

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI OUZOU**



**Faculté de Génie Electrique et de l'Informatique  
Département d'Electrotechnique**

# **MEMOIRE**

**DE FIN D'ETUDES  
en vue de l'obtention du Diplôme  
d'Ingénieur d'Etat en Electrotechnique**

**Option: Machines électriques**

## **Thème**

**Modélisation 2-D par Eléments finis des  
transformateurs de distribution par couplage  
fort Magnétique-Circuit Electrique et  
Magnétique-Densité de courant**

**Proposé et dirigé par :**

Mr: RACHEK M'HEMED

**Responsable du stage (Electro-Industrie):**

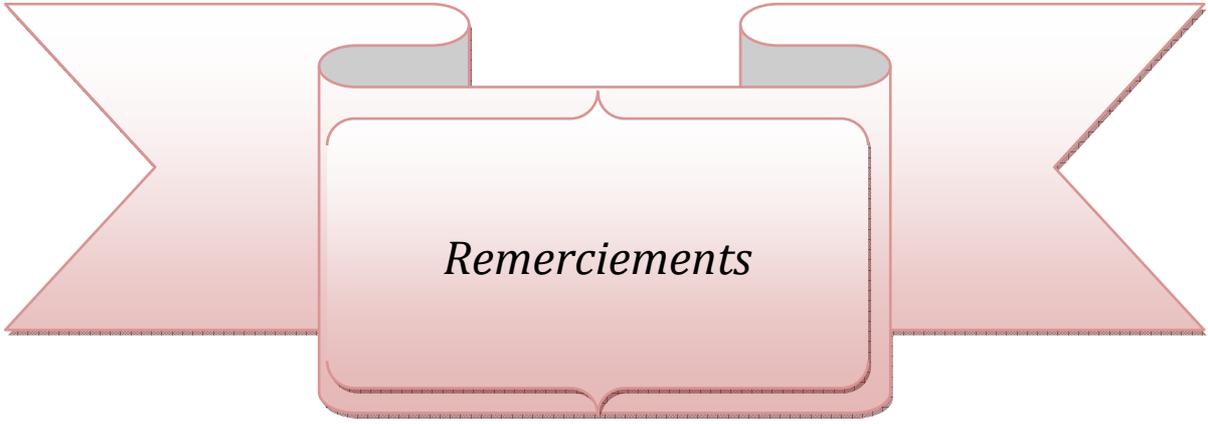
M<sup>me</sup>: SADI NADIA

**Réalisé par :**

M<sup>elle</sup>: CHERIF SALMA

Mr : OULD SLIMANE DJAFAR

**Promotion: 2008/2009**



*Remerciements*

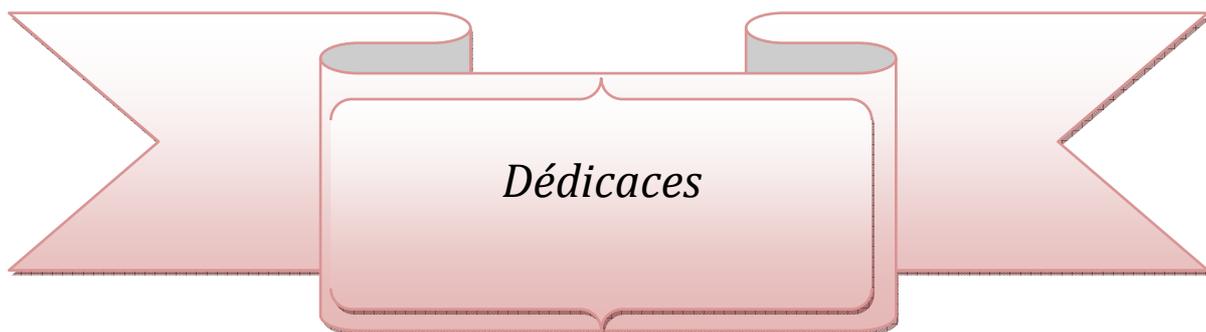
## **Remerciements**

Aux termes d'un semestre de travail, nous sommes heureux de pouvoir exprimer toute notre gratitude envers notre promoteur

**Mr. Rachek M'hemed**, Docteur en Electrotechnique, Chargé de cours à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour son encadrement, pour son soutien et ses précieux conseils qui furent une aide précieuse. Nous n'aurions certainement pas entrepris ce Mémoire s'il ne nous avait pas fait découvrir et proposer ce sujet passionnant. Nous lui sommes reconnaissant de nous avoir bénéficié de ses connaissances, de sa compétence ainsi que pour toute la documentation qu'il a mise à notre disposition. Qu'il soit assuré de notre entière gratitude.

Notre profonde gratitude envers **M<sup>me</sup>. Sadi Nadia**, Chef de service contrôle qualité à l'Electro-Industrie d'Azazga (Tizi-Ouzou) qui s'est toujours montrée présente à nos différentes sollicitations.

Nos remerciements vont également à l'adresse des membres du jury pour l'honneur qu'il nous ferons en acceptant d'examiner notre travail.



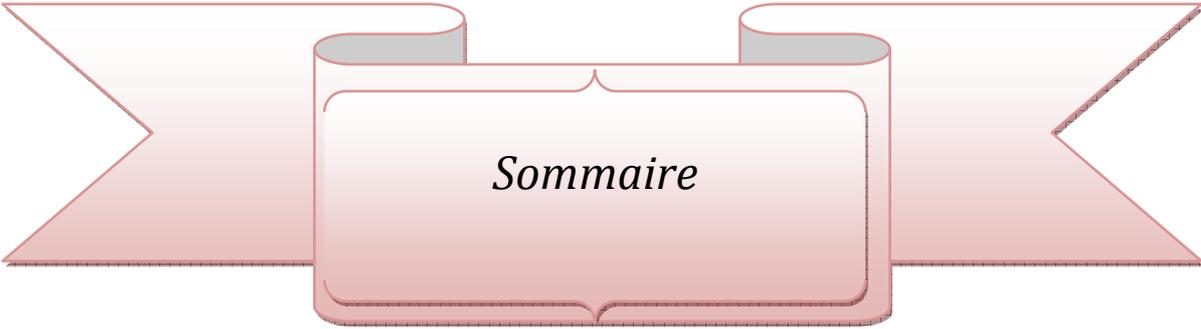
*Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail à:  
Mes parents, ma très chère mère pour son  
amour pour sa tendresse et ses encouragements.  
Mes frères et leurs femmes, mes sœurs  
et leurs maris.  
Tous mes amis(es).  
Tous ceux qui me connaissent  
de près ou de loin.*

*Salma*

*Je dédie ce modeste travail à:  
Mes très chers parents, en témoignage  
d'affection et de reconnaissance pour leurs  
sacrifices, leurs encouragements et leurs  
soutiens  
Mes deux frères, Mes sœurs et leurs maris.  
Mes cousins et cousines et leurs familles.  
Tous mes amis (es).  
Tous ceux qui me connaissent  
de près ou de loin.*

*Djafar*



*Sommaire*

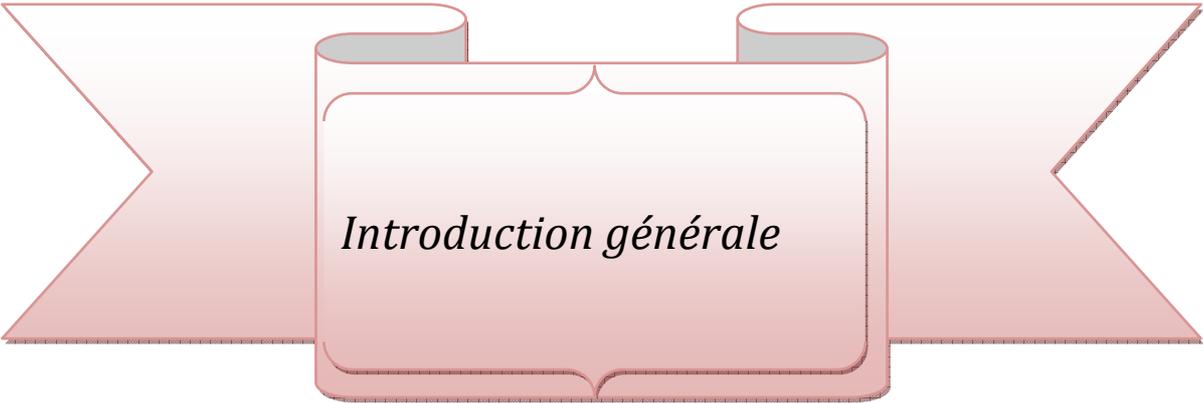
# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I : Construction du transformateur et état de l'art de sa modélisation</b>	
<b>Introduction</b> .....	3
<b>I.1 Construction du transformateur</b> .....	3
I.1.1 Principe de fonctionnement.....	3
I.1.2 Constitution d'un transformateur .....	4
I.1.2.1 Partie active.....	5
I.1.2.1.a Circuit magnétique .....	5
I.1.2.1.b Les enroulements .....	6
I.1.2.2 Partie constructive .....	8
I.1.2.2.1 La cuve .....	8
I.1.2.2.2 Le couvercle .....	8
I.1.2.2.3 Les traversées.....	9
I.1.3 Couplage des enroulements .....	9
I.1.4 Isolement.....	9
I.1.4.1 Isolement des conducteurs.....	10
I.1.4.2 Isolement des bobines .....	10
<b>I.2 Etat de l'art de la modélisation des transformateurs</b> .....	11
I.2.1 Le schéma équivalent en tant que modèle .....	11
I.2.2 Caractéristiques d'un schéma équivalent.....	11

I.2.3 Schémas équivalents des transformateurs .....	12
I.2.3.1 Phénomènes magnétiques.....	12
I.2.3.2 Phénomènes dissipatifs .....	13
I.2.3.3 Phénomènes électrostatiques.....	14
I.2.3.4 Schéma équivalent selon l'hypothèse de Kapp.....	15
I.2.4 Equations générales du transformateur.....	16
I.2.4.1 Equation électrique au primaire.....	16
I.2.4.2 Equation électrique au secondaire .....	16
I.2.4.3 Equation du flux .....	17
I.2.5 Paramètres industriels d'un transformateur .....	17
I.2.5.1 Les paramètres techniques .....	17
I.2.5.1.a La puissance nominale .....	17
I.2.5.1.b La tension nominale et le courant nominal .....	18
I.2.5.1.c La tension de court circuit ( $U_{cc}$ ).....	18
I.2.5.1.d Les pertes à vide.....	18
I.2.5.1.e Les pertes en court circuit .....	20
I.2.3.1.f Le rapport de transformation .....	20
I.2.5.2 Les paramètres d'exploitation .....	21
I.2.6 Les différents essais effectués sur les transformateurs .....	21
I.2.6.1 Essais individuels (ou de routine).....	21
I.2.6.1.a Mesure de la résistance des enroulements .....	21
I.2.6.1.b Mesure de rapport de transformation et vérification du groupe de couplage .....	22
I.2.6.1.c Mesure des pertes et du courant à vide .....	22
I.2.6.1.d Essai en court circuit.....	22
I.2.6.1.e Essai diélectrique.....	22

I.2.6.2 Essais de type .....	23
I.2.6.2.a Essai d'échauffement.....	23
I.2.6.2.b Essai de choc en onde pleine ou en onde coupée .....	24
I.2.6.3 Essais spéciaux .....	24
I.2.4.3.a Mesure de bruit .....	24
<b>Conclusion.....</b>	<b>24</b>
<b><u>Chapitre II : Modélisation électromagnétique des transformateurs</u></b>	
<b>Introduction.....</b>	<b>25</b>
<b>II.1 Equations de Maxwell.....</b>	<b>25</b>
<b>II.2 Relations constitutives et la loi d'ohm .....</b>	<b>26</b>
<b>II.3 Equation de continuité.....</b>	<b>28</b>
<b>II.4 Conditions d'interfaces .....</b>	<b>28</b>
<b>II.5 Hypothèses simplificatrices.....</b>	<b>29</b>
II.5.1 Absence des courants de déplacement.....	29
II.5.2 Absence de charge d'espace .....	29
<b>II.6 Equations de Maxwell appliquées à l'électrotechnique.....</b>	<b>30</b>
<b>II.7 Modèles d'équations électromagnétiques en potentiel vecteur magnétique<math>\vec{A}</math> ...</b>	<b>30</b>
II.7.1 Présentation du dispositif d'étude.....	30
II.7.2 Définition des potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique.....	31
II.7.3 Modèle magnétodynamique.....	32
II.7.4 Modèle magnétostatique.....	33
<b>II.8 Conditions aux limites .....</b>	<b>34</b>
<b>Conclusion.....</b>	<b>35</b>
<b><u>Chapitre III : Formulations finis et couplage électrique-magnétique</u></b>	
<b>Introduction .....</b>	<b>36</b>

<b>III.1 La méthode des éléments finis</b> .....	36
<b>III.2 Principe de la méthode des éléments finis</b> .....	37
<b>III.3 Principales étapes de résolution par la méthode des éléments finis</b> .....	37
<b>III.4 Discrétisation du domaine d'étude</b> .....	38
<b>III.5 La fonction d'approximation</b> .....	38
<b>III.6 La formulation intégrale</b> .....	38
III.6.1 Formulation résidus pondérés .....	39
<b>III.7 Formulation éléments finis des problèmes électromagnétiques</b> .....	40
III.7.1 Modèle général cartésien bidimensionnel .....	40
III.7.2 Problème magnétodynamique harmonique .....	41
III.7.3 Problème magnétodynamique transitoire .....	44
III.7.3.1 Discrétisation temporelle .....	45
<b>III.8 Couplage magnétique-électrique</b> .....	47
III.8.1 Couplage magnétique-électrique à travers la densité de courant.....	47
III.8.1.1 Modèle de couplage $A - J$ en régime harmonique.....	47
III.8.1.2 Modèle de couplage $A - J$ en régime transitoire .....	50
III.8.2 Couplage magnétique-circuit électrique .....	52
<b><u>Conclusion</u></b> .....	58
<b><u>Chapitre IV: Application et validation par l'étude électromagnétique d'un transformateur</u></b>	
<b><u>Introduction</u></b> .....	59
<b>IV.1. Présentation du transformateur étudié</b> .....	60
IV.1.1 Les caractéristiques géométriques .....	60
IV.1.2 Les propriétés électriques et magnétiques .....	61
<b>VI.2 Implémentation de la géométrie et maillage avec les conditions aux limites</b> .....	62
<b>VI.3 Modélisation couplée 2-D du transformateur</b> .....	63
<b>VI.3.1 Modélisation du transformateur en régime harmonique</b> .....	63
<b>VI.3.2 Modélisation du transformateur en régime transitoire</b> .....	71
<b>Conclusion</b> .....	87
<b>Conclusion générale</b> .....	88



*Introduction générale*

Le transformateur est l'appareil qui a joué le rôle le plus décisif dans le développement de l'électrotechnique ; son invention est due à L. Gaulard aux alentours des années 1880. Il n'est pas du tout surprenant de voir qu'il fait encore l'objet de nombreux travaux de recherche visant à améliorer sa conception et ses performances.

Pour décrire de façon très fine et de manière générale son fonctionnement, il est indispensable de considérer l'interaction entre les champs magnétiques et électriques. Ceci constitue un couplage physique fort, car les grandeurs électriques et magnétiques sont significativement dépendantes les unes des autres. Ce présent travail a pour objectif la modélisation par la méthode des éléments finis d'un transformateur de distribution en régime transitoire et harmonique en tenant compte de l'anisotropie magnétique.

Cette modélisation est menée dans un premier temps par la description du transformateur à travers un ensemble de modèles mathématiques exprimés par des équations aux dérivées partielles (E.D.P) régissant les phénomènes électromagnétiques. Les modèles obtenus basés sur les équations de Maxwell sont complétés par la prise en compte des caractéristiques des matériaux et d'éventuelles conditions aux limites. Nous avons opté pour la méthode des éléments finis (M.E.F) pour la résolution des modèles magnéto-statiques et magnéto-dynamiques en potentiel vecteur magnétique, établis dans les différentes parties du transformateur en bidimensionnel. Les formulations éléments finis des modèles électromagnétiques mis en œuvre sous environnement MATLAB sont couplées dans un premier modèle de couplage alimenté en courant à l'équation de la densité de courant totale dans les enroulements (modèle A-J). Dans un second modèle alimenté en tension, l'équation en potentiel vecteur magnétique A est couplée aux équations des circuits électriques au primaire et au secondaire faisant intervenir leurs paramètres électriques filaires (modèle A-U).

La finalité est la détermination des grandeurs locales tel que le potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique et les grandeurs globales tel que les pertes Joule dans les enroulements, les pertes fer dans les tôles magnétiques ainsi

que les courants de source et les courants induits aussi bien qu'en alimentation en tension qu'en courant et ceci aux différents régimes de fonctionnement du transformateur (à vide, en court-circuit et en charge).

Le mémoire est constitué de quatre chapitres:

Le premier est consacré à la présentation du transformateur en rappelant les différentes équations régissant son fonctionnement ainsi que les différents schémas équivalents.

Le second chapitre fait l'objet de l'analyse électromagnétique dans la perspective de la modélisation des transformateurs.

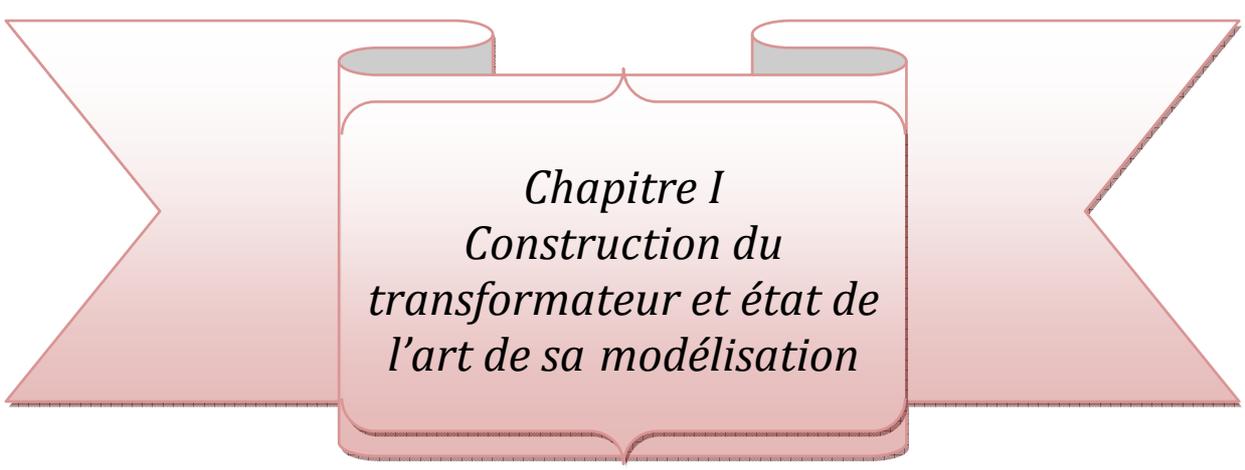
La représentation de la méthode des éléments finis et le couplage des phénomènes électriques et magnétiques fait l'objet du troisième chapitre.

Le dernier chapitre intervient pour clôturer l'étude et la rattacher au but pour lequel est faite: Modélisation 2-D par élément finis des transformateurs de distribution par couplage fort Magnétique-Circuits Electriques et Magnétique-Densité totale de courant. Pour se faire les modèles de couplage magnéto-électrique sont implémentés sous MATLAB. Deux applications seront présentées

- Modélisation du transformateur en régime harmonique.
- Modélisation du transformateur en régime transitoire.

Nous terminons notre présente étude par une conclusion générale et des perspectives.

---

A decorative banner with a central text box. The banner is light red with a darker red gradient at the bottom. The central text box is white with a red border and a drop shadow. The text is in a serif font and is centered.

*Chapitre I*  
*Construction du*  
*transformateur et état de*  
*l'art de sa modélisation*

---

## Introduction

L'utilisation des transformateurs s'est généralisée rapidement suivant le rythme du développement industriel. La distribution de l'énergie électrique, qu'elle soit domestique ou industrielle, se fait généralement sous tension faible ou moyenne (220V, 380V ou 25kV) pour des raisons de commodité d'emploi et de sécurité. En revanche, le transport se fait sous tension élevée pour diminuer la valeur du courant de ligne et donc les pertes Joule dans les câbles. Pour cela, il est nécessaire, à l'entrée d'une usine ou d'un bâtiment habitable, de disposer d'une machine permettant d'adapter le niveau de la tension de distribution aux dispositifs qui vont utiliser l'énergie électrique. C'est le rôle des transformateurs de distribution.

Selon la définition tirée du vocabulaire électrotechnique international, « le transformateur est un appareil statique à induction électromagnétique destinée à transformer un système de courants variables en un ou plusieurs systèmes de courants variables d'intensité et de tension généralement différentes mais de même fréquences » [Barret-2002], donc cet appareil effectue un transfert énergétique par voie électromagnétique.

Nous allons parcourir dans ce chapitre la représentation générale du transformateur à travers sa topologie géométrique d'une part et en définissant les différents phénomènes électrique et magnétique régissant son fonctionnement d'autre part.

## I.1 Construction du transformateur

### I.1.1 Principe de fonctionnement

Soit un circuit magnétique constitué par des tôles empilées et entouré par deux bobines B1 et B2. Connectons la bobine B1 aux bornes d'un générateur de courants alternatifs.

Cette bobine B1 que nous appellerons bobine primaire fonctionnant comme une inductance, et alors traversée par un courant primaire, lequel crée un flux. Ce flux variable embrassé par la bobine B2 dite bobine secondaire détermine dans celle-ci la production d'une F.E.M induite à la même fréquence.

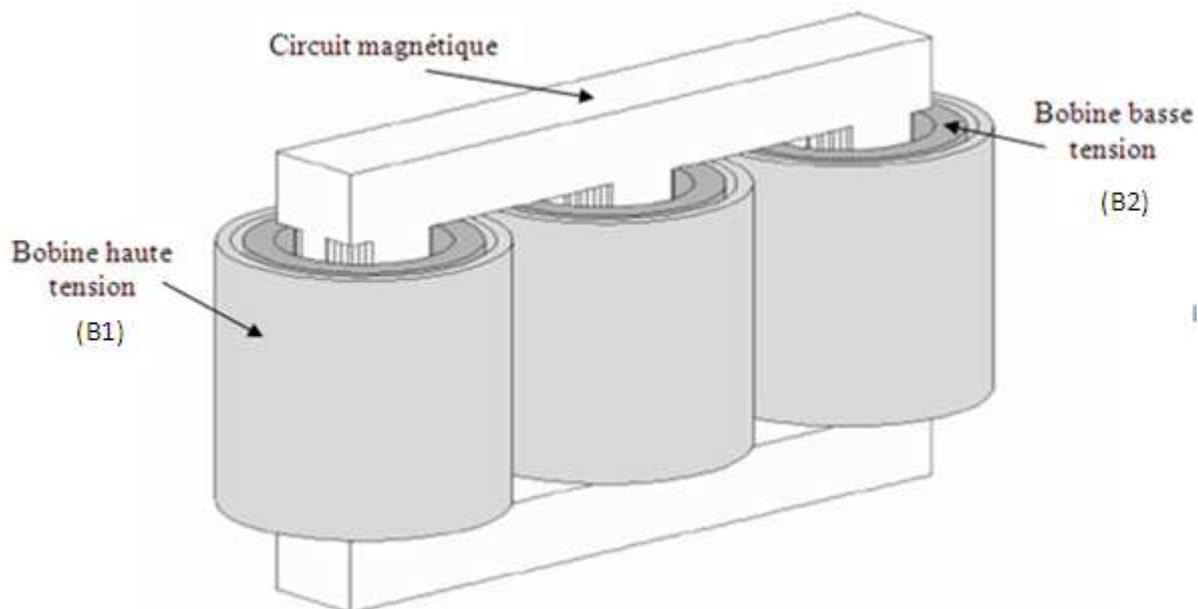
Si on branche aux bornes de B2 un récepteur quelconque, un courant alternatif parcourt le circuit que nous appellerons secondaire. Donc ; par induction mutuelle, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'un flux magnétique, une puissance électrique alternative passe d'un circuit « primaire » à un circuit « secondaire ».

### I.1.2 Constitution d'un transformateur

Le transformateur est une machine d'induction qui comporte deux parties essentielles :

- Partie active constituée par : le circuit magnétique et les enroulements primaire et secondaire
- Partie constructive formée : de la cuve, du couvercle et des traversées.

La figure I.1 représente un schéma d'un transformateur de puissance à colonne.



**Figure I.1** : Schéma d'un transformateur de puissance à colonne

### I.1.2.1 Partie active

Les composantes actives du transformateur assurant la conversion du courant sont le circuit magnétique et les enroulements.

En matière de conception électromécanique des appareils de grandes puissances, on rencontre principalement les technologies suivantes [Pastouriaux-1965] :

**Pour le circuit magnétique** : les transformateurs peuvent être à colonnes ou cuirassés.

**Pour les enroulements** : les bobinages peuvent être en couches (concentriques) ou en galettes (empilés).

#### I.1.2.1.a Circuit magnétique

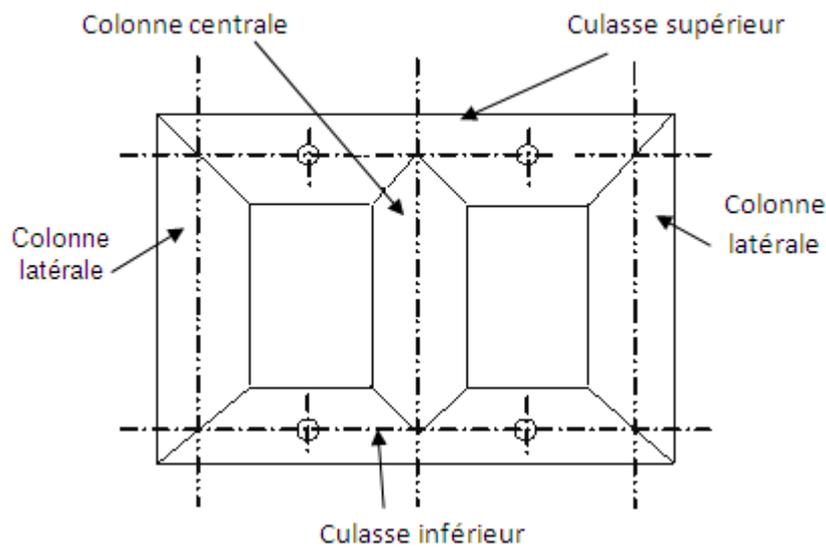
Le circuit magnétique est un assemblage de tôles fines d'épaisseur moyenne de quelques dixièmes de millimètres disposées dans un même plan parallèlement et perpendiculairement les unes aux autres [Anthony-2006].

La fonction principale du circuit magnétique est de canaliser le flux magnétique produit par l'enroulement primaire pour qu'il y ait un trajet minimal et un facteur de couplage maximal avec l'enroulement secondaire et sert comme support aux enroulements [Bouchard- 1998].

Pour une meilleure efficacité, la tôle du circuit magnétique doit :

- Etre fabriquée en matériau ferromagnétique à haute perméabilité pour une transformation suffisamment efficace de l'énergie électrique.
- Etre isolé pour diminuer les courants de Foucault.
- Etre à grain orientés pour avoir une perméabilité plus élevées dans la direction du flux.

Le noyau présente trois colonnes et deux culasses dans les transformateurs triphasés tels que le montre la **figure I.2**



**Figure I.2 :** Vue de face d'un noyau

#### I.1.2.1.b Les enroulements

Les enroulements sont formés d'un matériau bon conducteur, en cuivre ou en aluminium, de section circulaire ou rectangulaire. Ils sont généralement cylindriques disposées concentriquement sur la même colonne, ils sont à couches ou à galettes. Pour des raisons économiques, les enroulements doivent satisfaire plusieurs conditions:

- L'enroulement doit être économique en tenant compte du prix du cuivre et du rendement du transformateur.
- Il faut diminuer les intervalles entre les deux enroulements pour diminuer le champ de dispersion magnétique ce qui a pour effet de réduire la consommation de la puissance active.
- Les résistances des enroulements doivent être suffisamment faibles pour réduire les pertes d'énergie qui se dégage sous forme calorifique.
- L'enroulement doit être isolé avec un isolant résistant à l'évaluation de la température, les courts-circuits et les surtensions lors du fonctionnement.

Les conducteurs peuvent être de section circulaire ou carré. A l'électro-industrie d'AZAZGA (TIZI-OUZOU), le choix des enroulements primaire et secondaire a été adapté comme suit : conducteurs ronds, vernis et isolés au papier pour la haute tension et conducteurs méplats en cuivre pour la basse tension.

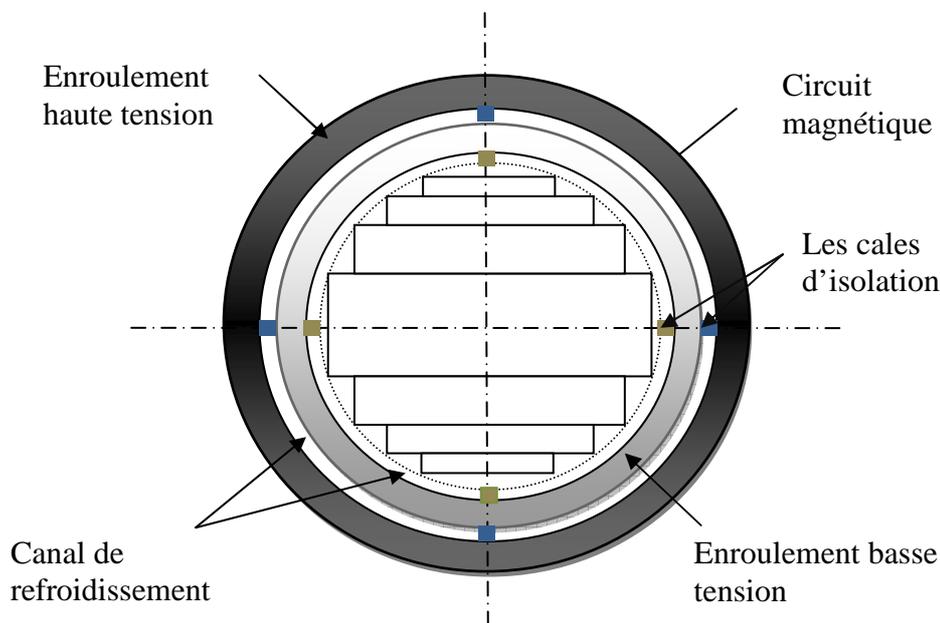
➤ **Enroulement primaire:**

Le rôle de l'enroulement primaire est la création du champ alternatif. La tension à laquelle il est soumis est élevée et l'intensité de courant qui le parcourt est faible, ce qui impose une section faible et un nombre de spires important.

