

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU**

Faculté des : Sciences.
Département de : Mathématiques



Mémoire de Magister

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse mathématique et applications

Présenté par :
Menguelti Ali

**Sujet : ANALYSE ASYMPTOTIQUE DE QUELQUES
PROBLEMES DE COUCHES MINCES : CONDITIONS AUX
LIMITES APPROCHEES**

Devant le jury d'examen composé de :

- | | |
|--|--------------|
| • Morsli Mohamed ; Professeur ; U.M.M.T.O ; | Président |
| • Rahmani Leila ; Maitre de conférences A ; U.M.M.T.O ; | Rapporteur |
| • Hamroun Djamilia ; Professeur ; U.S.T.H.B ; | Examinatrice |
| • Boukra Mohamed ; Maitre de conférences B ; U.M.M.T.O ; | Examineur |
| • Khellas Fazia ; Maitre de conférences A ; U.M.M.T.O ; | Examinatrice |

Table des matières

Introduction générale	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle	7
I Conditions aux limites approchées pour un problème posé sur un domaine avec couche mince	21
2 Conditions aux limites approchées en dimension 2	22
2.1 Présentation du problème	22
2.1.1 Existence et unicité de la solution	24
2.2 Construction du développement asymptotique	30
2.2.1 Changement d'échelle	30
2.2.2 Le problème dans un domaine fixe	31
2.2.3 Les problèmes élémentaires	32
2.2.4 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet	33
2.2.5 Calcul des premiers termes : cas Neumann	34
2.2.6 Le développement complet. Estimation du reste	37
2.3 Conditions aux limites approchées	37
2.3.1 Conditions équivalentes : cas Dirichlet	38
2.3.2 Conditions équivalentes : cas Neumann	42
2.4 Cas où la perméabilité magnétique dépendante de l'épaisseur	45
2.4.1 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet	45
2.4.2 Calcul des premiers termes : cas Neumann	46
2.5 Conditions aux limites approchées	48
2.5.1 Conditions équivalentes : cas Dirichlet	48
2.5.2 Conditions équivalentes : cas Neumann	48
3 Conditions aux limites approchées en dimension 3	50
3.1 Présentation du problème	50
3.2 Construction du développement asymptotique	51
3.2.1 Système d'équations mises à l'échelle	51
3.2.2 Les problèmes élémentaires	53

3.2.3	Calcul des premiers termes : cas Dirichlet	53
3.2.4	Calcul des premiers termes : cas Neumann	54
3.2.5	Le développement complet : estimation du reste	57
3.3	Conditions aux limites approchées	59
3.3.1	Conditions équivalentes : cas Dirichlet	60
3.3.2	Conditions équivalentes : cas Neumann	62
3.4	Cas où la perméabilité magnétique dépend de l'épaisseur	65
3.4.1	Système d'équations mises à l'échelle	65
3.4.2	Calcul des premiers termes : cas Dirichlet	66
3.4.3	Calcul des premiers termes : cas Neumann	67
3.4.4	Conditions équivalentes : cas Dirichlet	69
3.4.5	Conditions équivalentes : cas Neumann	69

II Diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince 71

4	Couche mince de perméabilité variable	72
4.1	Présentation du problème extérieur	73
4.2	Le problème dans un domaine tronqué	75
4.2.1	La formulation variationnelle du problème	77
4.2.2	La formulation variationnelle dans un domaine fixe	77
4.3	Stabilité par rapport à l'épaisseur	80
4.3.1	Alternative de Fredholm pour un domaine fixe	81
4.3.2	Passage à la limite dans l'alternative de Fredholm.	82
4.3.3	Résultat de stabilité	83
4.4	Développement asymptotique et identification formelle	87
4.4.1	Une hiérarchie d'équations	88
4.4.2	Détermination des premiers termes : cas de la condition de Neumann	90
4.4.3	Détermination des premiers termes : cas de la condition de Dirichlet	95
4.4.4	Résultats de convergence	98
4.5	Conditions aux limites approchées	100
4.5.1	Problème de Neumann	100
4.5.2	Problème de Dirichlet	101
4.6	L'estimation de l'erreur :	101
4.7	Conditions aux limites approchées en dimension 2	104
4.7.1	Problème de Neumann	106
4.7.2	Problème de Dirichlet	106

Remerciements

Louange à Allah, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être. Nous remercions le bon Dieu qui nous a orienté au chemin du savoir et les portes de la science.

