

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mouloud Mammeri- Tizi-Ouzou  
Faculté du Génie de la Construction  
Département de Génie Civil

**MÉMOIRE DE MAGISTER**

**SPECIALITE : Génie Civil**  
**OPTION : Structures Et Matériaux**

**ANALYSE NON LINÉAIRE DES ÉLÉMENTS EN  
BÉTON ARMÉ EN TENANT COMPTE DE  
L'EFFORT TRANCHANT.**

Présenté par :

**M : BOUAZZOUNI Omar**

Devant le jury composé de :

<b>M Youcef</b>	<b>BOUAFIA</b>	Professeur – U.M.M.T.O	<b>Président</b>
<b>M Said</b>	<b>DRIZI</b>	Maître de conférences A–U.M.M.T.O	<b>Rapporteur</b>
<b>M Lahlou</b>	<b>DAHMANI</b>	Professeur – U.M.M.T.O	<b>Examineur</b>
<b>M Mohammed</b>	<b>DERRADJ</b>	Maître de conférences A–U.M.M.T.O	<b>Examineur</b>

Soutenu le : / / .

## **Remerciement**

Au terme de ce travail je remercie en premier lieu Allah qui ma donné la force d'achever cette étude.

Je tiens à remercier Monsieur DRIZI pour avoir bien voulu proposé un sujet fort intéressant et de me dirigé tout au long de cette étude. Outre ses qualités scientifiques, je le remercie aussi pour sa disponibilité, sa gentillesse et sa sensibilité.

Mes remerciements s'adressent aux Messieurs Y.BOUAFIA, L. DAHMANI et M DERRADJ d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

J'exprime aussi ma gratitude a mes très chers parents pour leur précieuse aide et sacrifice, mes grands-parents, mes frères et sœurs.....

Je remercie tous ce qui ont contribué de prés ou de loin à ma formation.

## **RESUME**

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude du comportement non linéaire des structures en béton armé en tenant compte des déformations, de la fissuration et des modes de rupture dûs à l'effort tranchant.

On donne d'abord un aperçu sur le comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des structures en béton armé et une présentation de quelques modèles des poutres en béton armé soumises à l'effort de cisaillement. On présente ensuite la formulation de la poutre de Timoshenko et qui est discrétisée par élément fini à trois nœuds ayant trois degrés de liberté chacun (neuf degrés de liberté par élément fini).

La modélisation du comportement, dans le domaine non linéaire, est effectuée en utilisant l'élément poutre de Timoshenko à 3 nœuds, associé au modèle du champ de compression modifiée (MCFT) développé par Vecchio et Collins. Ensuite, on fait une présentation des méthodes de résolution non linéaires, des méthodes d'intégration numérique et des lois de comportements des matériaux (béton et acier) utilisées.

Sur la base de l'approche adoptée, un programme de calcul est élaboré. Il permet de simuler le comportement des poutres en béton armé dans le domaine non linéaire jusqu'à rupture en flexion et cisaillement.

Plusieurs exemples d'application ont été traités en utilisant deux types d'éléments finis poutre (à 2 et à 3 nœuds). L'utilisation de l'élément à 3 nœuds permet d'obtenir un résultat plus précis en utilisant un maillage moins dense. Par ailleurs, les comparaisons des résultats des calculs avec les résultats expérimentaux et également avec les résultats d'autres auteurs, sont très satisfaisantes.

Mots clés :

Effort tranchant, poutre de Timoshenko, élément fini, béton armé, analyse non linéaire.

## **SUMMARY**

In this work, we are concerned with the study of the nonlinear behavior of reinforced concrete structures by taking account of the nonlinear deformations, the cracking and the modes of rupture.

We first give an outline on the reinforced concrete structures behavior due to shear force as well as a presentation of some models adapted to this particular case of structures. We then present the formulation of the Timoshenko beam in the case of a beam discretized into finite three nodes beam elements, each node having three degrees of freedom (i.e. nine degrees of freedom per finite element).

Modeling of the nonlinear behavior is carried out by using the 3 nodes Timoshenko beam element associated with the model of the modified compression field (MCFT) developed by Vecchio and Collins. Then, we present the nonlinear methods of resolution, the numerical integration methods and the laws of behaviors of the (concrete and steel) materials we use.

On the basis of adopted approach, a calculation program is elaborated. It enables to simulate the nonlinear behavior of reinforced concrete beams until rupture in the case of bending and shearing.

Several examples of application were treated by using two types of finite beam elements (with 2 and 3 nodes). Use of the 3 nodes beam element makes it possible to obtain a more precise result by using a less dense meshing. In addition, the analytical results proved to be very satisfactory when compared with the experimental ones and those of other authors.

Key words : Shear, Timoshenko beam, finite element, reinforced concrete, nonlinear analysis.

## SOMMAIRE

<b>Chapitre 1 :</b>	
<b>Introduction Générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 2</b>	
<b>Revue bibliographique : Aspect expérimental et modélisation.....</b>	<b>2</b>
2.1 Introduction.....	2
2.2 Aperçu sur le comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des structures en béton armé.	4
2.2.1 Mode de Fissuration et Rupture par effort Tranchant.....	4
2.2.1.1 Rupture par cisaillement et flexion.....	5
2.2.1.2 Rupture par cisaillement et compression.....	5
2.2.1.3 Rupture par cisaillement avec glissement.....	6
2.2.1.4 Rupture par coupure.....	6
2.2.1.5 Rupture par dépassement de la résistance du béton à la compression oblique.....	7
2.2.2 Paramètres influençant le comportement d'une poutre en béton armé vis-à-vis de l'effort Tranchant.....	7
2.2.2.1 Influence des dimensions de la poutre sur les résultats des essais (effet d'échelle).....	7
2.2.2.2 Influence de la nature des armatures transversale dans les poutres en béton armé sur leur capacité portante, leur flèche et la répartition des fissures.....	10
2.2.2.3 Influence de l'élancement de cisaillement sur la capacité portante d'une poutre en béton armé.....	12
2.2.3. Participation de l'armature longitudinale à la transmission de l'effort tranchant.....	13
2.3 Revue des travaux antérieurs sur la modélisation de l'effort tranchant.....	13
2.3.1 L'analogie du treillis (Truss analogy).....	14
2.3.1.1 L'adoucissement des bielles de béton.....	16
2.3.1.2 Les contraintes de traction dans le béton.....	17
2.3.2 La théorie de champs de compression(C.F.T).....	18
2.3.3 La théorie de champs de compression modifiée (M.C.F.T).....	19
2.3.4 La théorie du treillis adoucissant.....	21
2.3.4.1 Hypothèses fondamentales de la théorie.....	21
2.3.4.2 La théorie du treillis adoucissant d'angle variable (RASTM).....	21
2.3.4.3 La théorie du treillis adoucissant d'angle fixe (FASTM).....	25
<b>Chapitre 3 :</b>	
<b>Formulation de la poutre de Timoshenko.....</b>	<b>26</b>
3.1 Introduction.....	26
3.2 Hypothèses de Calcul.....	26

3.3 Hypothèses de Base.....	27
3.4 Relations contraintes-déformations.....	28
3.5 Relations déformations-déplacements.....	28
3.6 Principe des travaux virtuels (P.T.V).....	29
3.6.1 Enoncé du principe des travaux virtuels (P.T.V).....	29
3.6.2 Application du principe des travaux virtuels (P.T.V).....	29
3.6.3 Calcul des efforts internes.....	30
3.7 Le coefficient de correction de cisaillement.....	31
3.8 Modélisation par éléments finis.....	33
3.8.1 Modélisation par éléments finis à deux nœuds.....	33
3.8.1.1 Discrétisation des déplacements et rotation.....	33
3.8.1.2 Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$ .....	34
3.8.1.3 Evaluation des forces résiduelles élémentaires.....	35
3.8.2 Modélisation par éléments finis à trois nœuds.....	36
3.8.2.1 Discrétisation des déplacements et rotation.....	36
3.8.2.2. Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$ .....	38
3.8.2.3 Matrice Jacobéenne.....	38
3.8.2.4 Nouvelle expression de la matrice de rigidité $[K]^e$ .....	39
3.8.2.5 Problème de blocage par cisaillement .....	39
3.8.2.6 Discrétisation de la section transversale.....	39
3.8.2.7 Evaluation des forces résiduelles élémentaires.....	41
<b>Chapitre 4 :</b>	
<b>Modélisation adoptée et résolution non linéaire.....</b>	<b>44</b>
4.1. Application du modèle de Vecchio et Collins dans le cas de la poutre de Timoshenko.....	44
4.1.1 Introduction.....	44
4.1.2 Bases du modèle.....	44
4.1.2.1 Hypothèses de calcul.....	44
4.1.2.2 Les équations d'équilibre.....	45
4.1.2.3 Les équations de compatibilité.....	46
4.1.2.4 Les lois de comportement du béton fissuré.....	47
4.1.2.5 Les lois de comportement des aciers.....	47
4.1.2.6 Méthode de résolution.....	48
4.1.2.7 Organigramme de calcul.....	49
4.2. Méthode de résolution non linéaire.....	50
4.2.1 Méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires.....	50

4.2.2	Algorithme de résolution non linéaire.....	52
4.2.3	Organigramme du calcul itératif.....	54
4.2.4	Intégration numérique.....	55
4.3	Comportement des matériaux.....	57
4.3.1	Comportement du béton en compression.....	57
4.3.2	Comportement du béton en traction.....	60
4.3.3	Comportement de l'acier.....	62
<b>Chapitre 5 :</b>		
<b>Programmation informatique.....</b>		<b>63</b>
5.1	Présentation du programme élaboré.....	63
5.2	Organigramme du bloc de calcul.....	64
5.3	Description des sous-routines.....	66
5.4	Présentation du fichier de données.....	67
5.5	Description des variables du fichier de données.....	68
5.6	Description du fichier résultats.....	71
<b>CHAPITRE 6 :</b>		
<b>Validation du modèle de calcul.....</b>		<b>72</b>
6.1	Introduction.....	72
6.2	Essais de F.J.Vecchio et de M.B.Emara.....	72
6.3	Essais de Bresler et Scordelis.....	76
6.4	Essais du CEBTP.....	78
6.5	Essais de Hibino.....	80
6.6	Essais de Khalifa.....	82
<b>CHAPITRE 7:</b>		
<b>Conclusion Générale.....</b>		<b>86</b>

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 2.1</b> : Les modes de sollicitation d'une fissure .....	02
<b>Figure 2.2</b> : Etat de contrainte dans une poutre en matériau homogène .....	03
<b>Figure 2.3</b> : Localisation des fissurations dans une poutre .....	04
<b>Figure 2.4</b> : Rupture par cisaillement et flexion .....	05
<b>Figure 2.5</b> : Rupture par cisaillement et compression .....	05
<b>Figure 2.6</b> : Rupture par cisaillement avec glissement .....	06
<b>Figure 2.7</b> : Rupture par coupure .....	06
<b>Figure 2.8</b> : Poutre de la série D .....	08
<b>Figure 2.9</b> : Poutre de la série C .....	08
<b>Figure 2.10</b> : Essais des poutres de BHAL .....	09
<b>Figure 2.11</b> : Poutres dans les essais de MORETTO .....	12
<b>Figure 2.12</b> : disposition des efforts dans l'armature principale dans la zone de la fissure oblique.....	13
<b>Figure 2.13</b> : L'analogie du treillis .....	14
<b>Figure 2.14</b> : Equations du modèle des bielles à 45°.....	14
<b>Figure 2.15</b> : Déformation moyennes dans un élément fissuré en béton armé.....	16
<b>Figure 2.16</b> : Adoucissement des bielles de béton en compression d'après .....	17
<b>Figure 2.17</b> : Comportement du béton tendu.....	18
<b>Figure 2.18</b> : Element membrane et contraintes selon RASTM.....	21
<b>Figure 2.19</b> : Superposition des contraintes du béton et des armatures.....	22
<b>Figure 3.1</b> : poutre de Timoshenko avant et après déformation.....	27
<b>Figure 3.2</b> : chargement dans le plan xz.....	29
<b>Figure.3.3</b> : Elément fini de Timoshenko.....	33
<b>Figure.3.4</b> : Discrétisation des déplacements et rotation.....	33
<b>Figure.3.5</b> : Elément fini de Timoshenko à 3 noeuds .....	36
<b>Figure.3.6</b> : Discrétisation des déplacements et rotation.....	36
<b>Figure 3.7</b> : Discrétisation de la section transversale.....	39
<b>Figure 4.1</b> : Superposition des contraintes moyennes du béton et des aciers.....	45
<b>Figure 4.2</b> : organigramme de calcul de cisaillement pour une couche.....	49
<b>Figure 4.3</b> : Méthode de Newton Raphson.....	51
<b>Figure 4.4</b> : Méthode de Newton Raphson Modifiée.....	51
<b>Figure 4.5</b> : Méthode de la rigidité Sécante.....	52
<b>Figure 4.6</b> : organigramme de calcul itératif.....	54
<b>Figure 4.7</b> : diagramme contrainte – déformation de la loi de <b>Sargin</b> .....	57

<b>Figure 4.8 :</b> diagramme contrainte – déformation de la loi de <b>Sargin</b> avec traçon droit .....	58
<b>Figure 4.9:</b> diagramme contrainte – déformation ( <b>loi parabolique</b> ) .....	59
<b>Figure 4.10 :</b> diagramme contrainte–déformation ( <b>loi parabole rectangle</b> ).....	59
<b>Figure 4.11 :</b> diagramme contrainte – déformation en traction selon <b>Peterson</b> .....	60
<b>Figure 4.12 :</b> diagramme contrainte – déformation en traction selon <b>Coenen</b> .....	60
<b>Figure 4.13 :</b> diagramme contrainte – déformation en traction selon <b>Grelat</b> .....	61
<b>Figure 4.14 :</b> diagramme contrainte – déformation de l’acier.....	62
<b>Figure 5.1 :</b> Organigramme détaillé du bloc de calcul.....	64
<b>Figure 6.1. :</b> Données géométriques des poutres.....	74
<b>Figure 6.2 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de Vecchio.....	75
<b>Figure 6.3 :</b> Caractéristique géométrique de la poutre testée par Bresler et Scordelis.....	76
<b>Figure 6.4 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de Bresler et Scordelis.....	77
<b>Figure 6.5 :</b> Section transversal de la poutre HZ4.....	78
<b>Figure 6.6 :</b> Disposition des armatures longitudinales.....	79
<b>Figure 6.7 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de HZ4 .....	79
<b>Figure 6.8 :</b> Caractéristique géométrique de la poutre testée par Hibino .....	80
<b>Figure 6.9 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par HIBINO.....	81
<b>Figure 6.10 :</b> Caractéristique géométrique, de chargement et de ferrailage des poutres CW1 et CF1 testée par Khalifa .....	82
<b>Figure 6.11 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Khalifa (CW1).....	83
<b>Figure 6.12 :</b> Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Khalifa (CF1).....	84

## LISTE DES TABLEAUX

	<u>Page</u>
<b>Tableau 2.1</b> : détail ferrailage des poutres.....	11
<b>Tableau 2.2</b> : détail du ferrailage et type d'ancrage.....	11
<b>Tableau 6.1</b> : Propriétés matérielle de la poutre.....	75
<b>Tableau 6.2</b> : Propriétés matérielle de la poutre étudié par Bresler et Scordelis.....	76
<b>Tableau 6.3</b> : Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.....	77
<b>Tableau 6.4</b> : Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.....	77
<b>Tableau 6.5</b> : Caractéristique mécanique des matériaux.....	79
<b>Tableau 6.6</b> : Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.....	80
<b>Tableau 6.7</b> : Caractéristiques mécaniques des matériaux.....	81
<b>Tableau 6.8</b> : Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.....	81
<b>Tableau 6.9</b> : Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.....	82
<b>Tableau 6.10</b> : Caractéristiques mécaniques des matériaux.....	83
<b>Tableau 6.11</b> : Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.....	83
<b>Tableau 6.12</b> : Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.....	84
<b>Tableau 6.13</b> : Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.....	85
<b>Tableau 6.14</b> : Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.....	85

## Chapitre 1 : Introduction Générale

Le béton possède une grande résistance à la compression et une faible résistance à la traction. C'est pourquoi son utilisation comme matériau de construction, ne s'est véritablement développée qu'avec l'invention du béton armé. Actuellement le béton armé est le matériau le plus utilisé dans le domaine du bâtiment et du génie civil.

Les éléments des structures en béton armé présentent généralement, un comportement ductile vis-à-vis des sollicitations de flexion. Cependant, lorsqu'ils sont soumis simultanément à la flexion et à l'effort tranchant, leurs comportements et modes de fissuration deviennent plus complexes et dépendent de plusieurs paramètres tels que l'élancement, le type de la densité du ferrailage longitudinal et transversal, la forme de la section transversale etc....

Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse à la modélisation et la simulation du comportement non linéaire jusqu'à rupture des poutres en béton armé soumises simultanément à des sollicitations de flexion et de cisaillement non linéaire.

La combinaison du modèle de la poutre de Timoshenko au modèle de cisaillement de Vecchio et Collins dans le domaine non linéaire et après fissuration, permet la modélisation du comportement non linéaire vis-à-vis de l'effort tranchant.

Notre étude est développée comme suit :

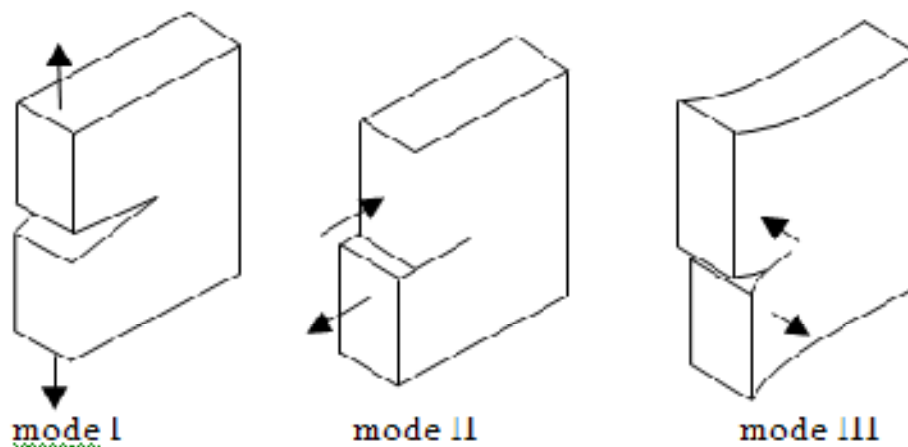
- Le chapitre deux donne un aperçu sur le comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des structures en béton armé, ainsi qu'une présentation de quelques modèles de simulation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé soumis à des efforts de cisaillement.
- Le chapitre trois est consacré à la formulation du modèle de la poutre de Timoshenko (éléments à 2 et à 3 nœuds ayant 3 degrés de liberté par nœud).
- Dans le chapitre quatre, on présente d'abord le modèle du champ de compression modifiée (MCFT) de Vecchio et Collins et son application à l'élément poutre de Timoshenko. On présente, ensuite, la méthode de résolution non linéaire utilisée ainsi que les modèles des matériaux (béton et acier) adoptés dans notre étude.
- Le chapitre cinq est consacré à la présentation du programme « poutre \_Timoshenko 3 » en langage fortran 90, qui permet la simulation du comportement des poutres en béton armé dans le domaine non linéaire jusqu'à rupture, sous des sollicitations de flexion et cisaillement.
- Dans le chapitre six on présente une série d'exemples d'applications effectuées à l'aide du programme développée comparés aux résultats d'autres programmes de calcul et avec les résultats expérimentaux.
- Le dernier chapitre consiste en la conclusion générale tirée à l'issue de cette étude ainsi que les perspectives futures à ce travail.

## Chapitre 2

### Revue bibliographique : Aspect expérimental et modélisation

#### 2.1 Introduction :

Une poutre en béton armé est soumise à plusieurs types de sollicitations agissant simultanément. Le plus souvent sont retrouvés des efforts de flexion, de torsion, de traction et de cisaillement.[2] Pour une poutre sollicitée en flexion simple ou composée ,les efforts dans une section se décomposent en un moment fléchissant  $M$  ,un effort normal  $N$  et un effort tranchant  $V$  qui présente la variation du moment fléchissant le long de la poutre ( $V=dM/dx$ )[1] . Le moment fléchissant engendre des contraintes normales et l'effort tranchant des contraintes tangentes [1]. L'effort tranchant fait glisser les uns par a apport aux autres, les plans perpendiculaires au plan moyen et les plan parallèles au plan moyen, comme le montre les figures suivantes .des contraintes tangentes  $\tau$  apparaissent dans ces plans pour s'opposer à ces glissements [1].

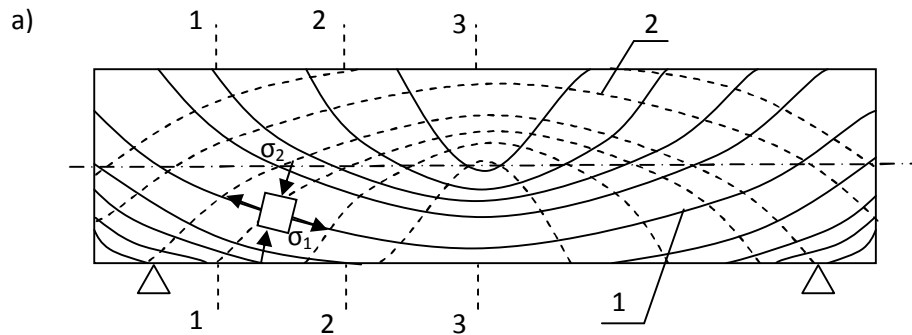


**Figure 2.1 :** Les modes de sollicitation d'une fissure [10].

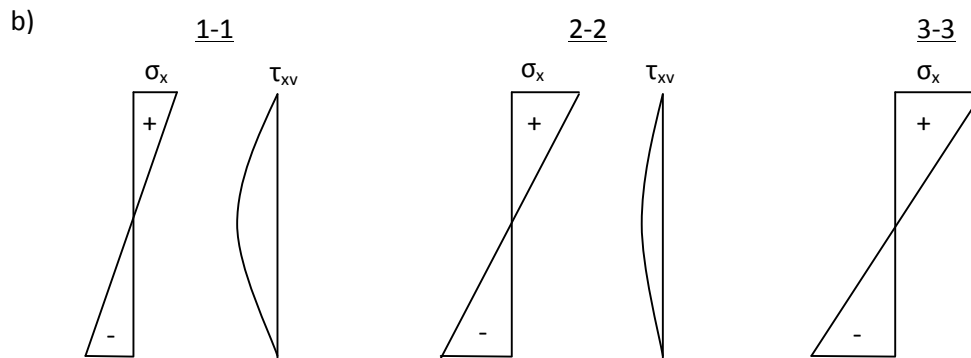
L'effort tranchant varie dans la hauteur de la section ,le cas d'une poutre de section rectangulaire sa variation est parabolique avec un maximum au niveau de centre de gravité [3].

Dans les sections transversales de la zone de cisaillement, pour éléments de constructions tels que les poutres, les contraintes principales  $\sigma_1$  sont positives (tensions) sur toute la hauteur de la section. Ceci indique que les axes neutres de la flexion et du cisaillement ne se confondent pas. Dans une poutre non fissurée en béton armé, le système des lignes de force des contraintes principales est presque le même que celui d'une poutre homogène (Fig.2.2). Par contre, à partir de l'apparition des fissures l'état de contrainte dans une poutre en béton armé est entièrement différent et dépend du type et du nombre des fissures inclinées [4]. L'apparition des fissures dans le béton correspond le plus souvent à son caractère de matériau fragile, et la direction des fissures est perpendiculaire à la direction des contraintes de tension [4].

Dans la zone de cisaillement où  $\sigma_1$  est une contrainte de tension et  $\sigma_2$  représente la compression, la direction des fissures correspond approximativement à la direction des lignes de force des contraintes de compression [4].



- 1) Direction de la contrainte  $\sigma_1$  (traction).
- 2) Direction de la contrainte  $\sigma_2$  (compression).



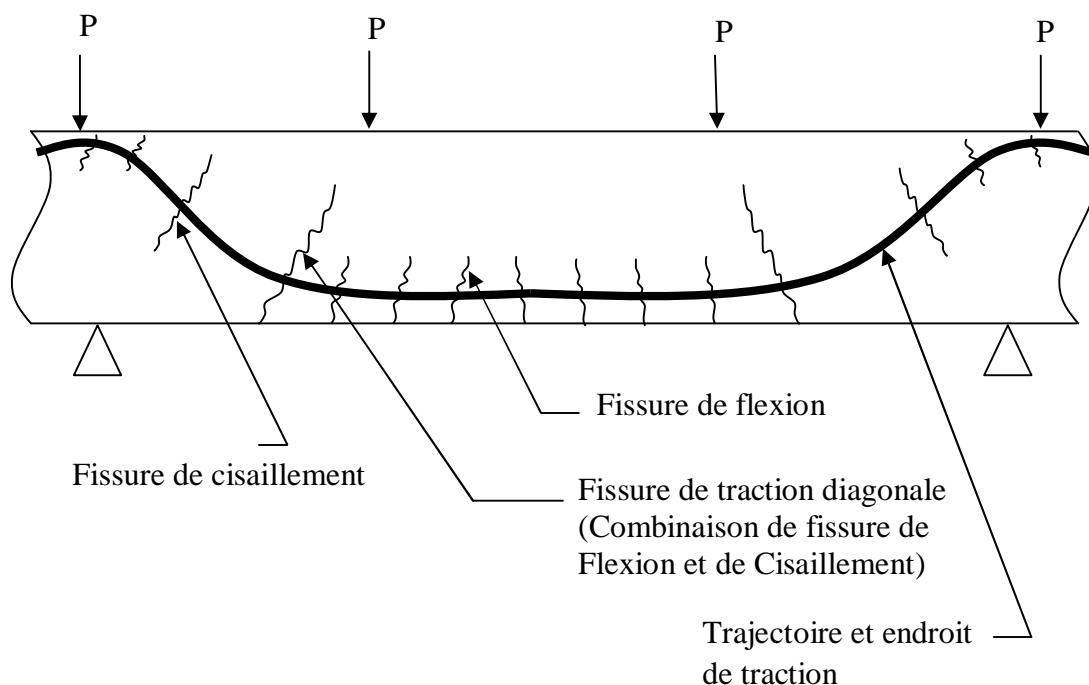
- a) Schéma d'une poutre avec les lignes de forces des contraintes principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$
- b) Diagrammes des contraintes normales et tangentes dans les sections 1-1 , 2-2 et 3-3 de la poutre .

**Figure 2.2.** Etat de contrainte dans une poutre en matériau homogène [4]

Le ferrailage d'une poutre soumise à l'effort tranchant est généralement comme suit :

- § Des armatures longitudinales (barres) pour les contraintes normales de tractions.
- § Des armatures transversales (généralement treillis) pour empêcher les efforts tranchants.

Dans une poutre continue en béton sur appuis simple, chargée comme indiqué sur la figure.2.3, la fissuration à l'allure suivante (d'après Emmons [2]):



**Figure 2.3** : Localisation des fissurations dans une poutre [ 2]

Généralement, dans une poutre en béton armé, les fissures dues aux efforts de cisaillement se forment aux endroits où la contrainte de cisaillement dépasse la résistance du béton en traction. Un effort tranchant crée de la traction oblique et en cas d'insuffisance de l'armature transversale, les fissures se développent. Dans le cas d'une poutre à portée simple, elles se forment dans le tiers de la portée voisine aux appuis et sont inclinées grossièrement à un angle  $\theta$  généralement admis égal à  $45^\circ$  dans les normes (Figure .2.3). L'apparition de ce type de fissure démontre un problème lié à des efforts tranchants [2].

## 2.2 Aperçu sur le comportement vis-à-vis de l'effort tranchant des structures en béton armé :

### 2.2.1 Mode de Fissuration et Rupture par effort Tranchant :

Pour ce qui concerne les modes de rupture, plusieurs possibilités sont envisageables, en fonction de la quantité d'armatures longitudinale et transversale, de la forme de la section, de l'adhérence des armatures au béton et du mode d'ancrage des barres au-dessus des appuis, en fonction de la géométrie de la poutre le rapport  $l/h$  est généralement utilisé pour distinguer les différents types de poutre en béton armé, où  $l$  est la distance entre l'appui et le point d'application de la charge et  $h$  la hauteur effective de la section de la poutre. Ainsi, les poutres sont classées comme suit :

- Poutres très profondes  $l/h \leq 1$ .
- Poutres profondes  $1 < l/h \leq 2.5$ .
- Poutres élancées  $2.5 < l/h \leq 6$ .
- Poutres très élancées  $l/h > 6$ .

Nous distinguons comme suit quelques types de rupture de la zone de cisaillement :

### 2.2.1.1 Rupture par cisaillement et flexion :

Ce type de rupture se caractérise par la disposition des fissures représentée sur la figure 2.4 . Il peut apparaître quand la poutre est relativement ramassée et n'est pas suffisamment armée à la flexion sur toute sa longueur.

