

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
De MASTER ACADEMIQUE
Spécialité : Entraînements Electriques

Présenté par :

- **Benabderrahmane Sofiane**
- **AZRINE FAWZI**

Thème

Conception et modélisation d'un transducteur
électromagnétique à base des matériaux
magnétostrictifs

Mémoire soutenu publiquement le septembre 2016 devant le jury composé de :

Mr Hassane MOHELLEBI Professeur, UMMTO, Président

Mr Farid HOCINI Maitre de conférences classe B UMMTO, encadreur

M^m Zehor OUDNI Maitre de conférences classe B UMMTO, examinateur

Mr S.H. OULD OUALI Maitre de conférences classe B UMMTO, examinateur

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu le BON DIEU de m'avoir donné le courage et patience pour faire ce travail.

Je tiens à remercier mon promoteur M^r F.HOUCINI maître de conférence à l'université MOULOUD MAMMERI de TIZIOUZOU, de m'avoir proposé ce sujet, et m'avoir suivi de très près tout au long de mon travail, je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour ses précieux conseils.

Je tiens à présenter mes remerciements pour tous les enseignants de département E.T.H et particulièrement les enseignants de la spécialité « Entraînements Electriques », pour leurs aides, leur patience, leur générosité, leur disponibilité et leurs encouragements.

Je remercie vivement le président et les membres de jury pour nous avoir honorés et acceptés d'examiner ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Ma très chère mère et mon père qui se sont sacrifiés tout au long de mes études.

Mes frères et mes sœurs.

Toute la famille BENABDERRAHMANE.

A mim-iw et tous mes amis.

Et tous ceux qui me sont chers.

B .SOFIANE

Dédicaces

Je dédie ce travaille à mon père et ma mère, à mes frères, à mes sœurs, à tous mes amies, à ma femme, à la famille akerma et à tous ceux qui me sont proches.

A.FAWZI

Sommaire

INTRODUCTION GENERAL	1
----------------------------	---

Chapitre I : Introduction à la magnétostriction et aux matériaux magnétostrictifs

I. INTRODUCTION	2
-----------------------	---

I.1.LA MAGNETOSTRICTION ET L'EFFET MAGNETOSTRICTIF.....	3
--	---

I.1.1. Le nuage électronique	3
------------------------------------	---

I.1.2. Direction de facile aimantation	3
--	---

I.2. PRINCIPAUX PHENOMENES DE MAGNETOSTRICTION	4
--	---

I.2.1. Effet joule longitudinal	4
---------------------------------------	---

I.2.2. Effet Villari	5
----------------------------	---

I.2.3. Effet joule transversal	6
--------------------------------------	---

I.2.4. Effet Wiedemann	7
------------------------------	---

I.2.5. Effet de variation de volume	7
---	---

I.2.6. Effet de flexion	8
-------------------------------	---

I.2.7. Effet de variation du module d'Young ou effet ΔE	9
---	---

I.2.8. Les matériaux magnétostrictifs.....	12
--	----

I.2.8.1. Définition	12
---------------------------	----

I.2.8.2. Magnétisme en L'absence d'excitation	12
---	----

I.2.8.3. Magnétisme à l'échelle atomique.....	12
---	----

I.2.8.4. Magnétisme à l'échelle de l'agrégat d'atomes.....	13
--	----

a) Le paramagnétisme.....	13
---------------------------	----

b) Le ferromagnétisme.....	14
----------------------------	----

I.2.8.5. Ferromagnétisme à l'échelle macroscopique	15
--	----

Sommaire

I.3.les matériaux a magnétostriction.....	16
Conclusion	18
Chapitre II : les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction	
II. Applications de la magnétostriction	19
II.1. Coefficient de couplage magnétomécanique	19
II.2 Résonateur magnétostrictif	23
<i>a) Application</i>	26
Chapitre III : comportement des matériaux magnétostrictifs	
III.1. DOMAINES MAGNETIQUES	28
III.2. PREMIERE AIMANTATION DU MATERIAUX.....	28
III.3. MAGNETOSTRICTION	31
III.4. MAGNETOSTRICTION INVERSE	34
III.5. HYSTERESIS MAGNETIQUE	36
Chapitre IV : modèle numérique et méthode de résolution des équations électromagnétiques.	
IV .1.Introduction	38
IV.2.Méthodes de résolution	38
IV.2.1.Méthodes analytiques	38
IV.2.2.Méthodes semi analytiques	39
IV.2.3.Méthodes numériques	39
IV.2.3.1. Méthode des différences finies (MDF)	39
IV.2.3.2. Méthode des intégrales de frontières(MIF)	41
IV.2.3.3. Méthode des éléments finis (MEF)	42
IV.2.3.3.1. Formulation éléments finis	43
IV.2.3.3.1.1.Formulation vibrationnelle	43

Sommaire

IV.2.3.3.1.2. Formulation projective (résidus pondérés).....	45
IV.2.3.3.2. La discétisation.....	47
IV.2.3.3.2.1. Elements de références	47
a) Elements a une dimension 1D.....	47
b) Elements triangulaires 2D.....	47
- Elements triangulaires.....	47
- Elements carrés.....	48
c) Elements a trois dimensions 3D.....	48
IV.2.3.3.2.2. fonction d'interpolation.....	49
IV.2.3.3.2.2.1 Principe de l'état complet.....	49
IV.2.3.3.2.2.2 Principe de compatibilité.....	49
IV.2.3.3.3. Formulation éléments finis des équations électromagnétique.....	50
IV.2.3.3.3.1. Equation magnéto-statique.....	50
- Cas cartésien.....	50
- Cas axisymétrique.....	52
IV.2.3.3.3.2. Equation magnéto-dynamique.....	54
- Cas cartésien.....	54
- Cas axisymétrique.....	57
Chapitre V : application et résultat.	
V.1. présentation du logiciel Comsol Multiphysics.....	59
V.2. introduction.....	60
V.3. Définition du model	61
V.4. Résultats	63
V.5. Conclusion.....	72
Conclusion générale.....	73

Sommaire

Bibliographie	74
---------------------	----

Introduction générale :

La manière de concevoir un nouveau produit en milieu industriel a pris ces dernières années un tournant significatif. Afin de réduire les temps de conception et d'optimiser les coûts de fabrication, l'utilisation d'outils informatiques aide à la conception est devenue indispensable. Ainsi ont vu le jour de nombreux logiciels de simulation qui ont peu à peu remplacé des phases de prototypage très coûteuses.

Dans le domaine électromagnétique, ceux-ci s'appuient principalement sur le formalisme des éléments finis qui, en contrepartie de résultats précis, demande d'une part une compétence particulière de l'utilisateur, et d'autre part des temps de calcul importants peu compatibles avec l'optimisation de nombreux paramètres.

Cependant, dans les phases de pré dimensionnement, il n'est pas nécessaire d'avoir des modèles extrêmement précis. Souvent, un modèle approché sous forme analytique permet de gagner du temps tout en dégrossissant le travail.

Nous sommes intéressés précisément au cours de ce travail à la modélisation et à la conception d'un transducteur électromagnétique soumis à un champ magnétique.

En effet, la simulation du comportement électromagnétique d'un transducteur par éléments finis à l'aide du logiciel de simulation **Comsol Multiphysics® «V4.2a »** nous permettra d'élaborer une feuille de route à suivre afin d'optimiser et d'orienter le choix des paramètres géométrique et des matériaux parmi une large gamme, afin que le composant conçu puisse répondre aux exigences fonctionnelles souhaitées.

Pour accomplir l'objectif, on a organisés ce travail en **cinq chapitres**, en détaillant l'effet magnétostrictif, et le modèle mathématique utilisé.

Enfin, **l'application et la conclusion générale** fait la synthèse de cette étude, et revient sur les résultats obtenus.

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

INTRODUCTION :

Le physicien anglais **Joule** découvrit en **1842** qu'un barreau de fer soumis à un champ magnétique longitudinal s'allongeait suivant ce champ, en même temps qu'il se contractait transversalement, comme sous l'effet d'une traction mécanique. Il donna à ce phénomène le nom de magnétostriction. Depuis lors, d'autres effets mécaniques du champ magnétique ont été mis en évidence. Soumis à un champ magnétique, des échantillons de certaines substances subissent non seulement des dilatations ou des contractions, mais encore des exions, des torsions, des modifications de densité, voire des variations de leur moduled'**Young**. À la suite de Joule, on a continué à classer tous ces phénomènes magnétoélastiques sous le vocable de magnétostriction.

La magnétostriction se présente, au sens le plus général du terme, comme l'ensemble des relations liant les propriétés mécaniques d'un corps à ses propriétés magnétiques.

Les compositions chimiques des matériaux sont notées dans ce chapitre selon les règles suivantes généralement utilisées :

- pour les alliages métalliques et les matériaux amorphes, le nombre suivant le symbole chimique indique le pourcentage de cet atome ou groupe d'atomes contenu dans un volume donné. Pour un matériau, la somme des différents nombres est égale à **100** ;
- pour les autres matériaux, homogènes, structurés à l'échelle atomique, le nombre en indice suivant le symbole chimique correspond au nombre d'atomes considérés participant à la molécule.

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

I.1. LA MAGNETOSTRICTION ET L'EFFET MAGNETOSTRICTIF :

Nous allons nous intéresser tout d'abord à la magnétostriction à l'échelle microscopique afin de comprendre la source de ce phénomène. Nous définirons les particularités du nuage électronique de ces matériaux et le concept de direction de facile aimantation.

I.1.1. Le nuage électronique :

L'énergie magnéto-élastique crée un couplage entre les déformations du réseau cristallin et l'état d'aimantation. La magnétostriction qui en résulte est la conséquence de la forme non sphérique du nuage électronique de certains matériaux : lorsque le champ magnétique extrême fait tourner les moments magnétiques (**Figure I.1**), le nuage électronique non sphérique tourne également et modifie l'équilibre cristallin en attirant ou en repoussant les ions voisins.

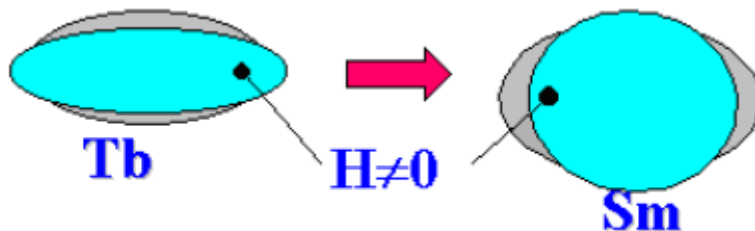


Figure I.1 : Forme des nuages électroniques de quelques terres.

I.1.2. Direction de facile aimantation :

Le réseau cristallin impose des directions préférentielles pour l'aimantation. Néanmoins si un champ magnétique est appliqué au matériau, ses moments magnétiques auront tendance à s'aligner dans la direction de ce champ pour minimiser l'énergie interne (**Figure I.2**).

Il en suit un réarrangement des domaines magnétiques, ce qui modifie les dimensions du réseau cristallin de l'échantillon, d'où la déformation de ses dimensions géométriques.

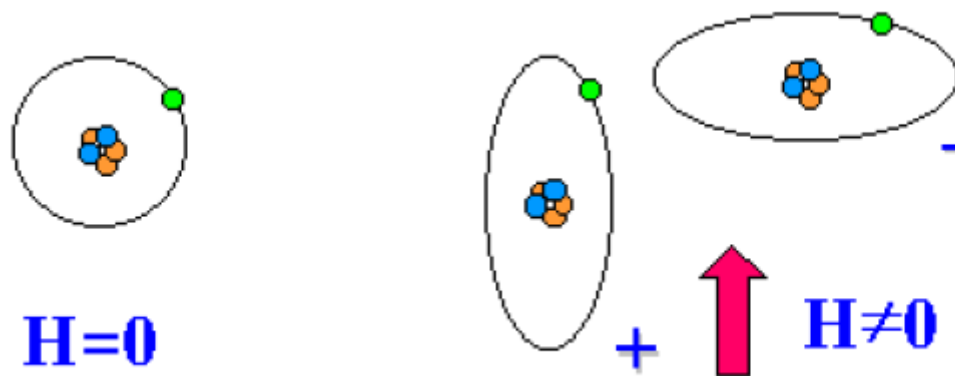


Figure I.2 : Magnétostriction positive et négative. Représentation de la déformation du nuage électronique de l'atome sous l'effet d'un champ magnétique H .

I.2. PRINCIPAUX PHENOMENES DE MAGNETOSTRICTION :

L' on a coutume de classer les phénomènes de magnétostriction suivant leur aspect extérieur, sans tenir compte de leurs causes profondes. On distingue les effets directs, où l'application d'un champ magnétique (ou la variation de ce champ) produit une modification d'un paramètre mécanique, et les effets inverses, où la variation d'un paramètre ou d'une constante mécanique d'un matériau produit une modification de son aimantation, que ce matériau soit ou non plongé initialement dans un champ magnétique.

I.2.1. Effet joule longitudinal :

C' est de loin le phénomène magnétostrictif le plus important. Il a trait à l' allongement ou au raccourcissement Δl d' un barreau ferromagnétique de longueur l sous l' action d' un champ magnétique (**Figure I.3**). $\Delta l / l$ n' est pas une fonction linéaire du champ et Δl est indépendant du sens du champ dans une direction.

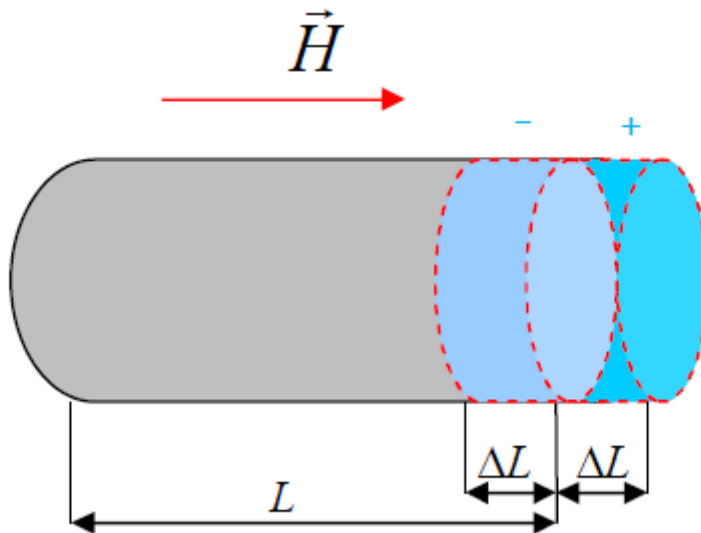


Figure I.3 : Effet joule longitudinal

Pour la plupart des métaux ou alliages ferromagnétiques, Δl garde un signe constant, quelle que soit la valeur de H_a . Mais pour certains matériaux, on observe une inversion de signe de Δl ; c'est le cas du fer aux environs de 16 à 40 kA/m suivant les conditions de préparation.

Pour cette valeur critique, l'effet Joule s'annule et le barreau retrouve sa longueur initiale. Pour des valeurs de H_a inférieures à 16 kA/m, le barreau de fer s'allonge. Pour des valeurs de H_a supérieures, c'est l'inverse qui se produit. Le phénomène de saturation se traduit par l'existence d'une asymptote horizontale : quand H_a croît indéfiniment, Δl tend vers une valeur limite λ_s , que l'on appelle coefficient de magnétostriction à saturation. Ce coefficient λ_s qui peut prendre des valeurs positives ou négatives, joue un rôle important dans la théorie moderne du magnétisme.

I.2.2. Effet Villari :

L'effet Joule longitudinal inverse est aussi connu sous le nom d'effet Villari. Lorsque l'on modifie la longueur naturelle d'un barreau d'un matériau ferromagnétique, ce dernier s'aimante (**Figure I.4**). Si au préalable le barreau a été placé à l'intérieur d'un solénoïde, un courant transitoire parcourt la bobine. Ce courant correspond à une variation de flux magnétique associée à la variation de l'aimantation. La déformation Δl associée à une force diffère de celle prédite par la loi de Hooke classique. Cependant on peut écrire :

$$F = ES_e (\Delta l/l)$$

Avec : E : module d'Young apparent

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

S_e : section droite du barreau

$(\Delta L / L)$: déformation relative totale [élastique $(\Delta L / L)_e$ plus magnétostrictive $(\Delta L / L)_m$].

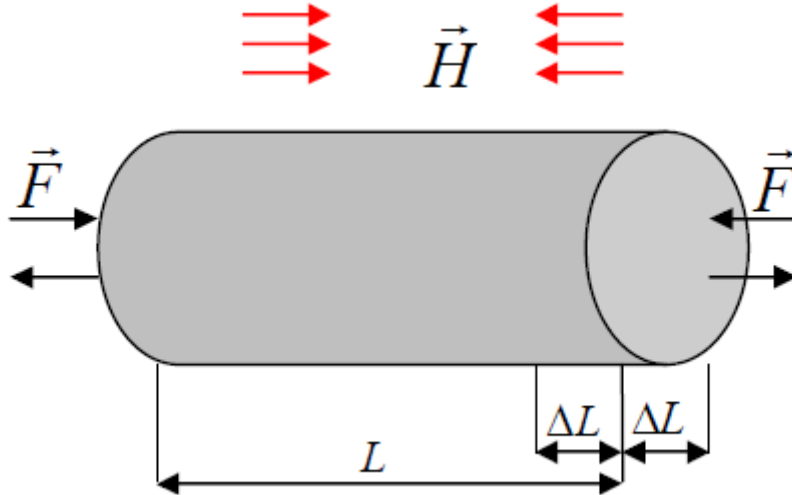


Figure I.4 : Effet Villari

I.2.3. Effet joule transversal :

L'effet Joule transversal est observé quand la direction de mesure de la dimension est perpendiculaire à l'aimantation (Figure I.5). Les effets Joule longitudinal et transversal n'introduisent pas de variation de volume si le matériau est isotrope ou constitué d'un ensemble désordonné de cristaux cubiques. Il n'en est pas de même pour des cristaux élémentaires présentant d'autres symétries.

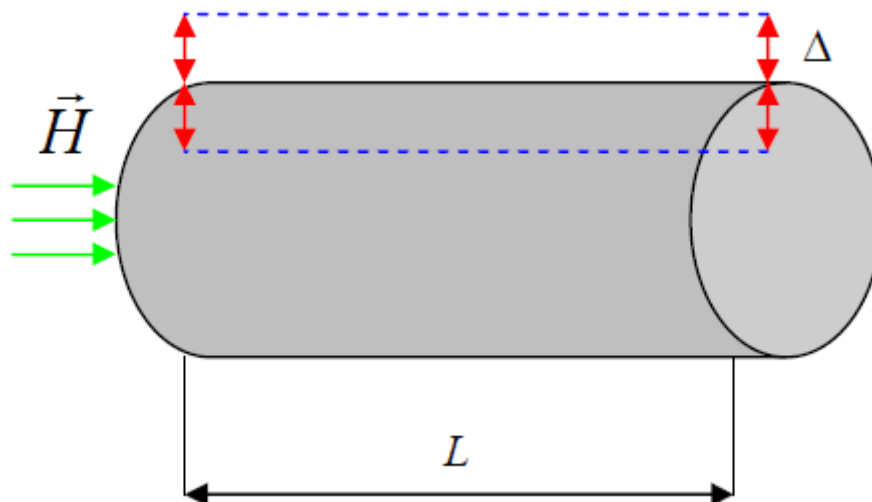


Figure I.5 : Effet joule transversal

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

I.2.4. Effet Wiedemann :

Cet effet se produit dans un barreau ou aimant ferromagnétique soumis à un champ longitudinal. Si ce barreau est traversé par un courant axial, le champ associé à ce courant provoque une torsion du barreau (**Figure I.6**) : c'est l'effet **Wiedemann**. L'effet inverse produit une variation d'aimantation longitudinale et l'apparition d'une aimantation circulaire dans un élément long aimanté axialement et soumis à un couple de torsion.

