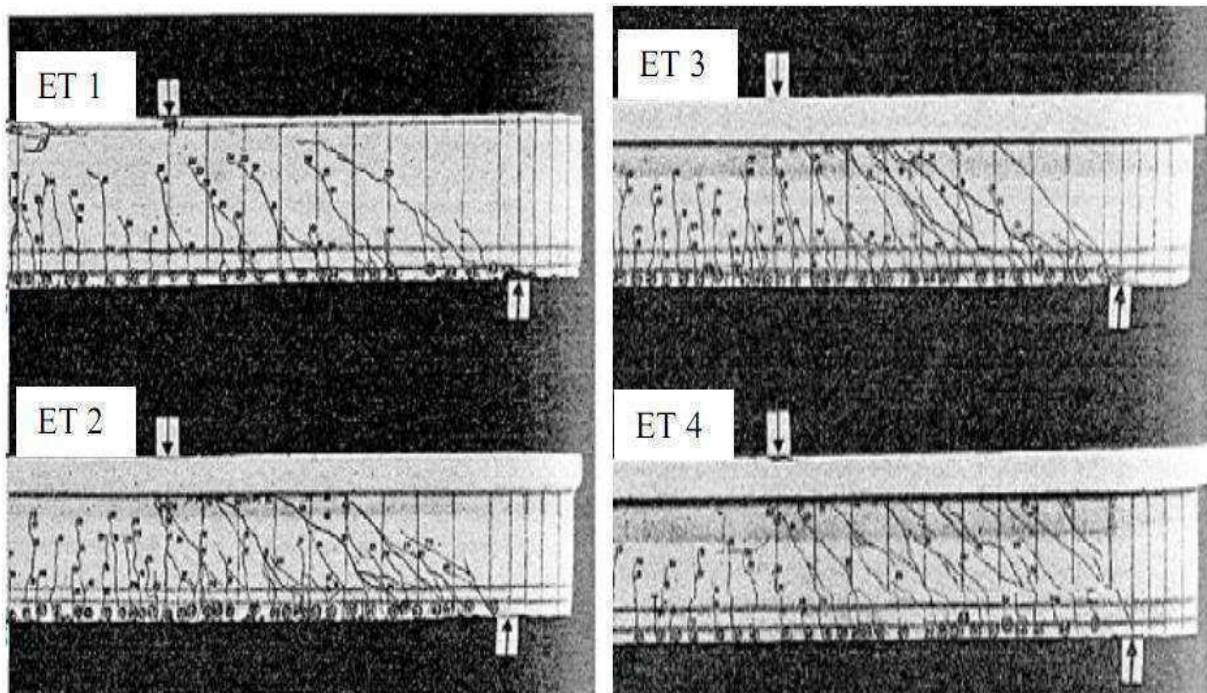


Figure I.25 : Mode de fissuration des différentes poutres [101].

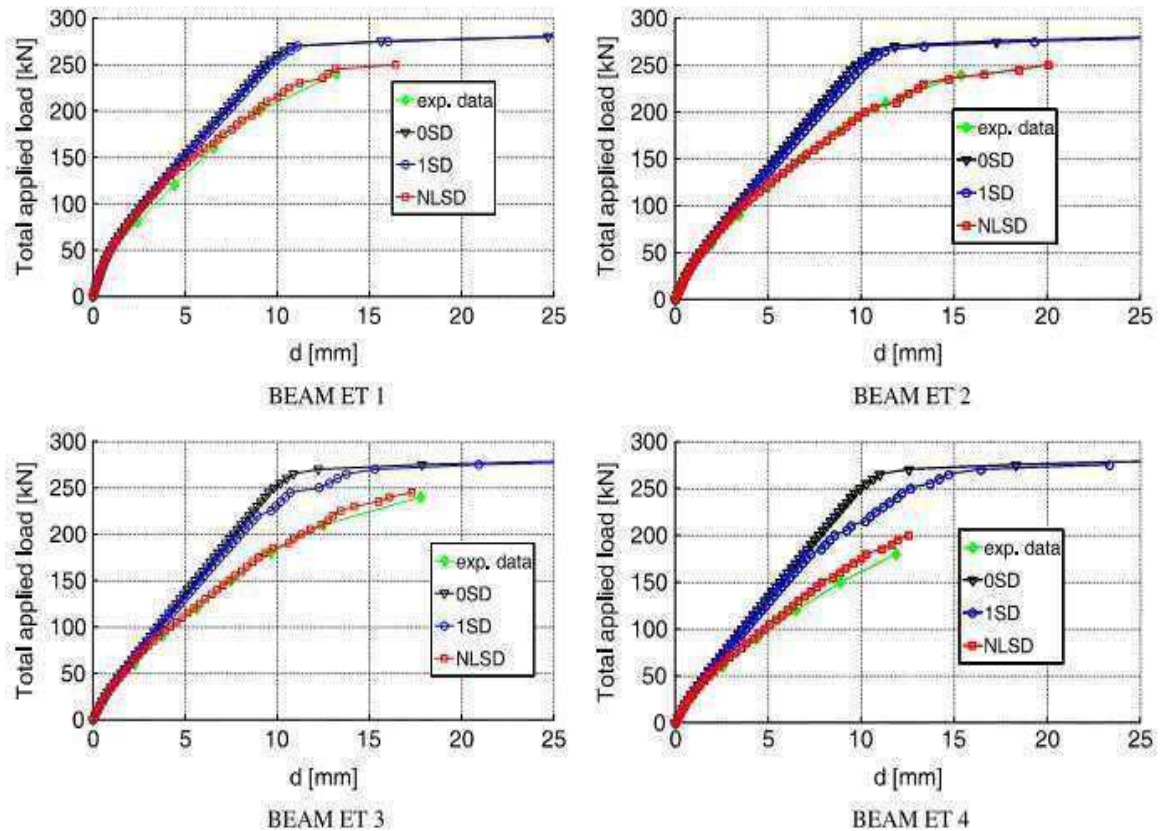


Figure I.26 : Courbes effort déplacement des poutres ET1, ET2, ET3 et ET4 ;
 Comparaison des valeurs expérimentales a la modélisation [101].

6.7 Essais de l'université Southern Denmark

Des essais de cisaillement sur 16 poutres de sections circulaires ont été effectués à l'université du Danemark méridional [132], les poutres ont les mêmes longueurs de 1800 mm, un chargement est appliqué à mi-travée jusqu'à rupture. Les détails des spécimens étudiés sont donnés par les figures (I.27), (I.28). Le pourcentage d'armature ainsi que les espacements des armatures transversales sont les principaux paramètres que les auteurs ont fait varier [131].

Les courbes, efforts flèches pour l'ensemble des poutres, sont présentées à la figure (I.29) Il apparaît que pour les poutres fortement renforcées au cisaillement (SDU10 et SDU11) la charge maximale est approximativement six fois celle correspondant aux poutres sans armatures transversales.

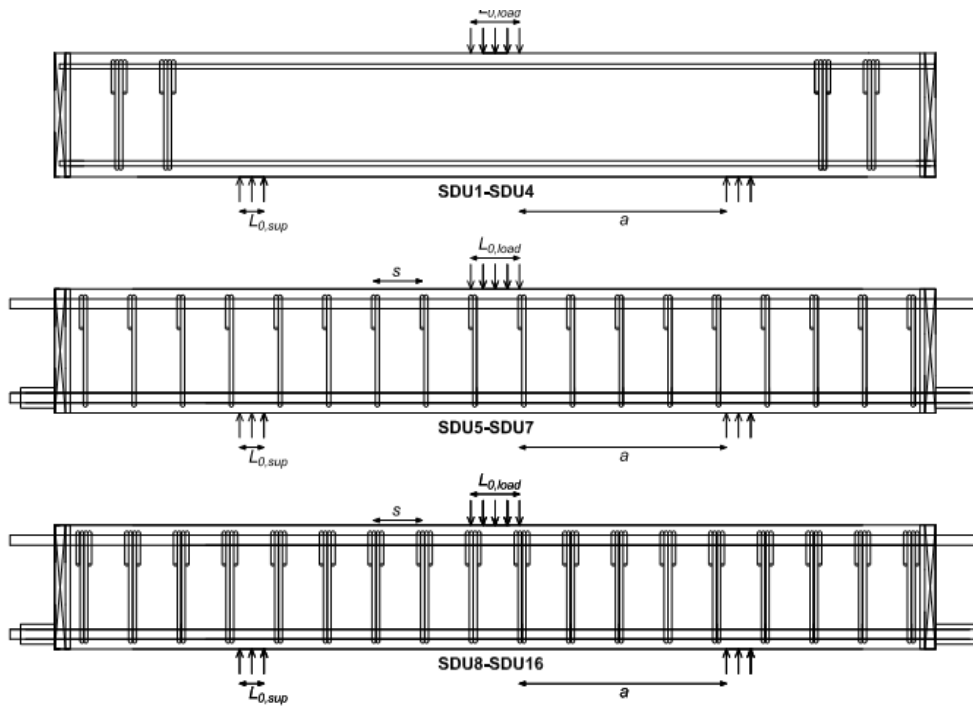


Figure I.27 : Vue longitudinale des spécimens testés par U. G. Jensen (University Southern Denmark) [132].

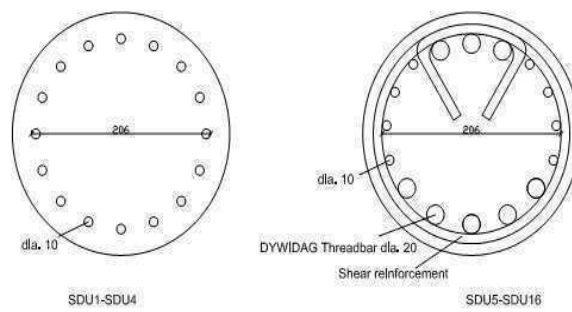


Figure I.28 : Section transversale et détails de ferrailage [132].

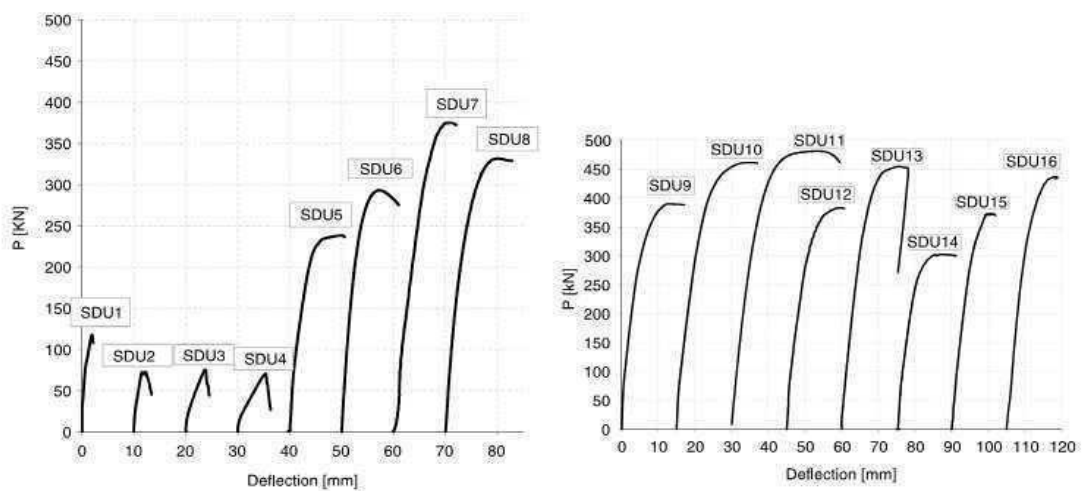


Figure I.29 : Effort tranchant déflexion à mi-travée pour l'ensemble des poutres [132].

6.8 Comportement à l'effort tranchant des poutres renforcées par composites

(Exemple de poutres armées de fibres d'aciers)

Plusieurs programmes expérimentaux ont été menés de par le monde, afin de caractériser le comportement à l'effort tranchant des matériaux composites [47], [48], [56], [75], [83], [84], [92],[93], [95], [96], [123], [140], nous présentons dans ce qui suit le cas des poutres armées de fibres d'aciers.

Il s'agit d'un programme expérimental mené par Ding Y. et al [50], dans l'objectif est de déterminer l'influence des fibres d'acier sur le comportement à l'effort tranchant et sur la charge de rupture des éléments composites. Ces essais comportent des poutres armées que par des fibres d'acier, des poutres armées uniquement par des cadres traditionnels et des poutres où les fibres et les cadres sont associées.

La figure I.30 montre les fibres utilisées, longueur 60 mm, et la résistance ultime à la traction est de 1100 N/mm².

Les armatures transversales sont des cadres ordinaires en $\phi 8$ (8 mm de diamètre) de résistance élastique égale à 300 MPa et la résistance à la rupture est de 500 MPa.

Comme armatures longitudinales des barres de diamètre 16 mm ($\phi 16$) sont utilisées dont la résistance élastique est de 430 MPa et la résistance à la rupture est de 650 MPa.

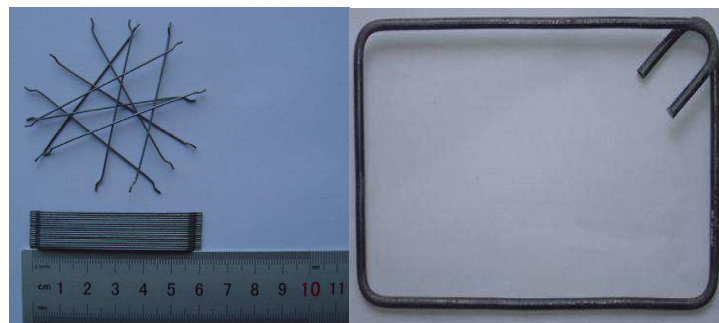


Figure I.30 : Fibres d'acier utilisées et forme de cadres transversaux [50].

Les poutres testées sont de mêmes dimensions (100 mm x 150 mm x 1400 mm) avec trois pourcentages d'armatures transversales (ρ_v) et trois proportions de fibres.

les proportions des fibres utilisées varient de 0 à 60 kg/m³, le pourcentage des armatures transversales varie de 0 à 0.413. Le pourcentage d'armature longitudinale ($\rho_s=3.35\%$).

Les dimensions des spécimens et le détail de ferrailage sont montrées à la figure (I.31), elles sont soumises à deux charges V comme indiqué sur la même figure, jusqu'à rupture totale.

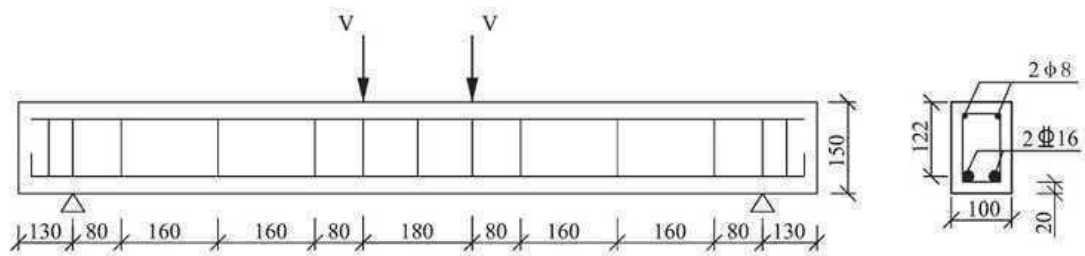


Figure I.31 : Dimensions et détails de ferrailage des poutres [50].

La figure I.32 montre les courbes charges déplacements à mi-travée pour différents pourcentages d'armatures transversales.

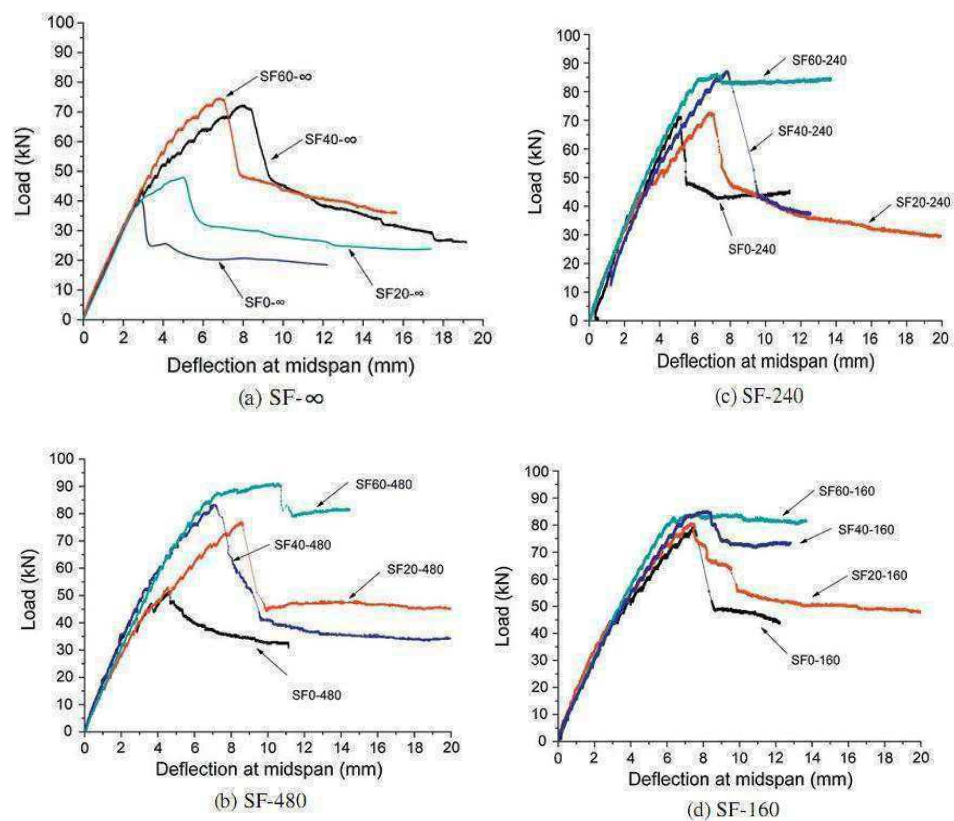


Figure I.32 : Courbes effort flèche des poutres avec et sans armatures transversales [50].

L'espace et la largeur des fissures diminuent, clairement sous la même charge, avec l'augmentation du pourcentage des fibres (figure I.33), le rôle des fibres d'aciers devient effectif après fissuration en cousant les fissures, avec également, une redistribution des contraintes au-dessus de la région de fissuration et continue à résister aux contraintes de traction jusqu'à l'arrachement total [50].

Les fibres en acier peuvent augmenter la résistance au cisaillement et la résistance ultime des poutres, pour un pourcentage de fibres égal à 60kg/m^3 , un pourcentage en volume de 20Kg/m^3 de fibres peut remplacer partiellement les cadres traditionnels et augmenter l'espacement des cadres de 240 mm à 480 mm soit le double.

Les fibres d'aciers et les cadres traditionnels mélangés dans des proportions optimales peuvent former un composite idéal capable de reprendre l'effet de l'effort tranchant, vu leur capacité d'absorption d'énergie des poutres soumises à l'effort tranchant et au moment fléchissant.

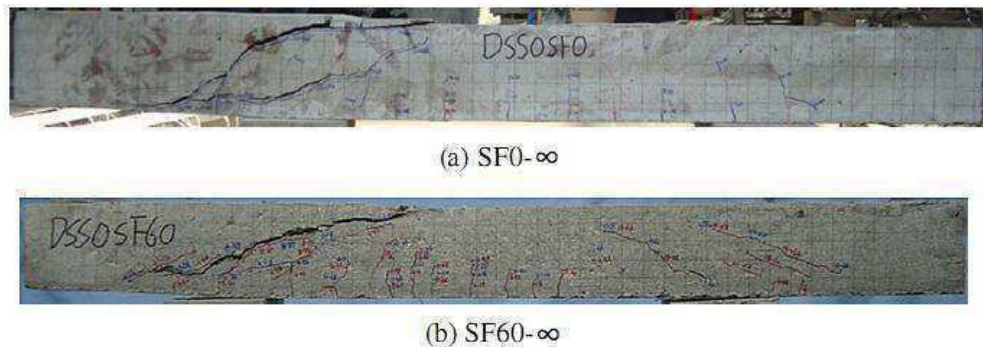


Figure I.33 : Mode de fissuration des poutres avec des fibres d'aciers sans cadres [50].

Concernant la méthode de calcul de ce composite, les auteurs ont proposé une méthode basée sur la théorie du champ de compression modifié pour prédire l'effet de l'effort tranchant (cette méthode sera explicitée plus loin).

7. Méthodes de calcul des éléments soumis à des efforts de cisaillement

7.1 Généralités

Dans la plu part des codes de dimensionnement l'effort tranchant repris par une section est donné par la relation suivante :

$$V = V_c + V_s \quad (I.1)$$

V_c : terme apporté par le béton

V_s : terme apporté par l'acier transversal

La contribution du béton est souvent considérée comme un paramètre fixe, empirique.

La contribution apportée par l'acier est calculée à partir du modèle de treillis à 45° détaillé ci-dessous :

7.1.1 Modèle de treillis (1909)

Les premiers modèles qui traitent de la simulation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé soumise à des efforts de cisaillement datent du début du siècle. Ritter

(1899) et Mörsh (1909) introduisent l'analogie du treillis pour décrire le comportement d'une poutre fissurée (Figure 1.34). Des fissures inclinées par rapport aux barres horizontales d'acier apparaissent et séparent le béton en une série de bielles diagonales («compression concrete struts») parallèles aux fissures. Les bielles de compression sont supposées résister en compression axiale. Avec les barres d'acier («tension chords» and «tension ties») qui ne reprennent que de la tension axiale, elles forment un treillis capable de résister à l'effort tranchant appliqué [85]. .

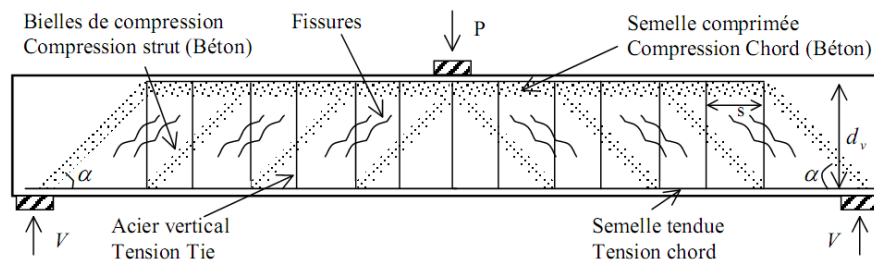


Figure I.34 : L'analogie du treillis [85].

L'examen du corps libre (Figure 1.35) nous montre que l'effort tranchant V dans la section est équilibré par la composante verticale de l'effort de compression D dans les bielles de béton. Cette composante se traduit en une traction exercée sur les armatures transversales. La composante horizontale de l'effort D est contrebalancée par des efforts de traction N dans les armatures horizontales. Pour des raisons de simplicité, l'angle de l'inclinaison des bielles est supposé égal à 45° , d'où le nom de la méthode «modèle des bielles à 45° ». Le modèle considère que la résistance au cisaillement est atteinte quand le ferrailage transversal est plastifié. Le pourcentage de ferrailage transversal nécessaire pour le dimensionnement de la poutre est ensuite calculé à partir de l'équation (1.4), connue aussi sous le nom de «truss equation for shear».

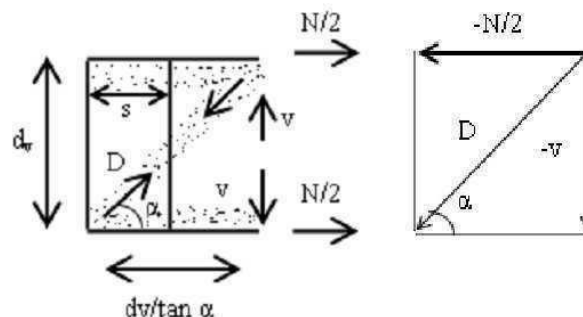


Figure I.35 : Equations du modèle des bielles à 45° [96].

$$N = \frac{2V}{\tan \alpha} = 2V \quad (I.2)$$

$$f_d = \frac{D}{b_v d_v \cos \alpha} = \frac{V}{b_v d_v \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2V}{b_v d_v} \quad (I.3)$$

$$V = A_{vs} f_{ty} \frac{d_v / \tan \alpha}{s} = A_{vs} f_{ty} \frac{d_v}{s} \quad (I.4)$$

Avec:

P : effort vertical exercé sur la poutre ;

s : espacement entre les armatures transversales ;

b_v: largeur effective de la poutre ;

d_v: distance entre les aciers longitudinaux ;

A_{vs}: section d'armatures transversale pour une distance s ;

V : effort de cisaillement dans la section ;

N / 2: effort de traction exercé sur les armatures longitudinales

D : effort de compression exercé dans les bielles de béton ;

f_d : contrainte de compression dans les bielles de béton ;

f_{ty}: résistance en traction des armatures transversales ;

α : angle entre les bielles de béton et les armatures horizontales.

Le modèle des bielles à 45° laisse sous-entendre qu'une quantité de ferrailage horizontal en plus du ferrailage vertical est nécessaire pour la résistance au cisaillement et la contribution du béton en traction est négligée.

7.1.2 Généralisation de l'inclinaison des bielles.

Des expériences ont montré que l'inclinaison des bielles de compression n'est pas en général égale à 45° et que ce modèle à 45° surestime la résistance à l'effort tranchant pouvant atteindre dans certains cas les 50% (cas de murs à faible élancement Hsu 1988).

Les chercheurs se sont vite aperçus que le problème du cisaillement est très compliqué et que des paramètres supplémentaires doivent être pris en considération (qualité et résistance de béton, longueur de la poutre par rapport à sa hauteur etc.). Depuis les années 60 plusieurs chercheurs ont travaillé sur le problème afin d'expliquer la différence entre le modèle des bielles à 45° et les résultats des essais, nous pouvons citer H.A.Wagner (1929) [85], Collins (1978) [43], Vecchio et Collins (1986) [135], Mo et Rothert 1997 [85], Kachi et al (2006) [80-82].

7.2 Théorie du champ de compression et détermination de l'angle des bielles de compression (TCC) (1978)

Collins (1978) [43] suppose qu'après fissuration le béton n'a plus de résistance en traction et le cisaillement est transmis par un champ de compression diagonale. Il arrive ainsi à calculer l'angle de la compression diagonale pour tout le domaine de chargement à partir des déformations des armatures et du béton équation (I.5). La figure (I.36) illustre les efforts causés par un effort tranchant selon le modèle du treillis à angle variable. Sur cette figure, D représente la force résultant de la contrainte principale de compression f_d et est donnée par la relation (I.7).

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_d}{\varepsilon_t + \varepsilon_d} \quad (\text{I.5})$$

Avec:

ε_1 : déformations des armatures horizontales ;

ε_t : déformations des armatures transversales ;

ε_d : déformations des bielles de béton.

La TCC néglige l'existence des contraintes de traction dans le béton fissuré. Si l'élément étudié n'a pas d'armatures verticales, elle ne prévoit aucune résistance au cisaillement.

Afin de remédier à ce problème, Vecchio et Collins (1986) ont proposé une modification de la TCC nommée Théorie du champ de compression modifiée (TCCM) [136].

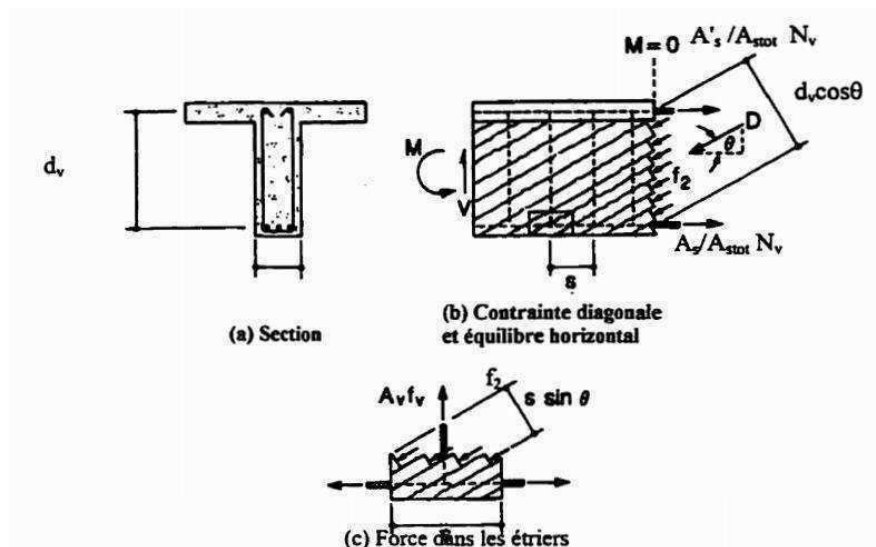


Figure I.36 : Modèle du treillis à angle variable.

7.3 Modèle de Vecchio et Collins ou théorie du champ de compression modifiée (TCCM) (1986).

7.3.1 Principe de la méthode TCCM

La première amélioration est la prise en compte des contraintes de traction qui existent dans le béton après sa fissuration. Les contraintes principales de traction σ_1 , sont perpendiculaires aux fissures. Elles sont égales à zéro au droit d'une fissure et atteignent leur valeur maximale entre deux fissures. Dans les équations d'équilibre, une valeur moyenne de σ_1 est utilisée. la relation entre la contrainte principale de traction et la déformation principale en traction proposée par Vecchio et Collins (1986) [136] est.

$$\sigma_1 = E_c \varepsilon_1 \quad \text{pour } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_f \quad (I.6)$$

$$\sigma_1 = \frac{f_t}{1 + \sqrt{200 \varepsilon_1}} \quad \text{pour } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_f \quad (I.7)$$

Avec

E_c le module de déformation du béton à l'origine

f_t la résistance du béton a la traction

ε_1 déformation du béton correspondant à f_t

À partir de la valeur de f_t il est possible d'évaluer la déformation correspondante dans le béton.

$$\varepsilon_1 = 0.002 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{f_t}{f_c}} \right) \quad (I.8)$$

D'après le cercle de Mohr, la contrainte principale de compression se calcule de cette façon:

$$\sigma_2 = \frac{V}{b_v d_v \sin \theta \cos \theta} - \sigma_1 \quad (I.9)$$

L'effort tranchant à une étape quelconque du chargement se calcule en faisant l'équilibre des efforts verticaux sur la figure (I.37) et en remplaçant σ_2 par son expression donnée à l'équation (I-9). Ainsi :

$$A_v f_v = (\sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta) b_v s \quad (I.10)$$

Et après introduction de l'équation (I-9)

$$v = \frac{\sigma_1 b_v d_v}{\tan \theta} + \frac{A_v f_v d_v}{s \tan \theta} \quad (\text{I.11})$$

Le premier terme de cette équation correspond à la contribution du béton tandis que le second représente la contribution des étriers. Si l'effort axial appliqué sur la membrure est nul, la traction dans l'armature longitudinale devra équilibrer la projection horizontale de la force de compression dans les bielles de béton, N_v . Ainsi,

$$N = A_{sx} f_s - \frac{V}{\tan \theta} + \sigma_1 b_v d_v = 0 \quad (\text{I.12})$$

Donc :

$$N_v = -\frac{V}{\tan \theta} + \sigma_1 b_v d_v \quad (\text{I.13})$$

Dans cette méthode Vecchio et Collins considèrent les variations locales de contraintes dans le béton et l'armature à l'interface des fissures c'est la deuxième amélioration que les auteurs ont apportée à la TCC. En effet, entre les fissures, la traction est reprise par les étriers et la contrainte σ_1 dans le béton. Cependant, à la surface des fissures, la contrainte de traction dans le béton devient nulle et cause ainsi une augmentation locale de la contrainte dans l'armature transversale. Cette redistribution des contraintes du béton vers l'acier est possible tant que les étriers n'ont pas atteint leur plastification. À partir du moment où l'armature atteint localement sa limite élastique, des contraintes de cisaillement, τ_c , se développent à la surface des fissures et permettent le transfert de la traction à travers les fissures (shear fiction concept). Ce concept est illustré à la figure (I.348), la valeur de τ_c se calcule comme suit [100].

$$\tau_c = \frac{0,18\sqrt{f_c}}{0,3 + \frac{24w}{a + 16}} \text{ MPa} \quad (\text{I.14})$$

a : taille maximale des agrégats en mm

w : largeur de la fissure en mm

Le calcul de la largeur de la fissure se fait au moyen de l'équation ci dessous.

$$w = \varepsilon_1 S_{m0} \quad (\text{I.15})$$

Dans cette équation, $s_{m\theta}$ représente l'espacement entre les fissures diagonales et se calcule de la façon suivante :

$$s_{m\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{s_{mx}} + \frac{\cos\theta}{s_{mv}}} \tag{1.16}$$

s_{mx} : espacement des fissures si la poutre était soumise à une tension axiale longitudinale

s_{mv} : espacement des fissures si la poutre était soumise à un effort de traction transversal (voir la figure I.34).

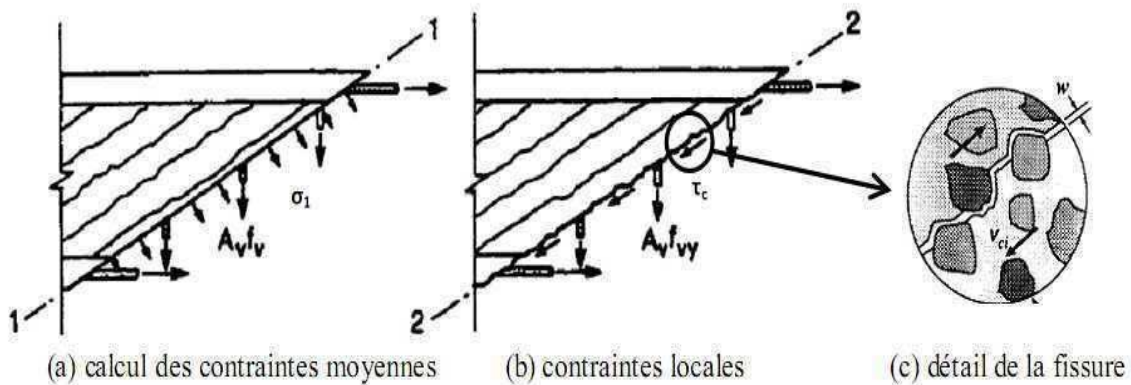


Figure I.37 : Transfert de force à travers les fissures.

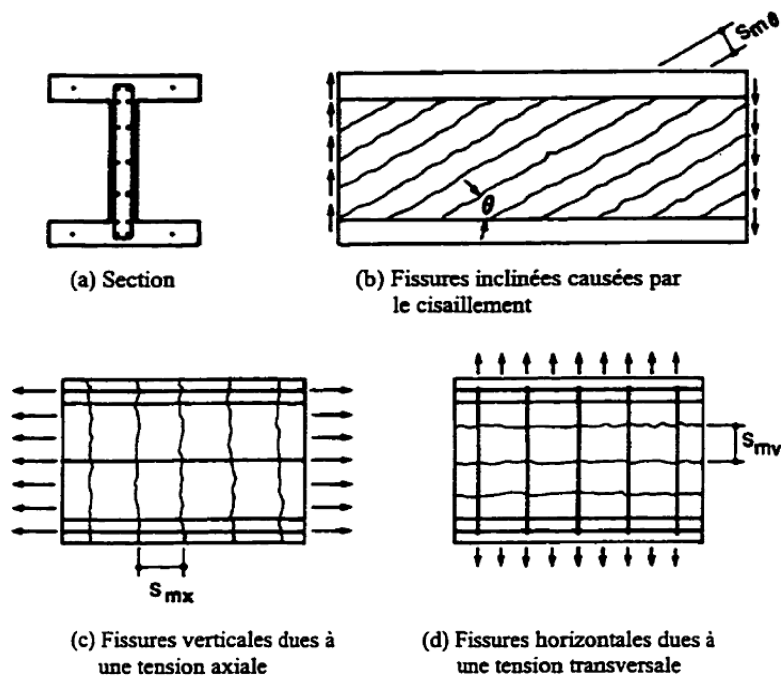


Figure I.38 : Espacement des fissures inclinées [96].

D'après la statique, les deux groupes de contraintes présentés à la figure (I.38) (b et c) doivent être équivalents. Pour ce faire, ils doivent produire la même force verticale

résultante. À partir d'une telle égalité, la valeur maximale que peut atteindre σ_1 est donnée par l'équation suivante :

$$A_v f_v \left(\frac{d_v}{s \tan \theta} \right) + \sigma_1 \frac{b_v d_v}{\sin \theta} \cos \theta = A_v f_{vy} \left(\frac{d_v}{s \tan \theta} \right) + \tau_v b_v d_v \quad (I.17)$$

Un dernier facteur peut aussi limiter la valeur de la traction dans le béton qui peut être transmis à travers une fissure. Il s'agit de la plastification locale de l'armature longitudinale. Toutefois, si l'équivalence statique des deux groupes de contrainte de la figure (I.34) est respectée horizontalement, l'équation (I-18) sera satisfaite. Dans ce cas, la plastification locale de l'armature longitudinale n'aura pas lieu et la valeur de σ_1 ne sera pas limitée par ce facteur.

$$A_{sx} f_y \geq A_{sx} f_s + \sigma_1 b_v d_v + \left[\sigma_1 - \frac{A_v}{s b_v} (f_{vy} - f_v) \right] b_v d_v \cot^2 \theta \quad (I.18)$$

Une section en béton armé peut atteindre l'un ou l'autre des états Limites ultimes suivants : soit la plastification des étriers ou l'éclatement en compression des bielles de béton. Dans le premier cas, la contrainte dans les étriers, f_v , est égale à f_{vy} , et la rupture est ductile.

Dans le second cas, la contrainte de compression dans les bielles, σ_2 , a atteint σ_{2max} et le béton dans les bielles éclate sans avertissement. La rupture est alors qualifiée de fragile.