Dans le cas de réduction d'armature en fonction du diagramme des moments, la limite d'écoulement de l'acier de l'armature principale est atteinte en dehors du centre de la poutre, dans la zone de l'action simultanée de l'effort tranchant et du moment fléchissant (T et M). Ceci conduit à un cheminement excessif de la fissure oblique et finalement à la rupture qui se traduit par l'écrasement du béton dans la zone au-dessus de cette fissure

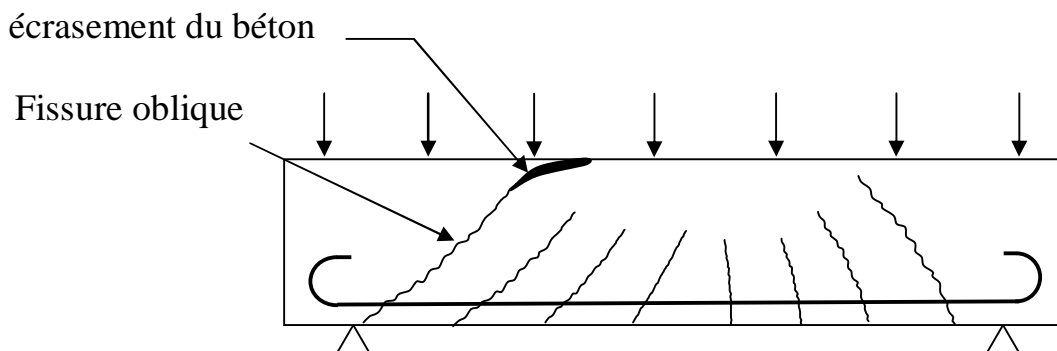


Figure 2.4 : Rupture par cisaillement et flexion

### 2.2.1.2 Rupture par cisaillement et compression :

Ce mode de rupture peut intervenir dans les poutres dont l'armature principale est relativement importante et l'armature transversale faible ou même inexistante. La cause de la rupture est la destruction du béton par séparation et glissement dans la zone de compression au-dessus de l'extrémité de la fissure oblique. A cet endroit , une pseudo d'articulation se forme , autour de laquelle a lieu une rotation des deux parties de la poutre séparées par la fissure oblique (fig.II.5),avec un glissement tangentiel simultané.

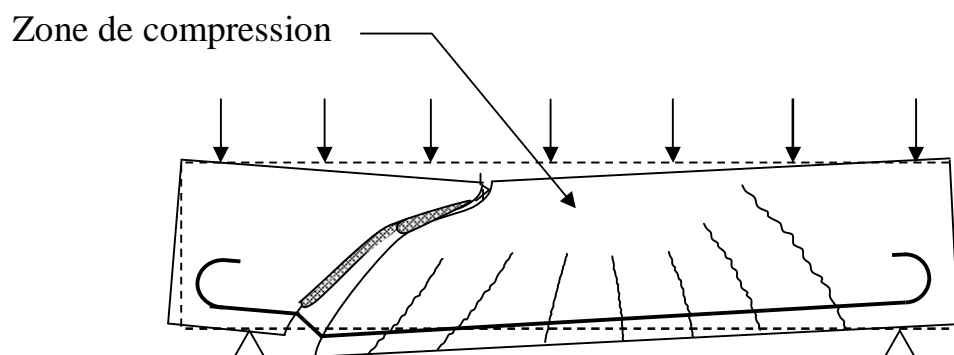
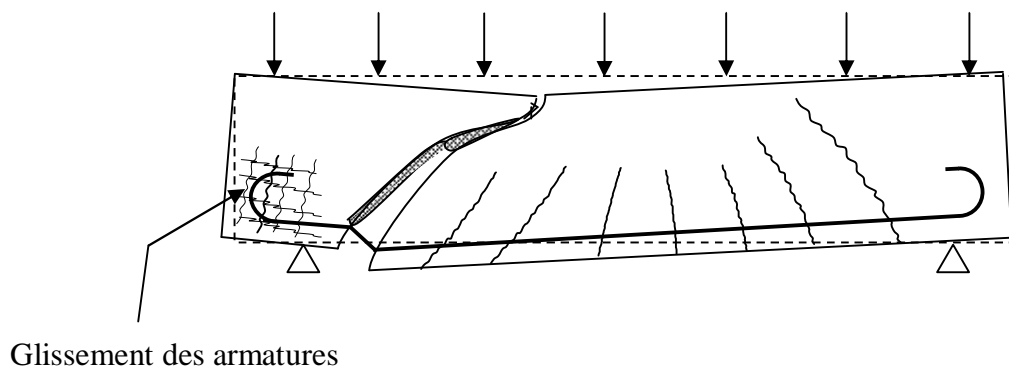


Fig II.5. Rupture par cisaillement et compression [5]

### 2.2.1.3 Rupture par cisaillement avec glissement :

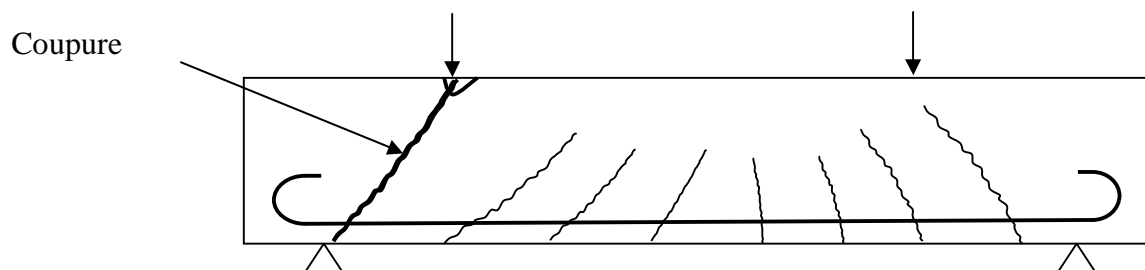
Après l'apparition des premières fissures obliques, l'ouverture de l'une d'elles augmente avec la charge et de nombreuses petites fissures inclinées s'ouvrent au niveau de l'armature principale (fig 2.6), l'adhérence de l'acier au béton disparaît graduellement. Finalement, l'épuisement de la capacité portante de l'élément est causé par le glissement des armatures principales dans l'encrage au-dessus de l'appui. Dans ce cas, les crochets des barres lisses provoquent des éclatements visibles sur les faces frontales de la poutre si l'armature locale transversale n'est pas convenablement prévue.



**Figure 2.6 :** Rupture par cisaillement avec glissement [5]

### 2.2.1.4 Rupture par coupure :

La rupture par coupure ne peut intervenir que dans le cas d'un effort transversal très important avec un faible moment fléchissant sur des poutres minces, donc surtout quand une force concentrée est appliquée près de l'appui.



**Figure 2.7 :** Rupture par coupure [5]

### **2.2.1.5 Rupture par dépassement de la résistance du béton à la compression oblique :**

Ce type de rupture apparaît dans les sections en forme de T avec un hourdis comprimé large et avec une nervure mince, armé fortement par des étriers. Dans ce cas, les contraintes inclinées de compression dans les bielles en béton découpées par des fissures oblique peuvent atteindre presque la valeur de la résistance du béton sur prisme.

### **2.2.2 Paramètres influençant le comportement d'une poutre en béton armé vis-à-vis de l'effort Tranchant :**

De nombreux facteurs influencent le comportement des éléments en béton armé vis-à-vis de l'effort tranchant, qui le rend complexe car la rupture varie en fonction de la charge appliquée, de la présence ou non d'armature transversale, des dimensions et géométrie de la poutre, de l'adhérence acier/béton, de la résistance du béton ainsi que de celle de l'acier.

#### **2.2.2.1 Influence des dimensions de la poutre sur les résultats des essais (effet d'échelle):**

De manière générale, plus le rapport  $l/h$  ( $l$  : longueur ,  $h$  : largeur )augmente plus la résistance au cisaillement de la poutre en béton armé diminue. Cela est particulièrement vrai si la poutre n'a pas d'acier transversal [2].

L'effet d'échelle à été étudié par plusieurs chercheurs qui ont mené des essais sur des poutres en béton armé ,parmi ces essais on peut citer :

#### **a) Essais de LEONHARD et WALTHER [5] :**

Ces essais ont porté sur deux séries de poutres D et C avec des conditions de ferrailage ainsi que des dimensions des poutres différentes. D'après les résultats des essais ils ont constaté que :

- Sur les plus grandes poutres les fissures étaient plus large, et il était possible de les observer plus tôt.
- Conformément au programme d'essai, toutes les poutres des deux séries se sont rompues par cisaillement. Peu avant la rupture il se produisait une fissure horizontale au niveau des armatures principales, allant du commencement de la fissure oblique jusqu'à l'extrémité de la poutre

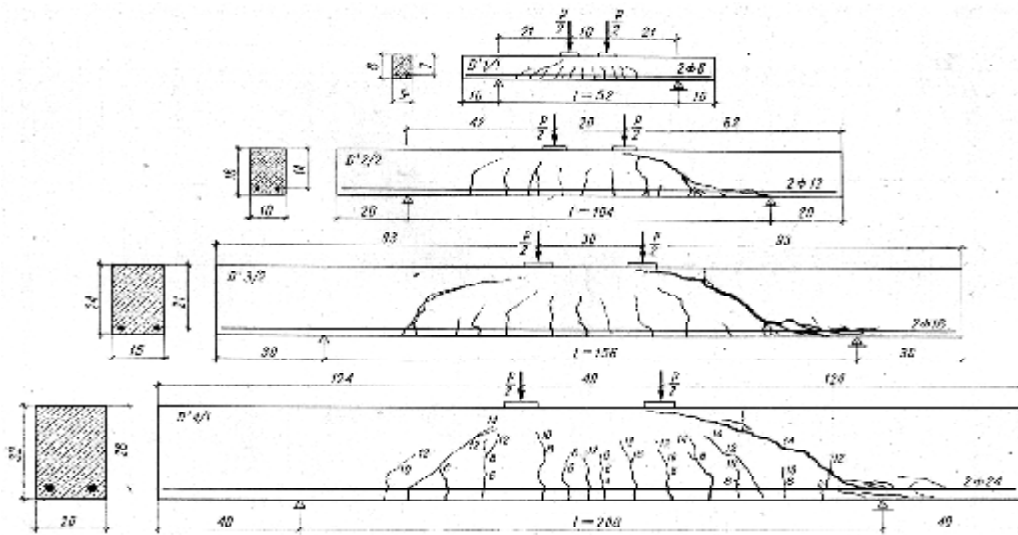


Figure 2.8 : Poutre de la série D [5]

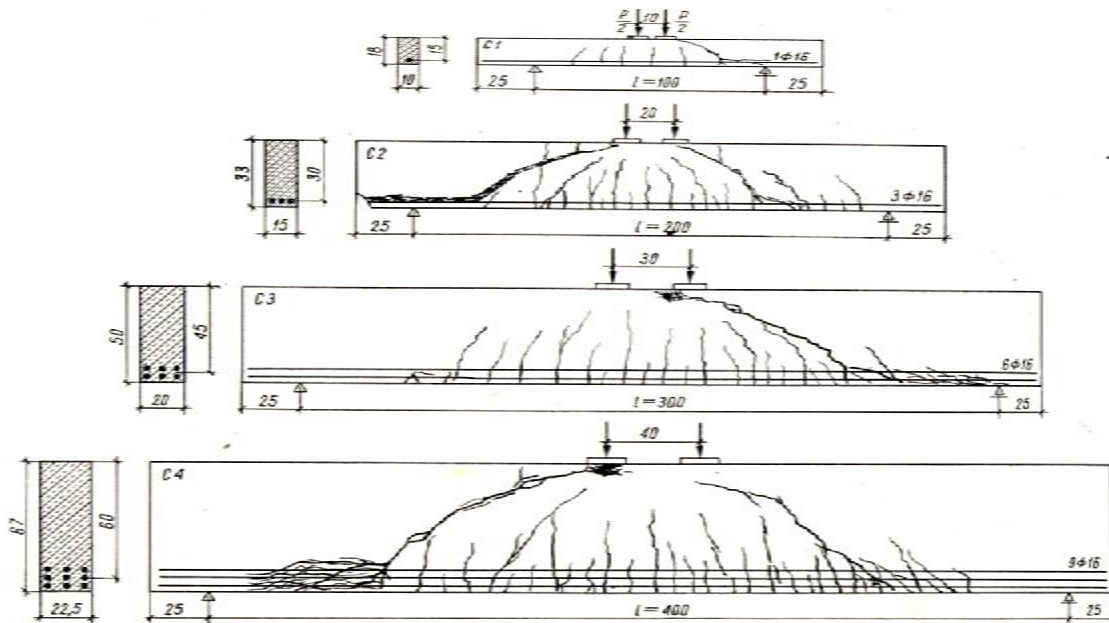
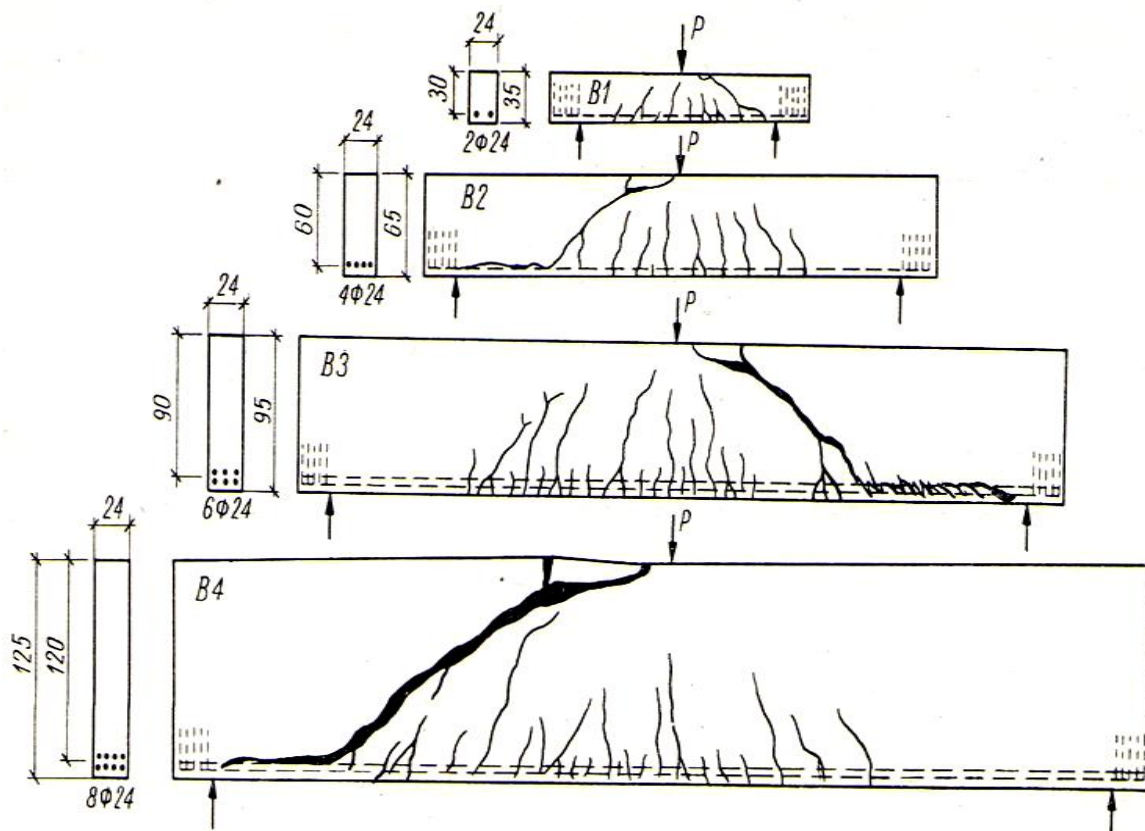


Figure 2.9 : Poutre de la série C [5]

**b) Essais de BHAL [5] :**

Après avoir constaté que les essais précédents avaient été effectués sur des poutres de hauteur trop petite, BHAL sous la direction de LEONARD a adopté des poutres dont la hauteur  $30\text{cm} \leq h \leq 120\text{cm}$ , largeur  $b=24\text{cm}$  et les barres de même diamètre  $\varnothing 24$ , sur une série de quatre poutres.



**Figures.2.10:** Essais des poutres de BHAL [5]

BHAL a constaté que :

-Les fissures dues à la flexion et atteignant l'axe neutre on observe des fissures courtes secondaires, ces fissures s'étaient stabilisées peu après leur ouverture et l'augmentation de la charge n'a pas produit leur cheminement.

-les fissures obliques se sont développées à partir des fissures extrêmes dues à la flexion et l'ouverture de ces fissures changeant d'une façon fondamentale le comportement d'une poutre

-les fissures dues à la flexion au centre de la travée ne se prolongeaient plus et les déformations ultérieures de la poutre jusqu'à la rupture se concentraient au-dessus de la fissure oblique.

Dans les essais de BHAL, seul la plus petite poutre a atteint la charge de service calculée à la flexion, les autres rompues par cisaillement avant la charge de service calculée.

La rupture brutale et immédiate après l'ouverture de la fissure oblique principale à poussé BHAL d'examiné également l'influence de la variation de la hauteur sur la résistance au cisaillement des poutres par des étriers verticaux ( $\varnothing 8\text{mm}$ ) sur quatre poutre identique à celle qu'il a étudié précédâmes.

D'après les résultats des essais, il a conclu que :

-une résistance presque complète à la flexion des poutres pour une hauteur  $h= 30$  et  $h=60\text{cm}$ , et la rupture se traduit par l'écrasement du béton au dessus de la fissure oblique principale.

-pour poutres de hauteur  $h= 90$  et  $h=120\text{cm}$  l'effondrement se manifestait après la rupture des étriers traversant la fissure oblique principale.

-dans les poutres munies d'une armature transversale la hauteur de la poutre influence la capacité portante dans une mesure très petite et négligeable.

### **2.2.2.2 Influence de la nature des armatures transversale dans les poutres en béton armé sur leur capacité portante, leur flèche et la répartition des fissures [5] :**

#### **a) Essais de BACH et GRAF :**

Le but des essais réalisé par BACH et GRAF était d'obtenir des indications sur l'efficacité de l'armature longitudinale et des étriers qui sont résumé comme suit :

#### **✓ Premier type d'essais :**

Les essais ont été réalisés sur des poutres à une travée, en forme de T, armées par des barres longitudinales suffisamment puissante (pour que la rupture ne se manifeste pas dans la section ou le moment est max mais dans la zone de l'action simultanée du moment fléchissant et de l'effort tranchant), et par des étriers différemment répartis et avec des diamètres différentes, qu'on peut résumer dans le tableau suivant :

Série des poutres	Armature longitudinale sup	Armature longitudinale inf	étrier
7	/	2Ø40mm	/
8	/	2Ø40mm	Ø10mm , t=20cm
17	/	2Ø40mm	Ø5mm , t=10cm
19	2Ø40mm	2Ø40mm	Ø7mm , t=15cm
22	/	2Ø40mm	Ø10mm , t=15cm

**Tableau II.1** : détail ferrailage des poutres

l'analyse des essais conduit à la conclusion que des étriers peu espacés produisent une augmentation de la capacité portante beaucoup plus grande que des étriers forts très espacés.

### ▼ Deuxième type d'essais :

Le deuxième type d'essais sont faites sur quatre séries de poutres en forme de T, dans le ferrailage et la nature d'ancrage sans résumé dans le tableau suivant :

Série des poutres	Armature longitudinale	Type d'ancrage	étrier
51	2Ø40mm	Ancrage droit	Sans étriers
52	2Ø40mm	Ancrage droit	Avec étriers(Ø7mm)
53	2Ø40mm	Ancrage courbe	Sans étriers
54	2Ø40mm	Ancrage courbe	Avec étriers(Ø7mm)

**Tableau 2.2** : détail du ferrailage et type d'ancrage

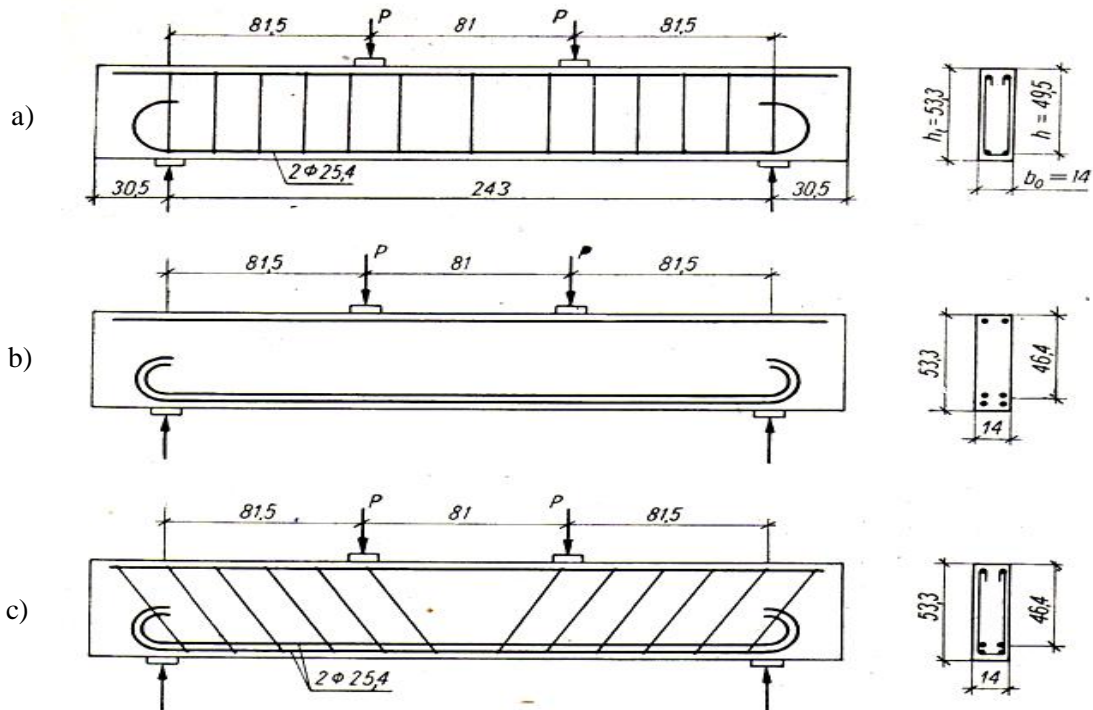
Les résultats tirés de ces essais montrent que les étriers augmentent la capacité portante de façon considérable. L'influence des étriers est plus grande en utilisant un ancrage courbe des armatures principales sur l'appui.

### b) Essais de MORETTO [5]:

Ces essais sont réalisés sur des poutres en béton armé, en faisant varier les paramètre suivant :

- ferrailage longitudinal.
- le nombre et l'inclinaison des étriers.
- les étriers étaient soudés aux armatures longitudinales supérieures et inférieures.

Les poutres examinées sont représentées sur la figure.2.11 :



**Figure.2.11** : Poutres dans les essais de MORETTO [5]

D'après les essais il résulte que :

- la capacité portante est meilleur dans le cas des étriers inclinés.
- le soudage des étriers aux barres longitudinales augmente d'environ 20% la capacité portante de la zone de cisaillement.

### 2.2.2.3 Influence de l'éclatement de cisaillement sur la capacité portante d'une poutre en béton armé:

L'influence du rapport  $\ell/h$  ( $\ell$  : distance entre appuis,  $h$  : la hauteur de poutre) sur la valeur des contraintes de cisaillement de rupture  $\sigma_{\max}$  est examinée par plusieurs chercheur, dans on peut citer les essais réalisés par LEONHARDT et WALTHER [5], sur des poutres rectangulaires de travées différentes avec armature et section transversale constante pour deux séries de poutres :

- Ø séries I : poutres soumises à deux charges concentrées.
- Ø séries II : poutres soumises à une charge uniformément répartie.

D'après les résultats des essais , LEONHARDT et WALTHER ont constaté que :

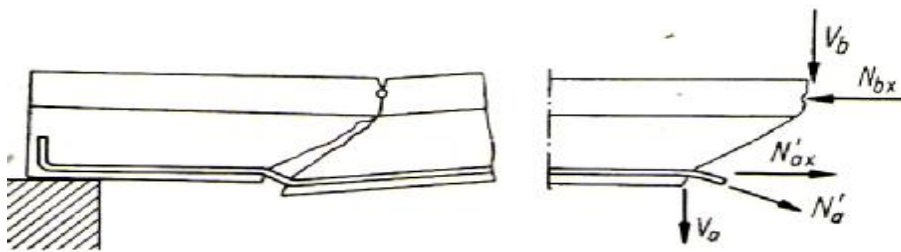
- l'éclatement est inversement proportionnel aux valeurs de  $T_u$  et de  $\tau_{\max}$  concernant la série I, (L'effort tranchant extrême  $T_u$  et également la contrainte  $\tau_{\max}$  sont observés dans la poutre la plus courte).

-Pour les poutres de la série (II), la valeur des contraintes de cisaillement de Rupture dépend considérablement du rapport  $\ell/h$  et que cette valeur est maximale pour la valeur minimale du rapport  $\ell/h$ .

-En comparant les résultats des essais des poutres des deux séries I et II, il semble que les valeurs minimales des contraintes trouvées dans les poutres des travées maximales sous une charge uniforme sont supérieures de 40% environ à celles qui apparaissent dans les poutres chargées par deux forces concentrées.

### 2.2.3. Participation de l'armature longitudinale à la transmission de l'effort tranchant [5] :

L'ouverture de la fissure et la rotation des deux parties de la poutre autour d'une articulation dans la zone comprimée provoque la déformation de l'armature longitudinale, qui conduit à une modification fondamentale de la disposition des efforts internes (représentée d'une manière un peu exagérée sur la figure 2.12).



**Figure.2.12** : disposition des efforts dans l'armature principale dans la zone de la fissure oblique

Etant donnée l'inclinaison de l'effort  $N'_a$  de l'armature longitudinale de la partie gauche, il résulte une composante verticale  $V_a$  qui va participer à la transmission de l'effort tranchant et une composante horizontale  $N'_{ax}$ .

Avec :

$N'_a$  : effort de traction dans l'armature longitudinale.

$N'_{ax}$  : composante horizontale de l'effort de traction dans l'armature longitudinale.

$V_a$  : composante verticale de l'effort de traction dans l'armature longitudinale.

$N_{bx}$  : composante horizontale de l'effort de compression dans le béton.

$V_b$  : composante verticale de l'effort de compression dans le béton.

## 2.3 Revue des travaux antérieurs sur la modélisation de l'effort tranchant :

Les premiers modèles qui traitent la simulation du comportement non linéaire d'une poutre en béton armé soumise à des efforts de cisaillement datent du début du siècle dernier, qui sont basés sur un modèle relativement simple élaboré par « Ritter et Morsch » connu sous le nom 'Modèle des bielles'. Plusieurs Chercheurs ont travaillé sur ce problème et aujourd'hui quatre développements majeurs sont proposés afin d'expliquer la différence entre le modèle des bielles à  $45^\circ$  et les résultats des essais [6].

**2.3.1 L'analogie du treillis (Truss analogy) :**

L'analogie du treillis développée par « Ritter et Mörsch » il y a plus d'un siècle décrit le comportement d'une poutre fissurée (voir la figure 2.10). Des fissures inclinées par rapport aux barres horizontales d'acier apparaissent et séparent le béton en une série de bielles diagonales (compression concrete struts) parallèles aux fissures.

Les bielles de compression sont supposées résister en compression axiale. Avec les barres d'acier (armatures longitudinales et transversales) qui ne reprennent que de la tension axiale, elles forment un treillis capable de résister à l'effort tranchant appliqué [6].

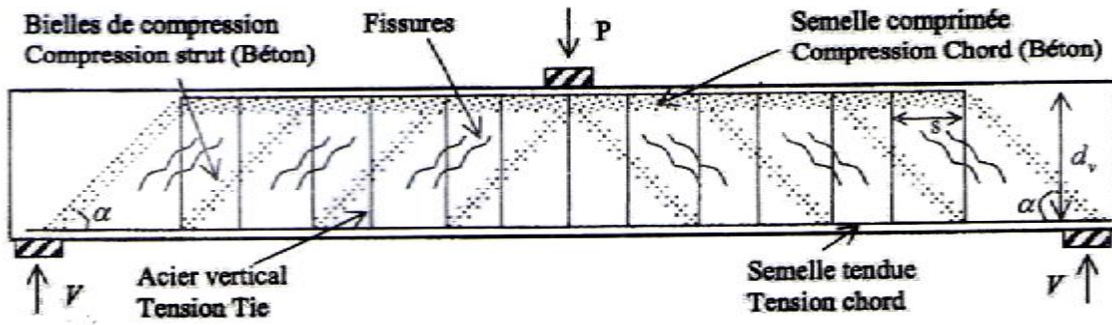


Figure 2.13 : L'analogie du treillis [6].