Ma reconnaissance va à madame Rahmani épouse Hannachi de m'avoir beaucoup appris, avec patience, générosité et surtout une disponibilité d'esprit qui m'a permis de mener à bien ma tâche.

J'adresse également mes remerciements au professeur Morsli, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de soutenance.

Je remercie Monsieur Boukra, madame Khellas et madame Hamroun d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je n'oublie pas les membres du laboratoire de mathématiques pures et appliquées de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou : qu'ils reçoivent ici ma profonde gratitude pour leur confiance m'ayant permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles.

D'une façon générale, je reste reconnaissant à toutes les personnes qui m'ont soutenu par leurs conseils, par leur temps, dans ma tâche ardue.

Enfin, j'arrive au dernier mot de remerciements destiné à ma famille, notamment mes parents pour leur dévouement et leur sacrifice oh ! combien utiles durant ces longues années d'études.

Introduction générale

L'analyse numérique propose depuis son développement la simulation, comme une alternative complémentaire à l'expérimentation, pour comprendre et quantifier les phénomènes en jeu dans tous les domaines de la physique. Ceci s'applique en particulier à l'électromagnétisme auquel les technologies les plus récentes réservent une place privilégiée. Les phénomènes électromagnétiques interviennent dans la plupart des systèmes de communication et de détection : radio, téléphone, radars. La mise en oeuvre de l'électromagnétisme ⁽¹⁾ débouche sur une infinité d'applications. C'est à cause de l'importance croissante de ces phénomènes que la communauté d'analyse numérique a déployé, dès ses débuts, des efforts conséquents pour proposer et étudier des méthodes pour résoudre numériquement les équations de l'électromagnétisme, particulièrement, celles ayant trait à la diffraction des ondes par des obstacles. Parmi les méthodes les plus répandues pour la résolution de ce type de problèmes, nous pouvons citer les différences finies, les éléments finis, les éléments finis de frontière, ou encore les méthodes des caractéristiques ou les approches spectrales etc.....

Cependant, les difficultés rencontrées dans certaines situations réelles, sont étroitement liées à la complexité de la structure de l'obstacle. C'est le cas par exemple des antennes de télécommunications ou des diffuseurs, qui sont souvent revêtus d'une couche mince diélectrique absorbante. Citons aussi le domaine de la furtivité radar : la peinture qui recouvre l'avion absorbe les ondes émises par un radar et lui permet de demeurer invisible. Le rapport entre l'épaisseur de la

¹L'électromagnétisme est l'étude des phénomènes électriques et magnétiques provoqués par le mouvement de corps chargés électriquement. En 1865, James Clerk Maxwell (1831 – 1879) scientifique écossais unifie la théorie des phénomènes électriques et magnétiques en posant les équations connues désormais sous le nom d'équations de Maxwell. L'électromagnétisme sous sa forme actuelle est né!

couche de peinture et les dimensions caractéristiques de l'appareil est ici, encore plus faible. Dans toutes ces situations, la simulation numérique de la solution est difficile car elle nécessite une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche. Le maillage comporte alors un très grand nombre d'éléments, ce qui rend les calculs parfois longs et peu précis. Pour cette raison, plusieurs auteurs se sont mis à la recherche d'un moyen pour pallier à ce problème de "couche mince", tout en conservant entièrement les effets de celle-ci sur l'onde incidente. Plus précisément, l'alternative consiste à remplacer le problème initial par un autre problème, dont la solution est proche de celle qu'on cherche, et qui ne fait plus intervenir la couche mince. L'effet de cette dernière se traduira par de nouvelles conditions aux limites appelées "conditions d'impédance" (Impedance Boundary condition), "Conditions aux limites équivalentes" ou "conditions aux limites approchées". Il s'agit de remplacer le revêtement de l'obstacle par une condition aux limites qui lui serait équivalente au sens qu'elle "contiendrait" les mêmes informations, lorsqu'on se place à l'extérieur de la couche. Suivant les cas, cette (C.L.E.) peut s'écrire soit sur l'obstacle, remplaçant alors les conditions de transmission entre le milieu extérieur et la couche, soit sur une frontière artificielle placée "au-dessus" et "assez près" de la couche. Ainsi, l'utilisation d'une (C.L.E.) nous autorise à considérer des couches très fines, sans avoir à se soucier des problèmes numériques que cela peut entraîner.