7.3.2 Exemple de calcul de la résistance à l'effort tranchant d'une poutre

Un exemple de calcul de la résistance à l'effort tranchant en utilisant la méthode de Vecchio et Collins développée dans la section (7.3.1) a été étudié en [96]. Il s'agit d'une section en T d'une poutre dont les détails sont donnés par la figure (I.39)

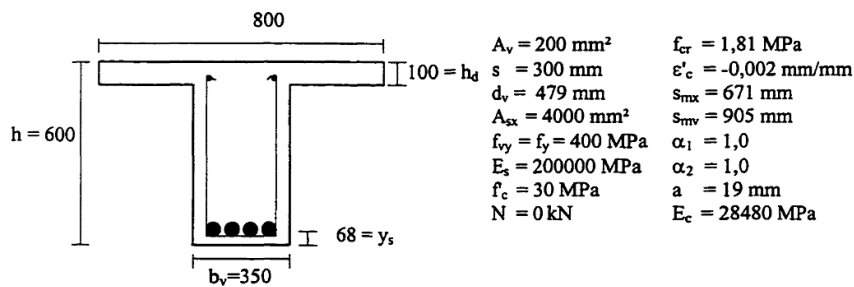


Figure I.39 : Section de poutre en T et détails des données pertinents [96].

Le résultat obtenu est présenté à la figure (I.40), nous remarquons trois phases de comportement, première phase croissance rapide de l'effort tranchant avant la fissuration de la section (la traction est reprise par le béton, en plus de la contribution des aciers transversaux). La deuxième phase le béton est fissuré mais la section continue de résister (contribution des bielles comprimées et des étriers), la troisième phase correspond à la plastification des aciers.

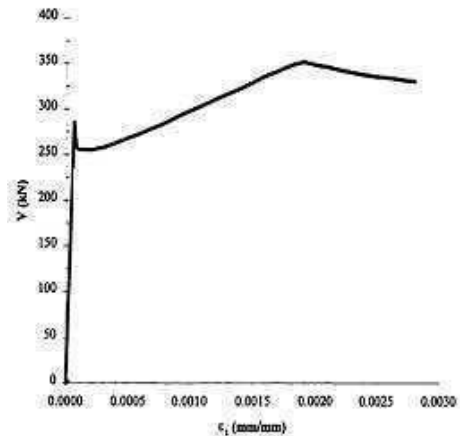


Figure I.40 : comportement de la section à l'effort tranchant [96].

7.4 Modèle de Kachi, Bouafia, Fouré et Muller (2006)

7.4.1 Hypothèses fondamentales

La poutre est discrétisée en tronçons supposés suffisamment grands par rapport aux espacements des fissures. Les déformations dans une section droite sont alors exprimées par les valeurs moyennes représentatives du champ des déformations de l'élément de poutre. L'étude de l'équilibre d'un tronçon passe par l'étude de l'équilibre de plusieurs sections transversales. Chaque section transversale est discrétisée en une succession de couches de béton et d'éléments longitudinaux d'acier voir figure (I.41). Les armatures transversales droites sont supposées constantes sur toute la hauteur de la section et réparties sur toute la longueur du tronçon ; leur aire est exprimée alors en pourcentage de l'aire du béton. Chaque couche de béton et chaque élément longitudinal d'acier sont analysés séparément mais la condition d'équilibre de la section est satisfaite globalement [80], [81].

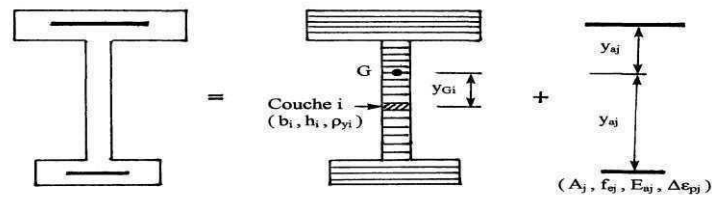


Figure I.41 : Section de poutre discrétisée en couches [80].

7.4.2 Equilibre local des couches

Dans les directions x et y , les contraintes σ_x et σ_y résultent de la somme des termes dus aux armatures et au béton, compte tenu des aires respectives :

$$\sigma_x = \rho_x \sigma_{ax} + \sigma_{bx} \tag{I.19}$$

$$\sigma_y = \rho_y \sigma_{ay} + \sigma_{by} = 0 \tag{I.20}$$

ρ_{xi} : pourcentages de ferrailage longitudinal

ρ_{yi} : pourcentages de ferrailage transversal,

7.4.3 Equilibre global des sections

L'équilibre doit être assuré entre les sollicitations extérieures N, M, V et les résultantes des contraintes internes $N_{int}, M_{int}, V_{int}$. Pour la flexion composée, on fait la somme des contributions des contraintes longitudinales dans les armatures et dans le béton (ce qui est la traduction de l'équation (I.19)) :

$$N_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} \tag{I.21}$$

$$M_{int} = \sum_i A_{xi} \sigma_{axi} y_{ai} + \sum_i b_i h_i \sigma_{bxi} y_i \tag{I.22}$$

Pour l'effort tranchant, seules les contraintes de cisaillement dans le béton interviennent :

$$V_{int} = \sum_i b_i h_i \tau_{bi} \tag{I.23}$$

7.4.4 Calcul de la distribution des contraintes tangentielles $\tau(y)$

Pour calculer la distribution des contraintes tangentielles sur la hauteur d'une section, l'auteur associe à chaque section de calcul une section voisine distante de d . Les contraintes tangentielles sont alors déduites de l'équilibre des couches comprises entre la section de calcul sous l'état de sollicitation (N, M, V) et la section voisine soumise aux efforts (N_1, M_1, V_1) tels que :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N \\
 M_1 &= M - V.d \\
 V_1 &= V
 \end{aligned}
 \tag{I.24}$$

La distance entre les deux sections est généralement prise égale à $h/6$ (où h est la hauteur totale de la poutre) (Vecchio et Collins, 1988). Une étude paramétrique permet de constater que la différence entre la valeur de l'effort tranchant extérieur et la résultante des $\tau(y)$ calculée avec cette distance reste inférieure à 1 %, ce qui est négligeable.

Les deux sections sont analysées de façon à satisfaire chacune aux deux équations d'équilibre. En appliquant la méthode classique de la RDM, l'auteur étudie l'équilibre de l'ensemble des forces agissant sur une couche d'ordre k présenté à la figure (I.42) :

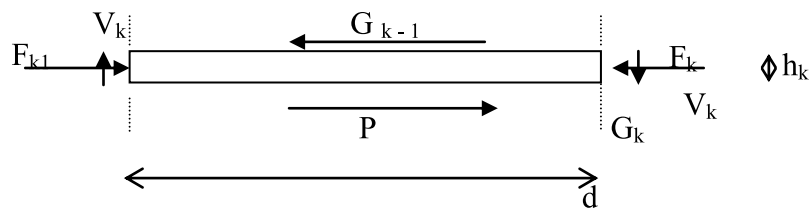


Figure I.42 : Forces agissant sur une couche de béton entre deux sections.

Où F_k et F_{k1} désignent les efforts normaux agissant sur la couche k dans les deux sections, G_{k-1} et G_k sont les efforts de glissement résultants sur les faces inférieure et supérieure de la couche k et V_k est la part de l'effort tranchant équilibrée par la couche k .

Ces efforts F_k sont déterminés à partir des contraintes normales longitudinales moyennes dans le béton et dans les armatures longitudinales s'il en existe dans la couche. Dans une couche quelconque i , on a :

$$F_i = \sigma_{bxi} b_i h_i + \sigma_{axi} A_{axi}
 \tag{I.25}$$

Les efforts horizontaux agissant sur les faces supérieure et inférieure de la couche de béton d'ordre k sont alors calculés comme suit :

$$G_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} (F_{i1} - F_i)
 \tag{I.26}$$

$$G_k = G_{k-1} + F_{k1} - F_k
 \tag{I.27}$$

L'équilibre du tronçon permet de calculer la valeur de V_k , en écrivant que le moment des forces est nul au point P :

$$V_k = \frac{(G_{k-1} + G_k) h_k}{2d} \quad (I.28)$$

La valeur moyenne de la contrainte tangentielle de la couche k est alors donnée par :

$$\tau_k = \frac{V_k}{b_k h_k} = \frac{(G_{k-1} + G_k)}{2d b_k} \quad (I.29)$$

7.4.5 Calcul de la distorsion moyenne

La distorsion varie d'une couche de béton à une autre. L'auteur définit une distorsion moyenne de la section notée γ_{moy} . Son calcul est effectué en remarquant, d'après le théorème des travaux virtuels, que l'accroissement ΔW_e du travail de l'effort tranchant extérieur est égal à l'accroissement ΔW_i du travail des contraintes tangentielles τ_i . Ces derniers peuvent s'écrire :

$$\Delta W_e = \Delta V \cdot \Delta \gamma_{moy} \quad (I.30)$$

$$\Delta W_i = b_i \cdot h_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \Delta \gamma_i \quad (I.31)$$

m étant le nombre des couches de béton :

$$\Delta W_e = \sum_1^m \Delta W_i \quad (I.32)$$

$$D'où : \Delta \gamma_{moy} = \sum_1^m \frac{\Delta \tau_i b_i h_i \Delta \gamma_i}{\Delta V} \quad (I.33)$$

7.4.6 Résolution du problème

Pour la résolution du problème l'auteur explicite certaines grandeurs à partir des équations générales du milieu continu équivalent.

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x}{\sin^2 \theta} - \frac{\varepsilon_2}{\text{tg}^2 \theta} \quad (I.34)$$

Les relations générales entre les déformations moyennes sont selon l'hypothèse de la coïncidence des directions principales des contraintes du béton avec les directions principales des déformations moyennes :

$$\sigma_{b_x} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} - \sigma_{b_y} \quad (I.35)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sigma_{b2} - \sigma_{b_x}}{\sigma_{b2} - \sigma_{b_y}} \right)^{1/2} \quad (I.36)$$

$$\sigma_{b2} = \sigma_{by} \frac{\tau}{\text{tg}\theta} \quad (\text{I.37})$$

7.4.7 Algorithme et organigramme de calcul

L'étude de l'équilibre, d'une couche de béton armé où ε_x et τ sont connus, fait appel à un système de 10 équations à 10 inconnues : ε_y , ε_1 , ε_2 , γ , θ , σ_{ay} , σ_{bx} , σ_{by} , σ_{b1} , σ_{b2} . Pour le résoudre, l'auteur fait appel à une méthode itérative. Pour une distribution donnée des déformations longitudinales, on suppose connue la déformation principale ε_2 et on cherche la valeur de l'angle θ qui permet de satisfaire les conditions de compatibilité et d'équilibre de la couche.

Les contraintes tangentielles $\tau(y)$ sont calculées par l'équilibre de deux sections voisines (équation (I.29)). La déformation longitudinale ε_x est tirée de Navier, dans laquelle δu et δw résultent de l'équilibre global en flexion composée sous N , M selon (I.21) et (I.22), avec un couplage à l'effort tranchant V . Enfin, la distorsion moyenne de la section est calculée par (I.33). La première approximation de la distribution des $\tau(y)$ est obtenue à partir de l'équilibre des deux sections voisines en flexion composée sans interaction de l'effort tranchant. Après le calcul de l'équilibre des couches, on corrige cette distribution par itérations, le paramètre de contrôle étant la valeur maximale de τ .

La résolution complète de l'équilibre de la section est décrite par les deux organigrammes ci-joints : l'organigramme général est donné à la figure (I.43) et le détail de l'étude d'une couche à la figure (I.44).

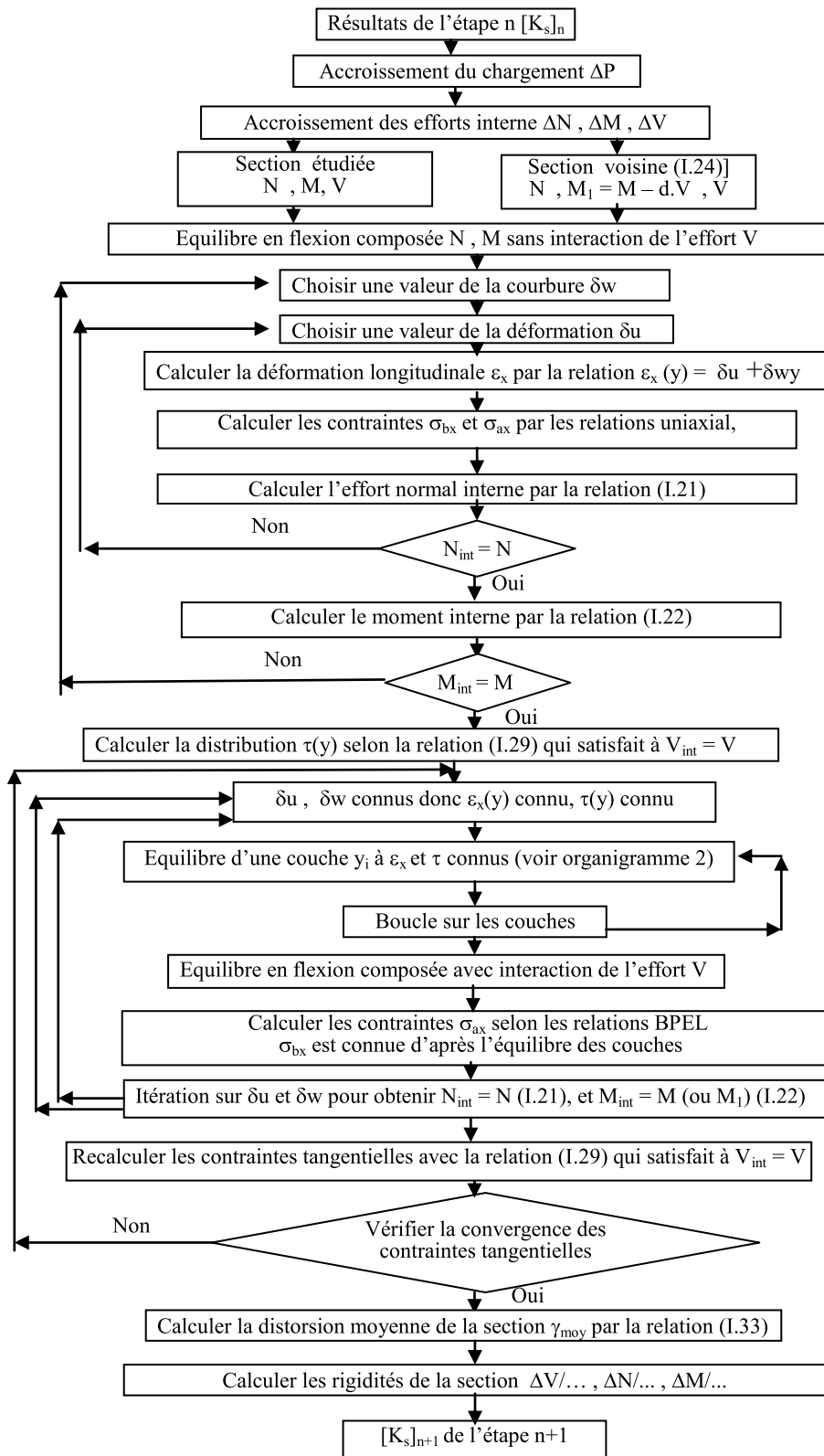


Figure I.43 : Organigramme général de l'étude d'une section [80].

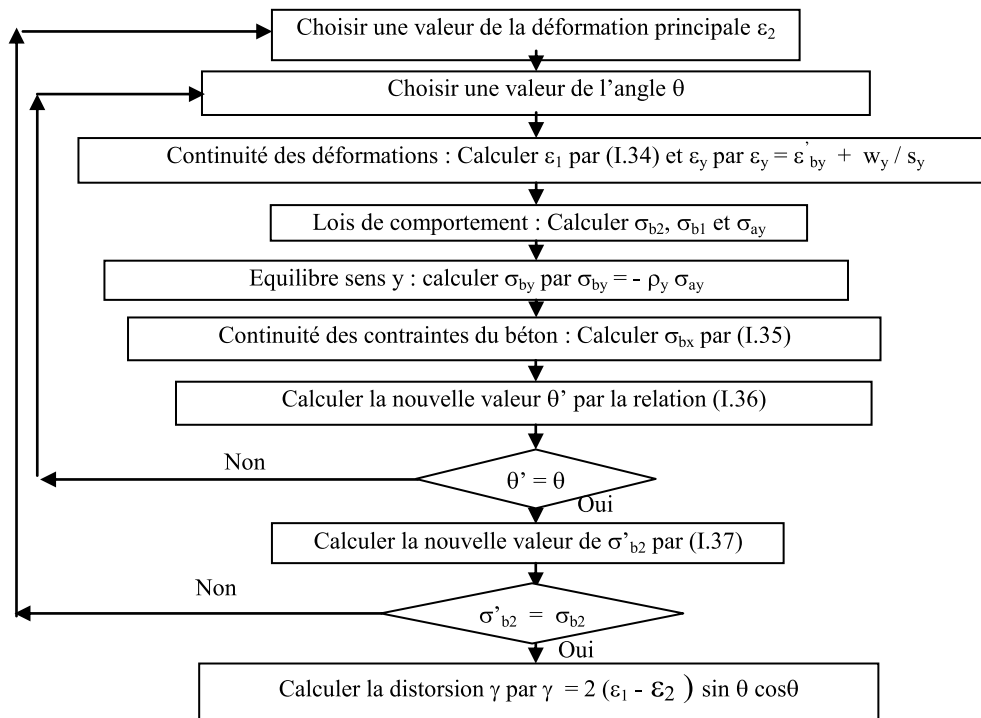


Figure I.44 : Equilibre d'une couche à ϵ_x et τ connus [80].

Dans son état actuel, le logiciel n'utilise pas les principes de calcul précédents dans toute leur généralité. Il n'effectue pas la vérification de convergence des contraintes tangentielles, c'est-à-dire qu'il n'effectue pas de correction des $\tau(y)$ calculer initialement. L'équilibre de flexion composée est calculé par la méthode classique des sections planes en sollicitations unies axiales, c'est-à-dire la première partie de l'organigramme de la figure I.36. Le couplage entre les contraintes normales σ_x et les cisaillements τ n'intervient donc que dans le calcul de l'équilibre des couches, donc dans γ_{moy} (figure I.45).

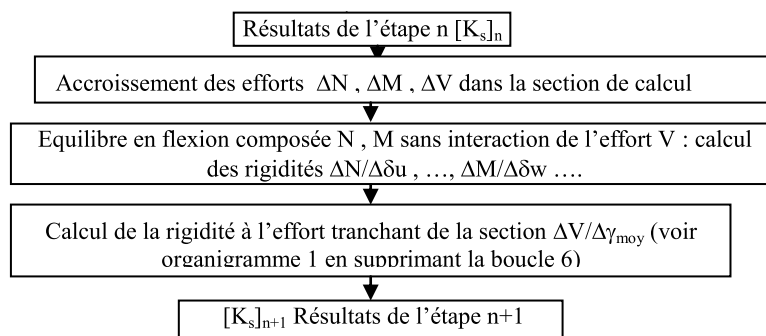


Figure I.45 : Organigramme de la méthode simplifiée de calcul d'une section [80].

Les auteurs ont calculé plusieurs exemples de structures en béton armé et en béton précontraint avec cette méthode [80], les résultats obtenus avec ce modèle comparativement

aux résultats expérimentaux sont satisfaisants. Par ailleurs, les auteurs considèrent un état plan de fissures, alors qu'en réalité elles se propagent d'une manière spatiale.

7.5 Modèle de Khaldoun N.Rahal (2010)

Dans ces travaux [86], l'auteur présente une équation empirique simple pour le calcul du module de cisaillement G dans la phase post fissuration de béton. Ce module est pris avec un coefficient et fonction de ferrailage longitudinal et transversal de l'élément.

En dépit de son caractère empirique et de sa simplicité, l'équation est capable d'étudier des éléments peu ou trop ferrillés dans les deux directions. Par conséquent, il s'applique à la fois pour le béton normal et le béton à haute résistance.

7.5.1 Principe de la méthode

La figure (I.46) montre le comportement à l'effort tranchant des éléments en béton armé, avant fissuration du béton, la courbe contrainte déformation de cisaillement est linéaire le module de cisaillement G est fonction du module de déformation longitudinale du béton E. Dans la phase post fissuration, il ya une diminution importante de la pente (module tangent), l'auteur propose une formule simple pour calculer ce module G_{cr} .

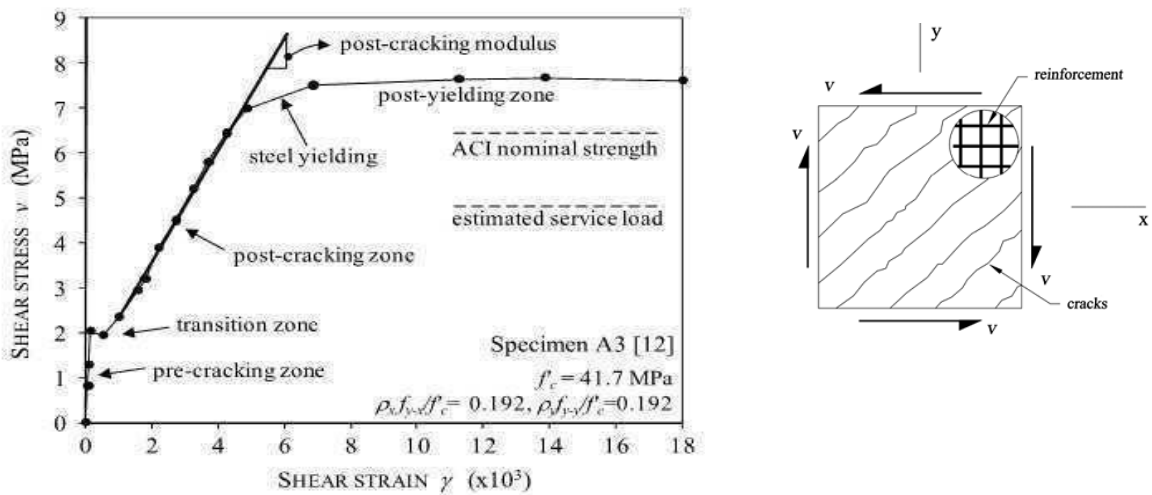


Figure I.46 : courbe contrainte deformation de cisaillement ; expérimentalement observée sur des éléments en béton armé [86].

Les principaux paramètres qui influent sur le comportement à l'effort tranchant sont :

$$\omega_x = \frac{\rho_x f_{y-x}}{f'_c} \leq k \tag{I.38}$$

$$\omega_y = \frac{\rho_y f_{y-y}}{f'_c} \leq k \tag{I.39}$$

Avec :

k coefficient limite de renforcement donné par : $k = 1/3 - f'_c / 900$

f'_c : La résistance du béton a la compression en MPa

ρ_x : Pourcentage d'armature transversale

ρ_y : Pourcentage d'armature longitudinale

L'auteur propose la formule (I.40) pour calculer le module de déformation transversale dans le domaine post fissuration du béton [86].

$$G_{cr} = f'_c 135 \sqrt{\omega_x \omega_y} \quad (I.40)$$

7.5.2 Validation de ce modèle

Des poutres en béton armé, testées par Rahal et Collins [87], soumises à la l'effet combiné de l'effort tranchant et de la torsion ont été calculées avec ce modèle. Dans la région testée, la poutre est ferrailée transversalement par doubles étriers de contrainte limite élastique $f_{y-y} = 466$ MPa et 100 mm^2 de section, longitudinalement par 10 barres de limite élastique $f_{y-x} = 480$ MPa et 500 mm^2 de section figure (I.47).

Les déformations de l'effort tranchant mesurées dans la région testée sont du même ordre que celles mesurées expérimentalement, le résultat de la confrontation est montré à la figure(I.47). L'effort tranchant correspondant à la rupture est de 664 Kn par contre celui observé expérimentalement est de 712 Kn, le rapport des deux valeurs est de 1.07 ce qui montre une bonne concordance entre le calcul et l'expérience en particulier au niveau prévu de charge de service [86].

La figure (I.48) montre d'autres résultats de confrontation, le comportement dans la phase post fissuration est en quelque sorte semblable à la figure(I.47).

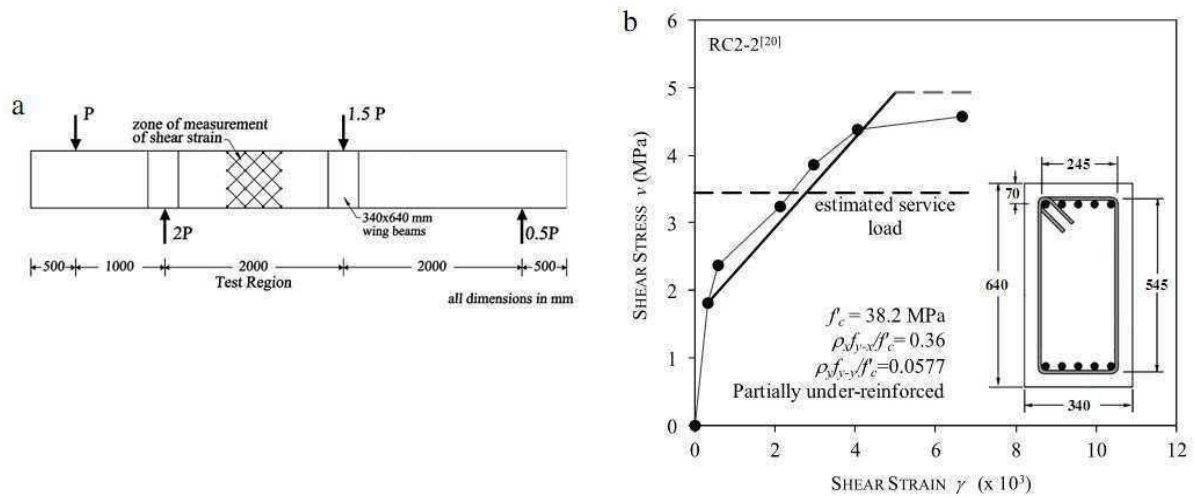


Figure I.47: détails de la poutre calculée et confrontation [86].

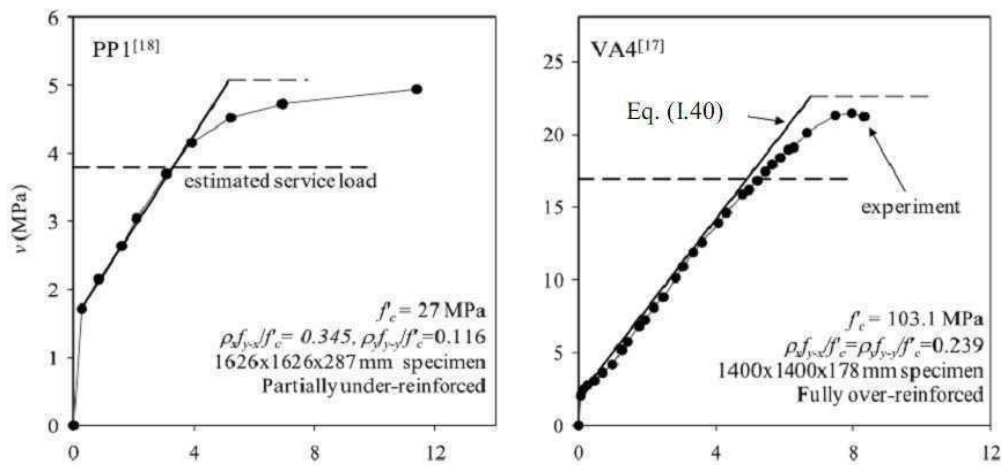


Figure I.48 : observation expérimentale et calcul du module de déformation transversale [86].

Ce modèle estime d'une façon correcte la phase post fissuration du béton, par contre les observations expérimentales laissent apparaître après plastification de l'acier et avant rupture totale un comportement différent ou la pente des courbes efforts déformation diminue sensiblement, que ce modèle ignore complètement.

7.6 Modèles utilisant la rigidité effective du cisaillement d'un élément fissuré

Une réduction importante de la rigidité de cisaillement peut se produire en raison de la fissuration, la déformation de cisaillement peut être grande et donc peut être de grande importance dans la conception des éléments en béton armé.

Le module effectif de cisaillement du béton est donné par plusieurs modèles dans la littérature ([37], [75], [76], [150],...).

Cedolin et dei Poli [34] ont montré que la rigidité de cisaillement après fissuration du béton diminue linéairement en fonction de la déformation de traction du béton (ε_1), ils proposent pour calculer le module de cisaillement G après fissuration des poutres soumises à l'effort tranchant l'équation suivante :

$$\bar{G}_c = 0.24G_c(1 - 250\varepsilon_1) \quad \text{Pour } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{cr} \quad (I.41)$$

$$\bar{G}_c = G_c \quad \text{Pour } \varepsilon_1 < \varepsilon_{cr} \quad (I.42)$$

Où :

G_c : Module de déformation transversale élastique

ε_1 est la déformation de traction normale principale à la fissure

ε_{cr} est la déformation de rupture à la traction.

AL Mahaidi [4] recommande l'expression de l'équation (I.43) pour calculer la rigidité de cisaillement \bar{G}_c qui peut être utilisée dans la relation constitutive du béton fissuré.

$$\bar{G}_c = \frac{0.4G_c}{\varepsilon_1 / \varepsilon_{cr}} \quad \text{pour } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{cr} \quad (I.43)$$

Yuzugullu et Schnobrich [142] ont utilisé une valeur constante pour le module de déformation transversale \bar{G}_c .

$$\bar{G}_c = 0.25 G_c \quad \text{Pour les poutres} \quad (I.44)$$

$$\bar{G}_c = 0.125 G_c \quad \text{Pour les voiles et les voiles de contreventement} \quad (I.45)$$

Le module de la relation (I.43) est introduit dans une méthode d'analyse des ossatures en trois dimensions par C. Dundar et al [76]. Dans cette étude, la méthode de la matrice de rigidité a été appliquée pour obtenir des solutions numériques à la méthode d'analyse compte tenu de l'effet des fissures et le modèle de la rigidité effective.

Les auteurs ont utilisé une discrétisation de type poutre soumise à des charges uniformément réparties et à des charges concentrées comme indiqué sur la figure (I.49) [76].

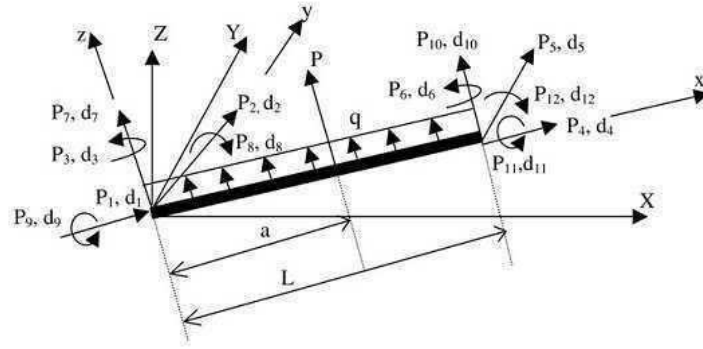


Figure I.49 : modélisation élément type poutre de C. Dundar [76].

La condition de compatibilité des déformations est donnée par l'étude de l'équilibre de l'élément spatial de la figure (I.50), elle est donnée par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{77} & f_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{87} & f_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{I.46}$$

Où :

f_{ij} est le déplacement dans la direction i lorsqu'on applique une charge unitaire dans la direction j et obtenue en utilisant le principe des travaux virtuels :

$$f_{ij} = \int_0^L \left(\frac{M_{zi}M_{zj}}{E_c I_{effz}} + \frac{M_{yi}M_{yj}}{E_c I_{effy}} + \frac{V_{yi}V_{yj}}{G_c A} s + \frac{V_{zi}V_{zj}}{G_c A} s + \frac{M_{bi}M_{bj}}{G_c I_0} + \frac{N_i N_j}{E_c A} \right) dx \tag{I.47}$$

Dans l'équation. (I.47), M_{zi} , M_{zj} , M_{yi} , M_{yj} , V_{zi} , V_{zj} , V_{yi} , V_{yj} , M_{bi} , M_{bj} , N_i et N_j sont les moments de flexion, des forces de cisaillement, moments de torsion et les forces axiales dues à l'application de charges unitaires dans des directions i et j , respectivement, E_c et I_0 représente le module d'élasticité du béton et le moment d'inertie de torsion de la section transversale, s et A sont le facteur de forme et la surface de section transversale, respectivement.

P_i sont les forces aux extrémités de l'élément dus aux charges fixes et uniformément réparties évaluer par les conditions de compatibilité et d'équilibre.

La matrice de rigidité de l'élément tridimensionnel est obtenu en inversant la matrice de flexibilité (I.46) et en écrivant la condition d'équilibre.

Finalement l'équation de rigidité de l'élément peut être obtenue par :

$$Kd + P_0 = P \quad (\text{I.48})$$

Où K (12×12) matrice de rigidité, d (12×1) vecteur déplacement, P_0 (12×1) vecteur force fixes P (12×1) vecteur force total. L'équation (I.48) est donnée dans le système de coordonnées (x,y,z) qu'il faut transformer dans le système global (X,Y,Z) , la matrice rigidité et le vecteur charge sont calculés pour chaque élément puis rassemblé dans le repère global, finalement les déplacements et les forces sont obtenus par résolution de l'équation par un système itératif. L'organigramme général de la méthode est présenté à la figure (I.46). La figure (I.51) montre l'exemple d'un portique étudié par les auteurs [37].

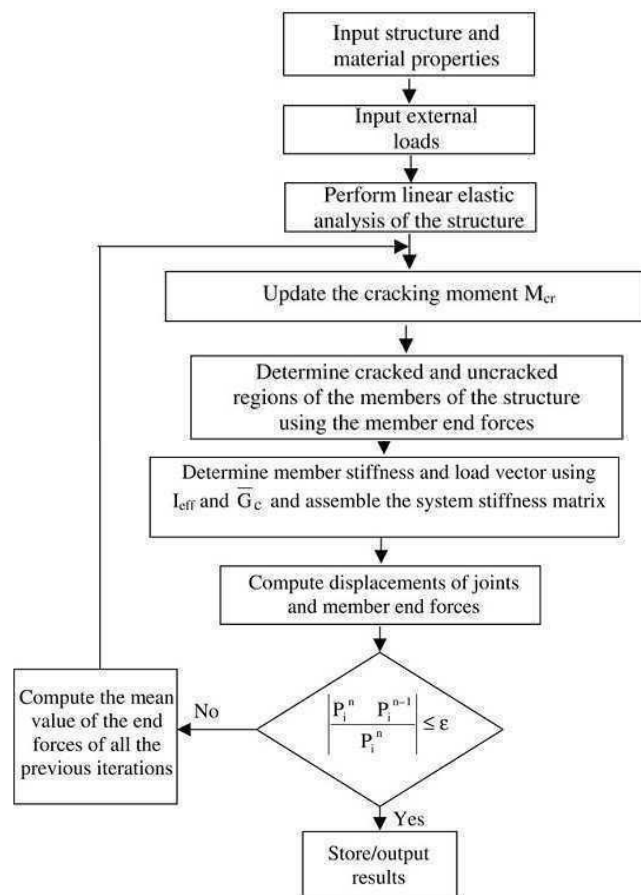


Figure I.50 : Organigramme de calcul des ossatures spatiales utilisant le module de cisaillement effectif de C. Dundar [76].

Cette méthode simule correctement les structures en béton armé dans les phases pré et post fissuration, Par contre ce modèle ne prend pas en considération la phase après plastification des aciers cela est clairement constaté sur la figure (I.52).

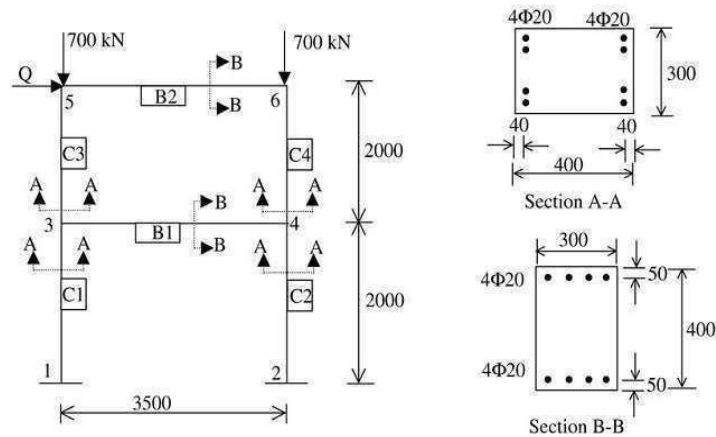


figure I.51 : Dimensions et detail de ferrailage du portique étudié [37].

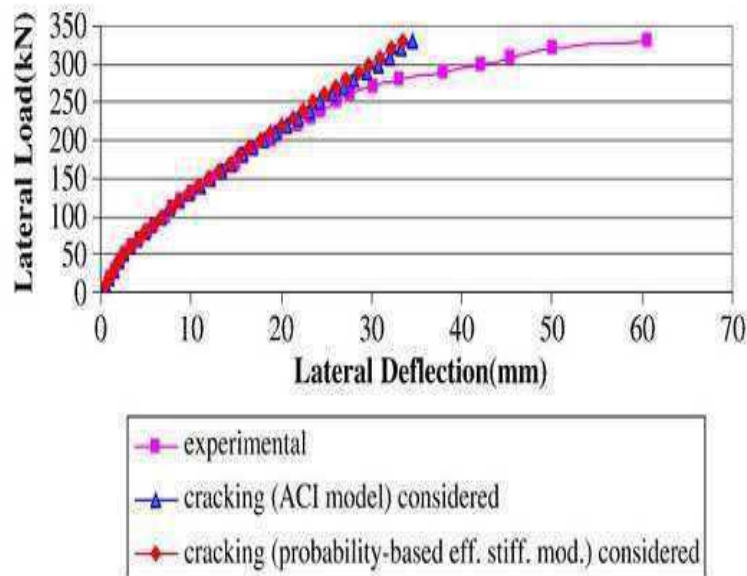


Figure I.52 : comparaison du modele utilisant la rigidité effective et le code ACI [37].