➤ **Enroulement secondaire:**

Le rôle de l'enroulement secondaire est la production du courant induit, celui-ci se caractérise par une forte intensité. Cette caractéristique impose une section des conducteurs relativement importante et un nombre de spires limité.

La **Figure I.3** représente la coupe d'une colonne d'un transformateur avec les deux enroulements.



**Figure I.3 :** Coupe d'une colonne avec les deux enroulements

### **I.1.2.2 Partie constructive**

En plus de la partie active, le transformateur comprend une série d'éléments mécaniques appelés pièces constructives, destinée à la fixation et au refroidissement de la partie active et au branchement des enroulements sur le réseau électrique, elles se résument ainsi:

#### **I.1.2.2.1 La cuve**

En plus de son rôle de réservoir au liquide diélectrique, la cuve assure le maintien mécanique du circuit magnétique et des enroulements. Elle épouse naturellement le contour de la partie active et minimise ainsi le volume d'huile donc également les coûts et la masse du transformateur.

Enfin, à la base de celle-ci des shunts magnétiques permettent de canaliser partiellement les flux de fuites [Anthony-2006].

La cuve est équipée de divers dispositifs dont les crochets, les galets, les vannes, et la plaque signalétique. Par ailleurs, elle doit répondre aux exigences suivantes:

- Résistance mécanique et rigidité nécessaire pour éviter toute déformation sous l'effet du poids de la partie active, de l'huile et des charges.
- Bonne étanchéité.
- Grande surface de contact avec l'air pour faciliter le refroidissement.

Le type de cuves qui nous parait la mieux adaptée est la cuve à ailettes.

#### **I.1.2.2.2 Le couvercle**

Le rôle du couvercle est d'assurer la fermeture de la cuve, par ailleurs, il sert de support aux accessoires tels que les traversées. Il est réalisé en acier muni de cavités, de trous et d'autres accessoires pour la fixation des appareils de protection et des isolateurs de traversée qui sont de 3(trois) d'un côté du couvercle (primaire) et de 3(trois) de l'autre côté (secondaire).

### **I.1.2.2.3 Les traversées**

Les enroulements sont reliés aux circuits extérieurs à travers les traversées qui permettent le passage des conducteurs à travers le couvercle. Ce sont des tubes isolants en porcelaines fixés sur le couvercle, Leurs formes et leurs dimensions sont très variées, elles sont fonction de la tension, la puissance et l'utilisation du transformateur [Kostenko-1979].

### **I.1.3 Couplage des enroulements**

Les bobines qui se trouvent sur les différentes colonnes et appartenant au même enroulement, sont connectées entre elles de telle sorte à constituer un groupe de connexion. Le choix du couplage dépend de l'utilisation du transformateur, dans le cas où il est utilisé pour la distribution, le choix repose sur les remarques suivantes:

Présence de fil neutre coté BT.

Présence de fil neutre coté HT.

Adoption de couplages différents pour les deux enroulements (BT et HT).

Le triangle (D), l'étoile (Y), ou le zigzag (Z), sont les connexions couramment utilisées dans les réseaux électriques. Plusieurs combinaisons distinctes de ces couplages sont disponibles pour les enroulements primaires et secondaires. Les plus courantes pour le continent européen sont les couplages  $Yy0$ ,  $Dy11$ ,  $Yz11$ ,  $Yd11$  où le nombre traduit l'indice horaire, image du déphasage entre les tensions primaires et secondaires [Anthony-2006].

### **I.1.4 Isolement**

L'isolement de la partie active est d'une importance majeure et déterminante pour le fonctionnement du transformateur. Pour cela les conducteurs, les bobines et les connexions doivent être isolées entre eux, avec la masse, le circuit magnétique, la cuve et le couvercle.

### I.1.4.1 Isolement des conducteurs

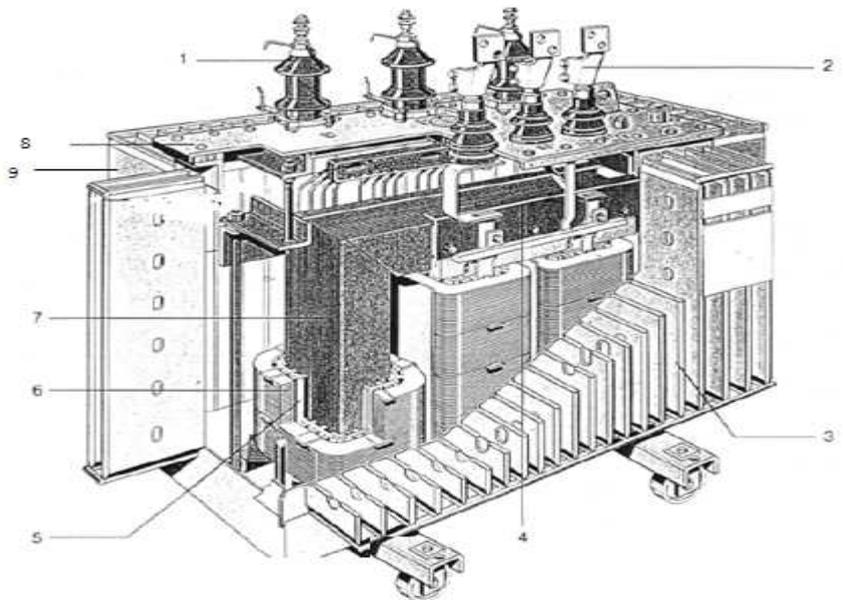
L'isolement des spires est réalisé avec du vernis ou du papier ou les deux en même temps.

### I.1.4.2 Isolement des bobines

L'isolation des bobines basse tension du circuit magnétique est réalisée par un tube isolant en presspahn ou en bakelisé avec ou sans cales, monté sur la colonne du circuit magnétique. Entre bobines basse tension et haute tension, l'isolement se fait à l'aide d'un tube en papier bakelisé avec cales. Entre bobines haute tension voisines, on utilise un écran plan presspahn ou en papier bakelisé qui est fixé à chaque angle. Enfin entre bobines et culasse l'isolement se fait à l'aide des cales, en bois imprégné et de cornières en presspahn rejoignant les tubes écrans. L'isolement est renforcé par imprégnation dans l'huile.

La **figure I.4** représente un schéma de l'extérieur d'un transformateur qui permet de voir les différents éléments constituant le transformateur :

1. Traversée haute tension
2. Traversée basse tension
3. Ailettes de refroidissement
4. Barre de fixation
5. Isolation
6. Enroulement
7. Empilage de tôles
8. Le couvercle
9. La cuve



**Figure I.4** : Schéma de l'extérieur d'un transformateur [ ]

## I.2 Etat de l'art de la modélisation des transformateurs

Il existe à l'heure actuelle trois niveaux de modélisation ; la modélisation par calcul du champ électromagnétique qui repose sur la résolution numérique par éléments finis des équations de Maxwell. La modélisation par circuit magnétique équivalent, faisant intervenir des grandeurs obtenues par intégration des variables B et H qui sont le flux magnétique  $\phi$  et la différence du potentiel magnétique scalaire  $\varepsilon$ . La troisième et dernière méthode concerne la modélisation par schéma électrique équivalent, dite analytique. Dans ce type de modélisation on ne fait intervenir que les grandeurs électriques globales (tension, courant, les résistances, les inductances propres et les inductances mutuelles).

Les deux dernières méthodes de modélisation citées sont les moins précises du fait qu'elles ne peuvent prendre en considération la saturation que d'une manière globale, cependant elles sont d'une importance considérable pour la compréhension du fonctionnement des appareils électromagnétique. La modélisation par calcul de champs reste la méthodologie la plus précise, elle est donc réservée pour des études plus fines des performances des systèmes électromagnétiques [Bouali-2007].

### I.2.1 Le schéma électrique équivalent en tant que modèle

Le but d'un schéma équivalent, dans le cadre de notre travail, est de reproduire certains comportements d'une pièce magnétique. Cette définition insiste par elle-même sur le fait qu'on ne peut reproduire tous les aspects d'une pièce réelle.

Une première tâche est donc de cerner les effets à modéliser en fonction de l'application à laquelle on destine le schéma électrique [Robert-1999].

### I.2.2 Caractéristiques d'un schéma équivalent

Il ne suffit pas d'élaborer un schéma équivalent et de connaître son champ d'application ; il faut encore lui associer une méthode pour identifier ses différents éléments à partir de la pièce réelle ou d'une simulation par calcul numérique.

On peut donc dire qu'un schéma équivalent se caractérise par sa structure et les éléments qu'il comporte, mais aussi:

- par les phénomènes qu'il prend ou ne prend pas en compte,
- par les approximations et hypothèses sur lequel il est basé,
- par le champ (domaine) d'application concerné dans lequel il est valable,
- et par la méthode d'identification qui l'accompagne.

### I.2.3 Schémas équivalents des transformateurs

Nous allons présenter quelques exemples de schémas qui vont prendre en considération trois types de phénomènes à modéliser, à savoir les effets magnétiques (modéliser par des coupleurs et des inductances), dissipatifs (résistances) et électrostatiques (capacités).

#### I.2.3.1 Phénomènes magnétiques

L'élaboration d'un schéma équivalent suppose de passer d'un problème géométrique décrit dans un espace à deux ou à trois dimensions (ce que nous appelons un modèle "spatial") à seulement quelques grandeurs caractéristiques: les éléments localisés d'un schéma électrique. Dans un premier temps, nous cherchons uniquement à représenter les phénomènes magnétiques ou "inductifs", c'est-à-dire le fait qu'une variation du flux embrassé par un conducteur induit dans celui-ci une force électromotrice.

Le flux embrassé dépend précisément des caractéristiques géométriques et physiques (ici la perméabilité) du problème. Dans un matériau linéaire, celles-ci peuvent être résumées en un coefficient d'inductance  $L$ , constant liant le flux au courant qui lui donne naissance

$$\Phi = L \cdot I \quad (\text{I. 1})$$

Plus précisément, l'inductance est proportionnelle au carré du nombre de tours de l'enroulement ( $N$ ) et inversement proportionnelle à la réluctance [Robert-1999]:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (\text{I. 2})$$

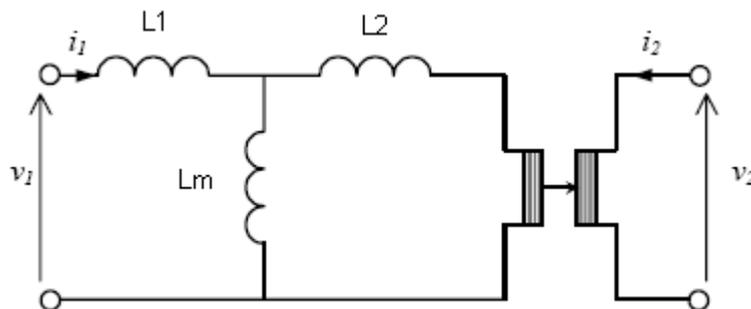
Cette réluctance est l'analogie magnétique de la notion de résistance. Elle vaut classiquement pour un tube de flux de longueur  $l$  et de section  $S$  constante:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu \cdot S} \quad (\text{I. 3})$$

C'est donc bien cette dernière grandeur qui permet finalement la traduction d'un phénomène spatial en une seule grandeur caractéristique, propre au modèle considéré. Certains schémas sont d'ailleurs basés sur la décomposition du problème géométrique en réluctances.

La fonction première du transformateur est d'assurer un couplage entre ses deux enroulements, couplage qui trouve son origine dans l'existence d'un flux commun à ceux-ci. Le couplage est parfait lorsque la totalité du flux est commun aux deux enroulements. On préfère habituellement utiliser pour un transformateur à deux enroulements le schéma classique de la **figure I.5**.

Celui-ci est construit autour d'un coupleur (transformateur parfait) auquel on ajoute des éléments parasites: une inductance de magnétisation  $L_m$  et deux inductances de fuite,  $L_1$  et  $L_2$  respectivement au primaire et au secondaire.



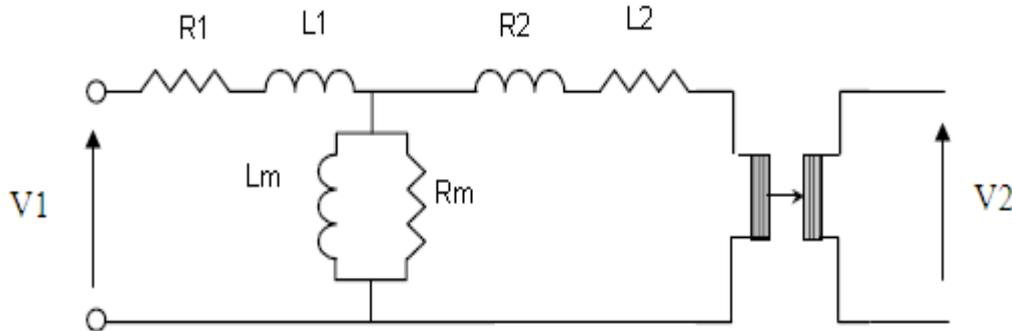
**Figure I.5** : Schéma équivalent de base d'un transformateur

### I.2.3.2 Phénomènes dissipatifs

En plus des phénomènes magnétiques, un schéma équivalent doit également modéliser les effets dissipatifs dans le transformateur, à savoir les pertes cuivre et les pertes fer.

Dans le schéma équivalent classique, sont introduites quelques résistances supposées d'interprétation physique aisée.

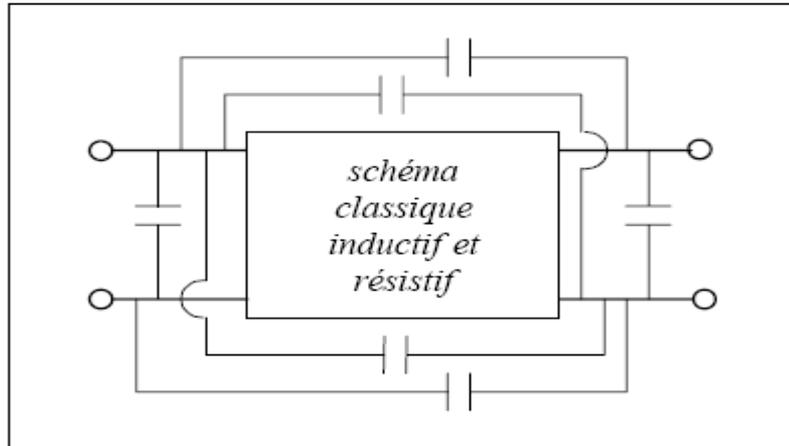
Pour les pertes cuivre par exemple, on introduit typiquement une résistance série dans chaque enroulement respectivement  $R_1$  pour le primaire et  $R_2$  pour le secondaire. Les pertes fer sont quant à elles le plus souvent modélisées par une simple résistance  $R_m$  en parallèle sur l'inductance de magnétisation comme à la **figure I.6** [Robert-1999]:



**Figure I.6:** Schéma classique complété pour tenir compte des effets dissipatifs

### I.2.3.3 Phénomènes électrostatiques

Les enroulements n'étant rien d'autre que des conducteurs proches portés à des potentiels différents, ils introduisent des effets capacitifs dont les principales manifestations sont des résonances avec les inductances du transformateur. Dans le cas des fréquences élevées, il n'est plus possible de négliger ces effets. Le schéma équivalent doit en tenir compte notamment pour l'étude des alimentations résonantes et de la compatibilité électromagnétique. La solution classiquement rencontrée pour tenir compte de manière exhaustive des effets capacitifs consiste effectivement à introduire six capacités dans le schéma. Une des manières de le faire est illustrée à la **figure I.7** [Prieto-1995], [Robert-1999], [Barret-2002]

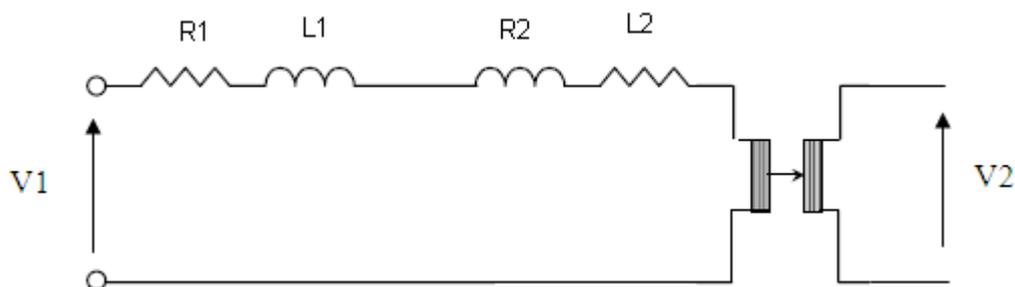


**Figure I.7:** Schéma classique complété par six capacités

#### I.2.3.4 Schéma équivalent selon l'hypothèse de Kapp

En électrotechnique, le transformateur fonctionne à une fréquence relativement basse (aucun effet capacitif). Dans ces conditions, le courant à vide, qui dépend de deux grandeurs constantes (l'induction maximale et la fréquence) à une valeur efficace constante. Comme cette intensité ne dépasse pas quelques pourcent de la valeur nominale du courant primaire, on peut la négliger. Ainsi utilise-t-on exclusivement le circuit équivalent de la **figure I.8** que l'on appelle circuit équivalent de **Kapp**.

Il est important de noter que ce circuit équivalent est suffisamment précis car, comme les lignes de fuites ont des trajets importants dans l'air, les inductances de fuites ne sont pas saturables [**Milsant-1992**].

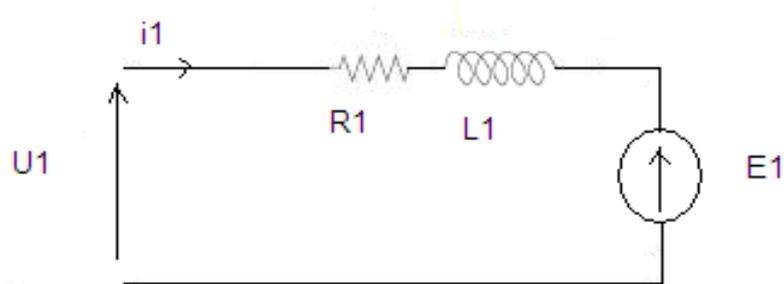


**Figure I.8 :** Schéma équivalent de Kapp

## I.2.4 Equations générales du transformateur

### I.2.4.1 Equation électrique au primaire

Le circuit électrique relatif au primaire en considérant l'hypothèse de Kapp est représenté dans la figure suivante :



**Figure I.9 :** Circuit électrique équivalent au primaire

L'équation aux tensions est donnée par :

$$U_1 = R_1 I_1 + jL_1 \omega I_1 + E_1 \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$U_1$  : Tension au primaire [V]

$I_1$  : Courant au primaire [A]

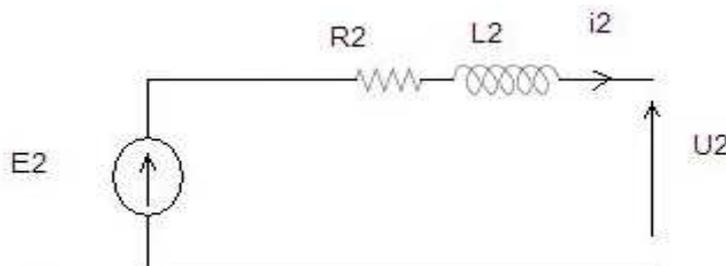
$R_1$  : Résistance de l'enroulement primaire [ $\Omega$ ]

$L_1$  : Inductance de l'enroulement primaire [H]

$E_1$  : Force contre électromotrice au primaire [V]

### I.2.4.2 Equation électrique au secondaire

Le circuit électrique relatif au secondaire est représenté dans la figure suivante :



**Figure I.10 :** Circuit électrique équivalent au secondaire

L'équation aux tensions est donnée par :

$$U_2 = E_2 - R_2 I_2 - jL_2 \omega I_2 \quad (\text{I. 5})$$

Avec :

$U_2$ : Tension au secondaire [V]

$I_2$  : Courant au secondaire [A]

$R_2$ : Résistance de l'enroulement secondaire [ $\Omega$ ]

$L_2$  : Inductance de l'enroulement secondaire [H]

$E_2$  : Force électromotrice au secondaire [V]

### I.2.4.3 Equation du flux

Le couplage entre les deux circuits électriques primaire et secondaire est favorisé par la présence d'un circuit magnétique. L'échange d'énergie entre les deux circuits est dû à une variation de flux provoquée par l'excitation de l'enroulement primaire.

$$E_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{I. 6})$$

$$E_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{I. 7})$$

Avec :

$\Phi$  : Flux utile dans le circuit magnétique

$N_1$  et  $N_2$  sont respectivement le nombre de spires des enroulements primaire et secondaire.

## I.2.5 Paramètres industriels d'un transformateur

### I.2.5.1 Les paramètres techniques

#### I.2.5.1.a La puissance nominale

La puissance nominale constitue pour le constructeur, la définition essentielle de la marchandise offerte aux clients, elle caractérise la machine dans les offres et les catalogues et elle est généralement fixée par l'échauffement.

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I \quad [\text{kVA}] \quad (\text{I.8})$$

$U$  : La tension nominale [V]

$I$  : Le courant nominal [A]

#### **I.2.5.1.b La tension et le courant nominal**

C'est respectivement la valeur de la tension et du courant pour laquelle seront définies et garanties les caractéristiques à vide et en charge du transformateur (courant à vide, pertes à vide), (les pertes dues à la charge,  $U_{cc}$ ).

#### **I.2.5.1.c La tension de court circuit ( $U_{cc}$ )**

C'est la tension réduite qu'il faut appliquer au primaire lorsque le secondaire est en court circuit, pour que le courant nominale circule au primaire. Sa valeur est comprise entre 4 et 5 % de la tension nominale.

#### **I.2.5.1.d Les pertes à vide**

Lors du fonctionnement à vide, la puissance absorbée par le transformateur est pratiquement dépensée pour compenser les pertes dans le fer.

Les pertes dans le fer résultent de la variation du flux dans le circuit magnétique et se composent des pertes par courants de Foucault ( $P_F$ ) et les pertes par Hystérésis ( $P_H$ ), ces pertes sont modélisées par une résistance placée aux bornes de l'inductance magnétisante.

##### **➤ Les pertes par Hystérésis**

Pour chaque cycle complet du courant, le circuit absorbe une énergie mesurée par la surface de la boucle d'hystérésis. En alternatif et pour un matériau donné, la forme de la boucle d'hystérésis se modifie pour des valeurs croissantes du champ [Gillon-1968].

La formule de calcul des pertes par hystérésis est la suivante:

$$P_H = C_H \cdot B_m^2 \cdot f \quad [\text{W/Kg}] \quad (\text{I.9})$$

Avec:

$C_H$  : Coefficient d'hystérésis, dépendant de la nature matériau.

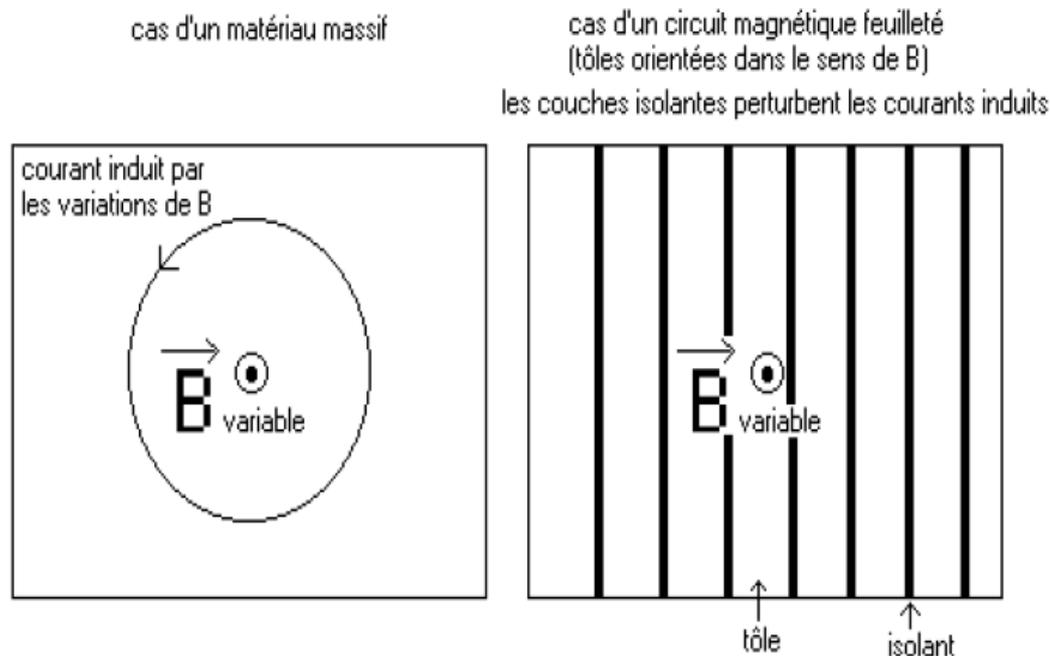
$B_m$  : Valeur maximale de l'induction.

$f$  : Fréquence de l'alimentation.

➤ **Pertes par courants de Foucault**

Dans le transformateur, les courants de Foucault prennent naissance dans le matériau magnétique conducteur perpendiculairement aux lignes d'induction. Pour limiter l'amplitude de ces courants et les pertes associées, le circuit magnétique est constitué soit d'un empilage de tôles minces isolées entre elles et disposées parallèlement aux lignes d'induction soit de matériaux magnétique spéciaux [B.Hochart-1988], [Pastouriaux-1965].

La **figure (I.11)** illustre comment réaliser le feuilletage pour limiter la circulation des courants induits.



**Figure I.11:** Feuilletage du circuit magnétique

Ces pertes par unité de masse sont données par la relation suivante:

$$P_F = C_F \cdot e^2 \cdot B_m^2 \cdot f^2 \quad [W/Kg] \quad (\text{I. 10})$$

Avec:

$C_F$  : Coefficient variant inversement proportionnel à la résistivité électrique du matériau.

$e$  : Epaisseur élémentaire de la tôle.

### I.2.5.1.e Les pertes en court circuit

Pendant l'essai en court circuit, le flux principal dans le noyau est très petit alors les pertes fer sont négligées et seulement les pertes dans le cuivre seront considérées, ces pertes dépendent de l'intensité du courant et de la résistance des enroulements. Elle s'exprime par la formule suivante:

$$P_J = n \cdot R \cdot I_{eff}^2 \quad [W] \quad (\text{I. 11})$$

Avec:

$R$  : La résistance de l'enroulement.

$I_{eff}$  : Le courant efficace de cet enroulement.

$n$  : Le nombre d'enroulements.

### I.2.5.1.f Le rapport de transformation

C'est le rapport de la tension nominale primaire et de la tension secondaire à vide, il est donné par :

$$m = \frac{U_{20}}{U_1}$$

Le rapport de transformation n'est pas toujours égale à  $\frac{N_2}{N_1}$ , mais il dépend aussi du mode du couplage, pour le couplage (Dyn11), le rapport de transformation

$$\text{est : } m = \sqrt{3} \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

### I.2.5.2 Les paramètres d'exploitation

Les paramètres d'exploitation sont :

a. Le rendement du transformateur  $\eta$  qui est défini comme étant le rapport de la puissance débitée par le secondaire  $P_2$  et la puissance absorbée par le primaire  $P_1$ .

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 - P_{fer} - P_J}{P_1}$$

Avec :

$P_{fer} = P_H + P_F$ : les pertes dans le fer.

$P_J$ : les pertes dans le cuivre (les enroulements).

b. La chute de tension  $\Delta U$  qui est donnée par la différence des tensions secondaires à vide et en charge  $U_2$ , elle dépend généralement de la valeur et de la nature de la charge.

$$\Delta U = U_{20} - U_2$$

### I.2.6 Les différents essais effectués sur les transformateurs

Comme tous les matériels électriques industriels, les transformateurs sortant des chaînes de fabrication passent en plate-forme d'essai pour subir un contrôle final. On distingue généralement trois catégories d'essais [Bernard-1982]:

#### I.2.6.1 Essais individuels (ou de routine) :

Essais à effectuer sur tous les appareils sans exception. Ils permettent à l'utilisateur de vérifier le fonctionnement correct du transformateur et le respect des garanties, conformément à sa spécification technique, ces essais sont les suivants :

##### I.2.6.1.a Mesure de la résistance des enroulements

La mesure de la résistance permet la détermination des pertes dues à l'effet JOULE seul dans les enroulements et les connexions. Cette mesure s'effectue en courant continu afin d'éviter les effets d'inductance propre dans les enroulements.

### **I.2.6.1.b Mesure du rapport de transformateur et vérification du groupe de couplage**

La vérification du groupe de couplage et la mesure du rapport de transformation sont effectuées sur chaque prise pendant l'essai à vide à l'aide du « pont de VETINER » contenu dans l'appareil qui nous donne la valeur numérique directe. La mesure consiste, dans son principe, à rechercher une tension primaire en phase avec une tension secondaire et d'en comparer les modules.

### **I.2.6.1.c Mesure des pertes et du courant à vide**

Cet essai consiste à maintenir l'enroulement secondaire en circuit ouvert et d'appliquer aux bornes du primaire une tension nominale.

La mesure est effectuée à la fréquence nominale de 50Hz avec une tension pratiquement sinusoïdale.

### **I.2.6.1.d Essai en court circuit**

Cet essai consiste à court circuiter les bornes du secondaire, et d'appliquer une tension pratiquement sinusoïdale aux bornes du primaire.