L'idée d'introduire de nouvelles conditions aux limites pour approcher l'effet des couches minces a fait l'objet de plusieurs études principalement en électromagnétisme où cette méthode a été appliquée pour approcher le problème de diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle conducteur revêtu d'une couche mince. Plusieurs approches pour la construction de ce type de conditions ont été introduites par de très nombreux auteurs parmi lesquels nous citons Engquist-Nédélec [8], Senior-Volakis [25], Bendali-Lemrabet [4], Ammari-Latiri-Grouz [2], Haddar-Joly [14] et Bendali-Bartoli [3]. Cette méthode a été aussi appliquée en élasticité par Lemrabet [17], Lemrabet-Teniou [18], L. Rahmani [20]; Rahmani-Vial [21], pour l'étude des plaques élastiques revêtues de couches minces ou renforcées par des raidisseurs.

Notre étude est principalement basée sur les travaux de Bendali-Lemrabet [4], Ammari-Latiri-Grouz [2], Grégory Vial [11], Kersten Schmidt-Sébastien Tordeux [23] et Leila RAHMANI [19]. Leur approche est basée sur une analyse asymptotique du problème par rapport à l'épaisseur de la couche. La construction

d'un développement asymptotique multi-échelle de la solution permet d'identifier des problèmes avec conditions aux limites approchées, et de les analyser avec précision.

Décrivons à présent plus en détail le contenu de ce mémoire. D'une façon générale, on considère le problème de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ \Delta u_e^\varepsilon + k_e^2 u_e^\varepsilon = f_e \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon \\ \partial_n u_i^\varepsilon = \partial_n u_e^\varepsilon + g \quad \text{sur } \Gamma \\ u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma \\ u_e^\varepsilon = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ou} \quad \partial_n u_e^\varepsilon = 0 \quad (\text{Neumann}) \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon \end{array} \right. \quad (1)$$

où Ω_e^ε représente une couche mince qui entoure Ω_i (voir la figure 1)

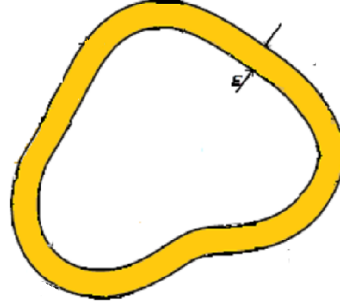


FIG. 1 – Couche mince

L'équation $\Delta u^\varepsilon + k^2 u^\varepsilon = f$ est l'équation de Helmholtz. Les conditions posées sur Γ (qui est la frontière commune des deux domaines) sont appelées : conditions de transmissions. Sur la frontière extérieure Γ_e^ε , on impose soit une condition de Dirichlet, soit une condition de Neumann.

On souhaite remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites, dite condition aux limites généralisées ou condition d'impédance. Plus précisément, on cherche une condition aux limites $CL_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon)$, tel que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v^\varepsilon + k^2 v^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ CL_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

soit bien posé et que sa solution v^ε soit "proche" (quand ε est voisin de 0) de u_i^ε la restriction intérieure de celle du problème (1). Ces conditions seront établies

par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche mince. En effet, un changement d'échelle est nécessaire avant l'analyse asymptotique car les u^ε appartiennent à des espaces fonctionnels qui varient avec ε : On ne peut donc pas les comparer entre eux directement. Une idée naturelle pour contourner cette difficulté est d'effectuer une dilatation de rapport ε^{-1} de la couche mince dans la direction normale et de transporter u^ε sur l'ouvert ainsi défini. On transforme ainsi le domaine en un domaine fixe et le petit paramètre n'apparaît plus dans la géométrie, mais dans les équations. L'idée consiste ensuite à approcher la solution par la série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur Γ fournissant les conditions aux limites approchées recherchées.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