8. Conclusion

Les études expérimentales menées par les différents chercheurs ont montré que la flèche due à l'effort tranchant représente une moyenne importante de la flèche totale mesurée au moment de la rupture, ainsi la sous-estimation des déflexions réelles dans les codes de calcul peut s'avérer néfaste pour la structure (Zuanfeng Pan et al). La prise en compte des

déformations dues à l'effort tranchant ainsi que l'interaction moment fléchissant effort tranchant dans le calcul à la rupture des poutres est nécessaire (essais de l'université de Stuttgart).

D'autre part le pourcentage d'armatures transversales peut contribuer efficacement à la reprise des effets de l'effort tranchant (essais de l'université du Danemark).

Le renforcement du béton par des fibres métalliques ajoutées à des cadres transversaux peut former un matériau composite capable de reprendre les contraintes tangentielles et augmenter la capacité portante des structures soumises à l'effet combiné de l'effort tranchant et de moment fléchissant moyennant des pourcentages optimaux.

Plusieurs approches théoriques ont également été proposées pour modéliser le comportement des structures en béton armé en tenant compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire. La première catégorie est basée sur la théorie de champ de compression modifiée par Vecchion et Collins (1986) qui reste le modèle le plus utilisé de par le monde, la deuxième catégorie basée sur la théorie de la matrice rigidité effective, des chercheurs proposent des formules simples pour calculer le module de déformation transversale dans le domaine post fissuration dépendant des paramètres qui contribuent à la résistance à l'effort tranchant. Tous les modèles proposés dans la littérature simulent correctement la phase post fissuration, après plastification des aciers les courbes expérimentales présentent une incurvation visible que ces méthodes ne prédisent pas.

CHAPITRE II
PRESENTATION DU PROBLEME ET
HYPOTHESES GENERALES

CHAPITRE II

PRESENTATION DU PROBLEME ET HYPOTHESES GENERALES

1. Introduction

L'étude du comportement non linéaire des structures spatiales soumises à des incréments de charges appliqués instantanément (dans une courte durée) et accrus jusqu'à la ruine, a constitué l'étude menée au CEBTP par O. Nait-Rabah [104], qui était la première phase de la mise au point d'un logiciel de calcul traitant avec plus de précisions des ossatures en béton armé, béton précontraint ou mixte. Nait-Rabah, se basant sur les travaux de Grelat [66] sur le comportement des structures planes, a intégré notamment dans un logiciel de calcul la non-linéarité mécanique et la non-linéarité géométrique, par contre dans cette étude, l'effort tranchant n'est pas considéré dans le comportement non linéaire, alors qu'il influe considérablement sur la déflexion ainsi que sur la distribution des contraintes.

2. Les grandes lignes de l'étude

Le présent travail a pour objectif de simuler le comportement des structures spatiales, jusqu'à rupture, et l'introduction de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine élastique non linéaire dans un logiciel de calcul des structures spatiales.

L'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire est introduit dans le modèle de calcul d'une section de poutre par la méthode présentée au chapitre quatre et par son introduction dans la matrice de rigidité corde de la section.

La méthode de calcul tient compte de deux types de non-linéarités :

- celles résultant des lois de comportement intrinsèques des matériaux. Ces non-linéarités conduisent à des relations non linéaires entre les sollicitations et déformations ;
- les non-linéarités géométriques dues au comportement d'ensemble de la structure. Il est indispensable de tenir compte de ce type de non-linéarités dans l'analyse structurale des systèmes où les effets du second ordre ou bien la stabilité des éléments ou de l'ensemble du système sont très importants ;

3. Domaines d'application et hypothèses générales

La déformation de la section transversale suit le principe de Bernoulli et l'analyse de l'état des déformations d'un élément est effectuée dans un repère intrinsèque lié à la position déformée de cet élément. Dans cette analyse les hypothèses faites sont les suivantes :

- l'analyse est effectuée en élasticité non linéaire ;
- les déformations sont petites ;
- les déplacements sont petits ;
- la longueur des éléments est faible et donc la non-linéarité géométrique attachée à la déformation de l'élément est négligeable ;
- les déformations des nœuds situés à la jonction de plusieurs éléments sont négligeables ;
- les effets dus au gauchissement seront négligés ;

Les caractéristiques de déformabilité d'un élément sont obtenues en étudiant le comportement mécanique d'une ou plusieurs sections droites de cet élément.

L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations dues à l'effort normal et au moment fléchissant que celle due à l'effort tranchant. Les effets différés et à longue durée ne sont pas pris en compte.

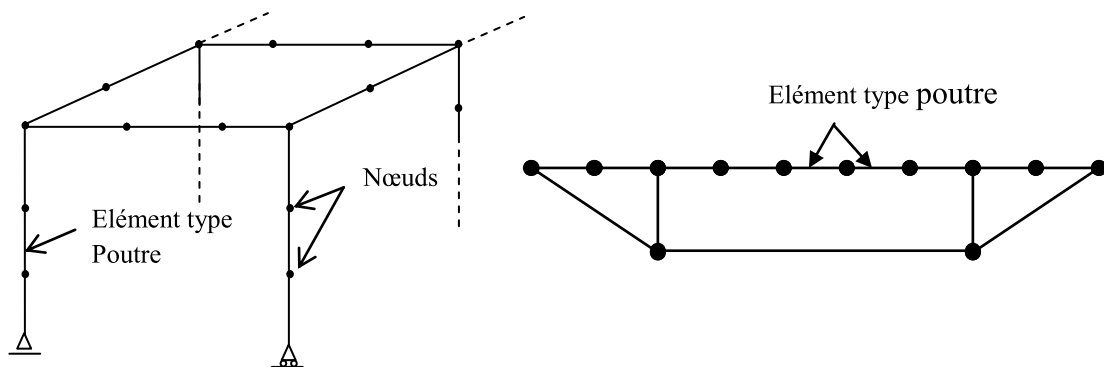
Le calcul des déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque est effectué par intégration des déformations des sections de calcul.

La longueur des éléments et le nombre de sections droites de calcul ont une influence sur les déplacements calculés. Grelat [66] a montré que, pour les éléments de faible longueur, la prise en compte de trois sections de calcul est en général suffisante. L'approche utilisée pour le calcul des déplacements est basée sur la formulation de Nait Rabah [104] conduisant à la formation de la matrice de souplesse reliant les accroissements des déplacements aux accroissements d'efforts aux extrémités de l'élément. Les effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds sont introduits essentiellement par la transformation non linéaire des déplacements des extrémités de l'élément dans le passage du repère intrinsèque à un repère fixe.

Les lois de comportement uni axial sont utilisées dans l'étude du comportement des matériaux. Cette hypothèse est acceptable dans le cas d'un chargement instantané croissant proportionnellement à un paramètre.

4. Discrétisation de la structure

La structure spatiale étudiée est discrétisée par des éléments finis, type poutres comme indiqué à la figure (II.1) liés à leurs extrémités par deux nœuds avec six degrés de liberté chacun (trois rotations, trois translations) figure (II.2), les efforts sollicitant qui agissent aux extrémités de ces éléments sont des efforts normaux et tangents. Ces éléments sont décomposés en sections intermédiaires afin d'évaluer le comportement non linéaire du béton et des armatures. La section transversale est décomposée en couches de béton et d'armatures en adoptant les lois de comportement réelles des matériaux.



(a). Structures Poteaux Poutres

(b). Structures triangulées

Figure II.1 : discrétisation de la structure en éléments poutres.

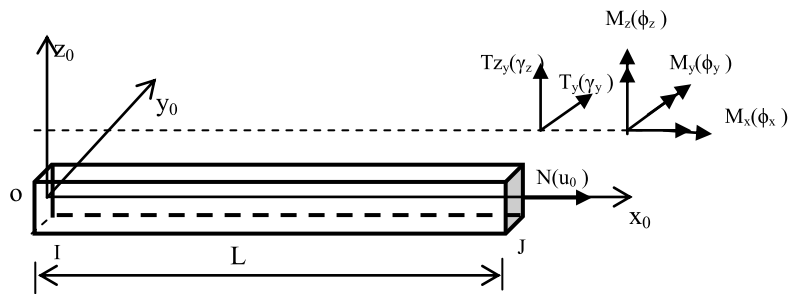


Figure II.2 : élément type poutre 3D a deux nœuds ; 6ddl par nœud.

4.1 Modélisation des sections

4.1.1 Le béton

Pour mieux approcher le domaine délimité par le contour d'une section transversale de forme quelconque, chaque section constitutive d'un élément est positionnée dans le repère local lié à cet élément. Dans ce repère chaque section réelle est discrétisée en une succession de trapèzes dont les côtés parallèles sont horizontaux (voir figure II.3). Les termes de la

matrice rigidité de la section sont obtenus par intégration sur tous les trapèzes constitutifs de la section.

4.1.2 Les aciers

La section de chaque armature est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini dans le repère intrinsèque de la section par ses coordonnées y_{ai} z_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} .

Les armatures actives sont définies par leur excentricité e_{pk} leur aire A_{pk} et leurs points de passage dans la section.

n_s : nombre de lit d'armatures passives,

n_p : nombre de câbles de précontrainte.

À la mise en tension, les câbles subissent un allongement initial ε_{p0} . L'action de la précontrainte sur la section est un effort de compression, égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section en utilisant le principe de Fauchard. Quand le câble est rendu solidaire de la poutre (ancrage, injection de la gaine) il subit les mêmes variations de déformation que le béton situé au même niveau. Il devient alors un élément résistant, et possède une pré-déformation par rapport à la section.

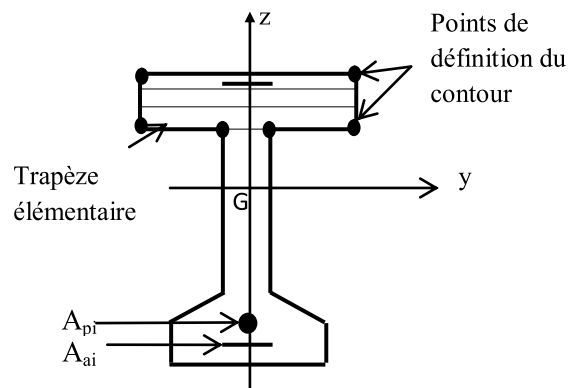


Figure II.3 : Section de béton découpée en trapèzes.

5. Définition des charges

La structure étudiée est supposée soumise à un système de charges soutenues appliquées instantanément. Les charges appliquées sont supposées concentrer aux nœuds de la structure.

Le système de chargement considéré comporte :

- des charges fixes Q_0 représentent le poids propre de la structure et des charges fixes appliquées avant ou après une mise en tension éventuelle de la précontrainte.
- des charges αQ_v variables, d'intensité proportionnelle à un paramètre α .

L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes de α

6. Comportement des matériaux

Dans la section suivante nous nous arrêtons sur les lois de comportement des matériaux, constituant la structure (béton, acier passif et actif, béton de fibres).

6.1 Comportement du béton en compression

6.1.1 Observations expérimentales

L'allure générale de la courbe contrainte - déformation dans l'essai de compression unie axiale est donnée par la figure (II.4). Nous observons les quatre phases suivantes [110]:

- La réponse est linéaire jusqu'à 30% - 50% de la limite en compression f_c .
- La courbe devient de plus en plus non linéaire jusqu'à 75% - 90% de la limite f_c . apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).
- La courbe présente un pic suivi d'une branche post-pic correspondant à un comportement adoucissant. Le coefficient de Poisson évolue (figure II.4).
- La rupture apparaît progressivement au-delà du pic par coalescence de micro - fissures et augmentation de volume.

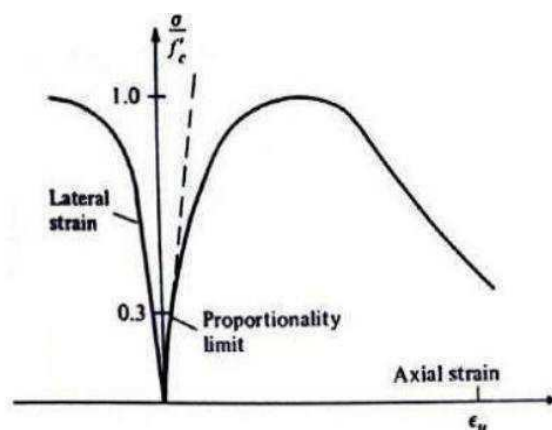


Figure II.4 : Comportement du béton en compression simple [110].

La modélisation de ce comportement a fait objet de plusieurs travaux, nous exposons dans ce qui suit les modèles réglementaires basés sur les formules de Sargin.

6.1.2 Loi de BPEL

Cette loi est issue du règlement BPEL91. Son diagramme est présenté à la figure (II.4) Elle modélise le comportement en compression du béton, elle est basée sur la formule due à Sargin, qui s'écrit, en reprenant les notations du BPEL [118] :

$$\sigma_b = f_{cj} \frac{k \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right) + (k-1) \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)^2}{1 + (k-2) \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right) + k' \left(\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_{b0}} \right)^2} \quad (\text{II.1})$$

Où f_{cj} est la résistance à la compression du béton âgé de j jours, donnée en MPa par :

- $f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83j} f_{c28}$ si $j \leq 28$ jours et $f_{c28} \leq 40$ MPa
- $f_{cj} = \frac{j}{1,40 + 0,95j} f_{c28}$ si $j \leq 28$ jours et $f_{c28} > 40$ MPa
- $f_{cj} = f_{c28}$ si $j > 28$ jours

ε_{b0} est la déformation au pic de contrainte donnée par:

$$\varepsilon_{b0} = 0,62 \cdot 10^{-3} \sqrt[3]{f_{cj}}$$

K est un coefficient donné par :

$$k = \frac{E_{ij0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{cj}}$$

E_{ij0} est le module de Young à l'origine :

$$E_{ij0} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}}$$

k' est un coefficient permettant d'ajuster l'allure du début de la branche descendante du diagramme réel :

$$k' = k - 1 \quad \text{Pour } f_{cj} \leq 30 \text{ MPa}$$

$$k' = 0 \quad \text{Pour } f_{cj} \geq 55 \text{ MPa}$$

$$k' = (k - 1) \left(\frac{55 - f_{cj}}{25} \right) \quad \text{Pour } 30 \text{ MPa} < f_{cj} < 55 \text{ MPa}$$

Le béton tendu est complètement négligé.

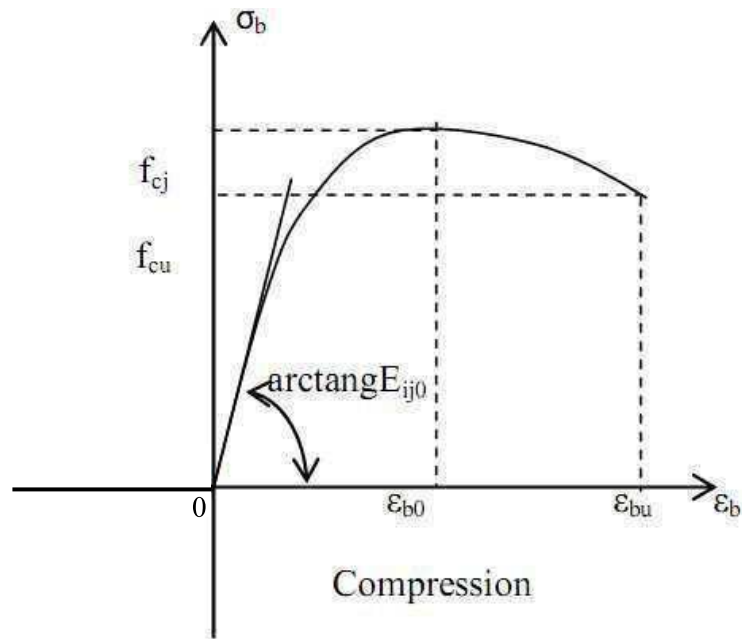


Figure II.5 : Loi de BPEL 91 [118].

6.1.3 Loi EUROCODES2

La loi des Eurocodes [55] s'appuie également sur une loi de type Sargin. En reprenant les notations des Eurocodes, on a :

$$\sigma_c = f_c \frac{k \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right)^2}{1 + (k - 2) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right)} \quad (\text{II.2})$$

Où :

σ_c est la contrainte dans le béton, qui dépend de la déformation ε_c du béton ;

f_c est la résistance à la compression du béton ;

ε_{cl} est la déformation sous la contrainte maximale f_c ;

$$\varepsilon_{cl} = 0,0022$$

k est un coefficient donné par :

$$k = \frac{1,1 E_{cm} \varepsilon_{cl}}{f_c}$$

E_{cm} est le module sécant à 28 jours.

Le coefficient k' de la loi des Eurocodes est nul.

6.1.4 Loi générale de Sargin

Pour décrire le comportement du béton en compression, on admet un comportement élastique non linéaire qui sera décrit par la loi de Sargin générale (figure II.5) [138].

La contrainte est donnée par :

$$\sigma = f_{cj} \frac{k_b \bar{\varepsilon} - (k'_b - 1) \bar{\varepsilon}^{-2}}{1 + (k_b - 2) \bar{\varepsilon} - k'_b \bar{\varepsilon}^{-2}} \quad (\text{II.3})$$

où $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

- Le paramètre k_b ajuste la branche ascendante de la loi et est donné par:

$$k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_0}{f_{cj}}$$

. f_{cj} : résistance à la compression du béton à l'âge j ,

. ε_0 : déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

. E_{b0} : module élastique du béton à l'origine.

Le paramètre K'_b permet d'ajuster la forme de la branche décroissante de la courbe.

- avec $K'_b = 0$, on obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, ce qui correspond à un béton ayant un comportement élastique fragile.

- avec $K'_b = 1$, on obtient au contraire des courbes assez plates qui correspondent à un béton ayant un comportement ductile.

Pour un béton normal, on prend généralement $k'_b = k_b - 1$

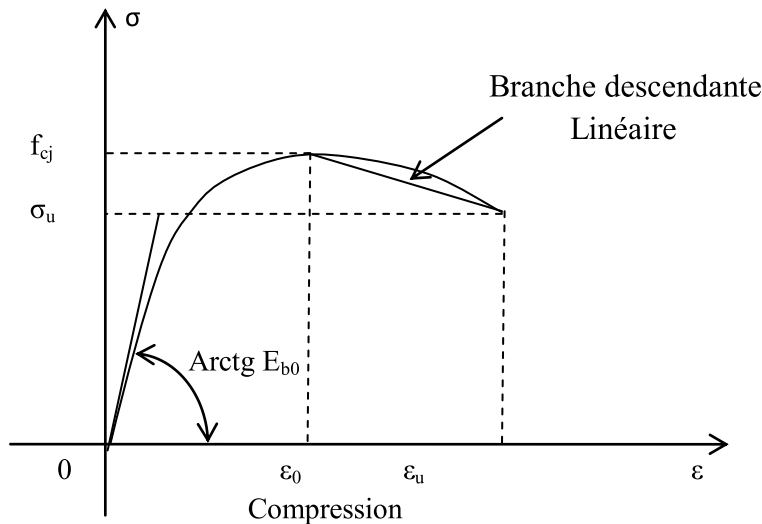


Figure II.6 : Loi de comportement du béton sous contrainte de compression
(Loi de Sarin générale) [138].

6.2 Comportement du béton en traction

6.2.1 Observations expérimentales

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante. Terrien a réalisé un essai de traction sur une éprouvette cylindrique carottée (figure II.7). Nous pouvons distinguer les deux phases suivantes [110] :

- l'avant pic ($\sigma < f_t$) où la courbe est presque linéaire (f_t étant la limite en traction) ;
- l'après pic où la contrainte chute brutalement avant de se stabiliser, les déformations pouvant continuer à croître. Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).

6.2.2 Modèle de Grelat

Généralement, dans la pratique (règlements), la résistance à la traction du béton ainsi que la contribution du béton tendu entre deux fissures sont négligées.

La prise en compte de la contribution du béton tendu entre les fissures, permet une représentation convenable de la déformabilité réelle d'un élément fissuré, ainsi qu'une estimation meilleure de la redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques et dans les cas sensibles aux effets du second ordre. Elle permet ainsi de mieux estimer les déplacements.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de la présente étude nous avons utilisé la loi de Grelat [66]. Ce modèle simule le comportement moyen du béton entre deux fissures.

Elle attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (figure II.8).

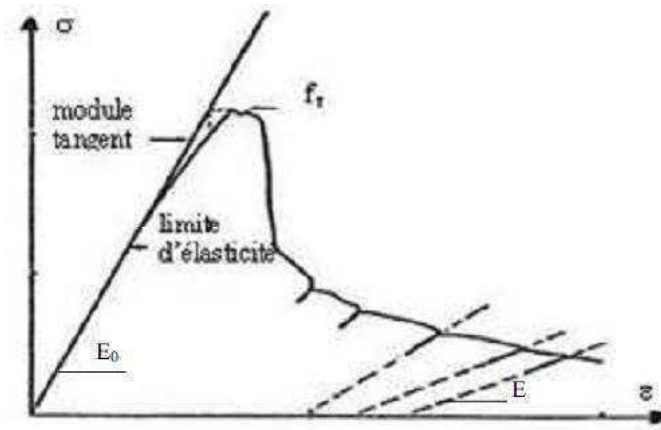


Figure II.7 : Comportement du béton en traction simple [110].

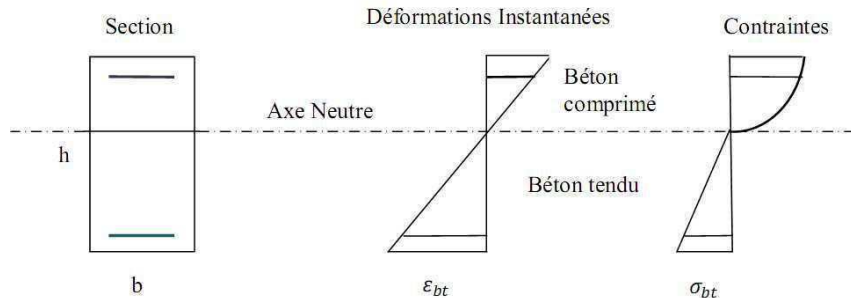


Figure II.8 : Comportement du béton avant fissuration [66].

Les fibres du béton tendu sont affectées d'un module de déformation E_{bt} qui est défini à partir de la contrainte et de la déformation instantanée du bord tendu.

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \quad (\text{II.4})$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives. La contrainte ne s'annule pas brusquement, mais, décroît

selon une loi parabolique (figure II.9). On étudie ainsi le comportement moyen d'une zone de poutre.

f_{tj} : résistance du béton à la traction,

ε_{ft} : déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

E_{b0} : module d'élasticité longitudinal du béton.

$$\begin{aligned} \sigma_{bt} &= E_{b0} \varepsilon_{bt} && (|\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{ft}) \\ \sigma_{bt} &= -f_{tj} \frac{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} && (\varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| < \varepsilon_{rt}) \\ \sigma_{bt} &= 0 && (|\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt}) \end{aligned} \quad (II.5)$$

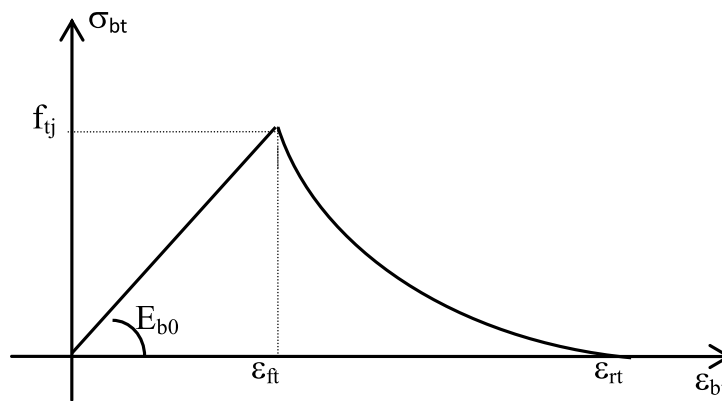


Figure II.9 : Contribution du béton tendu après fissuration ; Grelat [66].

6.3 Comportement mécanique des aciers

6.3.1 Comportement expérimentale

Contrairement au béton, le comportement de l'acier est quasi identique en traction et en compression sous chargement monotone elle dépend de la nature de l'acier. La courbe de la figure (II.10) montre l'allure du comportement de l'acier soumis à un essai de traction. Nous y constatons clairement deux comportements [110]:

- Tant que nous restons au - dessous du point de la limite élastique, le comportement reste élastique, c'est-à-dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge (quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve sa forme initiale).
- Quand le chargement dépasse la limite élastique, et si ensuite nous enlevons la charge des déformations permanentes apparaissent. Contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même avec le module de Young initial.

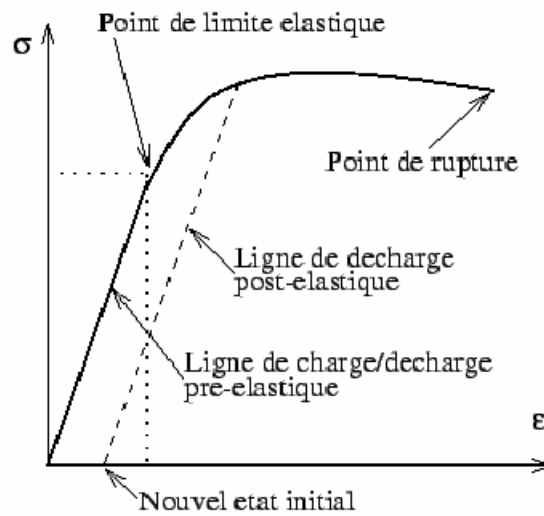


Figure II.10 : Comportement de l'acier en traction simple [110].

6.3.2 Loi de comportement des aciers passifs

On adopte les lois préconisées par les règles BAEL 91[119], On distingue les aciers naturels et les aciers écrouis.

6.3.2.1 Aciers naturels:

Ils sont caractérisés par une loi élastoplastique parfaite (figure II.11), du coté de la traction les relations se déduisent par symétrie.

$$\sigma_s = E_a \epsilon_s \quad (\epsilon_s \leq \epsilon_e)$$

$$\sigma_s = f_e \quad (\epsilon_e < \epsilon_s \leq \epsilon_u) \quad (II.5)$$

$$\sigma_s = 0 \quad (\epsilon_s > \epsilon_u)$$

Les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10 ‰

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ϵ_e : Déformation limite élastique de l'acier,

f_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ϵ_u : Déformation ultime de l'acier.

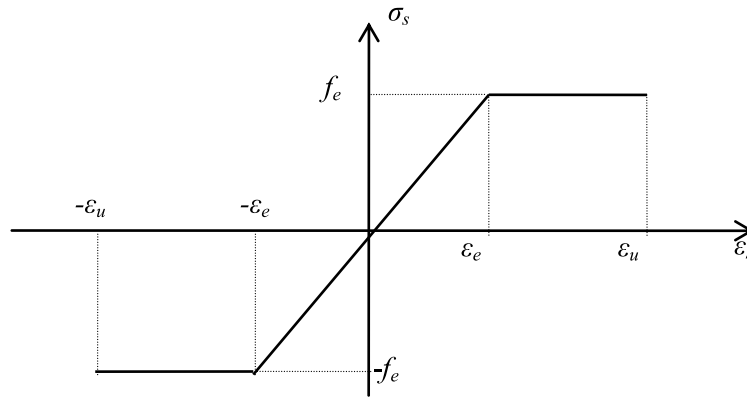


Figure II.11 : Comportement des aciers naturels [119].

6.3.2.2 Aciers écrouis

Les règles BAEL 91 [119] supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e). Au - delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré (figure II.12). Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\sigma = E_a \varepsilon \quad (\sigma < 0.7\sigma_e)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_a} + 0.823\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7\right)^5 \quad (0.7\sigma_e < \sigma < 1.1\sigma_e) \quad (II.6)$$

$$\sigma = 1.1\sigma_e \quad (1\% < \varepsilon < \varepsilon_u)$$

(Avec les relations qui se déduisent en traction par symétrie).

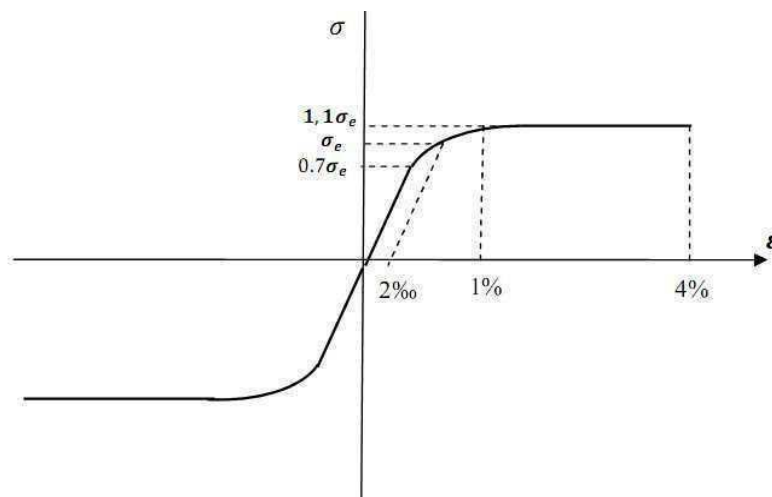


Figure II.12: Comportement des aciers écrouis [119].

6.3.3 Comportement des aciers actifs

Le comportement des aciers de précontrainte est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le règlement BPEL 91 [118] (figure II.13).

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \varepsilon_p & (0 < \sigma < 0.9\sigma_e) \\ \varepsilon_p &= \frac{\sigma_p}{E_a} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0.9 \right)^5 & (0.9\sigma_e < \sigma_p < 1.06\sigma_e) \\ \varepsilon_p &= 1.06\sigma_e & (\varepsilon > 2\%) \end{aligned} \quad (II.7)$$

(Avec les relations qui se déduisent par symétrie du coté de la traction).

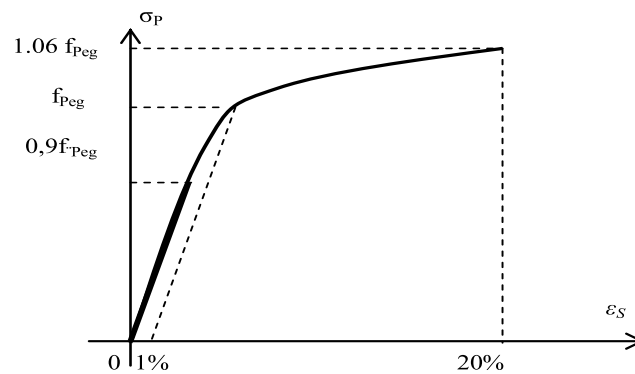


Figure II.13 : Diagramme contrainte - déformation d'un acier de précontrainte [118].

Notons que pour calculer la contrainte à partir de la déformation il est nécessaire d'écrire un sous-programme d'inversion. La courbe est continue, et la dérivée l'est aussi à la limite du domaine élastique.

6.4 Loi de comportement du matériau composite

Le comportement du béton en traction est plutôt du type fragile (sans déformation plastique). Pour renforcer ce matériau, autrement que par les armatures traditionnelles (béton armé), des fibres de différentes natures (acier, fonte, fibres de verre ou de carbone...) sont introduites dans le béton. Ce mode de renforcement remplace ou complète les armatures classiques, selon l'élément de structure et le type de sollicitation.

Dans notre étude, nous adopterons la loi de comportement du béton armé de fibre d'acier donnée par l'équation (II.8) [22]. Cette loi donne la contrainte en fonction de la déformation du composite. La représentation graphique de cette loi est donnée à la figure (II.14).

La loi proposée est introduite dans un logiciel de calcul non linéaire des structures spatiales jusqu'à rupture.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= E_{ct} \varepsilon & (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ft}) \\
 \sigma &= \sigma_{uc} - [\sigma_{uc} - f_{ft}] \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_{ft} - \varepsilon_u)^6} & (\varepsilon_{ft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u) \\
 \sigma &= \sigma_{uc} \left[1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_u)^6}{(\varepsilon_r - \varepsilon_u)^6} \right] & (\varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_r)
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

Avec :

E_{ct} : module initial du composite en traction,

f_{bt} : résistance à la traction du béton

σ_{uc} : contrainte ultime maximale du composite,

ϖ : Pourcentage en volume des fibres,

ε_{ft} : déformation de fissuration du béton,

ε_u : déformation correspondant à la mobilisation totale de l'adhérence fibres-matrice,

ε_r : déformation de rupture d'une fibre,

ε_{ft} : déformation de rupture du composite en traction,

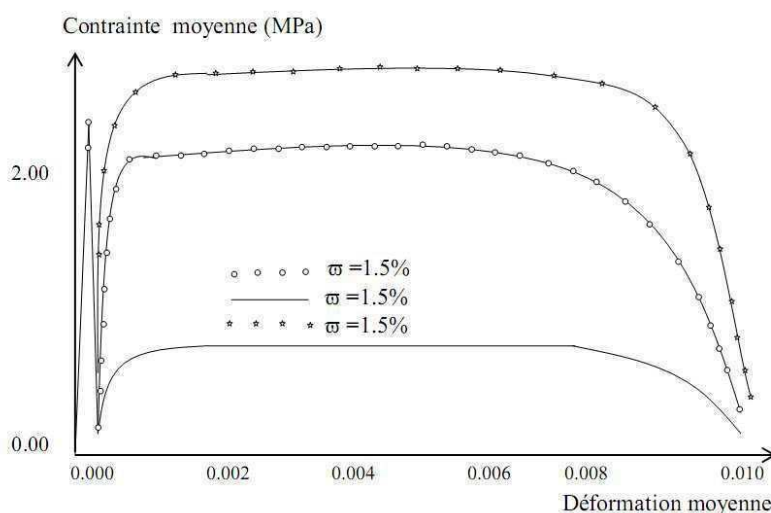


Figure II.14 : Loi de comportement des bétons armés de fibres en traction [22].

7. Conclusion

Dans ce chapitre, le sujet de l'étude a été défini, les hypothèses fondamentales sont posées et cela dans le souci de clarifier notre démarche.

Les aspects originaux de cette thèse feront l'objet d'un développement plus approfondi, en particulier, après avoir donné la méthode générale d'analyse non linéaire des structures spatiales sous chargement instantané, notre étude portera sur la proposition d'une démarche tenant compte de l'effet de l'effort tranchant dans la phase post fissuration et son introduction dans un logiciel de calcul.

Les études numériques développées sur divers types de structures devraient permettre la validation du modèle de comportement adopté.

CHAPITRE III
METHODE DE CALCUL DES STRUCTURES
SPATIALES

CHAPITRE III

METHODE DE CALCUL DES STRUCTURES SPATIALES

1. Introduction

La méthode de calcul qu'on propose dans ce chapitre a pour objectif la simulation du comportement de structures spatiales dans le domaine non linéaire soumis à un chargement instantané croissant jusqu'à rupture, le système non linéaire mis en place est basé sur la méthode des déplacements pour résoudre itérativement l'équation d'équilibre de la structure qui lie l'accroissement de charges extérieures et l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension.

Les sections droites d'un élément spatial peuvent être soumises à des sollicitations normales N , des moments de flexion M_y et M_z , des efforts tranchants T_y et T_z et un moment de torsion M_x . L'analyse non linéaire concerne aussi bien les sollicitations normales dues à un effort normal N et que les sollicitations tangentes dues à des efforts tranchants.

2. Principe général de calcul

Comme nous l'avons indiqué au chapitre II, la structure réelle est modélisée en une ossature formée par des éléments poutre. La structure est supposée soumise à un système de charge instantané. Les charges exercées sont appliquées aux nœuds de la structure.

Le système de charge considéré comporte des charges d'intensité fixe et des charges d'intensité variable proportionnellement à un paramètre α . L'analyse de la structure est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes de α .

Le problème non linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative, basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle on recalcule à chaque étape la matrice de rigidité tangente reliant les accroissements des déplacements aux accroissements des efforts.

Pour un accroissement de chargement extérieur $\{\Delta Q\}$ donné, on construit la matrice $[K]$ de la structure et le vecteur $\{\Delta P\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles intérieurs.

Pour chaque étape de chargement, le problème consiste à chercher l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$ solution du système d'équations non linéaire suivant :

$$\{\Delta Q\} + \{\Delta P\} = [K] \cdot \{\Delta U\} \quad (\text{III.1})$$

La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur $\{\Delta P\}$ sont formés respectivement à partir des matrices $[K_x]$ et des vecteurs $\{\Delta P_x\}$ des différents éléments dans le repère absolu de la structure, compte tenu de l'équilibre des nœuds de la structure.

La matrice de rigidité $[K_x]$ et le vecteur $\{\Delta P_x\}$ de chaque élément de la structure sont calculés en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections transversales le long de l'élément dans un repère dit " intrinsèque " lié à la position déformée de l'élément. La non-linéarité géométrique liée à la déformation propre de l'élément est supposée négligeable. Les effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds sont introduits dans le passage du repère intrinsèque au repère local lié à la position initiale de l'élément, sous l'hypothèse des petits déplacements. Le passage au repère global, lié à la structure, est effectué au moyen d'une matrice de rotation T_G qui ne dépend que de l'inclinaison initiale de l'élément.

À chaque accroissement du chargement $\{\Delta Q\}$ donné, le système d'équations (III.1) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives basée sur les matrices cordes reliant l'accroissement des déplacements des nœuds de la structure à celui du chargement extérieur appliqué (figure III.1).

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions $\Delta \bar{U}_0 \quad \Delta \bar{U}_1 \quad \dots \dots \dots \Delta \bar{U}_i$; $\Delta \bar{U}_r$ est calculée à partir de $\Delta \bar{U}_{i-1}$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\Delta \bar{Q} + \Delta \bar{P}_{i-1} = [K]_{i-1} \Delta \bar{U}$$

Où $[K]_{i-1}$ représente la matrice de rigidité corde de la structure à l'itération $i-1$ et $\Delta \bar{P}_{i-1}$ le vecteur tenant compte de l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles intérieurs.