Pour limiter le courant dans les enroulements à une valeur acceptable, habituellement voisine de la valeur nominale, on doit procéder à l'essai en court-circuit à tension réduite. Ce faisant, on diminue fortement le courant de magnétisation de même que les pertes par hystérésis et par courant induits. Des lors, on peut en pratique les considérer comme négligeable par rapport au courant nominal et à la puissance dissipée dans la résistance équivalente [Bouchard- 1998].

### **I.2.6.1.e Essai diélectrique**

Cet essai à pour but de vérifier la tenue de l'isolation entre les éléments (enroulements de phases, spires, bobines ; prises, connexions de prises et bornes des enroulements) d'une part et entre les éléments et la terre d'autre part.

### I.2.6.2 Essais de type

Essais à effectuer sur un échantillon du produit réalisé selon une conception donnée pour vérifier que ce produit répond à certaines spécifications. En principe ces essais sont destinés à éprouver une nouvelle fabrication ou une série de transformateurs.

#### I.2.6.2.a. Essai d'échauffement

L'essai d'échauffement d'un transformateur dans l'huile à pour objet de déterminer l'échauffement moyen des enroulements et l'échauffement maximum de l'huile.

La température moyenne des enroulements se détermine à partir de la variation de résistance des enroulements. La température d'un enroulement à la fin d'une mesure de température  $\theta_2$  se calcule à partir de sa résistance  $R_{t2}$  mesurée à cette température, et de sa résistance  $R_{t1}$  à une température  $\theta_1$  par la formule :

$$\frac{R_{t1}}{R_{t2}} = \frac{235^{\circ}C + \theta_1}{235^{\circ}C + \theta_2}$$

La température de l'huile à la partie supérieure se mesure à l'aide d'un thermomètre placé dans un doigt de gant rempli d'huile.

L'échauffement ainsi déterminé ne doit pas dépasser la valeur limite comme il est indiqué dans le tableau suivant :

Classe d'isolation (définie par l'isolant le moins rigide)	Température de référence
A E B	75°C
F H	115°C

**Tableau I.1:** Choix de la température de référence

### **I.2.6.2.b Essai de choc en onde pleine ou en onde coupée**

Une onde pleine correspond à une surtension atmosphérique transmise par une ligne à haute tension. Ces essais sont réalisés avec des générateurs de choc, utilisant des condensateurs chargés en parallèle et déchargés en série au moyen d'éclateur [Bernard-1982].

Un essai de choc en onde coupée doit être effectué en plus de l'essai en onde pleine. Les essais doivent comporter deux chocs coupés appliqués successivement à chaque borne de la ligne de transformateur. La tension doit être coupée sur la queue de l'onde et l'intensité de coupure doit se situer 2 et 6 $\mu$ s après le début du choc.

### **I.2.6.3 Essais spéciaux**

Essais autre que des essais de type ou individuels définie en accord entre le constructeur et l'acheteur. En principe ils nous permettent de mesurer le bruit dans le transformateur.

#### **I.2.6.3.a Mesure de bruit**

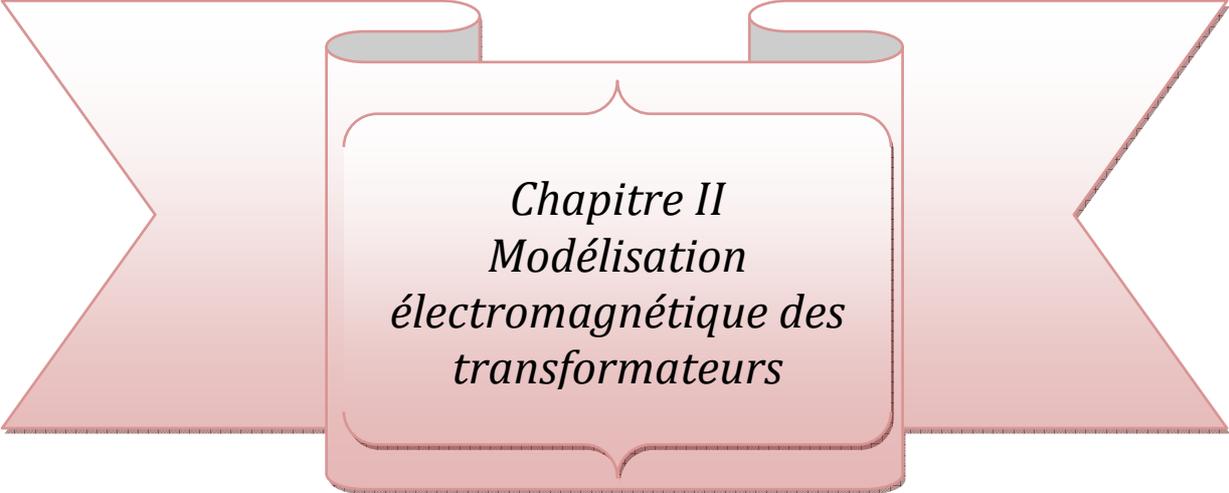
Un transformateur en service émet un bruit caractéristique dont la cause essentielle est la magnétostriction des tôles du circuit magnétique. Pour la mesure de bruit, le transformateur doit être alimenté à la fréquence nominale et sous la tension nominale. Les mesures seront effectuées à l'aide d'un sonomètre, le microphone étant orienté perpendiculairement à la surface du transformateur.

### **Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné un aperçu général sur la constitution des transformateurs en rappelant les différentes équations électriques et magnétiques régissant son fonctionnement ainsi que les différents schémas équivalents.

Nous entamerons dans le chapitre suivant la modélisation électromagnétique des transformateurs.

---



*Chapitre II  
Modélisation  
électromagnétique des  
transformateurs*

## Introduction

L'objet principal de l'électromagnétique, est la description des interactions s'exerçant à l'intérieure des systèmes de particules chargées, dont les effets ont une grande importance dans le fonctionnement de la quasi-totalité des dispositifs électrotechniques.

La notion de l'électromagnétisme datée des années 1860 avec la venue de JAMES CLERK Maxwell a pu unifier l'électrodynamique et le magnétisme en une seule théorie. Les équations de Maxwell traduisent dans leur généralité les interactions entre les grandeurs magnétiques  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  et électriques  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$

La connaissance des champs électrique et magnétique permet d'avoir accès au calcul des grandeurs électriques et magnétiques (le potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique, les densités de courant et les densités de pertes) et au détail des conditions de fonctionnement de tout appareil électromagnétique que ce soit en régime permanent ou transitoire.

### II.1 Equations de Maxwell

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques classiques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de Maxwell [Sabonnadière-1987].

Les équations de Maxwell spécifient que toute variation spatiale d'un champ (électrique ou magnétique), en un point de l'espace, entraîne (ou est due à) l'existence; ou la variation temporelle d'un autre champ au même point de l'espace.

Les répartitions spatiale et temporelle des champs magnétiques et électriques sont obtenues par : [Durand-1968], [Fournet-1985], [Pérez-1990]

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \text{Théorème de Gauss} \quad (\text{II.1})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Loi de Faraday} \quad (\text{II.2})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Loi de conservation du flux} \quad (\text{II.3})$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Théorème d'Ampère} \quad (\text{II.4})$$

Les équations (II.1), (II.3): équations de conservation.

Les équations (II.2), (II.4): équations de couplage électromagnétique.

Où :

$$\vec{E} : \text{Champ électrique} \quad [\text{V/m}]$$

$$\vec{D} : \text{Induction électrique} \quad [\text{Cb/m}^2]$$

$$\vec{H} : \text{Champ magnétique} \quad [\text{A/m}]$$

$$\vec{B} : \text{Induction magnétique} \quad [\text{T}]$$

$$\vec{J}_c : \text{Densité de courant de conduction} \quad [\text{A/m}^2]$$

$$\rho : \text{Densité volumique de charge} \quad [\text{Cb/m}^3]$$

$$t : \text{Le temps} \quad [\text{s}]$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D : \text{Densité de courant de déplacement} \quad [\text{A/m}^2]$$

## II.2 Relations constitutives du milieu et la loi d'ohm

Afin de définir convenablement les phénomènes électromagnétiques, on ajoute aux équations précédentes des équations supplémentaires qui représentent les lois du comportement du milieu et la loi d'Ohm.

### II.2.1. Relation du milieu

#### a. Relation magnétique

C'est la première équation constitutive, elle introduit les propriétés magnétiques par l'intermédiaire de la perméabilité magnétique  $\mu$  [Robert -1999] :

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

$\mu$  : Perméabilité magnétique absolue [H/m].

$\mu_0$  : Perméabilité magnétique du vide, égale à  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [H/m].

$\mu_r$  : Perméabilité magnétique relative du milieu considéré.

Dans le cas où le milieu considéré est à comportement non linéaire, l'équation (II.5) devient [Fournet-1985]:

$$\vec{B} = \mu(\|\vec{H}\|) \cdot \vec{H} \quad (\text{II.6})$$

### b. Relation électrique

C'est la deuxième équation constitutive, elle introduit les propriétés diélectriques par l'intermédiaire de la permittivité électrique  $\varepsilon$  [Robert-1999] :

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

$\varepsilon$  : Permittivité électrique absolue [F/m].

$\varepsilon_0$  : Permittivité électrique du vide, égale à  $\frac{1}{36 \cdot \pi} \cdot 10^{-9}$  [F/m].

$\varepsilon_r$  : Permittivité électrique relative du milieu.

Dans le cas où le milieu considéré est à comportement non linéaire, l'équation (II.7) devient [Fournet-1985]:

$$\vec{D} = \varepsilon(\|\vec{E}\|) \cdot \vec{E} \quad (\text{II.8})$$

### II.2.2. Loi d'ohm

La loi d'Ohm exprime la relation liant la densité de courant  $\vec{j}$  au champ électrique  $\vec{E}$  à travers la conductivité électrique  $\sigma$  [ $\Omega \cdot m$ ]<sup>-1</sup>. Cette loi est donnée par [Binns-1992].

Dans un milieu statique avec courant de source:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{II.9})$$

Avec:

$\vec{J}_s$  : Densité du courant de source [A/m<sup>2</sup>].

$\sigma$  : Conductivité électrique du matériau [S/m].

### II.3 Equation de continuité

Cette équation exprime la conservation de la densité de charge par rapport à la variation spatiale de la densité de courant. Elle est obtenue à partir des équations de Maxwell (II.1) et (II.4), comme suit :

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.10})$$

### II.4 Condition d'interface

Le passage entre deux milieux, indicés respectivement (1) et (2), ayant de caractéristiques électriques ou magnétiques différentes nécessite des conditions de passage à la surface de séparation des deux milieux. Ces conditions sont obtenues en intégrant les équations de Maxwell entre deux points voisins différents situés de part et d'autre de la surface séparant les deux milieux [Diche-2003], [Rachek-2001], [Mohellebi-2001]. Elle s'énonce comme suit:

-Conservation de la composante tangentielle du champ électrique:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II.11})$$

-Conservation de la composante normale de l'induction magnétique:

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II.12})$$

-Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique dans le cas d'existence des courants surfaciques  $K$ :

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \vec{n} = \vec{K} \quad (\text{II.13})$$

-Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique si les charges surfaciques existent.

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = \sigma_s \quad (\text{II.14})$$

-Conservation de la composante normale de la densité de courant:

$$(\vec{J}_1 - \vec{J}_2) \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.15})$$

$\vec{n}$  : Étant la normale à l'interface séparant les deux milieux.

$\vec{K}$  : Densité de courant portée par la surface de séparation.

$\sigma_s$ : Densité de charge électrique portée par la surface.

## II.5 Hypothèses simplificatrices

### II.5.1 Absence des courants de déplacement

L'étude d'un dispositif dépend des conditions de travail auxquelles il est soumis. Si l'étude se limite à la magnétodynamique, le terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  qui correspond aux courants de déplacement est négligé devant le terme  $(\sigma \cdot \vec{E})$  qui correspond aux courants de conduction car la fréquence de travail dans le secteur de l'Electrotechnique sont inférieures aux radiofréquences qui sont de l'ordre de :  $10^{12}$ HZ .Il suffit juste de calculer le rapport  $\left(\frac{J_d}{J_c}\right)$  qui doit être inférieur à 1.

### II.5.2 Absence de charge d'espace

Les charges volumiques apparaissant aussi dans les conducteurs n'interviennent pas, puisqu'elles disparaissent très rapidement. A partir de la relation de conservation de la charge (II.11) et la loi d'ohm (II.9), on établit la relation d'évolution temporelle de la charge d'espace :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad (\text{II.16})$$

La solution générale est de la forme  $\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot t\right)$

Le temps de relaxation  $\frac{\varepsilon}{\sigma}$  de l'ordre de  $10^{-19}$  secondes nécessaire à la dissipation des charges d'espace est largement négligeable pour considérer que ces charges ont eu le temps de créer un courant à des fréquences inférieures à 1MHz.

## II.6 Equations de Maxwell appliquées à l'électrotechnique

En utilisant les hypothèses précédentes, les équations de Maxwell simplifiées s'écrivent comme suit :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (\text{II.17})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{J}_s + \overrightarrow{J}_{\text{ind}} = \vec{J}_c \quad (\text{II.20})$$

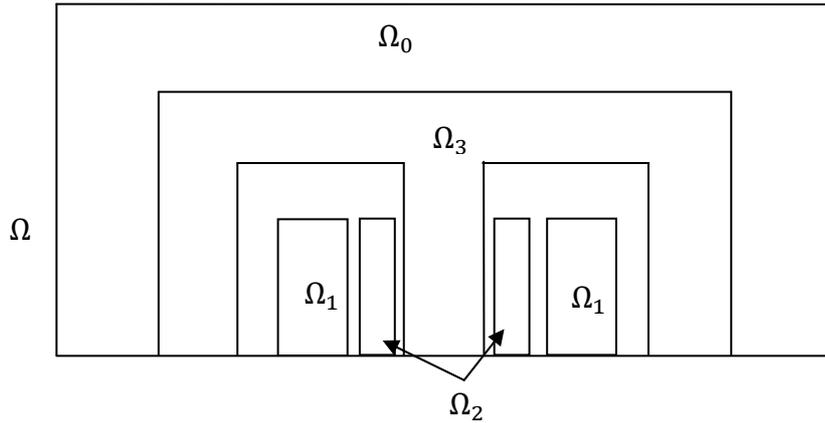
On ne peut résoudre directement les équations précédentes du fait qu'elles contiennent beaucoup d'inconnues. Leur résolution numérique passe par un choix de variables d'états qui dépend particulièrement de la géométrie des structures (dispositifs) et du type du problème de champ (électrique ou magnétique) à étudier. Dans le cas par exemple, d'objets suffisamment longs, ou pourvu d'une symétrie de révolution, les courants sont perpendiculaires au plan dans lequel on conduit l'étude.

Le choix comme variables d'états, du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et du potentiel scalaire électrique  $V$  permettent de réduire le nombre d'inconnues et rendre la résolution numérique plus souple.

## II.7 Modèles d'équations électromagnétiques en potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$

### II.7.1 Présentation du dispositif d'étude

Dans le cas d'un transformateur, le domaine de représentation d'un problème électromagnétique est constitué (**figure II.1**) : de deux inducteurs  $\Omega_1$  (enroulement primaire),  $\Omega_2$  (enroulement secondaire) et de la charge  $\Omega_3$  (circuit magnétique). Enfin Le domaine d'étude  $\Omega$  englobe ces régions distinctes ainsi que celle du milieu environnant  $\Omega_0$ .



**Figure II.1** Domaine d'étude d'un problème électromagnétique

### II.7.2 Définition des potentiels vecteur magnétique et scalaire électrique

La condition (II.19) permet de définir un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (\text{II. 21})$$

Pour que  $\vec{A}$  soit totalement défini, il faudra fixer la valeur de sa divergence. On ajoute alors la condition  $div \vec{A} = 0$ . Dans le cas le plus général, il existe une infinité de vecteurs  $\vec{A}$  pouvant satisfaire la relation (II.21). En effet, puisque le rotationnel du gradient de toute fonction  $f$  est nul, donc tout vecteur  $\vec{A} + \overrightarrow{grad}(f)$ , satisfait la relation (II.21), d'où la nécessité d'imposer une condition de Jauge afin d'assurer l'unicité de la solution. Dans le cas particulier des systèmes 2D, cette condition est vérifiée automatiquement [Zaouia-2001], [Srairi-1996].

L'introduction de l'équation (II.21) dans (II.2) nous donne :

$$\overrightarrow{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II. 22})$$

La condition (II.22) implique qu'il existe un potentiel électrique scalaire  $V$  tel que :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{grad} V \quad (\text{II. 23})$$

### II.7.3 Modèle magnétodynamique

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources de courant ou de tension varient dans le temps. C'est-à-dire que le terme  $\frac{\partial B}{\partial t}$  n'est pas nul, les champs électriques et magnétiques sont alors couplés par la présence des courants induits [Belkhiri-2004].

En combinant les équations (II.9) et (II.23) on obtient :

$$\vec{J} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II. 24})$$

Avec :

$$J_{\text{ind}} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad : \quad \text{Densité de courant induit.}$$

$$J_s = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V : \text{Densité de courant de source.}$$

En remplaçant l'équation (II.24), dans (II.20) et en tenant compte de (II.21) et (II.5), on aura l'équation magnétodynamique, en terme de potentiel vecteur magnétique, suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

En harmonique, le terme  $\frac{\partial}{\partial t}$  est remplacé par  $j\omega$ , l'équation (II.25) devient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + j \sigma \omega \vec{A} = \vec{J}_s \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

Avec :

$$\omega = 2. \pi. f$$

$$j : \text{Unité imaginaire } j^2 = -1$$

$\omega$  : Pulsation des sources [rd/s].

L'équation (II. 25) représente l'équation magnétodynamique transitoire en terme de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  avec terme source. Cette équation traduit les phénomènes d'effet de peau dans les conducteurs ou le régime transitoire des dispositifs électromagnétiques.

Selon les matériaux utilisés,  $\mu$ ,  $\varepsilon$ , et  $\sigma$  peuvent être soit des scalaires modélisant le comportement de matériaux isotropes, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie [Belkhiri-2004].

La modélisation numérique d'appareils électromagnétiques en considérant l'anisotropie non-linéaire des matières exige la connaissance du tenseur de la perméabilité. Dans ce cas la perméabilité est représentée par un tenseur symétrique du deuxième rang. Il lie la densité du flux  $B$  à la force de champ  $H$  [Nye-1985].

$$|\mu| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{vmatrix}$$

En considérant le tenseur de perméabilité magnétique  $|\mu|$ , l'équation (II.25) devient :

$$\overrightarrow{rot} \left( \frac{1}{|\mu|} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (\text{II. 27})$$

#### II.7.4 Modèle magnétostatique

On suppose maintenant que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps, le terme  $\partial A/\partial t$  est nul et les champs électrique et magnétique sont découplés [Sabonnadière-1987].

En considérant le terme  $\partial B/\partial t$  nul dans l'équation (II.18) et en procédant de la même façon que dans le cas magnétodynamique, on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot} \left( \frac{1}{|\mu|} \overrightarrow{rot} \vec{A} \right) = \vec{J}_s \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

L'équation (II. 28) représente l'équation magnétostatique en terme de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  avec terme source. Cette équation traduit les phénomènes électromagnétiques en régime stationnaire.

### II.8 Conditions aux limites

Pour la résolution des équations aux dérivées partielles électromagnétiques, il est inévitable d'associer les conditions aux limites du domaine d'étude à ces équations.

Ces conditions sont :

#### a. Condition de Dirichlet

$$A|_{\Gamma} = A_0 = \text{Constante}$$

$\Gamma$  : La frontière extérieure du domaine.

#### b. Condition de Neumann

$$\frac{\partial A}{\partial n} |_{\Gamma} = A_0 = \text{constante}$$

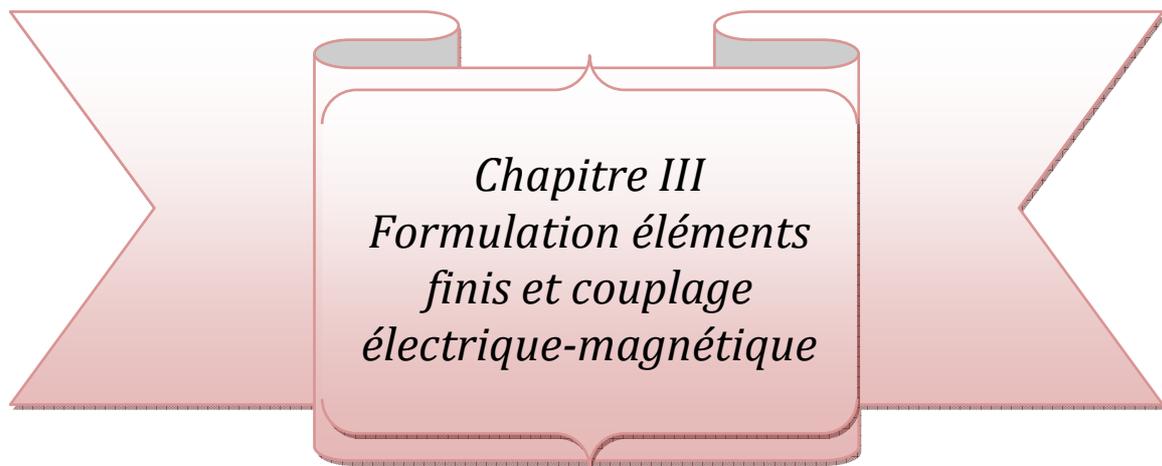
Il existe aussi d'autres conditions aux limites à savoir la condition mixte, condition de périodicité et d'anti périodicité

**Conclusion**

Pour l'étude d'un phénomène ou la conception d'un système électromagnétique, l'évaluation des champs électriques et magnétiques apparaît comme un travail nécessaire et incontournable.

Ce chapitre a fait l'objet d'une description plus au moins détaillée des équations locales de Maxwell. La combinaison de ces équations nous a permis de retrouver les modèles mathématiques en l'occurrence, le modèle magnétostatique et le modèle magnétodynamique en régime harmonique et transitoire simple à étudier après insertion de certaines hypothèses simplificatrices.

L'étude de deux modèles de couplage entre les phénomènes électrique et magnétique dans la perspective de la modélisation d'un transformateur et la résolution des équations électromagnétiques par la méthode des éléments finis fera l'objet du prochain chapitre.



## Introduction

Les phénomènes qui décrivent le comportement des dispositifs électromagnétiques sont représentés par des équations aux dérivées partielles, ces phénomènes se trouvent dans des régions de géométrie très variée (Exemples : pièce des machines tournantes, transformateurs.....etc.). La résolution de ces équations se fait à l'aide de méthodes analytiques ou de méthodes numériques.

Il n'existe pas de méthodes analytiques pour appréhender les problèmes particulièrement ardues et dont la géométrie est complexe. On a donc recourt à des méthodes numériques qui font appel à des techniques de discrétisation spatiale, en effet, elles transforment les équations aux dérivées partielles du champ en un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions aux limites.

Dans ce qui suit on s'intéressera à la méthode des éléments finis pour la résolution des équations aux dérivées partielles régissant les phénomènes magnétostatique et magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique  $A$ . On se limitera à la présentation de la méthode projective de Galerkin qui sera utilisée dans notre cas.

### III.1 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de résolution numérique qui s'est fortement développée depuis l'avènement de l'informatique. Cette méthode a été utilisée initialement pour l'analyse des structures (Génie Civil). Elle fut introduite en électromagnétisme par M.V.K. Chari et P.P. Sylvestre vers 1970. Son champ d'application actuel couvre de nombreux domaines (contraintes et déformation, mécanique des fluides, problème thermique, électromagnétisme) et par la suite, les problèmes couplés magnétothermique, magnéto-mécanique et magnétoélectrique.

La méthode des éléments finis est une méthode de portée générale étant donné qu'elle permet la modélisation de tous systèmes physiques régis par les équations aux dérivées partielles. Dans la plupart des cas cette méthode s'intègre à des logiciels CAO (conception assistée par ordinateur). Ce qui constitue un avantage de taille pour l'ingénieur appelé à concevoir des systèmes physiques désirés [Mohellebi-2008].

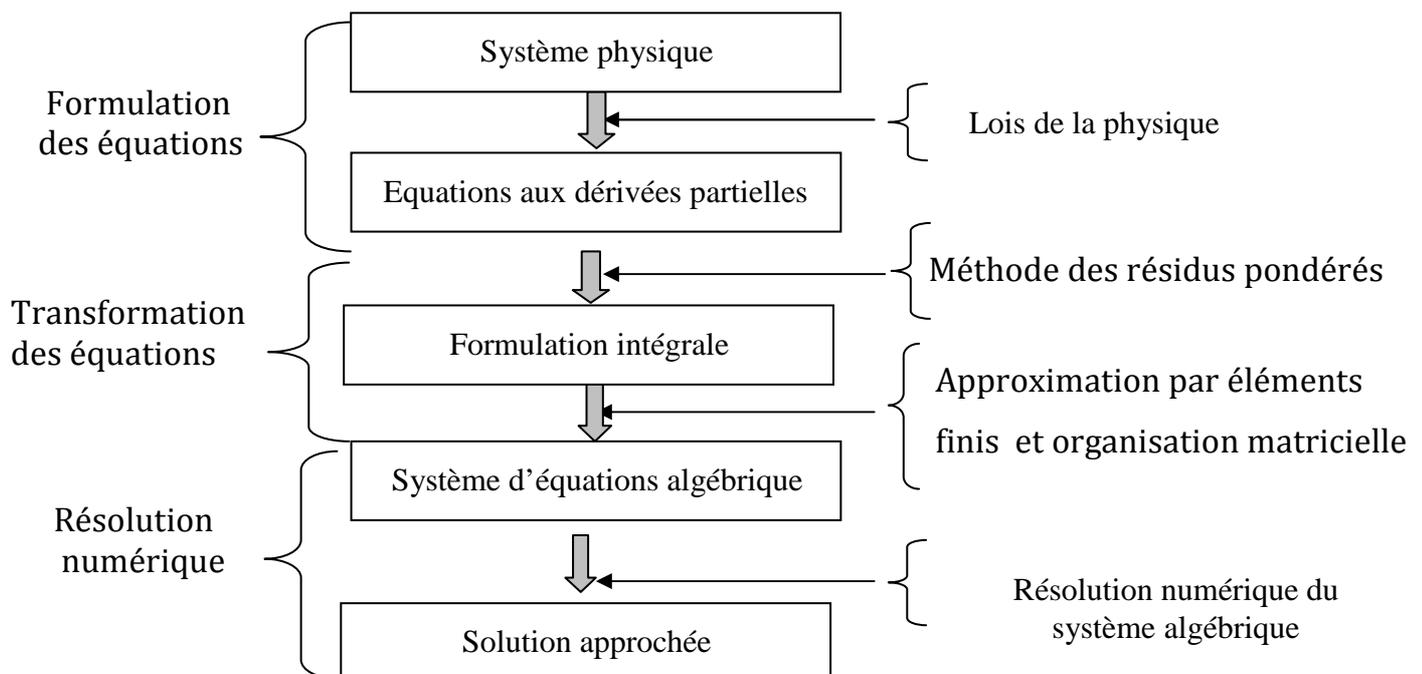
L'avantage de s'adapter aux géométries complexes et la prise en considération des non linéarités ont fait que la méthode des éléments finis soit très utilisée en électromagnétisme.

### III.2 Principe de la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode est basé sur une formulation intégrale du problème aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Cette formulation peut être de type variationnelle ou résidus pondérés.

### III.3 Principales étapes de résolution par la méthode des éléments finis

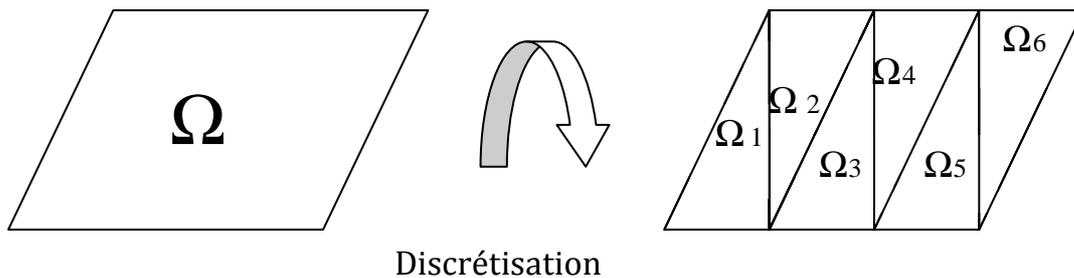
Les principales étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis sont représentées dans le synoptique de la **figure III.1**



**Figure III.1:** Etapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis.

### III.4 Discrétisation du domaine d'étude

La résolution des problèmes physiques par la méthode des éléments finis nécessite la réalisation du maillage du domaine où se déroule le phénomène étudié. Soit ( $\Omega$ ) un domaine d'étude, il s'agit de décomposer ( $\Omega$ ) en un ensemble de sous-domaines élémentaires : Segments, triangulaires, quadrilatères, pentaèdres, hexaèdres...Suivant la dimension de l'espace [Féliachi-1996], [Bendjima-1996]



**Figure III.2:** discrétisation du domaine

### III.5 La fonction d'approximation

La fonction d'approximation consiste à chercher la meilleure approximation d'une fonction  $A(x, y)$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  de manière à satisfaire au mieux les lois physiques auxquelles elle obéit.

### III.6 La formulation intégrale

La formulation intégrale est basée sur l'une des deux approches suivantes : La méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre. La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

### III.6.1 Formulation résidus pondérés

Contrairement à la méthode variationnelle, la méthode des résidus pondérés ne nécessite pas la connaissance au préalable, de la fonctionnelle d'énergie du système [Diche-2003].

La méthode des résidus pondérés consiste à choisir la fonction projective de façon à minimiser l'intégrale du résidu [Sabonnadière-1985]

Le résidu est donnée par :

$$R = L(A) - f \quad (\text{III. 1})$$

Avec :

$R$  : Résidu de l'approximation.

$L$  : Opérateur différentiel.

$f$  : Fonction source.

A l'aide de fonction de pondération bien choisie, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en  $n$  points du domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} R_i \cdot \alpha_i \cdot d\Omega = \int_{\Omega} (L(A_i) - f_i) \alpha_i d\Omega = 0 \quad (\text{III. 2})$$

$\alpha_i$  : Fonction de pondération ou de projection.

Les valeurs de  $A$  permettant d'annuler l'intégral du résidu.