L'examen du corps libre (Figure 2.14) nous montre que l'effort tranchant  $V$  dans la section est équilibré par la composante verticale de l'effort de compression  $D$  dans les bielles de béton. Cette composante se traduit en une traction exercée sur les armatures transversales. La composante horizontale de l'effort  $D$  est contrebalancée par des efforts de traction  $N$  dans les armatures horizontales. Pour des raisons de simplicité, l'angle de l'inclinaison des bielles est supposé égal à  $45^\circ$ , d'où le nom de la méthode «modèle des bielles à  $45^\circ$ ». Le modèle considère que la résistance au cisaillement est atteinte quand le ferrailage transversal est plastifié. Le pourcentage de ferrailage transversal nécessaire pour le dimensionnement de la poutre est ensuite calculé à partir de l'équation (2.3) connue aussi sous le nom de « équation de treillis pour le cisaillement » [6].

$$N = \frac{2V}{\tan \alpha} = 2V \tag{2.1}$$

$$f_d = \frac{D}{b_v d_v \cos \alpha} = \frac{V}{b_v d_v \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2V}{b_v d_v} \tag{2.2}$$

$$V = A_{vt} f_{ty} \frac{d_v / \tan \alpha}{s} = A_{vt} f_{ty} \frac{d_v}{s} \tag{2.3}$$

Avec  $\alpha = 45^\circ$ .

Figure 2.14 : Equations du modèle des bielles à  $45^\circ$ .

Avec :

P : effort vertical exercé sur la poutre.

s : espacement entre les armatures transversales.

$b_v$  : largeur effective de la poutre.

$d_v$  : distance entre les aciers longitudinaux.

$A_{vs}$  : section d'armatures transversales pour une distance s.

V : effort de cisaillement dans la section.

$N/2$  : effort de traction exercé sur les armatures longitudinales.

D : effort de compression exercé dans les bielles de béton.

$f_d$  : contrainte de compression dans les bielles de béton.

$f_{ty}$  : résistance en traction des armatures transversales.

$\alpha$  : angle entre les bielles de béton et les armatures horizontales.

### Remarques :

- Le modèle des bielles à 45° laisse sous-entendre qu'une quantité de ferrailage horizontal en plus du ferrailage vertical est nécessaire pour la résistance au cisaillement.
- Le modèle néglige la contribution du béton en traction[6].

Le modèle des bielles à 45° a eu beaucoup de succès grâce à sa simplicité et au sens physique qu'on peut facilement y accorder. En effet, la modélisation du mécanisme de dégradation avec l'aide d'un treillis rend le cheminement des efforts visible et le phénomène plus compréhensible. Néanmoins, dès son apparition le modèle a été sérieusement critiqué. Des expériences Withey (1908) et Talbot (1909) ont montré que les résultats étaient souvent trop conservateurs [6].

Les chercheurs se sont vite aperçus que le problème du cisaillement est très compliqué et que des paramètres supplémentaires doivent être pris en considération (qualité et résistance du béton, longueur de la poutre par rapport à sa hauteur etc.) [6].

Plusieurs travaux ont été faites sur ce problème, dans quatre développements majeurs sont proposés afin de diminuer l'écart entre le modèle de bielles à 45° et les résultats expérimentaux [6].

Contrairement au modèle classique du treillis, l'angle d'inclinaison des diagonales comprimées du treillis à angle variable peut être différent de 45° d'après des essais faites par des chercheurs (Lampert et thurlimann (1968),...) ont constaté que cet angle n'est pas constant mais qu'il varie entre 31° et 59° [4] , [6] , [9] .

Pour un effort tranchant donné (éq 2.3), il y a quatre inconnues ( $A_{vs}$ ,  $f_{ty}$ , s, et  $\alpha$  ), mais seulement trois équations d'équilibre. Il n'est donc pas possible d'évaluer les contraintes causées par un effort tranchant en utilisant uniquement les équations d'équilibre.

Pour résoudre ce problème, Collins (1978) en se basant sur le développement de Wagner, qui suppose que l'angle de l'inclinaison de la contrainte de traction diagonale coïncide avec l'angle d'inclinaison de la déformation principale de traction connue sous le nom « la théorie du champ de traction ou tension field theory », il suppose que le béton ne peut plus reprendre la traction une fois qu'il est fissuré. A ce moment, l'effort tranchant est repris par un champ de compression diagonale et par les étriers [6] , [7] et [13].

Selon Collins [13], l'angle de compression diagonale (figure 2.15)est donné comme suit :

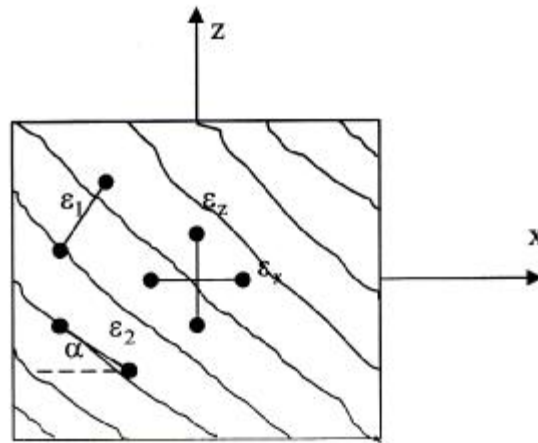
$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_d}{\varepsilon_x - \varepsilon_d} \quad (2.4)$$

Avec :

$\varepsilon_x$  : déformations des armatures horizontales.

$\varepsilon_z$  : déformations des armatures transversales.

$\varepsilon_d$  : déformations des bielles de béton ( $\varepsilon_d = \varepsilon_2$ )



**Figure 2.15** : Déformation moyennes dans un élément fissuré en béton armé.

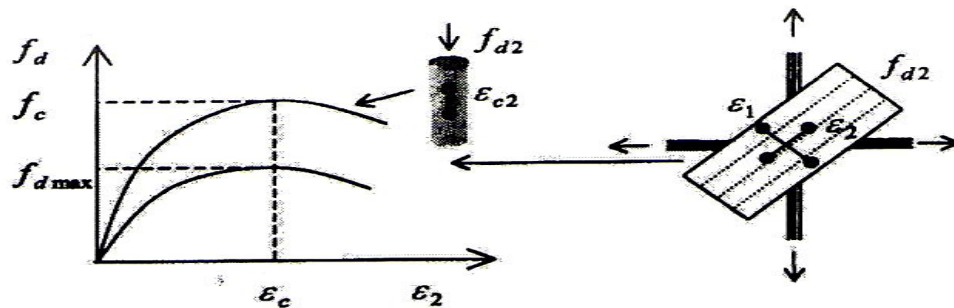
**Remarque :**

- Cette équation (2.4) peut être issue du cercle de Mohr. Elle est équivalente à l'équation de compatibilité qui lie les déformations du béton et des armatures longitudinales et transversales [6].
- L'angle d'inclinaison des bielles coïncide avec l'angle de l'inclinaison de la contrainte et de la déformation principale de compression [6].

**2.3.1.1 L'adoucissement des bielles de béton :**

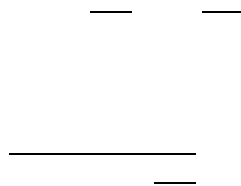
L'étude du comportement non linéaire d'un élément en béton armé nécessite en plus des équations d'équilibres et des relations de compatibilité les lois de comportement pour le béton et l'acier [4]. La compression simple sur un cylindre en béton armé a été utilisée comme loi pour le béton sauf que les résultats numériques se trouvaient souvent loin des résultats expérimentaux, jusqu'à ce que Peter (1964) et Robinson et Démorieux (1972). Ils ont observé que le comportement d'un panneau en béton armé soumis à un effort de compression est adouci à cause de la traction dans la direction perpendiculaire [4], [7].

Une série d'essais sur élément de béton armé soumis à un champ uniforme de contraintes membranaires ont été effectués par Vecchio et Collins (1986). Ils concluent que la résistance du béton des bielles comprimées situées entre les fissures diminue avec l'augmentation des déformations de traction, pas la suite proposent une loi où l'adoucissement dépend de la proportion des deux déformations principales (voir figure 2.16) [8], [14].



**Figure 2.16** : Adoucissement des bielles de béton en compression d'après [ 8]

Avec :



Avec :

$f_d$  : contrainte de compression dans les bielles de béton (on l'appelle également  $\sigma_2$ ).

$f_{dmax}$  : contrainte maximale de compression dans les bielles de béton.

$f_c$  : résistance de béton en compression issue d'un essai de compression sur un cylindre.

$\epsilon_{b0}$  : déformation correspondant a la résistance  $f_c$  , dans le diagramme contrainte-déformation du béton en compression simple.

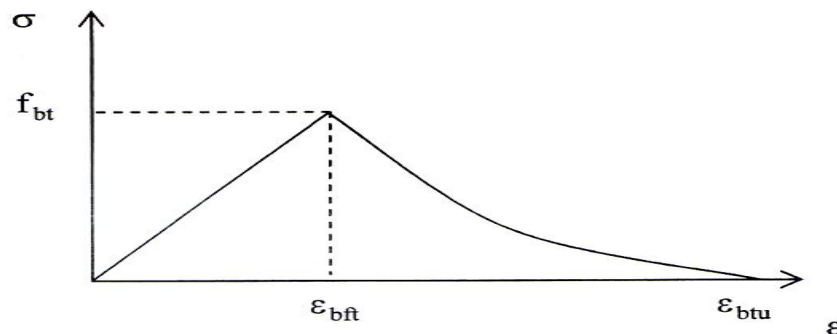
$\epsilon_1$  : déformation principale en traction.

$\epsilon_2$  : déformation principale en compression.

### 2.3.1.2 Les contraintes de traction dans le béton :

Plusieurs essais prouvent que le béton même après avoir subi une fissuration importante est capable de transmettre des contraintes de traction (Vecchio et Collins 1986), contrairement au modèle de bielles à  $45^\circ$  [4] , [6].

Ces contraintes diminuent les déformations, rigidifient l'élément et le rendent capable de résister à de plus grandes déformations de cisaillement. Leur influence peut être significative et elles doivent être prises en compte (voir figure 2.17). Ce Phénomène appelé « tension stiffening » [4] , [6].



**Figure 2.17** : Comportement du béton tendu.

Avec :

$f_{bt}$  : résistance du béton à la traction.

$\varepsilon_{bft}$  : déformation de traction correspondant à la résistance  $f_{bt}$ .

$\varepsilon_{btu}$  : déformation ultime du béton tendu.

$E_{b0}$  : module d'élasticité longitudinale du béton .

Avant la fissuration du béton :

$$\sigma_r = E_{b0} \cdot \varepsilon \quad \text{si}$$

Après fissuration la contrainte diminue. Pour décrire cette branche descendante plusieurs relations ont été proposées, dans on peut citer celle de Belarbi et Hsu qui relie la contrainte à la déformation dans le béton entre deux fissures [9].

$$\sigma_r = - f_{bt} (\varepsilon_{bft} / \varepsilon)^{0.4} \quad \text{si}$$

### 2.3.2 La théorie de champs de compression(C.F.T) :

La théorie du champ de compression (compression field theory) a été développée par Collins et Mitchell (1974 et 1980) et par Collins (1978) à partir du modèle du treillis à angle variable, en faisant une analogie entre les poutres en béton armé et celles en acier. Comme dans le cas du modèle du treillis conventionnel, le modèle du treillis à angle variable associe la zone de béton comprimée par la flexion et l'armature longitudinale tendue aux membrures supérieure et inférieure du treillis respectivement. Les étriers agissent comme des membrures verticales tendues. Finalement, le béton comprimé entre les fissures inclinées représente les membrures diagonales du treillis.

La théorie de champs de compression(C.F.T) utilise les équations d'équilibre du modèle de treillis (équations 2.1, 2.2 et 2.3), l'équation (2.4) permettant de déterminer l'angle d'inclinaison des bielles et la loi d'adoucissement des bielles de béton (équation 2.5 et 2.6) pour simuler le comportement non linéaire d'un élément en béton armé soumis au cisaillement, on tenant compte des hypothèses suivantes [4] , [6] , [7] :

- Les contraintes de cisaillement sont uniformément distribuées sur une aire efficace.
- la direction des contraintes principales demeure constante sur toute la profondeur de la section.
- Le comportement des armatures est supposé élasto-plastique parfait.
- La résistance du béton en traction est négligée.
- Les bielles de compression coïncident avec la direction des déformations et des contraintes principales de compression
- Après fissuration, l'effort tranchant est repris par les bielles diagonales comprimées.

Les équations d'équilibre de la théorie de champs de compression (C.F.T) sont :

$$\rho_x \sigma_{ax} = \tau_{xz} \cot\theta. \quad (2.7)$$

$$\rho_z \sigma_{az} = \tau_{xz} \tan\theta. \quad (2.8)$$

$$\sigma_d = \tau_{xz} (\tan\theta + \cot\theta). \quad (2.9)$$

Avec :

$\rho_x$  : pourcentage d'acier réparti suivant la direction x.

$\rho_z$  : pourcentage d'acier réparti suivant la direction z.

$\sigma_{ax}$  : contrainte de traction des aciers orientés suivant la direction x.

$\sigma_{az}$  : contrainte de traction des aciers orientés suivant la direction z.

$\sigma_d$  : contraintes de compression dans les bielles de béton.

$\tau_{xz}$  : contrainte de cisaillement dans la béton.

#### Remarques :

- La C.F.T néglige l'existence des contraintes de traction dans le béton fissuré[6].
- Dans le cas d'absence des armatures verticales l'élément ne prévoit aucune résistance au cisaillement[6].

Pour résoudre ces problèmes Vecchio et Collins (1986) ont proposé une modification de la CFT nommée la théorie de champs de compression modifiée (Modified Compression Field Theory (MCFT))[7].

### 2.3.3 La théorie de champs de compression modifiée (M.C.F.T) :

La théorie du champ de compression (C.F.T) donne des résistances à l'effort tranchant conservatrices comparativement aux résultats obtenus expérimentalement. Afin de mieux prévoir le comportement réel d'une poutre et sa résistance ultime à l'effort tranchant, Vecchio et Collins (1986) ont raffiné cette théorie. La théorie améliorée porte le nom de théorie du champ de compression modifiée (M.C.F.T) [7].

Le béton fissure est traité comme étant nouveau matériau avec ses propres caractéristiques en terme de contrainte et de déformation. Les équations d'équilibre, de compatibilité et les lois de comportement sont formulées en terme de contraintes et de déformation moyennes [8].

Les équations d'équilibre de la MCFT peuvent être obtenues d'une manière analogue à celle pour la CFT, avec un terme ajouté qui traduit la prise en compte des contraintes de traction du béton fissuré [4] :

$$\rho_x \sigma_{ax} = \tau_{xz} \cot\theta - \sigma_1 \quad (2.10)$$

$$\rho_z \sigma_{az} = \tau_{xz} \tan\theta - \sigma_1 \quad (2.11)$$

$$\sigma_d = \tau_{xz} (\tan\theta + \cot\theta) - \sigma_1 \quad (2.12)$$

Avec:

$\sigma_1$  : contraintes principales moyennes de traction du béton, elles sont évaluées par l'expression suivante (Collins et Mitchell 1991) [4] :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{cr}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \quad (\text{en psi}) \quad (2.13)$$

Avec :

$\sigma_{cr}$  : contrainte de rupture du béton, prise égale à  $4\sqrt{\sigma'_c}$  (psi).

$\sigma'_c$  : la contrainte de compression du béton lors d'un essai de compression simple sur cylindre

1psi : 6.894MPA

Les expressions d'équilibres dans un élément en béton armé fissuré, on ignorant la petite réduction de la section du béton due à la présence des armatures avec l'utilisation de la MCFT sont [4] , [6] , [7] , [8] , [9] :

$$\sigma_x = \sigma_{bx} + \rho_{ax} \sigma_{ax} \quad (2.14)$$

$$\sigma_z = \sigma_{bz} + \rho_{az} \sigma_{az} \quad (2.15)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{bxz} \quad (2.16)$$

Avec :

$\sigma_x$  ,  $\sigma_z$  : contraintes normales agissant sur un élément en béton armé suivant les deux directions x et z respectivement.

$\tau_{xz}$  : contrainte tangentielle agissant sur un élément en béton armé.

$\sigma_{bx}$  ,  $\sigma_{bz}$  : contraintes normales dans le béton, suivant les deux directions x et z respectivement.

$\rho_{ax}$  ,  $\rho_{az}$  : pourcentages d'aciers répartis suivant les deux directions x et z.

$\sigma_{ax}$  ,  $\sigma_{az}$  : contraintes dans les aciers suivant les deux directions x et z respectivement.

$\tau_{bxz}$  : contrainte tangentielle dans le béton.

**Remarque:**

MCFT est capable de prévoir la résistance des éléments avec peu ou pas d'armatures transversales, contrairement à CFT qui ne prend pas en considération les tractions transmises par le béton.

**2.3.4 La théorie du treillis adoucissant :**

La théorie de treillis adoucissant « softened truss model theory », développée à l'université de Houston est nommée ainsi pour mettre en avant l'importance du phénomène d'adoucissement des bielles diagonales [6]. Deux modèles sont développés par Hsu et Al pour la simulation du comportement des éléments en béton armé soumis à des efforts de cisaillements ont ce basant sur cette théorie [4] , [6]:

- Le modèle du treillis adoucissant d'angle variable (RASTM).
- Le modèle du treillis adoucissant d'angle fixe (RASTM).

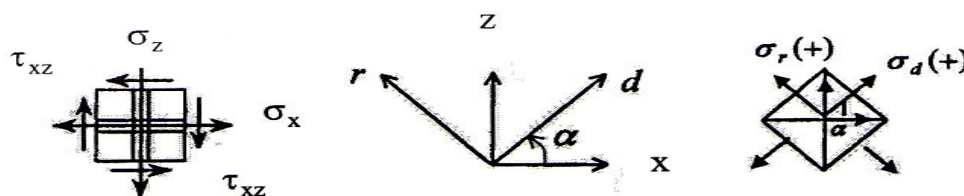
**2.3.4.1 Hypothèses fondamentales de la théorie [6] , [9] :**

- Une répartition uniforme de l'acier dans les deux directions.
- Utilisation des conditions de comptabilité et les lois de comportement adoucissant .
- Il y a coïncidence des directions principales des contraintes est les déformations dans le béton.

**2.3.4.2 La théorie du treillis adoucissant d'angle variable (RASTM) :**

L'angle d'inclinaison des fissures diminue quand le cisaillement augmente (c'est -à-dire qu'il est variable) d'où le nom du modèle (RASTM). on considérant une coïncidence de l'inclinaison des fissures avec la direction des contraintes et déformations principales de compression [4] , [6].

Les structures en béton armé peuvent être considérées comme des assemblages d'éléments membranes, pour connaître son comportement il faut analyser séparément le béton et l'acier. les équations disponibles pour établir cette théorie sont les équations d'équilibre, les équations de comptabilité et les lois de comportement des matériaux [4] , [6] , [9]. voir la figure 2.15 .



**Figure 2.18** : Element membrane et contraintes selon RASTM

Avec :

$\sigma_x$  : contraintes normales suivant x.

$\sigma_z$  : contraintes normales suivant z.

$\tau_{xz}$  : contrainte tangentielle.

x : direction des armatures longitudinales.

z : direction des armatures transversals.

L'état de contrainte et de déformation change dans l'élément après le développement des fissures diagonales, les bielles de béton se mettent en compression et les barres d'aciers en traction. Les bielles sont orientées selon l'axe d, qui est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe des barres horizontales. Cette direction supposée coïncider avec la direction des contraintes et des déformations principales de compression (même hypothèse que la CFT) [4], [6], [9], [10].

### a) Equations d'équilibre :

Les efforts totaux qui sollicitent l'élément sont équilibrés par le béton et l'acier qui est décrite sur la figure 2.16 [9].

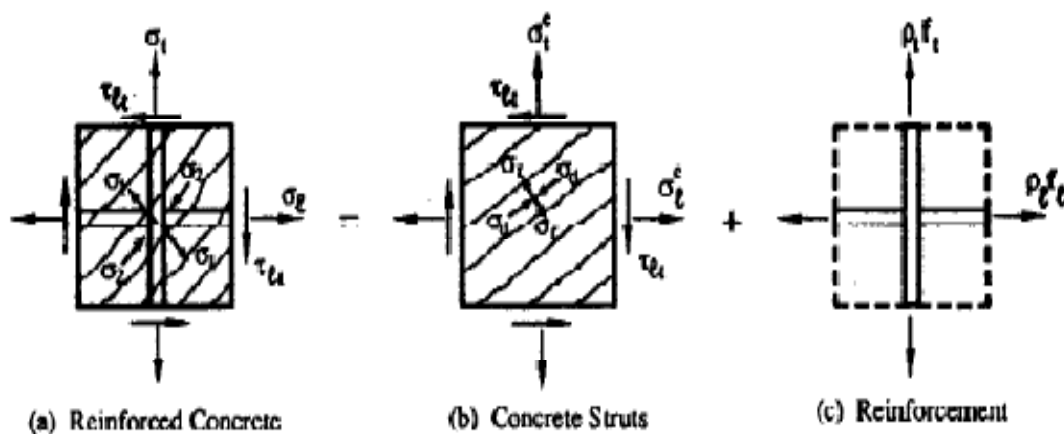


Figure 2.19 : Superposition des contraintes du béton et des armatures

En superposant les contraintes dans le béton et les contraintes de l'acier en supposant que l'acier résiste uniquement à l'effort axial, on obtient les equations d'équilibres suivantes:

$$\sigma_x = \sigma_d \cos^2 \alpha + \sigma_r \sin^2 \alpha + \rho_x \sigma_{ax} \quad (2.17)$$

$$\sigma_z = \sigma_d \sin^2 \alpha + \sigma_r \cos^2 \alpha + \rho_z \sigma_{ax} \quad (2.18)$$

$$\tau_{xz} = (\sigma_d - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.19)$$

Avec :

$\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  : contraintes normales selon x et z (positives en traction).

$\tau_{xz}$  : contraintes de cisaillement selon x et z (positives selon la figure 2.17).

$\sigma_d$ ,  $\sigma_r$  : contraintes principales selon d et r (positives en traction).

$\rho_x, \rho_z$  : pourcentage volumique des armatures selon x et z.

$\sigma_{ax}, \sigma_{az}$  : contraintes des armatures selon x et z.

d, r : axes des contraintes principales.

x, z : axes des armatures.

## b) Equations de compatibilité :

A partir du cercle de Mohr en déformations, nous pouvons déduire les équations:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_d \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_d \sin^2 \alpha + \varepsilon_r \cos^2 \alpha \quad (2.21)$$

$$\gamma_{xz} = 2(\varepsilon_d - \varepsilon_r) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.22)$$

Pour résoudre les équations d'équilibre et de compatibilité on a besoin de connaître les lois de comportement des matériaux (béton, acier).

## C) Lois de comportement :

### C.1. Comportement du béton :

#### C.1.1 Comportement du béton tendu :

Le comportement du béton en traction est simulé par les équations.

$$\sigma_r = E_b \varepsilon_r \quad \text{si } \varepsilon_r \leq \varepsilon_{cr} \quad (2.23)$$

$$\sigma_r = \frac{\varepsilon_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{cr}}{0.005}}} \quad \text{si } \varepsilon_r > \varepsilon_{cr} \quad (2.24)$$

Avec :

$E_b$  : module de Young initial pour le béton, choisi égal à  $-2\sigma_b/\varepsilon_b$  avec  $\varepsilon_b = -0.002$ .

$\varepsilon_{cr}$  : déformation au moment de la fissuration du béton, supposée égale à  $\sigma_{cr}/E_c$ .

$\sigma_{cr}$  : contrainte qui correspond au moment de la fissuration du béton,

$\varepsilon_r$  : déformation en traction du béton.

### C.1.2 Comportement du béton en compression :

Belarbi et Hsu [23] ont propose une loi de comportement tenant en compte de l'adoucissement du béton en compression comme suit:

$$\sigma_d = \zeta f_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_d}{\zeta \varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad \text{si } |\varepsilon_d| \leq |\zeta \varepsilon_c| \quad (2.25)$$

$$\sigma_d = \zeta f_c \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_d / \varepsilon_c - \zeta}{2 - \zeta} \right)^2 \right] \quad \text{si } |\varepsilon_d| > |\zeta \varepsilon_c| \quad (2.26)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{(1-\nu)\varepsilon_d - \varepsilon_r}} \quad (2.27)$$

Avec :

$f_c$  : contrainte maximale en compression issue d'un essai de compression sur un cylinder.

$\varepsilon_c$  : deformation qui correspond à  $f_c$  et qui peut être choisi égale à -0.002 .

$\zeta$  : coefficient d'adoucissement (inférieur à 1).

$\nu$  : coefficient de poisson.pour l'aplication de la méthode, Hsu considère que  $\nu = 0.3$  .

### C.2. Comportement des armatures :

Le comportement des armatures horizontales et verticales est supposé élasto-plastique parfait, et est représenté par les équations suivantes:

$$\sigma_{ax} = f_{ex} \quad \text{si } \varepsilon_x > \varepsilon_{ex} \quad (2.28).$$

$$\sigma_{ax} = E_a \varepsilon_x \quad \text{si } \varepsilon_x \leq \varepsilon_{ex} \quad (2.29).$$

$$\sigma_{az} = f_{ez} \quad \text{si } \varepsilon_z > \varepsilon_{ez} \quad (2.30).$$

$$\sigma_{az} = E_a \varepsilon_z \quad \text{si } \varepsilon_z \leq \varepsilon_{ez} \quad (2.31).$$

Avec :

$E_a$  : module de young des armatures.

$f_{ex}$  ,  $f_{ez}$  : limites élastiques des armatures horizontales et verticales.

$\varepsilon_{ex}$  ,  $\varepsilon_{ez}$  : deformations correspondantes aux limites élastiques des armatures horizontales et verticales.

**2.3.4.3 La théorie du treillis adoucissant d'angle fixe (FASTM) :**

Dans ce modèle, la direction des contraintes principales de compression est supposée fixe et coïncide avec la direction de la première fissure d'où le nom du modèle.

Cette nouvelle théorie prend en compte l'influence des contraintes de cisaillement le long des fissures et elle donne de bons résultats même pour des éléments faiblement armés, cependant, elle est très complexe [4] , [6].

## Chapitre 3 :

### Formulation de la poutre de Timoshenko

#### 3.1 Introduction :

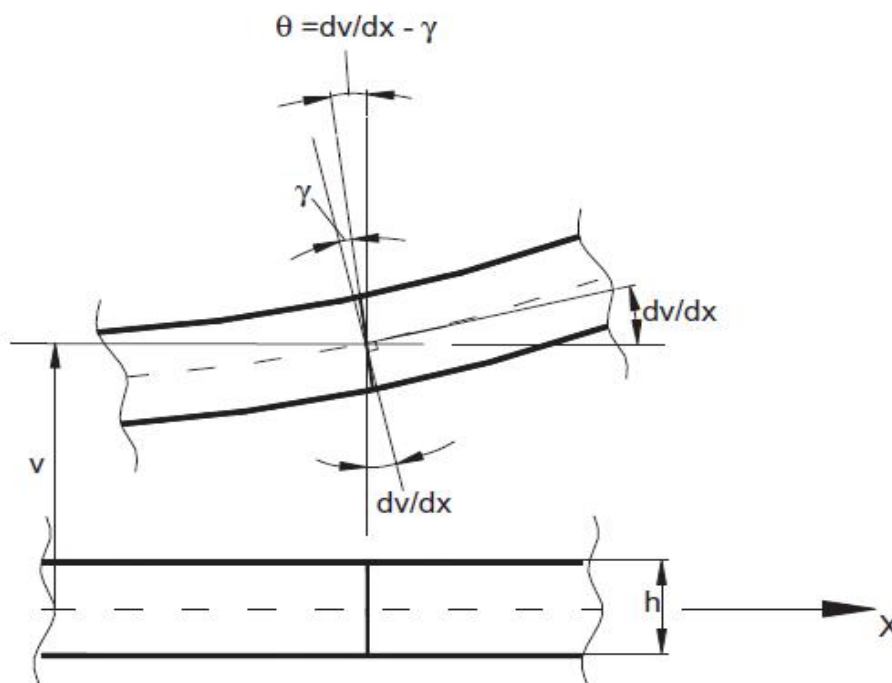
Ce chapitre est consacré à la formulation de la poutre de Timoshenko. Pour cela on présente les relations caractérisant la théorie des poutres droites fléchissant dans un plan, en tenant compte de l'influence des déformations de cisaillement transversal (poutre épaisse), qui est basé sur l'hypothèse des poutres droites (pour définir le champ de déplacement).