Pour le démarrage de l'algorithme la condition initiale en déplacements est donnée par $\Delta \bar{U}_0 = \bar{0}$.

Le critère de convergence des déplacements est analogue à celui utilisé pour la résolution de l'équilibre d'une section en déformation. Les critères de rupture utilisés sont ceux classiques en flexion composée et ceux de rupture en cisaillement (Ecrasement des bielles de béton, rupture des aciers transversaux).

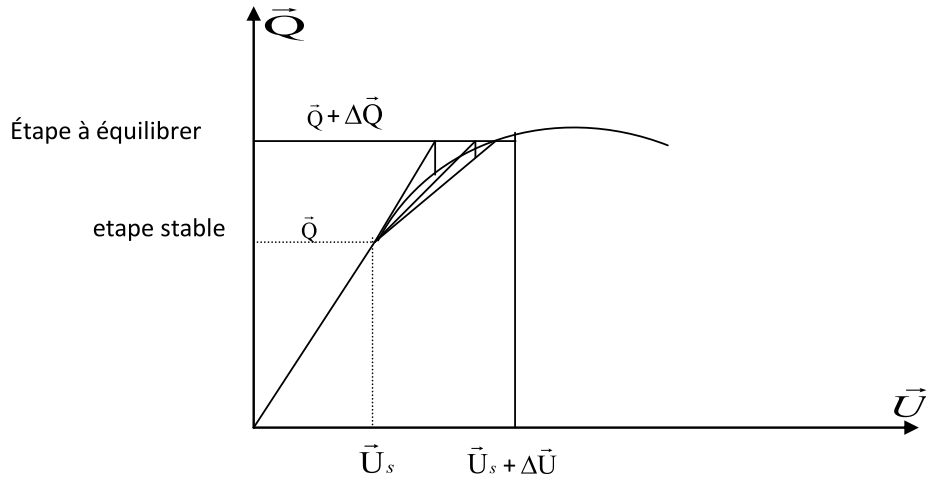


Figure III.1 : Représentation de la méthode de substitution utilisant les matrices-cordes.

3. étude d'une section droite

La prise en compte de la non-linéarité matérielle intervient au niveau de la construction de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque. Cette matrice va être construite à partir des matrices de rigidités des sections constitutives de l'élément.

3.1. Géométrie des déformations

3.1.1 Déformations normales du béton

Selon l'hypothèse des sections planes la déformation d'un point de la section peut être exprimée, en fonction de ces coordonnées et de la déformation de section (figure III.2) sollicitée avec des forces normales N et des moments de flexion M_Y et M_Z par la relation :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x + \phi_y Z + \phi_z Y \tag{III.2}$$

Y et Z sont les coordonnées d'un point de la section

ε_x : déformation au centre de gravité de la section.

ϕ_y et ϕ_z rotation de la section autour des axes GY et GZ

Les déformations normales seront désignées par le vecteur $\{\varepsilon_n\} = (\varepsilon_x, \phi_y, \phi_z)^T$

On peut écrire :

$$\{\varepsilon_{(y,z)}\} = (1, Z, Y) \cdot \{\varepsilon_n\} \tag{III.3}$$

La dérivée de l'équation (III.3) donne l'incrément de déformation normale suivante :

$$\{\Delta\varepsilon_{(y,z)}\} = (1, Z, Y) \cdot \{\Delta\varepsilon_n\} \tag{III.4}$$

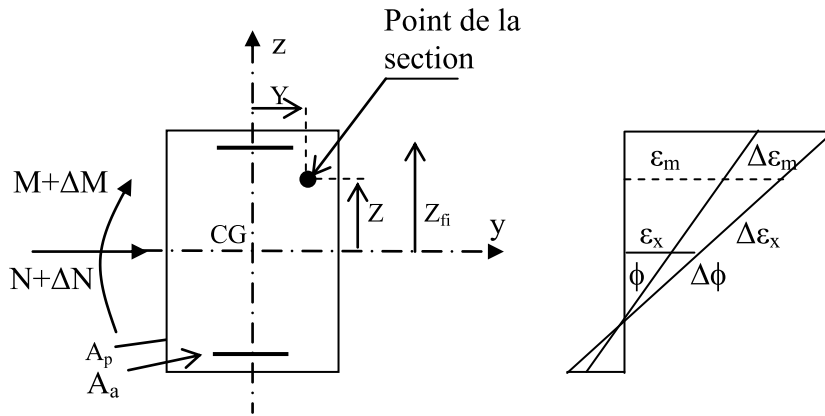


Figure III.2 : déformation de la section sollicitée dans le plan oxz.

3.1.2 Déformations tangentés du béton

Les sollicitations tangentés à la section sont les efforts tranchants T_Y, T_Z et le moment de torsion M_{CX} . Les déformations tangentés sont γ_Y, γ_Z et l'angle de torsion θ_X

On désigne les déformations tangentés par le vecteur :

$$\{\varepsilon_t\} = (\gamma_Y, \gamma_Z, \theta_X)^T \tag{III.5}$$

3.1.3 Déformations des armatures

On note (y_f, z_f) : les coordonnées du point de passage de l'armature dans le repère G_{YZ} , l'armature est supposée parfaitement adhérente au béton.

Pour un accroissement de déformation de la section, l'accroissement de déformation dans l'armature est donnée par :

$$\{\Delta\varepsilon_f\} = \cos^2 \alpha (1, z_f, y_f) \{\Delta\varepsilon_n\} + \sin \alpha \cos \alpha \left[\cos \beta, \sin \beta, y_f \sin \beta - z_f \cos \beta \right] \{\Delta\varepsilon_t\} \tag{III.6}$$

$\{\Delta\varepsilon_n\} = (\Delta\varepsilon_x, \Delta\phi_y, \Delta\phi_z)^T$ accroissement de déformation normale de la section

$\{\Delta\varepsilon_t\} = (\Delta\gamma_y, \Delta\gamma_z, \Delta\theta_x)^T$ accroissement de déformation tangentés de la section

α : angle que fait la ligne moyenne de l'armature avec l'axe Gx .

β : angle entre la projection de l'armature dans le plan de la section et l'axe Gy .

3.2 Calcul des sollicitations internes

3.2.1 Sollicitations normales du béton de la section

Dans le repère O_{XYZ} , le vecteur contenant les sollicitations normales dans le béton s'écrit :

$$\{F_{bn}\} = (N_b, M_{by}, M_{bz})^T$$

Avec N_b l'effort normal, M_{by} et M_{bz} moments fléchissant dus au béton de la section.

L'accroissement des sollicitations normales du béton est relié à l'accroissement de la contrainte normale dans le béton par :

$$\{\Delta F_{bn}\} = \int_{S_b} \Delta \sigma_b(y, z) \cdot (1, z, y)^T \cdot dS_b \quad (III.7)$$

L'accroissement de la contrainte normale dans le béton peut s'écrire :

$$\{\Delta \sigma_b(y, z)\} = E_b(y, z) \cdot \{\Delta \varepsilon(y, z)\} \quad (III.8)$$

Avec :

$E_m(y, z)$: module élastique longitudinale corde du béton, il relie l'accroissement de la contrainte à l'accroissement de la déformation en un point de coordonnées (y, z) de la section.

$\{\Delta \varepsilon(y, z)\}$: L'accroissement de la déformation normale

S_b : l'aire de la section de béton

Compte tenu des relations (III.4), (III.7) et (III.8) nous pouvons écrire :

$$\{\Delta F_{bn}\} = \int_{S_b} E_b(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & yz \\ y & yz & y^2 \end{bmatrix} \cdot dS_b \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (III.9)$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\{\Delta F_b\} = [K_{bn}] \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (III.10)$$

$$\text{Avec : } [K_{bn}] = \int_{S_b} E_b(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & yz \\ y & yz & y^2 \end{bmatrix} \cdot dS_b.$$

$[K_b]$: Matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales du béton de la section à la variation de la déformation normale de la section.

3.2.2 Sollicitations tangentes du béton de la section

Dans le repère G_{XYZ} , le vecteur contenant les sollicitations tangentes du béton peut s'écrire :

$$\{F_{bt}\} = (T_{by}, T_{bz}, M_{bc})^T$$

Avec :

T_{by}, T_{bz} : efforts tranchants et M_{bc} : moment de torsion.

On note $[K_{bt}]$ matrice de rigidité tangente reliant les sollicitations tangentes de la matrice de la section aux déformations tangentes de la section. On peut écrire :

$$\{\Delta F_{bt}\} = [K_{bt}]\{\Delta \varepsilon_t\} \quad (III.11)$$

Avec :

$$[K_{bt}] = \begin{bmatrix} G.A_y & 0 & 0 \\ 0 & G.A_z & 0 \\ 0 & 0 & G.I_x \end{bmatrix}$$

G : module de déformation transversale calculé avec les relations qui seront développées au chapitre IV.

A_y, A_z : sections réduites d'efforts tranchants.

I_x : inertie de torsion de la section.

Finalement et sous forme matricielle, l'accroissement des sollicitations dans le béton est relié à l'accroissement des déformations de la section par :

$$\begin{pmatrix} \{\Delta F_{bn}\} \\ \{\Delta F_{bt}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{bn}] & 0 \\ 0 & [K_{bt}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \varepsilon_n\} \\ \{\Delta \varepsilon_t\} \end{pmatrix} \quad (III.12)$$

3.2.3 Sollicitations normales dues aux armatures de la section

Dans le repère $Gxyz$, le vecteur contenant les sollicitations normales dans les armatures s'écrit :

$$\{F_{fn}\} = \begin{pmatrix} N_f \\ M_{fy} \\ M_{fz} \end{pmatrix}$$

Avec :

N_f : effort normal due aux armatures de la section.

M_{fy} et M_{fz} : moments fléchissant due aux armatures de la section

L'accroissement d'effort normal de l'armature d'ordre i s'écrit [104]. :

$$\{\Delta F_{f_i}\} = \sum_{i=1}^{np} \sigma_{f_i} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{f_i} \\ y_{f_i} \end{Bmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot S_{f_i} \Rightarrow \{\Delta F_{f_n}\} = \sum_{i=1}^{nf} E_{f_i} \cdot \{\Delta \varepsilon_{f_i}\} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_{f_i} \\ y_{f_i} \end{Bmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot S_{f_i} \quad (\text{III.13})$$

En remplaçant la relation (III.6) dans (III.13) on aura après développement et sous forme matricielle, la relation liant l'accroissement des efforts normaux dans les armatures à celui de leur déformation :

$$\{\Delta F_{f_n}\} = [K_{f_n}] \{\Delta \varepsilon_n\} + [K_{f_{nt}}] \{\Delta \varepsilon_t\} \quad (\text{III.14})$$

Avec :

$$[K_{f_n}] = \sum_{i=1}^{nf} A_{p_i} \cdot E_{f_i} \cdot \cos^3 \alpha_i \begin{bmatrix} 1 & z_{f_i} & y_{f_i} \\ z_{f_i} & z_{f_i}^2 & y_{f_i} z_{f_i} \\ y_{f_i} & y_{f_i} z_{f_i} & y_{f_i}^2 \end{bmatrix}$$

Et

$$[K_{f_{nt}}] = \sum_{i=1}^{nf} A_{p_i} \cdot E_{f_i} \cdot \sin \alpha_i \cos^2 \alpha_i \begin{bmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i & y_{f_i} \sin \beta_i - z_{f_i} \cos \beta_i \\ z_{f_i} \cos \beta_i & z_{f_i} \sin \beta_i & z_{f_i} \cdot y_{f_i} \sin \beta_i - z_{f_i}^2 \cos \beta_i \\ y_{f_i} \cos \beta_i & y_{f_i} \sin \beta_i & y_{f_i}^2 \sin \beta_i - y_{f_i} z_{f_i} \cos \beta_i \end{bmatrix}$$

3.2.4 Sollicitations tangentes dues aux armatures

Dans le repère Gxyz, le vecteur contenant les sollicitations tangentes dans les armatures s'écrit :

$$\{F_{f_i}\} = \begin{Bmatrix} T_{f_y} \\ T_{f_z} \\ M_{f_{cx}} \end{Bmatrix}$$

Il est relié à l'accroissement des contraintes normales dans les armatures par la relation suivante :

$$\{F_{f_i}\} = \sum_{i=1}^{nf} \sigma_{f_i} \begin{Bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ y_{f_i} \sin \beta_i - z_{f_i} \cos \beta_i \end{Bmatrix} \cdot \cos \alpha_i \cdot S_{f_i} \quad (\text{III.15})$$

Après développement la relation III.15 s'écrit sous la forme matricielle comme suit :

$$\{\Delta F_{ft}\} = [K_{fm}] \{\Delta \varepsilon_n\} + [K_{ft}] \{\Delta \varepsilon_t\} \quad (\text{III.16})$$

La relation liant l'accroissement des sollicitations à celui des déformations dans les armatures s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \{\Delta F_{fn}\} \\ \{\Delta F_{ft}\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{fn}] & [K_{fnt}] \\ [K_{fnt}]^T & [K_{ft}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \varepsilon_n\} \\ \{\Delta \varepsilon_t\} \end{pmatrix} \quad (\text{III.17})$$

3.3 Les sollicitations externes

La section est soumise à des sollicitations extérieures, tel que les sollicitations normales notées $\{F_{Sn}\}$ et les sollicitations tangentes notées $\{F_{St}\}$ qui peuvent s'écrire comme suit :

$$\{F_{Sn}\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \text{ et } \{F_{St}\} = \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \\ M_{cx} \end{Bmatrix}$$

Ainsi qu'à l'action de la précontrainte que l'on peut décomposer en une partie, notée $\{A_{sn}\}$ normale à la section et $\{A_{st}\}$ tangente à la section.

3.4 Equilibre de la section :

L'équilibre de la section est exprimé par le fait que l'accroissement de sollicitations externes et l'action de la précontrainte sont équilibrés par l'accroissement de sollicitations internes.

$$\begin{pmatrix} \{\Delta F_{sn}\} \\ \{\Delta F_{st}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{A_{sn}\} \\ \{A_{st}\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\Delta F_{bn}\} \\ \{\Delta F_{bt}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \{\Delta F_{fn}\} \\ \{\Delta F_{ft}\} \end{pmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Compte tenu des relations (III.12) et (III.17) la relation (III.18) peut se mettre sous la forme

$$\{\Delta F_s\} + \{A_s\} = [K_s] \{\Delta \delta_s\} \quad (\text{III.19})$$

Ou :

$\{\Delta F_s\}$ et $\{A_s\}$ Représentent les accroissements de sollicitations extérieures dus aux chargements et à l'action de la précontrainte à la mise en tension.

$[K_s]$: Matrice de rigidité de la section dont la formulation est donnée par :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{mn}] + [K_{ft}] & [K_{fnt}] \\ [K_{fnt}]^T & [K_{fnt}] + [K_{ft}] \end{bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

3.5 Méthode itérative de résolution

En élasticité non linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par une déformation donnée. Cependant il n'existe pas de méthode directe permettant de calculer les déformations produites par des efforts donnés. On est donc contraint à utiliser une méthode itérative pour la recherche de la solution en déformation.

L'équilibre d'une section revient à déterminer $\{\Delta\delta_s\}$ avec la relation (III.19) et de vérifier la capacité de cette section sous l'incrément de déformation obtenue.

Considérons un état d'équilibre de la section soumise à des sollicitations extérieures, qui peuvent s'écrire sous forme d'un vecteur $\{F_s\}$, défini par :

$$\{F_s\} = \left(N(x), M_y(x), M_z(x), V_y(x), V_z(x), M\alpha(x) \right)^T$$

On note par $\{\bar{\delta}_s\}$, le vecteur de déformation de la section correspondante, il est donné par :

$$\{\delta_s\} = (\epsilon_g, \phi_y, \phi_z, \gamma_y, \gamma_z, \phi_x)^T$$

Pour une variation des sollicitations extérieures $\{\Delta F_s\}$, et sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles, l'accroissement de déformation $\{\Delta\delta_s\}$ de la section est recherché, en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices cordes.

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, $\{\Delta\delta\}_0, \{\Delta\delta\}_1, \dots, \{\Delta\delta\}_i$ $\{\Delta\delta\}_i$ étant calculé à partir de $\{\Delta\delta\}_{i-1}$, en résolvant le système linéaire :

$$\{\Delta F_s\} + \{\Delta P_s\} = [K_s]_{i-1} \cdot \{\Delta\delta\}_i \quad (\text{III.21})$$

Où $[K_s]_{i-1}$ est la matrice de rigidité de la section, à l'itération (i-1)

En partant de la solution initiale nulle, le schéma de résolution s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\Delta\delta\}_0 &= \{0\} \\ \{\Delta\delta\}_i &= [K_s]_{i-1}^{-1} (\{\Delta F_s\} + \{\Delta P_s\}) \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$[K_s]_{i-1}^{-1}$ Est la matrice souplesse corde de la section, à l'itération (i-1) entre les états de déformation $\{\delta_s\}$ et $\{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i$

3.6 Critères de convergence

De façon générale l'équilibre d'une section est défini par deux conditions :

- La première concerne la limitation de la variation des déformations entre deux itérations successives à une tolérance fixée a priori. Cette variation est déterminée avec la norme euclidienne des déformations :

$$\eta = \left[\frac{\langle \{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1} \rangle \cdot (\{\Delta\delta\}_i - \{\Delta\delta\}_{i-1})}{\langle \{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i \rangle \cdot (\{\delta_s\} + \{\Delta\delta\}_i)} \right]^{1/2} < Tu \quad (\text{III.23})$$

Où Tu est la tolérance de convergence de l'équilibre de la section, dont la valeur est fixée par l'utilisateur.

$\{\delta_s\}$ est la déformation à l'étape équilibrée précédente.

- La deuxième consiste à limiter le nombre d'itérations pour chaque étape de calcul. Le dépassement d'une dizaine d'itérations peut être lié à certains problèmes d'ordres numériques. Ces problèmes se manifestent lorsque le déterminant de la matrice de rigidité est voisin de zéro.

3.7 Organigramme de la recherche de l'équilibre d'une section

Nous définissons ici l'organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale lors d'un accroissement de sollicitations extérieures $\{\Delta F_s\}$ et de l'action due à la précontrainte $\{\Delta P_s\}$ à la mise en tension des câbles.

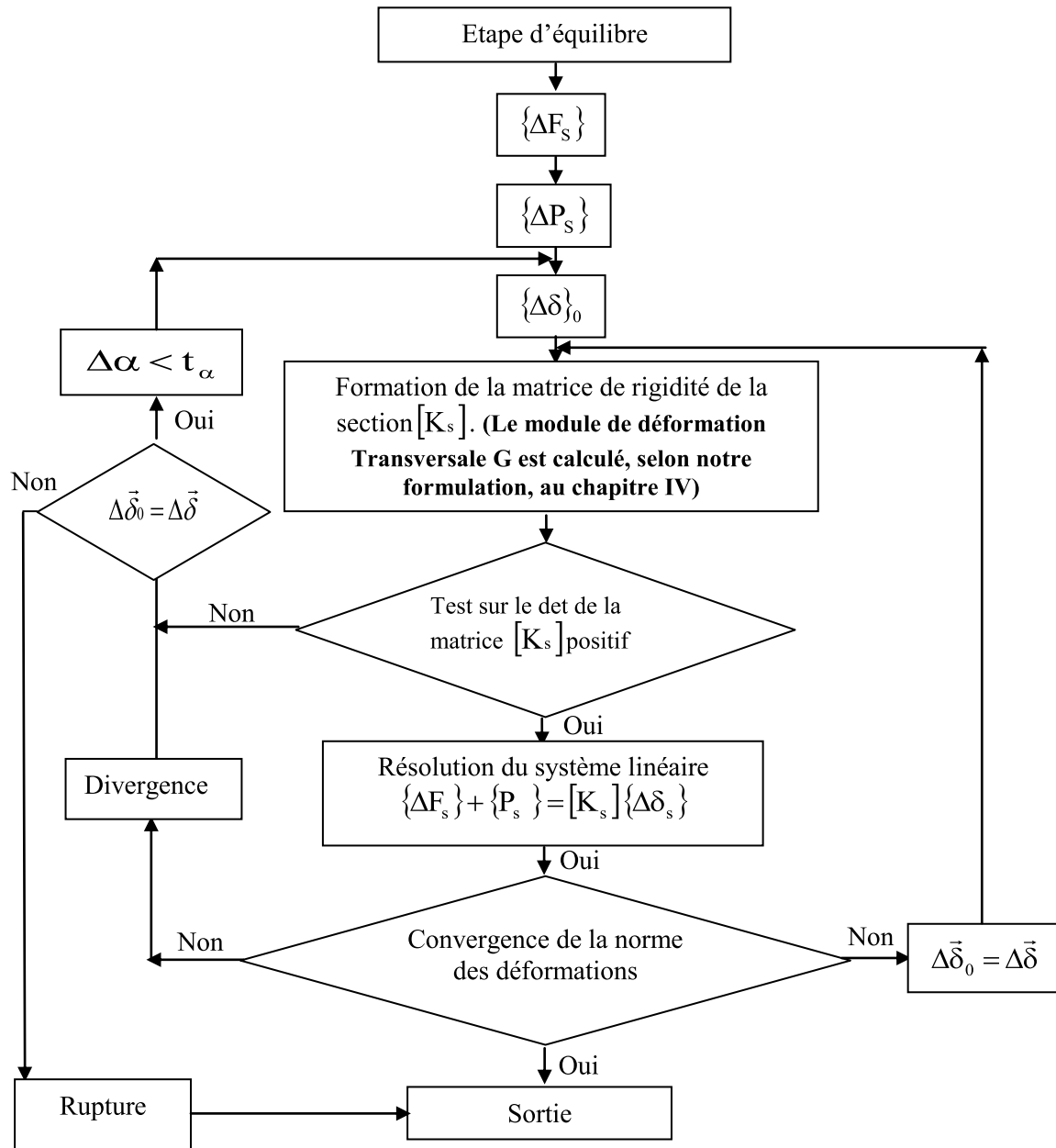


Figure III.3 Organigramme simplifié de la recherche de l'état d'équilibre d'une section.

4. Etude de l'équilibre de la structure

4.1 Définition des systèmes de coordonnées

Soit un élément poutre 3D de longueur L orientée selon la direction x. Nous considérons le système de coordonnées global $x_G y_G z_G$ et $x_0 y_0 z_0$ est le système de coordonnées locales liées à la position initiale de l'élément. Sous l'effet de la charge, le nœud I₀ (respectivement J₀) de l'élément est déplacé en I (respectivement J). La notion de système de coordonnées intrinsèque noté xyz qui relie le premier nœud I au nœud J est introduite (voir. Figure III.4).

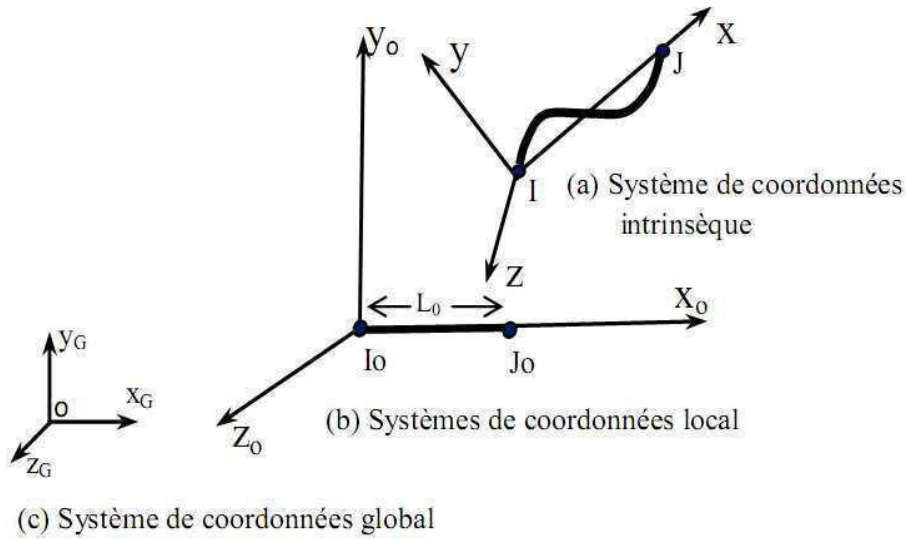


Figure III.4 : Systèmes de coordonnées spatiales.

4.2 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère intrinsèque

Soit (x, y, z) , le repère intrinsèque, lié à la position déformée de l'élément. Les efforts et les déplacements correspondants sont comptés positivement dans le sens des axes. La courbure $\phi_z(x)$ [respectivement $\phi_y(x)$] est positive lorsque la cavité de l'axe déformé est dirigée dans le sens positif de l'axe y [respectivement de l'axe z].

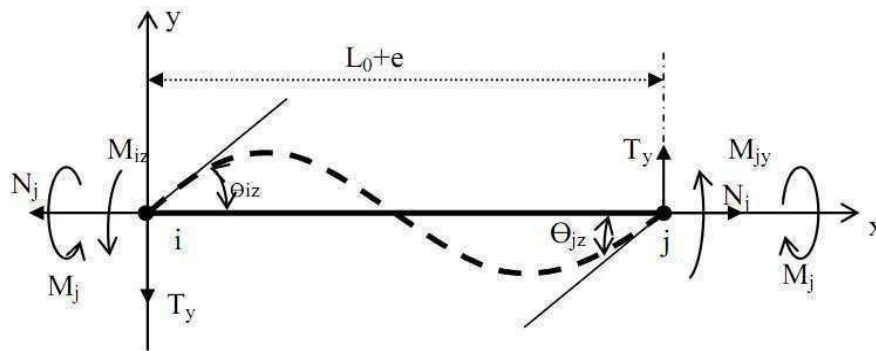


Figure III.5: Efforts et déplacements correspondants dans le plan xy.

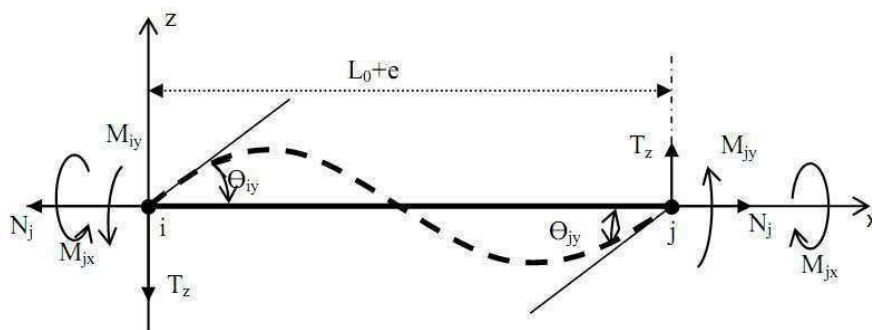


Figure III.6 : Efforts et déplacements correspondants dans le plan xz.

Les sollicitations aux extrémités de l'élément sont :

$$\{F_N\} = (N_j, M_{iy}, M_{iz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz})^T \quad (\text{III.24})$$

Les déplacements correspondants sont :

$$\{S_N\} = (e, \theta_{iy}, \theta_{iz}, \theta_x, \theta_{jy}, \theta_{jz})^T \quad (\text{III.25})$$

Avec : $\theta_x = \theta_{jx} - \theta_{ix}$ et $e = L - L_0$

Où :

θ_x : Rotation relative de torsion des noeuds I et J ,

$\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}$ Respectivement $(\theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz})$ rotations des nœuds I (respectivement J) autour des axes x, y et z.

e : variation de longueur de l'élément

L_0 : longueur initiale de l'élément avant déformation

L : longueur de l'élément après déformation

Soient $\{\Delta F_N\}$ et $\{\Delta S_N\}$ les accroissements des efforts et des déplacements aux extrémités de l'élément :

$$\{\Delta F_N\} = (\Delta N_j, \Delta M_{iy}, \Delta M_{iz}, \Delta M_{jx}, \Delta M_{jy}, \Delta M_{jz})^T \quad (\text{III.26})$$

$$\{\Delta S_N\} = (\Delta e, \Delta \theta_{iy}, \Delta \theta_{iz}, \Delta \theta_x, \Delta \theta_{jy}, \Delta \theta_{jz})^T \quad (\text{III.27})$$

4.2.1 Relation entre sollicitations dans une section et les efforts aux nœuds de l'élément

L'élément n'étant chargé qu'en ses extrémités, et en négligeant les effets du second ordre dus à ses déformations dans le repère intrinsèque, les sollicitations dans une section transversale d'abscisse x sont linéaires.

En tenant compte de la condition d'équilibre et des conventions sur les sollicitations, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = -N_j \\ M_y(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iy} - \frac{x}{L} \cdot M_{jy} \\ M_z(x) = -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot M_{iz} + \frac{x}{L} \cdot M_{jz} \\ T_y(x) = \frac{1}{L} (M_{iz} + M_{jz}) \\ T_z(x) = -\frac{1}{L} (M_{iy} + M_{jy}) \\ M_x(x) = -M_{jx} \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

Nous pouvons écrire sous forme matricielle, la relation liant les sollicitations dans une section aux efforts aux extrémités de l'élément dans le repère intrinsèque.

$$\{F_S\} = [L(x)] \cdot \{F_N\} \quad (\text{III.29})$$

$$\text{Avec: } \{F_S\} = (N(x), M_y(x), M_z(x), T_y(x), T_z(x), M_c(x))^T \quad (\text{III.30})$$

Où $[L(x)]$ est une matrice dont la formulation est donnée par :

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & -\frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & \frac{y_c}{L} & \frac{z_c}{L} & -1 & \frac{y_c}{L} & \frac{z_c}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

En négligeant la variation de longueurs dans le calcul des variations de sollicitations, nous pouvons écrire compte tenu de la relation (III.29):

$$\{\Delta F_S\} = [L(x)] \cdot \{\Delta F_N\} \quad (\text{III.32})$$

4.2.2 Relation entre les déplacements des nœuds de l'élément et les déformations des sections

Toute variation d'efforts $\{\delta F_N\}$ aux extrémités de l'élément engendre ;

- Un travail virtuel extérieur :

$$\delta W_e = \{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} \quad (\text{III.33})$$

- Un travail virtuel de déformations δW_i tel que :

$$\delta W_i = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (III.34)$$

Où $\{\delta(x)\}$ représente la matrice colonne (6x1) contenant les déformations dans une section transversale d'abscisse x .

$$\{\delta(x)\} = \left(\varepsilon_g(x), \phi_y(x), \phi_z(x), \gamma_y(x), \gamma_z(x), \phi_x(x) \right)^T \quad (III.35)$$

D'après le théorème du travail virtuel complémentaire :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (III.36)$$

Et compte tenu des équations (III.33) et (III.34)

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \int_0^L \{\delta F_s\}^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (III.37)$$

La variation de sollicitations $\{\delta F_s\}$ est statiquement admissible. Nous pouvons donc écrire compte tenu de l'équation (III.32).

$$\{\delta F_s\} = [L(x)] \cdot \{\delta F_N\} \quad (III.38)$$

D'où par substitution dans la relation (III.37) ;

$$\{\delta F_N\}^T \cdot \{S_N\} = \{\delta F_N\}^T \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (III.39)$$

La variation $\{\delta F_N\}$ étant arbitraire, il vient :

$$\{S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (III.40)$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul des déplacements des nœuds, il en résulte de l'équation (III.40) :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (III.41)$$

4.2.3 Relation entre les efforts et les déplacements des nœuds de l'élément

En vertu de la relation (III.19), liant les accroissements de déformations aux accroissements de sollicitations dans une section transversale, la relation (III.41) devient :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \left([S_s] \cdot \{\Delta F_s\} + \{G_s\} \right) \cdot dx \quad (III.42)$$

En tenant compte de l'équation (III.32), nous arrivons à :

$$\{\Delta S_N\} = [K_N]^{-1} \cdot \{\Delta F_N\} + \{G_N\} \quad (III.43)$$

Où : $[K_N]^{-1}$: Matrice de souplesse de l'élément dans le repère intrinsèque xyz

$$[K_N]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [S_s] \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (\text{III.44})$$

Et $\{G_N\}$ une matrice colonne (6x1) définie par :

$$\{G_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{G_s\} \cdot dx \quad (\text{III.45})$$

L'inversion de la matrice $[K_N]^{-1}$, nous conduit à la matrice de rigidité réduite de l'élément dans le repère intrinsèque, notée $[K_N]$.

En inversant l'équation (III.43), nous arrivons à la relation matricielle liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément, dans le repère intrinsèque xyz .

$$\{\Delta F_N\} + \{A_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (\text{III.46})$$

Où $\{A_N\}$ une matrice colonne (6x1) définie par la relation :

$$\{A_N\} = [K_N] \cdot \{G_N\} \quad (\text{III.47})$$

4.3 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local

Maintenant, nous établissons la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

4.3.1 Notations générales

La figure (III.7) montre les différentes notations utilisées. (u_i, v_i, w_i) (respectivement u_j, v_j, w_j) sont les composantes, dans le repère local de référence, du vecteur déplacement i_Oi (respectivement j_Oj).

Nous noterons par $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$, les matrices colonne (12x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local x_o, y_o, z_o .

$$\{F_L\} = (F_{ix0}, F_{iy0}, F_{iz0}, M_{ix0}, M_{iy0}, M_{iz0}, F_{jx0}, F_{jy0}, F_{jz0}, M_{jx0}, M_{jy0}, M_{jz0})^T \quad (\text{III.48})$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, \theta_{ix0}, \theta_{iy0}, \theta_{iz0}, u_j, v_j, w_j, \theta_{jx0}, \theta_{jy0}, \theta_{jz0})^T \quad (\text{III.49})$$

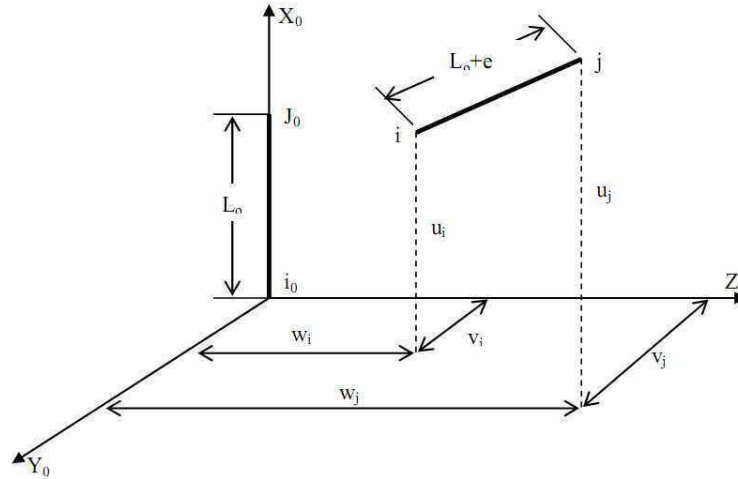


Figure III.7 : repère local de référence et notations.

Nous introduisons les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (9x1) telles que :

$$\{F_U\} = (F_{jx_0}, F_{jy_0}, F_{jz_0}, M_{ix_0}, M_{iy_0}, M_{iz_0}, M_{jx_0}, M_{jy_0}, M_{jz_0})^T \quad (III.50)$$

$$\{S_U\} = (u, v, w, \theta_{ix_0}, \theta_{iy_0}, \theta_{iz_0}, \theta_{jx_0}, \theta_{jy_0}, \theta_{jz_0})^T \quad (III.51)$$

Où :

$$\begin{aligned} u &= u_j - u_i \\ v &= v_j - v_i \\ w &= w_j - w_i \end{aligned} \quad (III.52)$$

En tenant compte des équations (III.49), (III.51) et (III.52), nous avons :

$$\{S_U\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad (III.53)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compte tenu des relations (III.48) et (III.53), la condition d'équilibre de l'élément dans le repère local $x_0y_0z_0$ nous mène à écrire :

$$\{F_L\} = [T_0]^T \cdot \{F_U\} \quad (III.54)$$

Enfin, nous noterons $\{\Delta F_U\}$ et $\{\Delta S_U\}$ respectivement les accroissements d'efforts et de déplacements aux extrémités de l'élément.

$$\{\Delta F_U\} = (\Delta F_{jx_0}, \Delta F_{jy_0}, \Delta F_{jz_0}, \Delta M_{ix_0}, \Delta M_{iy_0}, \Delta M_{iz_0}, \Delta M_{jx_0}, \Delta M_{jy_0}, \Delta M_{jz_0})^T \quad (III.55)$$

$$\{\Delta S_U\} = (\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta \theta_{ix_0}, \Delta \theta_{iy_0}, \Delta \theta_{iz_0}, \Delta \theta_{jx_0}, \Delta \theta_{jy_0}, \Delta \theta_{jz_0})^T \quad (III.56)$$

4.3.2 Relation entre accroissement d'efforts $\{\Delta F_U\}$ et accroissements de Déplacement $\{\Delta S_U\}$

Pour un instant t quelconque, on peut écrire d'après les figures (III.7), les relations géométriques suivantes [104].

$$\begin{cases} e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} - L_0 \\ \theta_{iz} = \theta_{izo} - \theta_v \\ \theta_{iy} = \theta_{iyo} + \theta_w \\ \theta_x = \frac{1}{2} \cdot (\theta_{jx_0} - \theta_{ix_0}) \\ \theta_{jz} = \theta_{jz_0} - \theta_v \\ \theta_{jy} = \theta_{jy_0} + \theta_w \end{cases} \quad (III.57)$$

Où :

$$\begin{cases} \theta_v = \text{Arcsin} \frac{v}{\sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2}} \\ \theta_w = \text{Arcsin} \frac{w}{\sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2}} \end{cases} \quad (III.58)$$

La différenciation des expressions (III.58) permet d'établir la relation entre les accroissements de déplacements nodaux $\{\Delta S_N\}$ dans le repère intrinsèque, et les accroissements de déplacements nodaux dans le repère local.

$$\{\Delta S_N\} = [B] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (III.59)$$

Où $[B]$: Matrice de transformation géométrique, s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & \frac{\partial e}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta w}{\partial u} & 0 & \frac{\partial \theta w}{\partial w} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \theta v}{\partial u} & -\frac{\partial \theta v}{\partial v} & -\frac{\partial \theta v}{\partial w} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \theta w}{\partial u} & 0 & \frac{\partial \theta w}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial \theta v}{\partial u} & -\frac{\partial \theta v}{\partial v} & -\frac{\partial \theta v}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.60})$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des dérivées partielles des fonctions.