On se limitera dans ce qui suit, à présenter la méthode projective de Galerkin qui consiste à choisir des fonctions de pondération identiques aux fonctions de formes, pour obtenir un système algébrique symétrique dont la résolution devient relativement rapide.

### III.7 Formulation éléments finis des problèmes électromagnétiques

A partir du modèle général en potentiel vecteur magnétique donné par les équations (II.26), (II.27) et (II.28) on peut extraire les formulations éléments finis relatives aux modèles magnétostatique et magnétodynamique en régime harmonique et transitoire.

Dans les dispositifs suffisamment longs ou pourvus d'une symétrie de révolution, les courants sont généralement perpendiculaires au plan d'étude. Le potentiel vecteur n'a plus alors qu'une seule composante  $A_z$  également orthogonale au plan d'étude.

$$\vec{A}_z = (0, 0, A_z) \quad \text{et} \quad \vec{J}_s = (0, 0, J_{sz})$$

Dans ce paragraphe, on présentera ces formulations ainsi que leurs formes matricielles établies pour une résolution numérique.

#### III.7.1 Modèle général cartésien bidimensionnel

Sachant que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{A}) \quad (\text{III. 3})$$

En tenant compte de (III.3) et de la condition de Jauge de Coulomb on obtient le modèle cartésien donné par l'équation suivante:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = \begin{cases} 0 & \text{dans l'air environnant} \\ -J_{sz} & \text{dans l'inducteur (enroulements) (III. 4)} \\ \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} & \text{dans l'induit (le circuit magnétique)} \end{cases}$$

### III.7.2 Modèle magnétodynamique harmonique

L'équation (III.4) s'écrira en régime harmonique comme suit :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_{yy}}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right)+j\sigma\omega A=J_{sz} \quad (\text{III.5})$$

L'application de la méthode projective de Galerkin pour (III.5), nous donne :

$$\left\{\begin{array}{l} \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_{yy}}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) d\Omega - j\omega\sigma \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot A_z d\Omega \\ = - \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{sz} d\Omega \end{array}\right. \quad (\text{III.6})$$

En appliquant le théorème de Green pour le premier terme (intégral) de l'équation (III.6), on aura :

$$\left\{\begin{array}{l} \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_{xx}}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_{yy}}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \frac{1}{|\mu|} \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \end{array}\right. \quad (\text{III.7})$$

En considérant des conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogènes, le terme sur la frontière s'annule :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{|\mu|} \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma = 0$$

Donc compte tenue de (III.7) pour des conditions aux limites homogènes, la forme intégrale devient en écriture condensé :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} \overrightarrow{\text{grad}} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}} A_z \cdot d\Omega + j\omega\sigma \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot A_z \cdot d\Omega \\ & = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{sz} \cdot d\Omega \end{aligned} \right. \quad (\text{III. 8})$$

La fonction d'approximation s'exprimera sous sa forme discrétisée par :

$$A_z = \sum_{j=1}^{N_n} \alpha_j \cdot A_j \quad (\text{III. 9})$$

Avec :

$\alpha_j$  : Est la fonction de forme associé au nœud j du domaine.

$N_n$  : Nombre de nœuds du domaine.

En remplaçant (III.9) dans (III.8), on aboutit à :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_n} \left[ \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} (\overrightarrow{\text{grad}} \alpha_i) \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \alpha_j) \cdot d\Omega \right] A_j + j\omega\sigma \sum_{j=1}^{N_n} \left[ \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot \alpha_j) \cdot d\Omega \right] A_j \\ & = \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot J_{sz}) \cdot d\Omega \end{aligned} \right. \quad (\text{III. 10})$$

Avec :

i, j : entiers naturels, variant de 1 à  $N_n$ .

Le système matriciel obtenu de (III.10) est de la forme :

$$[K] \cdot [A] + j\omega[M] \cdot [A] = [F] \quad (\text{III. 11})$$

Avec :

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} (\overline{\text{grad}} \alpha_i) \cdot (\overline{\text{grad}} \alpha_j) d\Omega \quad (\text{III. 12})$$

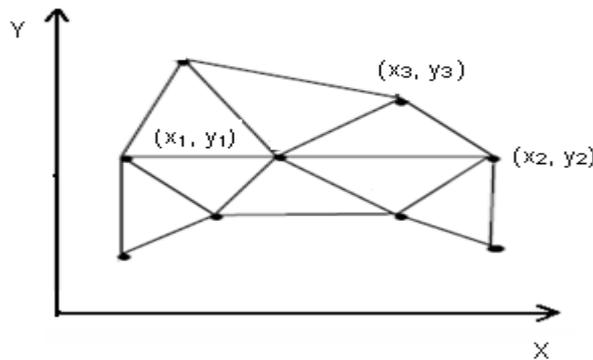
$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma (\alpha_i \cdot \alpha_j) d\Omega \quad (\text{III. 13})$$

$$F_i = \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot J_{sz}) d\Omega \quad (\text{III. 14})$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

Où :  $A_i$  est la partie imaginaire de  $\bar{A}$  et  $A_r$  est la partie réelle de  $\bar{A}$ .

Le maillage utilisé est un maillage triangulaire, les fonctions d'interpolations sont de premier ordre, tel que le montre la **figure III.3**:



**Figure III.3:** éléments triangulaires de premier ordre

$$\alpha_i = (a_i + b_i x + c_i y)$$

Avec:

$$a_1 = (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2\Delta_e$$

$$b_1 = (y_2 - y_3) / 2\Delta_e$$

$$c_1 = (x_3 - x_2) / 2\Delta_e$$

Où :

$\Delta_e$  : Air du triangle ;

$a_i, b_i, c_i$  : Coefficients représentant les poids des fonctions d'interpolation obtenus par permutation circulaire.

On obtient alors :

$$K_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j) \cdot \Delta_e$$

$$F_i = \frac{\Delta_e}{3} J_{sz}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{\sigma \Delta_e}{6} & \text{si } i = j \\ \frac{\sigma \Delta_e}{12} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j=1, 2, 3$$

En annulant le terme  $j\omega$  dans l'équation(III.11), on obtient la formulation éléments finis du modèle magnétostatique et le système matriciel à résoudre est de la forme :

$$[M] \cdot [A] = [F] \quad (\text{III. 15})$$

### III.7.3 Modèle magnétodynamique transitoire

L'équation (III. 4) s'écrira en régime transitoire comme suit :

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = J_{sz} \quad (\text{III. 16})$$

L'application de la méthode de Galerkin à l'équation (III.16) nous permet d'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) d\Omega - \sigma \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t} d\Omega \\ = - \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{sz} d\Omega \end{array} \right. \quad (\text{III. 17})$$

En adoptant le même raisonnement que celui appliqué dans le cas magnétodynamique harmonique, nous obtiendrons la formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique transitoire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_n} \left[ \iint_{\Omega} \frac{1}{|\mu|} (\overrightarrow{grad} \alpha_i) \cdot (\overrightarrow{grad} \alpha_j) d\Omega \right] A_j + \sigma \sum_{j=1}^{N_n} \left[ \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot \alpha_j) d\Omega \right] \frac{\partial A_j}{\partial t} \\ = \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot J_{sz}) d\Omega \end{array} \right. \quad (\text{III. 18})$$

En écrivant l'équation (III-18) sous sa forme matricielle, on aura

$$[K] \cdot [A] + \frac{\partial}{\partial t} [M] \cdot [A] = [F] \quad (\text{III. 19})$$

Les termes des matrices étant semblables à ceux obtenus pour la formulation magnétodynamique harmonique.

### III.7.3.1 Discrétisation temporelle

Dans le cas des formulations magnétodynamiques, en plus d'une discrétisation spatiale, une discrétisation temporelle doit être introduite. Ainsi, l'opérateur de dérivation par rapport au temps peut être obtenu à partir du développement limité en série de Taylor, d'une fonction  $f(t)$  à l'ordre deux. En utilisant, pour le calcul de la fonction  $f(t)$  à l'instant  $(t - \theta \Delta t)$ , sa valeur et ses dérivées à l'instant  $(t - \Delta t)$ , après développement en série de Taylor on obtient un schéma général de la discrétisation temporelle [Hamayer-1996]. Nous nous limiterons à deux termes du développement en série de Taylor, nous obtenons l'approximation suivante :

$$\theta \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_{t+\Delta t} + (1 - \theta) \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_t = \frac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t} \quad (\text{III. 20})$$

Par cette méthode, plusieurs types de schéma de discrétisation peuvent être utilisés, on retrouve selon la valeur de  $\theta$  comprise entre 0 et 1 des schémas classiques (tableau III.1)

La valeur de $\theta$	schéma de discrétisation
0	Euler implicite
1/3	Galerkine
1/2	Crank-Nicholson
0,866	Lineger
1	Euler explicite

**Tableau III.1** : Schémas de discrétisation temporelle

En appliquant le schéma général de discrétisation temporelle donné par l'équation (III. 20), Le système matriciel donné par l'équation (III. 19) devient :

$$\left[ [K] + \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] \cdot [A]_{t+\Delta t} = \left[ \frac{(\theta - 1)}{\theta} [K] + \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] \cdot [A]_t + [F]_{t+\Delta t} + \frac{(1 - \theta)}{\theta} [F]_t \quad (\text{III. 21})$$

Avec :

$\Delta t$  : Le pas de temps.

$[A]_{t+\Delta t}$  : est le vecteur correspondant aux valeurs du potentiel magnétique aux nœuds du maillage à l'instant (t) et  $[A]_t$  sa valeur à l'instant précédent ( $t - \Delta t$ ). Le vecteur

$[A]_{t+\Delta t}$  : est obtenu après résolution du système (III. 21).

### III.8 Couplage magnétique-électrique

La modélisation d'un transformateur implique clairement deux phénomènes physiques qui doivent être pris de façon fortement couplés : électrique et magnétique. Le couplage électrique-magnétique peut être effectué par le flux magnétique à travers les forces électromotrices dans les enroulements primaires et secondaires, ceci nécessite la connaissance des paramètres du circuit électrique. (résistances et inductances des enroulements primaires et secondaires), ou bien par la densité de courant totale dans les enroulements primaire et secondaire.

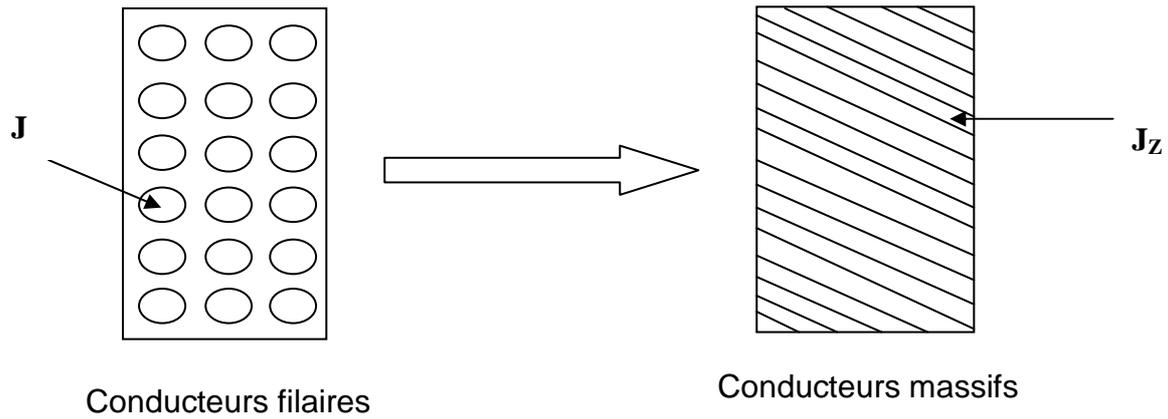
#### III.8.1 Couplage magnétique-électrique à travers la densité de courant

Dans cette partie, on s'intéressera au couplage à travers l'équation de la densité de courant totale dans les enroulements en supposant que l'alimentation est en courant, ce qui va permettre une formulation simple du modèle couplé avec pour inconnus le potentiel vecteur  $A$  et la densité de courant source  $J_s$ .

L'équation du champ magnétique est exprimée en termes de potentiel vecteur magnétique. L'équation de la densité du courant total incluant le courant de source et les courants induits permet d'estimer l'effet de peau et les effets de proximité les plus importants. Les modèles couplés directement  $(A - J)$ , résolus simultanément pour l'inconnu potentiel vecteur magnétique et la densité de courant de source, permet de déduire la densité du flux magnétique et les densités de pertes [Rachek-2008].

##### III.8.1.1 Modèle de couplage $A - J$ en régime harmonique

Les enroulements du transformateur consistent en plusieurs conducteurs connectés en parallèle. La configuration filaire des conducteurs ne se prête pas au calcul par la méthode des éléments finis, c'est pour cela que le faisceau de conducteurs est substitué par un conducteur massif (**figure III.5**).



**Figure III. 4 :** Représentation des conducteurs dans les bobines

L'équation électromagnétique formulée en potentiel vecteur magnétique  $A$ , et l'équation de la densité de courant totale dans les enroulements sont donnés en régime harmonique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - j\omega\sigma A_z + J_{sz} = 0 \\ J_{tot} = J_{sz} - j\omega\sigma A_z \end{array} \right. \quad \text{(III. 22)}$$

A partir de l'équation (III.22) on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\omega\sigma \left( -A_z + \frac{J_{sz}}{j\omega\sigma} \right) = 0 \\ J_{tot} = j\omega\sigma \left( \frac{J_{sz}}{j\omega\sigma} - A_z \right) \end{array} \right. \quad \text{(III. 23)}$$

La formulation symétrique de (III. 23) est obtenue après avoir utilisé la substitution de la variable  $J_{sz} = j\omega\sigma G$  où  $G$  est le potentiel électrique modifié.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\omega\sigma (-A_z + G) = 0 \\ J_{tot} = j\omega\sigma (G - A_z) \end{array} \right. \quad \text{(III. 24)}$$

La formulation éléments finis de l'équation électromagnétique et l'intégration de l'équation de la densité de courant totale sur toute la surface de l'enroulement nous ont permis d'aboutir au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_n} \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{|\mu|} \left[ \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \right] d\Omega \right) A_j + j\omega\sigma \sum_{j=1}^n \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot \alpha_j) A_j d\Omega \\ -j\omega\sigma \iint_{\Omega} (\alpha_i \cdot G) d\Omega = 0 \\ I_{tot} = \iint_{\Omega} j\omega\sigma G d\Omega - \sum_{j=1}^{N_n} \iint_{\Omega} j\omega\sigma \alpha_j \cdot A_j d\Omega \end{array} \right. \quad (\text{III. 25})$$

L'écriture sous forme matricielle du système d'équations précédentes est de la forme:

$$\begin{bmatrix} [K] + j\omega\sigma[M] & -j\omega\sigma[Q] \\ -j\omega\sigma[Q]^{tr} & j\omega\sigma[W] \end{bmatrix} \cdot [A] = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{tot} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 26})$$

Selon le dispositif d'étude, chaque enroulement comprend deux cotés, selon que le sens du courant soit, aller ou retour dans les enroulements primaire et secondaire, on a le système matriciel suivant pour une seule phase :

$$\begin{bmatrix} [K] + j\omega\sigma[M] & -j\omega\sigma[Q_{pr} \quad Q_{sc} \quad Q_{sc} \quad Q_{pr}] \\ -j\omega\sigma \begin{bmatrix} Q_{pr} \\ Q_{sc} \\ Q_{sc} \\ Q_{pr} \end{bmatrix} & j\omega\sigma \begin{bmatrix} W_{pr} & & & \\ & W_{sc} & & \\ & & W_{sc} & \\ & & & W_{pr} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ G_{pr} \\ G_{sc} \\ G_{sc} \\ G_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{pr} \\ I_{sc} \\ I_{sc} \\ I_{pr} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 27})$$

Comme le transformateur à étudier est triphasé (trois colonnes ; celle de Gauche, du Milieu et de Droite). L'ensemble des équations des trois phases sont regroupés pour former une équation qui décrit la totalité du comportement électromagnétique du transformateur.

$$\begin{bmatrix} [K] + j\omega\sigma[M] & -j\omega\sigma[Q_{GMD}] \\ -j\omega\sigma[Q_{GMD}]^{tr} & j\omega\sigma[W_{GMD}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ G_{GMD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{GMD} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 28})$$

Avec :

$Q_{GMD}(N_n, N_{bob} \times 2)$  et  $W_{ABC}(N_{bob} \times 2, N_{bob} \times 2)$  sont les matrices des densités de courant.

$N_{bob}$ : Nombre de bobines .

Les termes des différentes matrices sont donnés par :

$$Q_{GMD} = \left[ \iint_{\Omega} (\alpha_i d\Omega)_G \quad \iint_{\Omega} (\alpha_i d\Omega)_M \quad \iint_{\Omega} (\alpha_i d\Omega)_D \right]$$

$$G_{GMD} = [G_G \quad G_M \quad G_D]^{tr}$$

$$I_{GMD} = [I_G \quad I_M \quad I_D]^{tr}$$

$$W_{GMD} = \begin{bmatrix} \iint_{\Omega} (d\Omega)_G & 0 & 0 \\ 0 & \iint_{\Omega} (d\Omega)_M & 0 \\ 0 & 0 & \iint_{\Omega} (d\Omega)_D \end{bmatrix}$$

### III.8.1.2 Modèle de couplage $A - J$ en régime transitoire

L'équation électromagnétique formulée en potentiel vecteur magnétique  $A$ , et l'équation de la densité de courant totale dans les enroulements sont donnés en régime transitoire par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + J_{sz} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III. 29. a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{tot} = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + J_{sz} \end{array} \right. \quad (\text{III. 29. b})$$

En procédant de la même façon qu'en régime harmonique, on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + \sigma \frac{\partial G}{\partial t} = \mathbf{0} \\ J_{tot} = -\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \sigma \frac{\partial G}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{III. 30})$$

En appliquant le schéma générale de discrétisation temporelle de (III. 20) l'équation (III. 30) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta K \cdot A_{t+\Delta t} - \sigma \frac{A_{t+\Delta t} - A_t}{\Delta t} + \sigma \frac{G_{t+\Delta t} - G_t}{\Delta t} + (1 - \theta) \sigma K \cdot A_t = 0 \\ \theta J_{t+\Delta t}^{tot} + (1 - \theta) J_t^{tot} = -\frac{\sigma}{\Delta t} (A_{t+\Delta t} - A_t) + \frac{\sigma}{\Delta t} (G_{t+\Delta t} - G_t) \end{array} \right. \quad (\text{III. 31})$$

L'écriture sous forme matricielle de l'équation (III. 31) est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} \left[ [K] - \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q] \\ -\frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q]^{tr} & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [W] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} A \\ G \end{array} \right]_{t+\Delta t} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ [I_{tot}]_{t+\Delta t} + \frac{(1-\theta)}{\theta} [I_{tot}]_t \end{array} \right] \\ & + \left[ \begin{array}{cc} \left[ \frac{(\theta-1)}{\theta} [K] - \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q] \\ -\frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q]^{tr} & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [W] \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} A \\ G \end{array} \right]_t \end{aligned} \quad (\text{III. 32})$$

En procédant de la même manière qu'en régime harmonique, on obtient le système matriciel regroupant les trois phases comme suit :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \left[ [K] - \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q_{GMD}] \\ -\frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q_{GMD}]^{tr} & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [W_{GMD}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ G_{GMD} \end{bmatrix}_{t+\Delta t} \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ [I_{GMD}]_{t+\Delta t} + \frac{(1-\theta)}{\theta} [I_{GMD}]_t \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \left[ \frac{(\theta-1)}{\theta} [K] - \frac{[M]}{\theta \Delta t} \right] & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q_{GMD}] \\ -\frac{\sigma}{\theta \Delta t} [Q_{GMD}]^{tr} & \frac{\sigma}{\theta \Delta t} [W_{GMD}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ G_{GMD} \end{bmatrix}_t \quad \text{(III. 33)}
\end{aligned}$$

Le système matriciel représenté par l'équation(III. 33) représente le modèle de couplage (A-J) en régime transitoire dans le transformateur.

### III.8.2 Couplage magnétique-circuit électrique

Le couplage (A-U) consiste à coupler l'équation magnétique en potentiel vecteur magnétique aux équations du circuit électrique au primaire et au secondaire faisant intervenir leurs paramètres électriques filaires. On ne considérera que le régime transitoire dans ce qui suit.

La relation existant entre la densité de courant  $J$  et le courant  $I$  dans une surface  $ds$  suivant la normale à la surface  $ds$  du conducteur est la suivante :

$$I = \int_{\text{conducteur}} \vec{j} \cdot \vec{ds} \quad \text{(III. 34)}$$

La densité de courant  $J$  est dirigé suivant l'axe oz tel que  $J = (0,0,J_z)$ , elle s'exprime en fonction du courant comme suit :

$$J_z = \frac{N}{S_c} \cdot I \quad \text{(III. 35)}$$

Avec :

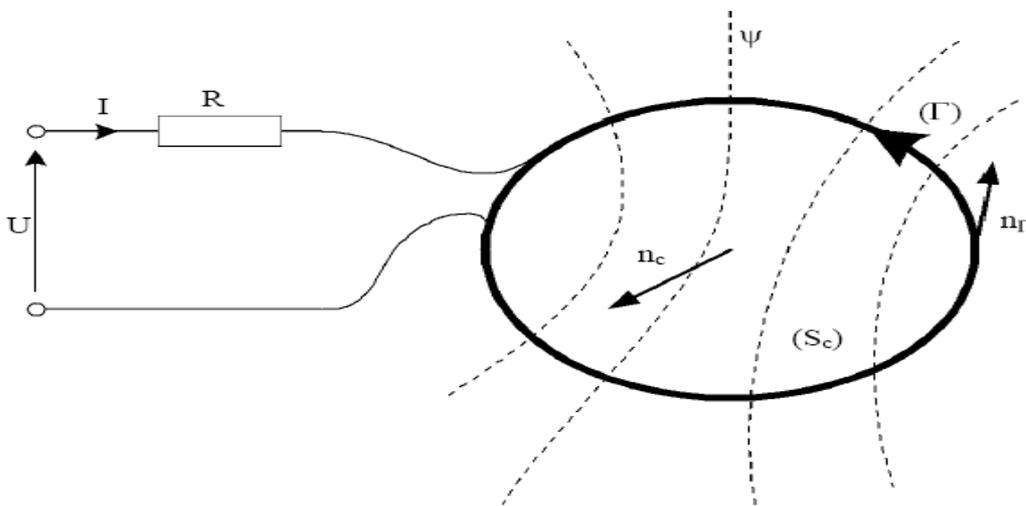
$N$ : Nombre de spires de l'enroulement ;

$S_c$ : Surface du conducteur ;

$I$ : Courant dans un conducteur.

### L'équation globale du circuit électrique

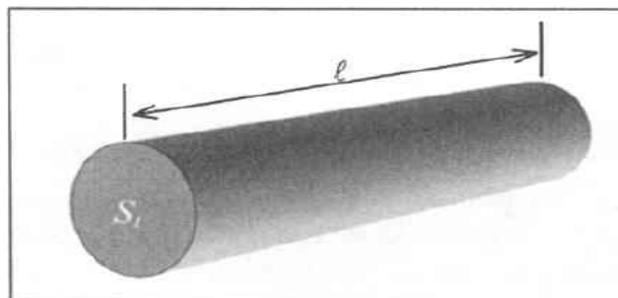
Un circuit électrique est constitué d'une résistance et d'une inductance à l'origine du flux magnétique



**Figure III.5 :**

Configuration type d'un circuit électrique

On prend un conducteur de longueur  $L$  et de surface  $S_c$  parcouru par un courant  $I$  tel que représenter dans la **figure III.6**



**Figure (III.6) :** Conducteur de surface  $S_c$  parcouru par un courant

L'hypothèse du problème électromagnétique 2-D nous permet de supposer que le gradient du potentiel électrique  $V$  le long du conducteur est constant. On exprime alors la différence du potentiel  $U_c$  sur le conducteur par :

$$\text{grad}V = -\frac{U_c}{l} \cdot n \quad (\text{III. 36})$$

Où  $n$  est la normale unitaire à la section du conducteur. Ainsi, l'équation (III. 34) devient:

$$I = -\int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS + \int_{S_t} \sigma \frac{U_c}{l} \cdot n dS \quad (\text{III. 37})$$

La définition de la résistance dans un conducteur est :

$$R_c = \frac{l}{\sigma S_c} \quad (\text{III. 38})$$

L'équation (III. 38) dans (III. 37) nous donne :

$$I = \frac{U_c}{R_c} - \int_{S_t} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (\text{III. 39})$$

On obtient alors l'expression de la différence de potentiel  $U_c$  sur le conducteur comme suit :

$$U_c = R_c \cdot I + R_c \int_{S_c} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (\text{III. 40})$$

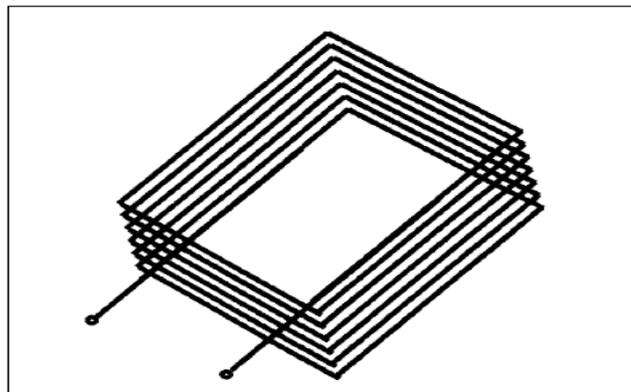


Figure (III.7) : une bobine de surface  $S_t$

Si on prend toute la bobine avec  $N$  conducteurs (**figure (III.7)**), on obtient alors l'expression de la différence de potentiel  $U_t$  sur toute la bobine comme suit :

$$U_t = N \cdot U_c = N \cdot R_c \cdot I + N \cdot R_c \int_{S_c} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (\text{III. 41})$$

En remplaçant la résistance  $R_c$  par son expression donnée par (**III. 38**), on aura :

$$U_t = N \cdot R_c \cdot I + N \cdot \frac{l}{S_c} \int_{S_c} \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (\text{III. 42})$$

Si on introduisant l'inductance de la bobine on aura l'écriture finale de l'équation comme suit :

$$U_t = R I_t + L \frac{d}{dt} I_t + N \cdot \frac{l}{S_c} \int_{S_c} \frac{\partial A}{\partial t} dS \quad (\text{III. 43})$$

Lors du calcul électromagnétique, la seule composante  $A$  du potentiel vecteur magnétique est calculé par éléments finis, et s'exprime par sa forme discrétisée donnée (**III. 9**), la forme matricielle obtenue est :

$$[U_t] = [L] \frac{d}{dt} \{I\} + [R] \{I\} + [C]^{tr} \frac{\partial}{\partial t} \{A\} \quad (\text{III. 44})$$

L'équation électromagnétique formulée en potentiel vecteur magnétique à résoudre est :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_{yy}} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{N}{S_c} \cdot I \quad (\text{III. 45})$$

La formulation éléments finis de l'équation (**III. 45**) aboutie à la forme matricielle suivante :

$$[K] \{A\} + [M] \frac{\partial}{\partial t} \{A\} - [C] \{I\} = 0 \quad (\text{III. 46})$$

Avec :  $[C]$  est la matrice de couplage.

En appliquant le schéma générale de discrétisation de (III. 20)aux équations (III. 44) et(III. 46), on abouti aux formes matricielles es suivantes:

$$\theta K.A_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t}(A_{t+\Delta t} - A_t) - \theta C(I_{t+\Delta t}) + (1 - \theta)K.A_t - (1 - \theta)C I_t = 0 \quad (\text{III. 47})$$

$$\begin{aligned} \frac{C^{tr}}{\Delta t}A_{t+\Delta t} + \frac{L}{\Delta t}I_{t+\Delta t} + \theta R I_{t+\Delta t} \\ = \theta U_{t+\Delta t} + (1 - \theta)U_t + \frac{C^{tr}}{\Delta t}A_t + \frac{L}{\Delta t}I_t - (1 - \theta)R I_t \end{aligned} \quad (\text{III. 48})$$

En appliquant le schéma de discrétisation de Crank-Nicholson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) aux équations (III. 47) et (III. 48),on obtient :

$$\frac{K}{2}.A_{t+\Delta t} + \frac{M}{\Delta t}A_{t+\Delta t} - \frac{C}{2}(I_{t+\Delta t}) = +\frac{1}{2}C_t + \frac{M}{\Delta t}A_t - \frac{K}{2}A_t \quad (\text{III. 49})$$

$$\frac{C^{tr}}{\Delta t}A_{t+\Delta t} + \frac{L}{\Delta t}I_{t+\Delta t} + \frac{R}{2} I_{t+\Delta t} = \frac{U_{t+\Delta t} + U_t}{2} + \frac{C^{tr}}{\Delta t}A_t + \frac{L}{\Delta t}I_t - \frac{R}{2} I_t \quad (\text{III. 50})$$

Le couplage des deux équations précédentes nous permis d'écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{M}{\Delta t} + \frac{K}{2} & -\frac{C}{2} \\ \frac{C^{tr}}{\Delta t} & \frac{L}{\Delta t} + \frac{R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_{t+\Delta t} + U_t}{2} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \frac{M}{\Delta t} - \frac{K}{2} & \frac{C}{2} \\ \frac{C^{tr}}{\Delta t} & \frac{L}{\Delta t} - \frac{R}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_t \end{aligned} \quad (\text{III. 51})$$

Pour rendre la matrice symétrique on multiplie la premier équation par (2) et la deuxième par ( $\Delta t$ ) :

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{2M}{\Delta t} + K & -C \\ C^{tr} & L + \frac{R\Delta t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left(\frac{U_{t+\Delta t} + U_t}{2}\right)\Delta t \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{2M}{\Delta t} - K & C \\ C^{tr} & L - \frac{R\Delta t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix}_t
 \end{aligned} \tag{III. 52}$$

Le système matriciel représenté par l'équation(III. 52) représente le modèle de couplage (A-U) en régime transitoire dans le transformateur.