#### 3.2 Hypothèses de Calcul :

Notre étude est basé sur un élément de poutre plane orienté dans la direction  $x$  (dans le plan  $xz$ ). les hypothèses retenues sont les suivantes :

- L'axe longitudinal de la poutre est droit.
- Le plan  $xz$  est le plan principal d'inertie.
- La poutre se déforme dans le plan  $xz$  (en membrane, flexion et cisaillement avec l'hypothèse des contraintes planes  $\sigma_{zz} = 0$ ).
- La poutre plane transmet des efforts normaux  $N_x(x)$  suivant la direction  $x$ , des efforts tranchants  $T_z(x)$  suivant la direction  $z$  et des moments fléchissant  $M_y(x)$  autour de l'axe local  $y$  orthogonal au plan  $xz$ .
- Les quantités globales caractérisant le comportement d'une poutre se déformant dans le plan  $xz$  ne sont fonction que de la variable  $x$ , exemple :
  - \* Géométrie  $x$ ,  $A(x)$ .
  - \* Efforts résultantes  $N(x)$ ,  $T(x)$  et  $M(x)$ .
  - \* Rigidités élastiques  $\overline{EA}(x)$ ,  $\overline{ES}(x)$ ,  $\overline{EI}(x)$  et  $\overline{GA}(x)$ .
  - \* Les déplacements  $u(x,z)$ ,  $w(x)$ ,  $\theta(x)$ .
  - \* Sollicitations :  $f_x(x)$  et  $f_z(x)$ .....

### 3.3 Hypothèses de Base :



**Figure 3.1** : poutre de Timoshenko avant et après déformation.

Considérons une section d'abscisse  $x$  d'une poutre avant et après déformation (figure III.1), soit le point  $M(x,z)$  sur la configuration non déformée. Après déformation le point  $M$  subit deux déplacements :

- Ø Un déplacement axial  $U(x,z)$  selon  $x$ .
- Ø Un déplacement transversal  $W(x,z)$  selon  $z$ .

Tels que :

$$\begin{cases} U(x,z) = u_0(x) - z \cdot \theta(x) \\ W(x,z) = w(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où :  $u_0(x) = M_0 M'_0$  est le déplacement axial au niveau de l'axe de référence  $z=0$ .

$\theta(x)$  est la rotation de la normale de la section transversale  $D$  d'abscisse  $x$

la rotation  $\gamma$  due au cisaillement transversal est :

$$\gamma(x, z) = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \quad (3.2)$$

$$\gamma(x, z) = -\theta(x) + \frac{dw}{dx} \quad (3.3)$$

$$\gamma(x, z) = \gamma(x) \quad ; \quad \gamma \text{ ne dépend que de } x.$$

N.B : on notera  $\gamma$  au lieu de  $\gamma_{xz}$  par simplification.

### 3.4 Relations contraintes-déformations :

Considérons un état plan de contraintes au point M on appliquons l'hypothèse d'un comportement élastique , linéaire et isotrope :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec :

E : module de Young.

$\nu$  : coefficient de poisson.

Dans le cadre de la théorie des poutre ,on considère un état de contraintes uni axiales :

$$\Rightarrow \sigma_z = 0 \text{ et } \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \quad (3.5)$$

En éliminant  $\varepsilon_z$  de (3.2) et (3.3) on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x = E \varepsilon_x \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### 3.5 Relations déformations-déplacements :

Dans l'hypothèse des petits déplacements et déformations (H.P.P) on a :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x,z)}{dx} \quad (3.7)$$

On tenant compte de (3.1),on obtient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \frac{du_0(x)}{dx} - z \cdot \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (3.8)$$

On pose :

$$\varepsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \quad \text{déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence (z=0), à l'abscisse } x.$$

$\varnothing = -\frac{d\theta(x)}{dx}$  pseudo courbure de la section à l'abscisse  $x$ .

On obtient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} + z \cdot \varnothing \quad (3.9)$$

**Remarque :**

Si on néglige les déformations de cisaillement  $\gamma=0$ , alors d'après (3.3) on aura :

$\theta = \frac{dw}{dx}$  et (3.9) devient :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.9')$$

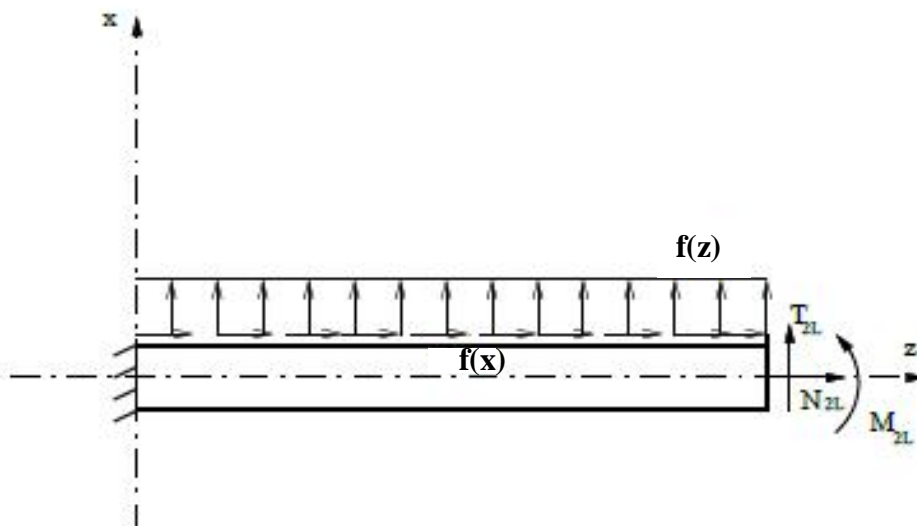
Avec :  $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)$ : courbure de la section à l'abscisse  $x$ .

L'équation (3.9') correspond au cas particulier des poutre minces (hypothèse de Navier – Bernoulli).

### 3.6 Principe des travaux virtuels (P.T.V) :

#### 3.6.1 Enoncé du principe des travaux virtuels (P.T.V) :

Considérons un tronçon de poutre de Timoshenko de longueur  $\ell$ , de hauteur  $h$  et largeur  $b(z)$ , variant avec la hauteur. On suppose que ce tronçon est soumis à un chargement réparti transversal  $f_z$  et longitudinal  $f_x$ .



**Figure 3.2 :** chargement dans le plan xz.

#### 3.6.2 Application du principe des travaux virtuels (P.T.V) :

D'après le principe des travaux virtuels, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs :

$$W_{int} = W_{ext} \quad \int_0^\ell \langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx \quad \forall \delta \hat{\varepsilon}, \delta \hat{w}, \delta \hat{u}$$

Avec :  $\delta \hat{\varepsilon}$ ,  $\delta \hat{w}$  et  $\delta \hat{u}$  sont les déformations et déformations virtuels.

$$\text{On a : } \{\delta \hat{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{\varepsilon}_x \\ \delta \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_x, \delta \hat{\gamma}_{xz} \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} ds \cdot dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\text{Or : } \delta \hat{\varepsilon}_x = \delta \hat{\varepsilon}_{0x} - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \quad \text{et } \delta \hat{\gamma}_{xz} = \delta \hat{\gamma} \quad \text{d'après (3.9) et (3.3).}$$

$$\Rightarrow \int_0^\ell \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx}, \delta \hat{\gamma}_{xz} \rangle \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} ds \cdot dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^\ell \int_s \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \sigma_x - z \cdot \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \sigma_x + \delta \hat{\gamma}_{xz} \tau_{xz} \rangle ds \cdot dx = \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx$$

$$\int_0^\ell \left[ \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \int_s \sigma_x ds - \frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \int_s \sigma_x \cdot z ds + \delta \hat{\gamma} \int_s \tau_{xz} ds \right] = \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx \quad (3.10)$$

On pose :

$$\int_s \sigma_x ds = N \quad \text{l'effort normal dans la section transversale à l'abscisse } x.$$

$$\int_s \sigma_x \cdot z ds = M \quad \text{le moment fléchissant.} \quad (3.11)$$

$$\int_s \tau_{xz} ds = T \quad \text{l'effort tranchant.}$$

### 3.6.3 Calcul des efforts internes :

En tenant compte des expressions de  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  et selon (3.6) on obtient :

#### a) L'effort normal :

$$\begin{aligned} N &= \int_s \sigma_x ds = \int_s E \varepsilon_x ds \\ &= \int_s E \left( \varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) ds \\ &= \int_s E \varepsilon_{0x} ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z ds \\ &= \varepsilon_{0x} \int_s E ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z ds \\ &= \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \left( -\frac{d\theta}{dx} \right) \end{aligned}$$

$$N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \theta \quad (3.12)$$

Avec :

$$\overline{EA} = \int_s E ds \quad \text{rigidité à l'effort normal ou rigidité de membrane.}$$

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z ds \quad \text{rigidité due au couplage effort normal + flexion.}$$

**b) Le moment fléchissant :**

$$\begin{aligned} M &= \int_s \sigma_x \cdot z ds = \int_s E \varepsilon_x \cdot z ds \\ &= \int_s E \left( \varepsilon_{0x} - z \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) z ds \\ &= \varepsilon_{0x} \int_s E \cdot z ds - \frac{d\theta}{dx} \int_s E z^2 ds \\ &= \overline{ES} \varepsilon_{0x} - \frac{d\theta}{dx} \overline{EI} \end{aligned}$$

$$M = \overline{ES} \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \theta \quad (3.13)$$

Avec :

$$\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 ds \quad \text{rigidité à la flexion.}$$

**c) L'effort tranchant :**

$$\begin{aligned} T &= \int_s \tau_{xz} ds = \int_s G \gamma_{xz} ds \\ &= \gamma_{xz} \int_s G \cdot ds \end{aligned}$$

$$T = \overline{GA} \cdot \gamma_{xz} \quad (3.14)$$

Avec :

$$\overline{GA} = \int_s G \cdot ds \quad \text{rigidité à l'effort tranchant.}$$

### 3.7 Le coefficient de correction de cisaillement [4]:

En introduisant le coefficient de correction k dans la formulation de Timoshenko, la relation (3.14) de l'effort tranchant devient :

$$T = k \int_s \tau_{xz} ds = k \int_s G \gamma_{xz} ds$$

$$\begin{aligned}
&= k. \gamma_{xz} \int_s G. ds \\
&= k. \overline{GA}. \gamma_{xz} \\
T &= \overline{GA}'. \gamma_{xz} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\overline{GA} = \int_s G. ds \quad \text{rigidité à l'effort tranchant sans correction.}$$

$$\overline{GA}' = k. \overline{GA} \quad \text{rigidité à l'effort tranchant corrigée.}$$

On tenant compte des relations (3.12),(3.13) et (3.15) dans l'expression (3.10) du P.T.V ,  
on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \left[ \delta \hat{\varepsilon}_{0x} \left( \overline{EA}. \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \left( -\frac{d\theta}{dx} \right) \right) + \left( -\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) \left( \overline{ES} \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \left( -\frac{d\theta}{dx} \right) \right) + \delta \hat{\gamma}. \overline{GA}'. \gamma_{xz} \right] \\
&= \int_0^\ell \delta \hat{w}. f_z dx + \int_0^\ell \delta \hat{u}. f_x dx \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Ou encors :

$$\int_0^\ell \left\langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} , \left( -\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) , \delta \hat{\gamma} \right\rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ -\frac{d\theta}{dx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \delta \hat{w}. f_z - \delta \hat{u}. f_x \Bigg\} dx = 0 \quad (3.17)$$

Ou plus simplement :

$$\int_0^\ell \{ \langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle [D] \{ \varepsilon \} - \delta \hat{w}. f_z - \delta \hat{u}. f_x \} dx = 0 \quad (3.18)$$

Avec :

$$\langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle = \langle \delta \hat{\varepsilon}_{0x} , \left( -\frac{\delta d\hat{\theta}}{dx} \right) , \delta \hat{\gamma} \rangle \quad (3.19)$$

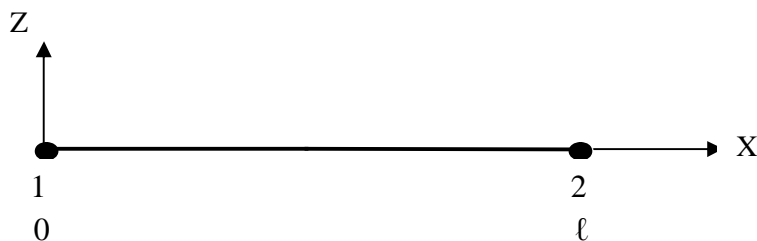
$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_{0x} , \left( -\frac{d\theta}{dx} \right) , \gamma_{xz} \rangle \quad (3.20)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA}' \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

**3.8 Modélisation par éléments finis :**

**3.8.1 Modélisation par éléments finis à deux nœuds :**

Cet élément a été étudié par SAIB dans le cadre de son mémoire de Magister [4].  
 On considère un élément linéaire à deux nœuds, orienté suivant les directions x et z.



**Figure.3.3 :** Elément fini de Timoshenko à 2 noeuds

**3.8.1.1 Discrétisation des déplacements et rotation :**



**Figure.3.4 :** Discrétisation des déplacements et rotation

Les déplacement  $u(\xi), w(\xi)$  et la rotation  $\theta(\xi)$  sont linéaires en fonction de  $x$ .  
 Le déplacement longitudinal au niveau de l'axe de référence est approximé par :

$$U(\xi) = N_1 U_1 + N_2 U_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) U_i \dots (3.22)$$

Où  $U_1$  et  $U_2$  sont les valeurs de  $U(\xi)$  aux nœuds 1 et 2

$$\text{Et } \begin{cases} N_1 = (1 - x/\ell) \\ N_2 = x/\ell \end{cases} \dots (3.23)$$

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence est :

$$\epsilon_{0x} = \frac{dU_0(x)}{dx} = \frac{dU_0(x)}{dx} = -\frac{1}{\ell} u_1 + \frac{1}{\ell} u_2 \dots (3.24)$$

- **le déplacement transversal :**

$$W(x) = N_1 w_1 + N_2 w_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) w_i \dots (3.25)$$

$$\text{D'où : } \frac{dw}{dx} = -\frac{1}{\ell} w_1 + \frac{1}{\ell} w_2 \dots (3.26)$$

- la rotation :

$$\theta(\xi) = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \theta_i \quad \dots\dots\dots (3.27)$$

$$D'o\grave{u} : \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\ell} \theta_1 + \frac{1}{\ell} \theta_2 \quad \dots\dots\dots(3.28)$$

$$Et : \gamma = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{w_2 - w_1}{\ell} - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \theta_1 - \frac{x}{\ell} \theta_2 \quad \dots\dots (3.29)$$

Pour  $x = \ell/2$

$$\gamma(x = \ell/2) = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{w_2 - w_1}{\ell} - \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \theta_1 - \frac{x}{\ell} \theta_2 \quad \dots\dots (3.29)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0\xi} \\ \phi \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\ell & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell \\ 0 & (-1/\ell) & -(1-x/\ell) & 0 & 1/\ell & -x/\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA'}$$

Dans :

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/\ell & 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell \\ 0 & (-1/\ell) & -(1-x/\ell) & 0 & 1/\ell & -x/\ell \end{bmatrix} \dots\dots (3.31)$$

### 3.8.1.2 Expression de la matrice de rigidité $[K]^e$ :

L'expression du P.T.V est :

$$\int_0^\ell [(\delta \hat{\varepsilon})^T [D] \{\varepsilon\} - \delta \hat{w} \cdot f_z - \delta \hat{u} \cdot f_x] dx = 0$$

On aura :

$$[K]^e = \int_0^\ell [B]^t [D] [B] dx \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

$$[K]^e = \begin{bmatrix} \overline{EA}/\ell & 0 & -\overline{ES}/\ell & -\overline{ES}/\ell & 0 & \overline{ES}/\ell \\ 0 & \overline{GA'}/\ell & \overline{GA'}/2 & 0 & -\overline{GA'}/\ell & \overline{GA'}/2 \\ -\overline{ES}/\ell & \overline{GA'}/2 & \frac{\overline{EI}}{\ell} + \overline{EA'}/3 & \overline{ES}/\ell & -\overline{GA'}/2 & -\overline{EI}/\ell + \overline{GA'}/6 \\ -\overline{GA'}/\ell & 0 & \overline{ES}/\ell & \overline{EA'}/\ell & 0 & -\overline{ES}/\ell \\ 0 & -\overline{GA'}/\ell & \overline{ES}/\ell & 0 & \overline{GA'}/\ell & -\overline{GA'}/2 \\ \overline{ES}/\ell & \overline{GA'}/2 & -\overline{GA'}/2 & -\overline{ES}/\ell & -\overline{GA'}/2 & \frac{\overline{EI}}{\ell} + \overline{EA'}/3 \end{bmatrix} \dots\dots (3.33)$$

### 3.8.1.3 Evaluation des forces résiduelles élémentaires :

#### a) Calcul des forces nodales équivalentes $\{p\}$ aux efforts internes :

$$\{P\}^e = \int_0^\ell [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Bmatrix} dx$$

$$\{P\}^e = \int_0^\ell \begin{bmatrix} -\frac{N(x)}{\ell} \\ -\frac{T(x)}{\ell} \\ \frac{M(x)}{\ell} - T(x)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \\ \frac{N(x)}{\ell} \\ \frac{T(x)}{\ell} \\ -\frac{M(x)}{\ell} - T(x)\frac{x}{\ell} \end{bmatrix} dx$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell N(x) dx \\ -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell M(x) dx - \int_0^\ell T(x) dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) \cdot x \cdot dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell N(x) dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) dx \\ -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell M(x) dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T(x) \cdot x \cdot dx \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

#### b) Evaluation des forces nodales équivalentes $\{f\}$ aux efforts répartis :

$$\{f\}^e = \int_0^\ell [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

$$\{f\}^e = \int_0^\ell \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

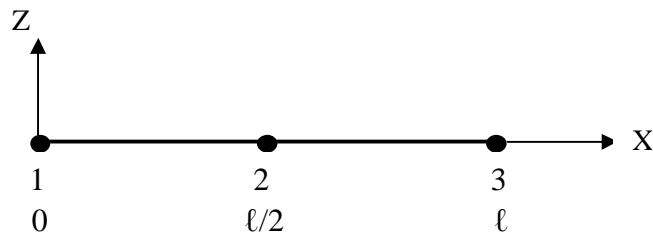
$$\text{Sachant que : } \begin{cases} N_1 = (1 - x/\ell) \\ N_2 = x/\ell \end{cases}$$

Donc :

$$\{f\}^e = \begin{pmatrix} \int_0^\ell f_x dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_x \cdot x \cdot dx \\ \int_0^\ell f_z dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_z \cdot x \cdot dx \\ 0 \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_x \cdot x \cdot dx \\ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f_z \cdot x \cdot dx \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

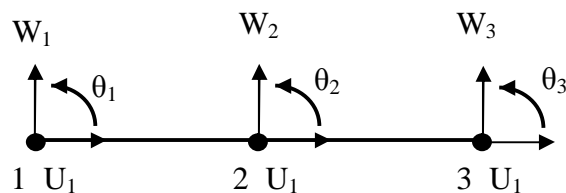
### 3.8.2 Modélisation par éléments finis à trois noeuds :

Dans le cadre de cette étude, on présente la formulation d'un élément poutre de Timoshenko à 3 noeuds (figure 3.5).



**Figure.3.5** : Élément fini de Timoshenko à 3 noeuds

#### 3.8.2.1 Discrétisation des déplacements et rotation :



**Figure.3.6** : Discrétisation des déplacements et rotation

Les déplacements  $u(\xi)$ ,  $w(\xi)$  et la rotation  $\theta(\xi)$  sont linéaires en fonction de  $\xi$ , avec :

$$\begin{aligned} \xi &= -1 \text{ au nœud 1} \\ \xi &= 0 \text{ au nœud 2} \\ \xi &= +1 \text{ au nœud 3} \end{aligned}$$

Le déplacement longitudinal au niveau de l'axe de référence est approximé par :

$$U(\xi) = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) U_i \dots (3.35)$$

Où  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont les valeurs de  $U(\xi)$  aux nœuds 1,2 et 3

$$\text{Et } \begin{cases} N_1 = -1/2\xi(1-\xi) \\ N_2 = (1-\xi)(1+\xi) \\ N_3 = 1/2\xi(1+\xi) \end{cases} \dots\dots\dots(3.36)$$

$$\text{Donc : } U(\xi) = -1/2\xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi)(1+\xi)u_2 + 1/2\xi(1+\xi)u_3 \dots\dots\dots(3.37)$$

La déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence est :

$$\epsilon_{0\xi} = \frac{dU_0(\xi)}{dx} = \frac{dU_0(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell u_1 + (-4\xi)/\ell u_2 + (1 + 2\xi)/\ell u_3 \dots\dots\dots(3.38)$$

- **le déplacement transversal :**

$$W(\xi) = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) w_i \dots\dots\dots (3.39)$$

$$\text{D'où : } \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell w_1 + (-4\xi)/\ell w_2 + (1 + 2\xi)/\ell w_3 \dots\dots\dots(3.40)$$

- **la rotation :**

$$\theta(\xi) = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \theta_i \dots\dots\dots (3.41)$$

$$\text{D'où : } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1 + 2\xi)/\ell \theta_1 + (-4\xi)/\ell \theta_2 + (1 + 2\xi)/\ell \theta_3 \dots\dots\dots(3.42)$$

$$\text{Et : } \gamma = \frac{dw}{d\xi} - \theta = (-1 + 2\xi)/\ell w_1 + (-4\xi)/\ell w_2 + (1 + 2\xi)/\ell w_3 + \frac{1}{2}\xi(1-\xi)\theta_1 - (1-\xi)(1+\xi)\theta_2 - \frac{1}{2}\xi(1+\xi)\theta_3 \dots\dots\dots(3.43)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{0\xi} \\ \varnothing \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (-4\xi)/\ell & 0 & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\xi)/\ell & 0 & 0 & (4\xi) & 0 & 0 & -(1 + 2\xi)/\ell \\ 0 & (-1 + 2\xi)/\ell & \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) & 0 & (-4\xi)/\ell & -(1 - \xi)(1 + \xi) & 0 & (1 + 2\xi)/\ell & -\frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

**3.8.2.2. Expression de la matrice de rigidité  $[K]^e$  :**

L'expression (3.18) du P.T.V est :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{\varepsilon} \rangle [D] \{ \varepsilon \} - \delta \hat{w} \cdot f_z - \delta \hat{u} \cdot f_x \rangle dx = 0$$

On aura :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t [D] [B] \{ U_n \} - \delta \hat{w} f_z - \delta \hat{u} f_x \rangle dx = 0$$

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t [D] [B] \{ U_n \} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \forall \delta \hat{u}_n, \forall \delta \hat{w}, \forall \delta \hat{u}.$$

$$[K]^e = \int_0^\ell [B]^t [D] [B] dx \dots\dots\dots (3.45)$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} & 0 \\ \overline{ES} & \overline{EI} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{GA'} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} (-1+2\xi)/\ell & 0 & 0 & (-4\xi)/\ell & 0 & 0 & (1+2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\xi)/\ell & 0 & 0 & (4\xi) & 0 & 0 & -(1+2\xi)/\ell \\ 0 & (-1+2\xi)/\ell & \frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & (-4\xi)/\ell & -(1-\xi)(1+\xi) & 0 & (1+2\xi)/\ell & -\frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{bmatrix} \dots (3.)$$

**3.8.2.3 Matrice Jacobéenne :**

Le calcul de la matrice J a pour objectif de faire le passage de coordonnées x au coordonnés  $\xi$  .

$$\text{On à : } x(\xi) = N_1 x_{1+} + N_2 x_{2+} + N_3 x_3 = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) x_i \dots\dots\dots (3.47)$$

$$x(\xi) = -1/2\xi(1-\xi) x_{1+} + (1-\xi)(1+\xi) x_{2+} + 1/2\xi(1+\xi) x_3$$

calcul de J :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3$$

$$\text{AN : } J = (-\frac{1}{2} + \xi) x_1 + (-2\xi) x_2 + (\frac{1}{2} + \xi) x_3$$

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} + \xi(x_1 + x_3 - 2x_2)$$

$$J = \frac{x_3 - x_1}{2} = \frac{\ell}{2} \dots\dots\dots (3.48)$$

N.B :  $\xi=0$  au milieu de la poutre.

**3.8.2.4 Nouvelle expression de la matrice de rigidité  $[K]^e$  :**

En effectuant le passage des coordonnées  $x$  aux coordonnées  $\xi$ , la matrice  $[K]^e$  devient :

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t [D] [B] \det J d\xi \quad \dots\dots (3.49)$$

Avec :  $dx = \det J d\xi \quad \dots\dots(3.49')$

**3.8.2.5 Problème de blocage par cisaillement [4]:**

Le phénomène du blocage (verrouillage) par cisaillement pour le cas de la poutre de Timoshenko apparaît quand le rapport  $l/h$  est très grand ( le cas des poutre élancées ). Pour cela plusieurs solutions sont proposées par des chercheurs dont on peut citer :

- Intégration sélective.
- Supposer une déformation de cisaillement constante.
- Enrichir les champs des déplacements...

L'une des solutions retenue pour éviter le blocage par cisaillement est d'utiliser une intégration numérique à trois point de gauss pour le calcul de la matrice de rigidité  $[K]$ .

Les valeurs de gauss retenues pour cette intégration sont mentionnées dans le tableau 3.1 :

n	i	$\xi_i$	$a_i$
3	I	0	8/9
	II	$+\sqrt{0.6}$	5/9
	III	$-\sqrt{0.6}$	5/9

Tableau 3.1

Avec :

$n$  : le nombre de point d'intégration.

$i$  : nombre de point.

$\xi_i$  : les coordonnes des points d'intégrations.

$a_i$  : les poids d'intégrations.

**3.8.2.6 Discrétisation de la section transversale :**

La section transversale est subdivisée en trapèze. Chaque trapèze est subdivisé, lui même en couches horizontales (layers).

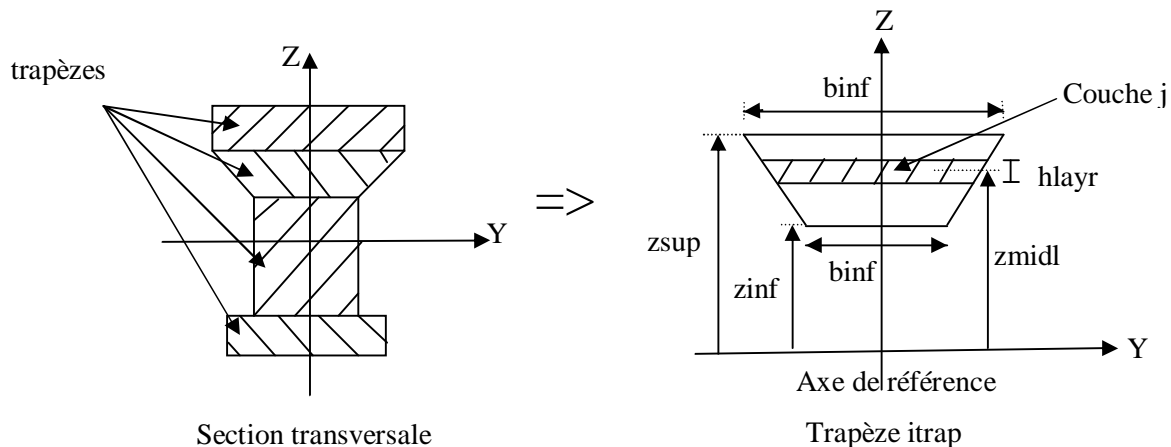


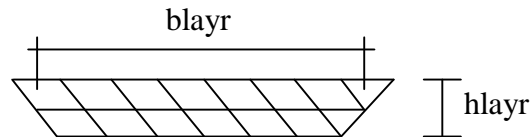
Figure 3.7 : Discrétisation de la section transversale

Chaque trapèze est caractérisé par :

- $b_{inf}$   $\longrightarrow$  largeur inférieur du trapèze.
- $b_{sup}$   $\longrightarrow$  largeur supérieur du trapèze.
- $Z_{inf}$   $\longrightarrow$  position inférieur par apport à l'axe de référence.
- $Z_{sup}$   $\longrightarrow$  position supérieur par apport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche tel que :

- Ø La position de la couche en cours par apport à l'axe référence est définie par  $z_{midl}$ .



Tel que :

$$z_{midl} = z_{inf} + h_{layr} (j-0.5) \quad (3.50)$$

Avec :  $h_{layr}$  est l'épaisseur de la couche  $j$ .

- Ø La déformation longitudinale au milieu de la couche  $j$  est :

$$\varepsilon_x(x, z) = \varepsilon_{0x} + z \cdot \varnothing \quad \text{d'après (3.9)}$$

- Ø La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup} - b_{inf}) \cdot h_{layr} / h_{trap} \cdot (j-0.5). \quad (3.51)$$

Avec :  $h_{trap}$  est la hauteur du trapèze en cours ( $i_{trap}$ ).