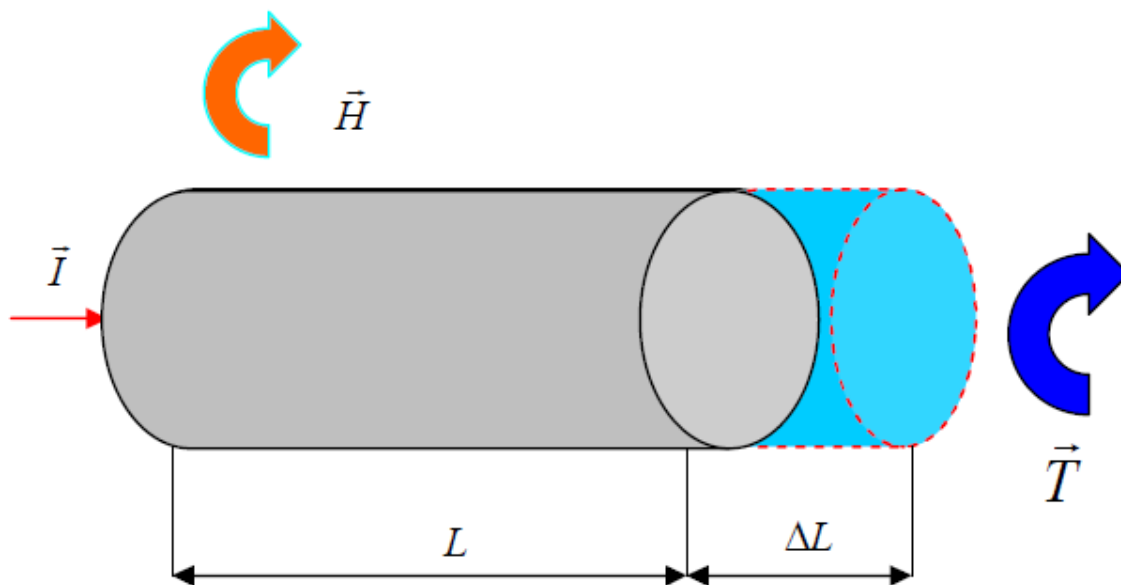


Figure I.6 : Effet Wiedemann

I.2.5. Effet de variation de volume :

Bien que l'effet Joule se manifeste sans changement de volume, il existe des phénomènes magnétostrictifs de variation de volume (ΔV) dans les matériaux ferromagnétiques. On distingue plusieurs types d'effets de volume d'origines différentes.

Une variation spontanée (sans champ appliqué) de volume a été mise en évidence. Un échantillon d'un matériau occupe, alors un volume différent de celui qu'il remplirait s'il n'était pas magnétique (**Figure I.7**). Cette variation de volume est très grande et positive pour les alliages fer-nickel à environ 36 % de nickel ($\Delta V/V$ peut atteindre dans ces alliages $1,9 \cdot 10^{-2}$ à 0 K). De plus, elle diminue quand la température croît et contribue par un terme $\Delta V/(3V)$ à la compensation partielle de la dilatation thermique linéaire classique. Cet alliage fer-nickel est connu sous le nom d'Invar. Son coefficient global de dilatation reste inférieur

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

ou égal à 2.10^{-6} /K en valeur absolue entre les températures de 0 et 400 K. L' Invar est donc utilisé pour obtenir une grande stabilité thermique.

Une variation spontanée de volume existe pour d'autres matériaux magnétiques, mais elle est plus réduite. Par exemple, elle est égale en valeur relative à $-1,2.10^{-3}$ pour le nickel métallique et $-2,7.10^{-3}$ pour le fer à température ambiante. Une variation de volume est observée à bas champ. Son amplitude est fonction de la géométrie de l' échantillon : c' est l' effet de forme. A champ plus élevé, il existe une contribution liée à la rotation de l' aimantation appelée effet de cristal.

Ces deux effets sont extrêmement faibles. Le principal effet de volume se produit pour des champs très importants (quelques 105 A/m). La variation de volume $\Delta V / V$ est alors après saturation une fonction linéaire du champ : c'est la magnétostriction forcée. Pour la plupart des métaux ou alliages magnétostrictifs, cette dernière variation reste faible, cependant des effets de volume plus importants ont été mesurés dans des composés de terres rares. Par exemple, avec le nickel $\Delta V / V$ varie de $1,1.10^{-6}$ par MA/m et de 110.10^{-6} par MA/m pour le composé **Tb0.03 Fe0.97**.

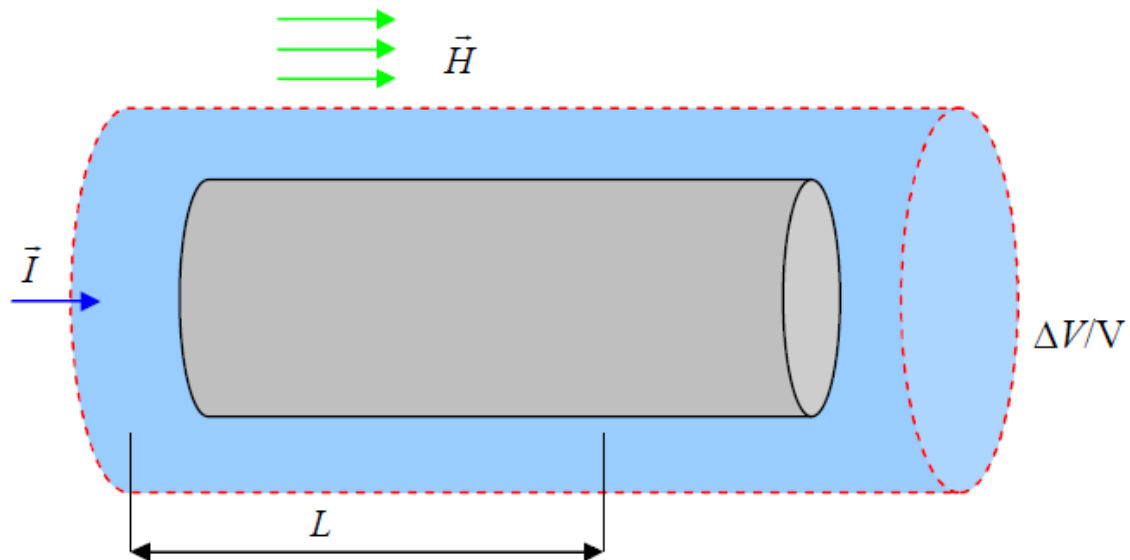


Figure I.7 : Effet de variation de volume

I.2.6. Effet de flexion :

Sous l' action du champ magnétique longitudinal, un barreau encastré à une extrémité subit une courbure, comme s' il travaillait à la flexion. Cet effet se traduit par un déplacement

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

transversal de l'ensemble de l'extrémité libre du barreau sous l'action d'un champ magnétique (**Figure I.8**).

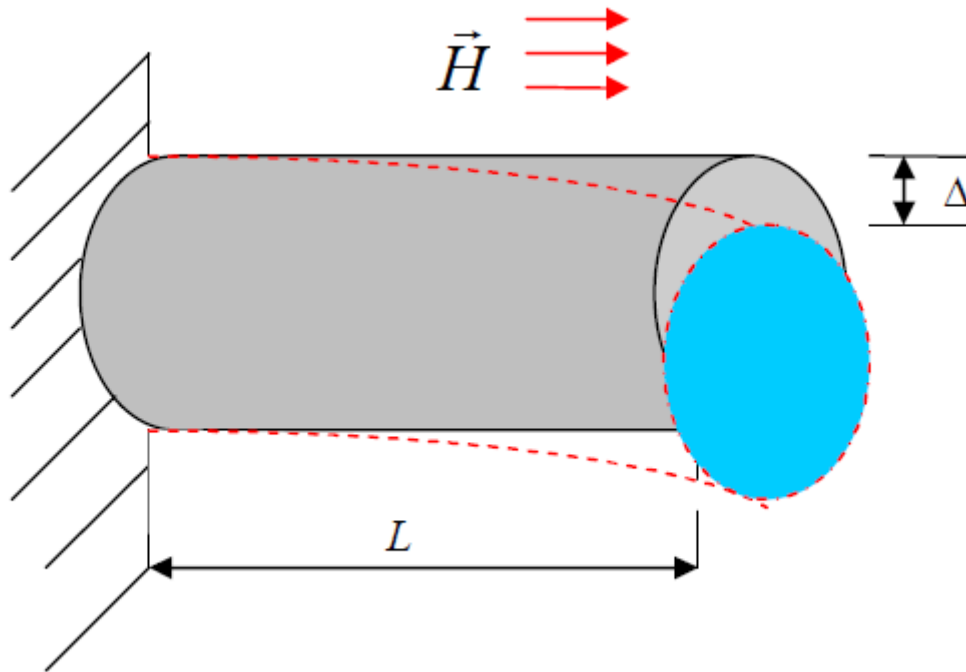


Figure I.8 : Effet de flexion

I.2.7. Effet de variation du module d'Young ou effet γE :

Lorsque l'on applique une contrainte à un matériau ferromagnétique, celle-ci provoque une variation d'aimantation qui introduit une déformation en supplément de la déformation créée par élasticité. Ce phénomène correspond à une modification des constantes élastiques du matériau, donc de son module d'Young E (**Figure I.9**). Le module E est toujours réduit quel que soit le signe du coefficient de magnétostriction λ_s de matériaux ferromagnétiques doux qui présentent un alignement des moments magnétiques pour une très faible contrainte à champ nul, pour une traction saturante.

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

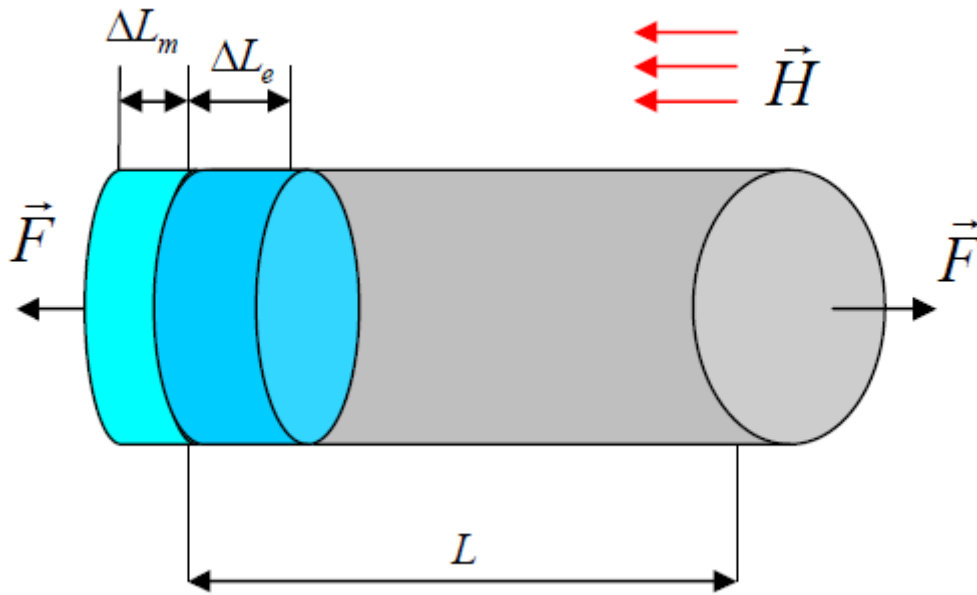


Figure I.9 : Effet de variation du module d'Young



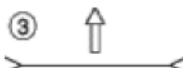

Contrainte	$\lambda_s > 0$	$\lambda_s < 0$
Traction $T > 0$	① 	② 
Compression $T < 0$	③ 	④ 

Tableau I.1: Influence de la contrainte sur la direction de facile aimantation d'un matériau magnétostrictifs isotrope à champ nul.

- Si $\lambda_s > 0$; $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_m = \lambda_s$
- Si $\lambda_s < 0$; $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)_m = -\lambda_s/2 > 0$

$$\Delta E = E_0 - E > 0 \tag{II.2}$$

Avec : E_0 : module d'Young à l'état non magnétique.

Pour une contrainte nettement supérieure à celle saturant l'aimantation, ΔE tend vers

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

zéro [$(\Delta l / l)_{\text{m}}$ est très inférieure à $(\Delta l / l)_{\text{e}}$]. L'effet ΔE est important pour la zone de champ où les domaines magnétiques sont mobiles. Sous champ saturant, une faible contrainte n'affecte pas l'aimantation et introduit uniquement une déformation élastique. ΔE est nulle.

Quelques valeurs mesurées de $\Delta E / E_0$ sont présentées dans le **tableau I.2**. Le comportement du nickel est comparé à celui d'un composé terres rares-fer très magnétostrictif à forte anisotropie et d'un matériau amorphe (**Fe-Si-B**) ayant un très faible champ coercitif.

Matériau	$\Delta E / E_0$ %	H_a A/m
Ni	15	/
$Tb_{0.28}Dy_{0.72}Fe_2$	160	342.10^3
$Fe_{78}Si_{10}B_{12}$	190	240

Tableau I.2 : Valeurs de $\Delta E / E_0$ du champ statistique appliquée H_a pour différents matériaux.

L' effet ΔE est mis à profit pour stabiliser la variation thermique du module d'Young E dans des alliages fer nickel connus sous les noms commerciaux de Elinvar et Durinval C (Ni 42 - Fe 49.5 - Cr 5 - Ti 2,5 - Al 0,5 - Si 0,5). En général le module E d'un matériau non magnétostrictif est une fonction décroissante de la température. Une déformation due à la magnétostriction diminue en augmentant la température et s'annule au point de Curie (à la température de Curie un matériau ferromagnétique devient paramagnétique et les moments magnétiques sont dans un état désordonné). Une réduction de l'effet magnétostrictif induit une augmentation de E . Donc les variations thermiques de E d'origines soit élastique soit magnétostrictive ont tendance à se compenser.

Les alliages à faible coefficient thermo-élastique sont utilisés dans des résonateurs, des ressorts, des capteurs de force ou de pression, des cuves et tuyaux pour liquides refroidis, des pièces pour appareils de métrologie, ...etc.

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

I.2.8. Les matériaux magnétostrictifs :

I.2.8.1. Définition :

Les alliages magnétostrictifs sont au champ magnétique ce que les piézoélectriques sont au champ électrique. Sous l'effet d'un champ magnétique, un barreau de fer s'allonge tandis qu'il subit une striction dans le sens transversal. Inversement, l'effet Villari correspond à l'aimantation du barreau sous l'effet d'un allongement. Selon la géométrie considérée, il est aussi possible d'exploiter des déformations en flexion ou en torsion.

Seuls les alliages de Fer et de Terres rares, tel que le **Terfenol-D**, permettent d'obtenir des déformations importantes, de l'ordre de 1000 à 2000 ppm, soit 10 à 50 fois supérieures à celles obtenus avec les métaux. Bien que ces déformations soient légèrement plus importantes que celles obtenues avec les piézoélectriques, elles sont plus difficiles à mettre en jeu du fait de la perméabilité relativement faible des matériaux (4 dans le cas du **Terfenol-D**).

Ces alliages pourraient être intéressants dans la réalisation de moteurs à effort élevé et faible vitesse.

I.2.8.2. Magnétisme en L'absence d'excitation :

Pour comprendre et interpréter l'évolution de la structure magnétique d'un matériau, il est nécessaire de remonter à l'échelle atomique, puis progressivement de passer à l'échelle de l'arrangement d'atomes puis du cristal et enfin de la pièce.

I.2.8.3. Magnétisme à l'échelle atomique :

Toute substance matérielle est formée d'un ensemble d'atomes. Chaque atome est composé d'un noyau autour duquel gravite un certain nombre d'électrons. Les particules constituant le noyau et les électrons sont chargées et perpétuellement en mouvement, ce qui crée des moments magnétiques qui sont à l'origine des propriétés magnétiques des corps.

Le moment magnétique électronique provient d'une part des mouvements des électrons autour du noyau sur leurs orbites et d'autre part de la rotation spinale de chaque électron

l'ordre de grandeur est de $10^{-23} Am^2$.

Le moment magnétique dû aux mouvements des composants du noyau est beaucoup plus faible. Chaque atome possède donc un moment magnétique élémentaire dont la direction et le module dépendent de l'environnement particulier de l'atome (nature et position, ...).

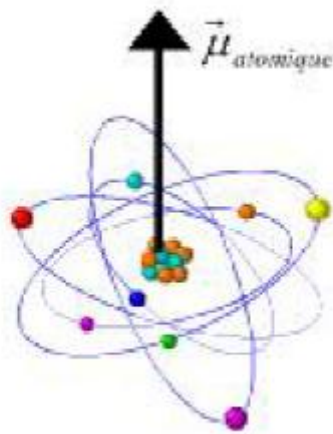


Figure I-27 : Le moment magnétique élémentaire au niveau atomique

Du point de vue magnétique, chaque atome peut donc être considéré comme un petit aimant élémentaire. Pour le fer, il se trouve que ce moment magnétique élémentaire est particulièrement important.

1.2.8.4. Magnétisme à l'échelle de l'agrégat d'atomes :

Lorsque des atomes s'assemblent, les moments magnétiques de chacun d'eux interagissent plus ou moins entre eux ce qui conduit, en magnétisme, à classer les matériaux en cinq grandes catégories : les diamagnétiques, les paramagnétiques, les ferromagnétiques, les ferrimagnétiques et les antiferromagnétiques.

Les alliages ferreux étant ferromagnétiques à basse température (en dessous de la température de CURIE) et paramagnétique au-dessus.

a) Le paramagnétisme :

Si les interactions entre les moments magnétiques des atomes sont faibles devant l'agitation thermique, les interactions deviennent négligeables. En l'absence d'excitation extérieure, une répartition aléatoire des moments magnétiques élémentaires est obtenue. Dans le cas d'une excitation magnétique extérieure, les moments magnétiques atomiques tendent à s'aligner le long des lignes de champ magnétique extérieur. L'aimantation est proportionnelle à l'excitation appliquée \mathbf{H} :

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

χ : représente la susceptibilité magnétique (nombre sans dimension).

Le paramagnétisme est sensible à la température. La susceptibilité initiale est positive et devient infinie au zéro absolu. Elle décroît lorsque la température augmente.

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

b) Le ferromagnétisme :

Si la température est relativement faible et si les moments atomiques des atomes sont relativement importants (cas du fer et du nickel à température ambiante), lors d'un rassemblement d'atomes (agrégat), les moments magnétiques ont tendance à s'arranger parallèlement entre eux et il en résulte pour l'agrégat une aimantation spontanée.

L'induction magnétique \mathbf{B} représente l'état magnétique en fonction de l'environnement magnétique exprimé par le champ \mathbf{H} et de son état d'aimantation exprimé par \mathbf{M} .

$$B = \mu_0(H + M)$$

Avec :

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Henry.m, la perméabilité du vide. La perméabilité μ , relie l'induction magnétique résultante au champ magnétique appliqué :

$$\vec{B} = \mu.H = \mu_0.(1 + \chi).\vec{H} = \mu_0.\mu_r.\vec{H}$$

Avec : μ_r Perméabilité relative (sans dimension).

L'aimantation spontanée dépend de la température ; elle décroît si la température augmente. Au-dessus de la température de CURIE, le matériau retrouve un comportement paramagnétique.

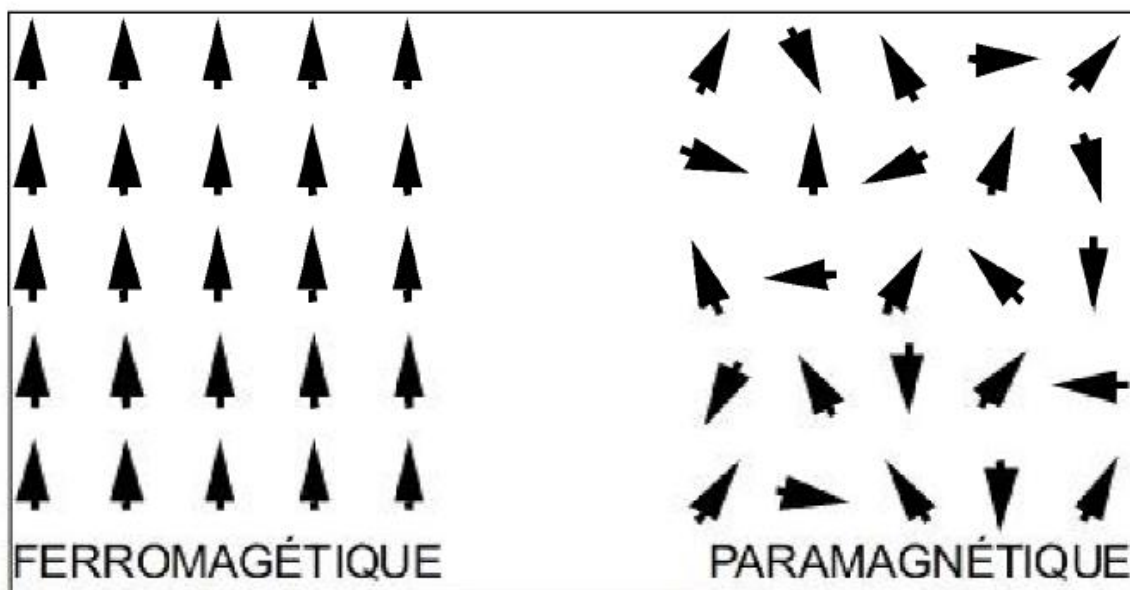


Figure I.28 : Type de magnétisme (cas du fer)

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

1.2.8.5. Ferromagnétisme à l'échelle macroscopique :

Pour le Fer, qui cristallise dans le système cubique centré, l'alignement des moments magnétiques se fait évidemment dans des directions présentant une grande densité d'atomes directions de type $(1,0,0)$ appelées « directions de facile aimantation ».