Avec :

$$[C] = [C]_{GMD} = [C_{pr} \ C_{sc} \ C_{sc} \ C_{pr}]_{GMD}$$

$$\begin{bmatrix} L - \frac{R\Delta t}{2} \end{bmatrix} = [Z]_{GMD} = \begin{bmatrix} Z_{pr} & & & \\ & Z_{sc} & & \\ & & Z_{sc} & \\ & & & Z_{pr} \end{bmatrix}_{GMD}$$

$$[U]_{GMD} = \begin{bmatrix} U_{pr} \\ U_{sc} \\ U_{sc} \\ U_{pr} \end{bmatrix}_{GMD}$$

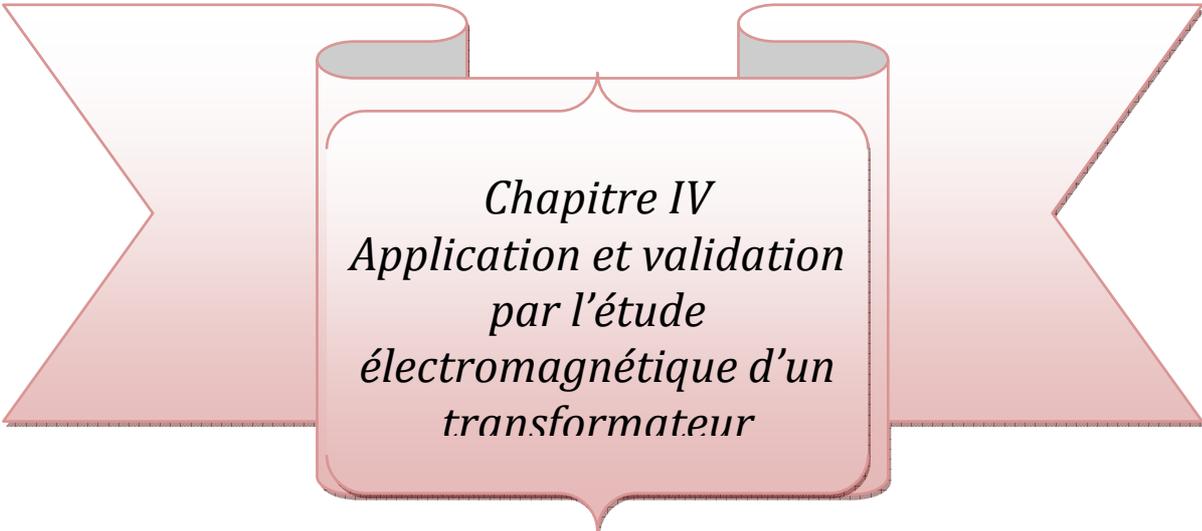
$$[I]_{GMD} = \begin{bmatrix} I_{pr} \\ I_{sc} \\ I_{sc} \\ I_{pr} \end{bmatrix}_{GMD}$$

**Conclusion**

Dans le cadre de ce chapitre, les équations aux dérivées partielles dans le plan cartésien bidimensionnel sont résolues en utilisant la méthode des éléments finis permettant ainsi l'étude du comportement des grandeurs électromagnétiques dans les dispositifs électrotechniques en général et le transformateur en particulier.

Les équations aux dérivées partielles en potentiel vecteur magnétique sont couplées dans le cas d'une alimentation en courant à l'équation de la densité de courant totale dans les enroulements et dans le cas d'une alimentation en tension à l'équation du circuit électrique.

Dans le chapitre qui suit, nous allons procéder aux validations des deux modèles couplés électrique-magnétique (A-J) et (A-U) à travers la modélisation d'un transformateur.



*Chapitre IV  
Application et validation  
par l'étude  
électromagnétique d'un  
transformateur*

## Introduction

La modélisation consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques. Les équations de Maxwell, qui regroupent le théorème d'Ampère et la loi de Faraday, associées aux lois de comportement des différents milieux, constituent le modèle mathématique. La résolution d'un tel modèle consiste à rechercher les évolutions spatiales et temporelles des champs magnétiques et électriques.

La modélisation tant magnétique-qu'électrique du transformateur nous permettra donc l'obtention des réponses précises sur le comportement qualitatif et quantitatif des grandeurs électromagnétiques.

Ce chapitre présente une application des deux modèles de couplage magnétique-électrique développés précédemment sur un transformateur de distribution, existant déjà à Electro-industrie d'AZAZGA (ex-ENEL) ainsi que l'exploitation des résultats. Le code de calcul par éléments finis est implémenté sous environnement MATLAB.

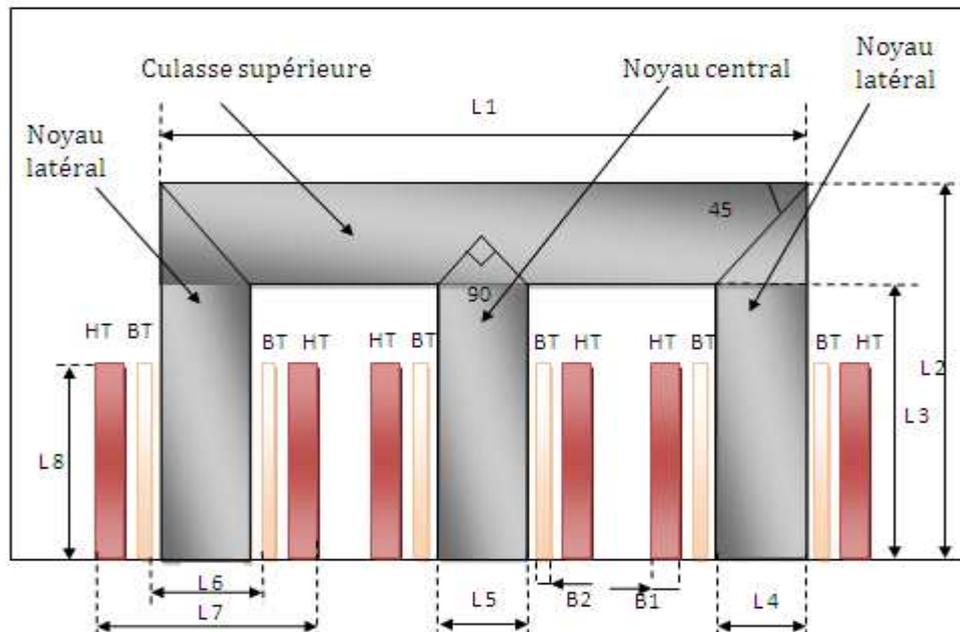
Nous présenterons la modélisation électromagnétique de l'appareil à travers les différentes étapes suivantes

- Présentation de la géométrie et du maillage du transformateur à étudier.
- Implémentation des modèles couplés magnétique-électrique : équation magnétique-densité de courant, équation magnétique-circuit électrique en régime magnétodynamique harmonique, régime magnétodynamique transitoire et magnétostatique par l'utilisation de la méthode des éléments finis.
- Exploitation des résultats du calcul électromagnétique en vue de déterminer les densités de pertes avec les pertes fer dans les tôles magnétiques et les pertes joules dans les enroulements ainsi que les courants induits et les courants totaux.

## IV.1. Présentation du transformateur étudié

### IV.1.1 Les caractéristiques géométriques

La configuration géométrique du transformateur en coupe transversale est donnée par la **figure IV.1**



**Figure IV.1:** Configuration géométrique transversal 2D du transformateur

Les dimensions géométriques du transformateur sont données dans le tableau **IV.1** comme suit :

composante	Signification	Valeur	Unité
L1	Longueur de la culasse	930	mm
L2	Hauteur extérieur du noyau latéral	810/2	mm
L3	Hauteur intérieur du noyau latéral	450/2	mm
L4	Largeur du noyau latéral droite	180	mm
L5	Largeur du noyau central	180	mm
L6	Diamètre intérieur de la bobine BT	198	mm
L7	Diamètre extérieur de la bobine HT	351	mm
L8	Hauteur des enroulements	436/2	mm
B1	Epaisseur de la bobine haute tension	43	mm
B2	Epaisseur de la bobine basse tension	20.5	mm

**Tableau IV.1 :** Données géométrique du transformateur

### IV.1.2 Les propriétés électriques et magnétiques

Les propriétés physiques relatives aux modèles électromagnétiques sont données par le tableau IV.3 suivant :

Régions du transformateur	Perméabilité Magnétique Relative	Conductivité Electrique $\times 10^6 [\Omega m]^{-1}$
Enroulements (cuivre)	1	58
Tôles magnétiques (FeSi)	$\mu_{xx}=2000$ $\mu_{yy}=2000$	2
Air environnant	$4\pi 10^{-7}$	0

**Tableau IV.2 :** Propriétés électromagnétique

Les données du transformateur sont présentées dans le tableau suivant

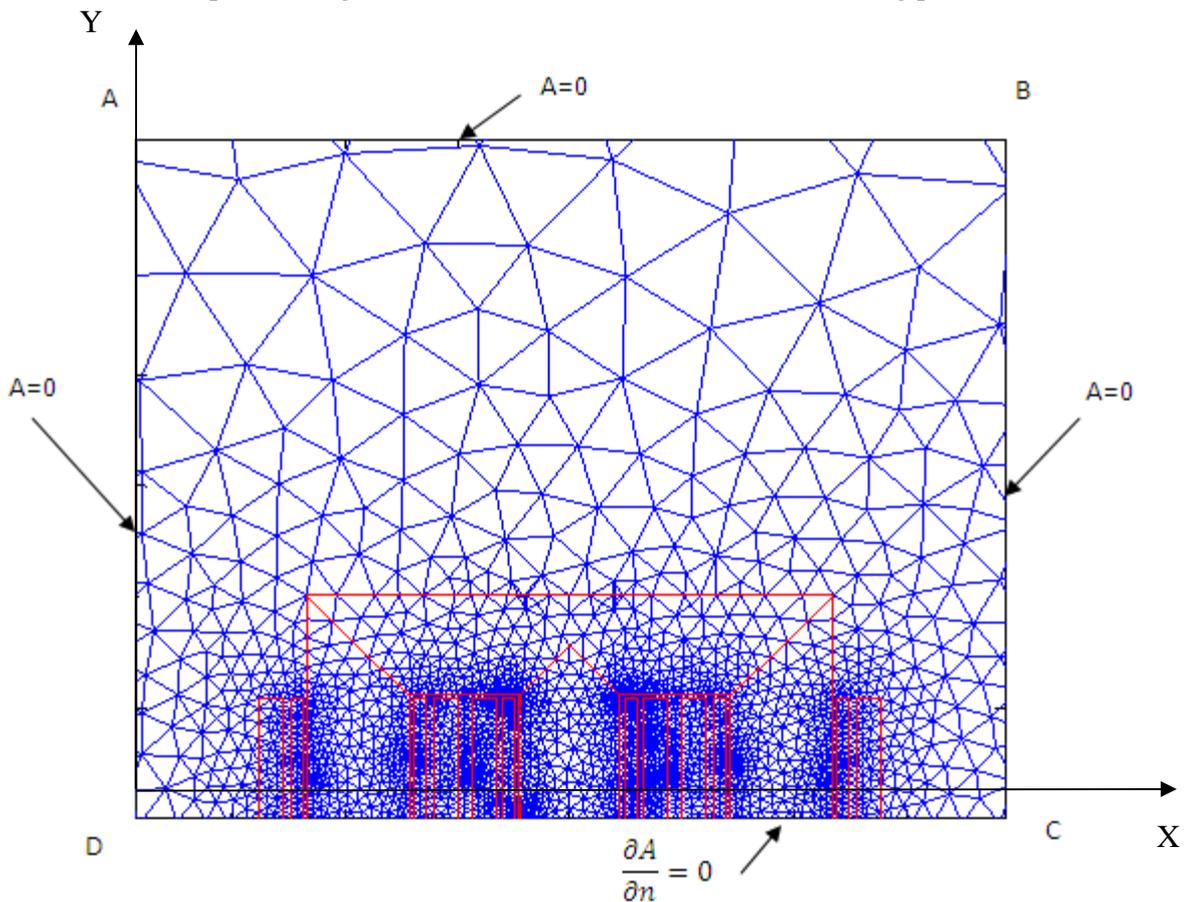
Caractéristique	Valeurs	Unité
Puissance apparente	630	KVA
Nombre de phase	3	-
Fréquence d'alimentation	50	Hz
Connexion des enroulements primaires	Triangle (D)	-
Connexion des enroulements secondaires	Etoile (Y)	-
Tension nominale au primaire	30	KV
Tension nominale au secondaire	400	V
Courant nominal au primaire	12,12	A
Courant nominal au secondaire	909	A
Nombre de spires au primaire	3000	-
Nombre de spires au secondaire	22	-
Nombre de couches au primaire	14	-
Nombre de couches au secondaire	2	-
Resistance de l'enroulement primaire	17,33	$\Omega$
Resistance de l'enroulement secondaire	$2,71 \cdot 10^{-3}$	$\Omega$
Inductance de l'enroulement primaire	$1,4 \cdot 10^{-3}$	H
Inductance de l'enroulement secondaire	0,154	H

**Tableau IV.3 :** Les données du transformateur

## VI.2 Implémentation de la géométrie et maillage avec les conditions aux limites

Dans toutes les simulations réalisées on a modélisé, pour des raisons de symétrie, 1 /4 du transformateur. La géométrie de la structure 2-D cartésienne du transformateur étudiée est réalisée en utilisant les outils de l'environnement MATLAB (PDETOOL).

En raison du plan de symétrie une condition aux limite du type Neumann nulle



est imposée sur le tronçon (C-D) et des conditions aux limites du type Dirichlet

**Figure IV.2 :** Maillage 2-D de 1/4 du transformateur avec les conditions aux limites

La **figure IV.2** présente le maillage pour la résolution élément finis, les éléments utilisés dans la résolution sont des éléments triangulaires.

### VI.3 Modélisation couplée 2-D du transformateur

Dans cette partie, est conduite la modélisation électromagnétique du transformateur par la résolution des équations magnétostatiques et magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique en régime harmonique et transitoire, en utilisant la méthode des éléments finis sous environnement Matlab-Pdetool.

Outre la détermination des grandeurs telles que le potentiel vecteur, l'induction magnétique, la densité du courant dans les inducteurs ainsi que les pertes globales (pertes Joule dans les enroulements et pertes fer dans les tôles magnétiques), l'objectif étant de calculer les densités de pertes dans le transformateur en vue d'envisager une modélisation fine du problème électromagnétique.

#### VI.3.1 Modélisation du transformateur en régime harmonique

##### 1. Etude du régime harmonique à vide :

Les résultats durant la simulation en régime à vide ont été obtenus pour une séquence de courant primaire donnée par le tableau suivant alors que les courants secondaires sont nuls:

Phases	Phases 1	Phases 2	Phases 3
Courants primaire (A)	-8.7	17.40	-8.7

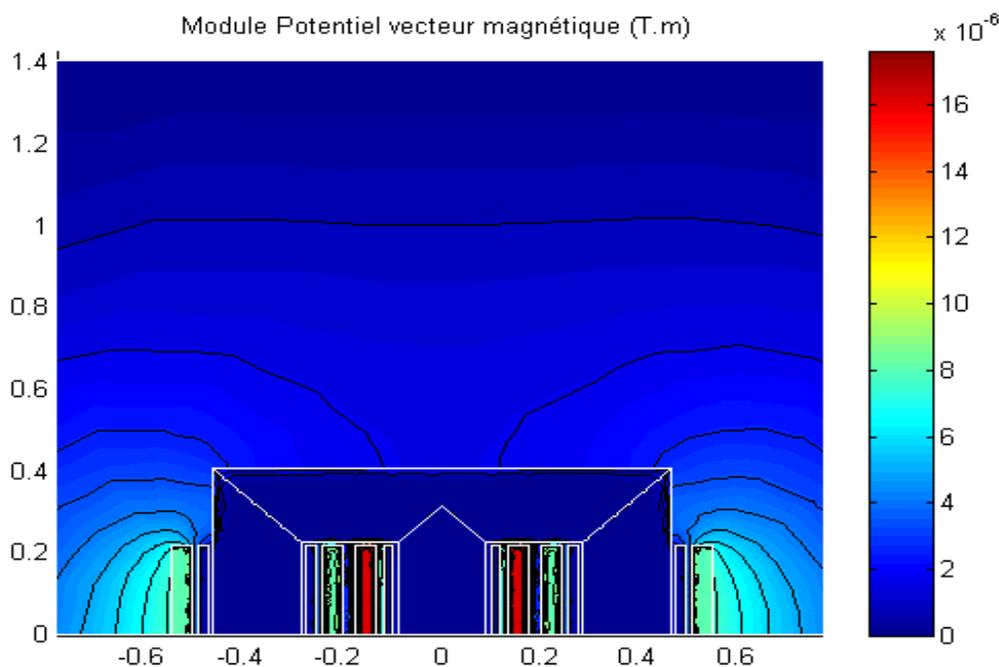
**Tableau IV.4 :** Séquence des courants imposés aux enroulements

Les courants sources et induits ainsi que les courants totaux dans les enroulements primaires et secondaires des trois phases du transformateur sont représentés dans le tableau suivant :

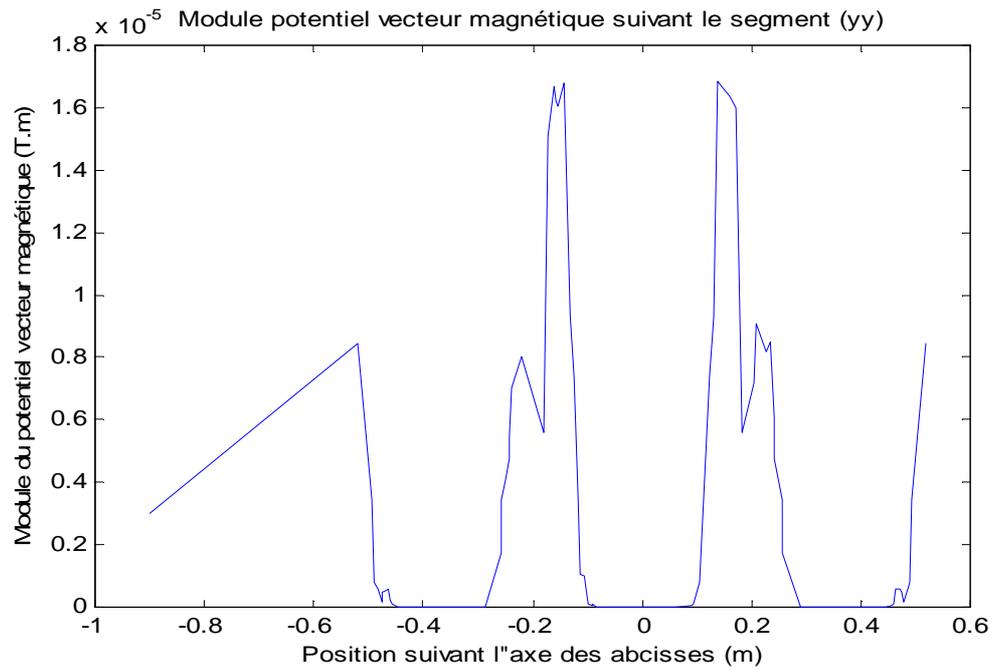
Phases	Primaire						Secondaire					
	Phase 1		Phase 2		Phase 3		Phase 1		Phase 2		Phase 3	
Courants A	Aller	Retour	Aller	Retour	aller	Retour	Aller	Retour	Aller	Retour	Aller	retour
Sources	4.39	-4.50	8.89	-8.89	4.5	-4.39	10.28	10.01	19.59	19.55	9.99	10.27
Induits	-4.3	4.20	-8.51	8.51	-4.20	4.30	10.28	10.01	19.59	19.55	9.99	10.27
Totaux	8.70	-8.71	17.40	-17.4	8.71	-8.70	0	0	0	0	0	0

**Tableau IV.5 :** Courants de source et courants induits à vide

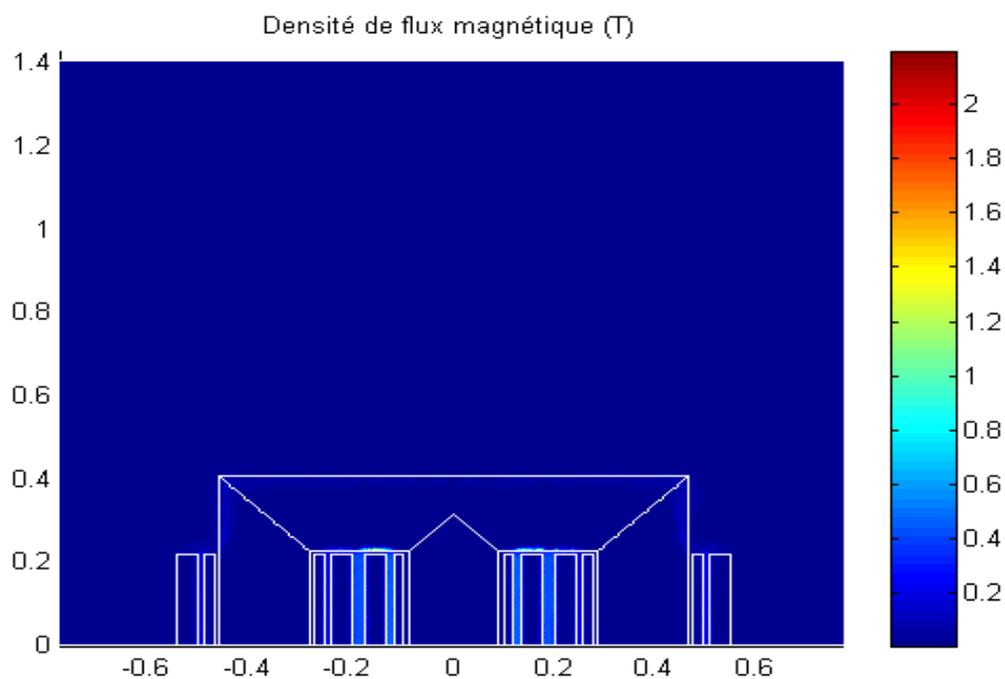
Nous nous intéresserons dans ce qui suit à l'allure du potentiel vecteur magnétique ainsi que sa répartition en fonction de la position suivant l'axe des abscisses, l'allure de la densité de flux magnétique et les allures des densités de pertes dans les enroulements.



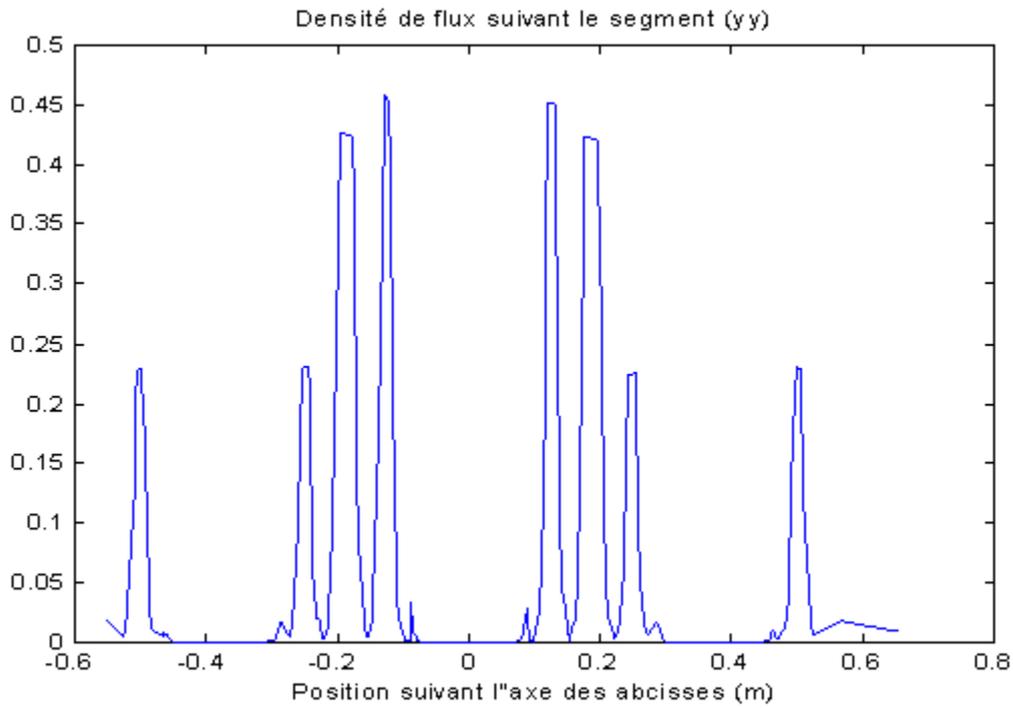
**Figure IV.3 :** Allure du module potentiel vecteur magnétique A [T.m], (Zoom)



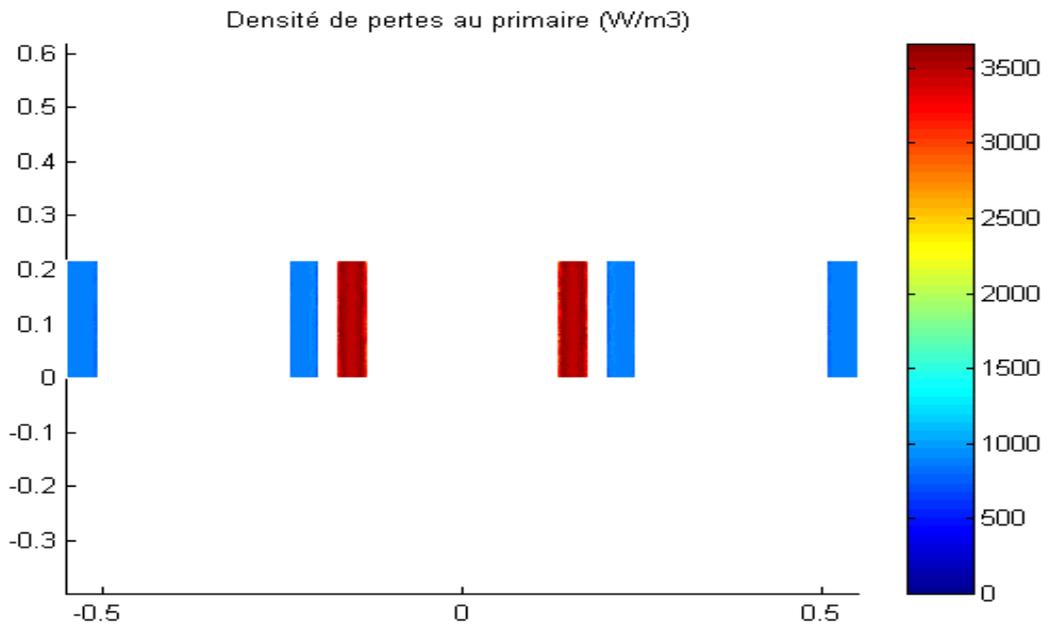
**Figure IV.4 :** La répartition du module potentiel vecteur magnétique A [T.m]



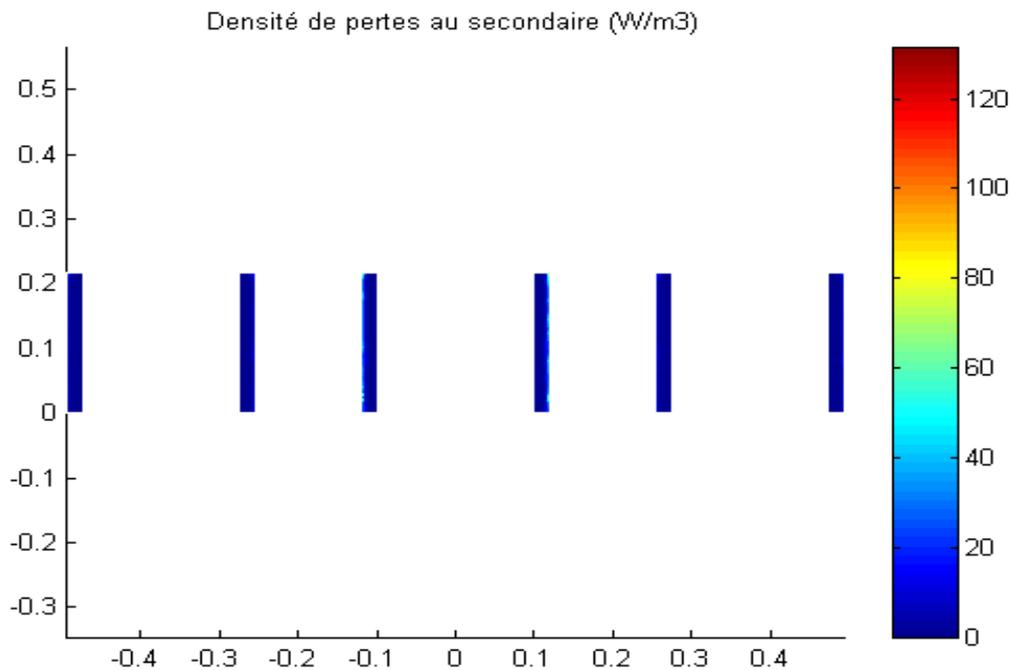
**Figure IV.5 :** La carte de l'induction magnétique [T]



**Figure IV.6 :** La répartition de la densité du flux magnétique [T], (y=0,2)



**Figure IV.7 :** La carte de la densité de puissance dans l'enroulement primaire [W/m<sup>3</sup>]



**Figure IV.8 :** La carte de la densité de puissance dans l'enroulement secondaire [W/m<sup>3</sup>]

## 2. Etude du régime harmonique en charge

Les résultats durant la simulation en charge ont été obtenus pour une séquence de courants primaire et secondaire donnée par le tableau suivant :

Phases	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Courant primaire (A)	-06	12	-06
Courant secondaire (A)	-405	909	-405

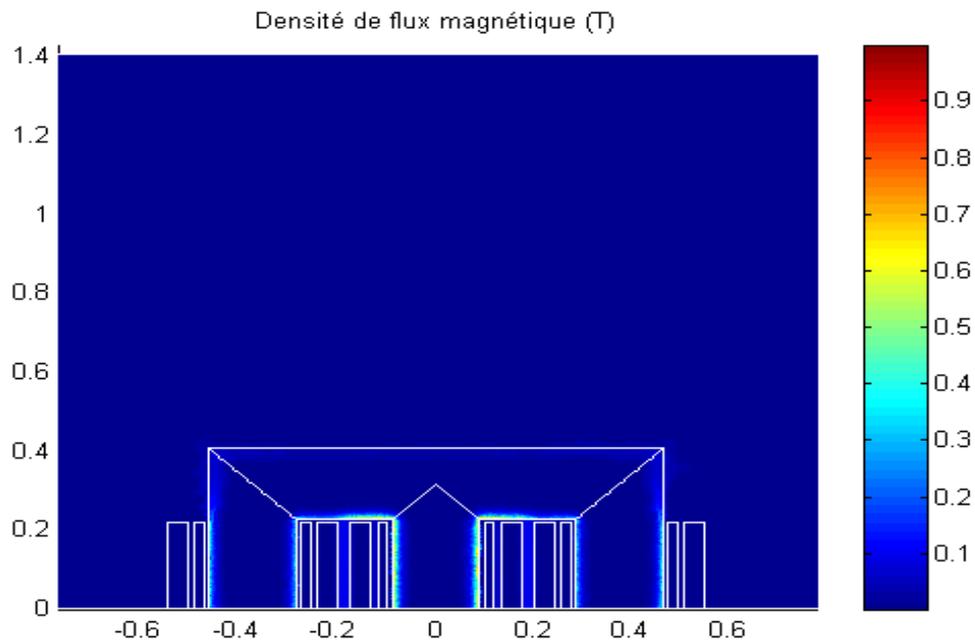
**Tableau IV.6 :** Séquence des courants imposés dans les enroulements

Nous nous intéresserons dans ce qui suit à l'allure de la densité de flux magnétique et les allures des densités de pertes dans les enroulements.