Ayant discrétisé la section transversale, les quantités  $\overline{EA}$ ,  $\overline{ES}$ ,  $\overline{EI}$  et  $\overline{GA}$  sont calculées comme suit :

$$\overline{EA} = \int_s E ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j \quad (3.52)$$

$$\overline{ES} = \int_s E \cdot z ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j z_j \quad (3.53)$$

$$\overline{EI} = \int_s E \cdot z^2 ds = \sum_{j=1}^{nc} E_j b_j h_j z_j^2 \quad (3.54)$$

$$\overline{GA} = \int_s G ds = \sum_{j=1}^{nc} G_j b_j h_j \quad (3.55)$$

### 3.8.2.7 Evaluation des forces résiduelles élémentaires :

#### a) Calcul des forces nodales équivalentes $\{p\}$ aux efforts internes :

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \\ T(x) \end{Bmatrix} dx$$

D'après ( 3.49') on aura :

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} [B]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \\ T(\xi) \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (-1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1 + 2\xi)/\ell \\ 0 & (1 - 2\xi)/\ell & \frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\ (-4\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4\xi)/\ell \\ 0 & (4\xi)/\ell & -(1 - \xi)(1 + \xi) \\ (1 + 2\xi)/\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + 2\xi)/\ell \\ 0 & -(1 + 2\xi) & -\frac{1}{2}\xi(1 + \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \\ T(\xi) \end{Bmatrix} \frac{\ell}{2} d\xi$$

$$\{P\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{(-1 + 2\xi)}{2} N(\xi) \\ \frac{(-1 + 2\xi)}{2} T(\xi) \\ \frac{(1 - 2\xi)}{2} M(\xi) + \frac{\ell}{4}\xi(1 - \xi)T(\xi) \\ (-2\xi)N(\xi) \\ (-2\xi)T(\xi) \\ (2\xi)M(\xi) - \frac{(1 - \xi)(1 + \xi)\ell}{2} T(\xi) \\ \frac{(1 + 2\xi)}{2} N(\xi) \\ \frac{(1 + 2\xi)}{2} T(\xi) \\ -\frac{(1 + 2\xi)\ell}{2} M(\xi) - \frac{\ell}{4}\xi(1 + \xi)T(\xi) \end{bmatrix} d\xi$$

$$\{P\}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ T_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (-1 + 2\xi)N(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (-1 + 2\xi)T(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - 2\xi)M(\xi)d\xi + \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1 - \xi)T(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)N(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)T(\xi)d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (-2\xi)M(\xi)d\xi - \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi)(1 + \xi)T(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)N(\xi)d\xi \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)T(\xi)d\xi \\ -\frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} (1 + 2\xi)M(\xi)d\xi - \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1 + \xi)T(\xi)d\xi \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

**b) Evaluation des forces nodales équivalentes {f} aux efforts répartis :**

$$\{f\}^e = \int_0^\ell [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx$$

D'après ( 3.28') on aura :

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ 0 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} \det j. d\xi$$

$$\{f\}^e = \int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} N_1 f_x \\ N_1 f_z \\ 0 \\ N_2 f_x \\ N_2 f_z \\ 0 \\ N_3 f_x \\ N_3 f_z \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\ell}{2} d\xi$$

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} N_1 = -1/2\xi(1-\xi) \\ N_2 = (1-\xi)(1+\xi) \\ N_3 = 1/2\xi(1+\xi) \end{cases}$$

Donc :

$$\{f\}^e = \begin{pmatrix} -\frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1-\xi) f_x d\xi \\ -\frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1-\xi) f_z d\xi \\ 0 \\ \int_{-1}^{+1} (1-\xi)(1+\xi) f_x d\xi \\ \int_{-1}^{+1} (1-\xi)(1+\xi) f_z d\xi \\ 0 \\ \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1+\xi) f_x d\xi \\ \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \xi(1+\xi) f_z d\xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

## **Chapitre 4 : Modélisation adoptée et résolution non linéaire**

### **4.1. Application du modèle de Vecchio et Collins dans le cas de la poutre de Timoshenko :**

#### **4.1.1 Introduction :**

Pour l'étude d'un élément fini de type Timoshenko, il suffit de considérer la section transversale au niveau de chaque point de gauss (dans notre cas : trois points de gauss). On suppose connues à une étape donnée de calcul les déformations au niveau de chaque section considérée, qui sont :  $\varepsilon_0$ ,  $\theta$  et  $\gamma$ .

La section étant divisée en couches horizontales, chaque couche est caractérisée par sa déformation longitudinale  $\varepsilon_x$  et sa déformation de cisaillement  $\gamma$ .

Notre étude considère un élément représentatif de cette couche, sachant que les armatures de l'effort tranchant sont prises en compte en considérant une répartition uniforme dans les deux directions.

La deuxième étape après la connaissance des déformations  $\varepsilon_0$  et  $\gamma$  pour chaque point de gauss, est de déterminer les contraintes normales et tangentielles  $\sigma_x$  et  $\tau_{xz}$ , on utilise une méthode de calcul basée sur la méthode de Vecchio et Collins (défini dans les paragraphes précédents). Après la détermination des valeurs de  $\sigma_x$  et  $\tau_{xz}$  pour toutes les couches et pour chaque point de gauss, on déduit les efforts internes  $N$ ,  $M$  et  $T$  au niveau de chaque section de calcul en effectuant une intégration numérique.

#### **4.1.2 Bases du modèle :**

##### **4.1.2.1 Hypothèses de calcul :**

- Le domaine de calcul est élastique non linéaire, à chaque état de déformation correspond un seul état de contrainte, l'historique des sollicitations n'est pas considéré.

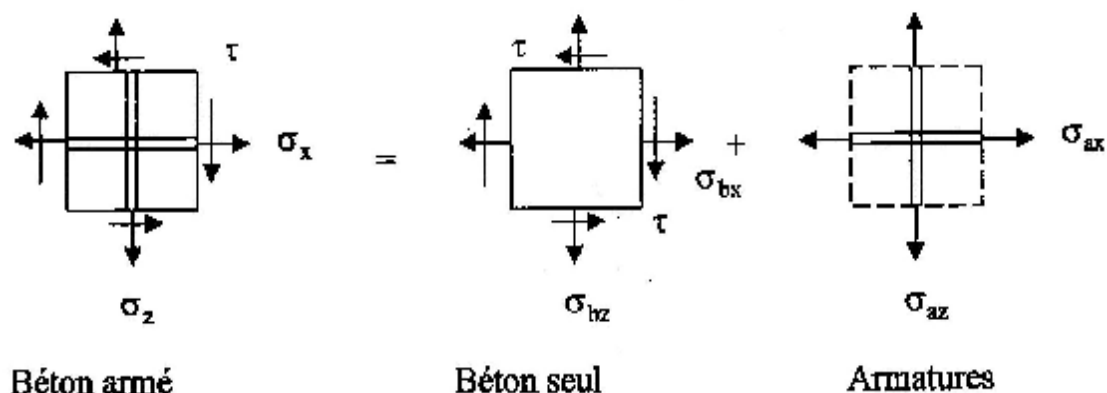
- On considère une taille d'élément suffisamment grande par rapport à l'espacement des fissures. Les contraintes et les déformations pourront être analysées par leurs valeurs moyennes. Il s'agit alors d'un milieu continu équivalent pour lequel on écrit l'ensemble des équations, ce qui permet l'utilisation du cercle de Mohr.
- L'étude prend en considération un élément en béton armé, d'épaisseur constante, sollicité par des efforts de membrane. Les axes longitudinaux et transversaux sont choisis de façon à ce qu'ils correspondent aux directions des armatures.
- On considère une adhérence parfaite entre le béton et l'acier.
- Il y a coïncidence des directions principales des contraintes et des déformations dans le béton [9].

L'étude de l'élément représentatif de chaque section de calcul (trois sections) à l'état fissuré, sous sollicitation de l'effort tranchant consiste à analyser séparément le béton fissuré de l'acier.

On se basant sur les équations d'équilibre, des équations de compatibilité, les lois de comportement des matériaux et conformément à la deuxième hypothèse de calcul toutes les équations seront exprimées en terme de contraintes et déformations moyennes.

#### 4.1.2.2 Les équations d'équilibre :

Les contraintes totales moyennes agissant sur l'élément en béton armé sont égales à la somme des contraintes moyennes agissant sur le béton seul et celle agissant sur les armatures seul, comme démontré sur la figure 4.1 sur la superposition des contraintes moyennes du béton et des aciers. Les armatures sont supposés résister uniquement aux effort axiaux.



**Figure 4.1** : Superposition des contraintes moyennes du béton et des aciers.

Les équations d'équilibre de chaque section dans un élément en béton armé fissuré est exprimé par les équations suivantes (2.14, 2.15, 2.16), dans le repère  $xoz$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{bx} + w_x \sigma_{ax} &= \sigma_x \\ \sigma_{bz} + w_z \sigma_{az} &= \sigma_z = 0 \\ \tau_b &= \tau\end{aligned}$$

$w_x$  et  $w_z$  sont les pourcentages des aciers répartis, supposés uniformément répartis dans la couche horizontale considérée, selon les direction  $x$  et  $z$  respectivement.

les contraintes replit par le béton dans le repère  $xoz$ , s'obtient à partir des contraintes principales par la transformation suivante :

$$\sigma_{bx} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

$$\sigma_{bz} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha$$

Avec :

$\alpha$  : l'angle que fait la contrainte moyenne principale  $\sigma_2$  avec l'axe des  $x$ .

On remplaçons les contraintes replit par le béton seul dans les contraintes de béton armé, on obtient les équations des contraintes de béton armé définitif :

$$\sigma_x = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha + w_x \sigma_{ax} \quad (4.1)$$

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha + w_z \sigma_{az} = 0 \quad (4.2)$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.3)$$

#### 4.1.2.3 Les équations de compatibilité :

D'après la quatrième hypothèse de calcul on a supposé une adhérence parfaite entre l'acier et le béton même après fissuration, donc ils subissent par conséquent les mêmes déformations moyennes séparément ou superposé :

$$\varepsilon_{ax} = \varepsilon_{bx} = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{az} = \varepsilon_{bz} = \varepsilon_z$$

Ces déformation sont données en fonction des déformations moyennes principales, par la transformation suivante :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_1 \sin^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \alpha \quad (4.5)$$

$$\gamma = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.6)$$

Avec :

$\varepsilon_x$  ,  $\varepsilon_z$  : déformations moyennes selon x et z respectivement.

$\varepsilon_1$  ,  $\varepsilon_2$  : déformations moyennes principales.

$\gamma$  : déformation moyennes de cisaillement ou distorsion moyenne.

#### Remarque :

Pour donner les équations de déformation, en admettant que l'inclinaison des déformations moyennes principales coïncide avec celle des contraintes moyennes principales.

#### 4.1.2.4 Les lois de comportement du béton fissuré :

Après fissuration du béton on s'intéresse au comportement moyen des bielles comprimées entre deux fissures consécutives qui est donné par les lois (2.5 et 2.6), qui traduisent l'adoucissement de la résistance maximale du béton en fonction de l'augmentation de la déformation moyenne principale  $\varepsilon_1$  en traction perpendiculaire aux bielles (voir figure 2.16).

-le comportement du béton tendu avant fissuration est non linéaire, qui est déjà défini à l'équation (2.23) comme suit :

$$\sigma_1 = E_{b0} \varepsilon_1 \quad \text{si } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ft} = f_{tj}/E_{b0} \quad (4.7)$$

- après fissuration du béton tendu, la résistance résiduelle moyenne est prise en compte par l'expression suivante :

$$\sigma_1 = \frac{f_{tj}}{1+(200\varepsilon_1)^{1/2}} \quad \text{si } \varepsilon_1 > \varepsilon_{ft} \quad (4.8)$$

Vu que entre les fissures, les armatures ne peuvent pas transmettre d'efforts supérieurs à l'état de plastification. Lorsque toutes les armatures sont plastifiées, cette résistance est annulée.

$$\sigma_1 \leq w_z(f_{ez} - \sigma_{az}) \cos^2 \alpha + w_x(f_{ex} - \sigma_{ax}) \sin^2 \alpha \quad (4.9)$$

#### 4.1.2.5 Les lois de comportement des aciers :

Les lois de comportement des armatures longitudinales et transversales sont déjà décrites par les équations (2.28, 2.29, 2.30, 2.31).

$$\sigma_{ax} = f_{ex} \quad \text{si } \varepsilon_x > \varepsilon_{ex}$$

$$\sigma_{ax} = E_a \varepsilon_x \quad \text{si } \varepsilon_x \leq \varepsilon_{ex}$$

$$\sigma_{az} = f_{ez} \quad \text{si } \varepsilon_z > \varepsilon_{ez}$$

$$\sigma_{az} = E_a \varepsilon_z \quad \text{si } \varepsilon_z \leq \varepsilon_{ez}$$

#### 4.1.2.6 Méthode de résolution :

La résolution de l'élément étudié (couche horizontale) lui faut des paramètres à supposé ou à lire, par la suite on fait des calculs et des vérifications. Dans ce qui suit quelques étapes à suivre :

- on suppose connues les déformations  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  et  $\gamma$ .
- considérant une valeur donnée de  $\varepsilon_2$ .
- déterminer un état de contraintes et de déformations moyennes (en particulier  $\tau$  et  $\gamma$ ).
- vérification de l'ensemble des conditions précédentes.

On peut suivre l'évolution complète du comportement moyen de l'élément, si on considère plusieurs valeurs de  $\varepsilon_2$ .

La résolution se fait à l'aide d'une procédure de calcul itérative, schématisée par l'organigramme de la figure 4.2, déduit en effectuant quelques transformations appropriées dans les équations précédentes :

- La nouvelle valeur de  $\varepsilon_x$  en fonction de  $\sigma_{ax}$ , a partir des équations (4.1) et (4.4) :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} [\sigma_x - \sigma_1 - w_x \sigma_{ax}] \quad (4.10)$$

- De même, on peut exprimer  $\varepsilon_z$  en fonction de  $\sigma_{az}$  des équations (4.33) et (4.36), en éliminant  $\alpha$  :

$$\varepsilon_z = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} [\sigma_1 + w_z \sigma_{az}] \quad (4.11)$$

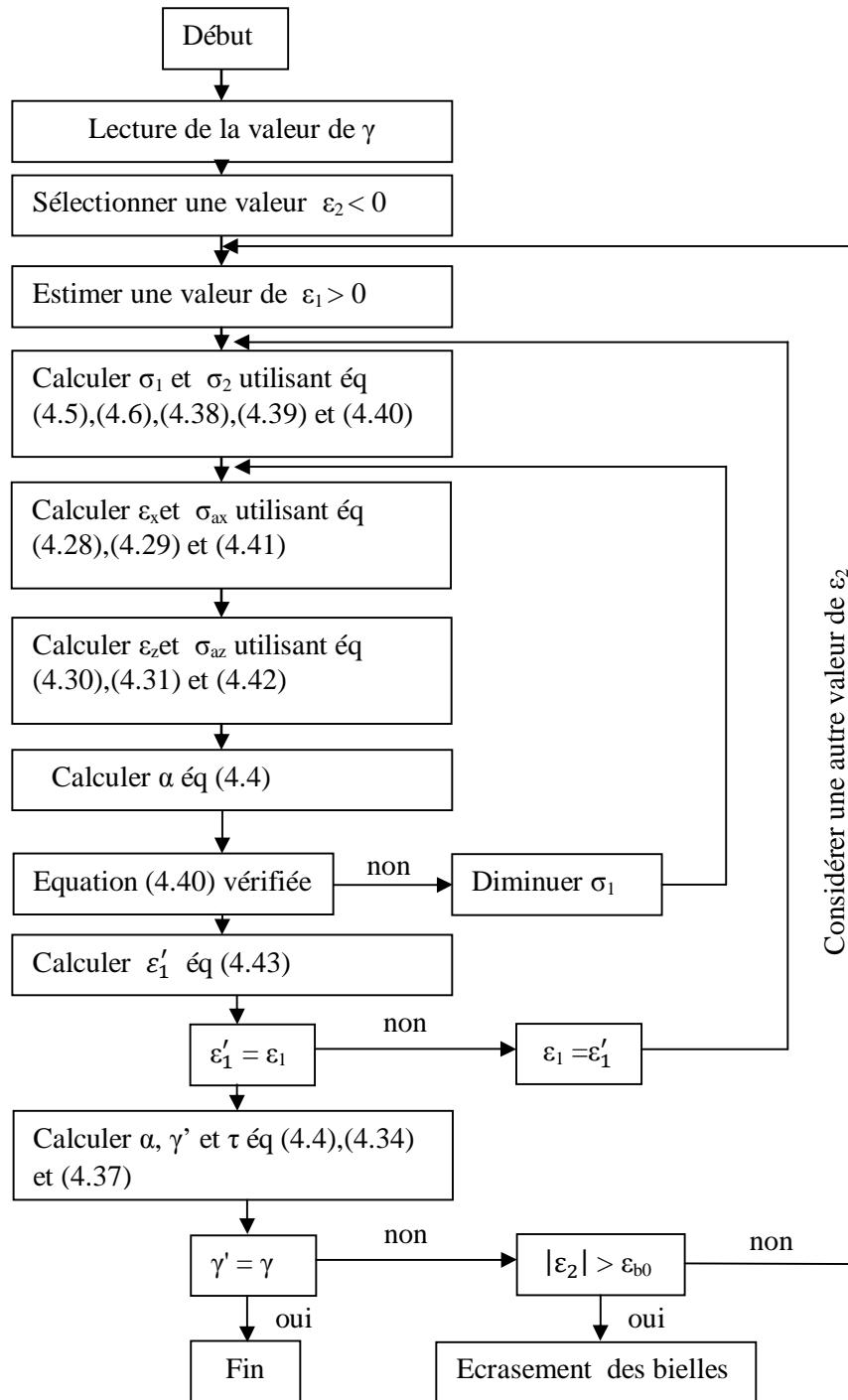
- En additionnant (4.4) et (4.5), on obtient :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_z - \varepsilon_2 \quad (4.12)$$

- en remplaçant  $\varepsilon_d$  par  $\varepsilon_2$ , l'angle  $\alpha$  peut être calculé par l'équation (2.4), on obtient :

$$\tan^2 \alpha = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_2}{\varepsilon_x - \varepsilon_2} \quad (4.13)$$

**4.1.2.7 Organigramme de calcul :**



**Figure 4.2 :** organigramme de calcul de cisaillement pour une couche

## 4.2. Méthode de résolution non linéaire :

Les matériaux constituant une structure en béton armé ou de fibre, obéissent en général à des lois de comportement non linéaire, ceci induit une non linéarité dans le comportement globale de la structure.

L'analyse de ce comportement non linéaire par la méthode des éléments finis, aboutit à un système d'équations algébrique de la forme [15], [4] :

$$\{F\} - [K(U_n)]\{U_n\} = \{\psi(U_n)\} \neq 0 \dots\dots\dots(4.14)$$

Avec :

$[K(U_n)]$  : matrice de rigidité globale, fonction du vecteur des déplacements nodaux  $\{U_n\}$ .

$\{F\}$  : vecteur des forces nodales appliqués à la structure.

$\{\psi(U_n)\}$  : vecteur des forces résiduelles, il exprime le déséquilibre entre les efforts externes et les efforts internes, à une étape du chargement donnée.

La résolution du système (4.14), envisage une procédure de calcul itérative qui consiste à rechercher la solution  $\{U_n\}$  qui rend le résidu  $\{\psi(U_n)\}$  aussi proche que possible de zéro.

### Remarque :

La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération.

### 4.2.1 Méthodes numériques de résolution des systèmes non linéaires [4], [15], [26] :

Dans le cas non linéaire le chargement extérieur  $\{F\}$  est appliqué par incréments  $\{\Delta F\}$ , on adopte alors une méthode incrémentale itérative. Selon le mode de calcul de la matrice de rigidité  $[K]$ , on distingue trois méthodes :

- la méthode de Newton Raphson.
- la méthode de Newton Raphson modifiée.
- la méthode de la rigidité sécante.

**a) Méthode de Newton Raphson :**

Le principe de la méthode est basé sur la matrice de rigidité tangente, qui est recalculée après chaque itération. L'interprétation géométrique de la méthode est indiquée sur la figure (4.3).

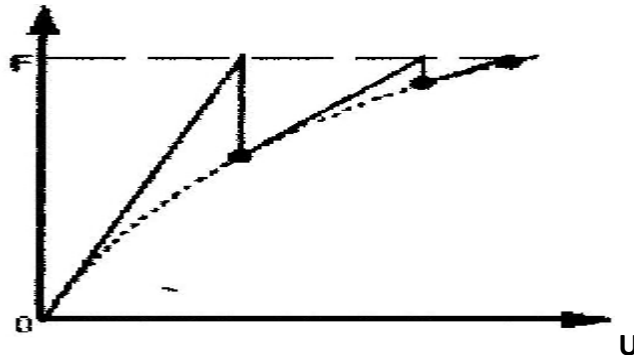


Figure 4.3 : Méthode de Newton Raphson.

**b) Méthode de Newton Raphson Modifiée :**

Cette méthode consiste le calcul de la matrice de rigidité tangente une seul fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération uniquement, contrairement à la méthode de Newton Raphson originelle (voir figure 4.3). L'inconvénient de la méthode est l'exigence d'un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arrivé à la solution.

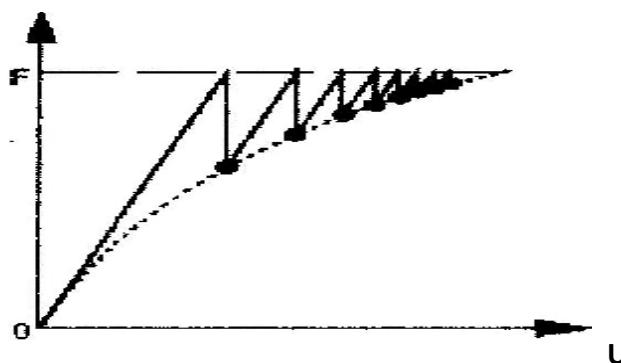


Figure 4.4 : Méthode de Newton Raphson Modifiée.

**Remarque :**

La méthode de Newton Raphson nécessite un nombre réduit d'itération et converge rapidement vers la solution recherché mais elle exige beaucoup plus de calcul, puisque les matrice de rigidités doivent être recalculées à chaque itération.

### c) Méthode de la rigidité Sécante :

C'est la méthode la mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant, qui est le cas du béton tendu fissuré dans des structures en béton armé, Elle est basé sur le calcul de la matrice de rigidité sécante pour chaque itération. L'avantage de cette méthode c'est qu'elle converge plus rapidement.

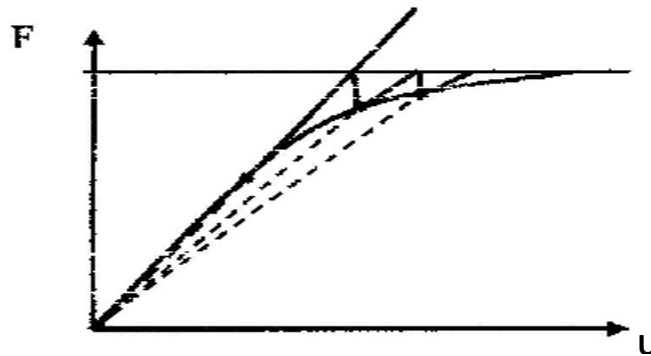


Figure 4.5 : Méthode de la rigidité Sécante.

Parmi les trois méthodes présentées pour la résolution d'un système non linéaire, on a optée dans le cadre de cette étude a la méthode de la rigidité sécante.

#### 4.2.2 Algorithme de résolution non linéaire [4], [15] :

La méthode de résolution s'effectue par un processus de calcul itératif qui se présente comme suit :

1) A l'étape convergente  $j-1$ , correspondant au chargement  $\{F\}^{j-1}$ , le vecteur déplacements  $\{u\}^{j-1}$  et le vecteur des forces résiduelles  $\{\psi\}^{j-1}$  sont connus.

2) Incrément de chargement appliqué :

a)  $\{F\}^j = \{F\}^{j-1} + \{\Delta F\}^j$

b) Démarrage du compteur des itérations :  $i=1$ .

c) Evaluation du vecteur des forces résiduelles à équilibrer à l'étape actuelle  $j$  :

$$\{\psi\}^i = \{\Delta F\}^j + \{\psi\}^{j-1}$$

3) Evaluation des matrices de rigidité élémentaire puis assemblage de la matrice de rigidité globale, en fonction de la solution  $\{u\}^{i-1}$  de l'itération précédente  $i-1$ .

$$[K]^i = [K\{u\}^{i-1}]$$

\* s'il s'agit de la première itération (i-1), alors :

$\{u\}^{i-1} = \{u\}^{j-1}$  de l'étape convergente précédente j-1.

4) Résolution du système d'équation linéaire :  $[K]^i \{\Delta u\}^i = \{\psi\}^i$ .

5) Cumul du vecteur des déplacements nodaux  $\{u\}^i = \{u\}^{i-1} + \{\Delta u\}^i$

5) Calcul du vecteur des forces nodales équivalentes aux efforts internes à l'interaction i :  $\{F_R\}_e^i$  et assemblage dans le vecteur globale  $\{F_R\}^i$  des efforts résistants dans la structure.

7) Evaluation du vecteur des forces résiduelles, à l'itération i :

$$\{\psi\}^{i+1} = \{F\}^j - \{F_R\}^i$$

8) Teste de convergence :

a) Si l'étape j actuelle est convergente, alors passer à l'incrément de charge suivant j+1 et retourner à l'étape 2.

b) Sinon, passer à l'itération suivante i+1 et retourner à l'étape trois.

## 4.2.3 Organigramme du calcul itératif :

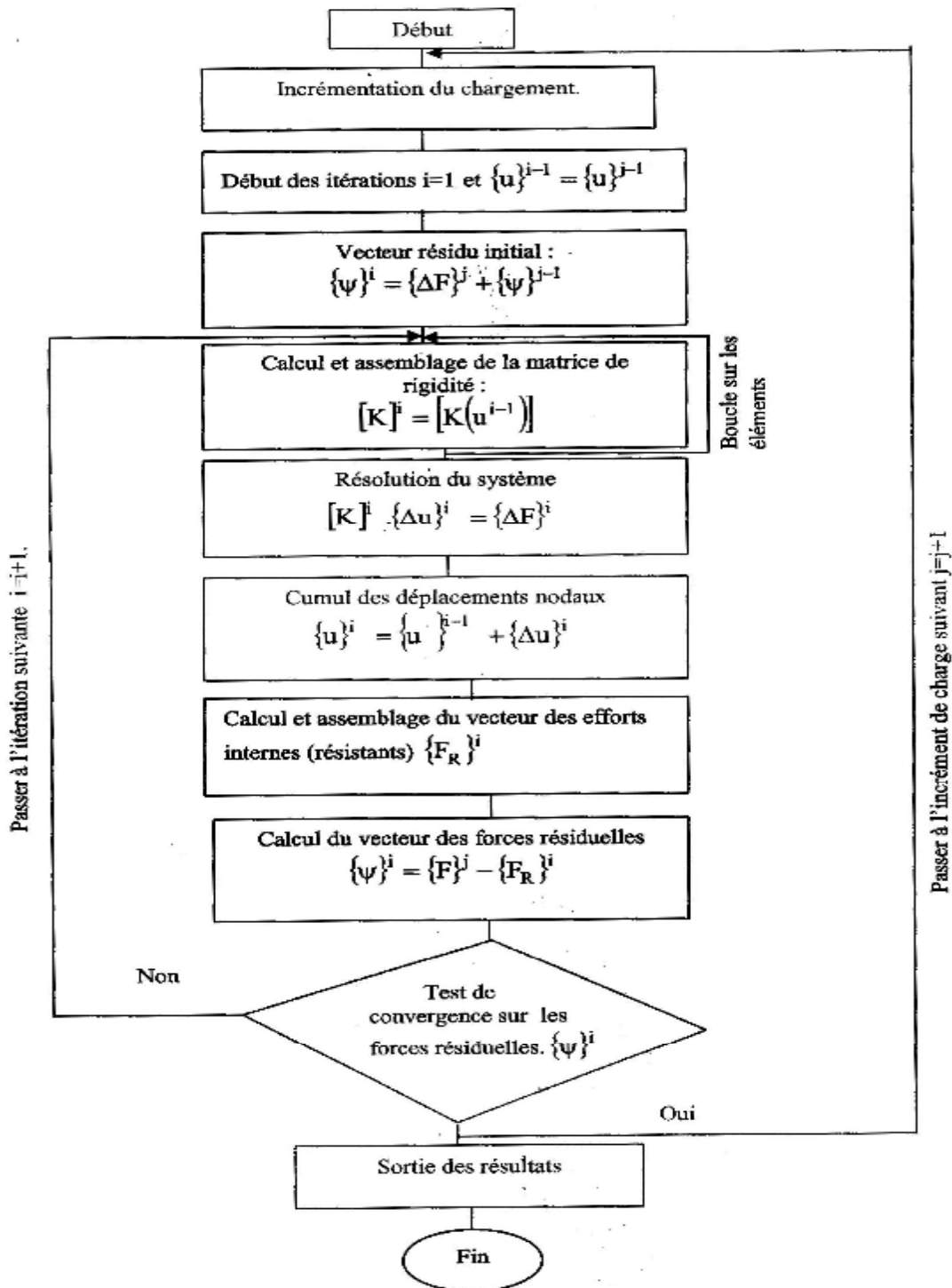


Figure 4.6 : organigramme de calcul itératif.