Il faut noter que, pour un même cristal cubique centré, il existe trois directions équivalentes. Un cristal ferromagnétique devrait donc être caractérisé par une aimantation spontanée. Or, les échantillons macroscopiques mêmes monocristallins peuvent être complètement désaimantés. Pour expliquer ce phénomène, WEISS introduit le concept de domaines (**Figure I.29**).

A ce stade, la matière ferromagnétique présente donc une microstructure magnétique à une échelle légèrement inférieure à celle cristalline. Elle est composée de domaines élémentaires appelés domaines de **WEISS** au sein desquels l'aimantation est orientée selon l'une ou l'autre des directions de facile aimantation.

En l'absence de champ appliqué et de toute autre sollicitation extérieure, il y a statistiquement équipartition du volume des domaines entre les diverses directions ; à l'échelle macroscopique, l'aimantation résultante est donc bien nulle, comme il est observé.

Ce concept, introduit par **WEISS**, s'est avéré correspondre à la structure réellement observée depuis par différentes techniques. Un cristal de fer; il est divisé en vastes domaines principaux de direction de magnétisations antiparallèles. Ils sont terminés par des domaines plus petits dits de fermeture. Les domaines sont séparés par des parois (parois de **BLOCH**).

Quand les directions de magnétisation des domaines contigus sont antiparallèles, on dit que la paroi est à 180° quand les directions sont perpendiculaires on dit que la paroi est à 90° .

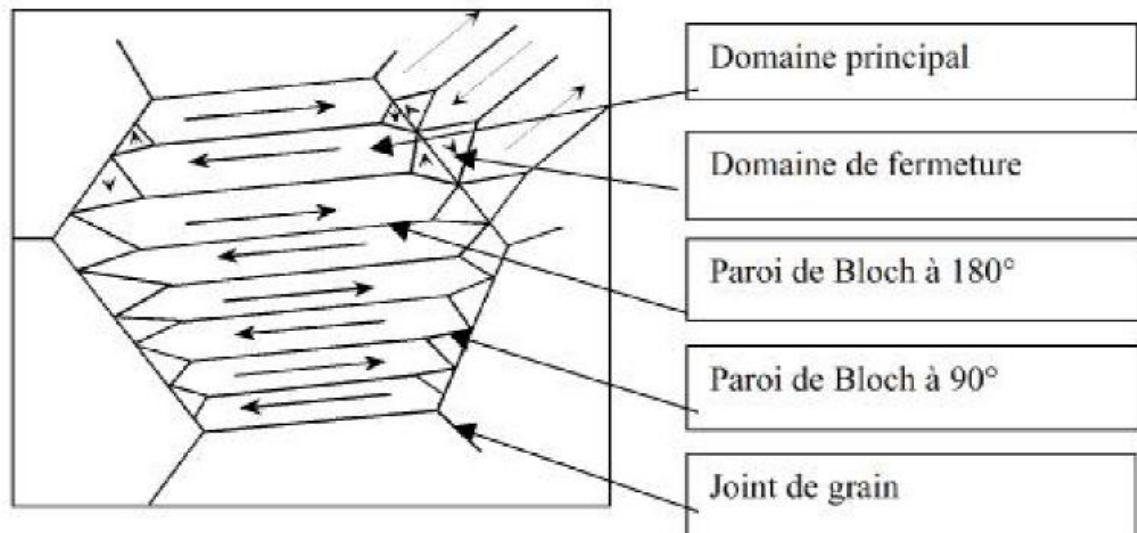


Figure I.29 : Représentation schématique de la microstructure magnétique d'un cristal décomposé en domaines.

Ce type de structure fréquemment observé correspond donc à un équilibre stable de la matière donc à un minimum énergétique.

L'arrangement en domaines magnétiques dicte le comportement magnétique macroscopique des matériaux ferromagnétiques. Ceci résulte de l'interaction et de la minimisation de plusieurs énergies : énergie d'échange, énergie d'anisotropie magnéto cristalline, énergie magnétostatique, énergie magnéto-élastique, énergie des parois.

I.3. Les matériaux à magnétostriction géante :

Durant les années 1960, l'équipe russe de K.P. Belov découvrit l'existence, au sein de certains métaux, de déformations de magnétostriction supérieures de deux ordres de grandeurs à celle des métaux de transition (Fe, Ni, Co).

Ces métaux, appartenant à la famille des terres rares (Terbium, Dysprosium, Gadolinium. . .), présentent ce comportement sous température cryogénique, en raison des très basses températures de Curie des terres rares, et nécessitent l'utilisation de champs magnétiques importants. En conséquence, il est techniquement très difficile d'exploiter ces propriétés magnétostrictives.

Cette découverte relança la recherche, durant les années 1970, de matériaux à forte déformation de magnétostriction à température ambiante. L'équipe de A. E. Clark du Naval Ordnance Laboratory, aujourd'hui NSWC, étudia des alliages à base de métaux de transition et de terres rares, de composition typique RFe_2 où R est une terre rare (**figure I.30**). Les alliages $SmFe_2$ et $TbFe_2$ offrent les plus importantes déformations de magnétostriction,

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

respectivement négative et positive, à température ambiante. Cependant, leur forte anisotropie magnéto-cristalline nécessite des champs magnétiques importants pour l'obtention de déformations élevées.

La réalisation d'alliages ternaires combinant un élément de transition à deux terres rares, de magnétostriction de signe identique mais de constantes d'anisotropie de signes opposées, aboutit à des déformations de magnétostriction dites géantes sous champ magnétique modéré et à température ambiante.

Le Terfenol-D (Terbium Fer Naval Ordnance Laboratory - Dysprosium) de composition typique $Tb_{1-x} Dy_x Fe_2$, est le matériau à magnétostriction géante le plus communément utilisé. Il présente à ce jour le meilleur compromis, à température ambiante, entre de larges déformations et des champs magnétiques faibles. Le Terfenol-D a une structure cristalline cubique où les axes $\langle 111 \rangle$ sont les directions de facile aimantation.

Disponible sous différentes formes (couches minces, poudres composites) les barreaux cylindriques sont les plus couramment employés dans la conception d'applications.

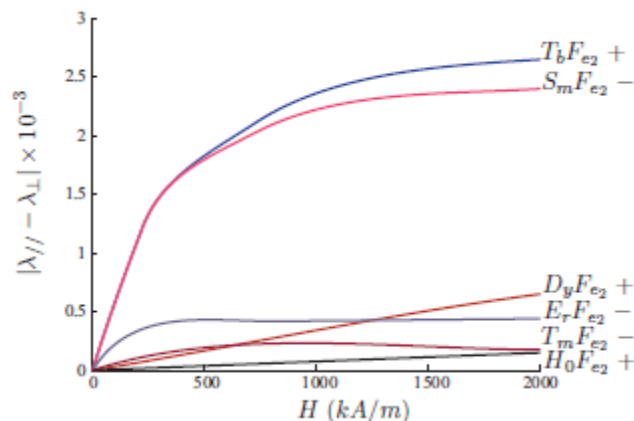


Figure I.30 : Magnétostriction à température ambiante, $\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}$, pour des polycristaux $R Fe_2$ (+ - : signe de la magnétostriction)

Le Terfenol-D est un alliage fragile. Sa résistance à la compression est assez élevée, de l'ordre de 700 MPa, mais sa résistance à la traction est faible, de l'ordre de 25 MPa. Cette fragilité à la traction implique que, sous sa forme massive, le Terfenol-D doit toujours travailler sous contraintes de compression.

Ces dernières années, un nouveau composé à base de Gallium (Ga) fait l'objet de beaucoup d'études. Le Galfenol (Gallium Fer Naval Ordnance Laboratory), de composition typique $Fe_{1-x} Ga_x$, possède une déformation de magnétostriction relativement élevée, quoique cinq fois

Introduction à la magnétostriction, magnétostriction géante et aux matériaux magnétostrictifs

moindre que celle du Terfenol-D, sous champ magnétique faible. Il possède une induction magnétique saturation équivalente à celle du Fer-Silicium, présente très peu d'hystérésis et une température de Curie élevée. Mécaniquement il possède une haute résistance à la traction (500MPa), une bonne ductilité et une bonne usinabilité.

Conclusion :

La magnétostriction doit être prise en compte pour décrire le comportement des matériaux magnétiques en particulier pour les alliages à très faible coefficient de dilatation thermique comme l'Invar ou l'Elinvar. Ce phénomène physique intervient plus ou moins directement dans le fonctionnement de nombreux dispositifs magnétiques.

Parfois sa présence est un inconvénient et son annulation est recherchée.

Après avoir été beaucoup utilisés pour la réalisation de transducteurs d'ultrasons, d'hydrophones, de lignes à retard et filtres, les métaux et alliages métalliques magnétostrictifs sont maintenant remplacés, dans ces applications, par des céramiques piézoélectriques. D'autres possibilités sont offertes à la magnétostriction car des nouveaux matériaux de deux types ont été élaborés. Les composés de terres rares-fer orientés ont des coefficients de couplage magnéto mécanique comparables aux coefficients de couplage électromécanique des céramiques piézoélectriques titanates-zirconates de plomb et la densité maximale de puissance acoustique émise sans détérioration par un transducteur basse fréquence à base de Terfenol-D est supérieure à la valeur limite obtenue avec un transducteur en céramique piézoélectrique. Ce matériau peut être aussi utilisé avantageusement dans des actionneurs. Cependant le coût actuel du Terfenol-D est élevé ce qui limite les possibilités effectives d'applications. Les matériaux amorphes recuits sous champ magnétique ont des coefficients de couplage magnéto mécanique très proches de 1. Cette caractéristique très exceptionnelle est relativement difficile à exploiter car ces matériaux se présentent sous la forme de ruban d'épaisseur très faible (typiquement 25 Δ m) ou de fils. La mise en évidence récente de l'effet de magnéto-impédance géante dans des fils, rubans ou couches ouvre de nouvelles perspectives d'applications.

Finalement de nombreux démonstrateurs de capteurs à base de matériaux amorphes ont été réalisés en laboratoires. Ils pourraient avoir des applications dans les domaines de la robotique et de l'automobile. De plus, des éléments magnétostrictifs peuvent participer à la constitution de matériaux « intelligents » qui intègrent les fonctions de capteur et d'actionneur.

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

II. Applications de la magnétostriction :

L'exploitation des phénomènes de magnétostriction pour élaborer des matériaux à très faible coefficient de dilatation thermique type Invar ou Elinvar constitue l'apport le plus crucial de la magnétostriction.

Les autres applications encore importantes dans les années 60 sont actuellement assez limitées. En général les céramiques piézoélectriques sont maintenant préférées pour fabriquer des transducteurs d'ondes élastiques ou des actionneurs. Cependant les propriétés de matériaux récemment élaborés (**composés terres rares-fer**) permettent de remettre en question dans certains cas la suprématie des céramiques piézoélectriques. De plus, divers types de capteurs à base de matériaux amorphes ont été conçus et étudiés en laboratoires. Après avoir défini les principales grandeurs qui permettent d'évaluer les potentialités d'applications des matériaux magnétostrictifs. Quelques exemples sont donnés.

II.1. Coefficient de couplage magnétomécanique :

Un transducteur acoustique consiste essentiellement en une bobine dont le noyau, en matériau magnétostrictif, résonne mécaniquement à la fréquence de fonctionnement. Un champ magnétique constant est appliqué pour polariser ce matériau et un champ alternatif excite le matériau autour de la valeur du champ permanent.

Dans ces conditions, la perméabilité magnétique utile est appelée perméabilité réversible dynamique. Elle est différente de la perméabilité en régime statique. En fait, il existe deux valeurs de la perméabilité réversible, notées respectivement μ_T et μ_S . μ_T correspond au cas où aucune force extérieure n'est appliquée sur le noyau magnétostrictif, tandis que μ_S est la perméabilité mesurée lorsque le noyau est encastré de telle façon qu'aucune déformation ne soit possible.

Quand un noyau magnétostrictif sans perte est à l'état libre et excité à une fréquence éloignée de la fréquence de résonance, l'énergie magnétique moyenne localisée par unité de volume est $1/2 \mu_T H^2$ (H champ magnétique efficace). Lorsque le noyau est encastré, cette énergie est égale à $1/2 \mu_S H^2$. Elle est plus faible que celle correspondant à l'état libre, car aucune partie de l'énergie magnétique n'est convertie en énergie mécanique. μ_T est donc plus grande que μ_S .

Par exemple, pour l'Alfenol (Al 12,6 -Fe 87,4, matériau polycristallin ordonné), μ_T et μ_S sont respectivement égales en valeur relative à 114 et 104.

La différence $0,5 (\mu_T - \mu_S) H^2$ caractérise la quantité d'énergie magnétique qui est transformée en énergie élastique fournie à la charge mécanique. Le rapport $(\mu_T - \mu_S) / \mu_T$

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

représente la fraction de l'énergie magnétique qui est convertie en énergie mécanique (énergie magnétoélastique)

$$\frac{\mu^T - \mu^S}{\mu^T} = \frac{W_{me}}{W_{me} + W_{ms}} = k^2$$

Avec

W_{me} densité d'énergie magnétoélastique,

W_{ms} densité d'énergie magnétique stockée non convertie en énergie mécanique,

k coefficient de couplage magnétomécanique du matériau magnétostrictif.

Si un noyau linéaire est soumis à une contrainte, le module d'Young E prend deux valeurs suivant les conditions de mesure. E^B est le module d'Young mesuré à induction B constante : il suffit d'entourer le barreau avec une bobine idéale sans résistance en court-circuit. Dans ces conditions, le flux magnétique traversant la bobine reste constant et une variation d'aimantation introduite par une contrainte est exactement compensée par le champ créé par le courant induit circulant dans la bobine. L'effet de la magnétostriction est annihilé et la déformation est uniquement élastique.

Le module E prend la valeur E^H si la mesure est effectuée à champ magnétique H constant (le circuit d'alimentation de la bobine est ouvert : H = 0).

La différence (1/E^H - 1/E^B) caractérise la quantité d'énergie élastique transformée en énergie magnétique donc :

$$\frac{W_{me}}{W_{me} + W_{es}} = \frac{(1/E^H) - (1/E^B)}{1/E^H} = \frac{E^B - E^H}{E^B} = k^2$$

W_{es} est la densité d'énergie mécanique emmagasinée non convertie en énergie magnétique.

Les grandeurs élastiques (contrainte appliquée T, déformation S) et magnétiques (champ H, induction B) sont reliées par les équations d'état (11) écrites sous forme matricielle. Ces relations sont déduites de considérations thermodynamiques :

$$\left. \begin{aligned} B &= dT + \mu T H \\ S &= s^H T + d_t H \end{aligned} \right\}$$

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

\mathbf{dt} est la matrice transposée de \mathbf{d} . La matrice \mathbf{d} égale à représente la sensibilité en contrainte. Elle caractérise le comportement d'un matériau magnétostrictif fonctionnant comme récepteur d'ondes élastiques.

On déduit des équations (11) les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{d}{s^H} S + \mu^\top \left(1 - \frac{d^2}{s^H \mu^\top} \right) H \\ S &= s^H \left(\frac{d^2}{s^H \mu^\top} \right) T + \frac{d_\top}{\mu^\top} B \end{aligned} \right\}$$

étant la dérivée de l'induction B par rapport au champ magnétique H, à déformation constante ; et

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)^B = \frac{1}{c^B} = S^B = s^H \left(1 - \frac{d^2}{s^H \mu^\top} \right)$$

étant la dérivée de la déformation par rapport à la contrainte, à induction constante ; donc d'après (9) et (10) :

$$k^2 = \frac{d^2}{s^H \mu^\top} = \frac{d^2}{s^B \mu^\top + d^2}$$

avec $C_b = E_b e(t1/Sh) = EH$ pour un noyau allongé.

Il existe un autre couple d'équations reliant T, S, B et H :

$$\left. \begin{aligned} H &= -hS + \frac{B}{\mu^S} \\ T &= E^B S - h_t B \end{aligned} \right\}$$

On déduit des équations (11) et (14) :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial B} \right)^\top = \frac{1}{\mu^\top} = \frac{1}{\mu^S} \left(1 - \frac{\mu^S}{E^B} h^2 \right)$$

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

D'après la relation (9) :

$$\text{Et} \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)^H = \frac{h \mu^S}{E^B (1-k^2)} = h \frac{\mu^S}{E^H} = dk^2 = \frac{\mu^S}{E^B} h^2$$

À l'aide des relations (9), (13) et (15), on démontre que :

$$h = \frac{k}{1-k^2} \left(\frac{E^H}{\mu^T} \right)^{1/2}$$

Pour spécifier les matériaux, on suppose qu'une contrainte unidirectionnelle uniforme longitudinale est appliquée au matériau dans une direction désignée par les chiffres 3 et parallèles au champ magnétique.

Dans ce cas :

$$k^2 = k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^H \mu_{33}^T}$$

Le **coefficient de couplage k33** est une grandeur qui caractérise l'aptitude des matériaux à convertir l'énergie magnétique en énergie mécanique et réciproquement. C'est donc le paramètre de base qui permet de comparer les matériaux utilisés comme transducteurs d'ultrasons. Le **coefficient de couplage magnétomécanique effectif keff** d'un noyau dépend des conditions aux limites (géométrie et fixation du noyau) et du mode d'induction du champ magnétique.

Par exemple : pour un noyau libre en forme de tore, pour une barre de longueur égale à une demi longueur d'onde.

L'amplitude **H** du champ magnétique à la fréquence de fonctionnement étant par hypothèse faible, on peut déduire des relations thermodynamiques pour une transformation réversible l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)^H = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial H} \right)^T = d$$

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

Donc :

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial H}\right)^{\top} = d$$

D'après la relation :

$$k^2 = \left[\left(\frac{d\lambda}{dH}\right)^{\top} \right]^2 \frac{E^H}{\mu^{\top}}$$

Le carré du coefficient de couplage magnétomécanique k^2 peut être exprimé par une relation plus générale. L'énergie volumique élastique qui est obtenue par conversion magnétostrictive d'une partie de l'énergie magnétique est W_{me} :

$$W_{me} = \alpha \lambda_s^2 E^H$$

α est une constante.

L'énergie volumique magnétique non convertie par magnétostriction en énergie élastique est égale à la somme W_{ms} des énergies d'anisotropie d'origines diverses. La principale est l'énergie d'anisotropie magnétocristalline K . Mais l'anisotropie conséquence de tensions internes et l'anisotropie induite par les formes des grains constituant le matériau sont à prendre en considération. En négligeant ces deux dernières sources d'anisotropie, d'après l'expression (9) :

$$k^2 = \frac{W_{me}}{W_{ms} + W_{me}} = \frac{\alpha E^H \lambda_s^2}{K + \alpha E^H \lambda_s^2}$$

Pour augmenter k^2 il faut réduire au maximum les énergies d'anisotropie.

II.2 Résonateur magnétostrictif :

Les noyaux magnétostrictifs des transducteurs ont généralement la forme d'un barreau ou d'un anneau et constituent des résonateurs mécaniques à la fréquence de fonctionnement. Dans les conditions ordinaires d'environnement, la longueur d'un barreau est égale à une demi-longueur d'onde acoustique à la fréquence fondamentale de résonance f_0 :

$$f_0 = \frac{1}{2l} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}$$

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

Avec :

ρ : Masse volumique,

E : valeur effective du module d'Young.

Un résonateur présente une fréquence de résonance f_r (maximum d'impédance) avec un coefficient de qualité électrique Q et une fréquence d'antirésonance f_a (minimum d'impédance).

f_a est approximativement égal à la fréquence de résonance quand la bobine excitatrice est en court-circuit, tandis que f_r correspond au cas où la bobine est en circuit ouvert (oscillation libre).

$$\text{Donc } \left. \begin{aligned} f_a &= \frac{1}{2l} \left(\frac{E^B}{\rho} \right)^{1/2} \\ f_r &= \frac{1}{2l} \left(\frac{E^H}{\rho} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

On déduit à l'aide des relations (10) et (19) le carré du coefficient de couplage effectif :

$$k_{eff}^2 = 1 - \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2$$

pour un barreau :

$$k_{33}^2 = \frac{\pi^2}{8} \left[1 - \left(\frac{f_r}{f_a} \right)^2 \right]$$

Si k n'est pas trop grand ($k < 30\%$) :

$$\frac{f_a - f_r}{f_a} = \frac{1}{2} k_{eff}^2$$

Un résonateur magnétostrictif ne fonctionne efficacement que dans un intervalle relatif de fréquences de l'ordre de grandeur de la moitié du carré du coefficient de couplage magnéto-mécanique.