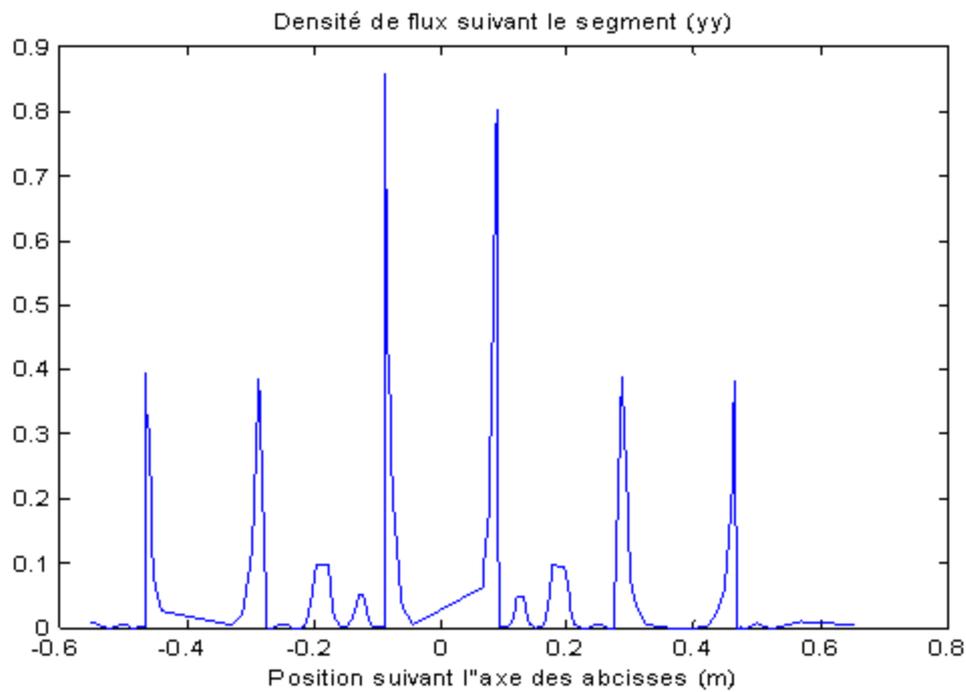
Les courants sources et induits ainsi que les courants totaux dans les enroulements primaires et secondaires des trois phases du transformateur sont représentés dans le tableau suivant :

Phases	Primaire						Secondaire					
	Phase 1		Phase 2		Phase 3		Phase 1		Phase 2		Phase 3	
Courants (A)	Aller	Retour	Aller	retour	aller	Retour	Aller	Retour	Aller	Retour	aller	retour
Source	2.99	-2.99	6	-6	2.99	-2.99	202.52	-202.5	454.70	-454.7	202.51	-202.5
Induits	-3	3	-5.9	5.99	-3	3	-202.4	202.4	-454.3	454.30	-202.5	202.47
Totaux	6	-6	12	-12	6	-6	405	-405	909	-909	405	-405

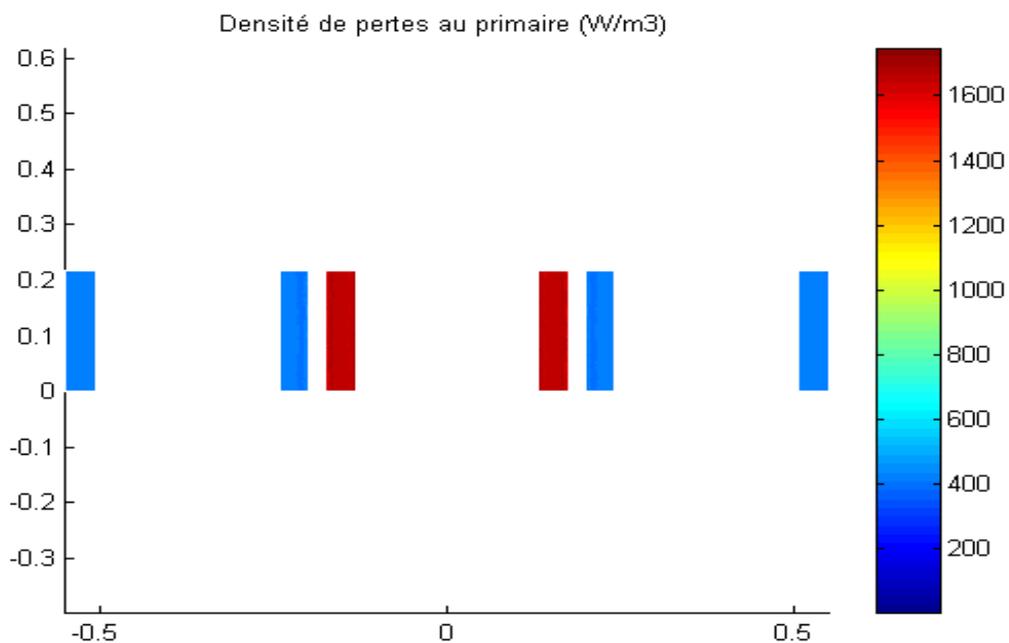
**Tableau IV.7 :** Courants de source et courants induits en charge



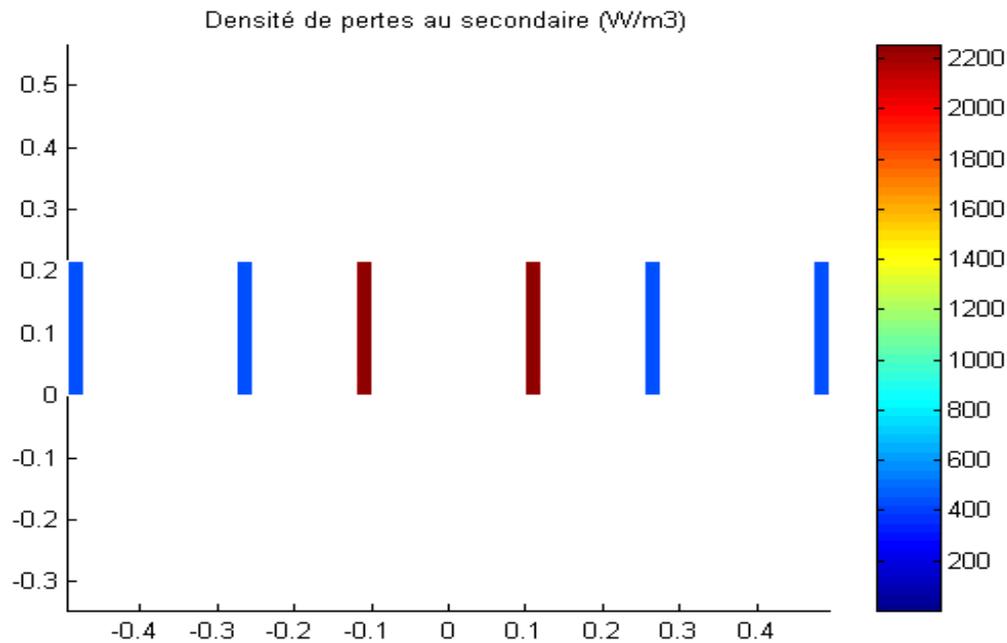
**Figure IV.9 :** La carte de la densité de flux magnétique [T]



**Figure IV.10** : La répartition de la densité du flux magnétique [T], ( $y=0,2$ )



**Figure IV.11** : La carte de la densité de puissance dans l'enroulement primaire [W/m<sup>3</sup>]



**Figure IV.12** : La carte de la densité de puissance dans l'enroulement secondaire [W/m<sup>3</sup>]

### Interprétation des résultats en régime harmonique

Les tableaux IV.5 et IV.7 respectivement montrent bien qu'en régime harmonique à vide, le courant total au primaire est égal au courant imposé et dans le secondaire on trouve un courant parfaitement nul, et dans le régime harmonique en charge, le courant total au primaire et au secondaire sont égaux aux courants imposés.

La figure IV.3 représente l'allure du module potentiel vecteur magnétique. On observe une concentration des lignes de champ à la surface et sur une épaisseur  $\delta$  du circuit magnétique, ce qui se traduit par le phénomène d'effet de peau dans les matériaux conducteurs et à l'interface entre les deux enroulements, cette concentration diminue loin de cet intervalle, l'enroulement basse tension (intérieur) à une haute attraction du flux de fuite dû à la haute perméabilité du circuit magnétique.

La figure IV.4 donne la répartition du module du potentiel vecteur magnétique dans un segment suivant l'axe des abscisses, cette répartition concorde parfaitement avec l'allure du potentiel vecteur magnétique donné par la figure IV.3.

Les figures IV.5 et IV.9 représentent les allures de l'induction magnétique. On constate facilement qu'une augmentation des grandeurs source provoque une augmentation de l'induction magnétique. Cela veut dire que l'induction magnétique est proportionnelle aux grandeurs de source.

Les figures IV.6 et IV.10 donnent la répartition de l'induction magnétique dans un segment suivant l'axe des abscisses, cette répartition concorde parfaitement avec les allures de l'induction donnée par les figures IV.5 et IV.9.

Les figures (IV.7, IV.11) et (IV.8, IV.12) représentent respectivement, les densités de puissance dans les enroulements primaires et secondaires, on voit bien que les valeurs les plus importantes de celle-ci sont relevées au niveau de la phase du milieu ce qui est en concordance avec les courants imposés. On constate aussi que dans le régime harmonique en charge les densités de puissances sont plus élevées au secondaire qu'au primaire et ceci est dû au courant le plus élevé dans l'enroulement secondaire, contrairement au fonctionnement à vide.

### VI.3.2 Modélisation du transformateur en régime transitoire

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la simulation des deux modèles de couplage. Les deux consistent à coupler l'équation magnétique respectivement à l'équation de la densité de courant (A-J) et aux équations du circuit électrique au primaire et au secondaire (A-U). Cela pour la détermination des courants, les pertes fer à vide et les pertes Joule en court-circuit.

Ces pertes sont données par :

$$P = \iint_{\Omega} \sigma \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 d\Omega$$

L'organigramme de l'implémentation des outils de calcul est le suivant :

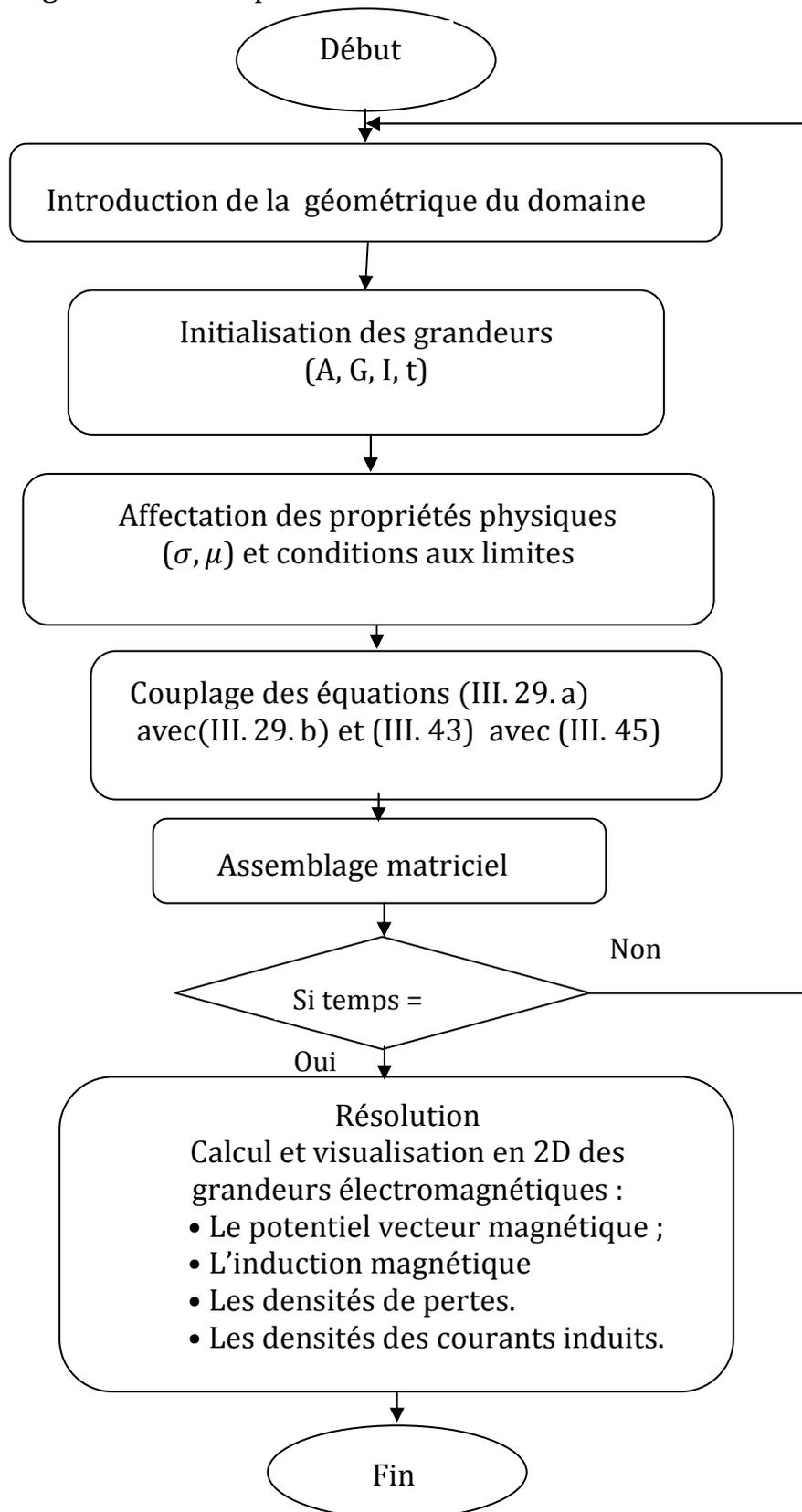


Figure IV.13 : Organigramme de l'implémentation

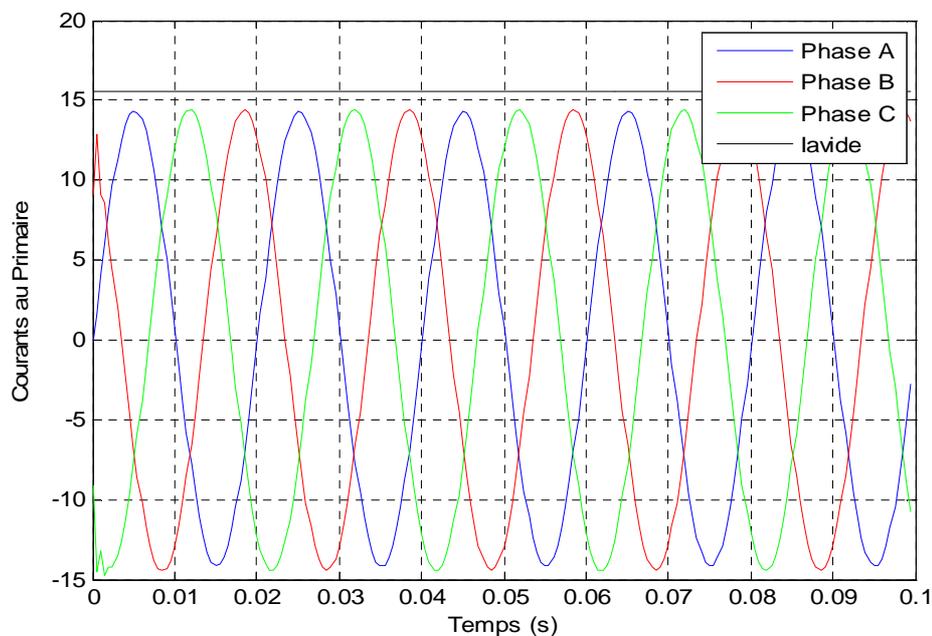
### 1. Etude du régime transitoire à vide :

Nous allons représenter les différentes caractéristiques de la résolution dans le tableau IV.8

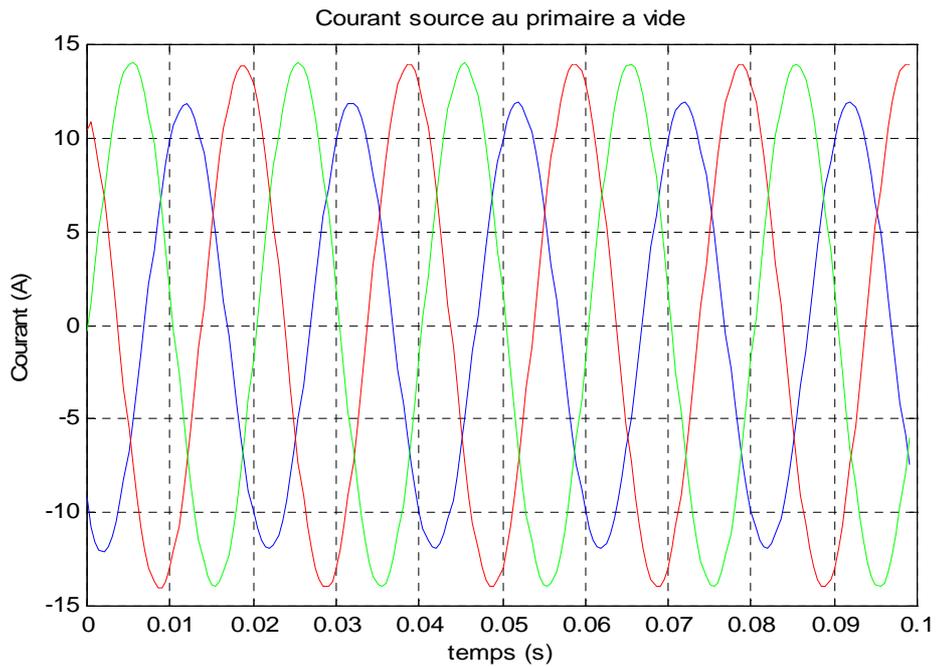
La tension appliquée au primaire	$U_{pr}$	30000 V
Le courant au primaire	$I_{pr}$	15.55 A
La tension au secondaire	$U_{sc}$	400 V
Le courant au secondaire	$I_{sc}$	0
Impédance de charge	$Z_{ch}$	$1e3\Omega$
Nombre d'élément triangulaire	$N_t$	10848
Nombre de nœuds	$N_p$	5492
Le pas de temps	$\Delta t$	0.5 ms
Nombre d'itérations	nit	200
Conductivité électrique du cuivre	$\sigma_{cu}$	$5.8 \cdot 10^7 [\Omega m]^{-1}$
Conductivité électrique du circuit magnétique	$\sigma_{cm}$	$1.4 \cdot 10^6 [\Omega m]^{-1}$
Perméabilité magnétique du circuit magnétique	$\mu_{cm}$	2000

**Tableau IV.8 :** Différentes caractéristique de résolution

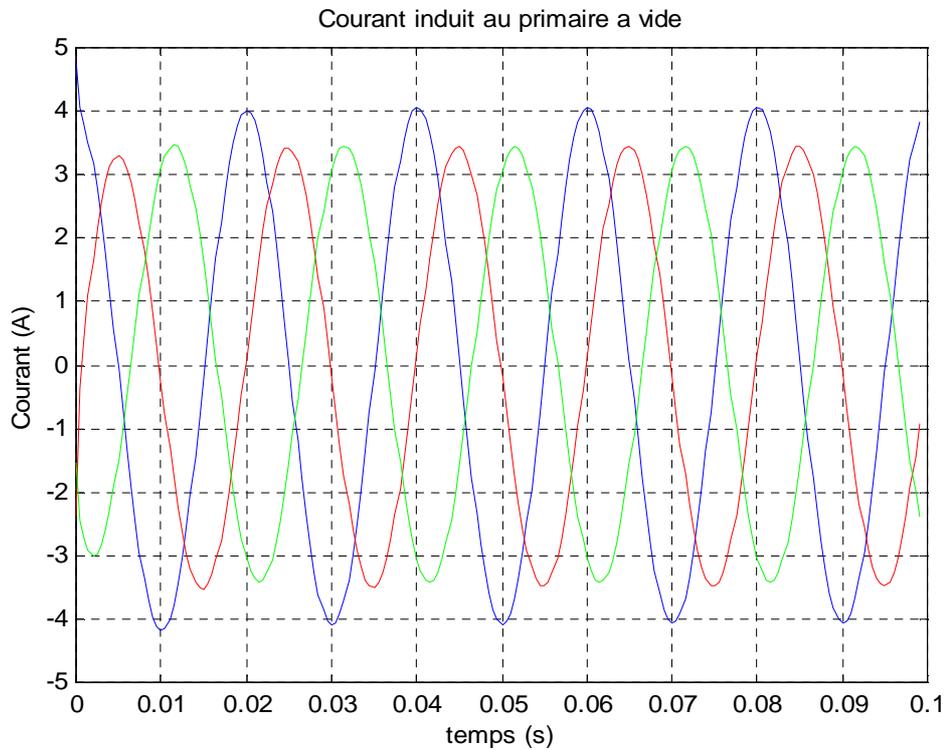
Les différents résultats obtenus des deux modèles sont donnés par les figures suivantes :



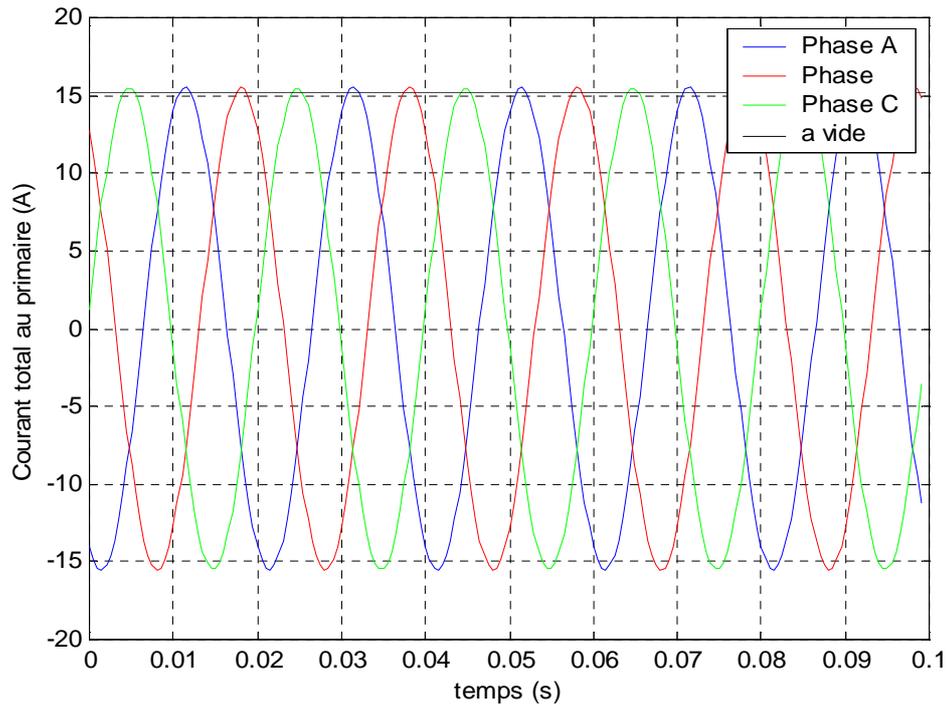
**Figure IV.12:** Allure du courant au primaire [A] (modèle A-U)



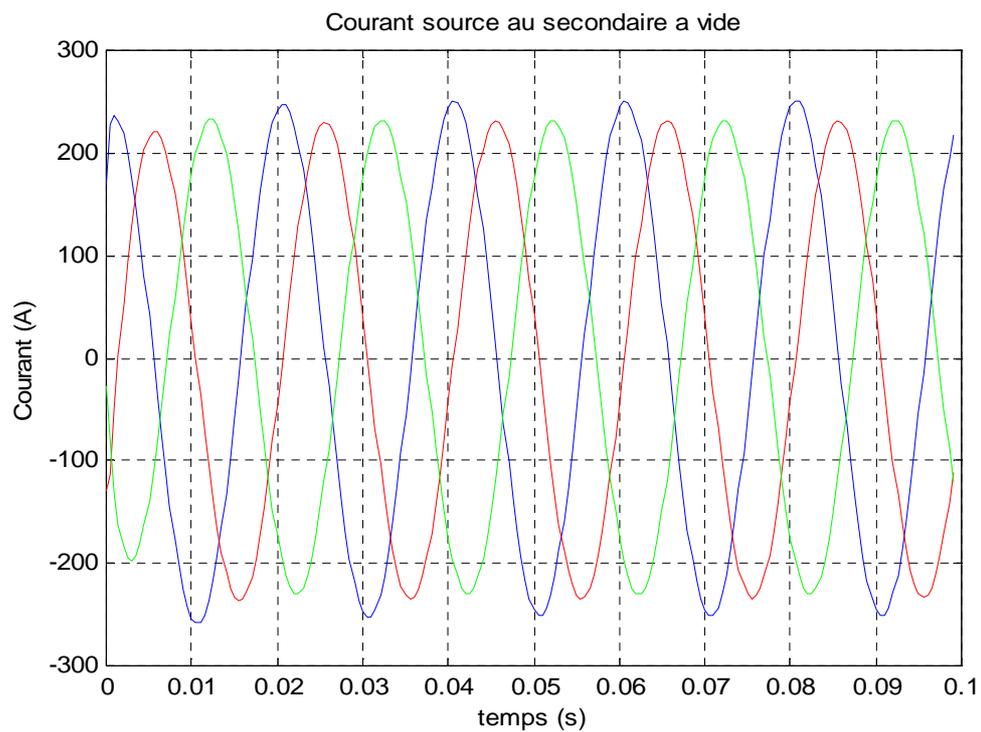
**Figure IV.13:** Allure des courants source au primaire [A] (modèle A-J)



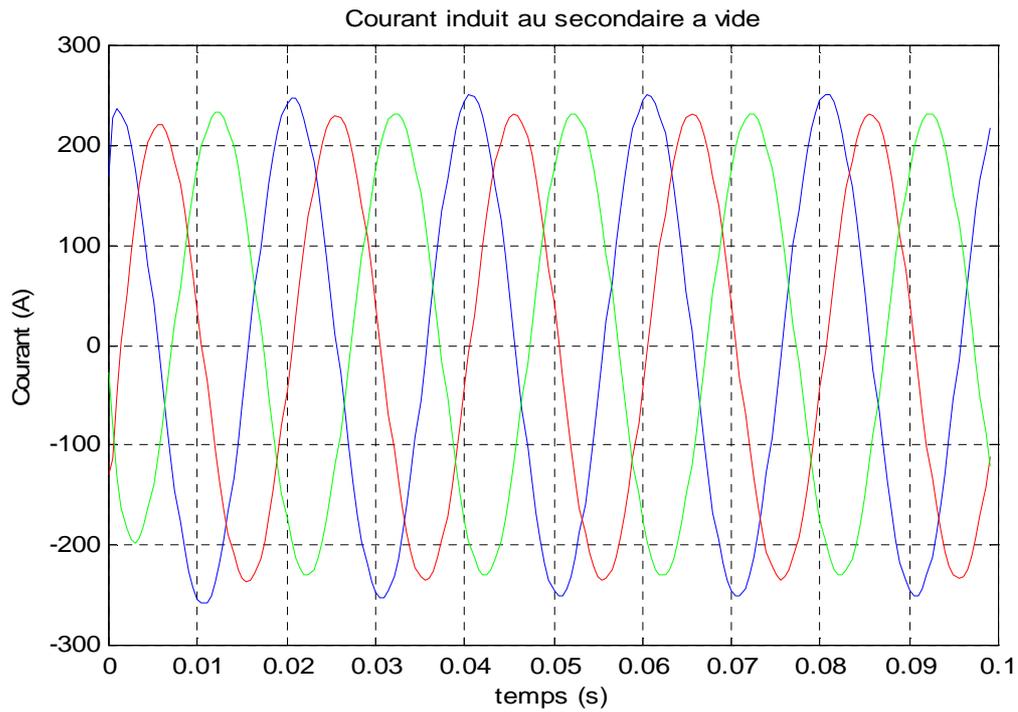
**Figure IV.14:** Allure des courants induits au primaire [A] (modèle A-J)