#### 4.2.4 Intégration numérique [4], [15] :

La matrice élémentaire [K] s'exprime sous la forme d'intégrale sur un volume V comme suit :

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.15)$$

Pour le calcul des composantes de la matrice [K], on utilise une intégration numérique basée sur la méthode de Gauss.

Pour un élément fini de longueur  $l$ , un nombre  $n$  de points d'intégration (points de Gauss), le principe de la méthode consiste à remplacer l'intégrale d'une fonction polynomiale  $f(x)$  par une combinaison linéaire de ses valeurs aux d'intégration  $x_i$  :

$$\int_0^l f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \quad (4.16)$$

Avec :

$f(x_i)$  : les valeurs de la fonction  $f(x)$  au point de Gauss d'abscisse  $x_i$  de l'élément.

$W_i$  : poids d'intégration correspondant aux points de Gauss  $x_i$ .

En effectuant le passage des coordonnées  $x$  aux coordonnées  $\xi$ , l'expression (4.2) devient :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \det J d\xi = \frac{l^2}{4} \sum_{i=1}^n a_i f(\xi_i) \quad (4.17)$$

Avec :

$f(\xi_i)$  : les valeurs de la fonction  $f(\xi)$  au coordonnées des points d'intégrations.

$\xi$  : coordonnées des points d'intégrations.

$a_i$  : les poids d'intégrations.

Dans notre étude et comme déjà cité dans le chapitre 3, on utilise trois points de Gauss, et en effectuant un passage des coordonnées  $x$  aux coordonnées  $\xi$ . L'expression (4.3) devient :

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) \det J d\xi = \frac{l^2}{4} [a_1 f(\xi_1) + a_2 f(\xi_2) + a_3 f(\xi_3)] \quad (4.18)$$

Avec :

$\det J = l/2$  (calculée au chapitre 3)

n	i	$\xi_i$	$a_i$
3	I	0	8/9
	II	$+\sqrt{0.6}$	5/9
	III	$-\sqrt{0.6}$	5/9

**Remarque :**

Pour calculer les composantes de la matrice  $[K]$ , il faut une discrétisation de la couche transversale en trapèze et chaque trapèze en couche horizontale qui doit être traité comme un élément fissuré en plus de l'intégration numérique. (le modèle et les étapes de calcul sont présentés au chapitre 3)

### 4.3 Comportement des matériaux :

#### 4.3.1 Comportement du béton en compression [4],[15],[18],[19],[20],[21] et [22] :

La résistance à la compression est déterminée en générale sur des cylindres normalisés dont le rapport de la hauteur au diamètre est de deux (16X32).

##### - Loi de SARGIN :

Une représentation du comportement est donnée par la loi de SAGRIN :

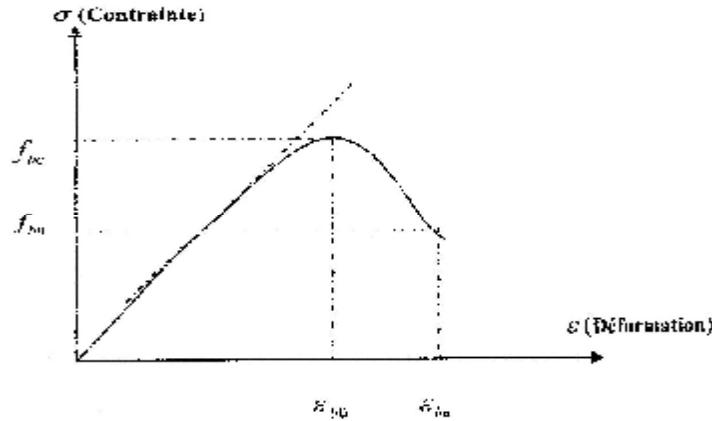


Figure 4.7 : diagramme contrainte – déformation de la loi de Sargin [15].

La relation qui lie la contrainte à la déformation est donnée par la relation (5.6) en fonction des paramètres :  $f_{bc}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  et  $\bar{\varepsilon}$ .

$$\sigma = f_{bc} \frac{k_1 \bar{\varepsilon} + (k_2 - 1) \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_1 - 2) \bar{\varepsilon} + k_2 \bar{\varepsilon}^2} \quad (4.19)$$

Avec :

$f_{bc}$  : résistance à la compression du béton.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}}$$

$\varepsilon_{b0}$  : déformation du pic correspondant à  $f_{bc}$ .

$k_1$  : paramètre d'ajustement de la branche ascendante du graphe.

$$k_1 = \frac{E_{b0} + \varepsilon_{b0}}{f_{bc}}$$

$E_{b0}$  : module élastique du béton à l'origine.

$k_2$  : paramètre d'ajustement de la branche descendante du graphe.

$$\left\{ \begin{array}{ll} k_2 = k_1 - 1 & \text{si } f_{bc} \leq 30 \text{ MPA} \\ k_2 = (k_1 - 1)[(55 - f_{bc})/25] & \text{si } 30 \leq f_{bc} \leq 55 \text{ MPA} \\ k_2 = 0 & \text{si } f_{bc} > 55 \text{ MPA} \end{array} \right.$$

on peut distinguer globalement quatre phases dans le comportement du béton comprimé d'après la figure (4.7).

**Phase 1 :** le béton se comporte comme un matériau homogène et élastique. Cela se traduit par une relation linéaire :  $\sigma = E_{b0} \cdot \varepsilon_b$

**Phase 2 :** Une micro-fissuration due à des tractions transversales se développe, d'où une incurvation progressive de la courbe jusqu'à la résistance  $f_{bc}$ , pratiquement  $f_{bc}$  correspond à  $\varepsilon_b = 2\text{‰}$ .

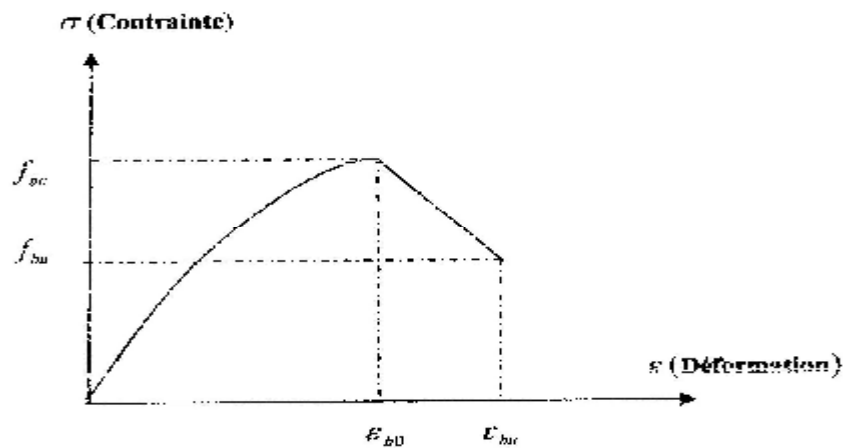
**Phase 3 :** la fissuration longitudinale se généralise et la courbe redescend lentement pour un béton non fragile, et rapidement dans le cas contraire.

**Phase 4 :** la phase finale à peu d'intérêt.

**Remarque :**

On peut rencontrer des cas particuliers de la loi de SARGIN pour la modélisation du béton en compression tel que :

- **Loi de SARGIN avec tronçon droit pour  $\varepsilon > \varepsilon_{b0}$  :**

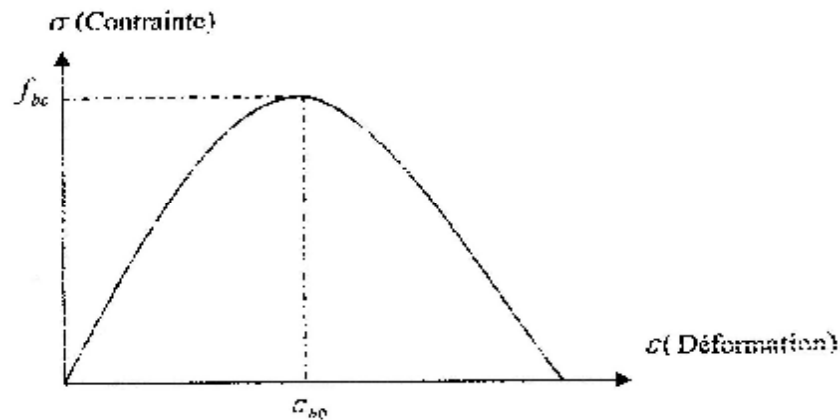


**Figure 4.8 :** diagramme contrainte – déformation de la loi de Sargin avec traçon droit [15].

L'équation du tronçon droit est comme suit :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 1 - \frac{\left(1 - \frac{f_{bu}}{f_{bc}}\right) (\bar{\varepsilon} - 1)}{\left(\frac{\varepsilon_{bu}}{\varepsilon_{b0}} - 1\right)} \right] \quad (4.20)$$

- **Loi parabole :**

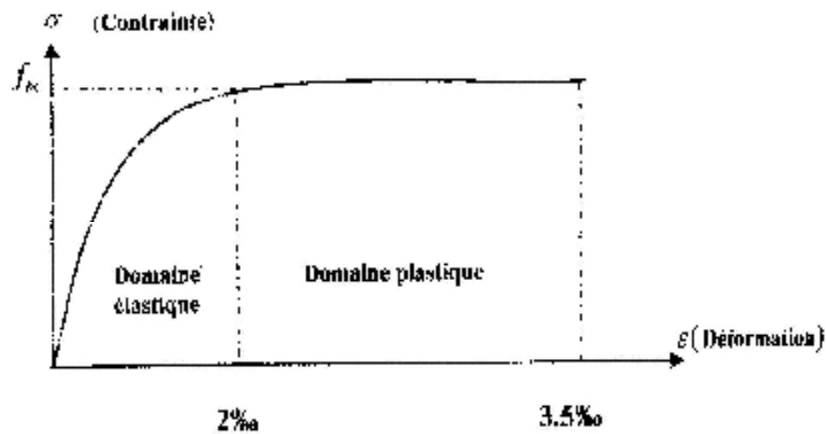


**Figure 4.9:** diagramme contrainte – déformation (loi **parabolique**) [15].

L'équation de la contrainte est donnée comme suit pour  $k_1=2$  et  $k_2=0$  à partir de la loi de Sargin :

$$\sigma = f_{bc} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \right)^2 \right] = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad (4.21)$$

- **Loi parabole rectangle :**



**Figure 4.10 :**diagramme contrainte–déformation (**loi parabole rectangle**)[15].

Les équations de la contrainte sont comme suit :

$$\sigma = f_{bc} [2\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^2] \quad \text{pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{b0} = 2\text{‰} \quad (4.22)$$

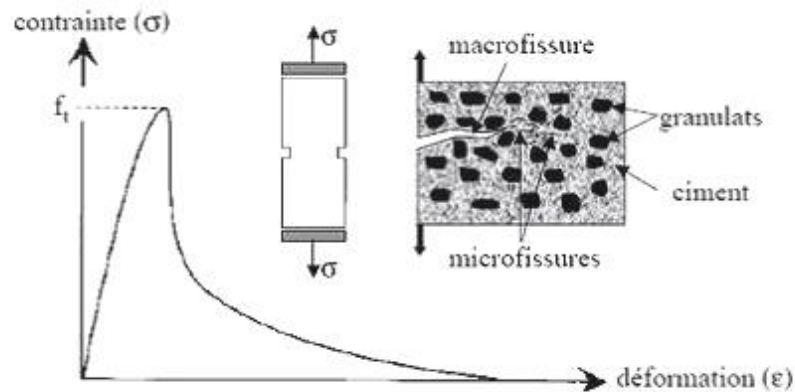
$$\sigma = f_{bc} \quad \text{pour } \varepsilon_{b0} = 2\text{‰} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{b0} = 3.5\text{‰} \quad (4.23)$$

### 4.3.2 Comportement du béton en traction [4],[10],[15],[17],[19],[20] et [22] :

Plusieurs chercheurs ont effectués des essais à la traction du béton, les résultats obtenus ont montré une certaine dispersion. Ceci est dû au comportement fragile du béton en traction et aux modes d'essais dans on peut setier :

#### a) Essais de Peterson (béton seul sans acier) :

Le comportement type du béton en traction est montré à la figure (4.11) suivante :



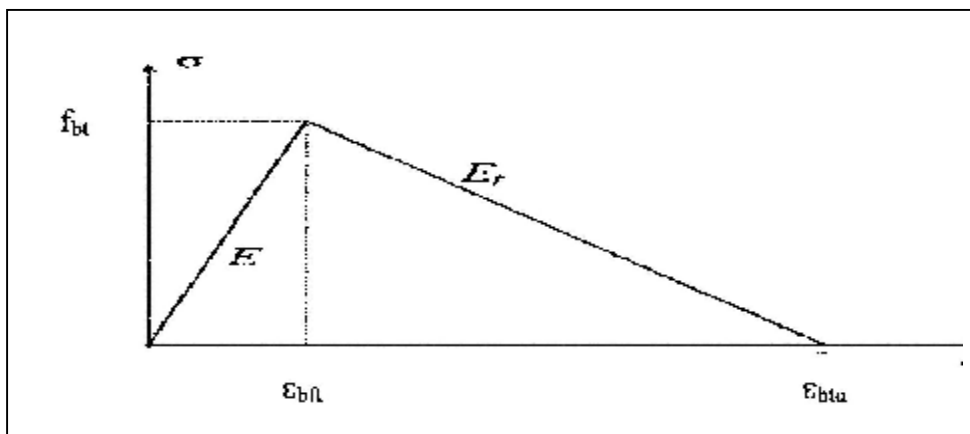
**Figure 4.11** : diagramme contrainte – déformation en traction selon **Peterson** [10].

D'après la figure (4.11) précédente on peut distinguer deux phases :

- **Phase 1** : une branche ascendante (élastique linéaire) rectiligne jusqu'au maximum de résistance.
- **Phase 2** : au-delà du pic, la courbe décroît progressivement jusqu'à s'annuler pour un déplacement nettement supérieur à celui de pic, d'où le comportement assez ductile.

#### b) Essais Coenen (béton seul sans acier) :

Pour simplifier la courbe précédente qui est de genre très complexe, Coenen a proposé une loi bilinéaire simple comme montré à la figure (4.12) :



**Figure 4.12** : diagramme contrainte – déformation en traction selon **Coenen** [15].

Les relations sont données comme suit :

$$\sigma = E_{b0} \cdot \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \quad (4.24)$$

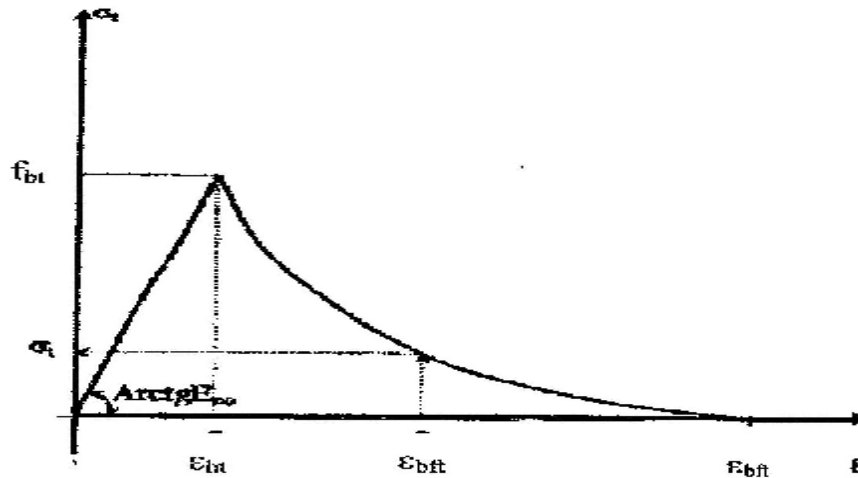
$$\sigma = f_{bt} \frac{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon)^2}{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{bft})^2} \quad \text{si } \varepsilon_{bft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{btu}$$

Ce genre de modèle peut comprendre deux cas extrêmes :

- Les modèles élasto-plastiques (  $E_f = 0$  )
- Les modèles élasto-fragiles (  $E_f = -\infty$  )

### c) Essais de Grelat (béton armé) :

La formulation de Grelat tient compte d'une répartition linéaire des contraintes dont le diagramme est donné à la figure (4.13).



**Figure 4.13** : diagramme contrainte – déformation en traction selon **Grelat** [17].

Les relations sont données comme suit :

$$\sigma = E_{b0} \cdot \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} \quad (4.25)$$

$$\sigma = f_{bt} \frac{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon)^2}{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{bft})^2} \quad \text{si } \varepsilon_{bft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{btu}$$

Avec :

$f_{bc}$  : résistance du béton à la traction.

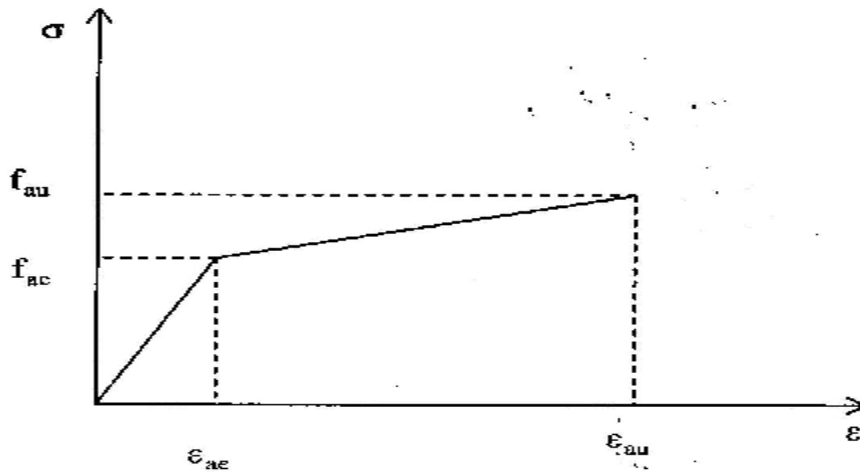
$\varepsilon_{bft}$  : déformation de traction correspondant à  $f_{bc}$  .

$\varepsilon_{btu}$  : déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu.

$E_{b0}$  : module d'élasticité longitudinale du béton.

### 4.3.3 Comportement de l'acier [4],[18] et [19] :

Les lois de comportement contrainte-déformation de l'acier sous charge monotone est supposée élasto-plastique avec ou sans écrouissage, qui est identique en traction et en compression, comme indiqué à la figure (4.14).



**Figure 4.14** : diagramme contrainte – déformation de l'acier [4].

Les relations sont données comme suit :

$$\sigma = E_a \cdot \varepsilon \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ae} \quad (4.26)$$

$$\sigma = f_{ae} + (f_{au} - f_{ae}) \frac{(\varepsilon - \varepsilon_{ae})}{(\varepsilon_{au} - \varepsilon_{ae})} \quad \text{si } \varepsilon_{ae} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{au}$$

## CHAPITRE 5 : Programmation informatique

### 5.1 Présentation du programme élaboré :

Sur la base des modélisations et méthodes de calcul, présentées dans les chapitres précédents pour le calcul linéaire et non linéaire, on a développé un programme informatique appelé **Poutre-Timoshenko 3**, en langage fortran 90. Ce programme permet la simulation numérique du comportement linéaire et non linéaire d'une poutre fléchie sur la base du modèle de la poutre de Timoshenko, et une modélisation du comportement non linéaire vis-à-vis de l'effort tranchant d'une poutre épaisse sur la base du modèle de Vecchio et Collin.

Ce programme développé est une amélioration à un programme déjà existant à deux nœuds par élément à six degrés de liberté, à un nouveau programme basé sur une discrétisation de trois nœuds par élément et chaque nœud comporte trois degrés de liberté, ce qui fait neuf degrés de liberté par élément fini.

Le programme est caractérisé par trois blocs :

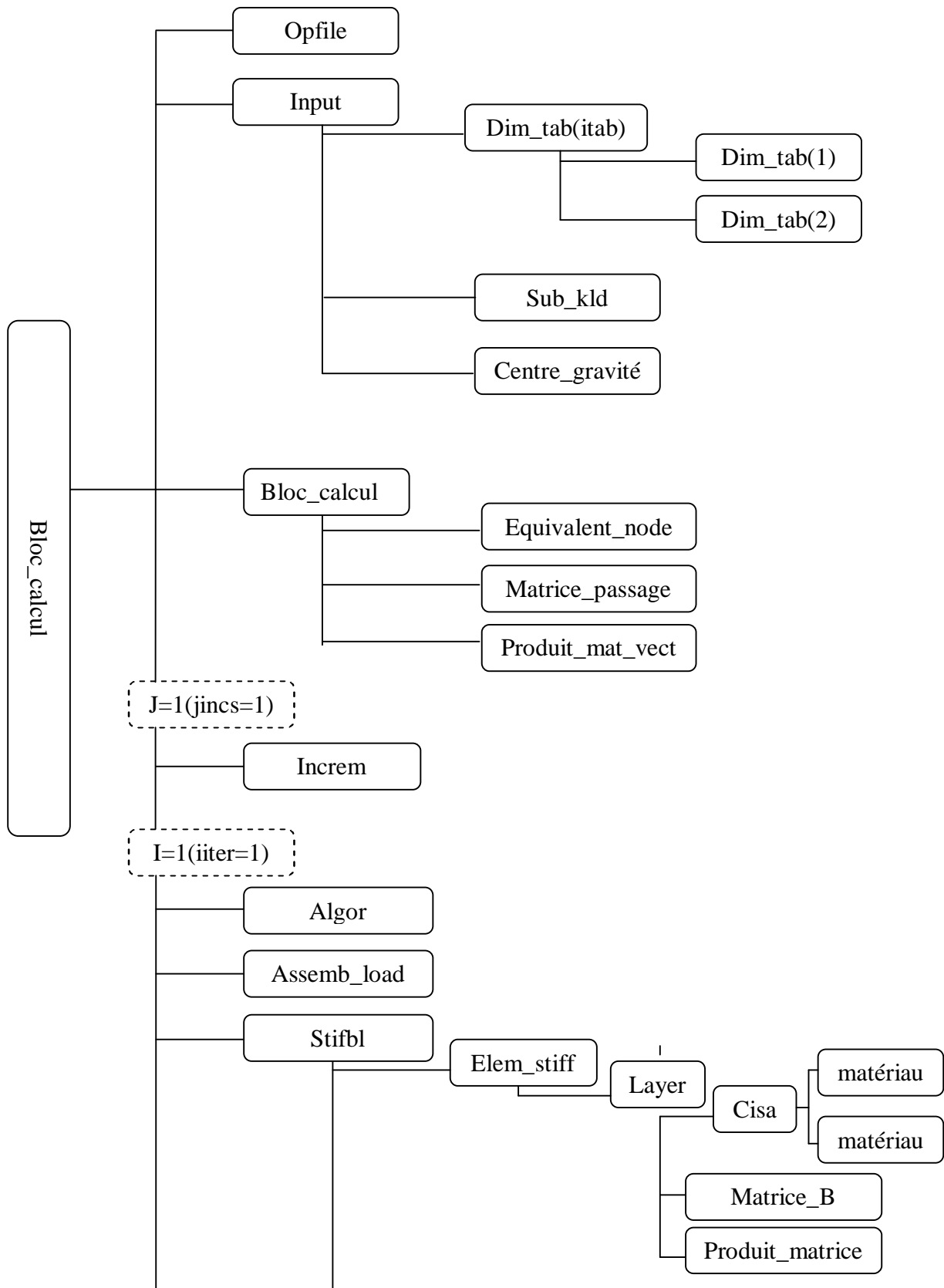
- bloc « **fichier nouveau** » : qui permet la création d'un nouveau fichier de données.
- bloc « **bloc-calcul** » : composé de sous-routines est fait appel à d'autres sous-routines.
- Bloc « **fin du problème** » : qui permet la déclaration des variables globales utilisées dans l'ensemble du programme.

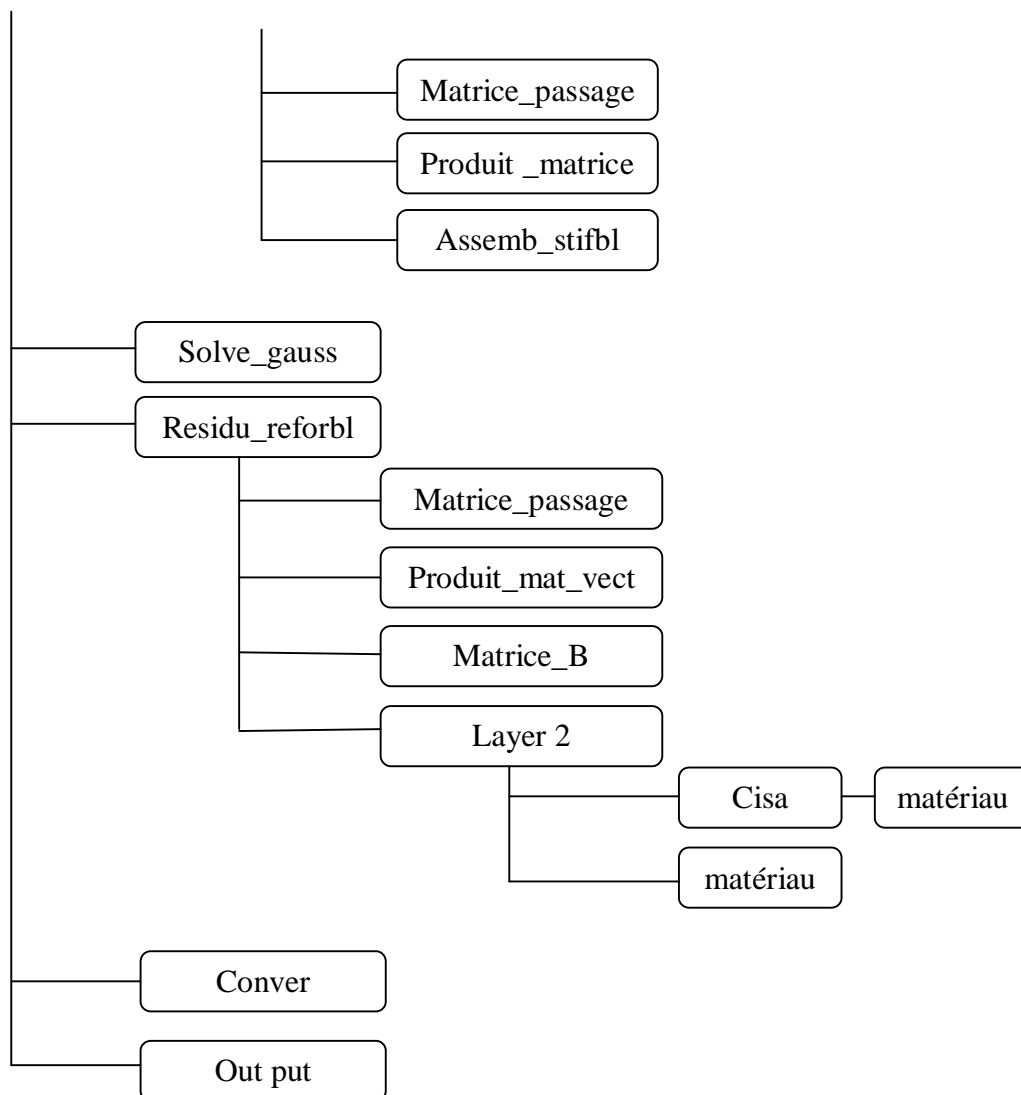
Les modifications apportées à ce programme se trouvent au niveau des sous-routines suivantes :

- Subroutine opfile.
- Subroutine input
- Subroutine -kld
- Subroutine loadps.
- Subroutine équivalent-node.
- Subroutine matrice de passage.
- Subroutine Stifbl.
- Subroutine elem-stiff.
- Subroutine matrice\_B.
- Subroutine layer.
- Subroutine residu\_reforbl.
- Subroutine layer 2

### 5.2 Organigramme du bloc de calcul :

L'organisation du programme compte tenu de l'ordre d'appel des différentes sous-routines est présentée par la figure suivante :





**Figure 5.1** : Organigramme détaillé du bloc de calcul.

### 5.3 Description des sous-routines :

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines principales et secondaires constituant le programme **Poutre-Timoshenko 3** :

**1-Opfile** : ouverture des fichiers de données et création du fichier des résultats.

**2-Input** : la lecture et la vérification des données.

**3-Dim\_tab(1)** : l'initialisation et le dimensionnement des tables.

**4-Dim\_tab(2)** : le dimensionnement des vecteurs VKGD, VKGS et VKGI (la matrice de rigidité globale est stockée en ligne de ciel).