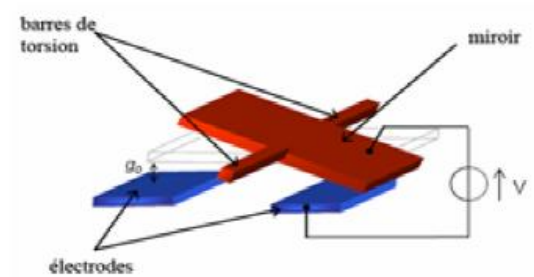
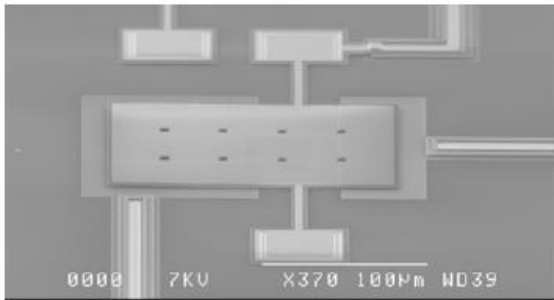
Pour un anneau de matériau magnétostrictif de diamètre D la fréquence fondamentale de résonance f_r est :

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

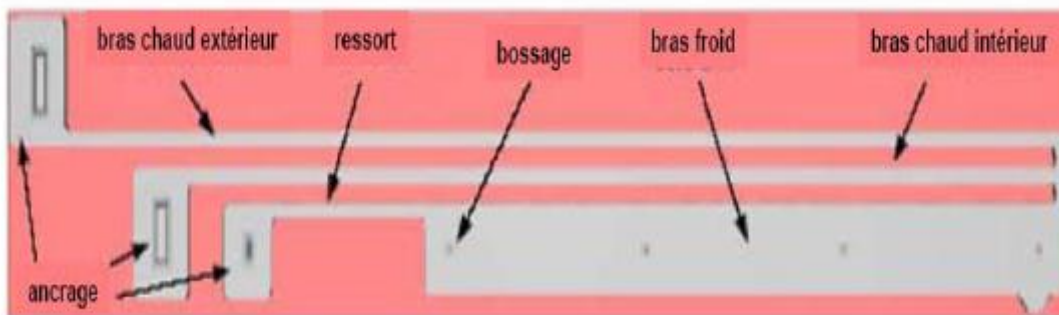
$$f_r = \frac{1}{\pi D} \left(\frac{E^H}{\rho} \right)^{1/2}$$

➤ *Les transducteurs :*

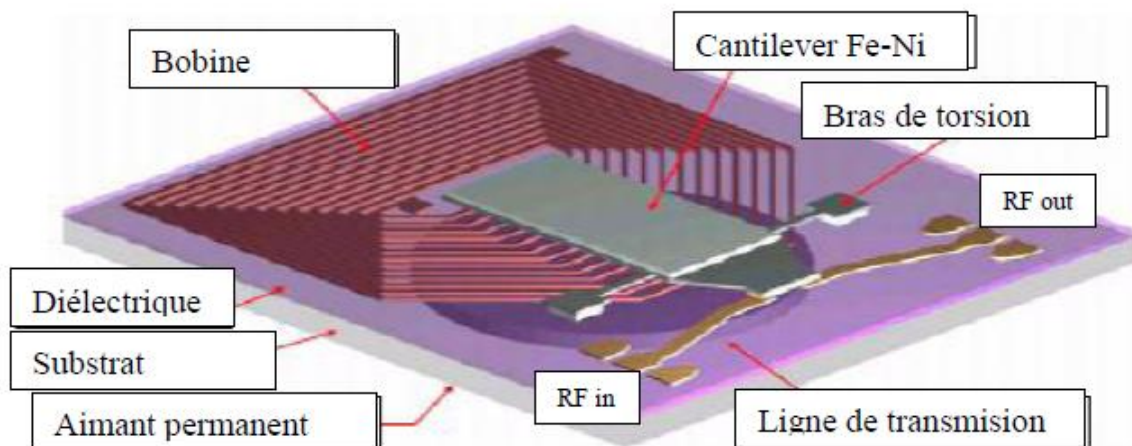
Quelques exemples :



Exemple 1 : Microactionneur électrostatique .



Exemple 2 : Microactionneur électrothermique.



Exemple 3 : Microactionneur électromagnétique.

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

Application :

Les applications des matériaux à magnétostriction géante peuvent être classées en deux catégories principales :

Les actionneurs où la conversion magnétique-mécanique est exploitée. On peut distinguer les moteurs magnétostrictifs linéaires tels que ceux conçus par Kiesewetter. basé sur le principe du Inch-Worm¹³, il est constitué d'un tube cylindrique formant un stator à l'intérieur duquel est bridé un barreau cylindrique de Terfenol-D. Des mouvements de va-et-vient sont effectués en alimentant séquentiellement une série de bobinages indépendants disposés le long du stator. La section du Terfenol-D diminue et le matériau se trouve désolidarisé du tube. En alimentant successivement les bobinages, cette zone contractée se propage le long du barreau qui se déplace tout entier dans le tube (**figure 1.13(a)**). Ce type d'actionneur est recherché pour le positionnement précis d'objet.

Des moteurs magnétostrictifs à mouvements rotatifs ont aussi été mis au point. Pour ces moteurs également basés sur la technique du Inch-Worm, des couples importants à faibles vitesses, ainsi que des couples élevés à l'arrêt, sont disponibles. Ces moteurs utilisent les mouvements combinés de plusieurs barreaux magnétostrictifs afin de mettre en rotation un arbre, via l'actionnement de pièces d'entraînement (**figure 1.13(b)**). Le prototype mis au point par Vranish, d'un volume de $26 \times 11,5 \times 10,8 \text{ cm}^3$ est capable de développer un couple de 12,2 N.m à une vitesse de 0,5 tr/mn, et dispose d'une précision angulaire de 800 μrad .

Enfin, une application potentiellement importante des actionneurs magnétostrictifs concerne le contrôle actif du bruit et des vibrations.

Les capteurs où la conversion mécanique-magnétique est mise à profit. De nombreux capteurs de position, de forces et de couples, ainsi que de pression ont été étudiés et certains ont fait l'objet d'une commercialisation. Les variations des propriétés magnétiques induites par une contrainte sont mises à profit, en mesurant la tension induite dans une bobine de mesure de flux liée à l'échantillon magnétostrictif. Il est à noter que la réalisation de capteurs magnétostrictifs ne nécessite pas de matériaux à magnétostriction géante, mais plutôt des matériaux capables de transformer l'énergie élastique en énergie magnétique avec un rendement tendant vers l'unité.

Enfin, l'une des applications les plus importantes du Terfenol-D est le sonar ; application ayant fait l'objet d'importantes recherches, et l'une des plus développées.

Les transducteurs électromagnétiques et application de magnétostriction

Différentes configurations ont été définies. Toutes associent le mouvement unidirectionnel d'un barreau de Terfenol-D, soit à celui d'un piston pour générer une onde longitudinale, soit à la déformation d'une coque pour produire des ondes radiales . D'autres dispositifs à base de matériaux à magnétostriction géante font l'objet de développement pour répondre aux besoins spécifiques de certaines applications de l'aérospatiale (amplification de déplacement, micro-pompes . . .)

Les applications grand public sont peu nombreuses. On peut néanmoins citer le Soundbug14, dispositif à base de Terfenol-D qui permet de transformer toute surface solide en haut parleur. La surface amplifie les vibrations, produites par le vibreur collé à l'aide d'une ventouse, et les transmet à l'air ambiant générant ainsi du son.

III.1. DOMAINES MAGNETIQUES :

On peut définir une aimantation spontanée $S M$, qui est la somme des moments magnétiques de spin du matériau par unité de volume lorsque la température est inférieure à la température de Curie $C T$. Cependant, en l'absence de champ magnétique extérieur, un bloc de matériau ferromagnétique présente généralement une aimantation faible ou nulle malgré le fort champ moléculaire. Cela a conduit Weiss à formuler l'hypothèse de la subdivision du matériau en une multitude de domaines élémentaires. Deux domaines adjacents sont aimantés à saturation (aimantation $S M$) suivant des directions antiparallèles et sont séparés par une paroi. Les lignes de flux associées à cette organisation peuvent parfois se refermer à l'intérieur du corps ferromagnétique à travers des domaines de fermeture où l'aimantation est parallèle à la surface. Cette organisation diminue fortement l'énergie magnétostatique du matériau.

Dans un monocristal, l'orientation de l'aimantation à l'intérieur d'un domaine n'est pas quelconque. Il existe en effet des directions d'aimantation privilégiées qui sont imposées par la géométrie du réseau cristallin. L'aimantation se positionne naturellement suivant des directions de facile aimantation. Ces directions sont celles suivant lesquelles le champ magnétique à appliquer pour aimanter le monocristal à saturation, est le plus faible. Le terme d'énergie d'anisotropie magnétocristalline qui contrôle ce phénomène trouve son origine dans le mécanisme de couplage spin-orbite prévu par la mécanique quantique. Pour un cristal cubique, les directions de facile aimantation peuvent être les axes du cube (axes de type [100], c'est le cas du fer) ou les axes diagonaux (de type [111]) comme pour le nickel et le grenat d'yttrium-fer (YIG). Pour un cristal hexagonal tel que le cobalt (à une température inférieure à 430 C), l'axe facile est l'axe hexagonal.

En résumé, la forte énergie magnétostatique, due à l'existence des pôles en surface dans un matériau aimanté à saturation, est fortement diminuée par une subdivision en domaines magnétiques. La structure en domaines est stable lorsque l'accroissement d'énergie de paroi associée à la création d'un domaine supplémentaire est plus important que la diminution d'énergie magnétostatique.

III.2. PREMIERE AIMANTATION DU MATERIAU :

L'application d'un champ magnétique extérieur accroît l'aimantation globale du matériau par différents processus.

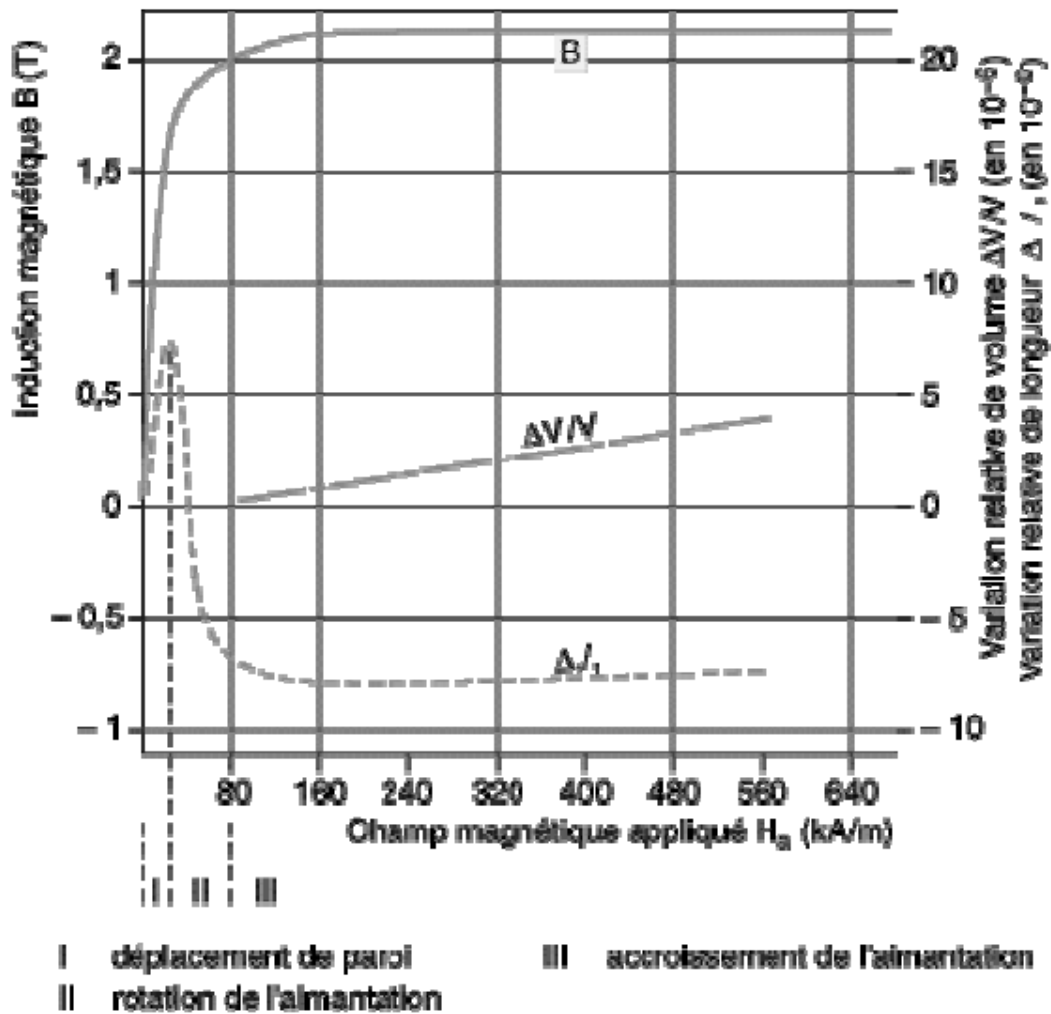


Figure III.1 : Courbe de première aimantation B , effet Joule longitudinal $\Delta l/l$ et effet de volume $\Delta V/V$ en fonction du champ magnétique appliqué H_a pour le fer.

Les domaines dont l'aimantation est suivant une direction proche de celle du champ appliqué croissent au détriment des autres. Les déplacements de parois se produisent tout d'abord de manière réversible pour des champs extrêmement faibles et de manière irréversible.

Ce processus est en général terminé pour des champs de quelques ampères par mètre.

L'aimantation s'aligne suivant le champ appliqué par rotation. Une intensité de champ importante peut être nécessaire lorsque l'on cherche à orienter l'aimantation du matériau suivant une direction difficile.

Une légère augmentation de l'aimantation se produit pour des champs plus intenses.

Cela correspond à une meilleure orientation des moments de spin affectés par l'agitation thermique.

Les variations relatives de longueur $\Delta l/l$ en fonction du champ appliqué sont portées sur la même figure que les variations d'induction (**Figure III.2**). C'est le cas d'un échantillon polycristallin de fer où la magnétostriction est positive durant les déplacements de parois pour

Comportement des matériaux magnétostrictifs

devenir négative durant le processus de rotation de l'aimantation. Le nickel par contre a une magnétostriction qui est toujours négative (**Figure III.1**). Il est à remarquer que, durant les deux premières phases du processus d'aimantation, le volume de l'échantillon est très peu modifié (par les effets de forme et de cristal), mais pendant la troisième phase apparaissent des variations de volume linéaires en fonction du champ, c'est la **magnétostriction forcée**.

Variation relative de longueur
 $\Delta l / l$ (en 10^{-6})

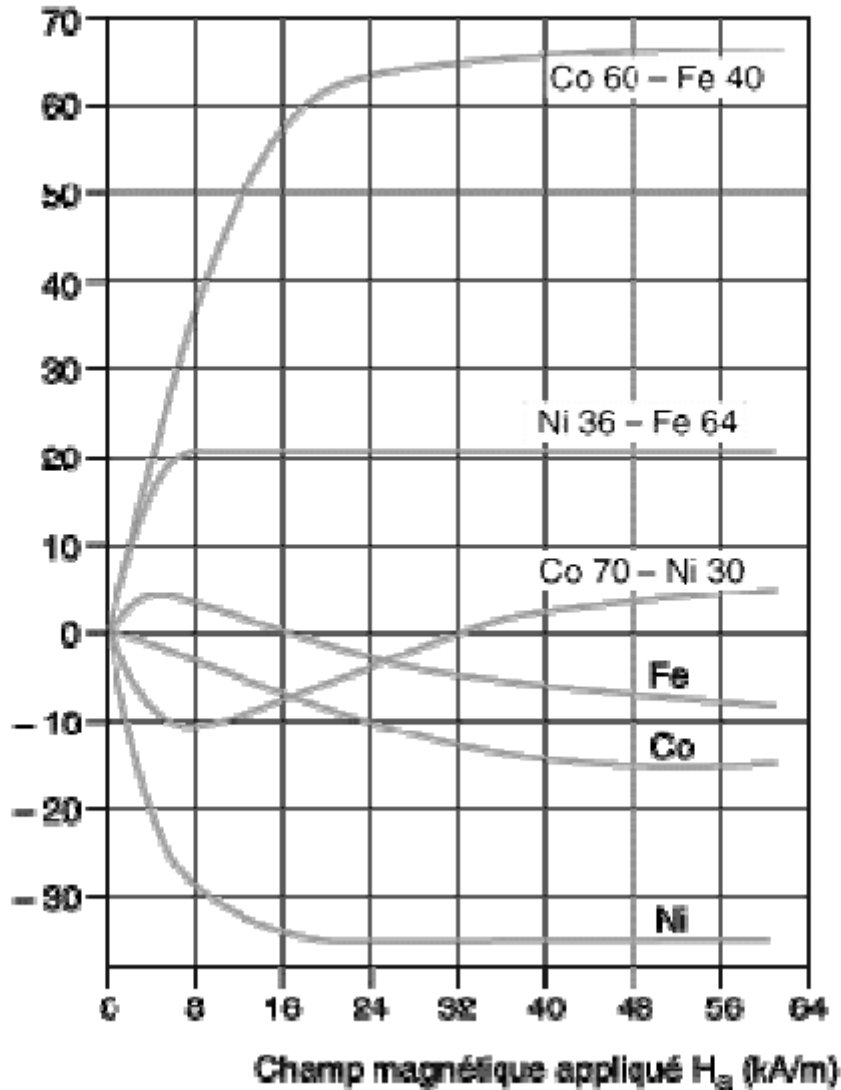


Figure III.2 : Effet Joule longitudinal de quelques métaux et alliages métalliques en fonction du champ magnétique appliqué H_a [40].

III.3. MAGNETOSTRICTION :

La magnétostriction trouve son origine dans l'interaction entre les moments magnétiques atomiques comme dans l'anisotropie magnétique. Le couplage entre les déformations et l'état d'aimantation d'un matériau s'exprime par un terme appelé énergie magnéto-élastique.

La densité volumique globale d'énergie dans un matériau ferromagnétique soumis à une contrainte mécanique et un champ magnétique externe est égale à la somme des densités des énergies élastique et magnétoélastique, de l'énergie due à l'interaction aimantation-champ externe (**énergie Zeeman**), de l'énergie d'anisotropie magnétocristalline et de l'énergie démagnétisante. Les valeurs à l'équilibre des déformations sont obtenues quand la somme des énergies élastiques et magnétoélastique est minimale en fonction des déformations.

L'aimantation prend une position stable pour ces déformations à l'équilibre quand la densité globale d'énergie est minimale en fonction des angles déterminant l'orientation de l'aimantation.

On définit généralement le coefficient de magnétostriction par la différence relative entre la longueur d'éléments (noyaux de bobines) mesurée dans la direction \mathbf{b} sous champ magnétique et la longueur dans la même direction \mathbf{b} sans champ ($l = \mathbf{D}l \mathbf{I}$).

Les variations de dimensions induites par magnétostriction sont associées aux changements d'orientation des domaines magnétiques. Le raisonnement élémentaire effectué dans la suite permet de trouver l'expression principale de la déformation magnétostrictive d'éléments linéaires. Considérons une particule de matériau ferromagnétique désaimanté isotrope en forme de sphère de diamètre d . Après aimantation mono domaine, la particule est spontanément déformée par magnétostriction. Le diamètre change de Δd dans la direction d'aimantation et pour une direction de mesure formant un angle θ avec l'aimantation, la variation de dimension est $\Delta d \cos^2\theta$. La différence relative entre la dimension d'un élément en matériau constitué d'un ensemble de ces particules mono domaines avec des directions d'aimantation réparties aléatoirement dans tout l'espace (matériau désaimanté) et celle d'un noyau en matériau formé de particules sphériques est $\Delta d/(3d)$. A champ saturant, tous les domaines sont orientés dans la même direction et la différence relative de dimension de l'ensemble est $(\Delta d \cos^2\theta)/d$.

Donc la variation relative de dimension Δ/l d'un noyau entre les états saturé dans une direction et désaimanté est :

$$\frac{\Delta d}{d} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right)$$

A la saturation en magnétostriction les directions d'observation et d'aimantation sont confondues ($\theta = 0$) :

$$\left(\frac{\Delta l}{l} \right)_s = \frac{2}{3} \frac{\Delta d}{d} = \lambda_s$$

On en déduit, pour un matériau isotrope (amorphe ou polycristallin) :

$$\frac{\Delta l}{l} = \lambda = \frac{3}{2} \lambda_s \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right)$$

Le coefficient de magnétostriction à saturation λ_s caractérise le matériau de base.