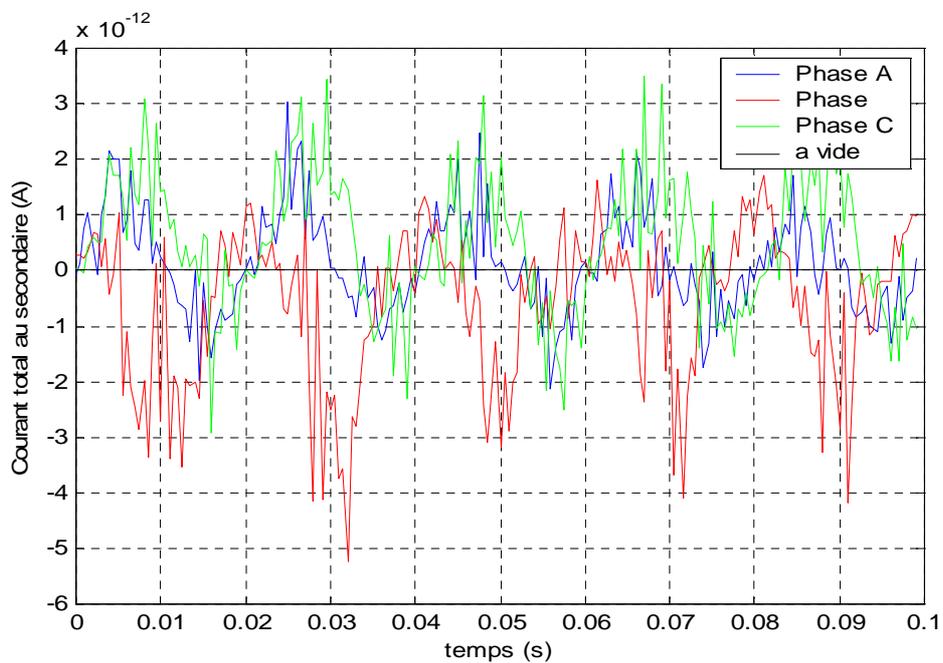
**Figure IV.15:** Allure du courant total au primaire [A] (modèle A-J)



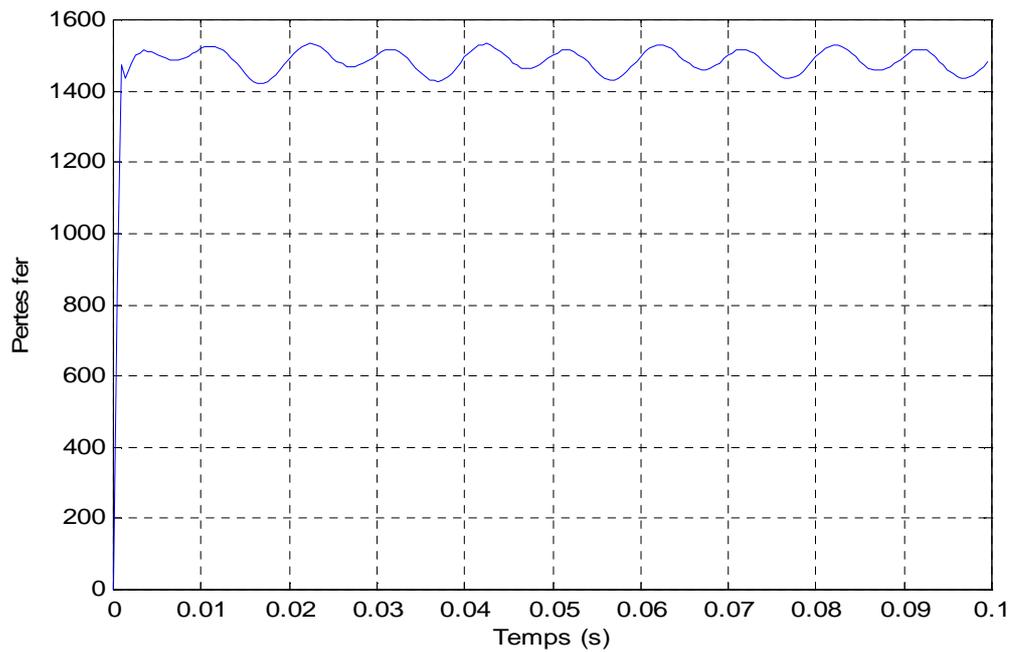
**Figure IV.16:** Allure des courants source au secondaire [A] (modèle A-J)



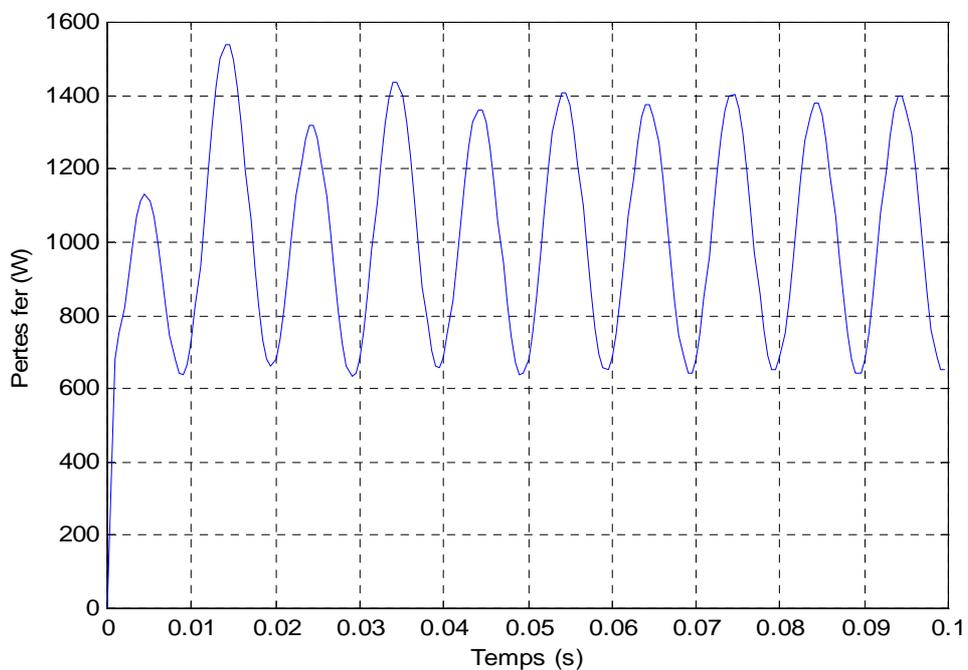
**Figure IV.17:** Allure des courants induits au secondaire [A] (modèle A-J)



**Figure IV.18 :** Allure du courant total au secondaire [A]



**Figure IV.19 :** Allure des pertes à vide [W] (modèle A-U)



**Figure IV.20 :** Allure des pertes à vide [W] (modèle A-J)

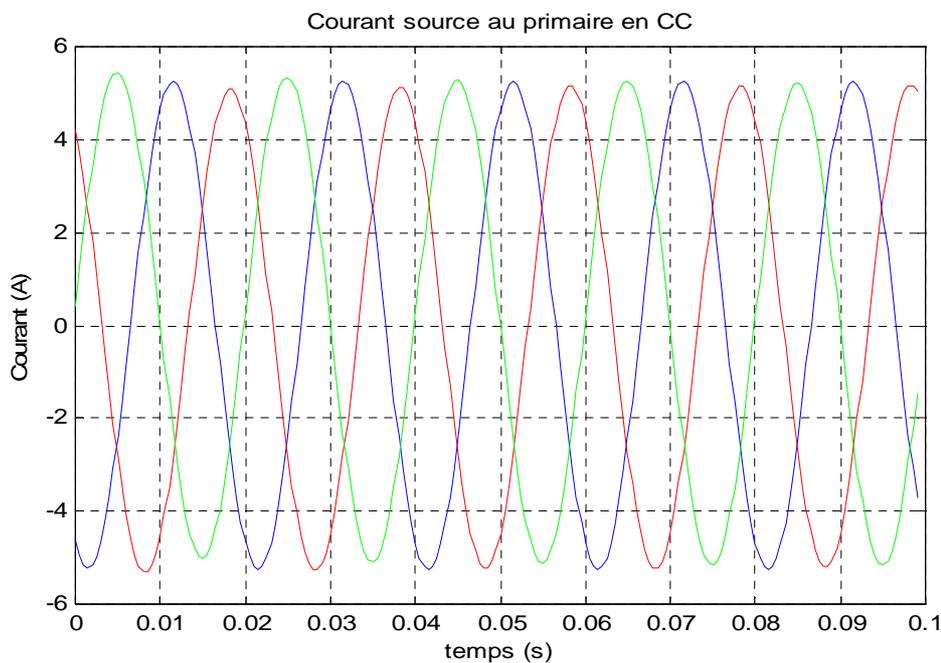
## 2. Etude du régime transitoire en court-circuit :

Dans le tableau IV.9, nous allons représenter les différentes caractéristiques de la résolution

La tension appliquée au primaire	$U_{pr}$	1700 V
Le courant au primaire	$I_{pr}$	10.15 A
La tension au secondaire	$U_{sc}$	0 V
Le courant au secondaire	$I_{sc}$	760 A
Impédance de charge	$Z_{ch}$	0
Nombre d'élément triangulaire	$N_t$	10848
Nombre de nœuds	$N_p$	5492
Le pas de temps	$\Delta t$	0.5 ms
Nombre d'itérations	nit	200
Conductivité électrique du cuivre	$\sigma_{cu}$	$5.8 \cdot 10^7 [\Omega m]^{-1}$
Conductivité électrique du circuit magnétique	$\sigma_{cm}$	$1.4 \cdot 10^6 [\Omega m]^{-1}$
Perméabilité magnétique du circuit magnétique	$\mu_{cm}$	2000

**Tableau IV.9 :** Différentes caractéristique de résolution

Les différents résultats obtenus des deux modèles sont donnés par les figures suivantes :



**Figure IV.21 :** Allure des courants sources aux primaires (modèle A-J)

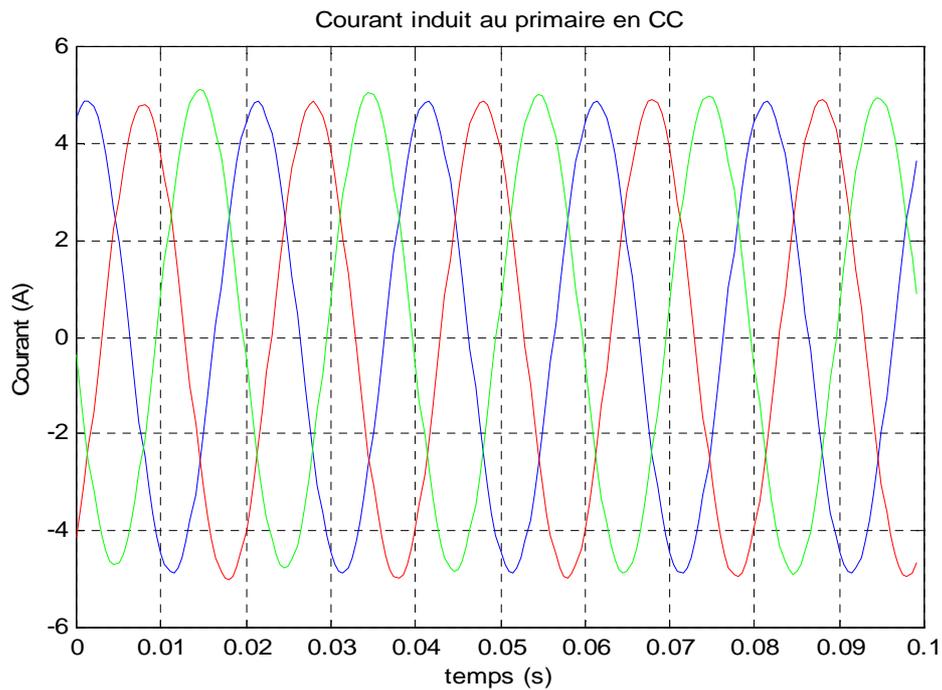


Figure IV.22 : Allure des courants induits aux primaires (modèle A-J)

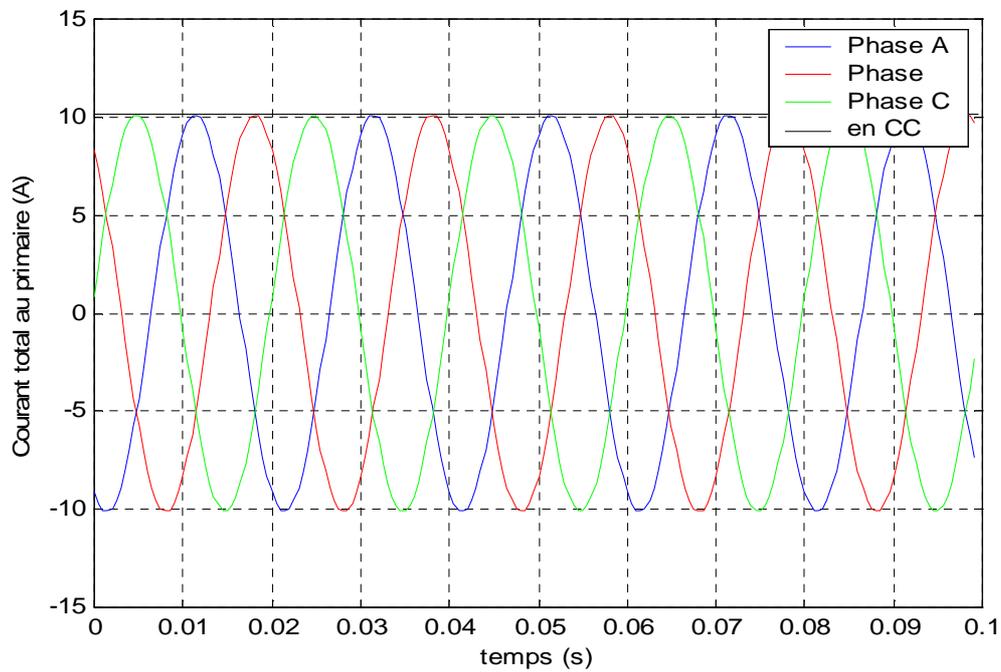
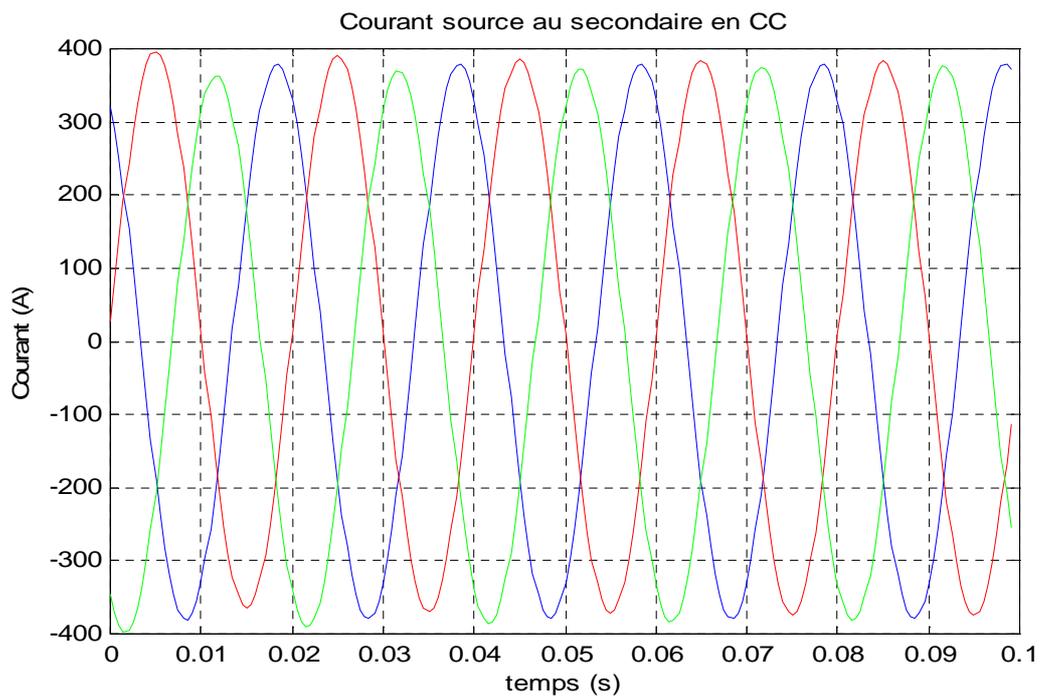
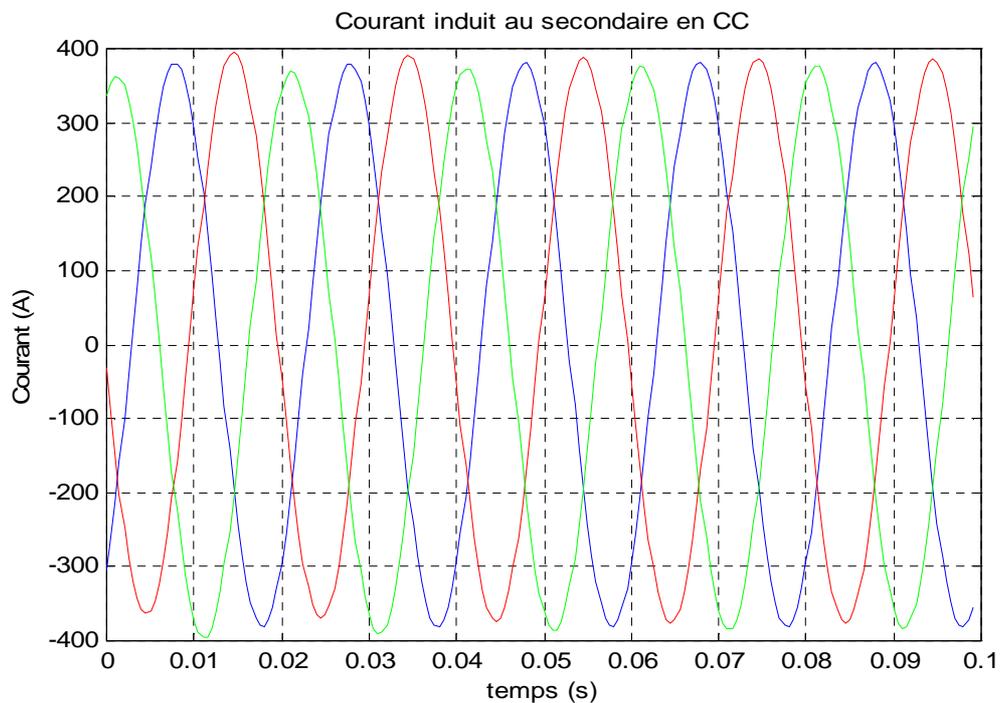


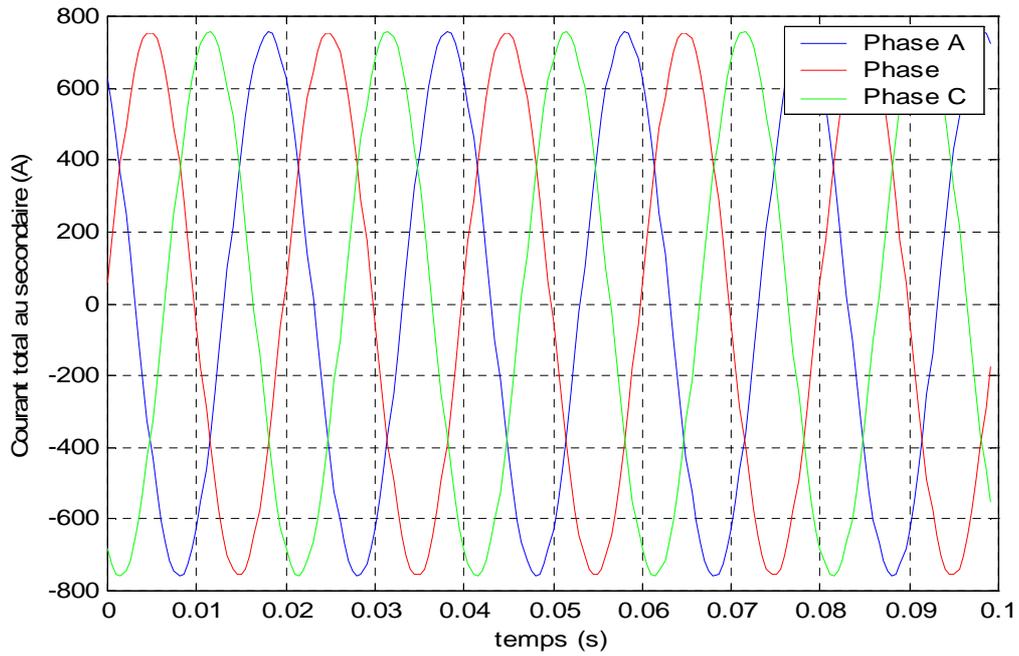
Figure IV.23 : Allure du courant total primaire (modèle A-J)



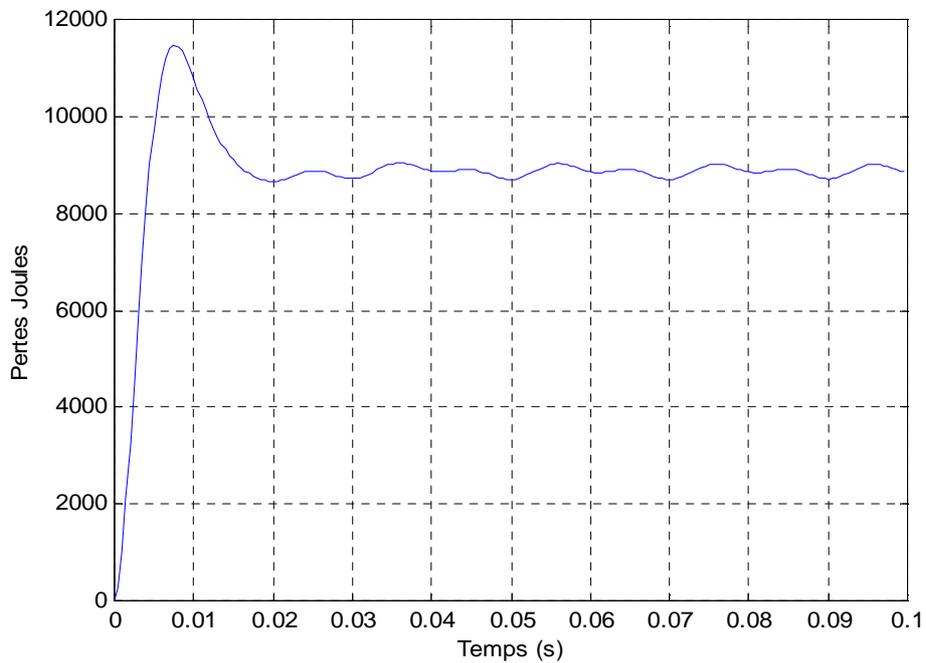
**Figure IV.24 :** Allure des courants sources aux secondaires (modèle A-J)



**Figure IV.25 :** Allure des courants induits aux secondaires (modèle A-J)



**Figure IV.26 :** Allure du courant total secondaire (modèle A-J)



**F**

**Figure IV.27 :** Allure des pertes Joules [W] (modèle A-U)

Après la modélisation du transformateur à vide et en court-circuit les pertes calculées sont dressé dans un tableau afin de les comparer avec celles mesurés à L'ELECTRO-INDUSTRIE d' AZAZGA (TIZI-OUZOU).

	Calcul par éléments finis	Mesures Electro-industrie	Ecart en %
Pertes joule dans les bobines	8850 W	8940 W	0.9
Pertes fer	1500 W	1370 W	1.3

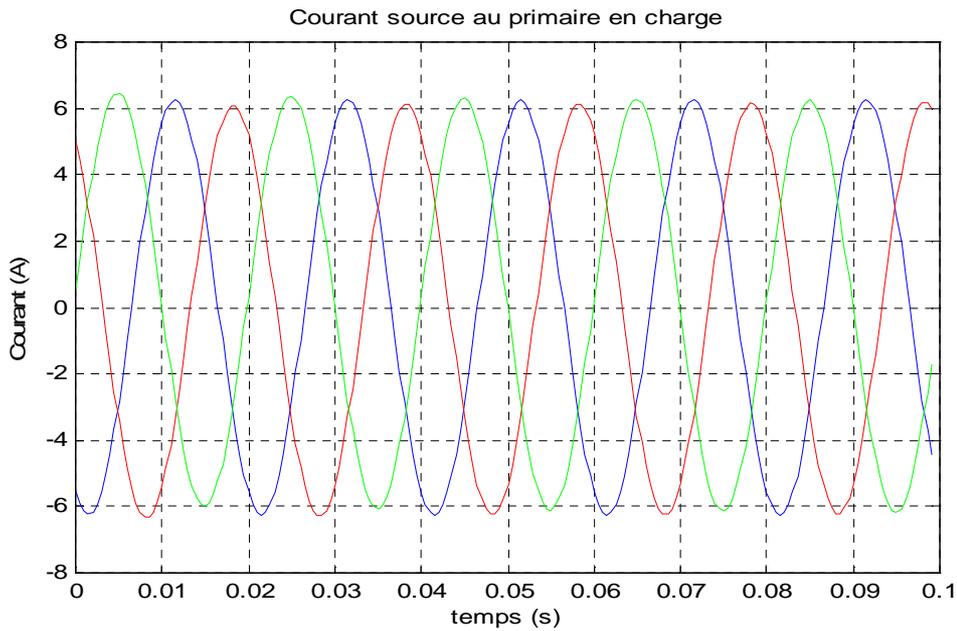
### 3. Etude du régime transitoire en charge :

Dans le tableau IV.10, nous allons représenter les différentes caractéristiques de la résolution

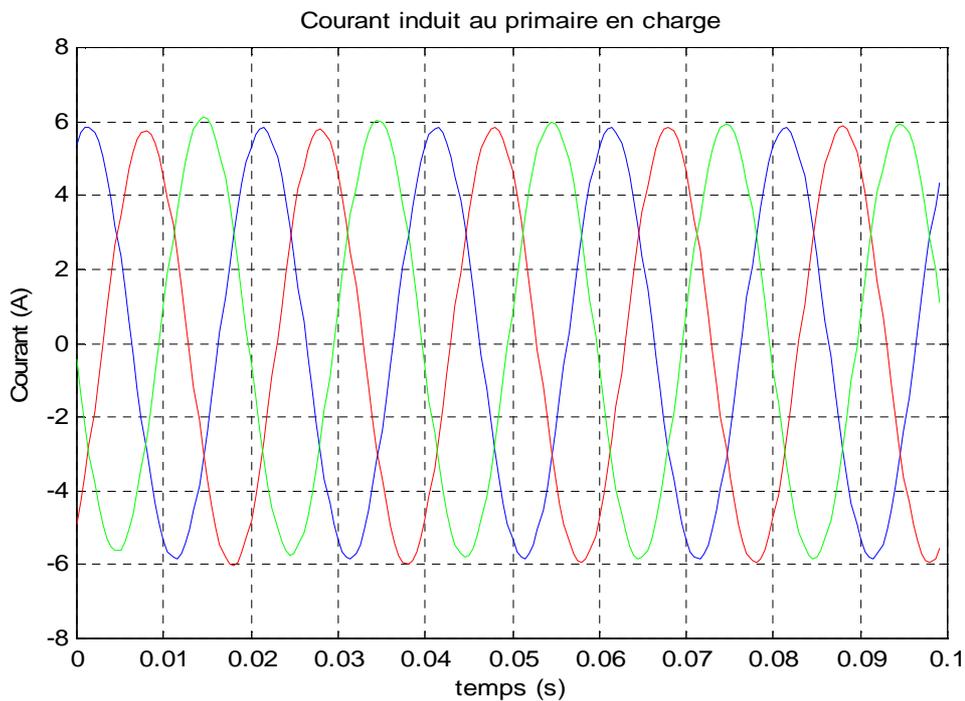
La tension appliquée au primaire	$U_{pr}$	30000 V
Le courant au primaire	$I_{pr}$	12.12 A
La tension au secondaire	$U_{sc}$	400 V
Le courant au secondaire	$I_{sc}$	909 A
Impédance de charge	$Z_{ch}$	$1e-4\Omega$
Nombre d'élément triangulaire	$N_t$	10848
Nombre de nœuds	$N_p$	5492
Le pas de temps	$\Delta t$	0.5 ms
Nombre d'itération	nit	200
Conductivité électrique du cuivre	$\sigma_{cu}$	$5.8 \cdot 10^7 [\Omega m]^{-1}$
Conductivité électrique du circuit magnétique	$\sigma_{cm}$	$1.4 \cdot 10^6 [\Omega m]^{-1}$
Perméabilité magnétique du circuit magnétique	$\mu_{cm}$	4000

**Tableau IV.10** : Différentes caractéristique de résolution

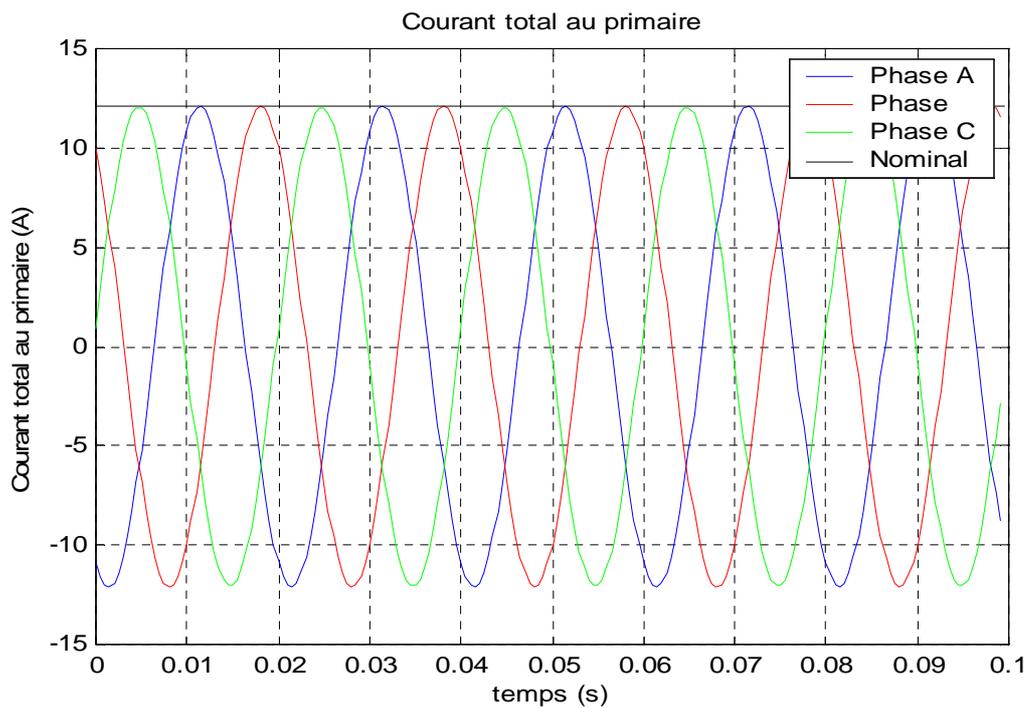
Les différents résultats obtenus des deux modèles sont données par les figures suivantes :