On rappelle d'abord quelques éléments d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle nécessaires à l'étude du problème. L'étude que nous proposons ensuite est divisée en deux parties principales : dans la première partie, on étudie un problème mathématique (équation de Helmholtz) posé sur un domaine borné entouré d'une couche mince. Cette partie est composée de deux chapitres. Dans le premier, on étudie le problème en dimension deux. Le deuxième chapitre traite le problème en dimension trois. Dans les deux situations, on étudie le cas où la perméabilité magnétique de la couche mince est supposée rester finie et le cas où elle tend vers l'infini quand ε tend vers 0. La construction d'un développement asymptotique de la solution de (1) quand ε tend vers zéro est décrite dans son intégralité, des estimations optimales du reste sont données. On identifie des conditions aux limites approchées d'ordre 0, 1 et 2 qui rendent compte de l'effet de la couche mince, définissant ainsi des problèmes approchés. L'utilisation de l'analyse multi-échelle permet d'obtenir des estimations optimales de l'erreur commise.

Dans la seconde partie, on reprend l'article de Bendali et Lemrabet [4] qui étudie la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince. On suppose ici que la perméabilité de la couche mince est variable. L'analyse effectuée dans [4] s'applique alors facilement à ce cas et elle est reprise sans aucune difficulté supplémentaire. Nous considérons, donc, un problème mathématique basé sur l'équation de Helmholtz posé dans un obstacle revêtu d'une couche mince de perméabilité variable, avec une condition de Neu-

mann ou Dirichlet sur le bord et une condition d'onde sortante à l'infini. Dans cette situation, nous ramenons d'abord le problème posé sur un domaine infini à un problème posé sur un domaine borné, grâce à un opérateur dit de Steklov-Poincaré. Un changement d'échelle permet d'écrire la formulation variationnelle dans un domaine fixe. Nous utilisons la technique des développements asymptotiques multi-échelle pour identifier des conditions aux limites approchées. La méthode consiste à faire un développement asymptotique à partir de la formulation variationnelle et approcher la solution par une série donnant son développement asymptotique tronqué à un ordre donné, les conditions vérifiées par cette approximation sur l'interface fournissant les conditions aux limites approchées recherchées. On donne ensuite des estimations d'erreur optimales.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle

Ce chapitre a pour but de rappeler un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle qui seront utilisés dans la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [7] , [1], [9].

Analyse fonctionnelle

Les espaces $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq +\infty$)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1 On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Définition 1.2 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme.

Définition 1.3 On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega.\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C ; |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme.

Notation-Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.4 (Inégalité de Hölder) -Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Remarque 1.5 Lorsque $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 1.6 $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Théorème 1.7 $L^p(\Omega)$ est réflexif pour tout $1 < p < +\infty$

Théorème 1.8 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Soit $1 < p < +\infty$ et soit $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^p.$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

Théorème 1.9 (Densité) L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 1.10 $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 1.11 Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Alors il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Remarque 1.12 Le théorème 1.11 affirme que toute forme linéaire et continue sur L^1 se représente à l'aide d'une fonction de L^∞ . L'application $\varphi \rightarrow u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1)'$ et L^∞ . Dans la suite on fera systématiquement l'identification

$$(L^1)' = L^\infty.$$

Définition 1.13 Soit $1 \leq p \leq +\infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f \mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Espaces de Sobolev $W^{p,m}(\Omega)$

Les espaces de Sobolev sont les espaces “naturels” des solutions d'équations aux dérivées partielles. On les appelle aussi espaces d'énergie car ils s'interprètent naturellement comme des espaces de fonctions d'énergie bornée. Nous rappellerons ici les définitions et les résultats qui seront utilisés par la suite.

Définition 1.14 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle l'ensemble des fonctions à support compact inclus dans Ω et indéfiniment dérivables dans Ω , les fonctions testes. Cet ensemble est noté $D(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$.

Définition 1.15 Une distribution de Schwartz dans Ω est une forme linéaire sur $D(\Omega)$ continue pour la topologie naturelle de cet espace. L'ensemble des distributions est noté $D'(\Omega)$.