Quand l'échantillon est composé d'un ensemble de grains mono domaines plus ou moins orientés, isotropes en magnétostriction, le coefficient λ est :

$$\lambda = \frac{3}{2} \lambda_s \left(\langle \cos^2 \theta \rangle - \langle \cos^2 \theta_0 \rangle \right)$$

$\langle \cos^2 \theta \rangle$ et $\langle \cos^2 \theta_0 \rangle$ sont les valeurs moyennes dans tout l'espace de $\cos^2 \theta$ et $\cos^2 \theta_0$ pour l'échantillon soumis au champ magnétique et pour l'état initial respectivement. Pour éliminer le terme $\langle \cos^2 \theta_0 \rangle$, λ_s est mesuré quel que soit l'état d'orientation initial à partir de la différence entre les coefficients de magnétostriction pour des champs saturants dans des directions parallèles ($l //$) et perpendiculaire ($l \perp$) à la direction des mesures :

$$\lambda_s = \frac{2}{3} (\lambda_{//} - \lambda_{\perp})$$

$l \perp$ est indépendant de l'état désaimanté.

Pour un angle θ entre la direction d'observation et celle de l'aimantation égal à 90, le

coefficient de magnétostriction prend pour un matériau isotrope la valeur, $l \perp$:

$$\lambda_t = -\frac{\lambda_s}{2}$$

λ_s est le coefficient de magnétostriction transversale. La variation de volume due à ce type de magnétostriction est nulle.

Pour un monocristal cubique aimanté à saturation suivant une direction \mathbf{a} ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$) sont les cosinus directeurs de la direction \mathbf{b} ($\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$) d'aimantation par rapport au système

Comportement des matériaux magnétostrictifs

d'axes associé au réseau cubique), la magnétostriction observée suivant la direction s'exprime par :

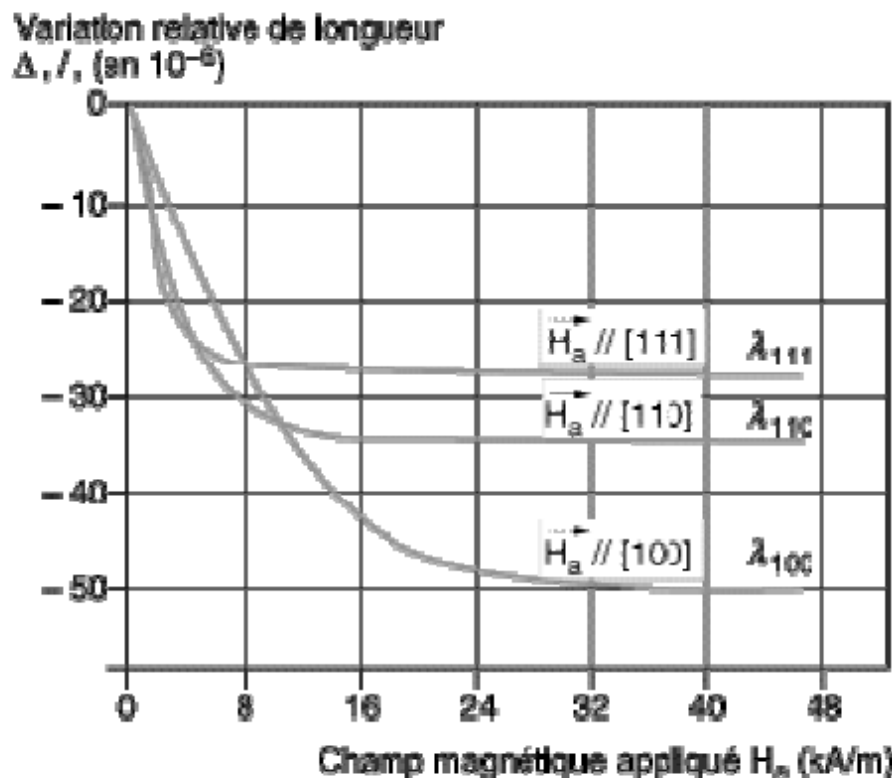
$$\lambda(\vec{\beta}) = \frac{3}{2} \lambda_{100} \left(\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 - \frac{1}{3} \right) + 3 \lambda_{111} (\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 \beta_1)$$

Avec : λ_{100} et λ_{111} : variations relatives de longueur du matériau observées suivant les directions d'aimantation à saturation respectivement parallèles aux axes $[100]$ et $[111]$.

La magnétostriction à saturation λ_s pour un polycristal formé de cristallites cubiques non ordonnés est donnée par :

$$\lambda_s = \frac{2}{5} \lambda_{100} + \frac{3}{5} \lambda_{111}$$

Des résultats de mesures, effectuées sur un échantillon monocristallin de nickel, sont présentés sur la **figure III.3** lorsque le champ est appliqué suivant différentes directions.



λ_{100} , λ_{110} et λ_{111} sont les valeurs de la magnétostriction à saturation mesurées respectivement suivant les directions $[100]$, $[110]$ et $[111]$ lorsque le champ magnétique H_a est appliqué parallèlement à cette même direction.

Figure III.3 : Effet Joule longitudinal en fonction du champ magnétique appliqué H_a suivant différentes directions d'un échantillon monocristallin de nickel

III.4. MAGNETOSTRICTION INVERSE :

Une contrainte uniforme T est appliquée à un matériau magnéto-strictif isotrope non soumis à un champ magnétique et initialement désaimanté. Une anisotropie uni axiale magnétoélastique est introduite par la contrainte. La direction de cette contrainte forme un angle q avec celle de l'aimantation induite. La densité d'énergie magnétoélastique W_{me} , en négligeant la magnétostriction en volume et prenant arbitrairement l'origine des densités à la saturation ($\theta = 0$), est égale à :

$$W_{me} = \frac{3}{2} \lambda_s T \sin^2 \theta$$

Les orientations stables de l'aimantation correspondent aux minimums de W_{me} . Le **tableau III.2** présente, pour différents cas de magnétostriction et de contrainte, les directions stables d'aimantation induites par la contrainte. Bien entendu, cette influence est pondérée par les effets d'anisotropie et du champ démagnétisant. **La figure 3.4** montre l'influence d'une traction sur la courbe de première aimantation du Permalloy ($\lambda_s > 0$) et du nickel ($\lambda_s < 0$). Les courbes avec contrainte (**figure III.4**) ou sans contrainte appliquée (en trait plein) sont comparées : le Permalloy correspond au cas du **tableau III.2** : l'effet de la traction favorise un axe de facile aimantation suivant la direction d'application de la contrainte ; le nickel a un comportement opposé (cas i).





Contrainte	$\lambda_s > 0$	$\lambda_s < 0$
Traction $T > 0$		
Compression $T < 0$		

Tableau III.1 : Influence d'une contrainte T sur la direction de l'axe de facile aimantation d'un matériau magnétostrictif isotrope à champ nul

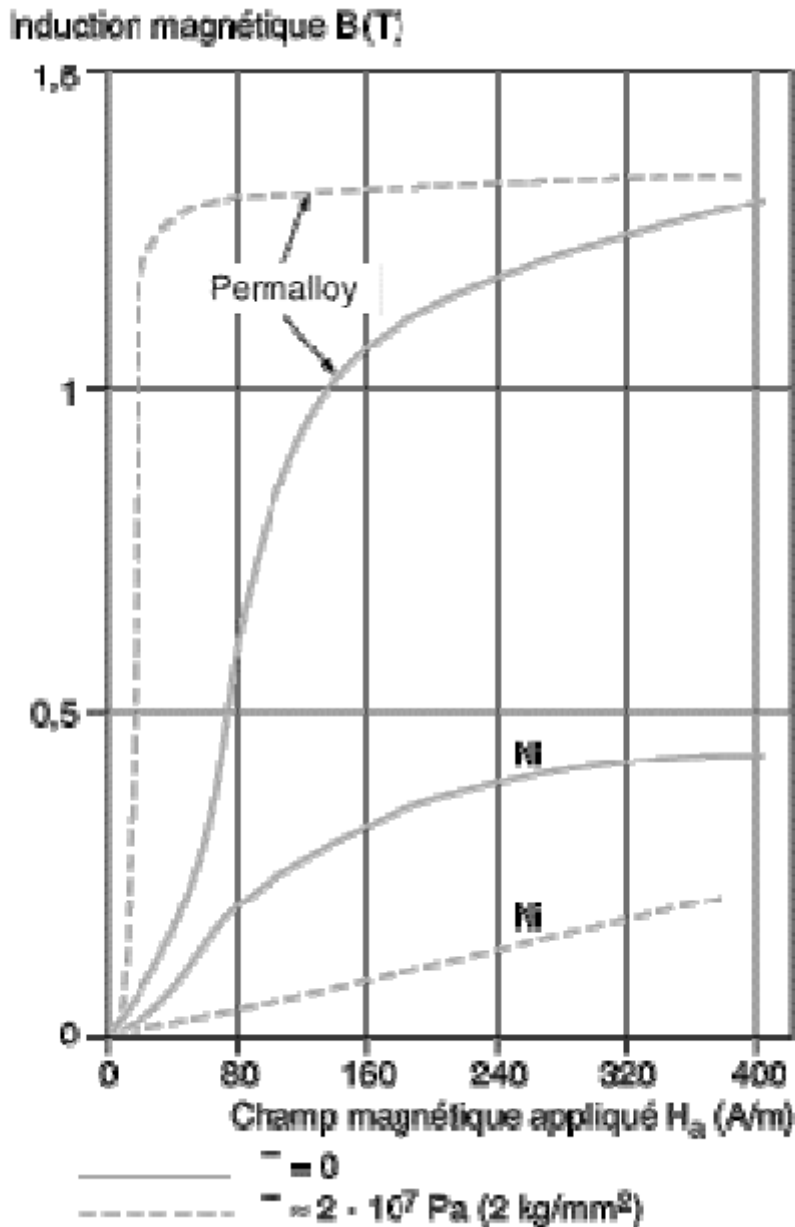


Figure III.4 : Courbe de première aimantation pour un échantillon de Permalloy 68 (68 %de nickel) et de nickel avec (courbes en tiret) ou sans (courbes en trait plein) contrainte T

Un élément linéaire en matériau magnétostrictif isotrope à l'état désaimanté, sans contrainte mécanique présente à saturation pour un champ axial un coefficient $\lambda//$ égal à λ_s . Si une contrainte longitudinale T est appliquée, on observe deux types de comportement. Pour un produit $\lambda_s T > 0$ le coefficient $\lambda//$ à la saturation ($\theta = 0$) diminue de λ_s à 0 en fonction de l'amplitude de la contrainte, car le matériau contraint n'est plus isotrope à l'état initial (θ tend vers zéro, $\lambda// = 3\lambda_s (1 - \cos^2)/2$).

Si $\lambda_s T < 0$ le coefficient $\lambda//$ croît de λ_s à $3\lambda_s/2$ en fonction de la contrainte, les domaines à champ nul s'orientant principalement dans la direction normale à l'axe ($\theta \approx 90$).

Comportement des matériaux magnétostrictifs

Un matériau ordonné présente des directions préférentielles d'alignement des domaines magnétiques définies par la symétrie cristalline. L'énergie d'anisotropie est égale à la différence des énergies nécessaires pour aimanter jusqu'à la saturation un échantillon dans les directions difficile et facile. Si le matériau est magnétostrictif, l'énergie magnétoélastique contribue à l'énergie d'anisotropie, et la constante d'anisotropie effective est différente de celle d'anisotropie magnétocristalline. Cette contribution est fonction de la symétrie cristalline. Pour une symétrie cubique, elle dépend des coefficients de magnétostriction isotope de volume et de magnétostriction anisotrope type Joule.

III.5. HYSTERESIS MAGNETIQUE :

Après une première aimantation, si l'on fait varier l'intensité du champ appliqué de $+H_m$ à $-H_m$, l'induction magnétique décrit un cycle appelé cycle d'hystérésis. La valeur du champ correspondant à une induction nulle est le champ coercitif H_c . A champ nul le matériau garde une mémoire de l'aimantation, qui est caractérisée par l'induction rémanente B_r (figure III.5a). L'effet Joule longitudinal présente aussi une hystérésis tout en conservant le même signe quel que soit le sens du champ. Les variations typiques de $\Delta l/l$ avec le champ appliqué sont présentées sur la figure III.5b. Ces variations sont parfois tracées en fonction de l'induction B (figure III.5c). $\Delta l/l$ variant pratiquement comme le carré de l'induction.

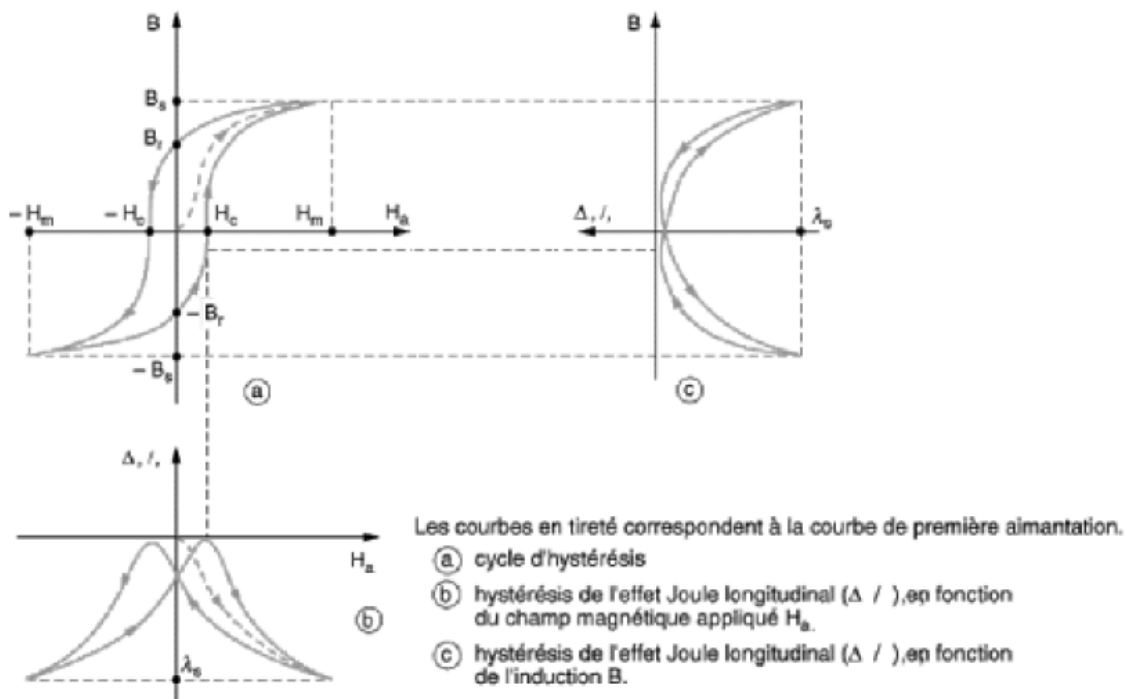


Figure III.5 : Hystérésis magnétique

Comportement des matériaux magnétostrictifs

Il est à noter que la courbe d'aimantation est en général discontinue : sous l'action d'un champ, le mouvement des parois de domaines est contrarié par la présence de contraintes, d'inclusions, etc., et cela crée des irrégularités dans la courbe d'aimantation (effet **Barkhausen**).

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

IV .1.Introduction :

La modélisation des systèmes électromagnétiques est un outil indispensable pour l'analyse, la prédiction de comportement et l'optimisation des dispositifs, elle aide à réduire au minimum le temps et le coût de conception. Dans ce contexte, le but des outils numériques est de garantir des résultats précis de la simulation avec le moindre coût en termes de temps de calcul et de consommation de mémoire. De nos jours, beaucoup d'outils de simulation basés sur les méthodes numériques de discrétisation sont disponibles. Généralement, c'est la méthode des éléments finis MEF qui est employée. Cette technique a montré son efficacité dans plusieurs travaux de modélisation. Néanmoins, on peut trouver d'autres méthodes numériques dont l'exploitation est prometteuse, tel que les différences finis (MDF), intégrales de frontières (MIF).

Parmi les logiciels les plus populaires dans La modélisation des systèmes électromagnétiques nous citons, **Matlab P.D.E Tool, Maxwell 2D/3D, Flux 2D/3D (Fr), Comsol 2D/3D...**,

IV.2.Méthodes de résolution :

La modélisation des systèmes électriques peut être réalisée par trois types de méthodes différentes :

- Les méthodes analytiques ;
- Méthodes semi analytiques
- Les méthodes numériques

IV.2.1.Méthodes analytiques :

Les méthodes analytiques est un ensemble d'équations mathématiques qui déduit des phénomènes physiques.

La solution analytique des problèmes électromagnétiques de contrôle non destructif est très difficile. La raison principale est l'interaction complexe du champ électromagnétique avec des hétérogénéités telles que les défauts.

L'approche analytique est caractérisée par :

- La solution est générale et exacte.
- Le modèle est décrit sous forme des équations mathématiques.
- L'analyse du modèle est presque toujours faite en résolvant les équations aux dérivées partielles linéaires
- Une difficulté liée à la complexité de traitement des géométries complexe.

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Parmi ces méthodes nous citons

- la méthode des séries exponentielles.
- la méthode de séparation des variables.

IV.2.2.Méthodes semi analytiques :

Les modèles analytiques et numériques peuvent être mixés pour former un modèle hybride (intermédiaire ou bien semi-analytique). Ce type de modèle a des performances intermédiaires en termes du temps de calcul et de précision.

Parmi ces méthodes nous citons

- la Méthode des images électriques.
- Méthode des circuits couplés.

IV.2.3.Méthodes numériques :

Les méthodes numériques ont pris un essor considérable avec l'avènement des moyens Informatiques, dans les années 50. Celles-ci sont d'autant plus utilisées que les configurations à traiter sont complexes. L'utilisation de ces méthodes de discrétisation pour la résolution des équations aux dérivées partielles dont le domaines d'études, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébrique dont la solution donne les valeurs et la distribution des grandeurs recherchées.

Parmi ces méthodes nous citons :

IV.2.3.1. Méthode des différences finies (MDF) :

La méthode des différences finies est la plus simple et historiquement la première, cette méthode est basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnu aux points de calcul (nœuds) du domaine de résolution.

La méthode des différences finies a été la première méthode numérique utilisée pour la résolution d'équations aux dérivées partielles de types « Laplace » ou « Poisson ». Elle a été rendu populaire grâce à l'invention du calculateur numérique qui s'est fait vers 1949. Les équations aux dérivées partielles résolues sont considérées avec des conditions aux limites de types : Dirichlet, Neumann et mixte.

Considérons le domaine suivant :

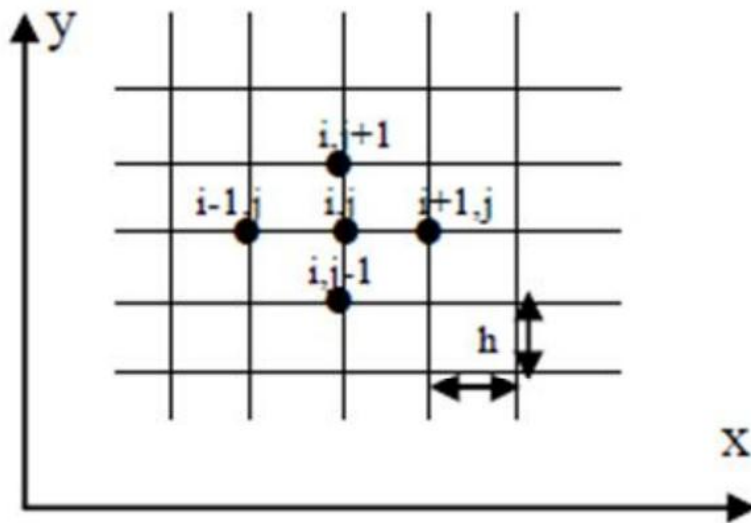


Figure IV.1 : Représentation du maillage type différences finies.

Si on applique un développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer en chacun des nœuds du maillage, l'approximation des dérivées aux points (i, j) est :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - A_{i-1,j}}{2h} \quad (\text{IV.1})$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - A_{i,j-1}}{2h} \quad (\text{IV.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} \quad (\text{IV.3})$$

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \quad (\text{IV.4})$$

Ce qui permet de déduire l'expression du Laplacien :

$$\begin{aligned}
 (\Delta A)_{i,j} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)_{i,j} \\
 &= \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{h^2} + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{h^2} \\
 (\Delta A)_{i,j} &= \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1} - 4A_{i,j}}{h^2} \tag{IV.5}
 \end{aligned}$$

L'équation (IV.5) est appelée la forme à cinq points. Elle s'écrit avec le système matriciel suivant :

$$[M][A] = [S] \tag{IV.6}$$

Avec :

[M] : Matrice inversible.