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & v/L_0 & w/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.61})$$

4.3.3 Théorème des travaux virtuels

En tenant compte du fait que les travaux des forces sont nuls dans un déplacement de corps rigide du repère intrinsèque en équilibre au repère local, nous pouvons écrire que :

$$\{F_N\}^T \cdot \{\Delta S_N\} = \{F_U\}^T \cdot \{\Delta S_U\} \quad \forall \{\Delta S_U\}, \forall \{\Delta S_N\} \quad (\text{III.62})$$

Compte tenu de la relation (III.59), nous pouvons écrire :

$$\{F_U\} = [B]^T \cdot \{F_N\} \quad (\text{III.63})$$

La différenciation de l'équation (III.63), nous conduit à :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_N\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (\text{III.64})$$

Compte tenu des relations (III.46) et (III.59) nous aurons :

$$\begin{aligned} \{\Delta F_U\} &= [B]^T \cdot [[K_N] \cdot \{\Delta S_N\} - \{A_N\}] + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \\ \{\Delta F_U\} &= [B]^T ([K_N][B]\{\Delta S_U\} - \{A_N\}) + [\Delta B]^T \{F_N\} \end{aligned} \quad (III.65)$$

Si on pose : $[\Delta B]^T \{F_N\} = [D]\{\Delta S_U\}$

On aura finalement :

$$\{\Delta F_U\} + \{A_U\} = [K_U]\{\Delta S_U\} \quad (III.66)$$

Où :

$$[K_U] = [B]^T [K_N][B] + [D] \quad (III.67)$$

Matrice de rigidité de l'élément dans le repère local intermédiaire (formulation tangente).

Avec les relations (III.53) et (III.54), nous arrivons à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} + \{A_L\} = [K_L]\{\Delta S_L\} \quad (III.68)$$

Où :

$[K_L]$: Matrice rigidité symétrique (12x12), de l'élément dans le repère local, définie par :

$$[K_L] = [T_o]^T \cdot ([B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D]) \cdot [T_o] \quad (III.69)$$

Et

$\{A_L\}$: Représente une matrice colonne (12x1) définie par :

$$\{A_L\} = [T_o]^T \cdot \{A_u\} \quad (III.70)$$

Compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, nous pouvons nous contenter des termes du premier ordre dans le développement en série des termes de la matrice $[D]$. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = -\frac{2.v.(M_{iz} + M_{jz})}{Lo^3} + \frac{2.w.(M_{iy} + M_{jy})}{Lo^3} \\ D_{12} = D_{21} = -\frac{v.N_j}{Lo^2} + \frac{(M_{iz} + M_{jz})}{Lo^2} \\ D_{13} = D_{31} = -\frac{w.N_j}{Lo^2} - \frac{(M_{iy} + M_{jy})}{Lo^2} \\ D_{22} = \frac{N_j}{Lo} + \frac{2.v.(M_{iz} + M_{jz})}{Lo^3} \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = \frac{N_j}{Lo} - \frac{2.w.(M_{iy} + M_{jy})}{Lo^3} \end{array} \right. \quad (III.71)$$

4.4 Matrice de rigidité de l'élément dans le repère absolu

4.4.1 Relation entre accroissements de déplacements et d'efforts dans le repère absolu

La relation liant les grandeurs dans le repère local est indépendante des efforts et déplacements et ne dépend que de l'orientation initiale de la barre.

Soit un élément de la structure, de nœud origine i_0 et de nœud extrémité j_0 lié au repère local de référence $x_0y_0z_0$, et OXYZ le repère absolu lié à la structure, figure (III.4).

Nous notons par $\{F_x\}$ la matrice-colonne (12x1) contenant les efforts appliqués aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXYZ.

$$\{F_x\} = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}, M_{jx}, M_{jy}, M_{jz})^T \quad (III.72)$$

De même, nous notons par $\{S_x\}$ la matrice-colonne (12x1) contenant les déplacements aux extrémités d'un élément, dans le repère absolu OXYZ.

$$\{S_x\} = (X_i, Y_i, Z_i, \zeta_{ix}, \zeta_{iy}, \zeta_{iz}, X_j, Y_j, Z_j, \zeta_{jx}, \zeta_{jy}, \zeta_{jz})^T \quad (III.73)$$

La matrice de passage $[R_o]$ est la composée de trois (3) matrices orthogonales directes $[R_\alpha]$, $[R_\beta]$ et $[R_\gamma]$.

$$[R_o] = [R_\gamma] \cdot [R_\beta] \cdot [R_\alpha] \quad (III.74)$$

Avec :

$$[R\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{III.75})$$

$$[R\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.76})$$

$$[R\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{III.77})$$

Les angles α et β sont fonction des coordonnées des nœuds donnés dans le repère absolu, lié à la structure.

La relation entre accroissements des efforts et des déplacements dans le repère absolu s'obtient au moyen de la matrice de rotation orthogonale $[RT]$, telle que :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [Ro] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [Ro] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [Ro] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [Ro] \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

La matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXZ est donnée par :

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (\text{III.79})$$

4.5 Séquence de calcul

L'analyse de la structure est effectuée " pas à pas " pour des valeurs croissantes d'un paramètre α . On suppose connu l'état complet de la structure (déplacements, sollicitations, déformations) à l'étape r ou le paramètre α vaut α_r .

Soit $\{\Delta P\}$ le vecteur des accroissements des charges extérieures, appliquées aux nœuds, lorsque le paramètre α passe de α_r à $\alpha_{r+1} = \alpha_r + \Delta\alpha$.

L'organigramme de résolution d'une étape de calcul sous l'accroissement des charges extérieures, sous l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension est le suivant :

1. On suppose connue la valeur des accroissements de déplacements $\{\Delta U\}_0$ des nœuds. Cette valeur est prise égale à $\{0\}$, pour la première itération, ensuite c'est celle fournie par l'itération précédente.

2. Le vecteur $\{\Delta S_N\}$ des accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément est calculé à partir de $\{\Delta U\}_o$. On calcule la valeur des accroissements d'efforts intérieurs $\{\Delta F_N\}$ aux extrémités des éléments, dans leur repère intrinsèque, en utilisant pour chaque élément, la relation (III.46). La valeur de la matrice $[K_N]$ est celle obtenue à l'itération précédente.

3. La connaissance de $\{\Delta F_N\}$ et des déformations $\{\delta\}$ des sections, correspondant à l'étape précédente, nous permet d'étudier l'équilibre des sections. En effet le vecteur des accroissements de sollicitations $\{\Delta F_s\}$ dans une section de calcul est déterminé à partir de $\{\Delta F_N\}$ en utilisant la relation (III.32). L'action éventuelle de la précontrainte sur la section est donnée par les relations (III.47) et (III.45). L'équilibre d'une section est exprimé en résolvant le système non linéaire (III.21) par le procédé itératif (méthode de substitution utilisant les matrices cordes. Cependant, si l'équilibre d'une section n'est pas vérifié, ceci provient du fait d'une rupture de la section, ou du fait que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour aboutir à la convergence du processus itératif. Dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement $\{\Delta P\}$ plus petit.

4. Du fait de l'équilibre des sections, l'accroissement des déformations $\{\Delta \delta\}$ est connu. L'intégration selon la méthode numérique donne la matrice de rigidité $[K_N]$ de chaque élément ainsi que le vecteur $\{\Delta P_N\}$.

5. La matrice $[K_U]$ et le vecteur $\{A_U\}$ dans le repère local intermédiaire s'en déduisent par les équations (III.67) et (III.70).

6. La matrice $[K_L]$ et le vecteur $\{A_L\}$ dans le repère local sont ensuite obtenus par les relations (III.69) et (III.70).

7. Le passage à $[K_X]$ et $\{A_X\}$ dans le repère absolu, lié à la structure, est effectué par l'intermédiaire de la matrice de rotation $[RT]$.

8. La matrice de rigidité $[K]$ et le vecteur second membre $\{A\}$ dû à l'action éventuelle de la précontrainte à la mise en tension des câbles sont construits en écrivant l'équilibre des nœuds dans le repère absolu lié à la structure.

9. Les accroissements de déplacement des nœuds de la structure $\{\Delta U\}$ correspondant à l'itération en cours s'obtiennent en résolvant le système d'équations suivant $\{\Delta F\} + \{A\} = [K] \cdot \{\Delta U\}$, en tenant compte des conditions aux limites de la structure.

10. Après avoir obtenu l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$, on procède à la vérification de la convergence. Si le test de convergence n'est pas vérifié, le calcul est répété avec la nouvelle valeur $\{\Delta U\}$. Toutefois un défaut de convergence peut apparaître du fait de l'instabilité d'ensemble ou du fait de ce que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence. Dans ce cas ; le calcul est repris avec un pas de chargement plus petit.

11. À la fin de chaque étape on calcule les déformations totales de chaque section, les efforts totaux $\{F_U\}$ et les déplacements totaux $\{S_U\}$ aux extrémités des éléments dans le repère local, ainsi que les déplacements totaux des nœuds $\{U\}$ et les charges extérieures totales $\{P\}$ dans le repère absolu lié à la structure, en cumulant les accroissements de cette étape avec les valeurs de l'étape précédente.

12. on effectue une étape de correction des déplacements des nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette opération est indispensable pour le cas des structures sensibles aux effets du second ordre. En effet, lors de la recherche de l'accroissement des déplacements $\{\Delta U\}$ des nœuds, les matrices $[B]$ et $[D]$ exprimant la non-linéarité géométrique, sont gardées constantes pendant l'étape, avec les valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente. Cette procédure a pour effet de sous-estimer l'ensemble des déplacements dus aux effets du second ordre. Pour pallier à ce défaut, on effectue donc une étape de correction dans l'étape en cours, en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictif $\{\Delta P^*\}$ qui est la différence entre les charges réelles $\{P\}$ et les charges $\{P^*\}$ qui sont en équilibre avec les efforts $\{F_x\}$ calculés, compte tenu des déplacements des nœuds $\{U\}$ calculés :

$$\{\Delta P^*\} = \{P\} - \{P^*\}$$

Le vecteur des charges $\{P^*\}$, est obtenu en écrivant, pour chaque nœud, la somme des forces $\{F_x\}$ exercées par le nœud sur les éléments qui le croisent. Toutefois, les réactions d'appuis qui résultent de l'équilibre des nœuds ne sont pas prises en compte dans ce vecteur.

L'algorithme est dispensé de l'étape de correction si la norme euclidienne η_f des efforts est inférieure ou égale à une certaine tolérance T_f choisie a priori :

$$\eta_f = \left[\frac{\langle \Delta P^* \rangle \cdot \langle \Delta P \rangle}{\langle P \rangle \cdot \langle P \rangle} \right]^{1/2} < T_f$$

Dans le cas où la norme η_f est supérieure à T_f , une étape de correction suffit en général pour obtenir une valeur correcte des déplacements des nœuds.

13. On continue avec un nouveau pas de chargement extérieur,

14. La charge de ruine est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de charge inférieur ou égal à une précision fixée à priori.

4.6 Organigramme global de calcul

La procédure pour déterminer l'équilibre de la structure est présentée à la figure III.8.

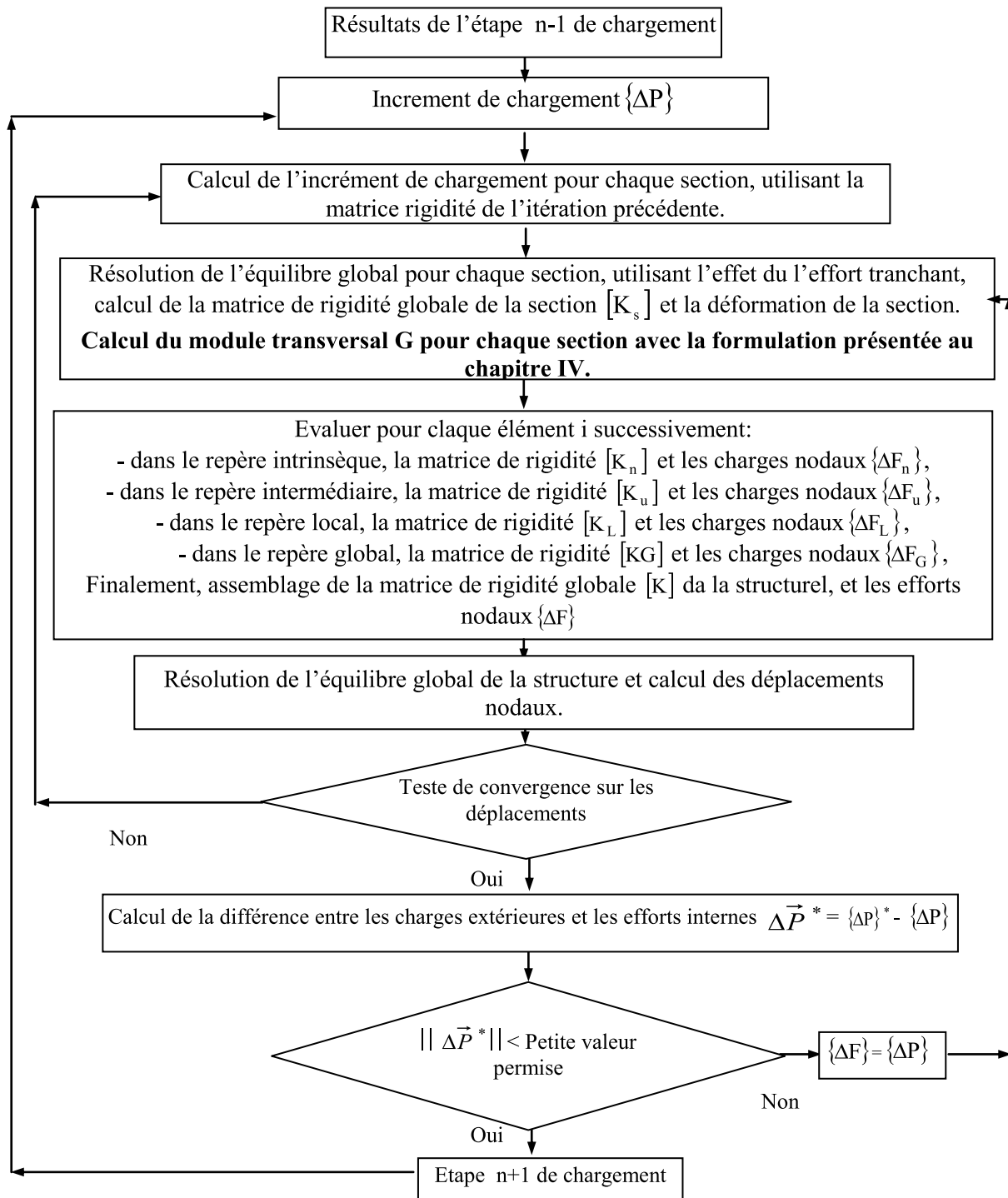


Figure III.8: organisation générale de la méthode de calcul de l'équilibre de la structure.

5. Conclusion

Dans la méthode de calcul non linéaire que nous avons développée, la non-linéarité des lois de contrainte - déformation des matériaux ainsi que la non-linéarité due aux déplacements (effets du second ordre) ont été introduites. Cette méthode nous permet de décrire, de façon proche de la réalité, le comportement jusqu'à la ruine des structures subissant des déplacements importants ou des redistributions d'efforts considérables.

Le problème non linéaire est résolu par une succession d'étapes de calcul linéaire une résolution itérative basée sur la méthode des déplacements a été utilisée, dans laquelle nous recalculons, à chaque étape, la matrice de rigidité corde reliant les accroissements de déplacements aux accroissements d'efforts.

L'effet de l'effort tranchant est introduit par la méthode des rigidités effectives et ceci dans le calcul de la matrice de rigidité de la section, dans les études antérieures l'effort tranchant est considéré linéaire, le module de déformation transversale G est constant même dans le domaine post fissuration, alors qu'en réalité il diminue considérablement.

Nous proposerons dans le chapitre suivant des formules calculant G tenant compte, justement, de cette diminution de rigidité.

CHAPITRE IV

**MODELISATION DU MODULE DE CISAILLEMENT
DANS LES PHASES POST FISSURATION DU BETON
ET POST PLASTIFICATION DES ACIERS**

CHAPITRE IV

MODELISATION DU MODULE DE CISAILLEMENT G DANS LA PHASE POST FISSURATION DU BETON ET POST PLASTIFICATION DES ACIERS

1. Introduction

La modélisation du comportement en flexion composée jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint est un problème bien connu, dont les premières solutions existent depuis plus de quatre décennies et ont été progressivement étendues à des cas de plus en plus complexes (les poutres à précontrainte extérieure au béton par exemple).

Dans ces études, les déformations non linéaires dues à l'effort tranchant étaient négligées. La prévision de la résistance à l'effort tranchant pouvait être faite par des formules simples, indépendamment du comportement en flexion composée. Même si cette résistance est assurée, l'existence de fissures de cisaillement peut créer un terme de déplacement dû à l'effort tranchant qui n'est pas négligeable vis-à-vis de celui dû à la flexion

Dans ce domaine, les méthodes les plus prometteuses ont été développées essentiellement à partir des années 80 ; par exemple Vecchio et Collins (1982, 1986 et 1988), Hsu (1991), Collins et Michelle (1992). Au CEBTP, après une application ponctuelle aux murs en béton armé par Drizi (1993), Stanciulescu (1996), par ailleurs, il s'avérait que dans les méthodes citées, la présentation des hypothèses, leurs relations au comportement physique et leur traduction en équations n'étaient jamais complètement clair et convaincant, et que les algorithmes de résolution numérique du problème n'étaient pas explicités sous une forme assez générale. Kachi (2006) a présenté un modèle théorique permettant d'analyser le comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint, soumises à l'effet combiné d'une flexion et d'un effort tranchant en élasticité non linéaire en 2D, le modèle simule d'une manière assez correcte le comportement non linéaire, mais son utilisation pratique s'avère compliquée.

D'autres chercheurs [37], [75], [76], [150], ont introduit l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire par la méthode dite de matrice rigidité effective du béton. Le module de cisaillement est introduit dans la matrice rigidité du béton par des relations qui ne sont pas constantes et dépend d'un certain nombre de paramètres. Mais ces études prennent en considération uniquement la phase post fissuration du béton, alors que les observations expérimentales ont montré l'existence d'une autre phase après plastification des aciers ou la pente des courbes (τ - γ) diminue.

On présente donc ici une méthode théorique permettant d'analyser le comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint, en trois dimensions, soumises à l'effet combiné d'une flexion et d'un effort tranchant en élasticité non linéaire. L'effet de l'effort tranchant est pris en considération dans le domaine non linéaire par la méthode de la matrice rigidité effective du béton. On propose des formules tenant compte de la phase post fissuration du béton et de la phase après plastification des aciers. Ce modèle est intégré dans un logiciel de calcul non linéaire des structures en 3D élaboré en fortran90.

2. Exposé général de la modélisation

En élasticité non linéaire, l'étude de l'équilibre d'une structure 3D en béton armé et précontraint passe par la résolution d'un système d'équations de la forme :

$$[\Delta P] = [K] \{\Delta U\} \quad (IV.1)$$

où $[\Delta P]$ est le vecteur représentant l'accroissement du chargement appliqué à la poutre, $[\Delta U]$ est le vecteur représentant l'accroissement des déplacements des nœuds de la poutre et $[K]$ représente la matrice de rigidité globale de la poutre, qui est construite à partir des matrices de rigidité des sections $[K_s]$ qui est constituée des matrices rigidité du béton et des aciers (les aciers peuvent être passifs ou actifs).

$$[K_s] = [K_b] + [K_a] \quad (IV.2)$$

La relation (IV.2) comporte une partie normale et une partie tangente due au béton et l'acier.

La partie tangente s'écrit sous la forme de l'équation (IV.3).

$$[K_{bt}] = \begin{bmatrix} G.A_y & 0 & 0 \\ 0 & G.A_z & 0 \\ 0 & 0 & G.I_x \end{bmatrix} \quad (IV.3)$$

Dans beaucoup de logiciels de calcul non linéaire du comportement des poutres en béton armé, le terme dû à l'effort tranchant est soit totalement ignoré - Grelat (1978) [66] - soit pris égal à la valeur de l'élasticité linéaire, G est constant est fonction du module de déformation longitudinale du béton E . Dans cette étude, on évalue la rigidité au cisaillement de chaque section, le module de déformation transversale G est pris avec une formule fonction des paramètres qui influent sur l'effort tranchant.

3. Observations expérimentales des courbes contraintes déformations de cisaillement

3.1 Essais de Vecchio et Collins (1986)

La figure (IV.1) montre la courbe contrainte de cisaillement (τ) et déformation de cisaillement (γ) du voile n°10 et n°12 sur une série 27 voiles testés par Vecchio et Collins [136]. Le comportement global des voiles présente trois zones, la première zone, la courbe est linéaire élastique avant fissuration du béton, la deuxième zone correspond à la perte de rigidité due à la fissuration puis à la plastification des aciers (zone 3) là aussi il ya une perte de rigidité.

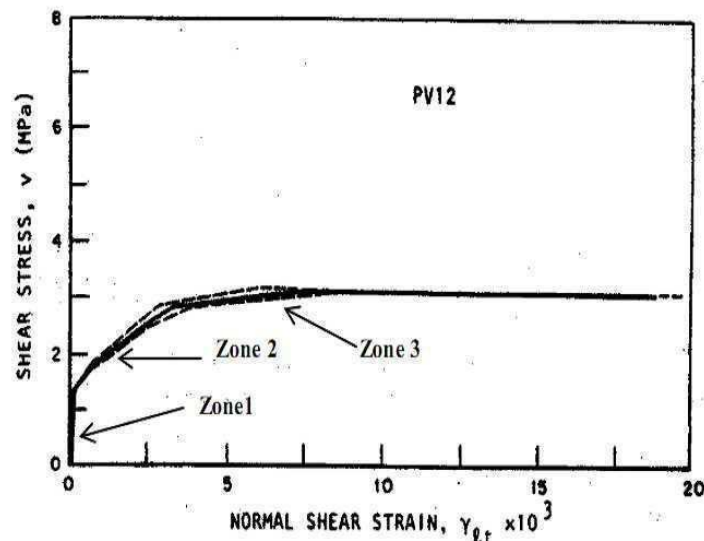
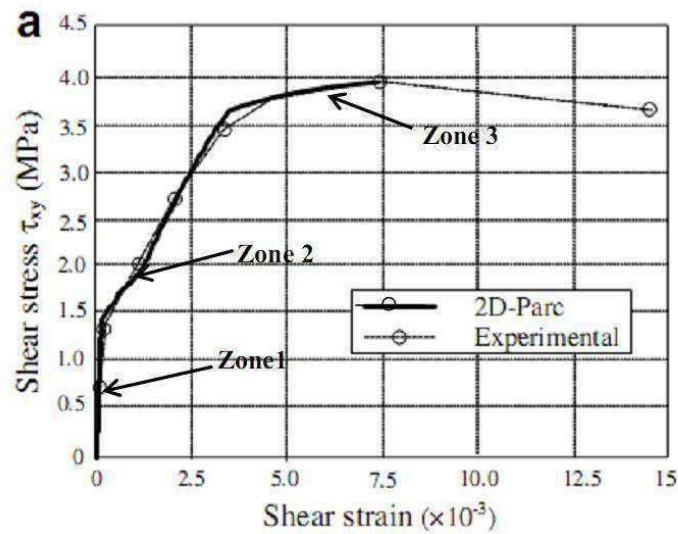


Figure IV.1 : Allure des courbes (τ - γ) des voiles n°10 et n°12.

Ce comportement est confirmé pour l'ensemble des voiles soit 27 éléments voir la figure (IV.2).

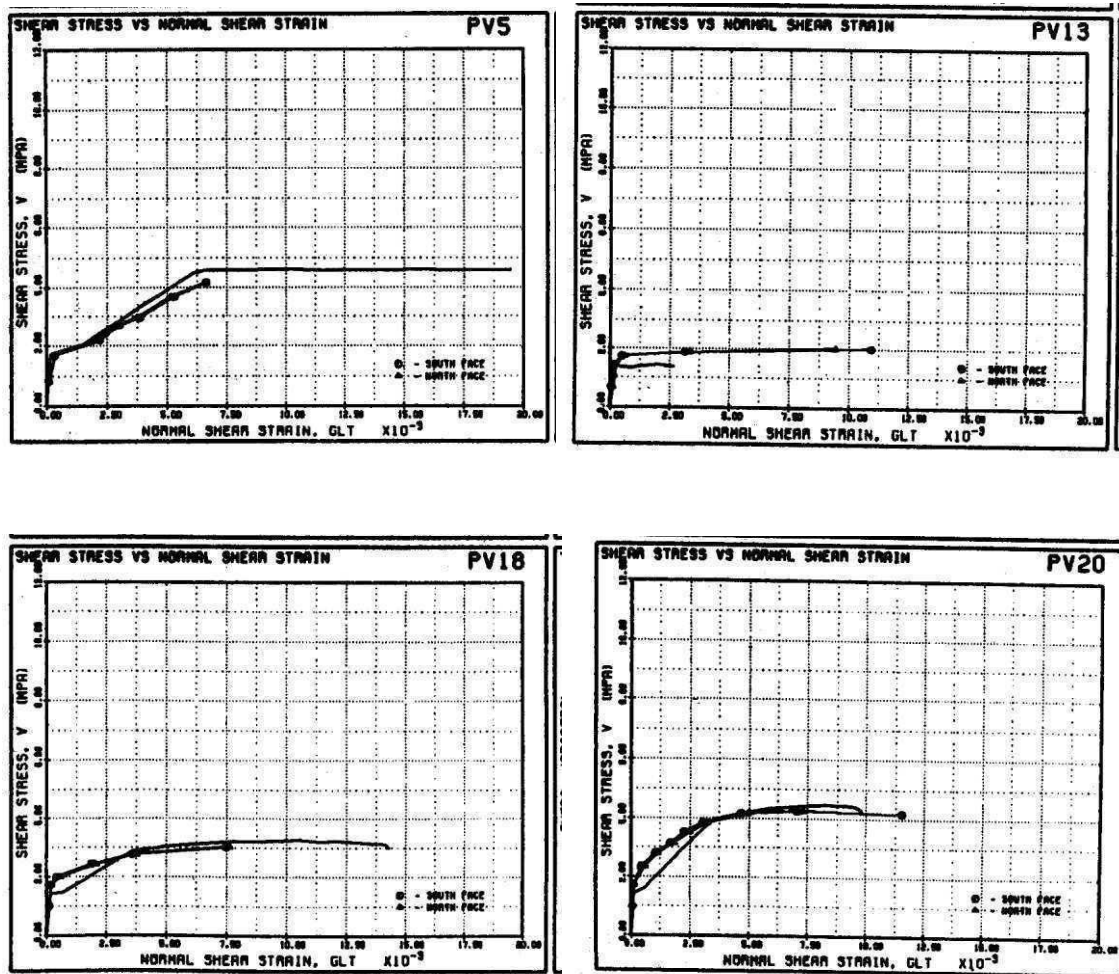


Figure IV.2 : comportement de quelques voiles testées par Vecchio et Collins.

3.2 Essais de l'université de Toronto

Pour la confirmation de la présence de ces trois phases de comportement, la figure (IV.3) montrent l'allure des courbes expérimentales contraintes déformations de cisaillement de diverses poutres testées par plusieurs chercheurs à l'université de Toronto [135]. Les différentes zones de comportement sont évidentes.

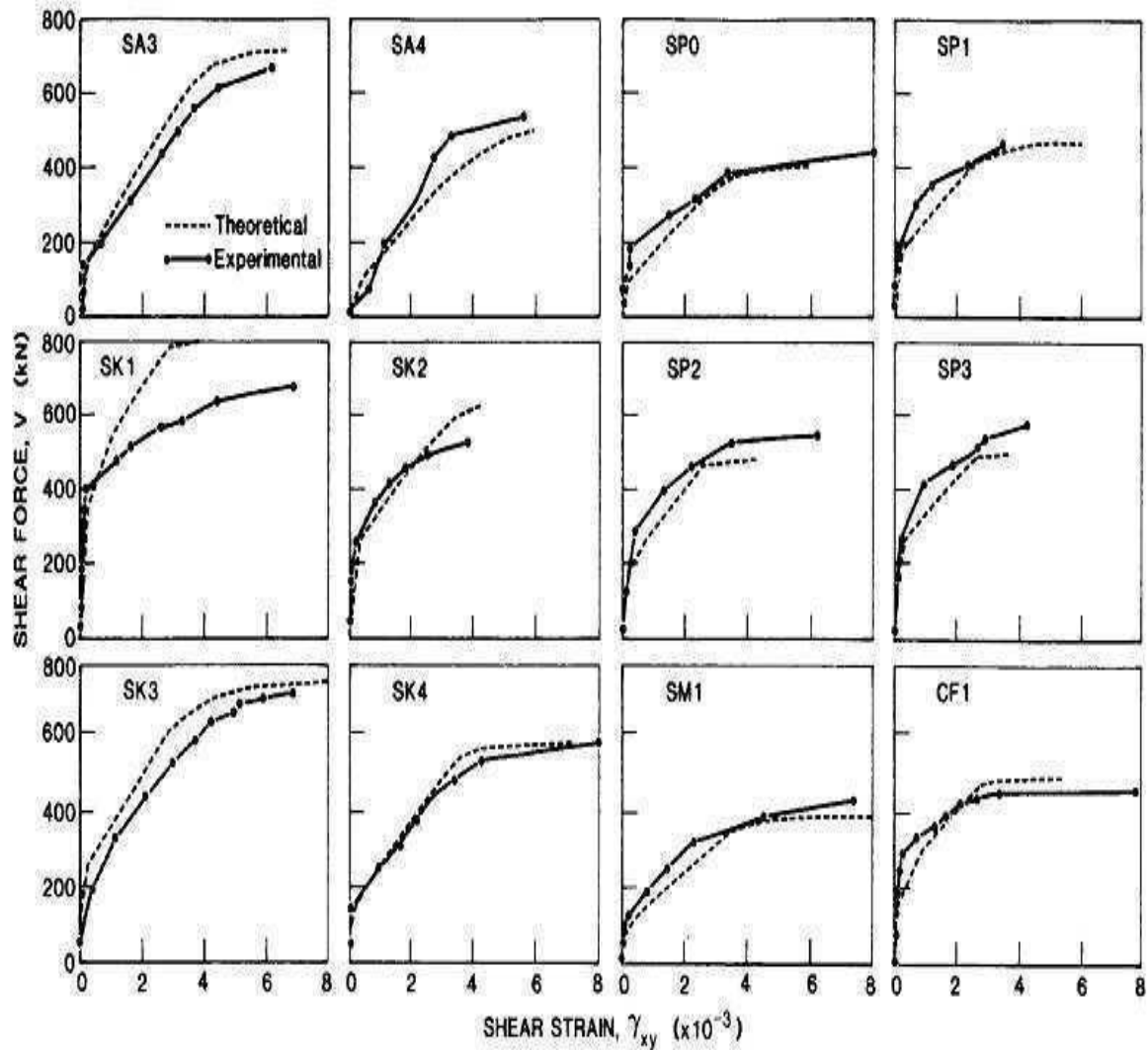


Figure IV.3 : courbes expérimentales contraintes déformations de cisaillement, université de Toronto [135].

3.3 Etude par éléments finis Vecchio (1989)

Vecchio (1989) [133] a analysé avec la méthode des éléments finis des voiles de dimensions (850x850) mm et de 70 mm d'épaisseur, les voiles sont armés transversalement et longitudinalement avec le même pourcentage d'armature. L'allure des courbes contrainte déformation de cisaillement est présentée à la figure (IV.4). On retrouve le comportement global avec les différentes phases de fonctionnement.

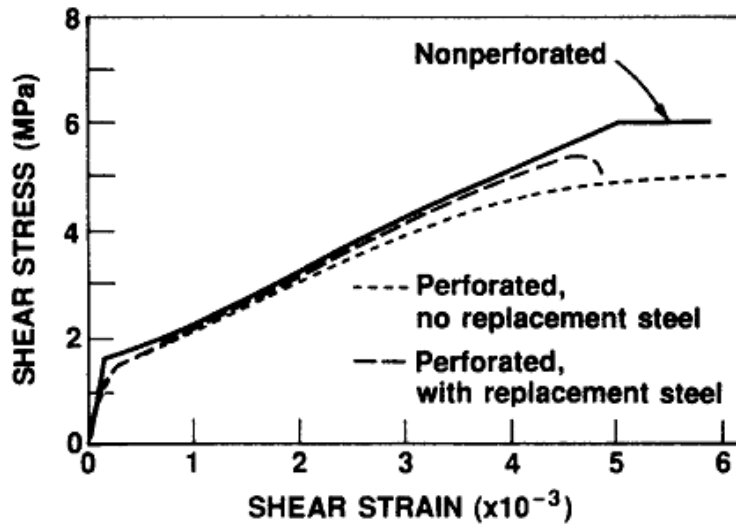


Figure IV.4: voiles analysé par Vecchio (1989) [133].

3.4 Essais sur poutre de Vecchio et Mohamed Basil Emara (1992)

La poutre étudiée à une longueur de 3100 mm et de section transversale rectangulaire (300 x 400) mm² [62]. Les caractéristiques géométriques, les détails de ferrailage ainsi que les caractéristiques des matériaux sont données à la figure (IV.4).

La poutre est soumise à un chargement à mi-travée, les auteurs ont étudié deux cas selon les conditions d'appui, cas 1 : poutre simplement appuyée ; cas 2 : poutre encastree aux extrémités

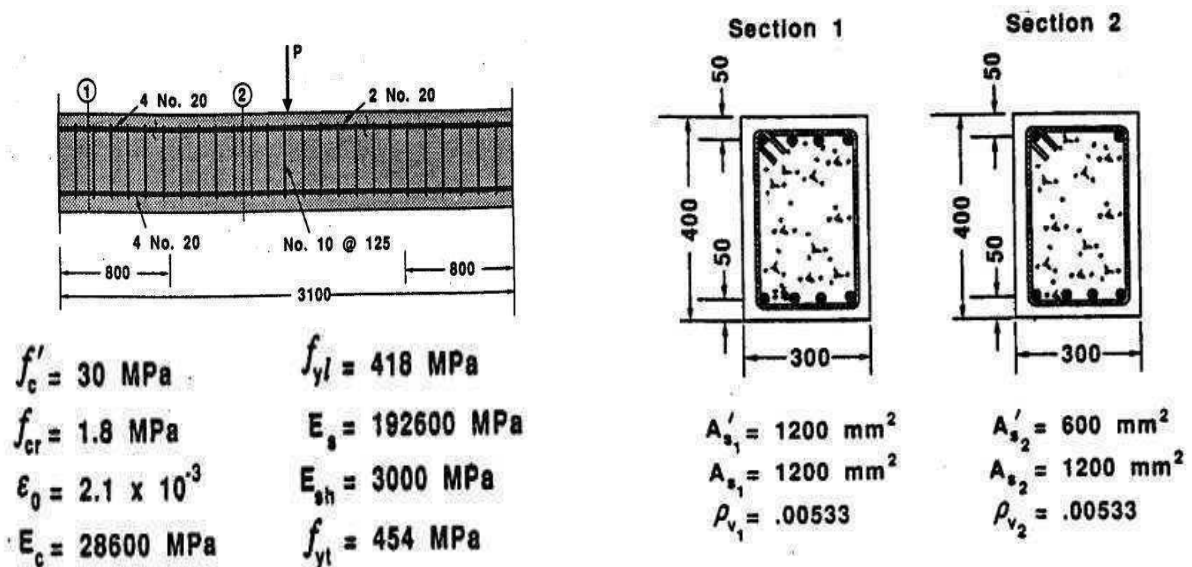


Figure IV.5 : détails des poutres étudiée par Vecchio et al(1992).[62].

La figure (IV.5) montre l'allure des courbes efforts déformation de cisaillement, les courbes comportent aussi trois phases de comportement.

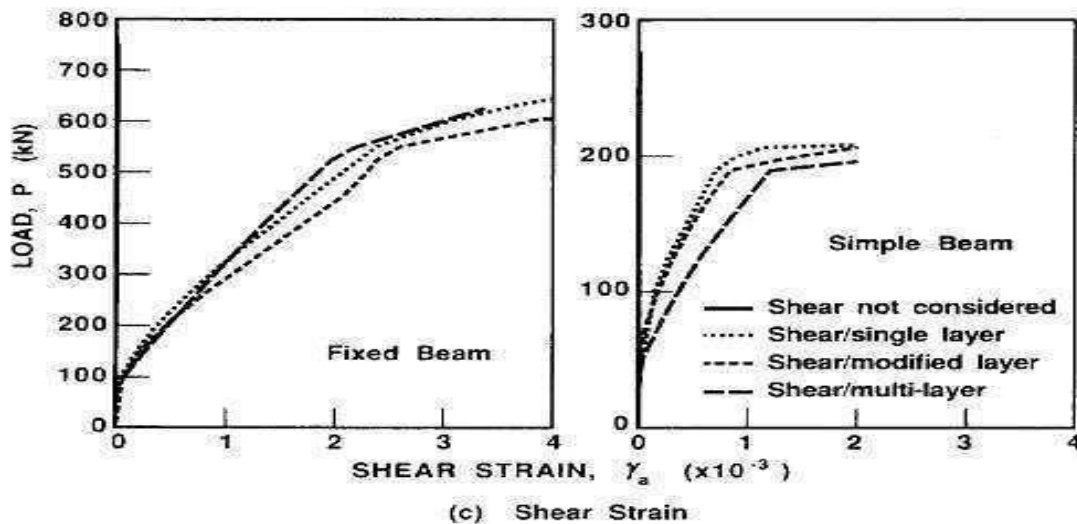


Figure IV.6 : allure des courbes efforts déformation de cisaillement Vecchio et al(1992) [62].