Définition 1.16 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \right\}$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left[\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right]^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \left[\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}$

Proposition 1.17 - L'espace $W^{1,p}$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$; $W^{1,p}$ est réflexif pour $1 \leq p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$. L'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Remarque : Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$; la théorie des distributions permet de donner un sens à $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ (est un élément de « l'énorme » espace des distributions $D'(\Omega)$ – espace qui contient en particulier $L^1_{loc}(\Omega)$). Utilisant le langage des distributions on peut dire que $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $1 \leq i \leq N$ (au sens des dérivées-distributions) appartiennent à $L^p(\Omega)$.

Définition 1.18 Soient $m \geq 2$ un entier et soit p un réel avec $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ } 0 \leq i \leq n \right\}$$

Il revient au même d'introduire⁽¹⁾

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \forall |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right. \right\}$$

On note $g_\alpha = D^\alpha u$.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{p,m}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

est un espace de Banach.

On pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} ;$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 1.19 On suppose Ω de classe C^1 . Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_n|_\Omega \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. Autrement dit, les restrictions à Ω des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ forment un sous-espace dense de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.20 (Rellich-Kondrachov) On suppose Ω borné de classe C^1 . On a

$$\begin{array}{ll} \text{si} & p < n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*] \text{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \\ \text{si} & p = n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, \infty] , \\ \text{si} & p > n, \text{ alors } W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \quad \forall q \in [1, \infty] , \end{array}$$

avec injections compactes².

¹Un multi-indice α est une suite $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ avec $\alpha_i \geq 0$ entier ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{ et } D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi.$$

²En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p .

Définition 1.21 Soit $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}$ désigne la fermeture de C_c^1 dans $W^{1,p}$. On note

$$H_0^1 = W_0^{1,2}.$$

L'espace $W_0^{1,p}$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est réflexif si $1 < p < \infty$. H_0^1 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de H^1 .

Proposition 1.22 (Inégalité de Poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

En particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|u\|_{W^{1,p}}$; sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_{\Omega} \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.

Définition 1.23 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$

- (1) Soit $1 \leq p < \infty$ on dit que u_ν converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$ si $u_\nu, u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_\nu \rightharpoonup u$ dans L^p et $\nabla u_\nu \rightharpoonup \nabla u$ dans L^p .
- (2) On dit que u_ν converge faiblement* vers u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$ si $u_\nu, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u_\nu \xrightarrow{*} u$ dans L^∞ et $\nabla u_\nu \xrightarrow{*} \nabla u$ dans L^∞ .

Définition 1.24 On peut définir une famille d'espaces intermédiaires entre $L^q(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$. Plus précisément si $0 < s < 1$ ($s \in \mathbb{R}$) et $0 \leq p < \infty$, on pose

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^q(\Omega) ; \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + \frac{n}{p}}} \right\},$$

muni de la norme naturelle. On note $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$. On retiendra que les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ peuvent aussi être introduits comme interpolés entre $L^q(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$, ou bien par transformée de Fourier si $p = 2$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.25 On définit enfin $W^{s,p}(\Omega)$ pour s réel, s non entier, $s > 1$ comme suit. On écrit $s = m + \sigma$ avec $m =$ partie entière de s , et on pose

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) ; D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \quad \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| = m\}$$

Par cartes locales on définit aussi $W^{s,p}(\Gamma)$ où Γ est une variété régulière (par exemple le bord d'un ouvert régulier). Ces espaces jouent un rôle important en théorie des traces.

Théorème 1.26 (des traces) Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. On définit l'application trace γ_0 linéaire continue γ

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^1(\overline{\partial\Omega}) \\ u \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \end{array} \right.$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, note encore γ_0 . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Proposition 1.27 Les propriétés les plus importantes de la trace sont les suivantes :

- (1) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors, en fait, $u|_{\Gamma} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ et

$$\|u|_{\Gamma}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

De plus l'opérateur trace $u \mapsto u|_{\Gamma}$ est surjectif de $W^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

- (2) Le noyau de l'opérateur trace est $W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$$