[A] : Matrice des inconnus.

[S] : Matrice source.

La méthode des différences finies est relativement simple de mise en œuvre, mais présente l'inconvénient d'avoir une faible qualité d'approximation des variables et l'incapacité de modéliser les géométries complexes. Par ailleurs, elle exige un schéma de maillage très fin, qui peut ainsi se traduire par un coût de calcul prohibitif.

IV.2.3.2. Méthode des intégrales de frontières (MIF) :

La méthode des intégrales de frontières a été utilisée dans le domaine numérique pour la résolution des équations de Maxwell par C.W Trowbridge et son groupe. Elle permet la détermination des grandeurs inconnues sur la frontière du domaine et ne s'applique que dans le cas où le milieu considéré est linéaire.

La MIF permet de ramener le maillage à la frontière du domaine. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur les frontières du domaine suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. Cette méthode utilise le théorème d'Ostrogradski-Green.

Cette méthode peut être intéressante pour l'étude de structure tridimensionnelle ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude. Elle est

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

utilisée en magnétostatique ou bien elle est couplée avec la MEF pour calculer des champs électromagnétiques dans les milieux linéaires et non conducteurs. Cependant, la MIF a la difficulté de prendre en considération la saturation, alors elle nécessite un espace mémoire et un temps de calcul importants, car elle conduit à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls).

Cette méthode présente l'avantage de prendre en compte des domaines infinis, une taille de systèmes algébriques réduite et donc un temps de calcul minime. Comme elle présente l'inconvénient de ne résoudre que les problèmes linéaires et une imprécision due à la considération des courants surfaciques.

IV.2.3.3. Méthode des éléments finis (MEF) :

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution des équations différentiels aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Elle consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts, d'une part le domaine est subdivisé en sous domaines de géométrie simples appelés éléments, et d'autre part les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel la méthode des résidus pondérés.

Elle permet aussi de traiter des problèmes représentés par des fonctionnels d'énergie. Cette méthode a été utilisée initialement pour l'analyse des structures (mécanique, génie civil).

Elle fut introduite pour la première fois en électromagnétisme par P.SILVESTER et M.K.V CHARI en 1970. Son champ d'application couvre les domaines suivants :

- Contraintes et déformations.
- Mécanique des fluides.
- Problèmes thermiques.
- Electromagnétisme.

Plus récemment les problèmes couplés :

- Magnéto-thérmiq.ue.
- Magnéto-mécanique.

C'est une méthode de portée général étant donné qu'elle permet la modélisation de tout système physique régi par les équations différentielles aux dérivées partielles ou par des

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

fonctionnelles d'énergies. Elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes et aux domaines complexes. La solution finale s'obtient en résolvant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine.

Dans la plupart des cas, cette méthode s'intègre à des logiciels C.A.O (conception assisté par ordinateurs). Ce qui constitue un avantage de taille pour le concepteur appelé à concevoir les systèmes physiques désirés.

Le principe de la méthode des éléments finis est basé sur une formulation intégrale du système, elle peut être de deux types :

- Formulation variationnelle.
- Résidus pondérés.

IV.2.3.3.1. Formulation éléments finis :

Nous définissons la méthode des éléments finis comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type **Galerkin** : elle remplace la forme intégrale globale par la somme de formes intégrales élémentaires puis discrétiser celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis.

➤ Méthode de Galerkin :

Cette méthode consiste à choisir des fonctions de pondération identiques aux fonctions de forme. On utilise cette méthode dans les problèmes magnétostatique et magnétodynamique avec l'existence d'une source du courant, formulé en terme potentiel vecteur \vec{A} .

IV.2.3.3.1.1. Formulation vibrationnelle :

En générale la formulation vibrationnelle est construite à partir du principe de l'action hamiltonienne qui stipule l'existence d'une fonction de type intégrale définie par.

$$F(A) = \int_{\Omega} L(x_i, q_i, q'_{ik}) d\Omega \quad (IV.7)$$

L : Fonction de Lagrange (Lagrangien) qui résulte de la Co énergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

Ω : Domaine de résolution.

Avec :

$$L(x_i, q_i, q'_{ik}) = W_c - W_p \quad (\text{IV.8})$$

W_c : Energie cinétique.

W_p : Energie potentielle.

x_i : Variables.

q_i : Variables d'état.

$q'_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x_{ik}}$: Dérivées des fonctions d'état.

➤ Cas d'un phénomène magnétique

Dans ce cas, la fonction de Lagrange est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^B \nu B dB - JA \quad (\text{IV.9})$$

Avec :

A : Potentiel vecteur magnétique [T. m].

J : Densité de courant [A/m^2].

$\nu = \frac{1}{\mu}$: Réflectivité magnétique [H/m]⁻¹.

B : Induction magnétique [T].

L'expression de la fonctionnelle d'énergie est donnée comme suit :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu B dB - JA \right] d\Omega \quad (\text{IV.10})$$

La résolution du problème vibrationnel défini par la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette fonctionnelle ; la minimisation est effectuée en utilisant le principe

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

de Rayleigh-Ritz qui s'énonce comme suit [6]: « la dérivée de la fonctionnelle d'énergie $F(A)$ par rapport à chaque inconnue au nœud est nulle ».

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{IV.11})$$

Où :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Avec :

n : Nombre de nœuds du domaine d'étude.

A_i : L'inconnu aux nœuds i du domaine.

IV.2.3.3.1.2. Formulation projective (résidus pondérés) :

Cette formulation consiste à projeter le résidu des équations différentielles du modèle à traiter, sur un ensemble de fonction indépendantes appelés fonctions de pondérations. Si on prend comme fonctions de pondération les fonctions de forme, on tombe sur la méthode de Petrov-Galerkine qui conduit à des résultats meilleurs.

Pour avoir la solution recherchée, il faut que l'intégrale de résidu de l'équation différentielle projetée sur la base des fonctions de test soit nulle. Sachant que le domaine de résolution est subdivisé en triangle, la formulation intégrale sur un domaine s'écrit :

$$\int_{\Omega} R_i \cdot \phi_i \cdot d\Omega = 0$$

$$R = L(A) - f_V$$

Avec :

R : Représente le résidu de l'approximation.

$L(A)$: Opérateur différentiel.

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

f_V : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω .

A : L'inconnue du problème.

ϕ_i : Fonction de projection.

Fonction d'approximations nodales :

La variable du potentiel vecteur magnétique dans un point du domaine (Ω) de résolution est donnée par :

$$A(x, y) = A_i N_i + A_j N_j + A_k N_k$$

La fonction d'approximation N_n ($n=i, j, k$), pour les éléments triangulaire :

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta_e}$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i$$

A_n : Inconnue au nœud (i, j, k).

Δ_e : L'air d'un élément triangulaire.

Dans le cas global contenant n nœuds, l'inconnue s'exprime alors comme suit :

$$A = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j \quad (\text{IV.19})$$

Avec : n est le nombre de nœuds.

A_j : Valeur de l'inconnue au nœud j .

α_j : Fonction d'interpolation au nœud j .

IV.2.3.3.2. La discrétisation :

Le domaine de résolution est discrétisé en sous-domaine, ces derniers dans l'analyse en éléments finis ont les briques élémentaires dont le maillage va représenter le système géométrique à simuler.

Les éléments sont des primitives géométriques comportant plusieurs nœuds.

L'approximation de l'inconnu se fait en chaque élément par des fonctions d'interpolation, qui se déterminent en fonction des valeurs de l'inconnu aux nœuds de cet élément, c'est ce qu'on définit par l'interpolation nodale.

IV.2.3.3.2.1 Eléments de références :

Le maillage consiste à discrétiser le domaine d'étude, qui peut être à une, deux ou trois dimensions, en un ensemble d'éléments finis de forme simple, ces éléments peuvent être des segments, des triangles, des carrés, des cubes, des quadrilatères....etc.

a-Eléments à une dimension 1D :

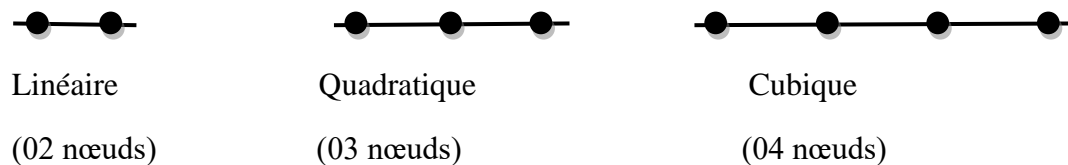
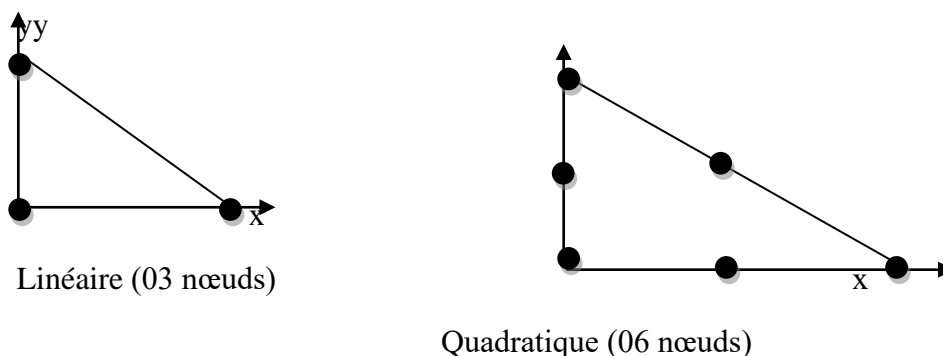
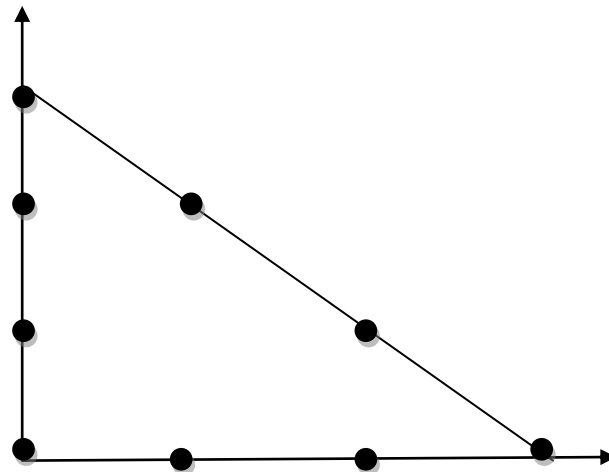


Figure III-2 : Différents éléments 1D

b-Eléments à deux dimensions 2D :

➤ Eléments triangulaires :

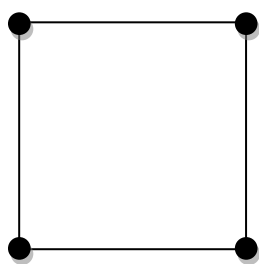




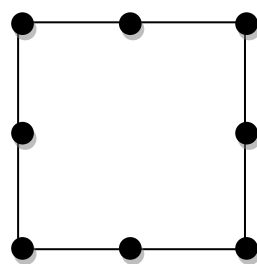
Cubique (09 nœuds)

Figure III-3 : Différents éléments 2D triangulaires

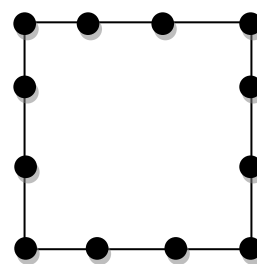
➤ **Éléments carrés :**



Linéaire
(04 nœuds)



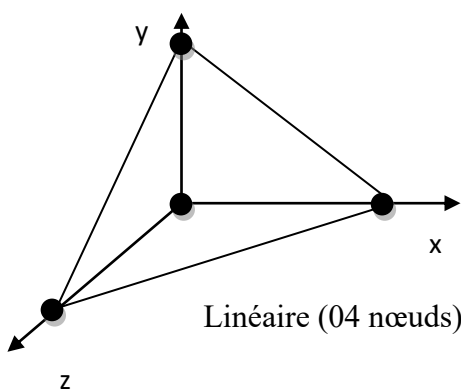
Quadratique
(08 nœuds)



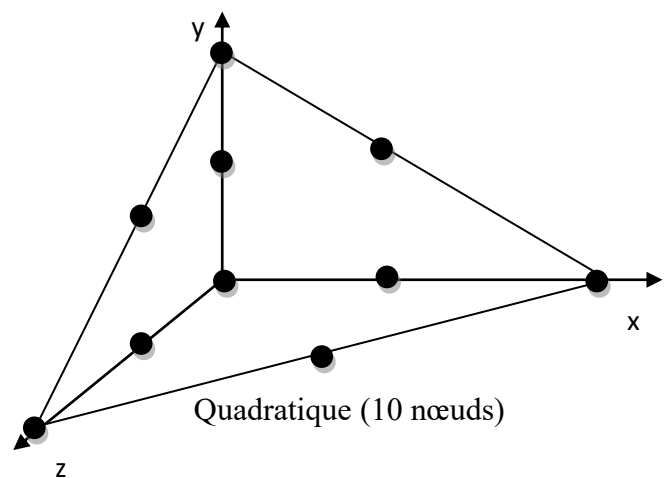
Cubique
(12 nœuds)

Figure III-4 : Différents éléments 2D carrés

c-Éléments à trois dimensions 3D :



Linéaire (04 nœuds)



Quadratique (10 nœuds)

Figure III-5 : Différents éléments 3D

IV.2.3.3.2.2 Fonction d'interpolation :

Les fonctions d'interpolation sont obtenues à partir du triangle de PASCAL, donné ci-dessus

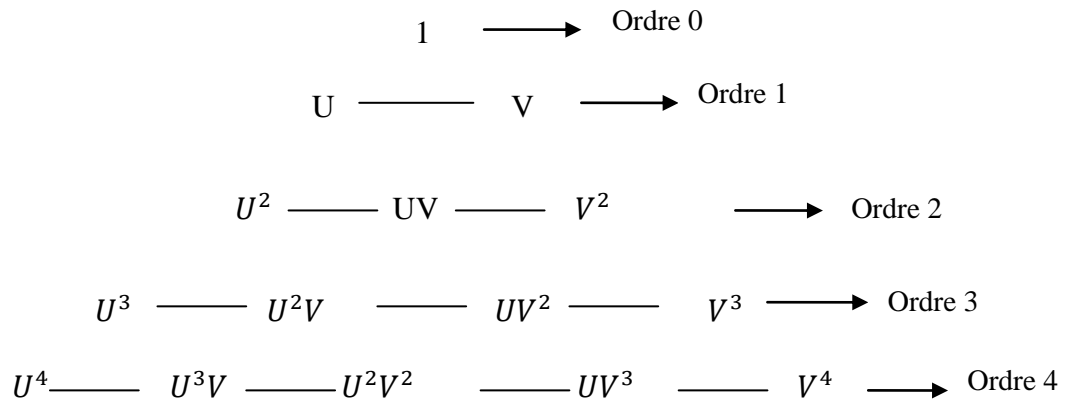


Figure III.5 : Tringle de PASCAL.

La construction de ces fonctions doit vérifier les conditions suivantes :

- Principe de l'état complet.
- Principe de compatibilité.

IV.2.3.3.2.2.1 Principe de l'état complet :

- la fonction doit contenir un terme constant.
- le nombre de termes de la fonction doit être égal au nombre de nœuds de l'élément.

IV.2.3.3.2.2.2 Principe de compatibilité

La fonction doit être contenue (c'est-à-dire la première dérivée existe). On peut citer un exemple d'une fonction d'interpolation :

$$A(U, V) = a + bU + cV + dUV + eU^2 + fV^2 \quad (\text{III.72})$$

La base polynomiale sera alors :

$$[1 \ U \ V \ UV \ U^2V^2] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

C'est la fonction d'approximation sur un élément.

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

La fonction d'une fonction approchée $U^e(x)$ est différente sur chaque élément par la méthode d'approximation nodale.

Avec :

e : est l'indice relatif à l'élément étudié.

Donc la fonction d'approximation aura la forme suivante :

$$U(x) = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Avec :

$U(x)$: est la fonction d'approximation.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$: sont les fonctions de forme de l'élément.

U_1, U_2, \dots, U_n : sont les variables associées aux nœuds du domaine.

IV.2.3.3.3. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques :

IV.2.3.3.3.1. Equation magnétostatique :

➤ Cas cartésien

L'équation magnétostatique dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) = J_s \quad (\text{IV.20})$$

La formulation intégrale de l'équation (IV.20) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + J_s \right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{IV.21})$$

L'équation (IV.21) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

(III.22)

L'application du théorème de Green au premier terme de l'équation (IV.22) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} & \left(\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \cdot dx dy = \right. & (IV.23) \\ & \left. \begin{aligned} & = - \iint_{\Omega} u \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} u \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \right) \alpha_i \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Où $\cos(n, x)$ et $\cos(n, y)$ sont les cosinus directeurs au point considéré de la frontière Γ .

L'équation (IV.23) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} u \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy - \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

(IV.22)

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0 \quad (IV.23)$$

L'expression (IV.22) devient alors :

$$\iint_{\Omega} u \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (IV.24)$$

L'équation (IV.24) en écriture condensée devient ;

$$\iint_{\Omega} u \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} A_z dx dy \quad (IV.25)$$

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Sachant que :

$$A_z = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$$

Et en remplaçant dans (IV.25), on aboutira à :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{IV.26})$$

Avec :

i, j : Entiers naturels variant de 1 à n .

n : Nombre de nœuds du domaine.

L'écriture de (IV.26) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] = [K] \quad (\text{IV.27})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

$[A]$: Vecteur des inconnues du domaine d'étude.

➤ Cas axisymétrique

Dans ce cas, l'équation magnétostatique est donné par :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot A_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot A_\varphi)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{IV.28})$$

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

En considérant comme inconnu le potentiel vecteur modifié donné par $A = r \cdot A_\varphi$ l'équation (IV.28) devient :

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) = J_\varphi \quad (\text{IV.29})$$

La formulation intégrale de l'expression (IV.29) est donnée comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) - J_\varphi \right) drdz = 0 \quad (\text{IV.30})$$

L'équation (IV.30) peut être écrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) drdz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot drdz \quad (\text{IV.31})$$

L'application du théorème de Green au premier terme de (IV.31) nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \left(\left(-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial(A)}{\partial z} \right) \right) \right) \cdot drdz = \\ & = - \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot drdz + \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial r} \alpha_i \cdot \cos(n, r) + \frac{\partial A}{\partial z} \alpha_i \cdot \cos(n, z) \right) \cdot d\Gamma \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.32})$$

En remplaçant (IV.31) dans (IV.32), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A \cdot drdz - \int_{\Gamma} \nu \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \alpha_i \cdot d\Gamma = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_\varphi \cdot drdz \quad (\text{IV.33})$$

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \alpha_i \cdot d\Gamma = 0$$

L'équation (IV.33) devient :

$$\iint_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} \mathbf{A} \, drdz = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} \cdot drdz \quad (\text{IV.34})$$

Sachant que : $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mathbf{A}_j$

Et en remplaçant dans (IV.34), on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_j \, drdz \right] \cdot \mathbf{A}_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} \cdot drdz \quad (\text{IV.35})$$

L'écriture de (IV.35) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{A}] = [\mathbf{K}] \quad (\text{IV.36})$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\mathbf{v}}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\nabla} \alpha_j \, drdz$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \mathbf{J}_{\varphi} \cdot drdz$$

IV.2.3.3.3.2. Equation magnétodynamique :

➤ Cas cartésien

L'équation magnétodynamique dans le cas comportant une source est donnée par :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\mathbf{v} \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\mathbf{A}}) + \sigma \frac{\partial \overrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathbf{J}}_s \quad (\text{IV.37})$$

En considérant le régime harmonique, l'équation (IV.37) s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j\sigma\omega\vec{A} = \vec{J}_s \quad (\text{IV.38})$$

Après transformation, l'équation (IV.38) devient :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\sigma\omega A_z = J_s \quad (\text{IV.39})$$

La formulation intégrale de l'équation (IV.39) est donnée par :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\sigma\omega A_z - J_s\right) \cdot dx dy = 0 \quad (\text{IV.40})$$

L'équation (IV.40) peut être réécrite comme suit :

$$\iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) \cdot dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \Omega \cdot \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{IV.41})$$

L'application du théorème de Green nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) \cdot dx dy = & (\text{IV.42}) \\ & = -\iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) \cdot dx dy + \int_{\Gamma} \nu \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial A_z}{\partial y} \cdot \alpha_i \cdot \cos(n, y)\right) \cdot d\Gamma = \\ & = \iint_{\Omega} \nu \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy + \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma \end{aligned} \right.$$

En remplaçant (IV.41) dans (IV.42), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \nu \cdot \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} A_z dx dy - \int_{\Gamma} \nu \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{IV.43})$$

Modèle numérique et méthodes de résolution des équations électromagnétiques

Dans le cas de conditions aux limites type Dirichlet ou Neumann homogène le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial A_z}{\partial n} \cdot d\Gamma = 0$$

L'expression (IV.42) devient alors :

$$\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla A_z} dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot dx dy = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{IV.44})$$

Sachant que : $A = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot A_j$

Et en remplaçant dans (IV.44), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy \right] \cdot A_j = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy \quad (\text{IV.45})$$

L'écriture de (IV.45) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (\text{IV.46})$$

Avec : $M_{ij} = \iint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} dx dy$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot dx dy$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_s \cdot dx dy$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

➤ **Cas axisymétrique**

En considérant comme précédemment le régime harmonique, la formulation intégrale dans ce cas est donnée par l'expression suivante :

$$- \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right) \cdot drdz + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A_z \cdot \frac{drdz}{r} = \Omega \cdot \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (IV.47)$$

L'application du théorème de Green nous permettra d'écrire :

$$\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) \cdot drdz - \int_{\Gamma} \frac{v}{r} \cdot \alpha_i \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot A \cdot \frac{drdz}{r} = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (IV.48)$$

Dans le cas de conditions au limites Dirichlet ou Neumann homogène, le terme sur la frontière s'annule, ce qui revient à écrire :

$$\sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} drdz \right] \cdot A_j + j\omega \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{drdz}{r} \right] \cdot A_j = \Omega \cdot \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz \quad (IV.49)$$

L'écriture de (IV.49) pour tous les nœuds du domaine nous permet d'aboutir au système matriciel suivant :

$$[M] \cdot [A] + j\omega \cdot [L] \cdot [A] = [K] \quad (IV.50)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{v}{r} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_i} \cdot \overrightarrow{\nabla \alpha_j} drdz$$

$$L_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \frac{drdz}{r}$$

$$K_i = \iint_{\Omega} \alpha_i \cdot J_{\varphi} \cdot drdz$$

$$\bar{A} = A_r + jA_i$$

V.1 .Présentation du logiciel ComsolMultiphysics® V 4.2a :

Le logiciel **Comsol**, anciennement appelé FEMLab est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par éléments finis. Sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques tels que : l'électrostatique, la thermique, l'écoulement des fluides ou encore la déformation des matériaux.