4. Analyse et présentation schématique

L'analyse des courbes des figures (IV.1, IV.2, IV.3, IV.4 et IV.6) fait apparaître que dans la zone 1 ; avant fissuration du béton la réponse est principalement linéaire, et la pente de la courbe dans cette région désignée sous le nom du module de déformation transversale G est calculé avec la théorie de l'élasticité linéaire, qui reste généralement adéquate et qui est fonction du module de déformation longitudinale du béton. Dans la zone 2 : phase post fissuration du béton et avant plastification des aciers, la pente de la courbe contrainte déformation diminue. Zone 3 qui correspond à la phase après plastification des aciers, la pente diminue également.

Une présentation schématique du comportement d'ensemble est donnée à la figure (IV.7).

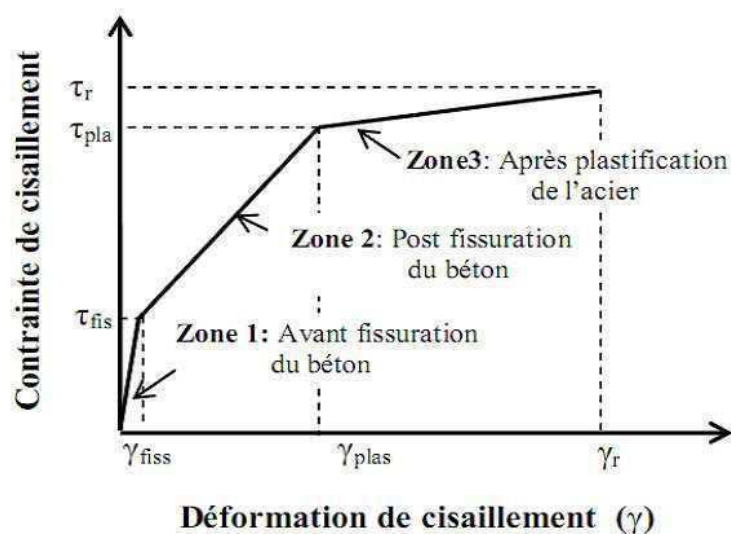


Figure IV.7 : Présentation schématique du comportement global.
(contraintes-déformation de cisaillement)

5. Evaluation du module de déformation transversale G

Le module tangent G , peut-etre obtenu en analysant les courbes contraintes deformation de cisaillement sur des essais à l'effort tranchant. Plusieurs spécimens ont été analysés. Particulièrement les essais sur voiles testés par Vecchio et Collins [136]. Les paramètres qui contribuent à la résistance à l'effort tranchant qui sont pour rappel, la résistance du béton non fissuré, la capacité de béton fissuré à transmettre les contraintes, le pourcentage d'armatures transversales et la présence d'aciers longitudinaux, peuvent être liés par une seule relation (IV.5).

Notons par (w) un paramètre reliant les caractéristiques des matériaux.

$$w = \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}} \quad (IV.5)$$

Avec :

ρ_t : pourcentage d'armature transversale dans la section

ρ_l : pourcentage d'armature longitudinale dans la section

f_{et} : limite élastique des armatures transversales

f_{el} : limite élastique des armatures longitudinales

f_{cj} : résistance caractéristique du béton à la compression

5.1 Zone 1 : Phase avant fissuration du béton

Pour des valeurs de déformation de cisaillement inférieures à la valeur correspondant à la fissuration du béton (γ_{fiss}), la théorie de l'élasticité linéaire reste valable le module de déformation transversale G est fonction du module de déformation longitudinale du béton à l'origine E_c , il est donné par la relation :

$$G = \frac{E_c}{2(1-\mu)} \quad \text{Pour} \quad (0 \leq \gamma \leq \gamma_{fiss}) \quad (IV.4)$$

Avec :

γ_{fiss} : déformation de cisaillement correspondant a la fissuration du béton.

μ : coefficient de poisson pris égale à 0.2

5.2 Zone 2 : Phase post fissuration et avant plastification des aciers

Dans cette région et pour des valeurs de déformation de cisaillement comprises entre la déformation correspondant à la fissuration du béton (γ_{fiss}) et la déformation correspondant à la plastification des aciers (γ_{plas}), le module de déformation transversale G est fonction des

caractéristiques du béton et des aciers. L'analyse des courbes (τ - γ_{fiss}) expérimentales des essais sur voiles testés par Vecchio et Collins [136] nous a permis d'établir une relation liant le module de déformation transversale G et les paramètres qui influent sur l'effort tranchant.

Sur la figure (IV.8), nous traçons G_{1exp} valeurs expérimentales issues des essais de Vecchio et Collins pour la zone 2 (voir tableau IV.1), en fonction du paramètre w .

Pour un meilleur ajustement des points expérimentaux, la méthode des moindres carrés et la méthode des moyennes arithmétiques ont été utilisées. La meilleure droite d'ajustement est celle utilisant la moyenne arithmétique qui correspond à un coefficient $\alpha = 604$. Le module de déformation transversale G est calculé dans cette zone par la relation (IV.5).

$$G = \alpha w = \alpha \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}} \quad \text{Pour } (\gamma_{fiss} \leq \gamma \leq \gamma_{plas}) \quad (IV.5)$$

Avec :

$$\alpha = 604$$

γ_{plas} : déformation de cisaillement correspondant à la plastification des aciers.

5.3 Zone 3 : Phase post plastification des aciers

L'analyse des courbes expérimentales a montré que pour des valeurs de déformation de cisaillement supérieures à la déformation correspondant à la plastification des aciers (γ_{plas}), le module tangent G diminue d'une manière significative.

Sur la courbe (IV.9) est tracé les valeurs expérimentales de la zone 3 (G_{2exp}) en fonction du paramètre w défini précédemment. La meilleure droite englobant les points expérimentaux est définie par le coefficient $\beta = 327$. Le module de déformation transversale est calculé donc dans cette zone par la relation (IV.6).

$$G = \beta w = \beta \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}} \quad \text{Pour } (\gamma_{plas} \leq \gamma \leq \gamma_r) \quad (IV.6)$$

Avec :

$$\beta = 327$$

γ_r : déformation de cisaillement correspondant à la rupture.

Les tableaux (IV.1) et (IV.2) comparent les valeurs de G calculés avec les relations proposées et les valeurs expérimentales, la figure IV.10 montre le rapport G_{exp}/G_{calc} , pour les phases 2 et 3, en fonction de la contrainte de béton à la compression,

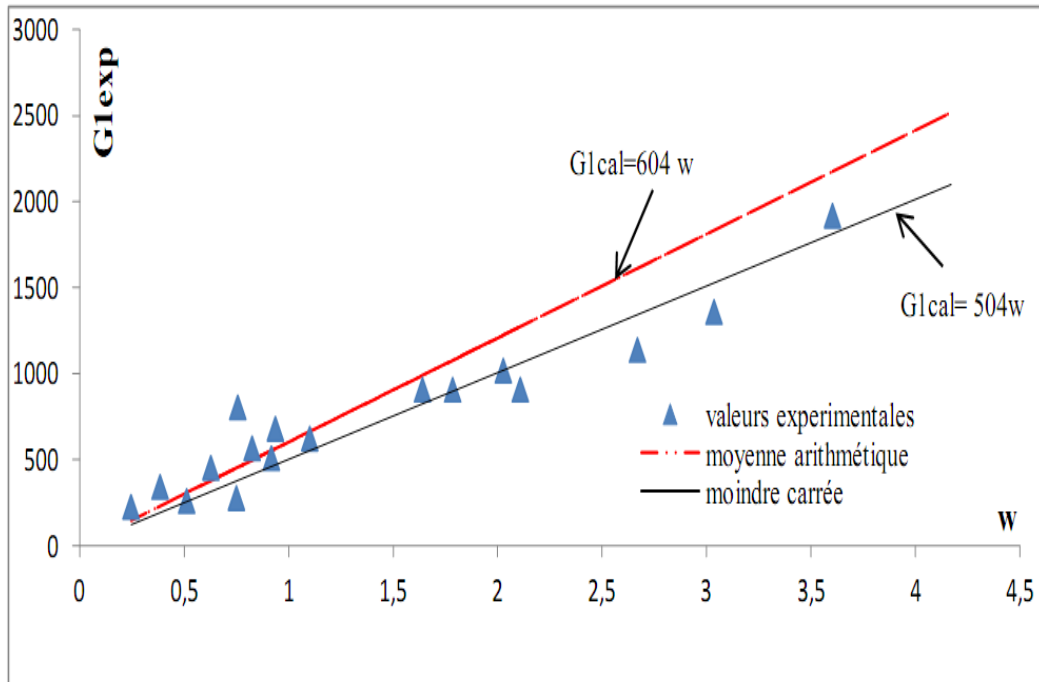


Figure IV.8 : Evaluation du module G (Phase post fissuration du béton).

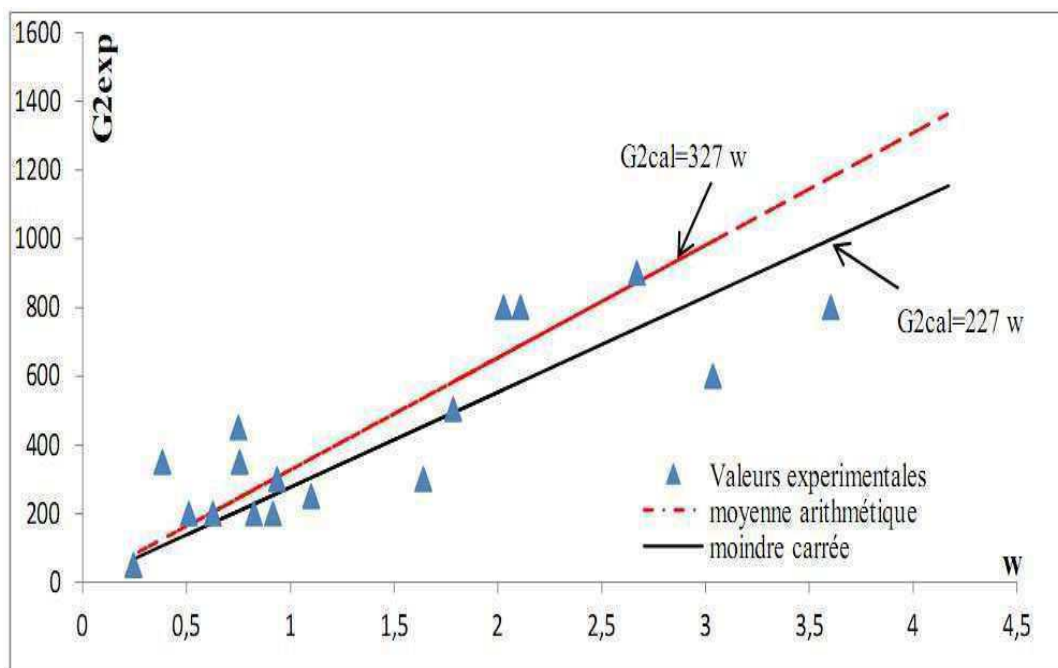


Figure IV.9 : Evaluation du module G (Phase après plastification des aciers).

essais	fcj(MPa)	$\rho_i f_{cl}$	$\rho_i f_{et}$	G1exp(MPa)	G1calc(MPa)	G1exp/G1calc
PV1	34,5	8,621555	8,1144	1020	1224,78	0,83
PV3	26,6	3,19746	3,19746	244	232,148	1,48
PV4	26,6	2,5555	2,2455	128	148,29	1,54
PV5	28,3	4,60782	4,60782	279	453,149	0,62
PV6	29,8	4,7481	4,748	806	456,941	1,76
PV7	31	8,08605	8,08605	909	1273,937	0,71
PV10	14,5	4,9266	2,75724	682	565,836	1,21
PV11	15,6	4,19475	3,0691	568	498,459	1,14
PV12	16	8,37165	1,19974	455	379,153	1,20
PV18	19,5	7,69335	1,2978	262	309,261	0,85
PV19	19	8,1753	2,13187	511	554,048	0,92
PV20	19,6	8,211	2,6284	625	665,084	0,94
PV21	19,5	8,1753	3,9139	909	991,101	0,92
PV22	19,6	8,1753	6,4008	1140	1612,57	0,71
PV25	19,2	8,3181	8,3181	1920	2176,63	0,88
PV26	21,3	8,1396	4,67167	909	1078,28	0,84
PV27	20,5	7,8897	7,8897	1360	1834,02	0,74

Tableau IV.1 : détail des essais expérimentaux et vérification du module de déformation transversale G – Zone 2 : Post fissuration du béton.

essais	fcj(MPa)	$\rho_i f_{cl}$	$\rho_i f_{et}$	G2exp(MPa)	G2calc(Mpa)	G2exp/G2calc
PV1	34,5	8,621555	8,1144	800	663,086	1,21
PV3	26,6	3,19746	3,19746	150	125,6829	1,19
PV4	26,6	2,5555	2,2455	500	80,2832	0,62
PV5	28,3	4,60782	4,60782	350	245,33	1,43
PV6	29,8	4,7481	4,748	350	247,383	1,41
PV7	31	8,08605	8,08605	800	689,6979	1,16
PV10	14,5	4,9266	2,75724	300	306,338	0,98
PV11	15,6	4,19475	3,0691	200	269,861	0,74
PV12	16	8,37165	1,19974	200	205,27	0,98
PV18	19,5	7,69335	1,2978	200	167,4312	1,20
PV19	19	8,1753	2,13187	200	299,956	0,67
PV20	19,6	8,211	2,6284	250	360,070427	0,70
PV21	19,5	8,1753	3,9139	400	536,5729	0,75
PV22	19,6	8,1753	6,4008	900	873,0309	1,03
PV25	19,2	8,3181	8,3181	800	1178,4056	0,68
PV26	21,3	8,1396	4,67167	504	583,772	0,86
PV27	20,5	7,8897	7,8897	600	992,921	0,60

Tableau IV.2 : détail des essais expérimentaux et vérification du module de déformation transversale G – Zone 3 : Post plastification des aciers.

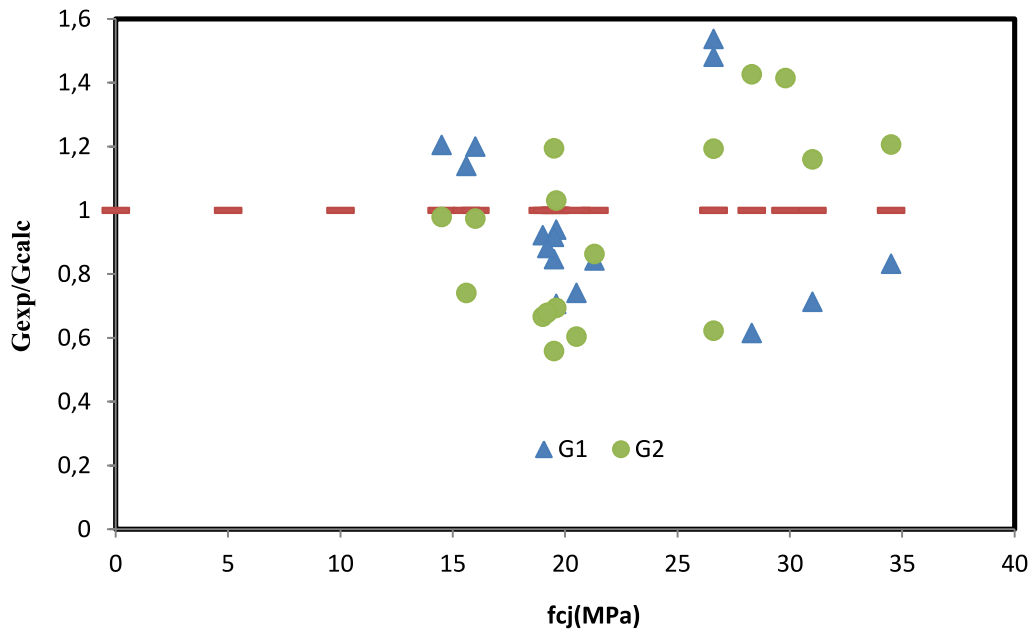


Figure IV.10: Confirmation de G calculé par rapport à G expérimental pour les deux phases.

La valeur moyenne du rapport entre l'expérimentale et les valeurs calculées du module G est de 1.02 pour la phase 2 (post fissuration du béton), la valeur moyenne pour la phase 3 (après plastification de l'acier) est de 0.92 soit un coefficient de variation moyen de l'ordre de 20% pour les deux phases, ce qui conforte, en quelque sorte, la démarche adoptée.

6. Détermination des bornes de déformation de cisaillement

Les relations définies précédemment sont valables sur des limites de déformation de cisaillement (voir figure IV.7), γ_{fiss} représente la fin de la phase élastique, γ_{plas} représente la fin de la phase post fissuration du béton et début de la plastification des aciers, γ_r est la déformation correspondant à la rupture. Ces valeurs sont déterminées par des constatations expérimentales. Elles sont calculées par la moyenne arithmétique sur plusieurs spécimens. Les valeurs trouvées sont $\gamma_{fiss}=0.3 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{plas}=2,5 \cdot 10^{-3}$ et $\gamma_r=6 \cdot 10^{-3}$.

Le module de déformation transversale G est introduit dans un programme de calcul non linéaire des ossatures tridimensionnelles jusqu'à rupture par la relation (IV.7).

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{E_c}{2(1-\mu)} && \text{Pour } 0 \leq \gamma \leq 0.0003 \\
 G &= 604 \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}} && \text{Pour } 0.0003 \leq \gamma \leq 0.0025 \\
 G &= 327 \frac{\rho_t f_{et} \rho_l f_{el}}{f_{cj}} && \text{Pour } 0.0025 \leq \gamma \leq 0.006
 \end{aligned} \tag{IV.7}$$

7. Conclusion

Une formulation est proposée pour calculer le module de déformation transversale post fissuration du béton et post plastification des aciers pour des éléments soumis à l'effort tranchant, ces relations combinent, à la fois, les paramètres qui contribuent à l'effort tranchant (caractéristiques du béton, pourcentage d'armatures transversal et longitudinal).

Malgré leurs simplicités, les équations proposées, sont capables de simuler correctement le comportement post fissuration et post plastification des éléments en béton armé ou béton précontraint observé dans les essais.

Les relations (IV.7) seront intégrés dans la matrice de rigidité des sections dans un calcul global non linéaire des structures 3D selon la méthode développée au chapitre III, afin de prédire le comportement charge-déplacement jusqu'à rupture en flexion composée avec effort tranchant, pour des éléments de structure présentant des sections quelconques avec des détails de ferrailage variables, y compris une précontrainte interne.

CHAPITRE V

VERIFICATION EXPERIMENTALE ET

VALIDATION DU MODELE PROPOSE

CHAPITRE V

VERIFICATION EXPERIMENTALE ET VALIDATION DU MODELE PROPOSE

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en œuvre du modèle proposé au chapitre IV dans un programme de calcul non linéaire des structures tridimensionnelles, élaboré en fortran 90 à partir des travaux de Nait Rabah [104] et Kachi [80]. Pour la validation nous avons choisi un ensemble de structures en béton armé et béton précontraint réunissant différents types de configurations, tant du point de vue section transversales (sections rectangulaires, sections en T...etc) que des pourcentages d'armatures (transversale et longitudinale). En analysant les qualités des résultats, on s'attachera à montrer la pertinence de la démarche pour la contribution de la rigidité de cisaillement sur le comportement global.

Nous allons présenter un ensemble d'exemples de validation qui montrent les possibilités offertes par notre démarche.

2. Poutre isostatique soumise à l'effort tranchant (essais Stuttgart)

2.1 Définition des essais

Nous utiliserons le modèle proposé pour reproduire les résultats expérimentaux des essais de cisaillement de Stuttgart [101]. Ces spécimens ont été soumis aux efforts de cisaillement élevés qui ont fortement influencé leur comportement. Ce sont des poutres simplement appuyées de 3 m de longueur soumises à deux charges ponctuelles et symétriques (figure V.1), cette figure montre, aussi, la disposition des armatures. Quatre types de poutre ont été testées (ET1, ET2, ET3 et ET4), les caractéristiques géométriques des corps d'épreuve sont données pour chaque élément sur la figure V.2. On note que la largeur, la hauteur et le ferrailage sont les mêmes pour tous les spécimens.

Pour les lois de comportement des matériaux, nous adopterons les modèles donnés au chapitre II. Pour le béton nous utilisons le modèle de Sargin pour la compression et le modèle de Grelat pour la contribution du béton tendu. Pour les aciers la loi bilinéaire élastoplastique sera retenue. Le tableau (V.1) résume les principales caractéristiques des matériaux.

Béton (MPa)	Armatures longitudinales (MPa)	Armatures transversales (MPa)
$E_c = 23800$	$E_a = 210000$	$E_a = 200000$
$f_{cj} = 28.5$	$f_{el} = 420$	$f_{et} = 320$

Tableau V.1 : Propriétés mécaniques des matériaux ; essai Stuttgart [101].

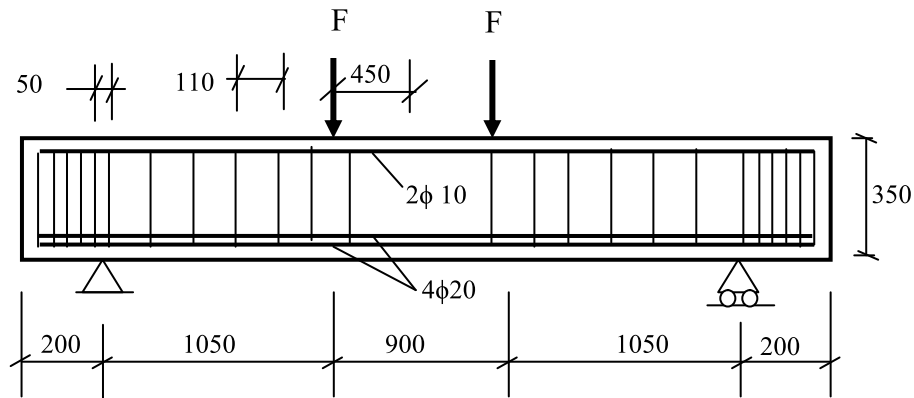


Figure V.1 : Dimensions et détails de ferrailage ; essais Stuttgart [101].

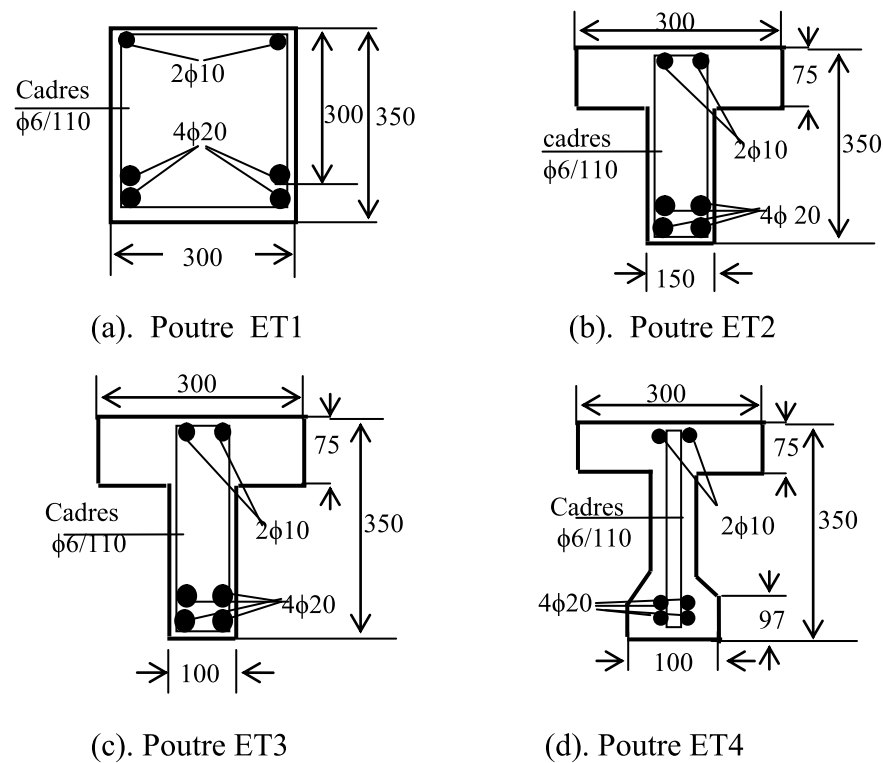


Figure V.2 : Caractéristiques géométriques des spécimens ET1, ET2, ET3 et ET4 [101].

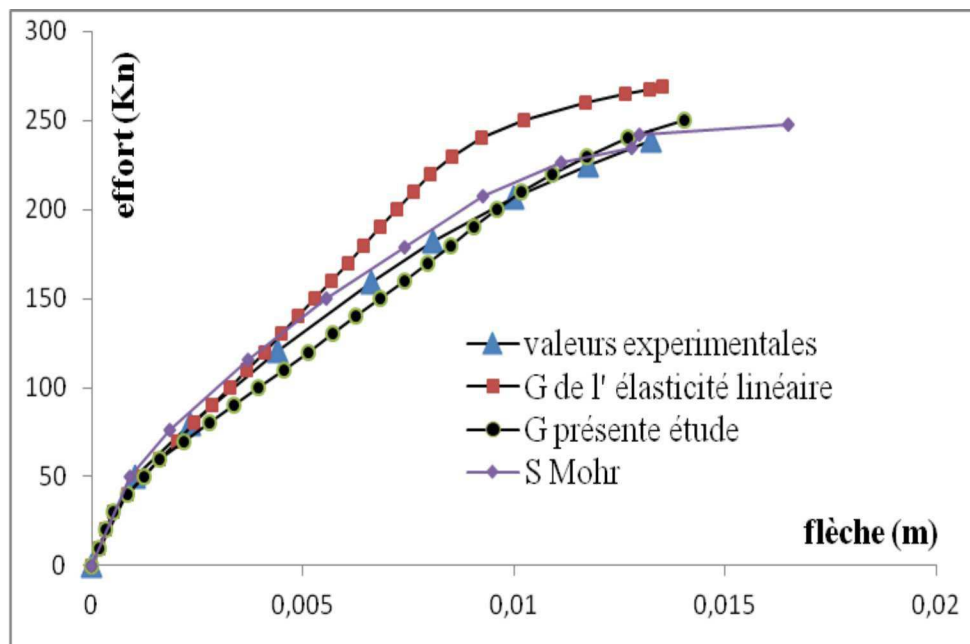
2.2 Résultats et confrontation

La figure V.3 montre les courbes charges appliquées et déplacements à mi-travée, expérimentales et calculées en utilisant la théorie de l'élasticité linéaire et la modélisation

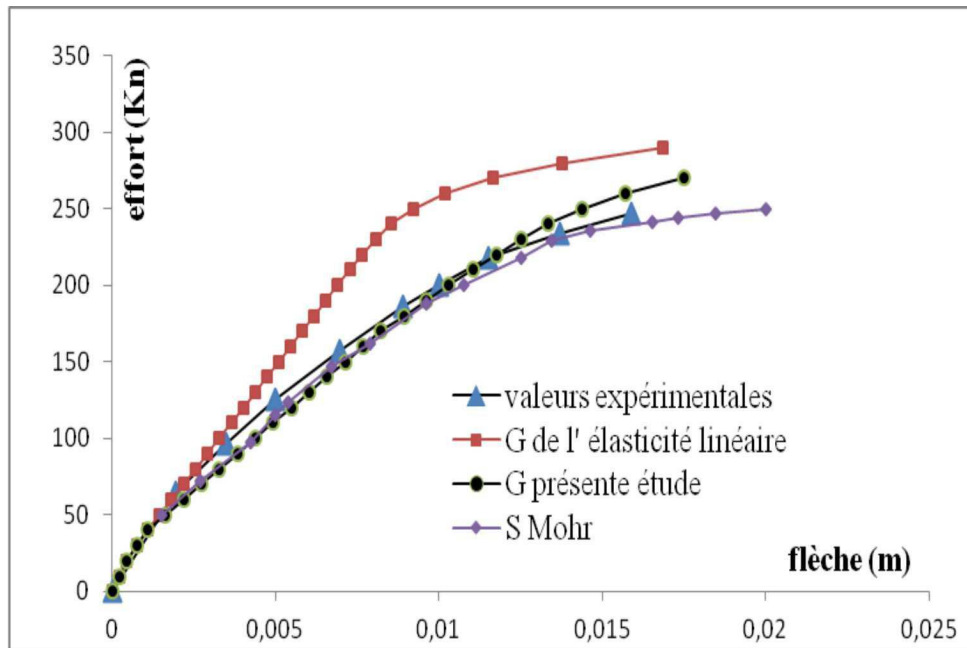
proposée. Pour les quatre poutres testées, la comparaison présentée montre la bonne adéquation de nos résultats avec les valeurs expérimentales, on peut remarquer que pour la courbe calculée en utilisant le module G de l'élasticité linéaire la différence est importante en phase post fissuration, prouvant que les déformations de cisaillement dans les programmes utilisant cette théorie sont négligeables.

D'autre part, nous proposons de comparer les courbes obtenues avec notre modèle et les courbes issues d'une modélisation non linéaire en utilisant un modèle poutre tenant compte de l'interaction effort tranchant moment fléchissant de Steffen Mohr (Espagne) [101]. La comparaison montre que nos résultats, aussi bien avant ou après fissuration du béton, sont de mêmes ordres que les résultats de Steffen Mohr.

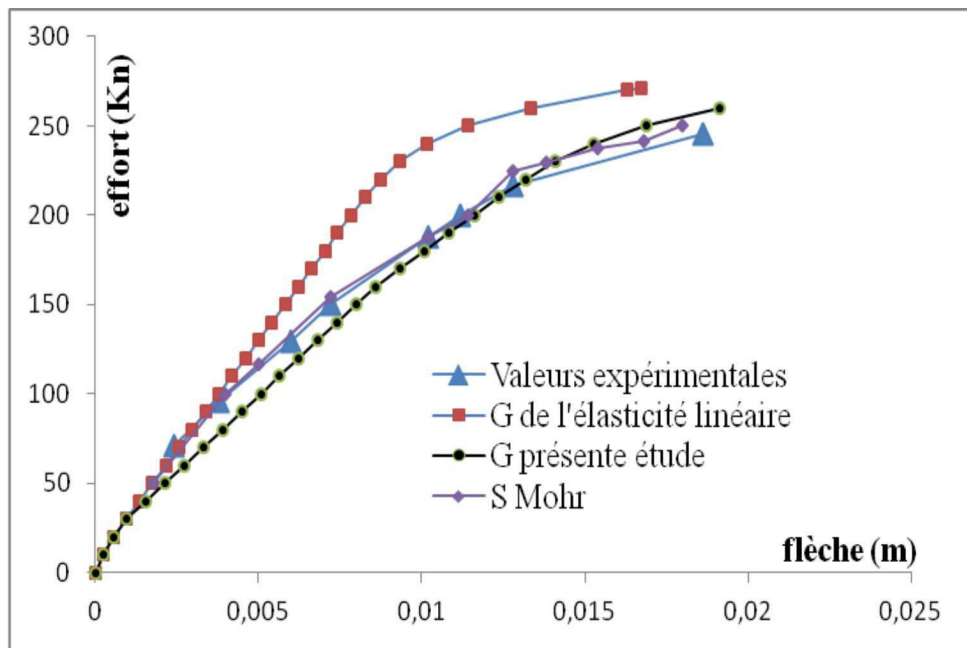
Il apparaît que dans le cas des poutres soumises à des contraintes de cisaillement élevées, il est essentiel de tenir compte des déformations de cisaillement ainsi que de l'interaction effort tranchant moment fléchissant dans le calcul non linéaire pour reproduire les courbes expérimentales et donc le comportement réel de la structure.



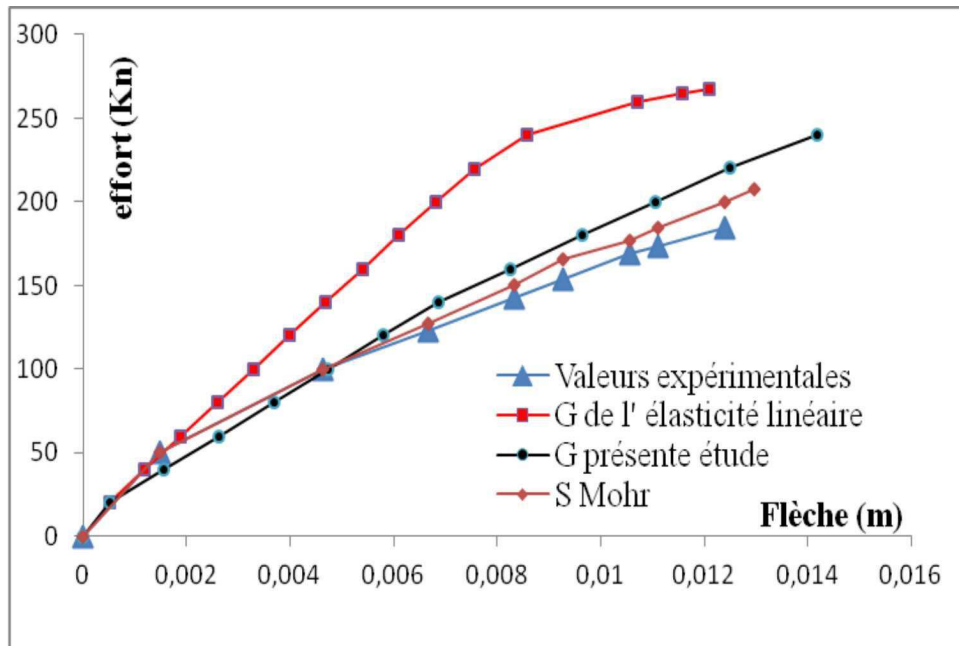
(a). Poutre ET1



(b). Poutre ET2



(c). Poutre ET3



(d). Poutre ET4

Figure V.3 : Comparaison des résultats d'expérience et de simulation pour les poutres ET1, ET2, ET3 et ET4.

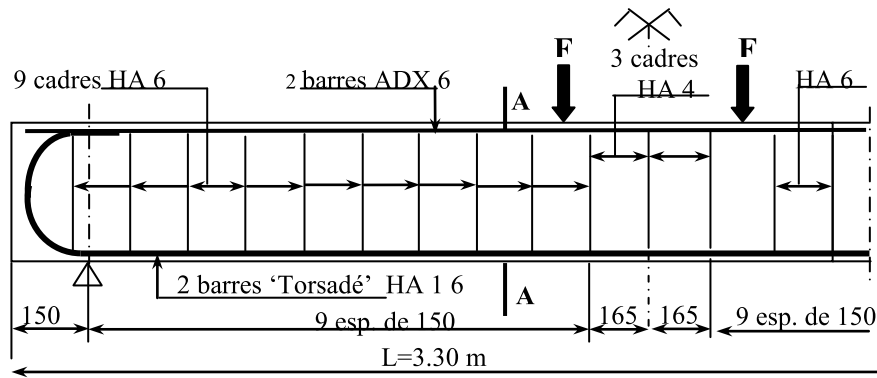
3. validation sur une structure en BHP

3.1 Présentation des poutres OG

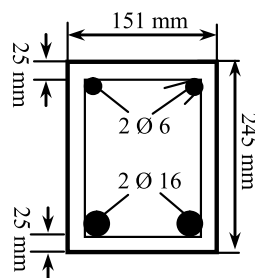
L'objectif de cette validation numérique est de montrer la capacité du modèle proposé à prédire le comportement des structures en béton de haute performance (BHP). L'exemple choisi concerne les essais menés au Département Structures du CEBTP par B. Fouré [61], les corps d'épreuve sont deux poutres identiques en dimensions et en ferrailage (voir figure V.4). La poutre OG3 est fabriquée avec un béton normal d'une résistance au jour de l'essai de 52.5MPa. La poutre OG4 est constituée d'un béton de haute performance de résistance de $f_c = 71$ MPa. Les caractéristiques du béton et des armatures sont données au tableau V.2.

Poutres	OG3	OG4
Béton	$f_{c,j} = 52.5$ MPa $E_c = 39900$ MPa $\epsilon_0 = 1.7$ $f_{tj} = 3.35$ MPa	$f_{c,j} = 71$ MPa $E_c = 46900$ MPa $\epsilon_0 = 1.9$ $f_{tj} = 4.05$ MPa
Armatures transversales et longitudinales	$E_a = 205000$ MPa $f_{el} = 575$ MPa $f_{et} = 575$ MPa	$E_a = 210000$ MPa $f_{el} = 590$ MPa $f_{et} = 590$ MPa

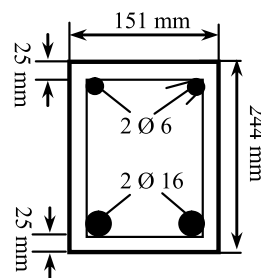
Tableau V.2 : Principales caractéristiques des matériaux poutres OG.



(a) : Dimensions et ferrailage des poutres OG.



(b). Coupe A-A (OG3)



(c). Coupe A-A (OG4)

Figure V.4 : Description schématique des poutres testées au CEBTP [61].