**5-Sub\_kld** : calcul du vecteur « kld » de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockée en ligne de ciel).

**6-Centre de gravité** : calcul de la position de centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence.

**7-Loadps** : lecture de chargement puis évaluation des charges nodales équivalentes au chargement réparti et les stocker dans le vecteur « rload ».

**8-Equivalent\_node** : calcul du vecteur des forces nodales équivalentes.

**9-Matrice \_passage** : calcul de la matrice passage.

**10-Produit\_mat\_vect** : effectue le produit de la matrice de passage par le vecteur chargement.

**11-Increm** : lecture et incrémentation du chargement appliqué.

**12-Algor** : calcul du paramètre « kresl » en fonction de l'algorithme de résolution et fonction de la valeur du paramètre « nalgo ».

**13-Assemb\_load** : assemblage du chargement dans le vecteur global « gload ».

**14-Stifbl** : calcul et assemblage de la matrice de rigidité.

**15-Elem\_stiff** : calcul de la matrice de rigidité élémentaire estif (9\*9) pour un élément poutre à 3 nœuds.

**16-Layer** : calcul des valeurs de EA, ES, EI, et GA par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours.

**17-Cisa** : calcul des contraintes normales et tangentielles dans la tranche horizontale en cours selon le modèle de Vecchio et Collins.

**18-Matériau** : évalué les contraintes des matériaux (béton et acier) en utilisant les lois de comportement des matériaux.

**19-Produit\_matrices** : calcul de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère globale.

**20-Assemb\_stifbl** : assemblage de la matrice de rigidité élémentaire dans la matrice globale (en ligne de ciel).

**21-Solve\_gauss** : résolution du système d'équation par la méthode d'élimination de gauss et cumul des déplacements et chargements.

**22-Residu\_reforbl** : calcul des forces nodales internes équivalentes.

**23-Layer 2** : calcul des efforts internes  $N_x$ ,  $T_x$  et  $M_x$  au point igauss de la section transversale de la section en cours.

**24-Conver** : teste de convergence pour le calcul itératif.

**25-Output** : sortie des résultats :- Déplacement nodaux.

- Efforts internes N, T, M.

- Réactions aux appuis.

## 5.4 Présentation du fichier de données :

### début\_titre

\$  
\$ Titre et/ou description du problème  
\$

### fin\_titre

### donnees\_globales

Npoin Nelem Nsect MaxTrap MaxAcier Nvfix Nmats Nprop Nincs Nalgo

### elements

NumElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2 NumNoeud3  
..... nelem fois

### coordonnees

NumNoeud CoordX CoordY  
..... npoin fois

### section

Numsect Hsection Ntrapeze Nacier Indice\_acier\_R  
b\_inf b\_sup z\_inf z\_sup NumMat  
..... Ntrapeze fois  
z\_acier aire\_acier NumMat\_acier  
..... Nacier fois  
Omega L omega T NumMat L NumMat T ligne donnee si Indice\_acier R ≠ 0

Nsect fois

### conditions\_limites

NumNoeud\_fix Code\_CL Depl\_fix\_X Depl\_fix\_Y  
..... Nvfix fois

### materiaux

Numat itype\_materiau prop (1) prop (2) ... prop (Nprop)  
..... Nmats fois

### charges

Indice\_charge\_Nodale Indice\_charge\_Repartie

### charges\_nodales

Nbre\_charge\_N  
NumNoeud\_Charge Force\_X Force\_Y Moment  
..... Nbre\_Charge\_N fois

### increment

Fact\_Charge1 Tolerance1 Max\_iterations1 Indice\_sortie1  
Fact\_Charge2 Tolerance2 Max\_iterations2 Indice\_sortie2  
..... Nincs fois  
.....

## 5.5 Description des variables du fichier de données :

- Commande **début \_ titre** : (bloc des commentaires)

Après cette commande, on peut introduire le titre, la description ou des commentaires concernant le problème à traiter. Cette partie est terminée par la commande **fin \_ titre**.

- Commande **données \_ globales** (lecture des principales données).

**Npoint** : nombre total des points nodaux.

**Nelem** : nombre total d'éléments.

**Nsect** : nombre de types de section.

**Maxtrap**: nombre maximum de trapèzes par section.

**Maxacier** : nombre maximum de lits d'acier par section.

**Nvfix** : nombre des neuds ayant des conditions aux limites

**Numat** : nombre de groupes de matériaux

**Nprops** : nombre maximum des propriétés des matériaux

**Nincs** : nombre d'incrément de chargement.

**Nalگو** : indicateur pour identifier le type d'algorithme de résolution.

Si **nalگو = 1** ==> la méthode de rigidité initiale

Si **nalگو = 2** ==> la matrice de rigidité est recalculée pour chaque itération pour chaque incrément de charge

Si **nalگو = 3** ==> la matrice de rigidité est recalculée pour la 1<sup>ère</sup> itération pour chaque incrément de charge.

-Commande **éléments** (connectivités nodales et types de sections)

**Num Elem** = numéro d'élément

**Num Sect** = numéro de la section transversale constituant l'élément

**Num Nœud 1** = numéro du 1<sup>er</sup> noeud de l'élément

**Num Nœud 2** = numéro du 2<sup>ème</sup> noeud de l'élément

- commande **coordonnée** (lecture des coordonnées nodales)

**Num Noeud** = numéro du noeud considéré

**CoordX** = abscisse du noeud considéré / repère global de la structure

**CoordY** = ordonnée du noeud considéré / repère global de la structure

- Commande **Section** (caractéristiques des différents types de sections)

**Num Sect** = numéro de la section considérée

**Hsection** = hauteur de la section considérée

**Ntrapeze** = nombre de trapèzes dans la section considérée

**Nacier** = nombre de lits d'acier dans la section considérée

**b\_inf** = largeur de la base inférieure du trapèze considéré

**b\_sup** = largeur de la base supérieure du trapèze considérée

**Z\_inf** = ordonnée de la base inférieure / à l'axe de référence.

**Z\_sup** = ordonnée de la base supérieure / à l'axe de référence.

**Num Mat** = numéro du matériau constituant le trapèze considéré

**Z\_acier** = ordonnée du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

**Aire- acier** = aire du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

**Num Mat- acier** = numéro du lit d'acier considéré

- commande **condition \_ limites** (lecture des conditions aux limites)

**Num Nœud \_ fix** = numéro du nœud ayant des C.L

**Code\_CL** = code de la condition aux limites.

= **100** => déplacement longitudinal U imposé

= **010** => déplacement transversal V imposé

= **001** => rotation  $\theta$  imposée

= **110** => déplacements U et V imposés (si  $U=V=0$  => appuis double)

= **111** => déplacements U, V et  $\theta$  imposée (Si  $U=V=\theta=0$  => encastrement)

**Depl\_fix\_X** = valeur du déplacement longitudinal imposé ( 0, s'il s'agit d'un appui )

**Depl\_fix\_Y** = valeur du déplacement transversal imposé ( 0, s'il s'agit d'un appui )

**Rot\_fix** = valeur de rotation imposée (0 si la rotation est empêchée)

- Commande **matériau** (propriété des groupes de matériaux)

**Numat** = numéro du matériau considéré

**Itype \_ matériau** (numat) : type du matériau

Si **itype\_ matériau =1** => matériau élastique

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale E

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu$

Si **itype\_ matériau =2** => matériau béton

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale du béton à l'origine.  $E_{b0}$

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu_b$

**Prop (3)** = Résistance à la compression du béton

**Prop (4)** = le pic des contraintes du béton

**Prop (5)** = déformation correspondant au pic des contraintes.

**Prop (6)** = déformation de rupture.

**Prop (7)** = contrainte du béton à la traction  $f_{bt}$

**Prop (8)** = déformation correspondante à la plastification de l'acier le plus tendu.

**Prop (9)** = coefficient **itbc** caractérisant la loi du béton comprimé.

**Prop(10)** = coefficient **itbt** caractérisant la loi du béton tendu.

Si **itype\_materiau = 3**  $\Rightarrow$  matériau acier

**Prop (1)** = module d'élasticité longitudinale  $E_a$

**Prop (2)** = coefficient de poisson  $\nu_a$

**Prop (3)** = limite d'élasticité  $f_{ae}$

**Prop (4)** = contrainte ultime  $f_{au}$

**Prop (5)** = déformation ultime  $\epsilon_{au}$

-Commande **charges** (lecture des paramètres de chargement)

**Indice-charge-Nodale** : paramètre du chargement nodal

Si **Indice-charge-Nodale** = 0  $\Rightarrow$  pas de chargement nodal à introduire

**Indice – charge –repartie** : paramètre du chargement reparté sur les éléments

Si **Indice-charge- repartie** = 0  $\Rightarrow$  pas de chargement reparté

-Commande **charges\_ nodales** (lecture des charges nodales, si **indice \_charge\_ nodale**  $\neq$  0)

**Num Nœud\_charge** = numéro de nœud chargé

**Force-x** = valeur de la charge nodale  $F_x$  selon l'axe x appliquée au nœud

**Force-y** = valeur de la charge nodale  $F_y$  selon l'axe x appliquée au nœud

**Moment** = valeur du moment  $M$  appliqué au nœud

-Commande **charge \_repartie** (lecture des charges reparties dans le repère local de l'élément considéré si **indice \_charge\_repartie**  $\neq$  0)

**Numel** = numéro de l'élément chargé

**Ncas** = nombre de cas de chargements repartis (1 à 4 )

**Numcas** = numéro du cas de chargement

Si **Numcas** = **1**  $\Rightarrow$  charge longitudinale uniformément répartie

= **2**  $\Rightarrow$  charge transversale uniformément répartie

= **3**  $\Rightarrow$  charge triangulaire croissant de gauche à droite

= **4**  $\Rightarrow$  charge triangulaire croissant de droite à gauche

**Charge** = valeur de la charge répartie (force par unité de longueur)

- commande **incrément** (lecture des incréments de chargement)

**Fact-charge 1** = facteur de chargement pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Tolérance 1** = tolérance de convergence pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Max-iteration 1** = nombre maximal d'itération pour le 1<sup>er</sup> incrément

**Indice sortie 1** = paramètre de sortie des résultants pour le 1<sup>er</sup> incrément

Si **indice – sortie 1 = 0**  $\Rightarrow$  sortie des résultats après convergence  
du 1<sup>er</sup> incrément de chargement

Si **indice – sortie 1 = 1**  $\Rightarrow$  sortie des résultats après la première itération  
du 1<sup>er</sup> incrément

Si **indice – sortie 1 = 2**  $\Rightarrow$  sortie des résultats après chaque itération  
du 1<sup>er</sup> incrément

## 5.6 Description du fichier résultats :

Les résultats sont données sous forme de fichier qui se présente sous la forme suivante :

$\Rightarrow$  **debut\_titre**

\$

\$ Titre et ou description du problème

\$

**fin\_titre**

$\Rightarrow$  Données globales :

Nombre total des points nodaux	= ...
Nombre total d éléments	= ...
Nombre de types de sections	= ...
Nombre max de trapèzes/section	= ...
Nombre max de lits d'aciers/section	= ...
Nombre des nœuds ayant des CL	= ...
Nombre de groupes de matériaux	= ...
Nombre max de propriétés de matériaux	= ...
Nombre de nœuds par élément	= ...
Nombre d incréments de chargement	= ...
Type d algorithme de résolution	= ...
Nombre de ddl /noeud	=...

==> Connectivites nodales et numeros des proprietes des materiaux:

element	num_section	numeros noeuds	
1	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

-----

1	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

==> Coordonnees nodales:

noeud	abscisse	ordonnee
1	...	...
...	...	...
...	...	...

-----

1	...	...
...	...	...
...	...	...

==> nombre de types de sections= ...

type section	nombre trapeze	hauteur section
...	...	...

...

n°trapeze	b_inf	b_sup	zi_trapeze	zs_trapeze	n° materiau
1	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

1	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

==> Conditions aux limites (CL):

noeud	code	valeurs fixees		
1	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

-----

1	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

==> proprietes des groupes de materiaux:

groupe	module young	module tran G	sigmay	H'
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

-----

==> indice du chargement nodal = ...

==> indice du chargement reparti = ...

==> charges\_nodales:

noeud	force Fx	force Fy	Moment
-----			
...	...	...	...
...	...	...	...

=> increment

-----	
facteur de chargement	: ...

tolerance de convergence	: ...
--------------------------	-------

nbre maximal d iterations	: ...
---------------------------	-------

parametre de sortie	: ...
---------------------	-------

facteur de chargement convergent =	...
------------------------------------	-----

\*\*\*\*\* Résultats du calcul \*\*\*\*\*

==> Déplacements nodaux:

noeud	depl Ux	depl Uy	rotation teta
-----			
1	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

==> Reactions aux appuis:

noeud	React Rx	React Ry	Moment M
-----			
1	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

## CHAPITRE 6 :

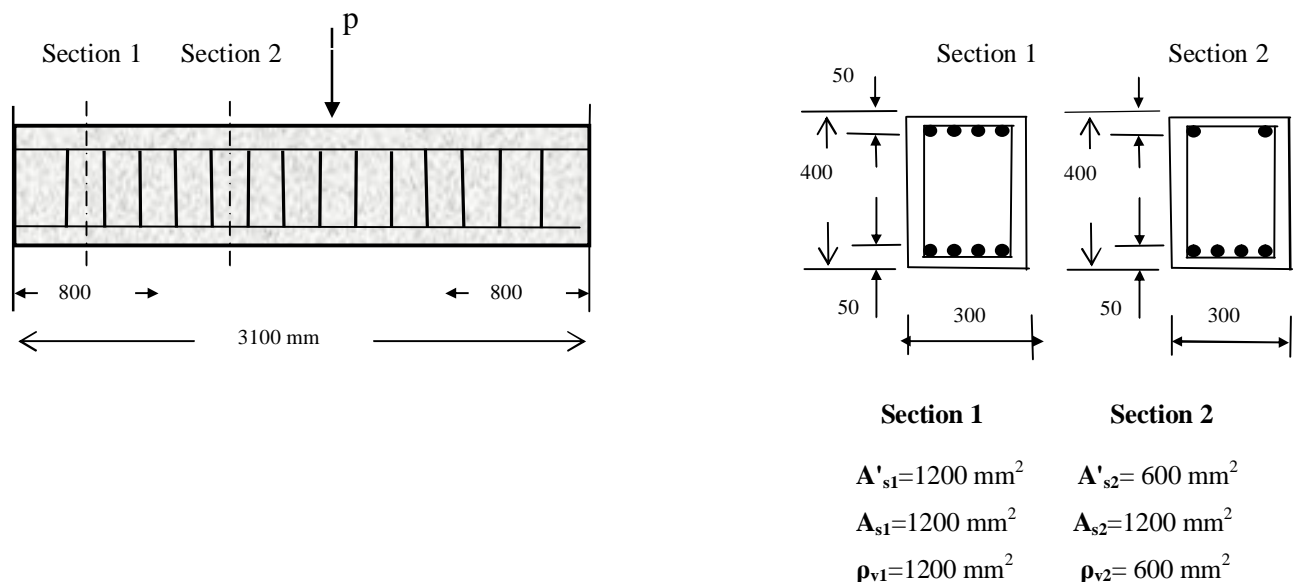
### Validation du modèle de calcul

#### 6.1 Introduction :

Afin de vérifier l'aptitude et la fiabilité du programme élaboré, quelques exemples d'applications sont présentés. Les exemples traités sont des structures (poutres) en béton armé, avec une variation des formes, des propriétés mécaniques et des détails de ferrailage. Pour chaque exemple traité, les résultats de la simulation numérique sont comparés aux résultats expérimentaux aux des résultats d'autre laboratoires.

#### 6.2 Essais de F.J.Vecchio et de M.B.Emara :

Il s'agit d'une poutre en béton armé simplement appuyée [16], qui a fait l'objet d'une étude théorique mené par F.J.Vecchio et M.B.Emara. Chaque poutre présente une section rectangulaire, une travée de 3100mm de longueur et soumise à une charge concentré à mi-portée. Les détails géométriques de la poutre et du ferrailage sont indiquées sur la figure (6.1) :



**Figure 6.1.** : Données géométriques des poutres

Les caractéristiques de béton et de l'acier sont présentées dans le tableau suivant :

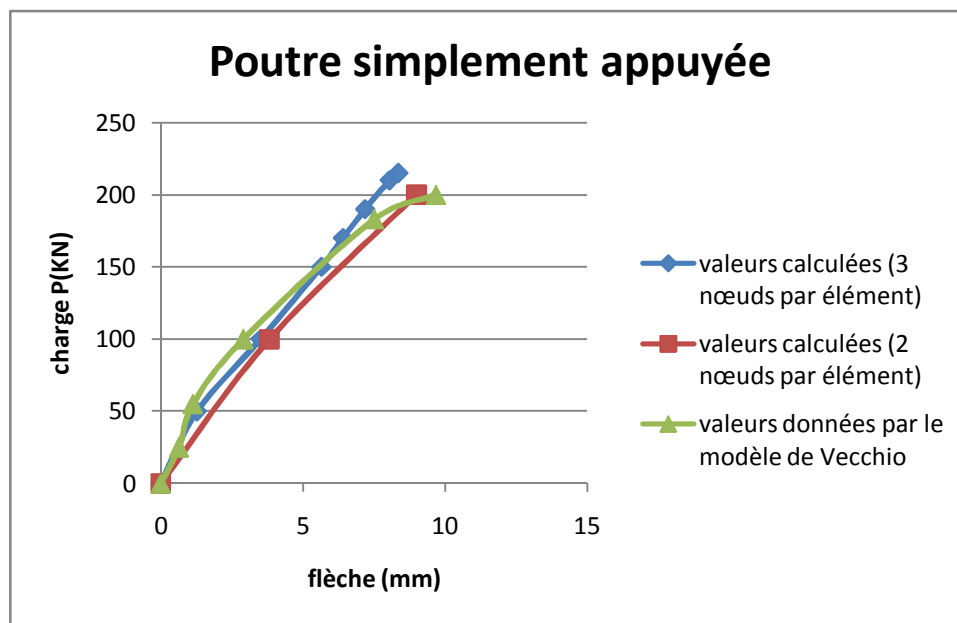
Béton				Armatures				
				Longitudinales		transversales		
$E_b$ (MPa)	$\epsilon_{b0}$	$f_{bc}$ (MPa)	$f_{bt}$ (MPa)	$E_a$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)
28600	0.0021	25.5	2.13	192600	418	420	454	460

**Tableau 6.1** : Propriétés matérielle de la poutre

Pour cette poutre, nous avons réalisé deux calculs :

- un premier calcul, en discrétisant la poutre en 8 éléments finis à deux nœuds.
- un deuxième calcul, en discrétisant la poutre en 4 éléments finis à trois nœuds.

Les résultats numériques de l'évolution de la flèche en fonction de la charge appliquée au milieu de la travée, comparés aux résultats donnés Vecchio Emara sont représentés graphiquement dans la figure (6.2) suivante :



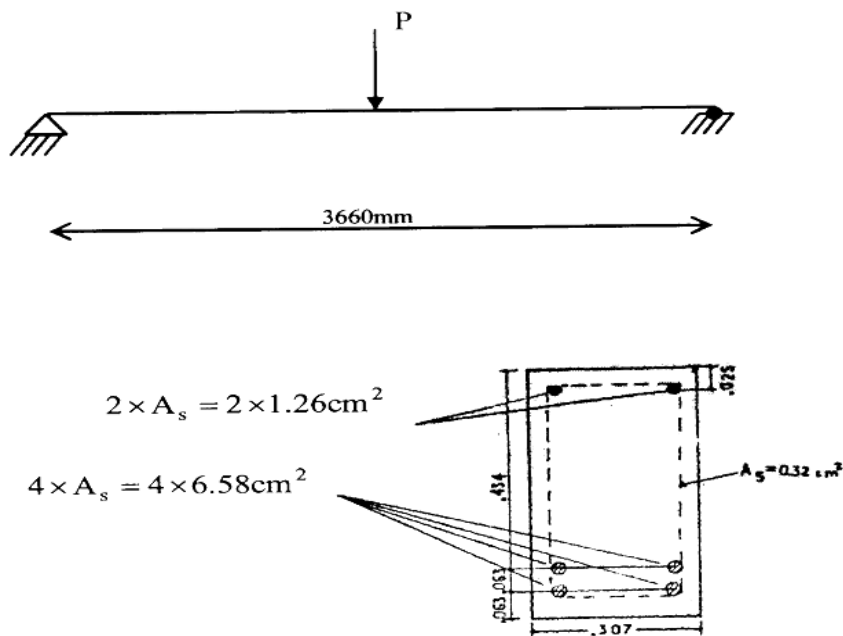
**Figure 6.2** : Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de Vecchio.

La comparaison essai – calculs, permet de faire les constatations suivantes :

- dans le domaine linéaire, les valeurs obtenues par le calcul trois nœuds par élément collent parfaitement avec les valeurs expérimentales mieux que le calcul à deux nœuds par élément.
- Dans le domaine non linéaire, les deux calculs simulent correctement le comportement expérimental avec une supériorité du calcul à 3 nœuds et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 180kN.
- Au-delà de cette valeur, la courbe de calcul à 3 nœuds divergent légèrement.

### 6.3 Essais de Bresler et Scordelis :

Il s'agit d'une poutre en béton armé bi-appuyée qui a été étudiée expérimentalement par Bresler et Scordelis [4]. Elle a d'une section transversale rectangulaire et une longueur de 3660 mm entre axe des appuis, elle est soumise à une charge concentrée à mi-portée. Les détails de la poutre et de la section transversale sont indiqués sur la figure (6.3) :



**Figure 6.3 :** Caractéristique géométrique de la poutre testée par Bresler et Scordelis.

Les caractéristiques de béton et de l'acier sont présentées dans le tableau suivant :

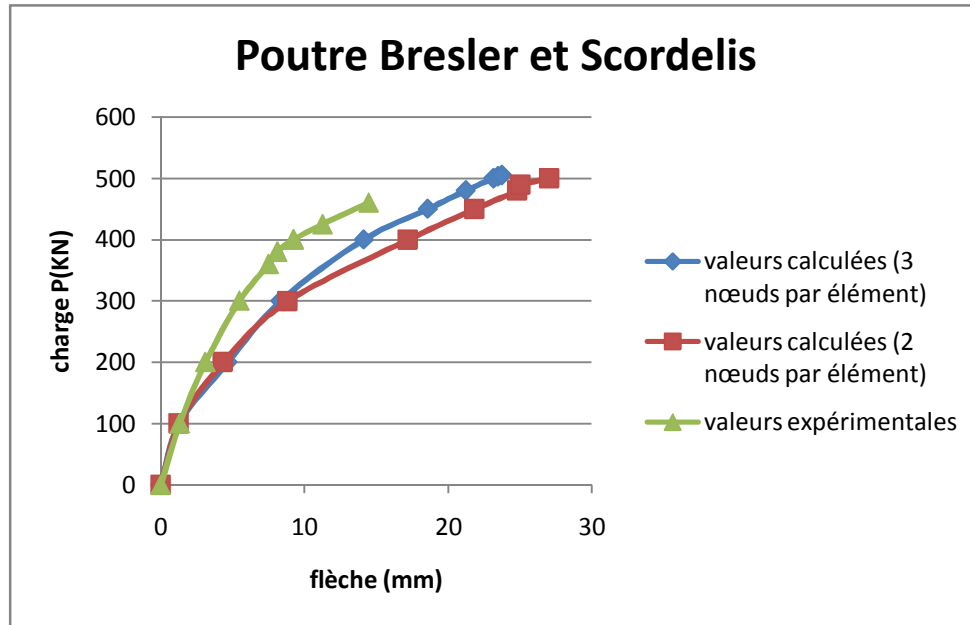
Béton				Armatures				
				Longitudinales(6.58 cm2)		Longitudinales(1.26 cm2)		
$E_b$ (MPa)	$\epsilon_{b0}$	$f_{bc}$ (MPa)	$f_{bt}$ (MPa)	$E_a$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)
200000	0.002	24.13	3.86	200000	550	325	550	325

**Tableau 6.2 :** Propriétés matérielle de la poutre étudiée par Bresler et Scordelis

Pour cette poutre, nous avons réalisé deux calculs :

- un premier calcul, en discrétisant la poutre en 12 éléments finis à deux nœuds.
- un deuxième calcul, en discrétisant la poutre en 12 éléments finis à trois nœuds.

L'évolution de la flèche en fonction de la charge appliqué mi-travée comparé avec les résultats expérimentaux sont données graphiquement par la figure (6.4).



**Figure 6.4 :** Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de Bresler et Scordelis.

- Le tableau (6.3) montre les valeurs ultimes de la charge p dans le calcul et dans l'essai.

	Valeurs ultimes de la charge P (KN)				
poutre	Experimentale	Calculée à 2 nœuds par élément	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (2 nœuds)	Exp/Cal (3 nœuds)
	459.2	500	505	0.92	0.91

**Tableau 6.3 :** Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.

- Le tableau (6.4) montre les valeurs ultimes de la flèche dans le calcul et dans l'essai.

	Valeurs ultimes de la flèche (mm)				
poutre	Experimentale	Calculée à 2 nœuds par élément	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (2 nœuds)	Exp/Cal (3 nœuds)
	14.45	27.04	23.71	0.53	0.61

**Tableau 6.4 :** Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.

La comparaison essai – calculs, permet de faire les constatations suivantes :

- dans le domaine linéaire, les valeurs obtenues par les deux calculs collent parfaitement avec les valeurs expérimentales.
- Dans le domaine non linéaire, les deux calculs surestiment légèrement la valeur de la charge maximale à la rupture. Cependant, en terme de déplacements, la courbe obtenue en utilisant des éléments à 3 nœuds semble plus proche des résultats expérimentaux que celle obtenue en utilisant des éléments à deux nœuds.

#### 6.4 Essais du CEBTP :

Des essais réalisés au CEBTP [28] sur des poutres dans l'une en béton armé nommée HZ4, elle est composée de deux travées de 5 m de portée chacune est une longueur totale de 10.40 m, avec une section transversale en double T, qui repose sur deux appuis simples aux extrémités et un appui double au milieu. Elle est soumise à deux charges concentrées appliquées à mi-portée des travées. Les détails géométriques de la poutre (HZ4) sont indiqués sur la figure (6.5) :

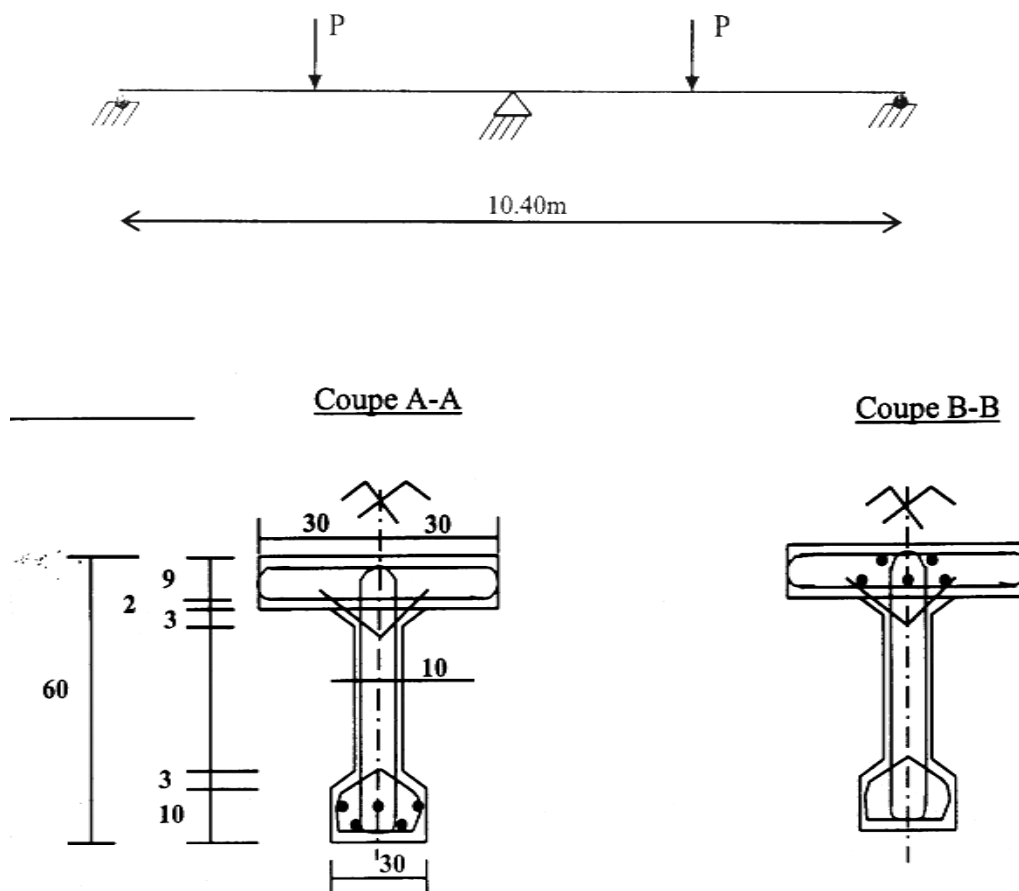


Figure 6.5 : Section transversal de la poutre HZ4.