En effet, cet outil de simulation permet de traiter de nombreux problèmes couplés grâce à sa banque intégrée d'équations physiques très variées (électrothermique, thermo-fluidique, etc.) décrits par les équations aux dérivées partielles.

Le logiciel **ComsolMultiphysics®** possède un environnement de programmation (**Comsol script**) dans lequel il est possible de modifier le maillage et les équations du problème. Ce logiciel possède de nombreux systèmes de résolution dits « **Solveurs** », pouvant être linéaires ou non, paramétriques ou encore dépendants du temps. En effet, les différentes étapes proposées par cet outil sont :

1. La construction de la géométrie : la première étape est la création d'une géométrie 2D ou 3D.
2. Définition de la physique: choix du modèle, puis définition des constantes et des expressions.
3. Définition des propriétés des matériaux : une bibliothèque de matériaux est à disposition dans **ComsolMultiphysics®**. De plus, il est possible d'introduire d'autres propriétés des matériaux qui ne figurent pas dans cette bibliothèque.
4. Application des conditions aux frontières : on impose des conditions sur certaines frontières (selon le cas voulu).
5. Maillage de la structure : le maillage des domaines peut être adapté à la structure. Il est possible de le raffiner globalement ou de manière sélective.
6. Exploitation des résultats Post-traitement : Lorsque le programme converge vers une solution, il bascule automatiquement vers la fenêtre de Post-processing (**poste traitement**) qui permet d'analyser et d'afficher les résultats.

V.2.Introduction :

La transduction magnétostrictif est utilisée dans les sonars, les appareils acoustiques, de vibrationsactives, et les systèmes de contrôle de position et d'injection de carburant.

Le transducteur à un boîtier en acier renfermant une bobine d'excitation .Un matériau magnétostrictif est placé dans le noyau, qui fonctionne comme un actionneur lorsqu'un champ magnétique est produit en faisant passer un courant à travers la bobine d'excitation.

Dans ce modèle 2D axisymétrique, la relation non linéaire entre la magnétostriction et le champ magnétique est implémenté en utilisant une relation constitutive non linéaire. Une courbe non linéaire de BH a également été utilisée pour refléter un comportement magnétique réaliste. L'interaction entre le matériau magnétostrictif avec un transducteur en acier magnétique est également modélisée.

La magnétostriction dépend aussi de la contrainte dans le matériau magnétostrictif. Ce modèle considère le cas où le matériau est suffisamment précontraint de façon à obtenir le maximum de magnétostriction.

V.3.Définition du model :

Le transducteur a un acier d'encastrement qui se referme tout an tour du bobinage. Un matériau magnétostrictif est placé dans le centre qui joue le rôle d'un servocommande quand un champ magnétique est produit par le passage du courant électrique à travers la bobine d'excitation.

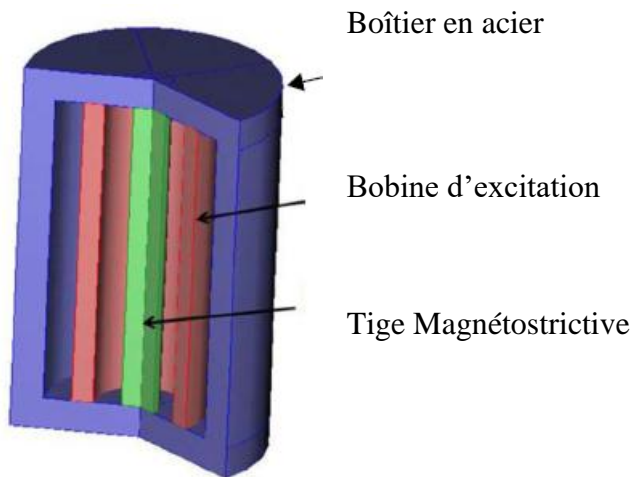


figure1 : Transducteur magnétostrictif

Caractéristiques physiques et géométriques :

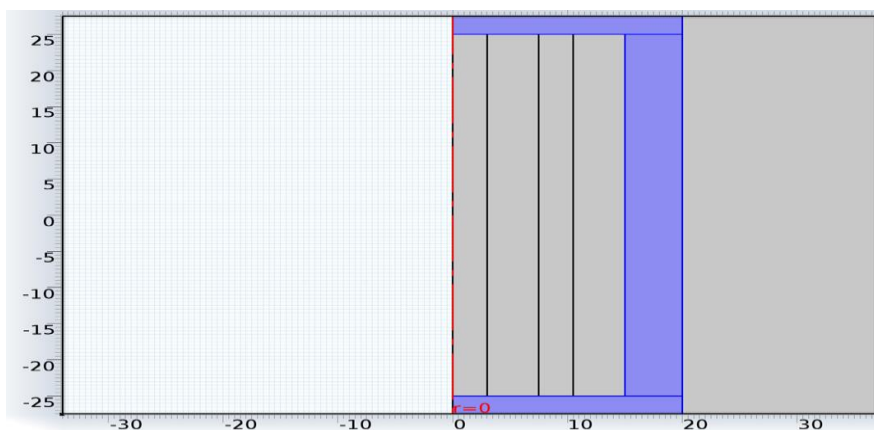


Figure2 : domaine d'étude 2D axisymétrique.

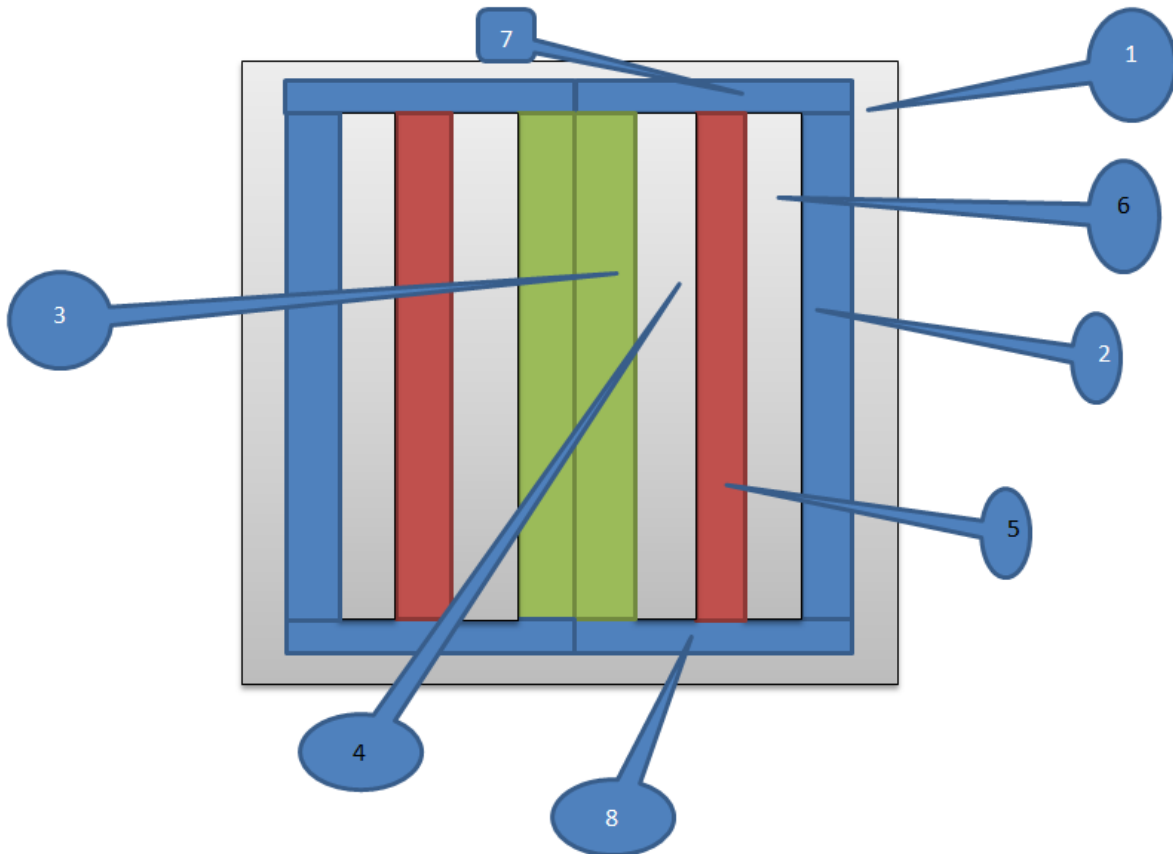


Figure (3) : Caractéristiques géométriques du dispositif d'étude.

Les caractéristiques physiques des différentes régions (milieux) sont comme suit :

- L'air (régions 1-4-6) :
 - Conductivité électrique : $\sigma_{air} = 0 [\Omega m]^{-1}$
 - Perméabilité magnétique : $\mu_{air} = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$
 - perméabilité relative = 1
 - permittivité relative = 1
- Le cuivre (région 5) :
 - Conductivité électrique : $\sigma_{air} = 5.9 \cdot 10^7 [\Omega m]^{-1}$
- L'acier (régions 2-7-8) :
 - Conductivité électrique : $\sigma_{air} = 0 [\Omega m]^{-1}$
 - Permittivité relative = 1
- La tige magnétostrictive (région 3) :
 - Conductivité électrique : $\sigma_{air} = 0 [\Omega m]^{-1}$

Application et résultats

- Perméabilité magnétique : $\mu_{air} = \mu_r \mu_0 = 15 * 4\pi * 10^{-7} [H/m]$
- Module de Young : $60 * 10^9 \text{ Pa}$
- La densité : 784 kg/m^3
- coefficient du poisson : 0.45

- **Calcul de non linéarité magnétostriction :**

La composante de magnétostriction selon une direction quelconque peut être calculée en tant que fonction non-linéaire de l'aimantation en utilisant cette équation :

$$\lambda_i = \frac{3}{2} \lambda_s \left(\alpha_i^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \lambda_s \left[\left(\frac{M_i}{M_s} \right)^2 - \frac{1}{3} \right]$$

- La magnétostriction (λ) dans la direction i dépend de la constante de magnétostriction (λ_s) et la direction d'aimantation **cosinus**(α_i). Le **cosinus** directeur est le rapport entre l'aimantation le long de la direction désirée (M_i) et l'aimantation à saturation (M_s) du matériau.
- Le $(-1/3)$ indique que les moments magnétiques sont orientés d'une façon aléatoire dans le matériau, en l'absence de tout champ magnétique. Dans ce chapitre (ne pas utiliser le $(-1/3)$ en raison de l'hypothèse que le matériau est suffisamment précontraint de telle sorte que les moments magnétiques sont perpendiculaires à la direction d'aimantation, au début du processus d'aimantation).
- Le matériel dans un état précontraint donnerait une magnétostriction maximale.

V.4. Résultats :

La densité de courant externe appliquée sur la bobine est constante pour tous les développements $J_{ext} = 10^6 \text{ (A / m}^2\text{)}$.

A/ Pour une variation géométrique :

- Une tige (matériau magnétostrictif) de 3mm :

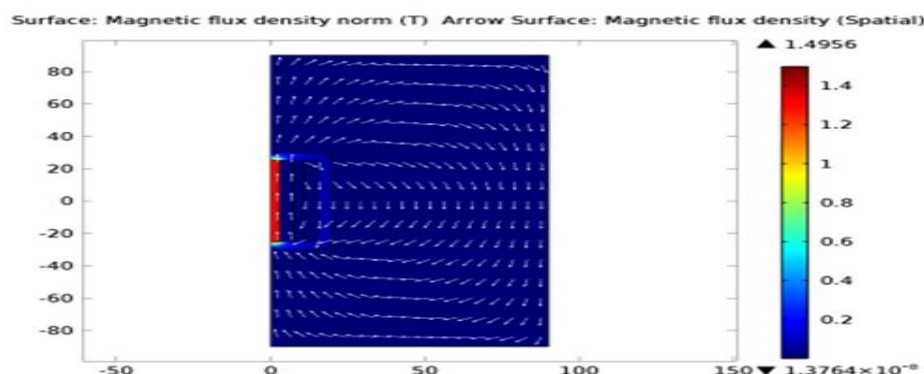


Figure 4a: la densité de flux magnétique sur le matériau magnétostrictif.

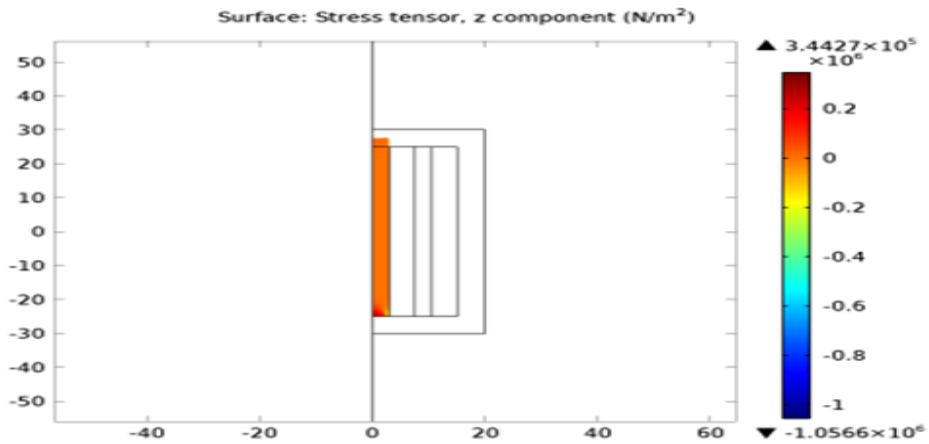


Figure 5a: la contrainte mécanique de matériau magnétostrictif.

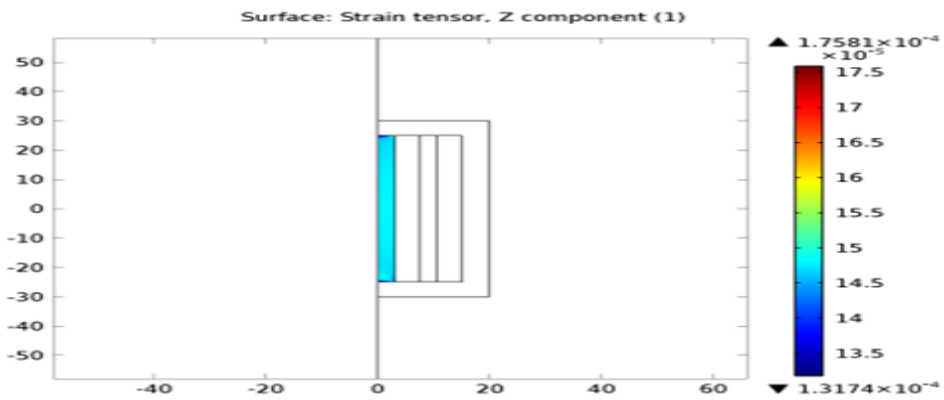


Figure 6a: déformation magnétostrictive.

La figure 6a montre que l'élément dominant de la déformation due à la magnétostriction est assez uniforme dans la matière, sauf aux deux extrémités de la tige.

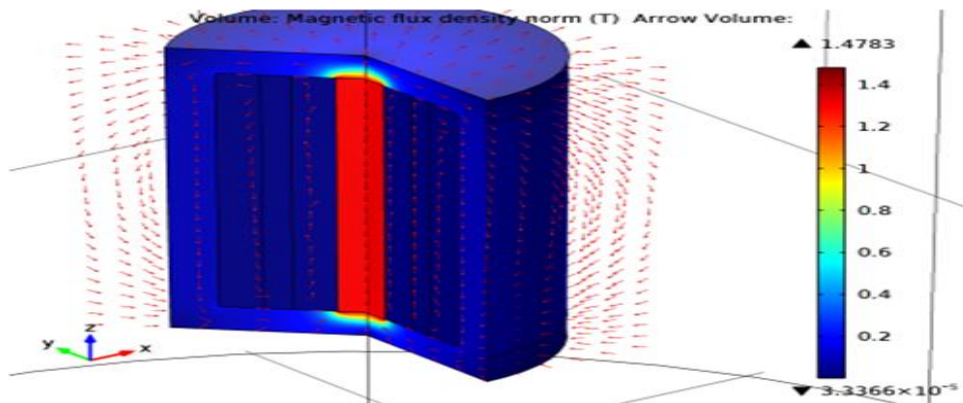


Figure 7a: densité de flux magnétique en 3D

Application et résultats

La figure 7a montre l'induction magnétique dans la région intérieure du transducteur ; y compris le noyau magnétostrictif.

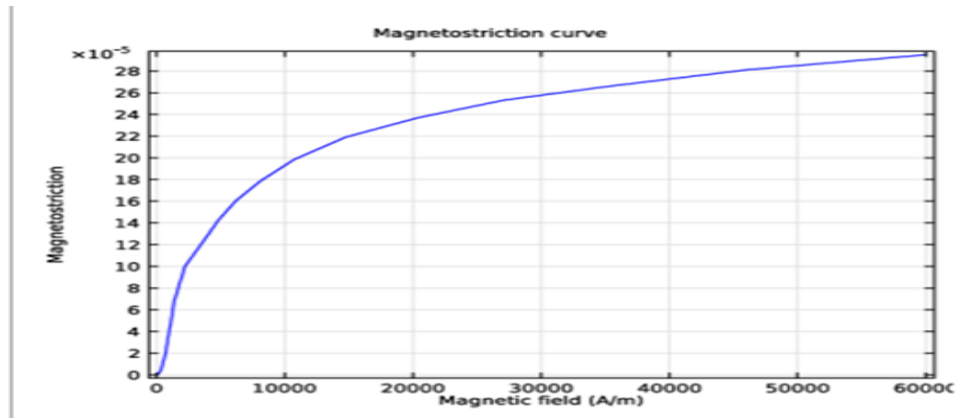


Figure 8a: la magnétostriction en fonction du champ magnétique.

La figure 8a montre la proportionnalité entre le champ magnétique et la magnétostriction qui se stabilise à partir de 60000 (A /m).

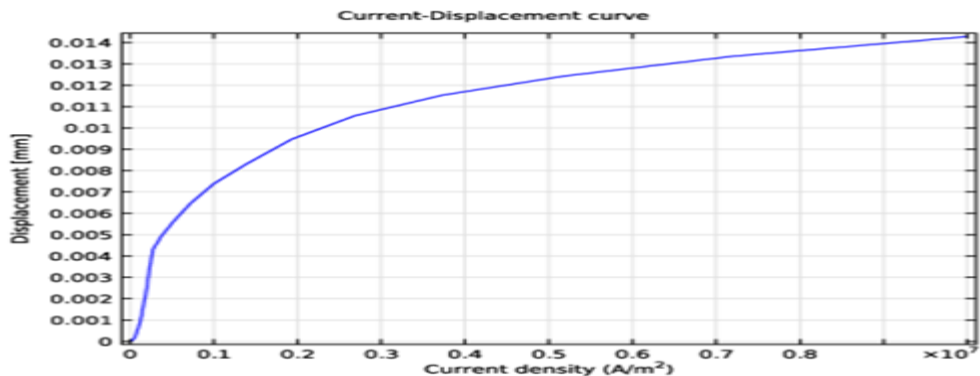


Figure 9a: déplacement suivant l'axe Z en fonction de la densité de courant

La figure 9a montre la proportionnalité entre la densité de courant et le déplacement sur l'axe Z .