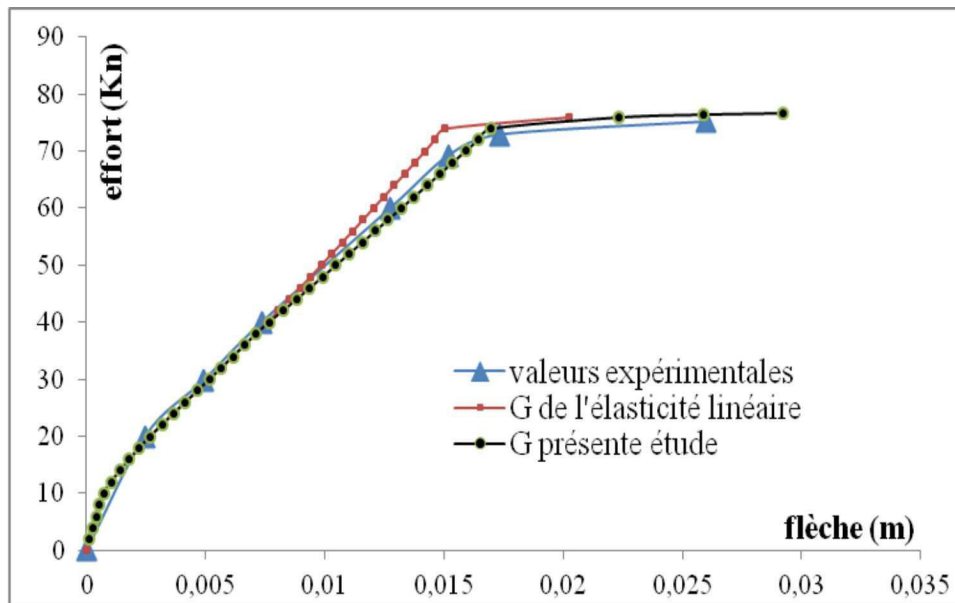
3.2 Interprétations des résultats

L'observation des résultats de la simulation montre que les principaux phénomènes de comportement observés dans l'expérience (figure V.5) sont prédits de manière satisfaisante.

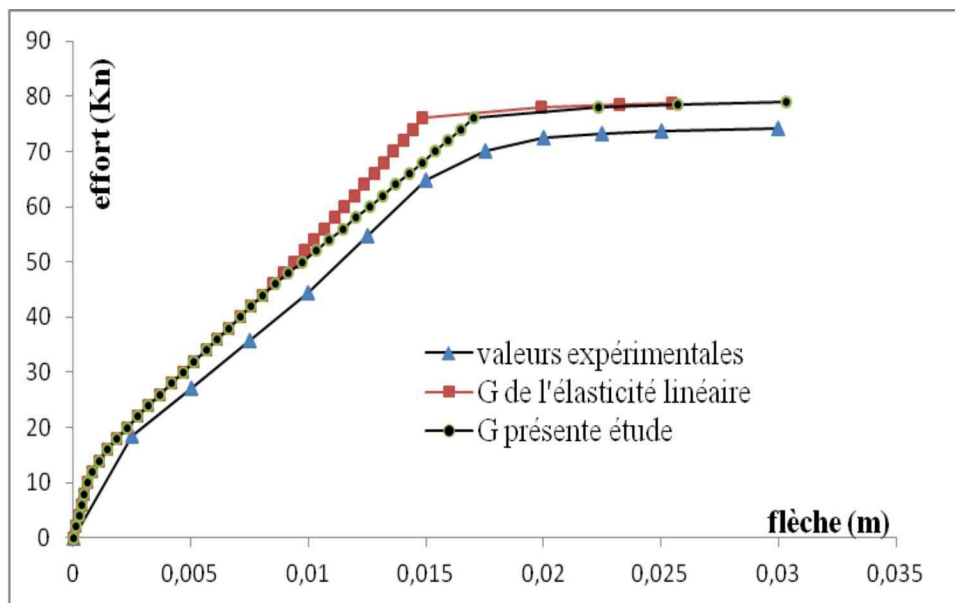
La comparaison est faite d'une part en ce qui concerne les résultats expérimentaux et également relativement au calcul dans le cas où G est considéré dans le domaine de l'élasticité linéaire. Les courbes efforts flèches trouvées avec notre modèle se rapprochent mieux du comportement réel des poutres.

La fissuration réelle se produit pour une charge assez faible, les valeurs observées expérimentalement sont : OG3 (BN) environ 12,3 Kn, OG4 (BHP) environ 13,7 Kn, les valeurs données par notre modèle sont de 12 Kn pour OG3 et de 12.5 KN pour OG4 soit une différence de l'ordre de 6%.

Dans la phase post fissuration du béton le comportement est sensiblement linéaire mais avec une rigidité tangente réduite, les courbes charge flèche présentent ensuite une brusque incurvation qui correspond à la plastification des armatures, la charge réelle (expérimentale) correspondante est de 70 Kn, par contre la charge calculée avec notre modèle est de l'ordre de 74 Kn. Globalement la différence entre nos résultats et l'expérimentation n'excède pas 5%.



(a). Poutre OG3 (Béton normal).



(b). Poutre OG4 (Béton Haute Performance).

Figure V.5 : Prédiction du comportement des poutres en BN et BHP ; Essai OG.

4. Poutre continue hyperstatique

4.1 Caractéristique de la poutre et mode opératoire

Le teste numérique est fait sur la base des résultats d'essais donnés en [3]. Il s'agit d'une poutre continue hyperstatique testée par J. Pera de section (20x50 cm), elle comporte deux

travées égales de 5m de portée, au milieu de l'une des travées est appliquée une charge P croissante jusqu'à la rupture complète voir figure V.6. (a).

Les caractéristiques géométriques et les détails de ferrailage de la poutre sont décrits sur la figure V.6. (b). En ce qui concerne les caractéristiques mécaniques des matériaux, le béton à une résistance ultime en compression de 41 MPa et en traction 3.1 MPa. La poutre est armée longitudinalement et transversalement d'acier de limite élastique égale à 368 MPa (voir tableau V.3). Notons que pour les paramètres qui n'ont pas été rapportés dans la référence [3] et qui sont nécessaires pour la modélisation, des formules du BAEL 91 ont été employées pour les estimer.

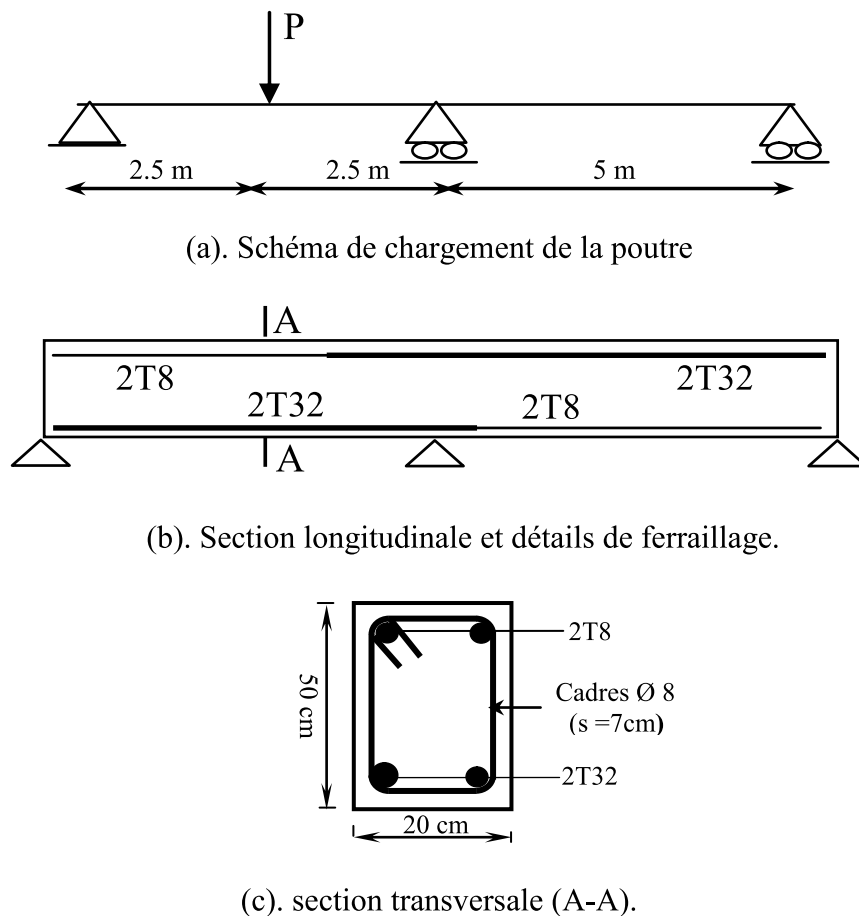


Figure V.6 : Caractéristiques géométrique de la poutre testée par Pera[3].

Béton			Armatures transversales et longitudinales		
f_{cj} (MPa)	f_{tj}^* (MPa)	E_c^* (MPa)	f_{el} (MPa)	f_{et} (MPa)	E_a (MPa)
41	3.1	37930	368	368	200000

*Valeurs calculées avec le BAEL

Tableau V.3: caractéristiques mécaniques des matériaux ; Poutre Pera.

4.2 Comparaison des résultats et interprétation

La figure V.7 montre l'évolution de la flèche en fonction du chargement au point d'application de la charge et cela pour les valeurs de l'essai, pour des valeurs issues de la méthode proposée dans un calcul non linéaire et pour les valeurs de l'élasticité linéaire avec la conservation de la rigidité de cisaillement.

La charge et le déplacement simulés, avec la présente étude, approchent d'une manière satisfaisante les valeurs expérimentales, aussi bien pour la phase pré ou post fissuration du béton avec des différences ne dépassant pas 5%.

Cette poutre a fait objet, aussi, d'une simulation numérique non linéaire en utilisant un critère d'endommagement par S. Amziane (Nantes France)[3], la courbe effort flèche de cette étude est donnée à la figure V.7. les deux modèles simulent correctement les phases pré et post fissuration du béton, par contre notre démarche semble prédire mieux la phase post plastification des aciers.

Nous remarquons, aussi, que pour le même chargement le calcul de l'élasticité linéaire sous-estime les flèches par rapport aux valeurs réelles.

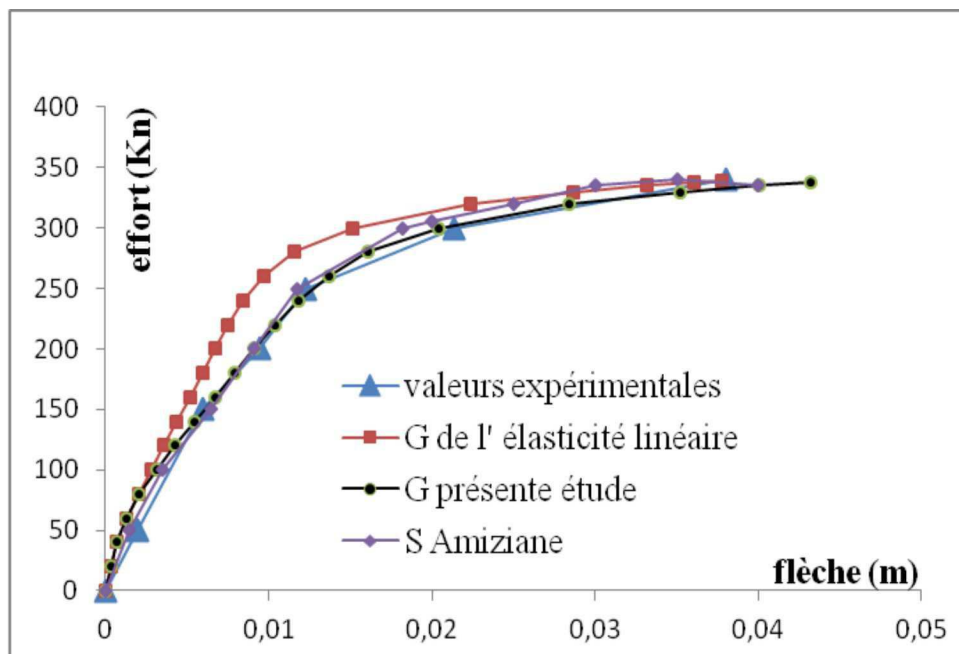


Figure V.7 : Comparaison des résultats de simulation et d'expérience ;
Poutre hyperstatique de Pera.

5. Portique bi articulé en béton armé

5.1 Dimensions et mode de chargement du portique

On applique notre démarche à une structure pour laquelle on dispose de résultats d'essais expérimentaux. Il sera alors possible de comparer les résultats de l'analyse effectuée aux phénomènes réels, observés au cours des essais. Notre choix s'est porté sur un portique bi-articulé, testé par W.B.Cranston en grande Bretagne in[104]. Les caractéristiques géométriques, mécaniques et le chargement sont définis à la figure V.8 et au tableau V.4.

Le portique est soumis à deux charges verticales égales à $P/2$ et une charge horizontales H appliquée en tête d'un poteau. Les deux systèmes de charge P et H sont appliqués, instantanément de manière croissante et maintenus dans un rapport constant tel que $H/P=0,1$

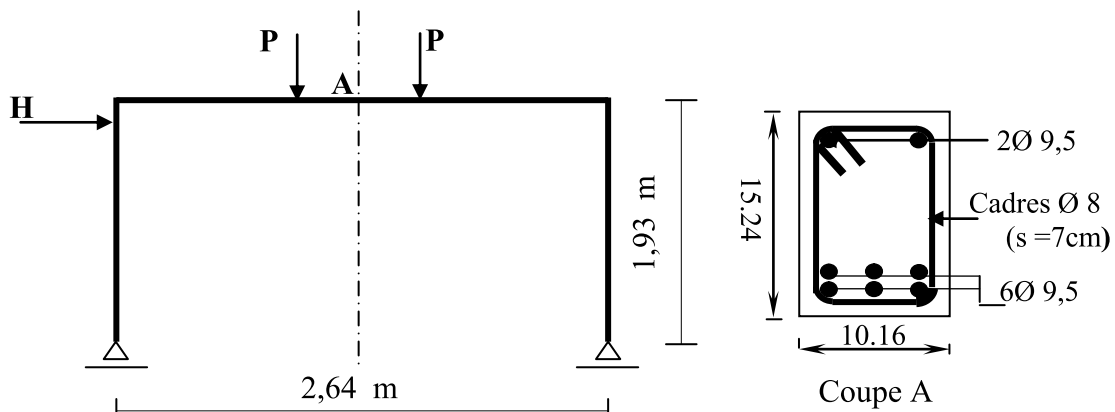


Figure V.8 : Dimensions et détails de ferrailage du portique.

Béton	Armatures longitudinales et transversales
$f_{cj} = 34 \text{ MPa}$, $f_{tj} = 2.59 \text{ MPa}$	$f_c = 278 \text{ MPa}$
$K_b = 1.15$, $K'_b = 2.15$	$E_a = 200 \text{ GPa}$
$\epsilon_0 = 0.0002$	$f_u = 278 \text{ MPa}$
$E_{ij} = 34\,000 \text{ MPa}$	

Tableau V.4 : caractéristiques des matériaux ; portique Cranston.

5.2 Résultats de la modélisation et confrontation

La comparaison présentée sur la figure V.9 entre la courbe effort flèche à mi-travée de la poutre obtenue avec notre modélisation et la courbe expérimentale montre la bonne concordance de nos résultats avec des différences qui n'excèdent pas 2% voir tableau V.6. Concernant la courbe calculée en considérant le module de déformation transversale G de l'élasticité linéaire, nous constatons que les déplacements sont largement sous-estimés par

rapport aux déplacements réels pour le même niveau de chargement cette différence est de l'ordre de 22 % (tableau V.9). Cela montre la nécessité de tenir compte de l'effet de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire.

valeurs		Effort (Kn)	Déplacement (m)
Expérimentales		50*	0,0150
Modélisation (Présente étude)		49.2*	0,01482
Modélisation (G de l'élasticité linéaire)		52.67*	0.01375
différence	Essais et présente étude	1.2 %	1.2 %
	Essais et G de l'élasticité linéaire	6%	22%

(*) Efforts de rupture

Tableau V.5 : comparaison des valeurs ultimes. Portique Cranston

Notons que dans le tableau V.5, la comparaison pour les déplacements est faite pour le même niveau de chargement

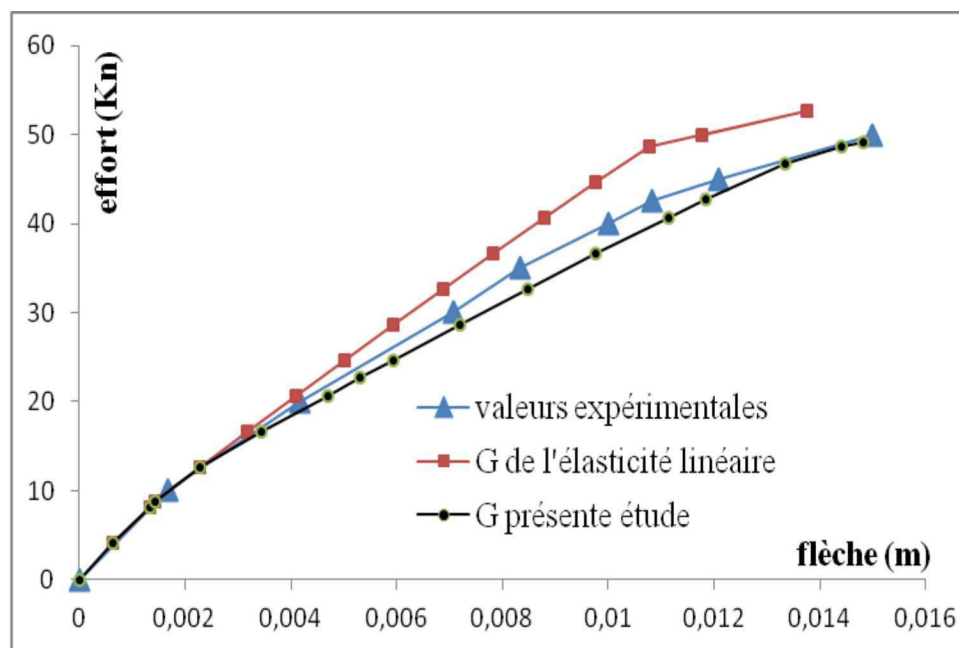
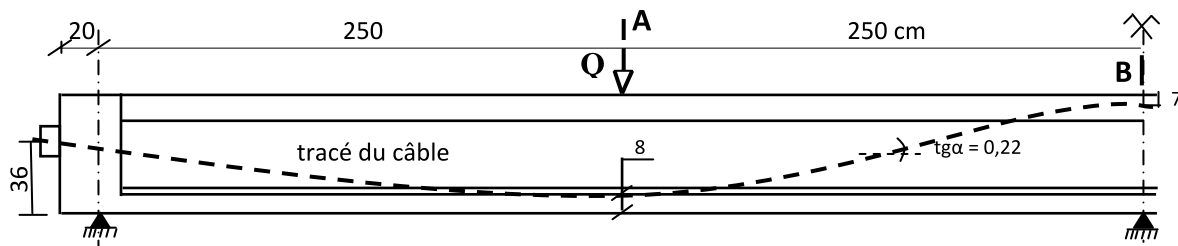


Figure V.9 : Courbe effort flèche à mi travée de la poutre ; Portique bi articulé.

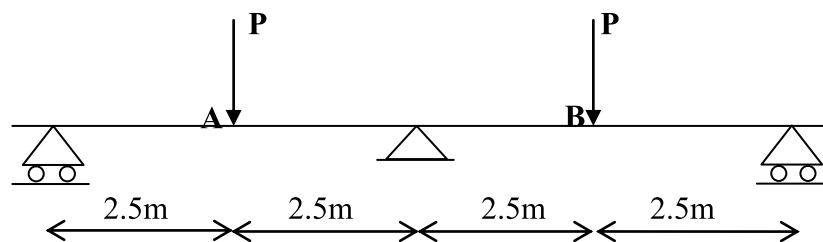
6. Poutres en béton armé et béton précontraint Essais CEBTP

6.1 Programme de l'essai et caractéristiques des poutres

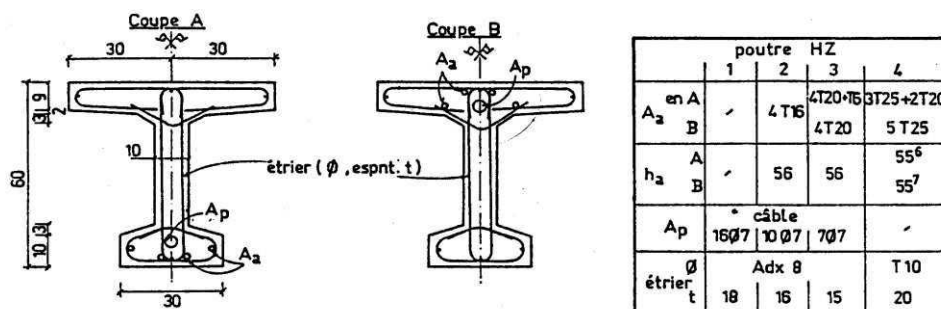
Il s'agit d'un programme d'essais réalisé au CEBTP par Trinh [131]. Ce programme comporte quatre poutres identiques en forme et dimensions. Elles présentent une section transversale en double T et une longueur totale de 10.40 m constituée de deux travées de 5 m de portée chacune. Elles sont soumises à un chargement croissant jusqu'à rupture, par deux charges concentrées d'intensité égale, Q , appliquées au milieu des travées. La figure V.10 montre les caractéristiques géométriques des poutres. Les caractéristiques des matériaux utilisées sont résumées au tableau V.6. Pour la simulation, nous nous limiterons aux poutres HZ3 et HZ4 rompues à l'effort tranchant.



(a). Tracé du câble moyen poutre HZ [131].



(b). Schéma statique des poutres HZ [131].



(c). Sections transversales A et B.

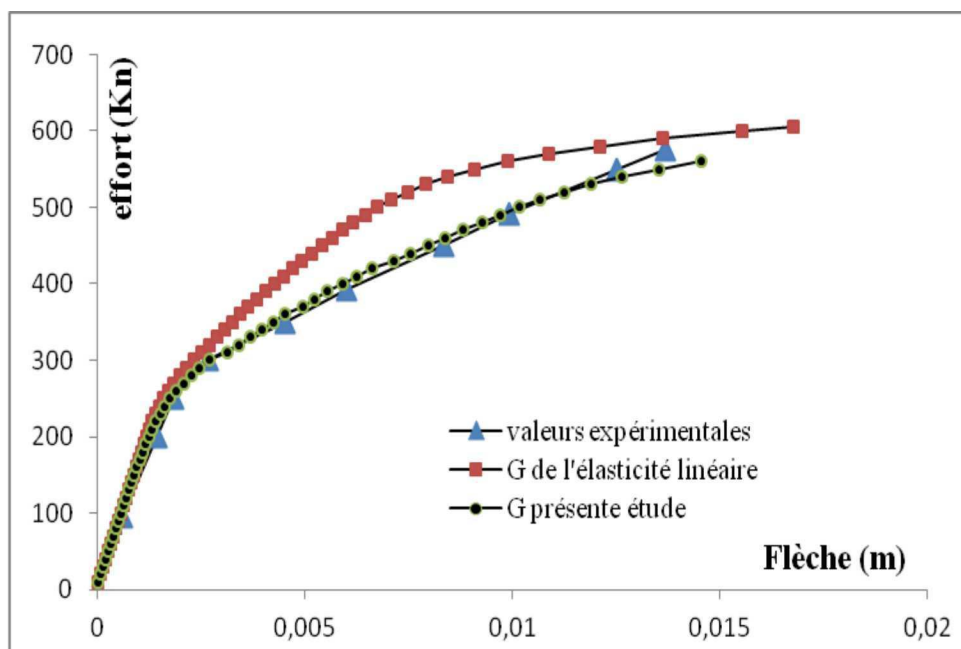
Figure V.10 : Dimensions et détails de ferrailage des poutres HZ [131].

Béton				Armatures passives			
Repère	f_{cj} (MP)	f_{ij} (MP)	E_{ij} (MPa)	Barres	f_e	E_a	f_u (MPa)
HZ4	32	3.3	32000	HA20	424	195	543
				HA25	450	230	558
HZ3	34	3.4	32080	HA16	430	213	526

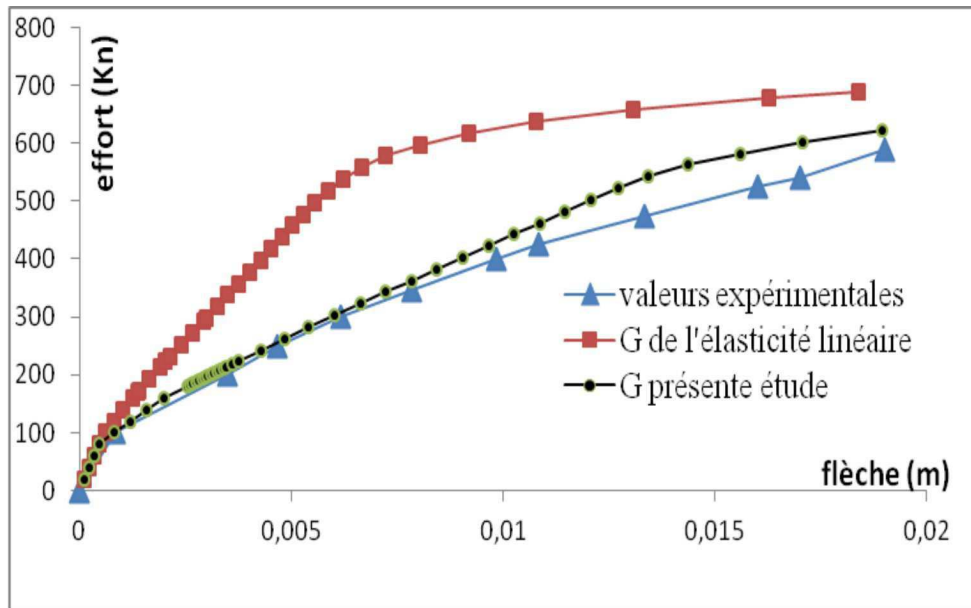
Tableau V.6 : caractéristiques mécanique des matériaux, poutres HZ.

6.2 Comparaison des résultats de calcul et d'essai

La comparaison des résultats du modèle par rapport aux résultats des essais montrent que, d'une part, les prévisions du modèle sont en bon accord avec le comportement expérimental dans n'importe quel domaine du comportement (avant fissuration, après fissuration, post plastification des aciers et rupture de la poutre), et d'autre part, le modèle permis de prédire le mode de rupture par cisaillement des poutres en béton précontraint. L'influence de la prise en compte de l'effet de l'effort tranchant est visible dans les figures V.11. (a) et V.11. (b), elles expliquent la différence de comportement dans le cas de rupture par cisaillement, en particulier pour la poutre en béton armé (HZ4).



(a). Poutre HZ3



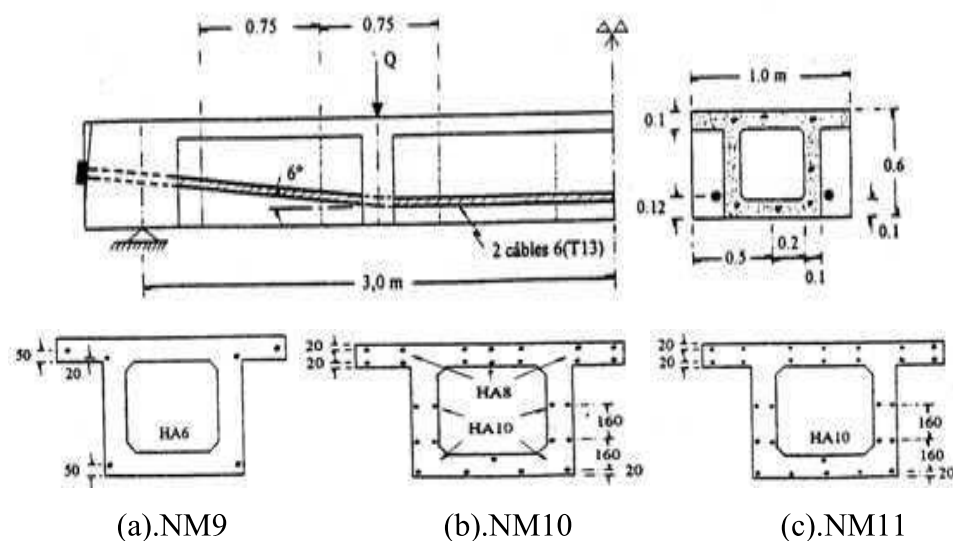
(b). Poutre HZ4

Figure V.11 : Courbes effort flèche ; Poutres HZ.

7. Etude d'une structure triangulée

7.1 Description de la structure

Il s'agit d'un programme expérimental composé de 06 poutres (NM), à précontrainte extérieure, testées au laboratoire CEBTP [59]. Les poutres sont identiques dans la forme et les dimensions et composées d'une seule travée de 6 m de portée. Les caractéristiques géométriques, les détails de ferrailage et de la précontrainte sont présentés dans la figure V.12. Chaque poutre peut-être modélisée par une structure triangulée figure IV.13.



(a).NM9

(b).NM10

(c).NM11

Figure V.12 : Caractéristiques géométriques et système de chargement pour les poutres (NM) [59].

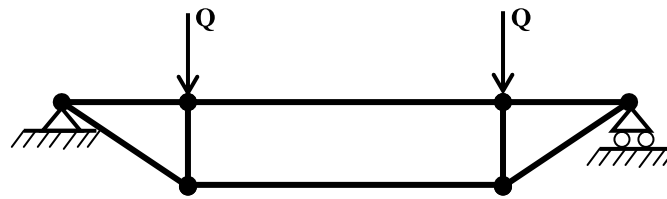
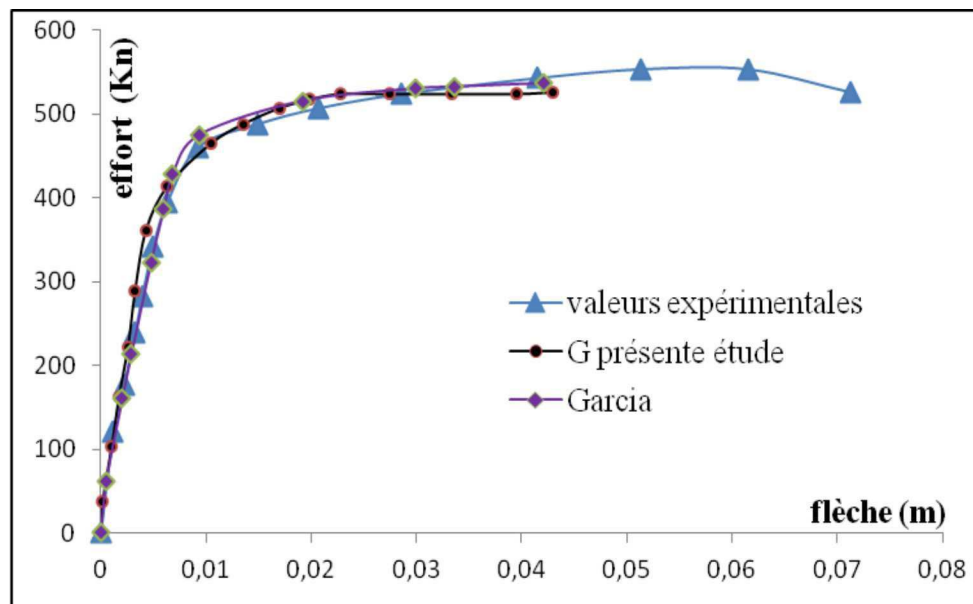


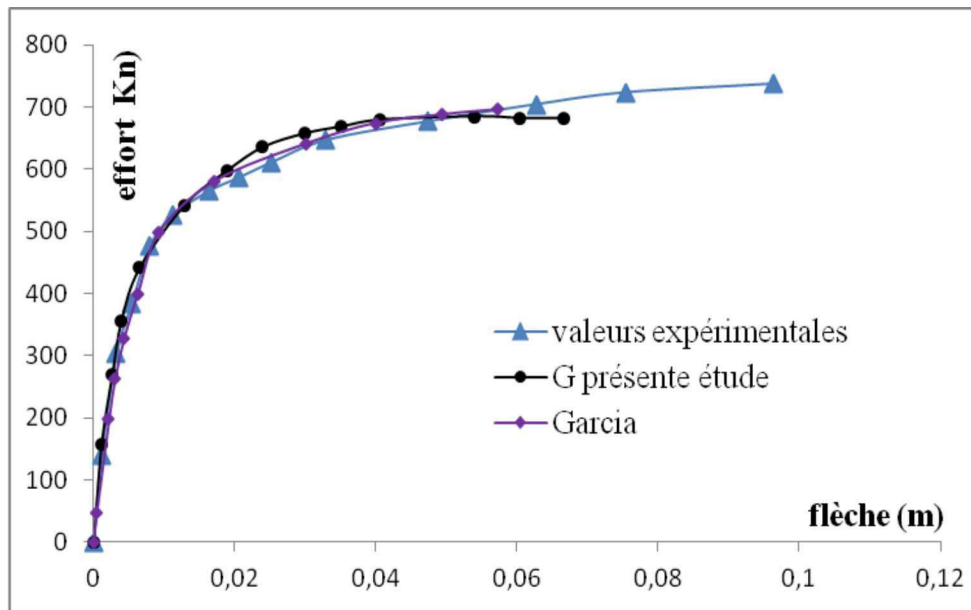
Figure V.13 : Modélisation des poutres NM en structure triangulée.

7.2 Analyse des courbes charge déplacement

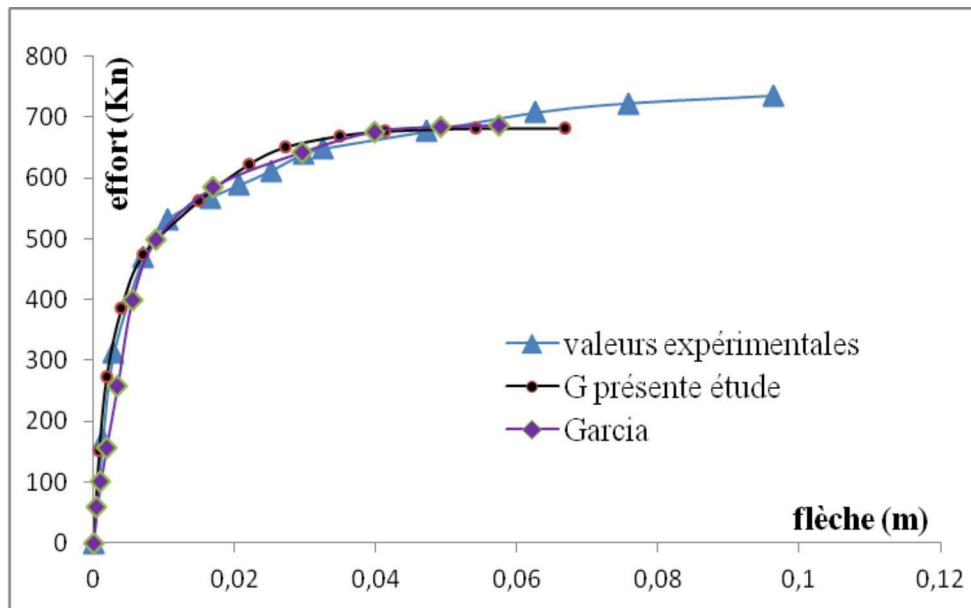
Les courbes charge-déplacement peuvent être observées sur les figures V.14. Sur ces figures on a superposé les résultats obtenus par le calcul, les résultats expérimentaux ainsi que ceux obtenus par Garcia [65]. On peut constater que les courbes calculées en considérant le module de cisaillement G non constant dans la phase non linéaire donnent un bon accord avec le comportement expérimental dans tous les domaines du comportement (post fissuration du béton et après plastification de l'acier). Et, par ailleurs, relativement aux valeurs obtenues par Garcia qui considère le module de cisaillement G constant et égal à celui obtenu en élasticité linéaire, le calcul permis de suivre le comportement des poutres jusqu'à une valeur plus élevée de la déflexion.



(a). Poutre NM9



(b). Poutre NM10



(C). Poutre NM11

Figure V.14 : Courbes Charge-déplacement à mi travée-Poutres NM.

8. Conclusion

Le modèle utilise des lois de comportement qui traduisent l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversales et la diminution de l'allongement moyen des armatures due à la contribution du béton tendu entre les fissures. Il introduit un terme diagonal de rigidité non linéaire à l'effort tranchant dans la matrice de rigidité des sections, afin de prédire le comportement charge – déplacement jusqu'à rupture en flexion composée avec effort tranchant, pour des poutres présentant des sections de forme complexe et des détails de ferrailage variables, y compris une précontrainte interne.

L'allure des courbes de comportement cisaillement - distorsion calculées pour un ensemble de poutres testées à l'Université de Stuttgart (Allemagne) montre que le modèle estime correctement la rigidité au cisaillement. Le calcul des poutres OG du CEBTP, indique que le modèle peut s'appliquer à la fois au béton normal (OG3) qu'au béton de haute performance (OG4), l'estimation du comportement réel est satisfaisante, le modèle proposé permet de prédire le comportement complet des poutres sous chargement croissant : redistribution des efforts internes, déplacements non linéaires et charge ultime. Il permet également de prédire correctement le mode de rupture en flexion ou en cisaillement (poutre Pera et portique bilinéaire).

Par ailleurs, et comparativement aux résultats obtenus par d'autres auteurs la démarche proposée semble, avec des différences qui ne dépassent pas 5% globalement, prédire d'une manière exacte le comportement réel des structures en flexion et en cisaillement.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire est une contribution à l'étude non linéaire du comportement des ossatures spatiales en état de ruine. Les structures considérées sont constituées de matériaux non homogènes de type (béton armé, béton précontraint et en matériaux composites). Nous nous sommes intéressés particulièrement aux cas de problème du cisaillement. La modélisation basée sur une discrétisation par éléments fini « type poutre » à 12 degrés de liberté, couvre à la fois les analyses linéaires et non linéaires, la non-linéarité est prise sous deux aspects, la non-linéarité matérielle et la non-linéarité géométrique.