La disposition des armatures longitudinales est donnée par la figure (6.6).

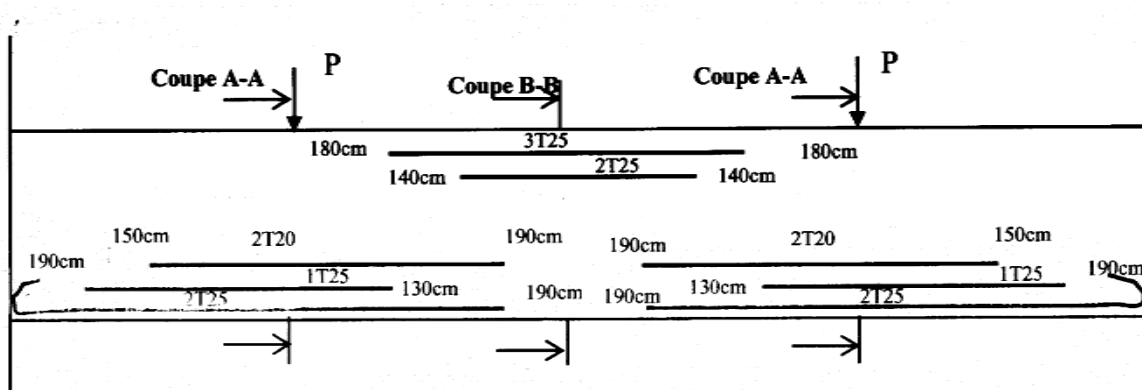


Figure 6.6 : Disposition des armatures longitudinales.

Les caractéristiques mécaniques du béton et de l'acier constituant la poutre HZ4 sont résumées dans le tableau (7.4) :

Béton			Armatures			
$E_b$ (MPa)	$f_{bc}$ (MPa)	$f_{bt}$ (MPa)	Barres	$E_a$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)
32000	32	3.3	HA20	195	424	543
			HA25	230	450	558

Tableau 6.5 : Caractéristique mécanique des matériaux

Dans cette poutre, nous avons effectué deux calculs :

- un premier calcul, en discrétisant la poutre en 30 éléments finis à deux nœuds.
- un deuxième calcul, en discrétisant la poutre en 18 éléments finis à trois nœuds.

Les courbes charge-flèche obtenues par les calculs comparées à la courbe expérimentale sont présentées dans la figure 6.7.

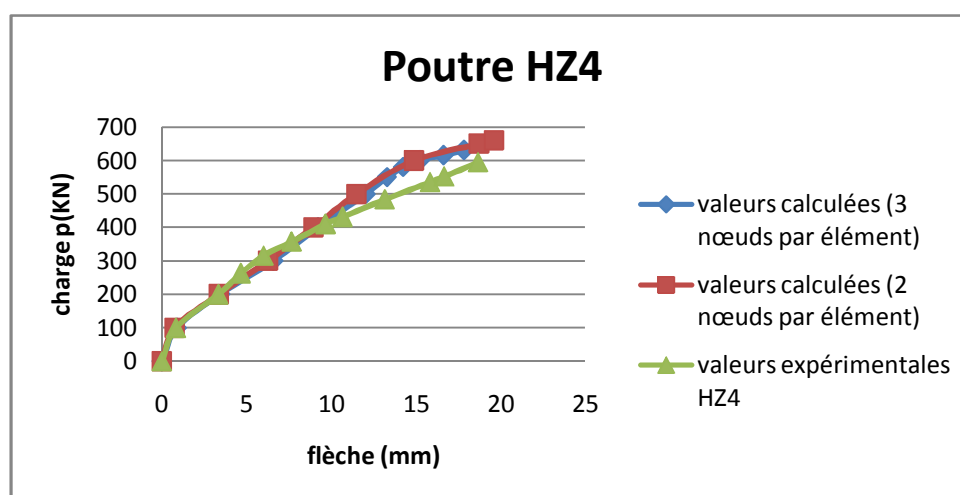


Figure 6.7 : Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par le modèle de HZ4.

- Le tableau (6.6) montre les valeurs ultimes de la charge  $p$  dans le calcul et dans l'essai.

Valeurs ultimes de la charge P (KN)					
poutre	Experimentale	Calculée à 2 nœuds par élément	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (2 nœuds)	Exp/Cal (3 nœuds)
	595	660	631	0.90	0.94

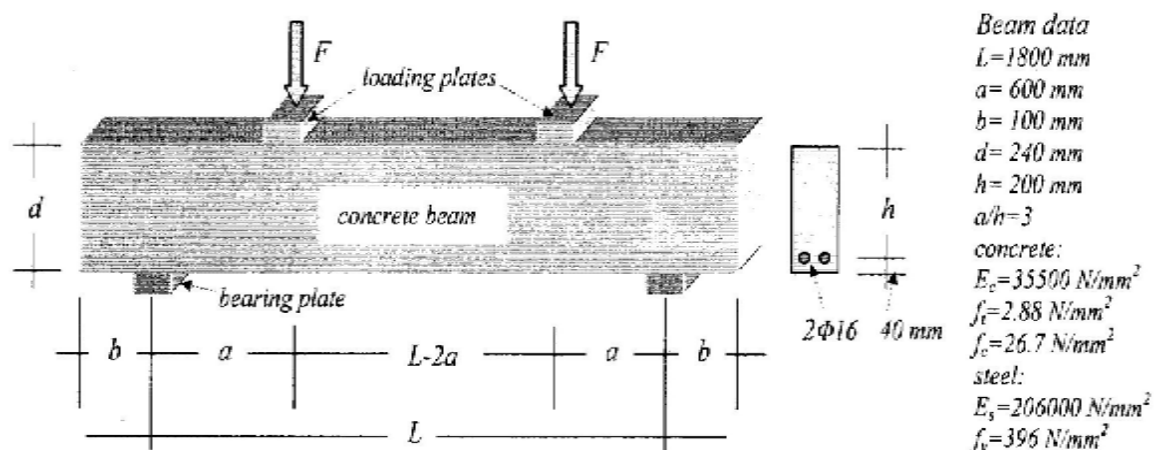
**Tableau 6.6:** Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.

A partir de la comparaison essai-calcul, on peut faire les constatations suivantes :

- les deux courbes de calcul collent parfaitement avec la courbe expérimentale, jusqu'à une valeur de la charge d'environ 400 kN.
- Au-delà, les résultats des calculs montrent un comportement légèrement plus rigides que le comportement expérimental.
- En ce qui concerne la charge de rupture, le calcul utilisant des éléments à 3 nœuds, semble plus proche de la valeur expérimentale.

### 6.5 Essais de Hibino :

C'est une poutre en béton armé simplement appuyée qui a été étudiée expérimentalement par Hibino [24]. Elle a une section transversale rectangulaire et une longueur de 1800 mm entre axe des appuis, elle est soumise à deux charges concentrées. Les détails de la poutre et de la section transversale sont indiqués sur la figure (6.8) :



**Figure 6.8 :** Caractéristique géométrique de la poutre testée par Hibino [24].

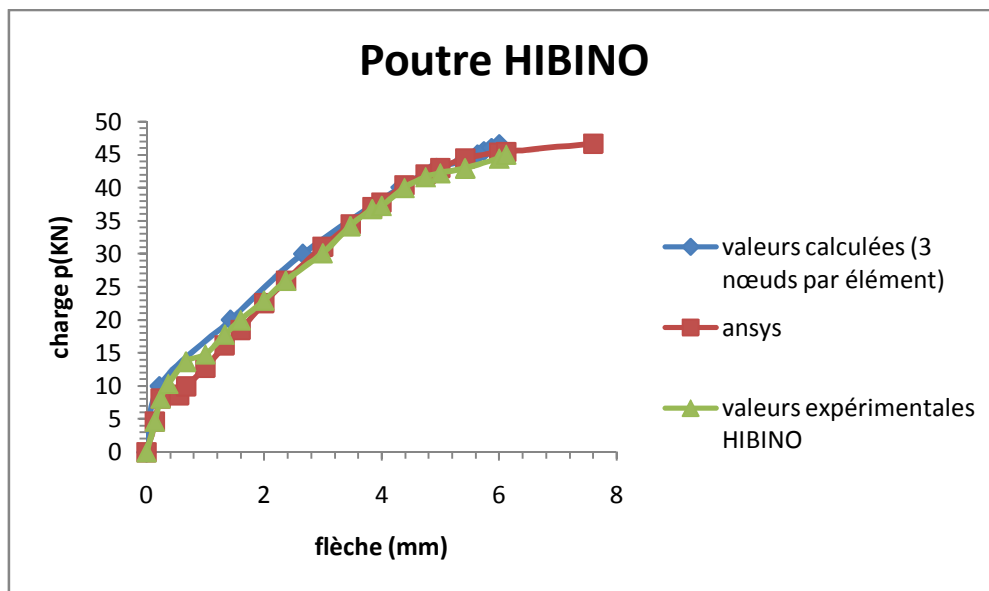
Les caractéristiques mécaniques du béton et de l'acier constituant la poutre de Hibino sont résumées dans le tableau (6.7) :

Béton			Armatures			
$E_b$ (MPa)	$f_{bc}$ (MPa)	$f_{bt}$ (MPa)	Barres	$E_a$ (MPa)	$f_{ae}$ (MPa)	$f_{au}$ (MPa)
35500	26.7	2.88	HA16	206000	396	396

**Tableau 6.7 :** Caractéristiques mécaniques des matériaux.

Dans cette poutre, nous avons effectuée un seul calcul en discrétisant la poutre en 6 éléments finis à trois nœuds.

Les courbes charge-flèche obtenues par le modèle proposé (3 nœuds par élément), Ansys et la courbe expérimentale respectivement sont montrées sur la figure (6.9) suivante :



**Figure 6.9 :** Comparaison des résultats de calcul aux résultats donnés par HIBINO.

- Le tableau (6.8) montre les valeurs ultimes de la charge  $p$  dans le calcul et dans l'essai.

	Valeurs ultimes de la charge $P$ (KN)				
poutre	Experimentale	Ansys	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (Ansys)	Exp/Cal (3 nœuds)
	45.04	46.67	46.5	0.96	0.97

**Tableau 6.8 :** Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.

- Le tableau (6.9) montre les valeurs ultimes de la flèche dans le calcul et dans l'essai.

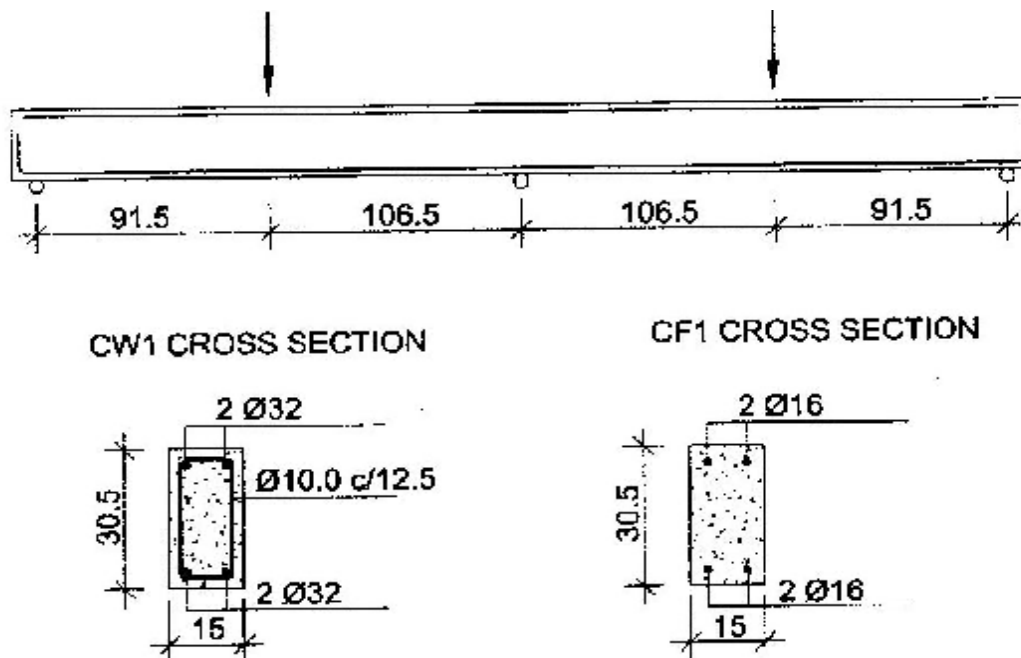
Valeurs ultimes de la flèche (mm)					
poutre	Experimentale	Asys	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (2 nœuds)	Exp/Cal (3 nœuds)
	6.12	7.6	6.00	0.81	1.02

**Tableau 6.9 :** Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.

On peut noter que le modèle développé simule correctement le comportement de la poutre de HIBINO en terme de charge et flèche, avec une erreur de 3% en chargement et 2% en terme de flèche. A noter que le calcul avec ANSYS donne une erreur de 4% en chargement et 19% en flèche.

### 6. 6 Essais de Khalifa :

Les essais ont été effectués sur deux poutres CW1 et CF1 en béton armé, de même dimension géométrique, condition d'appuis et type de chargement, mais un ferrailage longitudinal et transversale différent comme montré à la figure 6.10.



**Figure 6.10 :** Caractéristique géométrique, de chargement et de ferrailage des poutres CW1 et CF1 testée par Khalifa [25].

Les caractéristiques mécaniques du béton et de l'acier constituant les poutres CW1 et CF1 testé par Khalifa sont résumées dans le tableau (6.10) :

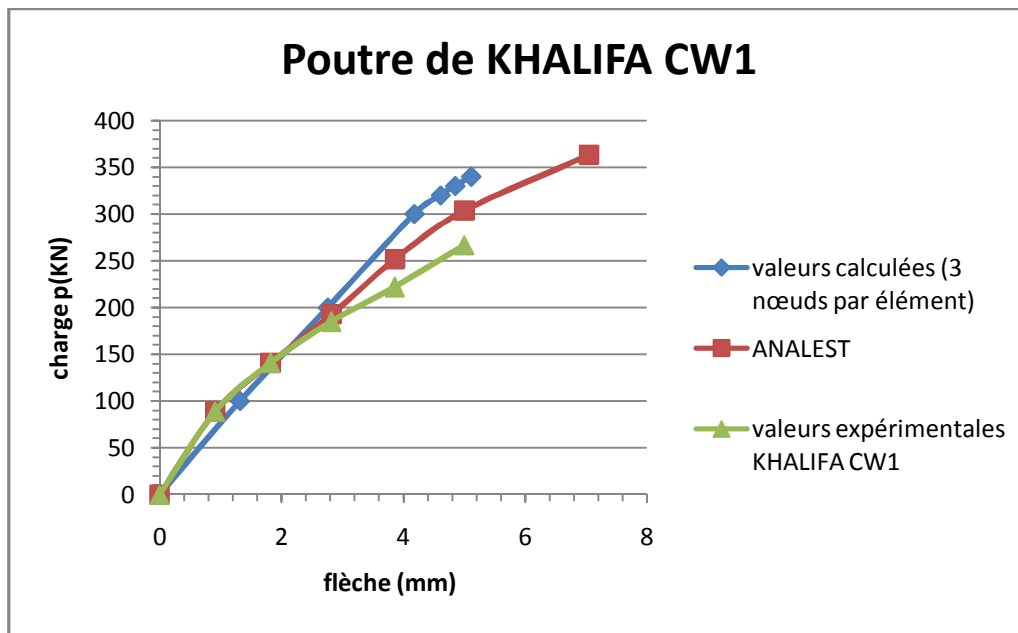
Béton				Armatures			
Poutre	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{tm}$ (MPa)	$\epsilon_0$	Barres	$E_s$ (MPa)	$f_y$ (MPa)	$\epsilon_u$
CW1	27.5	2.18	0.002	HA10	200000	350	0.1
CF1	50	3.64	0.003	HA16	200000	430	0.1
				HA32	200000	460	0.1

**Tableau 6.10 :** Caractéristiques mécaniques des matériaux.

**a) Poutre CW1 :**

Dans cette poutre, nous avons effectuée un seul calcul en discrétisant la poutre en 6 éléments finis à trois nœuds.

Les courbes charge-flèche obtenues par le modèle proposé, le programme «ANALEST » et la courbe expérimentale sont montrée sur la figure suivante :



**Figure 6.11 :** Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Khalifa (CW1).

- Le tableau (6.11) montre les valeurs ultimes de la charge P dans le calcul et dans l'essai.

	Valeurs ultimes de la charge P (KN)				
poutre	Expérimentale	ANALEST	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (ANALEST)	Exp/Cal (3 nœuds)
	267	363	340	0.74	0.79

**Tableau 6.11 :** Comparaison entre les charges ultimes expérimentales et de calcul.

- Le tableau (6.12) montre les valeurs ultimes de la flèche dans le calcul et dans l'essai.

Valeurs ultimes de la flèche (mm)					
poutre	Expérimentale	ANALEST	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (ANALEST)	Exp/Cal (3 nœuds)
5		7.04	5.11	0.71	0.98

**Tableau 6.12 :** Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.

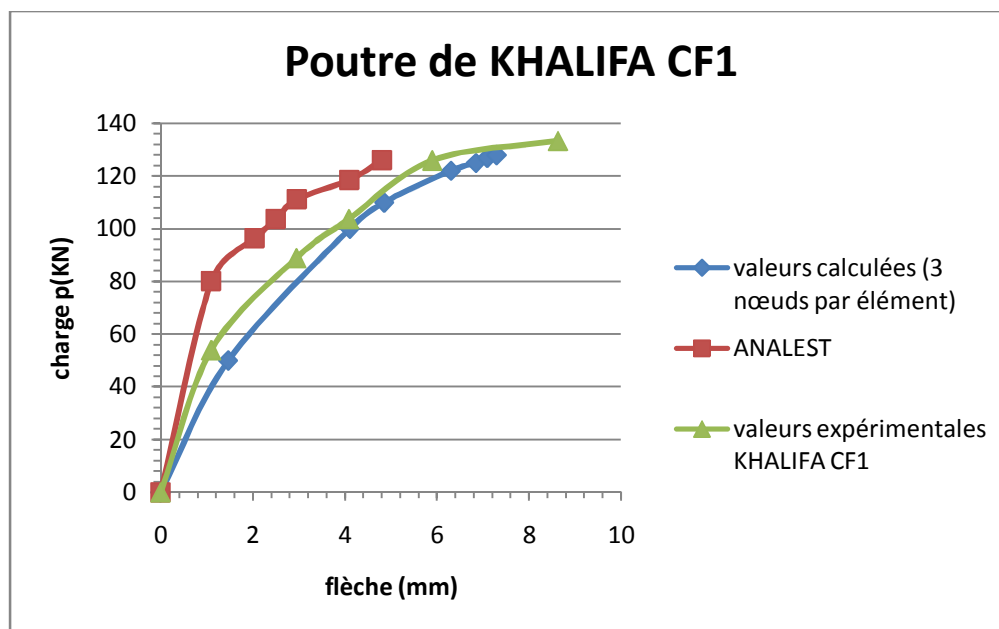
A partir de la comparaison des trois courbes, on peut faire les constatations suivantes :

- les deux calculs simulent correctement le comportement expérimental et ce jusqu'à une valeur de chargement d'environ 200kN.
- Au-delà de cette valeur, les trois courbes divergent légèrement.
- A la rupture, le calcul en utilisant des éléments à trois nœuds donne de meilleurs résultats que ceux obtenues par ANALEST (Avec une erreur de 21% contre 26% concernant la charge de rupture, et une erreur de 2% contre 29% concernant la flèche à la rupture).

**b) CF1 :**

Dans cette poutre, nous avons effectué un seul calcul en discrétisant la poutre en 6 éléments finis à trois nœuds.

La courbe charge-flèche obtenues respectivement par le modèle proposé, le programme «ANALEST » et la courbe expérimentale sont montrées sur la figure (6.12) suivante :



**Figure 6.12 :** Comparaison des résultats de calcul aux résultats expérimentaux donnés par le modèle de Khalifa (CF1).

- Le tableau (6.13) montre les valeurs ultimes de la charge P dans le calcul et dans l'essai.

Valeurs ultimes de la charge P (KN)					
poutre	Experimentale	ANALEST	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (ANALEST)	Exp/Cal (3 nœuds)
	133	125.92	128	1.06	1.04

**Tableau 6.13 :** Comparaison entre les charges ultimes expérimentale et de calcul.

- Le tableau (6.14) montre les valeurs ultimes de la flèche dans le calcul et dans l'essai.

Valeurs ultimes de la flèche (mm)					
poutre	Experimentale	ANALEST	Calculée à 3 nœuds par élément	Exp/Cal (ANALEST)	Exp/Cal (3 nœuds)
	8.6	4.8	7.3	1.79	1.17

**Tableau 6.14 :** Comparaison entre les flèches ultimes expérimentale et de calcul.

Il a été constaté que le programme développé (utilisant des éléments à 3 nœuds) simule très bien le comportement de la poutre mieux que le programme « ANALEST », avec une erreur de 4% contre 6% concernant le charge de rupture, et une erreur de 17% contre 79% en terme de flèche maximale.

### Conclusion :

Le modèle analytique développé dans le cadre de cette étude pour le calcul des poutres épaisses (poutre de Timoshenko), en tenant compte de l'effort tranchant est basé sur :

- la méthode des éléments finis.
- la discrétisation de la section transversale en multicouche horizontale.
- une procédure de résolution itérative pour chaque couche.

Le modèle développé utilise des lois de comportement traduisant l'affaiblissement du béton des bielles comprimées dû à la traction des armatures transversale, et la contribution du béton tendu entre les fissures à la résistance à l'effort tranchant.

Les résultats du modèle de poutre de Timoshenko ont montré un accord beaucoup plus étroit aux résultats expérimentaux par rapport à d'autres modèles.

## CHAPITRE 7:

### Conclusion Générale

Dans les structures en béton armé, les éléments structuraux peuvent être soumis simultanément à des sollicitations de flexion et d'effort tranchant. Dans ce cas, les déformations, les modes de fissuration et de rupture dus à l'effort tranchant peuvent être prépondérants.

L'objectif du présent travail est de contribuer à l'analyse et la modélisation des éléments en béton armé en tenant compte de l'effort tranchant.

Une formulation basée sur le modèle de la poutre épaisse de Timoshenko est présentée. Elle permet de tenir compte des déformations de cisaillement dans le comportement des éléments de type poutre. En se basant sur la méthode des éléments finis, on a élaboré un élément fini poutre à 3 nœuds ayant 9 degrés de liberté. Pour modéliser le comportement vis-à-vis de l'effort tranchant dans le domaine non linéaire (formation de fissuration inclinée répartie), on a associé à cet élément le modèle du champ de compression modifiée (MCFT) développé par Vecchio et Collins.

L'outil de calcul élaboré, dans le cadre de cette étude, consiste en un programme informatique « Poutre\_Timoshenko 3 », rédigé en fortran 90 et utilisant des éléments finis de type poutre de Timoshenko à 3 nœuds. Il permet la simulation du comportement non linéaire, en cisaillement et en flexion, des poutres en béton armé soumises à un chargement croissant jusqu'à rupture.

Ce programme est validé en considérant plusieurs exemples d'application et en utilisant les deux types d'élément poutre de Timoshenko :

- L'élément à 2 nœuds, avec une intégration réduite en un seul point de Gauss.
- L'élément à 3 nœuds, avec une intégration à 3 points de Gauss.

Ce dernier s'avère plus performant et permet d'obtenir des résultats nettement plus précis.

Par ailleurs, la comparaison des résultats des calculs (en utilisant des éléments à 3 nœuds) avec les résultats expérimentaux et également avec les résultats basés sur d'autres modèles semble très bonne.

En perspective, on propose d'appliquer la modélisation élaborée dans la présente étude pour la simulation du comportement des structures en portiques et également de l'adapter pour l'analyse des éléments de voiles en béton armé.

## **BIBLIOGRAPHIE :**

- [1] : M. BELAZOUGUI, le béton armé aux états limites, Théorie et Application, Office des Publications Universitaire, Réimpression 2000.
- [2] : Mattieu LANGNEL, Investigation Expérimentale et Théorique sur la performance de poutre en béton armé renforcées en cisaillement à l'aide de composites en PRF ancrés, Mémoire d'Ingénieur d'état, Montréal, le 10 Décembre 2010.
- [3] : A. FUENTES, le béton armé après fissuration, EDTIONS EYROLLES, PARIS 1980 .
- [4] : SAIB Nacera, prise en compte de l'effort tranchant dans la modélisation par élément finis des structures planes en béton armé, Mémoire de Magister, 2008.
- [5] : TADEUSZ GODYCKI-CWIRKO , le cisaillement dans le béton armé, DUNOD PARIS 1972.
- [6] : Panagiotis KOTRONIS, Cisaillement dynamique de murs en béton armé, modèles simplifiés 2D et 3D, thèse de Doctorat de l'école normale supérieur de CACHAN, 12 décembre 2000.
- [7] : Marie-Claude Guérin, Renforcement à l'effort tranchant de poutre en béton armé, Mémoire de Magister és Science (M.Sc) Mai 1998.
- [8] : Frank J Vecchio and Michael P.Collins, The Modified compression –field théory for reinforced concrete elements subjected to Shear, ACI journal, March-April 1986.
- [9] : KAOUANE Taoues, Modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé et précontraint, mémoire de Magister, 2011.
- [10] : Merabet Wided, Modélisation du comportement des poutres apres fissuration «tension stiffening Effect » , mémoire de Magister.
- [11] : Stefano Campana, Elément en béton armé soumis à une combinaison de flexion, Effort tranchant et forces de déviation, Novembre 2012.
- [12] : Hossein Mostaei, Frank J. Vecchio, and Toshimi Kabeyasawa, Deformation Capacity of Reinforced Concrete Columns, ACI STRUCTURAL JOURNAL, March-April 2009.
- [13] : Frank J. Vecchio and Michael P. Collins, Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression field theorie, ACI STRUCTURAL JOURNAL, May-June 1988.
- [14] : H Mostaei, F. J. Vecchio, and T. Kabeyasawa, Nonlinear displacement-based response Prediction of reinforced concrete columns, ENGINEERING STRUCTURES JOURNAL, March 2008.

- [15] : MEZIANE Roufida, Modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton armé et béton de fibres, par des éléments finis poutres, mémoire de Magister, 2008.
- [16] : Vecchio. F. J, Non linear finite Element Analysis of reinforced concrete Membranes, STRUCTURAL JOURNAL, Janvier-Février 1989
- [17] : SAAD Mohammed, Influence du pourcentage d'acier sur le comportement Post-fissuration du béton armé en traction, Thèse de Doctorat, 2011
- [18] : HYU-GYOUNG and FILIP C. FILIPPOU, Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic , Structural engineering, November 1990.
- [19] : Fatiha IGUETOULENE, Modélisation non linéaire des structures triangulées, Mémoire de Magister 2011.
- [20] : F . Gabrysiak, Matériaux\_les béton, chapitre 4.
- [21] : Jean Michel Torrenti, comportement multiaxial du béton Aspects expérimentaux et modelisation , Thèse de Doctorat 1987.
- [22] : Mohammed bénali benmansour, Modélisation du comportement cyclique alterné du béton armé. Application à divers essais statiques de poteaux, thèse de Doctorat, Janvier 1997.
- [23] : A . BELARBI, T.T.C. HSU, constitutive laws of Softened concrete in biaxial Tension-Compression, ACI Structural Journal, Septembre-Octobre, 1995.
- [24] : Sonia L Parvanova, Modelling the nonlinear Behavior of R/C beams with moderate Shear Span and without stirrups using Ansys, 1046 sofia
- [25] : Renata S . B . Stramandinoli et Henriette L . La Rovere, FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation, Engineering structures, 2011 Elsevier.
- [26] : Bross . A (2005), Simulation numérique Tridimensionnelle de la trempe, Mémoire de Magister, école nationale d'ingénieur de Saint Etienne, Lyon, France.
- [27] : F. J . Vecchio, Analysis of Shear Critical Reinforced concrete Beams, ACI Structural Journal, Juillet 2000.  
VECCHIO .F . J, M.B.EMARA, Shear déformation in reinforced concrete frames, ACI Structural Journal, Janvier-Fevrier 1992.
- [28] : KACHI.M.S, Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieur, Thèse de Doctorat, Novembre 2006.