Application et résultats

- Pour une tige (matériau magnétostrictif) de 6mm :

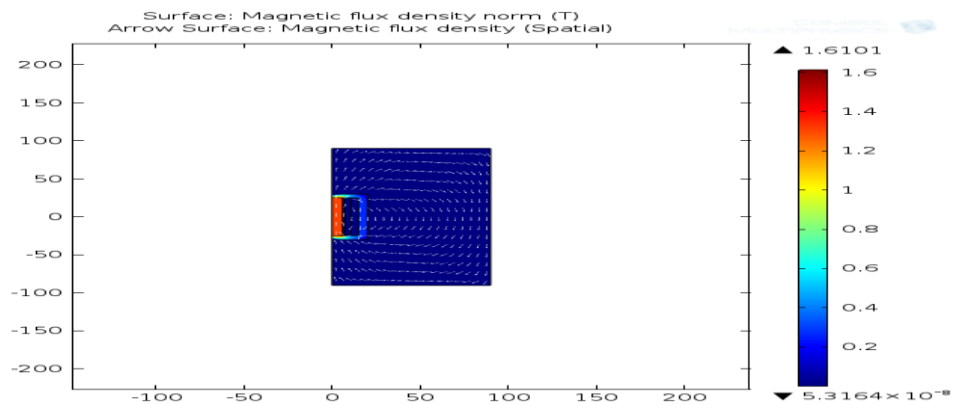


Figure 4b: l'induction magnétique sur le matériau magnétostrictif.

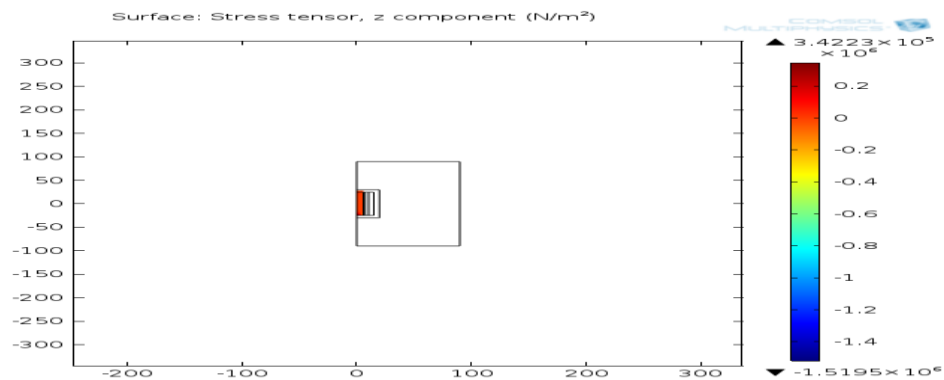


Figure 5b: la contrainte mécanique suivant l'axe Z.

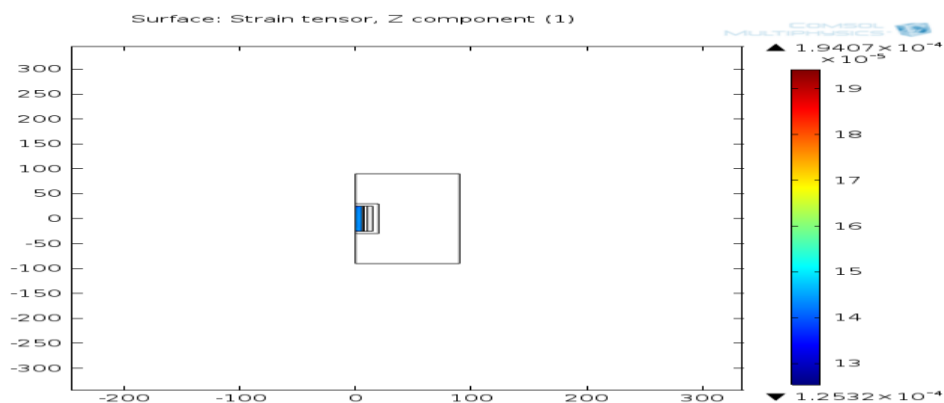


Figure 6b: déformation de magnétostriction.

La figure 6b montre que l'élément dominant de la déformation due à la magnétostriction est assez uniforme dans la matière, sauf aux deux extrémités de la tige.

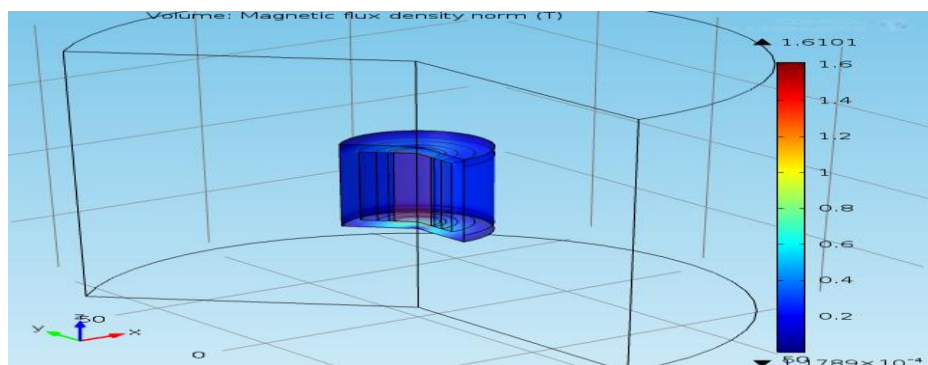


Figure 7b: l'induction magnétique en 3D.

La figure 7b montre l'induction magnétique dans la région intérieure du transducteur ; y compris le noyau magnétostrictif.

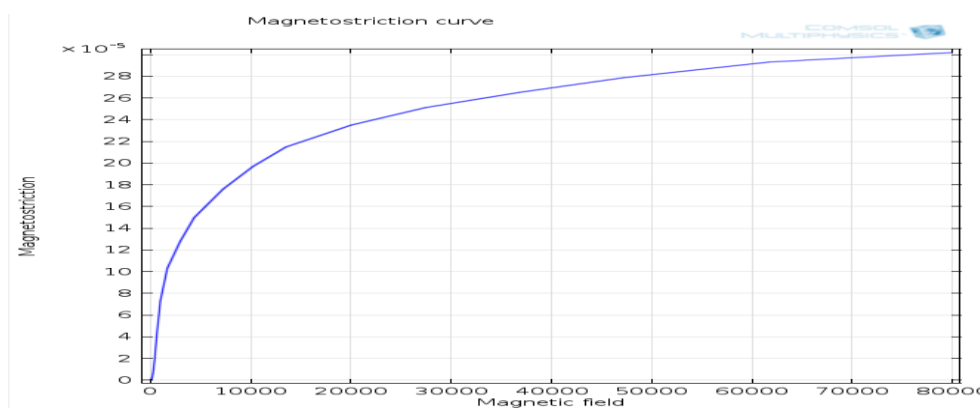


Figure 8b: magnétostriction en fonction du champ magnétique.

La figure 8b montre la proportionnalité entre le champ magnétique et la magnétostriction qui se stabilise à partir de 80000(A /m).

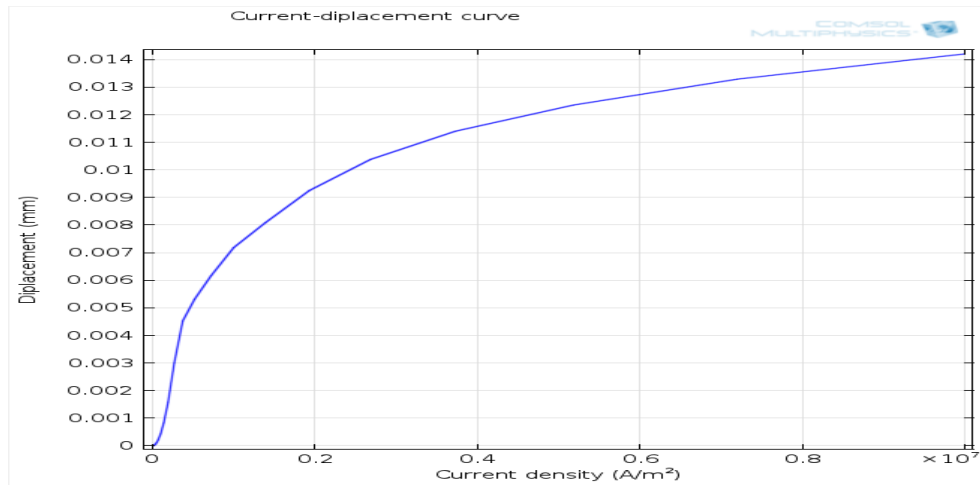
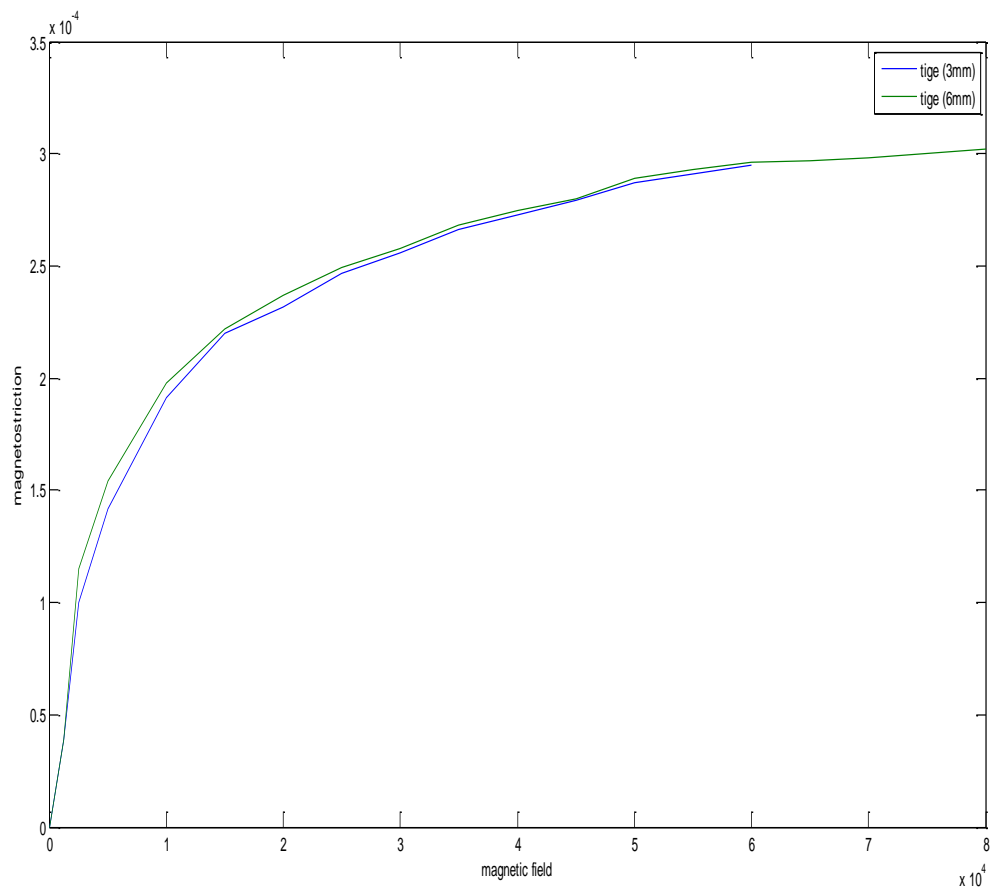


Figure 9b: magnetostriction en fonction de la densité de courant.

La figure 9b montre la proportionnalité entre la densité de courant et le déplacement sur l'axe Z.

❖ Effet de l'épaisseur de la tige sur la magnétostriction



Figure(A) : magnétostrictions des tiges (3mm) et (6mm)

Application et résultats

Remarque : une augmentation remarquable des grandeurs mécaniques et électriques sur la tige de 6 mm par rapport à celle de 3mm.

B/ Pour une variation paramétrique :

- Pour une contrainte de compression de 3.94 Mpa :

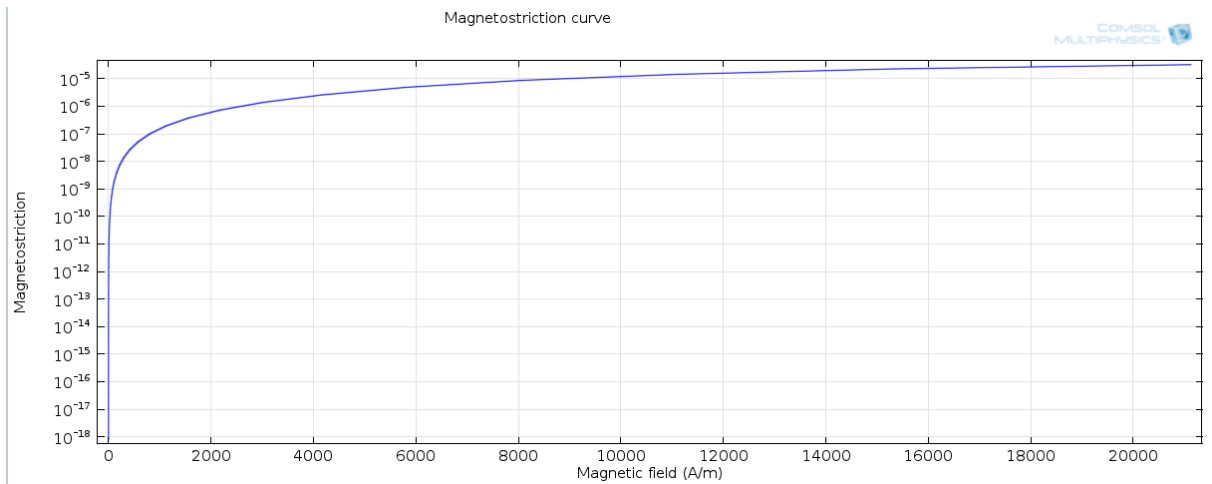


Figure 10 : la proportionnalité de champ magnétique et la magnétostriction.

- Pour une contrainte de compression de 5Mpa :

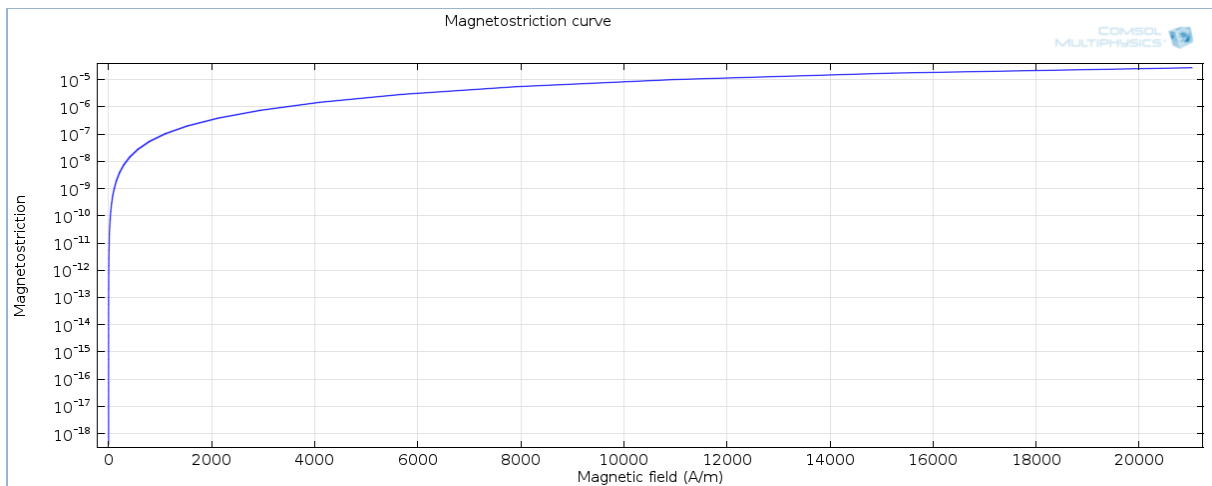


Figure 11: la proportionnalité de champ magnétique et la magnétostriction.

V.5.Conclusion :

Dans le processus de ce travail, on peut conclure que les déformations ont deux origines possibles : l'action d'un changement géométriques, d'une part, et les propriétés des matériaux électromagnétiques d'autre part.

Dans ce chapitre, on a vu l'influence de la contrainte de compression ainsi l'augmentation d'épaisseur de la tige magnétostrictive sur la déformation du matériau magnétostrictif et les paramètres récupérés sur ce dernier.

Conclusion générale

Conclusion générale :

Nous nous sommes intéressés, au cours de ce travail, à l'étude et au développement de modèles mathématiques et numériques des systèmes micro-électromécaniques. Le microsysteme considéré dans cette étude constitue d'un transducteur magnétostrictif, qui est utilisé généralement dans les sonars, les appareils acoustiques, de vibrations actives, et les systèmes de contrôle de position et d'injection de carburant.

La modélisation éléments finis est effectuée avec le logiciel **Comsol Multiphysics® V4.2a**.

L'objectif de ce travail était de comprendre les matériaux adaptatifs et d'étudier les matériaux magnétostrictifs et l'accouplement mécanique/magnétique pour un transducteur à base d'un matériau magnétostriction et voir l'évolution de grandeurs mécaniques telles que la déformation et les contraintes en fonction des grandeurs électromagnétiques comme le champ magnétique et la densité de courant électrique.

Nous avons conclu que le comportement mécanique des matériaux magnétostrictifs sous l'action d'un champ magnétique est un comportement similaire au comportement dû à l'application d'une action mécanique, la seule différence existe dans l'ordre de la déformation.

Bibliographie

- [1] MOHAMED BELCACEM, modélisation numérique d'un micro actionneur composé d'un alliage matériaux polymère et magnétique, mémoire de magister, université de Batna, année 2009.
- [2] NICOLAS GALOPIN, modélisation et caractéristique de matériaux actifs pour la conception de dispositif magnétoélectrique, thèse doctorat, université paris XI, 11 décembre 2007.
- [3] THU TRANG NGUYEN, modélisation par élément finis des matériaux composite magnétoélectrique, université paris sud, 26 Janvier 2012.
- [4] LARABI ZINA, modélisation 3D d'un dispositif MEMS application à une pompe E2013.
- [5] BERTRAND DU PELOUX, modélisation de l'actionneur électromagnétique par réseaux de reluctances. Création d'un outil métier dédiée au redimensionnement par optimisation, université joseph fourrier, thèse doctorat, 04 Juillet 2007.
- [6] MOHAMED OUSSAMA MEFTAH et MORAD RAHAL, performances d'isolateur HT pollué sous tension alternative 50 HZ et distribution du champ et du potentiel électrique utilisant COMSOL, mémoire de magister, Ecole national polytechnique, Juin 2011.
- [7] MOHELLEBI.H, modélisation par élément finis, cours master, université mouloud Mammeri tizi ousou, année 2014.
- [8] KANA OUZNA, conception d'un inducteur destiné à l'entraînement électrique d'un ascenseur, mémoire de magister.
- [9] ERIC CRECSENTO et EVAGELOS HRISTOFORO, utilisation des matériaux magnétostrictifs filaire comme capteur de mesure de champ magnétique, NSCR :Demokritos : Grèce, année 2002.
- [10] CHETOUH SAMIR, caractérisation mécanique des matériaux intelligents de type magnétostrictif et leurs applications, mémoire de magister, université mentouri Constantine, Mai 2010.
- [11] M.LAURENT GROS, modélisation, conception et caractérisation de pots vibrants magnétostrictifs, thèse doctorat, institue national polytechnique de Grenoble, 09 Juin 1999.
- [12] FLORIEN LE GOFF, récupération d'énergie et magnétostriction, pour l'obtention du grade maitre és sciences, université Laval, année 2010.

Bibliographie

[13] NICOLAS BUIRON, LAURENT HIRSENGER, RENE BILLARDON, magnétostriction de mono- et poly-cristaux à structure cubique, colloque national MECAMATE 97, université paris 6, 20_23Janvier 1997.

[14] HOCINI FARID, association de la commende pour l'étude par éléments finis des phénomènes magnéto-élastique et vibratoire dans les systèmes électriques, thèse de doctorat, université mouloud Mammeri tizi ouzou, 23 Avril 2013.