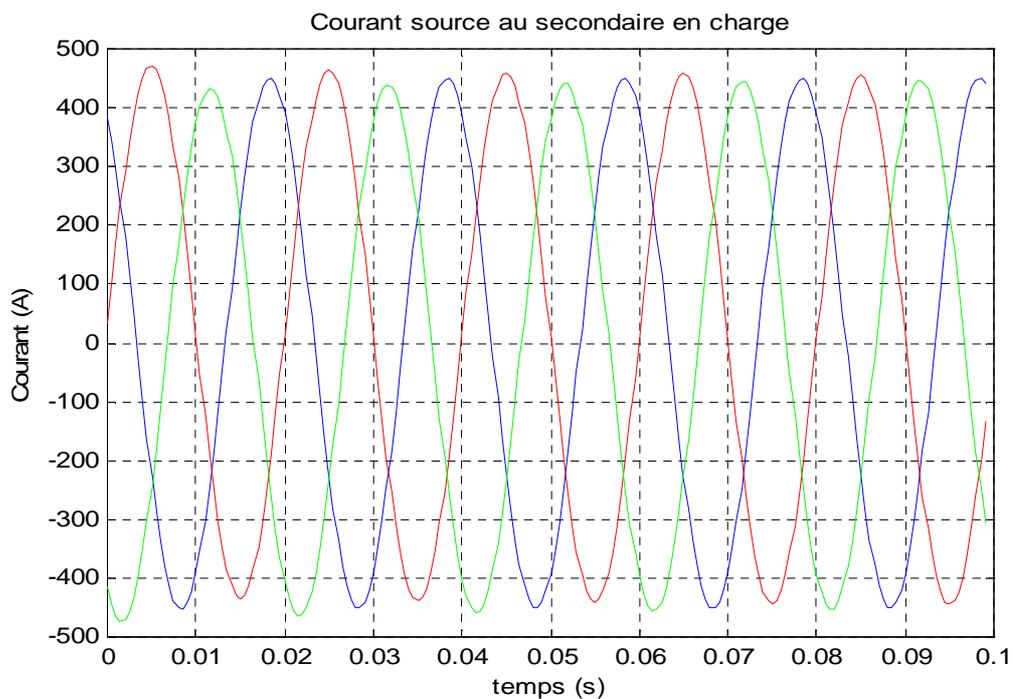
**Figure IV.28 :** Allure des courants sources aux primaires (modèle A-J)



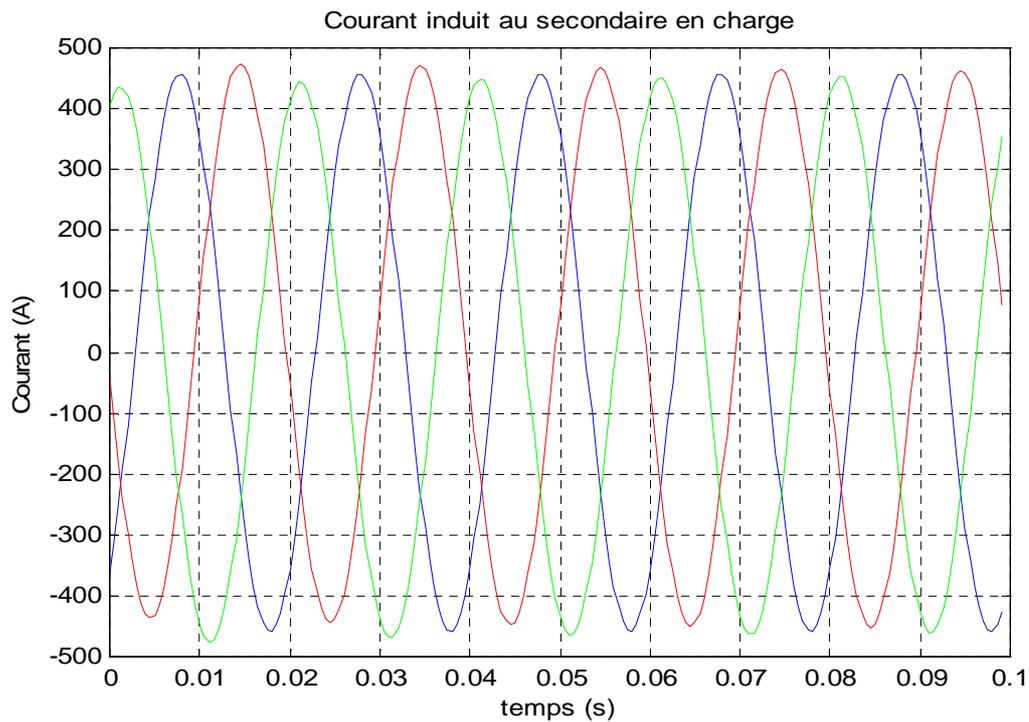
**Figure IV.29 :** Allure des courants induits aux primaires (modèle A-J)



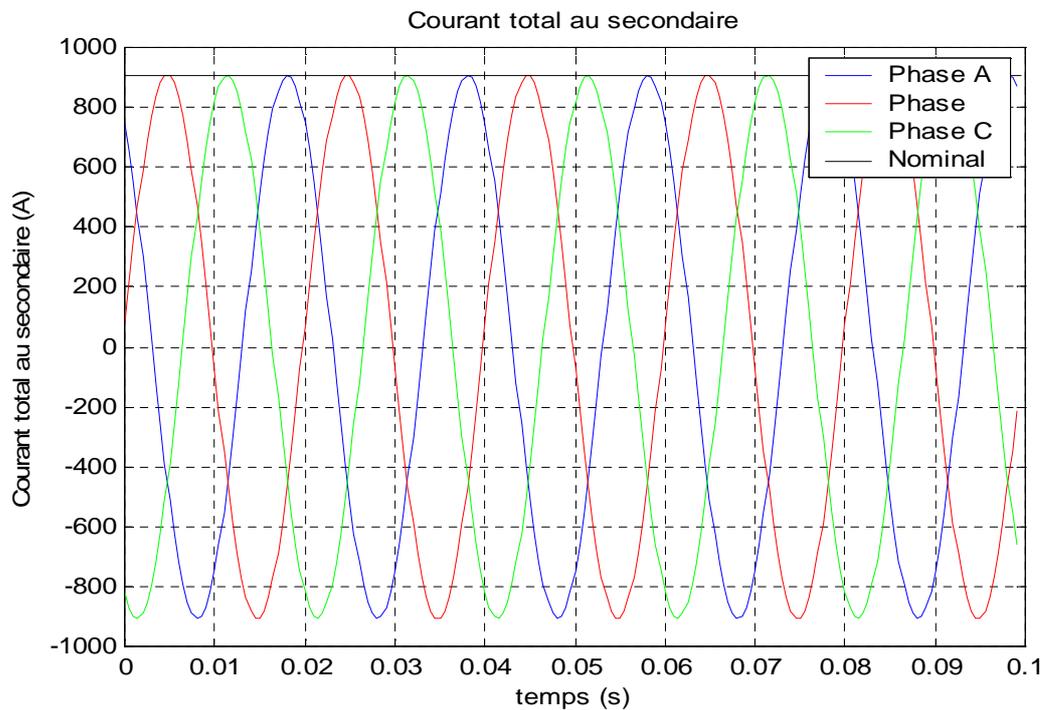
**Figure IV.30 :** Allure du courant total aux primaires (modèle A-J)



**Figure IV.31 :** Allure des courants sources aux secondaires (modèle A-J)



**Figure IV.32 :** Allure des courants induits aux secondaires (modèle A-J)



**Figure IV.33 :** Allure du courant total aux secondaires (modèle A-J)

### Interprétation des résultats en régime transitoire

Les figures IV.12, IV.15 montrent les allures des courants au primaire respectivement relative au modèle de couplage (A-J) et (A-U), on voit bien que les deux figures sont presque identique.

Les figures IV.19, IV.20 représentent les allures des pertes à vide (pertes fer) obtenus respectivement des modèles (A-U) et (A-J) et la figure IV.27 représente les pertes en court circuit (pertes Joule) obtenu du modèles (A-U). Les résultats obtenus sont très proche de ceux obtenus expérimentalement à l'Electro-Industrie d'Azazga.

Les figures (IV.13, IV.21, IV.28) et (IV.16, IV.24 et IV.31) représentent respectivement les courants sources dans les enroulements primaire et secondaire à vide, en court-circuit et en charge, et les figures (IV.14, IV.22, IV.29), (IV.17, IV.25 et IV.32) représentent quand à elles respectivement les courants induits au primaire et au secondaire à vide, en court-circuit et en charge. On remarque que presque dans toutes les figures les courants passent par un régime transitoire avant d'atteindre leurs régimes permanant. Notons que pour avoir un courant total il suffit d'appliquer la formule suivante :

$$I_{total} = I_{source} - I_{induit}$$

Et cela est montré par les figures (IV.15, IV.23, IV.30) et (IV.18, IV.26, IV.33) qui représentent respectivement les courants totaux au primaire et au secondaire à vide, en court-circuit et en charge.

Les courants totaux représentés par les figures (IV.15, IV.23, IV.30) et (IV.18, IV.26, IV.33), dans les enroulements primaires et secondaires sont en parfaite concordance avec les courants imposés.

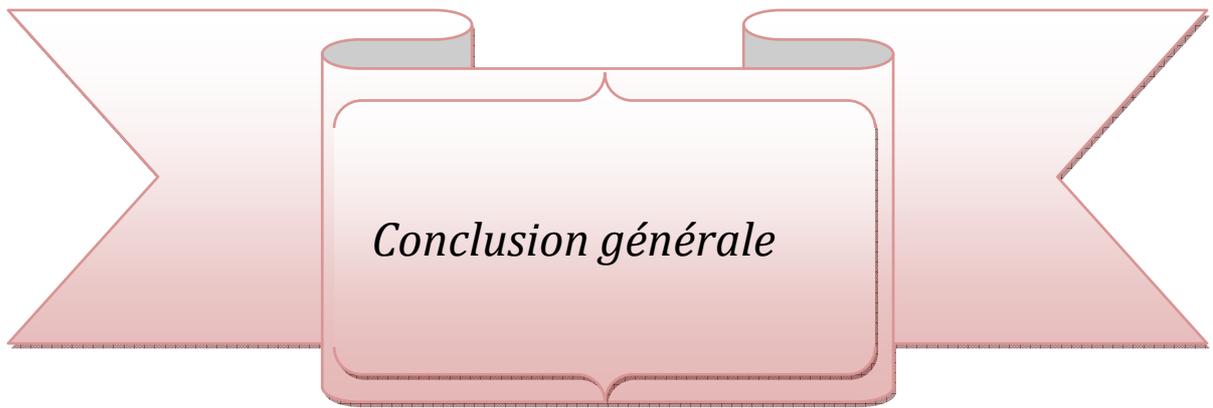
**Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons procédé aux validations des deux modèles de couplages ; le modèle équation magnétique – densité de courant totale (modèle A-J) dans le cas d'une source de courant en harmonique et en transitoire et le modèle équation magnétique – circuit électrique (modèle A-U) dans le cas d'une source de tension en transitoire.

La résolution en régime harmonique du modèle (A-J) nous a conduits à la connaissance des courants sources et induits dans les enroulements ainsi que les allures des densités de pertes.

Les pertes fer à vide et les pertes Joule en court - circuit déterminées en résolvant le modèle (A-U) sont en concordance avec celles données par L'LECTRO-INDUSTRIE d'AZAZGA (TIZI-OUZOU). Notons que les pertes à vide déterminées du modèle (A-U) sont proches à celles retrouvées du modèle (A-J)

Les résultats ainsi obtenus nous permettent de conclure que les modèles de couplage établis prennent en considération de manière rigoureuse les phénomènes électriques et magnétiques.



---

La conception et l'étude des machines électiques exigent une analyse des phénomènes électromagnétique intervenant lors de leurs fonctionnements. A partir des équations de Maxwell et des relations du milieu, nous avons mis en œuvre les modèles régissant les phénomènes électriques et magnétiques. La méthode des éléments fins utilisée pour la résolution des équations électromagnétiques en potentiel vecteur magnétique, nous a permis la détermination des grandeur locales, tel que le potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique ainsi que les grandeurs globales tel que les pertes fer dans le circuit magnétique et les pertes Joule dans les enroulements, les courant de source et les courants induits dont la somme nous donne le courant totale. Le dispositif électrotechnique objet de notre étude est un transformateur de distribution de construction "Electro-Industrie".

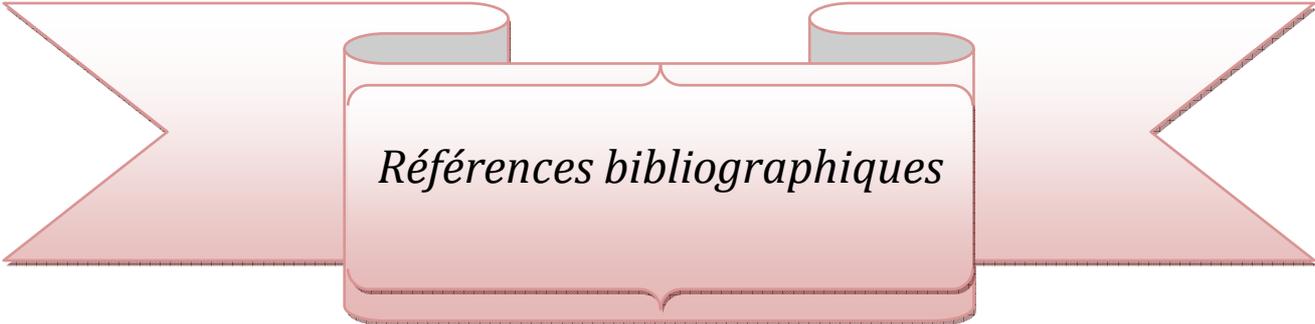
Dans cette étude nous nous somme intéressés en premier lieu au modèle de couplage qui lie l'équation magnétique en potentiel vecteur à la densité du courant totale en considérant des sources d'alimentation en courant et en tenant compte des courants induits. Au seconde lieu, nous avons développé un modèle de couplage électrique-magnétique liant l'équation magnétique en potentiel vecteur aux équations des circuits électrique aussi bien au primaire qu'au secondaire en considérant des sources d'alimentation en tension. A cet effet nous avons élaboré un code de calcule éléments finis sous environnement MATLAB.

L'aboutissement du travail consiste en l'application des modèles couplés électrique-magnétique, pour la modélisation du transformateur. Les résultats obtenus en résolvant les deux modèles de couplage en hypothèse deux dimensions cartésiennes en régime harmonique et transitoire, nous permettent de conclure, la validité du code de calcul éléments finis et cela en comparant ces résultats numériques avec des

résultats obtenus expérimentalement (testes effectués à l'Electro-Industrie) fournis en annexe.

Finalement, ce travail nous a permis d'aboutir à des modèles assez complets de modélisation et de simulation des comportements électromagnétiques des transformateurs. Cependant, d'autres travaux doivent être faits pour compléter ce travail, à savoir :

- ✓ La prise en compte des effets thermiques.
- ✓ La prise en compte de la non-linéarité du circuit magnétique.
- ✓ La simulation par éléments finis 3-D des transformateurs de distribution.



*Références bibliographiques*

---

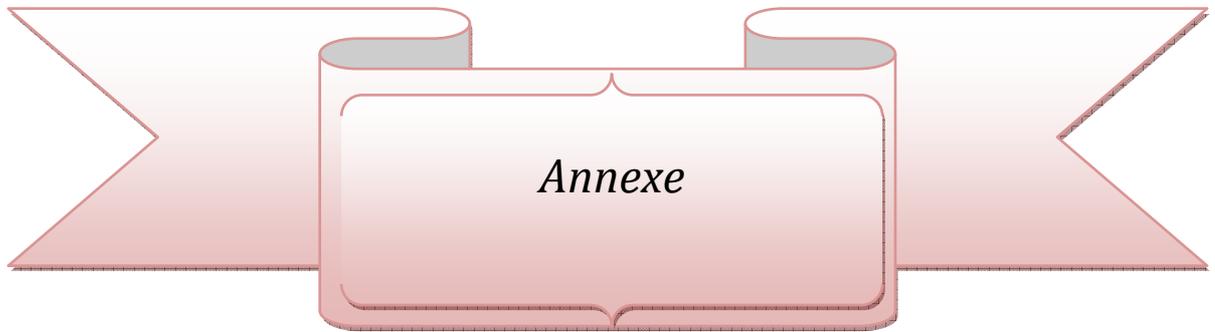
## Références bibliographiques

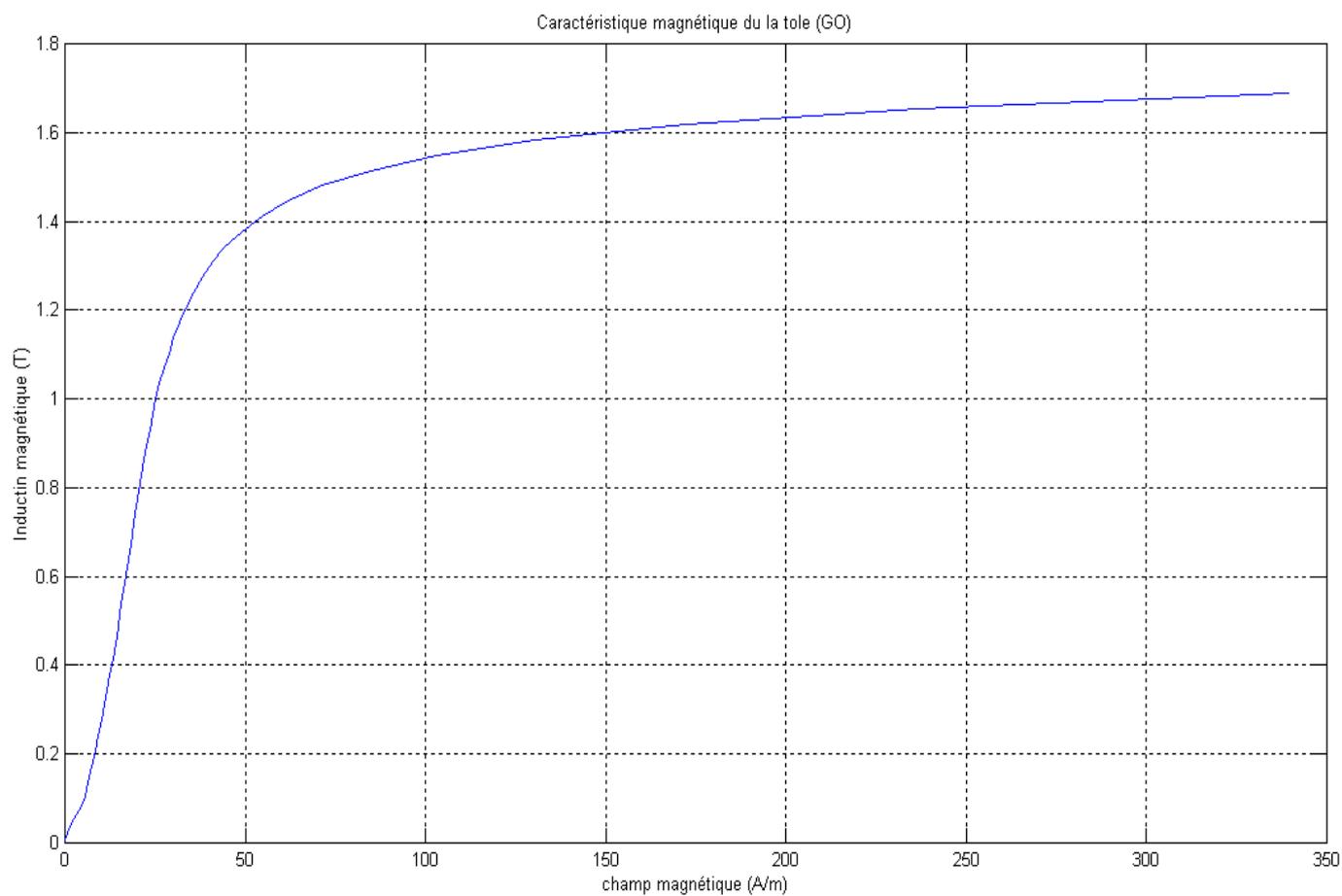
- [**Anthony-2006**] Anthony Lefevre, « *contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs* », thèse de Doctorat, Université de Nantes, France, 27 octobre 2006.
- [**Barret-2002**] P.Barret, «*Machines électrique, théorie et mise en œuvre*». Ellipses Edition Marketing S.A. Paris 2002.
- [**Belkhiri-2004**] Belkhiri Yamina « *Modélisation des phénomènes électromagnétique et mécanique couplé par la méthode des volumes finis (CVM)* », Mémoire de Magister, université de Batna, Algérie 2004.
- [**Bendjima-1996**] B. Bendjima, K. Srairi and M. Féliachi , «*Modeling of Magnetic and Mechanical transient Phenomena in an Electromagnetic forming System* » ELECTRIMACS'96 Conference , Paper Number 83 Septembre 17-19, pp. 217-221, 1996 Saint-Nazaire , France.
- [**Bernard-1982**] Bernard Hochard, « Le transformateur de puissance » paru en 1982 à la C.E.M. compagnie d'Electro-Mécanique, France.
- [**Binns-1992**] K.J. Binns, P.J. Lawrenson, C. W. Trowbridge, «*The analytical and Numerical Solution of Electric and magnetic Fields* »John Wileys & Sons Ltd, ISBN-0 471 192460, 1992.
- [**Bouali-2007**] Khadija Bouali, « *Etude et conception de structures électromagnétiques utilisant des matériaux composites fer-résine* », Mémoire de magister, Université de Batna, Algérie, 2007.
- [**Bouchard-1998**] R.P.Bouchard, G.Livier « *Electrotechnique deuxième édition* », Presse internationale polytechnique, Canada 1989.
- [**Diche-2003**] A. Diche, «*développement de modèles de transformation pour l'étude des capteurs à courants de Foucault* », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de TIZI OUZOU, Avril 2003.
- [**Durand-1968**] E. Durand. «Magnétostatique ». Edition Masson et Cie, 1968.
- [**Féliachi-1996**] K. Srairi, B. Bendjima and M. Féliachi , « *Coupling Models for analyzing dynamic behaviors of Electromagnetic Actuators* »,

ELECTRIMACS'96 Conference , Paper Number 83 Septembre 17-19, pp. 467-472, 1996 Saint-Nazaire , France.

- [**Fournet-1985**] G. Fournet. «Electromagnétisme à partir des équations locales », Edition Masson, 1985.
- [**Gillon-1968**] Edgar. .Gillon « cours d'électrotechnique », première partie. Librairie universitaire-Louvan (Belgique), Avril, 1968.
- [**Hamayer-1996**] Kay Hameyer and Ronnie Belmans, « *Numerical Modelling and Design of Electrical Machines and Devices* » Edition WITpress 19.
- [**Hochart-1988**] B. Hochart, coordonnateurs. « *Le transformateur du puissance, technique et documentation* ». Edition Lavoisier, 1988.
- [**Kostenko-1979**] M. Kostenko, L. potrovsky «*Machines à courant continu, transformateur* », 2<sup>ème</sup> Edition, Edition MIR. Moscou, 1979.
- [**Milsant-1992**] Francis MILSANT, « *Machines électriques* », Edition Ellipses, France 1992.
- [**Mohellebi-2001**] H. Mohellebi, «Elaboration des *modèles 2D analytico-numérique pour l'étude des systèmes comportants des pièces en mouvement* ».Thèse de Doctorat d'état, Université Mouloud Mammeri de TIZI OUZOU, 2001.
- [**Mohellebi-2008**] H. Mohellebi, « *Cours de modélisation numérique des machines électriques (tec 431)* », Université Mouloud Mammeri de TIZI OUZOU, 2008.
- [**Nye-1985**] J.F. Nye, *Physical Properties of Crystals*, Oxford Science Publications. Clarendon Press, Oxford, UK, 2nd Edition, 1985.
- [**Pastouriaux-1965**] L.Pastouriaux, A.Varouquaux, et autres « *Electricité industrielle ; machine électriques* ». Paris Librairie, 1965.
- [**Pérez-1990**] J-P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger, « *Electromagnétisme* ». Edition Masson 1990.
- [**Prieto-1995**] R. Prieto, V. Bataller, J.A. Cobos and J. Uceda, «Influence of the winding strategy in toroidal transformers », Universidad Polytecnica de Madrid, ETSII, Spain

- [**Rachek-2001**] M. Rachek, « *Modélisation analytico-numérique d'inducteurs axisymétriques alimenté en moyenne fréquence* », Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de TIZI OUZOU, Avril 2001.
- [**Rachek-2008**] M. Rachek, S. Nait Larbi, « *Magnetic Eddy-Current and Thermal Coupled Models for the Finite-Element Behavior Analysis of Underground Power Cables* », *IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS*, VOL. 44, NO. 12, December 2008.
- [**Robert-1999**] Frédéric Robert « *Modélisation et simulation de transformateurs pour alimentations à découpage* ». Thèse de doctorat, UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES.
- [**Sabonnadière-1985**] J-C. Sabonnadière, J-L. Coulomb, « *CAO en électrtechnique* ».Hermès publishing, 1985
- [**Sabonnadière-1987**] J-C. Sabonnadière, J-L. Coulomb, « *calcul des champs électromagnétiques* », 1987.
- [**Srairi-1996**] K. Srairi, « *Modélisation d'actionneur Electromagnétiques Alimentés en Régime transiroire* », Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 14 Novembre 1996.
- [**Zaouia-2001**] M. Zaouia, « *Mise en œuvre d'un modèle de couplage de phénomènes électriques et magnétiques en régime transitoire avec prise en compte du mouvement* », Mémoire de Magister, Ecole Militaire polytechnique (EMP) Alger 2001.



**Annexe 1****Caractéristique magnétique de la tôle GO****Figure 1** : Courbe d'aimantation  $B=f(H)$  de la tôle GO

**Annexe 2****Procès-verbal de contrôle de transformateur**

Type TS 5846 C	Transformateur à l'huile 3phases								
Année de fabrication 2008	N° d'ordre 04428				N° de fabrication 75 443				
VDE 0532/CEI76	Pos	Tens	H.T		B.T	Caractéristique à 75°			
	1		31 500			Et pour transformation V; V			
Genre <b>tdP</b>	2		30750			P <sub>0</sub> KW	P <sub>K</sub> KW	P <sub>KN</sub> %	
Mode de service <b>SC</b>	3		30 000		400	Valeur de consigne	<b>1,40</b>	<b>8,82</b>	<b>6,0</b>
Mode de refroidissement <b>ONAN</b>	4		29 250			Tolérance	+15 %	+15 %	± 10 %
Fréquence nominale <b>50 Hz</b>	5		28 500			Contrôle en usine	<b>1,37</b>	<b>8,94</b>	<b>6,01</b>
Intensité court-circuit cont.KA	Intensité I <sub>N</sub> A		<b>12,12</b>		<b>909</b>	Réception			
Durée maxi.court-circuit 4 S									
Série <b>30N/0,6</b>	Service		HT/BT			Poids total <b>1,95t</b>			
Classe d'isol.	P <sub>N</sub> K.VA		<b>630</b>			Poids de huile <b>0,46t</b>			
Mode de prot.	U <sub>KN</sub> %		<b>6,01</b>			Type d'huile			
Couplage a l'expédition	Position		3						
	Groupe de couplage		DYn 11						

**Mesure de résistance à 28 °C Valeur en ohms**

Connexion/ <sub>pos</sub>	HT/3				BT/			
1U 1V	17,32				2u 2v	0,00270		
1V 1W	17,34	17,33			2v 2w	0,00272	0,00271	
1W 1U	17,33				2w 2u	0,00271		
					2u 2n	0,00142		

**Mesure de transformation**

Transformations et groupe de couplage selon plaque signalétique							
Connexion		11n					
Position		1	2	3	4	5	
U Consigne		136,59	133,31	130,02	126,72	123,48	
F <sub>U</sub>	<sup>0</sup> / <sub>100</sub>						

Connexion 2u 2v 2w **Mesure à vide** à 50 Hz

Tension en V	Intensité en A				%					Pertes en KW		
U	I <sub>0</sub>	I <sub>0</sub>	I <sub>0</sub>	I <sub>0moyenne</sub>	I <sub>0</sub> / I <sub>N</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	$\sum_a$	C <sub>p</sub>	P <sub>0'</sub>	Corr	P <sub>0</sub>
400	17,40	12,85	16,4	15,5	1,71	37	26	11	125	1,37	0,010	<b>1,365</b>

Connexion 1U 1V 2W **Mesure de court-circuit** à 50 Hz **et à 28 °C**  
Court-circuit 2u 2v 2w

Pos	Intensité en A	Tension en V	%					Pertes en KW			
	I	U	U <sub>K</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>		$\sum_a$	C <sub>p</sub>	P <sub>K'</sub>	Corr	P <sub>K(I<sub>N</sub>)</sub>
3	10,15	1500	5,97	15,8	7,1		8,7	625	5,438	0,006	<b>7,75</b>
										5,432	
Contrôle de tension alternative		KV	Hz	Mn				Pertes à 28 °C		Pertes à 75 °C	
Contrôle d'enroul. H.T		<b>70</b>	<b>50</b>	<b>1</b>				P <sub>K(I<sub>N</sub>)</sub> = <b>7,75</b> KW		∑ I <sub>N</sub> <sup>2</sup> = <b>8,46</b> KW	
Contrôle d'enroul. B.T		<b>10</b>	<b>50</b>	<b>1</b>				∑ I <sub>N</sub> <sup>2</sup> . R = <b>7,18</b> KW		P <sub>z</sub> = <b>0,48</b> KW	
Contrôle de spires		<b>0.800</b>	<b>200</b>	<b>1/2</b>				P <sub>z</sub> = <b>0,057</b> KW		P <sub>K(I<sub>N</sub>)</sub> = <b>8,94</b> KW	