Les réflexions qui suivent concernent les études réalisées, les résultats obtenus et les perspectives.

Après une analyse bibliographique du comportement des structures au cisaillement de l'expérimentation à la modélisation, où nous avons été amenés à consulter en détail une importante bibliographie, les principaux résultats qui ressortent de cette étude concernent :

- Les structures formées d'éléments triangulées présentent plusieurs avantages, facilités de mise en œuvre et légèreté, pour les ossatures élancées ou de grandes portées.
- L'effet de l'effort tranchant et de grande importance dans le domaine non linéaire, la flèche due à cet effort présente une moyenne importante de la flèche totale. Dans la plus-part des codes de calcul, soit il est complètement négligé soit il est pris avec sa valeur de l'élasticité linéaire, cette sous-estimation peut s'avérer néfaste pour la structure.
- L'utilisation d'un matériau composite (Béton, fibres et étriers) mélangé dans des proportions optimales peut, justement, répondre aux problèmes de cisaillement. Ce composite augmente la résistance à la fissuration et procure un comportement ductile dans la phase post fissuration, même après plastification des aciers les fibres continuent de résister aux efforts jusqu'à leur arrachement total.
- Concernant la modélisation de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire, plusieurs chercheurs ont proposé des démarches plus ou moins intéressantes, que nous pouvons classer en deux catégories. La première catégorie de modèle est basée sur la théorie de champ de compression modifiée par Vecchio et Collins, mais son utilisation reste fastidieuse, la deuxième catégorie est celle utilisant la rigidité effective du matériau, les chercheurs estiment le module de déformation transversale G , par des relations simples, qui est, ensuite, introduit dans la matrice rigidité de la section.

Nous avons présenté une méthode générale d'analyse non linéaire des structures spatiales, à noter qu'une part importante de ce chapitre, matériellement non visible dans ce document est constituée par un programme général d'analyse non linéaire d'ossatures 3D élaboré à partir des travaux de Nait Rabah et Kachi, les hypothèses fondamentales et les lois de comportement des matériaux y compris la loi de comportement de composite (béton de fibres) sont données.

La partie originale de cette thèse est la proposition d'une nouvelle démarche pour estimer le module de déformation transversale G dans le domaine post fissuration du béton et post plastification des aciers. Les relations, ainsi proposées, combinent à la fois les principaux paramètres qui contribuent à la résistance à l'effort tranchant. Malgré leurs simplicités, Les équations proposées, sont capables de simuler correctement le comportement post fissuration et post plastification des éléments en béton armé ou béton précontraint observé dans les essais.

Le modèle analytique présenté utilise des lois de comportement qui traduisent l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversales et la diminution de l'allongement moyen des armatures due à la contribution du béton tendu entre les fissures. Il introduit un terme diagonal de rigidité non linéaire à l'effort tranchant dans la matrice de rigidité des sections, afin de prédire le comportement charge – déplacement jusqu'à rupture en flexion composée avec effort tranchant, pour des poutres présentant des sections de forme complexe et des détails de ferrailage variables, le modèle peut, également, prendre en compte les poutres à précontrainte et les éléments formés d'un matériau composite (béton de fibres métalliques).

La validation numérique d'essais de structures choisis dans la littérature, a mis en évidence la qualité de l'utilisation combinée du modèle proposé et du programme 3D. Les principaux résultats obtenus, dans cette étude, peuvent se résumer ainsi :

L'allure des courbes de comportement, charge-flèche, calculées pour un ensemble de poutres testées à l'Université de Stuttgart montre que le modèle estime correctement la rigidité au cisaillement. Le calcul de la poutre hyperstatique de Pera confirme que l'estimation du comportement en cisaillement est satisfaisante et permet de prendre en compte l'interaction effort tranchant moment fléchissant. Le modèle peut, aussi, prendre en considération le béton à haute performance (Poutre OG). La simulation des poutres précontraintes HZ du CEBTP a permis de prédire le comportement complet des poutres sous chargement croissant : redistribution des efforts internes, déplacements non linéaires et charge

ultime. Il permet également de prédire correctement le mode de rupture en flexion ou en cisaillement. Par ailleurs, la bonne concordance des résultats obtenus avec le modèle proposé et les résultats analytiques obtenus par d'autres auteurs, c'est d'abord la démonstration de la cohérence des hypothèses de base et de l'ensemble des équations générales qui en découlent et ensuite c'est la fiabilité du modèle qui est prouvée.

Rappelons enfin que la qualité des résultats présentés reste lié aux caractéristiques géométriques et aux conditions aux limites de l'élément testé.

PERSPECTIVES :

Sur le plan scientifique, l'étude menée a surtout concerné l'élargissement des connaissances dans le domaine de la modélisation non linéaire des structures spatiales et la simulation des lois de comportement des matériaux (béton armé, béton précontraint et béton de fibres).

- À l'échelle du matériau, cette étude pourrait être prolongée à d'autres matériaux composites tels que, fibres de carbone etc.
- À l'échelle de la structure, les travaux expérimentaux actuels menés sur des ouvrages de taille réelle en nouveau béton (portique, voiles, poutre précontrainte, béton de fibres,...) sont peu nombreux voire inexistant. Ces essais seront nécessaires pour les validations des modèles de comportement.

Sur le plan pratique, il est judicieux d'utiliser notre démarche sur des exemples réels de structures ayant subi une ruine partielle en cisaillement et d'analyser les possibilités de réparation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Adjrad A., Kachi, MS., Bouafia Y., Iguetoulène, F.** Nonlinear modeling structures on 3D. The International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials, ICSAAM 2011, 7-11 september, Sinaia, Romania, pp. 1 – 9, ISSN 2247 – 8337, www.icsaam2011.resist.pub.ro.
- [2] **Adjrad A., Kachi M. S., Hammoum H., Meridja N., Bouafia Y.** Calcul non linéaire des structures. Colloque International - Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 », Univ. de Tizi-ouzou en collaboration avec les universités de Paris 6 et de Cergy – Pontoise, Tizi Ouzou – Algérie, 16, 17 et 18 Nov 2008.
- [3] **Ameziane ZS.** Comportement cyclique des bétons ordinaires est des BHP. Thèse de doctorat, Ecole doctorale Science pour l'ingénieur de Nantes, Janvier 1999.
- [4] **Al-Mahaidi RSH.** Non linear finite element analysis of reinforced concrete deep members. Department of Struct.Engrg.CornellUniversity1978; Report No: 79-1:357.
- [5] **Ariyawardena N., ghali A.** Prestressing with unbounded internal or external tendons: Analysis and computer model. Journal of Structural Engineering – ASCE, Volume: 128 Issue: 12. PP 1493-150. December 2002.
- [6] **Association Française pour la Construction.** Les structures triangulées en béton Précontraint. AFPC. 18 mai 1983.
- [7] **Baby Florent.** Analysis of flexure-shear behavior of UHPFRC beams based on stress field approach. Engineering Structures 56, (2013), pp. 194–206.
- [8] **Beutel Rudiger, Hegger Josef.** The effect of anchorage on the effectiveness of the shear reinforcement in the punching zone. Cement&Concrete Composites 24, (2002), pp. 539–54.
- [9] **Belarbi A., Hsu T.T.C.** Constitutive law of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete, ACI Structural Journal, July-August 1994, p. 465-474.
- [10] **Belarbi A.et al.** constitutive laws of reinforced concrete membrane elements. Eleventh Word conference on Earthquake Engineering ISBN : 0 08 042822 3.
- [11] **Bergheau Jean-Michel, et al.** Modélisation par éléments finis de structures coques en béton armé. Revue Française de Génie Civil, (2002), 6:7-8, pp. 1257-1281.

- [12] **Bergan P.G.** A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, North-Holland 50, (1985), pp. 25-69 .
- [13] **Bo Li et al.** Experimental investigation on reinforced concrete interior Beam – column joints rehabilitated by ferrocement jackets. *Engineering Structures* 56, (2013), pp.897–909.
- [14] **Borouchaki H., Lo SH.** Fast Delaunay triangulation in three dimensions. *Comput. Methods appl. Mech. Engrg.* 128 (1995), PP. 153-167.
- [15] **Broo H.** Reinforced and prestressed concrete beams subjected to shear and torsion. *Structural Engineering, Concrete Structures*, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- [16] **Bouafia, Y., Kachi, MS., Muller P.** Modelling of externally prestressed concrete beams loaded in combined bending, axial load and shear until fracture (in non linear elasticity). *ICSAAM, 2009*, ISBN 978-2-9534804-0-5, September 7 – 10, Tarbes, France.
- [17] **Bouafia Y., Kachi MS., Atlaoui D., Djebali S.** Study of mechanical behavior of concrete in direct tensile fiber chips. *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 146, Trans Tech Publications, Switzerland, 2012, pp. 64 – 73, www.scientific.net/AMM.146.64.
- [18] **Bouafia Y.** Analyse non linéaire des structures poteaux – poutres dans le plan et béton armé et béton précontraint. *Laboratoire LaMoMS – Algérie équipement – janvier 2004*.
- [19] **Bouafia Y.** Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton de fibres. *Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1987*
- [20] **Bouafia Y.** Résistance à l'effort tranchant des poutres en béton à précontrainte extérieure, Etude expérimentale et calcul à la rupture. *Thèse de Doctorat, Ecole centrale des Arts et Manufactures, Paris, novembre 1991*.
- [21] **Bouafia, Y., Atlaoui, D., Kachi, MS.** Etude d'une section en béton armé soumise à une flexion composée déviée hors du domaine linéaire. *Société Marocaine des Sciences Mécaniques - Réseau Universitaire de mécanique, Maroc (Casablanca), 7è Congrès de Mécanique, 19 - 22 avril 2005*.

- [22] **Bouafia, Y., Foure, B., Kachi, MS.** Relation effort - ouverture des fissures dans le cas du béton armé de fibres d'acier. Annales de l'ITB, N° 2, avril 1998, ISSN 1270-9840, Ed. ESKA, France, pp. 5-14, <http://www.eska.fr>.
- [23] **Bouafia, Y., Fouré, B., Kachi, MS.** Shear strength of externally prestressed beams. II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association with European Cement Association. Sept. 6 -10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 522-531.
- [24] **Bouafia, Y., Hammoum, H.** Contribution au calcul non linéaire des structures planes en béton de haute performance. Congrès International en Sciences et Génie des Matériaux, 27- 30 novembre 1999, USTHB.
- [25] **Bouafia, Y., Hammoum, H.** Analyse non linéaire des ossatures planes en béton armé et béton précontraint – Première partie : méthode numérique. Algérie Equipement, N° 38, janv. 2004, ISSN 111-5211, pp 24-32.
- [26] **Bouafia, Y., Hammoum, H.** Analyse non linéaire des ossatures planes en béton armé et béton précontraint – Deuxième partie : application. Algérie Equipement, N° 38, déc. 2004, ISSN 111-5211, pp 13-15.
- [27] **Bouafia, Y., Hammoum, H., Foure, B.** Analyse non linéaire des structures planes : flambement des poteaux en béton à hautes performances. Algérie Equipement, N° 30, mars 1999, ISSN 111-5211, pp 23-25.
- [28] **Bouafia, Y., Hammoum, H., Kachi, MS.** Simulation numérique du comportement non linéaire des structures planes en béton à haute résistance. 1er Séminaire National, Mécanique des Géomatériaux et Structures', 17 -18 avril 2000, Guelma.
- [29] **Bouafia, Y., Kachi, MS., Foure, B.** Stress - strain relationship in tension of concrete steel fiber, Annals of the Technical Institute of Building and Public Works, France, June 2002, no. 3, pp. 5-17.
- [30] **Bouafia, Y., Kachi, MS., Foure, B.** Numerical modeling of the behavior of steel fiber reinforced concrete. II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association – European Cement Association. Sept. 6 - 10, 2000, Istanbul - Turkiye, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 582-
- [31] **Caruso Christopher et al.** Constitutive Models of Prestressed Steel-Fiber Concrete.

- [32] **Cazenave Michel.** Méthode des éléments finis, Approche pratique en mécanique des structures. Dunod, Paris, 2010.
- [33] **Cedolin L.** Experimental determination of the fracture process zone in concrete. cement and concrete research, (1983), Vol. 13, pp. 557-567.
- [34] **Cedolin L., dei Poli S.** Finite element studies of shear critical reinforced Concrete beams. J Engrg Mech DivASCE 1977; (EM3).
- [35] **Cedolin L., Cusatis G.** Identification of concrete fracture parameters through size effect experiments. Cement&Concrete Composites 30, (2008), pp.788–797.
- [36] **Cedolin L. Dei Poli S. Sandro, Ivo Iori.** Experimental determination of the fracture process zone in concrete. Cement and Concrete research. 1983, Vol. 13, pp. 557-567.
- [37] **Cengiz Dundar, Ilker Fatih Kara.** Three dimensional analysis of reinforced concrete frames with cracked beam and column elements. Engineering Structures 29 (2007), pp. 2262–2273.
- [38] **Cerioni R., I.Iori,E. Michelini,P. Bernardi.** Multi-directional modeling of crack pattern in 2D R/C members. Engineering Fracture Mechanics 75 (2008), pp.615-628.
- [39] With cracked beam And column elements. Engineering Structures 29 (2007), pp. 2262–2273.
- [40] **Chicoine Thierry.** Analyse et conception d’ancrages sur les poutres renforcées en flexion à l’aide de matériaux composites, thèse de doctorat, université de Sherbrooke, CANADA, février 1997.
- [41] **Christian La Borderie.** Stratégies et Modèles de Calculs pour les Structures en Béton. Thèse présentée pour l’obtention de L’habilitation à diriger les recherches. Université de Pau et des Pays de l’Adour France, Décembre2003.
- [42] **Cindrawaty Lesmana.** Predicting the shear strength of reinforced concrete beams using support vector machine. Jurnal Teknik Sipil, Volume 2 No 2, Octobre 2006,ISSN 1411-9331,pp.74-95
- [43] **Collins, D, Mitchell, MP.** Shear and Torsion Desian of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams, PCI Journal, V. 25, No. 5, Sept-Oa. 1980, pp. 32-10.
- [44] **Cusatis G., Cedolin L.** Two-scale study of concrete fracturing behavior. Engineering Fracture Mechanics 74, (2007), pp.3–17.

- [45] **Dall'Asta, A., Ragni, L., Zona A.** Simplified method for failure analysis of concrete beams prestressed with external tendons. *Journal of Structural Engineering – ASCE*, Volume : 133 Issue: 1 PP 121- 131. January 2007.
- [46] **Dall'asta A, Zona A.** Non linear behaviour of externally prestressed composite beams: analytical models. *Journal of Structural Engineering*, volume : 115 (5) (1998) PP 588- 597.
- [47] **Dan D., Fabian A., Stoian V.** Theoretical and experimental study on composite steel concrete shear walls with vertical steel encased profiles. *Journal of Constructional Steel Research* 67, (2011), pp.800–813.
- [48] **De Lorenzis L., Nanni a., Tegola A.** Flexural and Shear Strengthening of Reinforced Concrete Structures with Near Surface Mounted FRP Rods. Proc., 3rd Inter. Conf. on Advanced Composite Materials in Bridges and Structures, Ottawa, Canada, J.Humar and A.G. Razaqpur, Editors, 15-18 Aug. 2000, pp. 521-528.
- [49] **Deuck Hang Lee et al.** Non linear finite element analysis of steel fiber-reinforced concrete members using direct tension force transfer model. *Finite Elements in Analysis and Design* 50 (2012), pp. 266–28.
- [50] **Ding Yining.** Shear behavior of steel fibre reinforced self-consolidating concrete beams Based on the modified compression field theory. *Composite Structures* 94, (2012), pp. 2440–2449.
- [51] **Douthe Cyril.** Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites: application à la conception des gridshells. Thèse de doctortat, École Nationale des Ponts et Chaussées, novembre 2007.
- [52] **Douthe Cyril.** Grid shell en composites : Vers des couvertures de grandes portées. XXVemes Rencontres Universitaires de Génie Civil 2007. Prix Rene Houpert.
- [53] **Dubigeon S., Bernard P.** Elément fini triangulaire de membrane avec degrés de liberté rotationnels élément fini triangulaire de coque. *Revue Européenne des Éléments*, (2003), 12:1, pp. 59-97.
- [54] **Elgawady Mohamed.** Seismic in-plane behavior of URM walls upgraded with composites. Thèse de Docteur Ès Sciences, École Polytechnique Fédérale de LAUSANNE, (2004).
- [55] **Eurocode 2, ENV 1992-1-1, NF P 18 711.** Calcul des structures en béton, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments, décembre 1992.

- [56] **Fei-YuLiao, LIN-HaiHan, Zhong Tao.** Performances of reinforced concrete shear walls with steel reinforced concrete Boundary columns. *Engineering Structures* 44, (2012), pp. 186–209.
- [57] **Felippa C.A., Bergan P. G.** A Triangular bending element based on An energy-orthogonal free formulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 61, (1987), pp. 129-160.
- [58] **Fouré B., Rezende-Martins P.C., Howang I.M.** Problèmes de sécurité à rupture et de modélisation du comportement des poutres en béton à précontrainte extérieure. *Annales de l’I.T.B.T.P.*, Paris, Février 1991.
- [59] **Fouré B., Rezende-Martins P.C.** Comportement en flexion jusqu’à rupture des poutres à précontrainte extérieure, A.F.P.C., XI^o Congrès de la F.I.P., Hambourg, 1990.
- [60] **Fouré, B.** Déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des structures. vi^e colloque national AFPS, juillet 2000, vol. II, p. 67-74.
- [61] **Foure B.** Béton à haute résistance. Rapport interne OG, C.E.B.T.P., Nov. 1985
- [62] **Frank j. V., Basil Emara M.** Shear deformations in reinforced concrete frames. *ACI Structural journal*, January-february (1992), pp. 46-56.
- [63] **Espion B.** Contribution à l’analyse non linéaire des ossatures planes, application aux structures en béton armé. Thèse de docteur en science appliquées, université libre de Bruxelles, année académique 1985-1986.
- [64] **Galvez J.C., et al.** A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. *Cement and Concrete Research* 32, (2002), pp. 1567–1585.
- [65] **Garcia-Vargas J.A., Menezes N., Trinh J.L.,** Effect of external tendon slipping at deviators on beam behaviour, Workshop “Behaviour of external prestressing in structures”, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, France, June 1993.
- [66] **Grelat, A.** Calcul non linéaire des ossatures en béton armé. Thèse de docteur-Ingénieur, Université Paris VI, 1978.
- [67] **Gregori Juan Navarro.** A theoretical model for including the effect of monotonic shear loading In the analysis of reinforced concrete beams. *Engineering Structures* 52, (2013), pp.257–272.

- [68] **Hammoum H.** Simulation numérique du comportement non-linéaire des ossatures planes. Thèse de Magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, Mars 1998.
- [69] **Hernández-Díaz A.M., Gil-Martín L.M.** Analysis of the equal principal angles assumption in the shear design of reinforced concrete members. *Engineering Structures* 42 (2012), pp. 95–105.
- [70] **Hsu, T.T.C., Zhang L.X.** Tension stiffening in reinforced concrete membrane elements. *ACI Structural Journal*, January-February 1996, p. 108-115.
- [71] **Hsu, T.T.C.** Non-linear analysis of concrete membrane elements. *ACI Structural Journal*, September-October 1991, p. 552-561.
- [72] **Hosseini S.B.** Modélisation des structures-poutres tridimensionnelle a parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et élasto-plastique. thèse de doctorat, Compiègne 1994.
- [73] **Hung UNG QUOC.** théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente. calcul à la rupture applique au cas des chevilles de fixation ancrées dans le béton .thèse de doctorat, l'Ecole nationale des ponts et chaussées, décembre 2003.
- [74] **Hyunjin Ju.** Torsion al behavior model of steel-fiber-reinforced concrete members Modifying fixed-angle softened-truss mode. *Composites: Part B* 45, (2013), pp.215–231.
- [75] **Ilker Fatih Kara.** Prediction of shear strength of FRP- reinforced concrete beams without stirrups Based on genetic programming. *Advances in Engineering Software* 42, (2011), pp.295–304.
- [76] **Ilker Fatih Kara, Cengiz Dundar.** Prediction of deflection of reinforced concrete shears walls. *Advances in Engineering Software* 40 (2009), pp. 777–785.
- [77] **Jalali a., Dashti F.** Non linear behavior of reinforced concrete shear walls using macroscopic and Microscopic models. *Engineering Structures* 32, (2010), pp. 2959-2968.
- [78] **Jean-Charles Craveur.** Modélisation des éléments finis. Dunod, 3^e édition, 2008
- [79] **Jeong Soo Kim, Moon Kyum Kim, and Han Kyu Yoo.** Nonlinear Finite Element Analysis of Shotcrete Lining Reinforced with Steel Fibre and Steel Sets. *IACSIT International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 6, December 2013, pp. 666-670.

- [80] **Kachi M.S.** Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure. Thèse de doctorat, Université de Tizi Ouzou, Novembre 2006.
- [81] **Kachi MS., Fouré B., Bouafia Y., Muller P.** l'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint, Revue Européenne de Génie Civil, Vol 10 n°10, pp 1235-1264, 2006.
- [82] **Kachi, MS., Bouafia, Y.** Modélisation du comportement jusqu'à rupture en cisaillement d'une section de poutre en béton armé et précontraint. Cinquième Conférence Internationale sur la Science des Matériaux (CSM5), CNRSFrance – Beyrouth - Liban, 17-19 mai 2006, Editeur : T. Hamieh, Volume V.
- [83] **Kang Su Kim, Deuck Hang Lee a, Jin-Ha Hwang, Daniel A. Kuchma.** Shear behavior model for steel fiber-reinforced concrete members without transverse reinforcements. Composites: Part B43 (2012), pp. 2324–2334.
- [84] **Keun HyeokYang ,Gwang-HeeKima, Hong-SukYang,** Shear behavior of continuous reinforced concrete T- beams using wire rope As internal shear reinforcement, Construction and Building Materials 25,(2011), pp.911–918.
- [85] **Kotronis P.** Cisaillement dynamique de murs en béton armé. Modèles simplifiés 2d et 3d. Thèse de doctorat, école normale supérieure de Cachan, décembre 2000
- [86] **Khaldoun, N. Rahal.** Post-cracking modulus of reinforced concrete membrane elements, Engineering Structures, 32(2010), pp. 218-255.
- [87] **Khaldoun N. Rahal and Michael P. Collins.** Combined torsion and bending in reinforced and prestressed concrete beams. ACI Structural journal, March-April (2003), pp. 157-165.
- [88] **Khaldoun N.Rahal.** Simplified design and capacity calculations of shear strength in reinforced concrete membrane elements. Engineering Structures 30, (2008), pp.2782–2791.
- [89] **Khalifa, A., Tumialan, G., Nanni, A. and Belarbi, A.** Shear Strengthening of Continuous RC Beams Using Externally Bonded CFRP Sheets, SP-188, American Concrete Institute, Proc., 4th International Symposium on FRP for Reinforcement of Concrete Structures (FRPRCS4), Baltimore, MD, Nov. 1999, pp. 995-1008.
- [90] **Kiang-Hwee, Chee khoon N.G.** Effect of behaviour and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams, A.C.I. Structural Journal, Vol. 94 n° 1, pp

- 13 – 22, January-February 1997.
- [91] **Kreger M., Fenves J., EL-Habre k.** Finite element analysis of externally post-tensioned segmental box girder construction, Externally prestressing in bridges, A.C.I., SP-120, Éd. Antoine Naaname and John Breen, 1990.
- [92] **Kyoung KyuChoi, et al.** Shear strength of slender reinforced concrete beams without web reinforcement: A model using fuzzy set theory. *Engineering Structures* 31,(2009), pp. 768-777.
- [93] **Leonhardt F.** Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete beams And slabs. *Mag Concr Res* 1965;17 (53).
- [94] **LUYCKX Jean.** Composites à fibres de carbone dans le génie civil. *Techniques de l'Ingénieur, traité Construction, C 5 440.*
- [95] **María Antonio.** Shear design of FRP reinforced concrete beams without transverse reinforcement. *Composites: Part B* 57, (2014), pp. 228–241.
- [96] **Marie-C.G.** Renforcement à l'effort tranchant de poutres en béton armé. Mémoire présenté pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M. Sc.), Université LAVAL, Mai 1998.
- [97] **Manfoumbi N., Sauvat N. Dubois F.** Découplage expérimental des déformations d'éléments bois sous chargements hydrique et mécanique variables. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, (2012) 16:10, pp.1168-1186.
- [98] **Martínez Joel, Xub Lei.** Simplified non linear finite element analysis of building swith CFS shear wall panels. *Journal of Constructional Steel Research* 67, (2011), pp. 565–575.
- [99] **Ma Xiaowei, Nie Jianguo, Tao Muxuan.** Non linear Finite-Element Analysis of Double-Skin Steel-Concrete Composite Shear Wall Structures. *IACSIT International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 6, December 2013, pp. 648-652.
- [100] **Michael P. Collins, Denis Mitchell, Perry Adebar, Frank j. Vecchio.** A general shear design method. *ACI Structural journal*, January-february (1996), pp. 36-60.
- [101] **Mohr, S., Bairan, J.M., Mari, A.R.** A frame element model for the analysis of reinforced concrete structures under shear and bending, *Engineering Structures*, 32(2010), pp. 3936-3954.

- [102] **Moa Y.L., Zhong Jianxia , T.C.HSU Thomas.** Seismic simulation of RC wall-type structures. *Engineering Structures* 30, (2008), pp. 3167–3175.
- [103] **Noël Martin, Soudki Khaled.** Estimation of the crack width and deformation of FRP-reinforced concrete flexural members with and without transverse shear reinforcement. *Engineering Structures* 59, (2014), pp.393–398.
- [104] **Nait-rabah O.** Simulation numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales. Doctoral Thesis, Ecole Centrale de Paris, Décembre 1990.
- [105] **Naasson de Alcantara.** Identification of steel bars immersed in reinforced concrete based on experimental results of eddy current testing and artificial neural network analysis, *Non destructive Testing and Evaluation*. 28:1, 58-71.
- [106] **Nazé Pierre Alain.** Contribution a la prediction du dommage des structures en béton armé sous sollicitations sismiques, thèse de doctorat. Ecole centrale de Lyon, 6 Decembre 2004.
- [107] **Navarro Gregori J.** A 3D numerical model for reinforced and prestressed concrete elements Subjected to combined axial, bending, shear and torsion loading. *Engineering Structures* 29, (2007), pp. 3404–3419.
- [108] **Nicolae ile, Reynouard j. M.** nonlinear analysis of reinforced concrete shear wall under earthquake loading. *Journal of Earthquake Engineering*, (2000), 4:2, pp. 183-213.
- [109] **Ng Ck, Tan Kh.** Flexural behaviour of externally prestressed beams. Part I: Analytical model. *Engineering Structures*. Volume: 28. Issue: 4. pp 609-621. March 2006.
- [110] **Nguyen Xuân Huy.** Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation. Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, 12 Juin 2006.
- [111] **Nguyen Andrew V.B., Chan H.C.** Comparisons of smeared crack models for RC bridge pier under cyclic loading.13 the acme conference: University of Sheffield, March 21-22, 2005.
- [112] **Nguyen Xuân Huy.** Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation. thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Grenoble, Juin 2006.

- [113] **Noël Martin, Soudki Khaled.** Estimation of the crack width and deformation of FRP-reinforced concrete flexural members with and without transverse shear reinforcement. *Engineering Structures* 59, (2014), pp.393–398.
- [114] **Pang X, Hsu TTC.** Behavior of reinforced concrete membranes in shear. *ACI Struct J* 1995; 92:665-79.
- [115] **Pedro F. Miguel, et al.** A simplified method to predict the ultimate shear stress of reinforced Concrete membrane elements. *Engineering Structures* 49, (2013), pp. 329–344.
- [116] **Ragueneau Frédéric.** Fonctionnement dynamique des structures en béton - influence des comportements hystérétiques locaux. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 7 janvier 1999.
- [117] **Renata S.B., Henriette L. LaRovere.** FE model for non linear analysis of reinforced concrete beams considering Shear deformation. *Engineering Structures* 35, (2012), pp.244–253
- [118] **Règles BPEL.** Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites, DTU-Règles BPEL 91, révisées 1999.
- [119] **Règles B.A.E.L. 91 modifiées 99,** Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES 2000.
- [120] **Rita de Cássia Silva.** Contribution à l'analyse probabiliste de la Performance des ponts en béton armé. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 15 octobre 2004.
- [121] **Robert, F.** Contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en génie civil, application aux ouvrages d'art. Thèse de doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 1999.
- [122] **Salam Al-Sabah A., Holger Falter.** Finite element lower bound “yield line” analysis of isotropic slabs using Rotation –free elements. *Engineering Structures* 53(2013), pp.38–51.
- [123] **Salvador J. E., Dias J., Barros A. O.** Shear strengthening of T cross section reinforced concrete beams by near surface mounted technique. Rapport de recherché Univ. of Minho, Campus de Azurém, 4810-058 Guimarães, Portugal.

- [124] **Sartorin T., Tomasi R.** Experimental investigation on sheathing-to-framing connections in wood shear walls. *Engineering Structures* 56, (2013), pp.2197–2205
- [125] **Scotta Roberto.** A scalar damage model with a shear retention factor for the Analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. *Computers and Structures* 79, (2001), pp. 737-755.
- [126] **Tan Kh, Tjandra Ra.** Shear deficiency in reinforced concrete continuous beams strengthened with external tendons. . *ACI Structural Journal*. Volume: 100. Issue: 5. pp 625-672. Sep-Oct 2003.
- [127] **Tan Kh, Ng Ck.** Effects of deviators and tendon configuration on behavior of externally prestressed beams. *ACI Structural Journal*. Volume: 94. Issue: 1. pp 13-22. Jan- Feb 1997.
- [128] **Tianyu Xiang, Yuqiang Tong , Renda Zhao.** A general and versatile non linear analysis program for concrete bridge structure. *Advances in Engineering Software* 36, (2005), PP. 681–690
- [129] **Tie-Jiong L., yi-qiang X.** Finite element modelling of concrete beams prestressed with external tendons. *Engineering Structures*. Volume: 28. (2006) pp 1919-1926.
- [130] **Timsah Y.** Simulation numérique du comportement non linéaire a long terme des ossatures spatiales. Thèse de doctorat. Ecole centrale Paris, octobre 1993.
- [131] **Trinh, J.L.,** Précontrainte partielle - Essais de poutres continues, *Annales de l'I.T.B.T.P.*, n° 530, pp. 1-31, Janvier 1995.
- [132] **UG. Jensen, Linh C.Hoang, Henrik B.Joergensen, Lars S. Fabrin.** Shear strength of heavily reinforced concrete members with circular cross section. *Engineering Structures* 32 (2010), pp.617-626.
- [133] **Vecchio F.J.** Non lineaire finite element analysis of reinforced concrete membranes. *ACI Structural journal*, January-february (1989), pp. 26-35.
- [134] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** Compression response of cracked reinforced concrete, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, December 1993, pp. 3590-3610.
- [135] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** Predicting the response of reinforced concrete beams subjected to shear using modified compression field theory. *ACI Structural Journal*, May-June 1988, pp. 258-268.
- [136] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal*, March-April 1986, pp. 219-231.

- [137] **Vecchio, F.J., Collins, M.P.** The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses, University of Toronto. Department of Civil Engineering, Publication n° 82-03, March 1982.
- [138] **Virlogeux M., M'rad A.** Flexural behaviour of externally prestressed structures for ultimate loads. Workshop Behaviour of external prestressing in structures, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, France, Jun 1993.
- [139] **Virlogeux M.** External prestressing : from construction history to modern technique and technology. External prestressing in bridges. ACI, SP-120, Éd. Antoine Naamane and John Breen, 1990.
- [140] **William k. Saari, et al.** Behavior of shear studs in steel frames with reinforced concrete infill walls. Journal of Construction al Steel Research 60,(2004), pp. 1453–1480.
- [141] **Xiao-Ning Peng, YUK-Lung Wong.** Behavior of reinforced concrete walls subjected to monotonic pure torsion An Experimental study. Engineering Structures 33, (2011), pp.2495–2508.
- [142] **Yaw-Jeng Chiou, Ren-Jow Tsay.** Non linear analysis of low-rise reinforced concrete shears walls by manifold method. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 03 Mar 2011.
- [143] **Yuzugullu O, Schnobrich WC.** A numerical procedure for the Determination of the behavior of a shear wall frame system. ACIJ1973; 70(7):474–9.
- [144] **Z. M. Wu, D. X. Hou, and W. Dong.** Investigation on Seismic Behavior of CFRP Retrofitted Reinforced Concrete Column with Partial Deterioration: Experimental and Numerical. IACSIT International Journal of Engineering and Technology, Vol. 5, No. 6, December 2013, pp.706-707.
- [145] **ZE YI WU.** Etude expérimentale du comportement des poutres courtes en béton arme pré-fissurées et renforcées par matériaux composite sous chargement statique et de Fatigue. Thèse de doctorat, LCPC Paris, 26 novembre 2004.
- [146] **Zhelyazov Todor.** Renforcement des structures en béton armé par collage de matériaux composites-comportement mécanique des structures sollicitées a la flexion. Thèse de doctorat, Université de Reims Champagne Ardenne, 13 décembre 2008.

- [147] **Zhuang X.Y., Huang R.Q., Zhu H.H. Askes H., Mathisen K.** A new and simple locking-free triangular thick plate element using independent shear degrees of freedom. *Finite Elements in Analysis and Design* 75(2013), pp. 1–7.
- [148] **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The finite element method. Vol. 2, McGraw-Hill, 4th Edition, 1991.
- [149] **Zona A, Ragni L, Dall’asta.** Finite element formulation for geometric and material non linear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. *Finite Element in Analysis and Design*. Volume: 44. Issue: 15. pp 910-919 November 2008.
- [150] **Zuanfeng Pan, Bing Li, Zhitao Lu.** Effective shear stiffness of diagonally cracked reinforced concrete beams. *Engineering Structures* 59 (2014), pp.95–103.

Résumé

L'évolution du calcul scientifique et le développement de l'informatique ont permis de bâtir des structures très élancées ou de grande portée, ces réalisations doivent posséder une tenue mécanique assez grande pour une masse réduite du matériau. Chercher à concevoir ces structures les plus légères possible permet des avancées économiques, écologiques et esthétiques. Les méthodes constructives ont évolué avec les époques et les matériaux disponibles. Le recours à des structures triangulées pour alléger ces ossatures présente la solution adéquate. Avec les progrès de ces dernières années en matière de simulation numérique, il semble cependant possible d'aller plus loin dans cette rationalisation en proposant des solutions alternatives plus durables et plus performantes qui intègrent de nouveaux matériaux composites.

Le comportement en flexion des éléments de structure est un problème bien connu. Dans les études classiques sur ce sujet, la résistance au cisaillement est négligée ou prise en compte par une formule simple, à partir de la théorie de l'élasticité linéaire, en négligeant l'interaction flexion cisaillement. Pour cette raison, ces procédés classiques permettent de prédire les modes de rupture en flexion, et non les modes de rupture de cisaillement.

Nous présentons dans cette étude un modèle analytique capable d'analyser les structures composées de matériaux non homogènes de type (béton armé, béton précontraint, béton de fibre...) en trois dimensions (3D), soumises à la flexion, à l'effort normal et au cisaillement dans le cadre de l'élasticité non linéaire. Dans ce modèle, l'expression adoptée pour la matrice rigidité de la section ne tient pas compte d'un module de cisaillement constant $G = f(E)$ comme en élasticité linéaire, mais un module G variable qui est fonction de la variation de l'effort tranchant. Nous proposons des formules pour calculer le module de cisaillement dans les phases post fissuration du béton et post plastification des aciers. Ce modèle est intégré dans un logiciel de calcul non linéaire de structures en 3D jusqu'à rupture.

La validation de cette démarche sur plusieurs exemples de structures montre que le modèle proposé prédit d'une manière correcte le comportement réel dans tous les domaines du comportement, pré et post fissuration du béton et post plastification des aciers.

Mots clés : structures spatiales, précontrainte, béton fibré, simulation numérique, élasticité non linéaire, module de cisaillement.

Abstract

The evolution of the scientific computation and the development of computers made it possible to build very slender or large-span structures; these achievements should possess a fairly high mechanical strength for reduced mass of the material. Seeking to design these lightest possible structures enables the economic, ecological and aesthetic advances. The Constructive methods have evolved with the times and materials available. The use of triangulated structures to alleviate these frames is the perfect solution. With advances in recent years in the field of numerical simulation, however, it seems possible to go further in this rationalization by offering more sustainable and more efficient alternatives that incorporate new composite materials.

The flexural behavior of reinforced concrete beams is a well-known problem. In the classical studies about this subject, shear strength is neglected or taken into account by a simple formula from the linear theory of elasticity, neglecting the bending-shear interaction. For this reason, these classical methods allow to predict only the flexural fracture modes, not shear fracture modes.

We present in this study an analytical model able to analyze structures composed of heterogeneous material type (reinforced concrete, prestressed concrete, fiber ...) in three dimensions (3D), subjected to bending, to the normal force and shear in the case of the non-linear elasticity. In this model, the expression adopted for the section's stiffness matrix does not take into account of a constant shear modulus $G = f(E)$ as in linear elasticity, but a variable shearing modulus which is a function of the shear variation. We propose formulas to calculate the shear modulus in the phase of post cracking of concrete and post-plasticization of steels. This model is incorporated in a nonlinear computation of 3D structures until a rupture.

The validation of this approach on several examples of structures shows that the proposed model is able to predict the experimental behavior of structures in all areas of behavior, pre-and post concrete cracking and post plasticization of steels.

Key-words: spatial structures, prestressing, fiber concrete, numerical simulation, nonlinear elasticity, shear modulus.