Remarque : On remarquera qu'il y a une différence fondamentale entre $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ et $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$: les fonctions de $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ n'ont pas de trace sur Γ . On imagine aisément comment définir à l'aide de cartes locales la trace sur $\Gamma = \partial\Omega$ d'une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ (par exemple Ω de classe C^1 avec Γ borné). Dans ce cas $u|_{\partial\Omega} \in L^p(\Gamma)$

Théorème 1.28 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds$$

où $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$. De même, si σ est une fonction vectorielle de $[L^2(\Omega)]^n$ telle que $\operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega)$ et si $u \in H^1(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \sigma dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \sigma(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(x) \cdot n(x) ds$$

Proposition 1.29 (Inégalités d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg)

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et soit $u \in L^p(\Omega) \cap W^{2,r}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$. Alors

$$u \in W^{1,q}(\Omega),$$

où q est la moyenne harmonique de p et r c'est-à-dire $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right)$ et

$$\|Du\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{2,r}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

Cas particuliers : si $p = \infty$ donc $q = 2r$, on a

$$\|Du\|_{L^{2r}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{2,r}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Soient $1 \leq q \leq p < \infty$, alors

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}^a \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \quad \forall u \in W^{1,N}(\Omega) \quad \text{avec } a = 1 - \frac{q}{p}$$

Notons le cas fréquemment utilisé $N = 2$, $p = 4$ et $a = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Théorème 1.30 (Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert et $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive : Alors pour tout $\varphi \in H$ il existe $u \in H$ unique tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}.$$

Alternative de Fredholm

Définition 1.31 On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, E)$.

Théorème 1.32 Soit $T \in k(E)$ alors :

1. $\text{Ker}(I - T)$ est de dimension finie,

2. $\text{Im}(I - T)$ est fermé, et plus précisément $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$
3. $\text{Ker}(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = E$
4. $\dim \text{Ker}(I - T) = \dim \text{Ker}(I - T^*)$.

Interpretation : On cherche à résoudre $u - Tu = f$. On a alors l'alternative :

- a- Ou bien $\forall f \in E$ on a une solution unique (cond 3)
- b- Ou bien l'équation homogène admet n solutions indépendantes et on ne peut résoudre l'équation complète qu'avec n conditions d'orthogonalité sur f .

L'espace $L^p(a, b; X)$

Soient X un espace de Banach et $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On désigne par $\|\cdot\|_X$ la norme dans X .

Définition 1.33 : On désigne par $L^p(a, b; X)$ ($0 \leq p \leq \infty$) l'espace des classes de fonctions mesurables de $]a, b[$ dans X telles que :

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left[\int_{(a,b)} \|f(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{pour } p < \infty \\ \|f\|_{L^p(a,b;X)} = \sup_{\text{ess}} \|f(t)\|_X < \infty & \text{pour } p = \infty. \end{cases}$$

Pour ($0 \leq p \leq \infty$), $L^p(a, b; X)$ est un espace de Banach.

Distributions vectorielles

Définition 1.34 On appelle espace des distributions vectorielles de $]a, b[$ à valeurs dans un espace de Banach X et on note $D'([a, b]; X)$ l'espace des applications linéaires continues de $D([a, b])$ à valeurs dans X et on note

$$D'([a, b]; X) = \mathcal{L}(D([a, b]); X)$$

Définition 1.35 Soit $f \in D'([a, b]; X)$ et soit m un entier naturel. Alors, l'application

$$\varphi \rightarrow (-1)^m f \left[\frac{d\varphi}{dt^m} \right], \varphi \in D([a, b])$$

est une distribution que l'on note $\frac{d^m \varphi}{dt^m}$

L'espace $W(a, b; V, V')$

On considère deux espaces de Hilbert réels séparables. On note $((;))$ le produit scalaire et $|||$ la norme dans V et $(.,.)$; $|\cdot|$ les notions correspondantes dans H

En outre, on suppose que V est dense dans H si bien qu'en identifiant H et son dual H' , on a

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

chaque espace étant dense dans le suivant.

Définition 1.36 Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On désigne par $W(a, b; V, V')$ l'espace

$$W(a, b; V, V') = \{u, u \in L^2(a, b; V), u' \in L^2(a, b; V')\}$$

Proposition 1.37 L'espace $W(a, b; V, V')$ muni de la norme

$$\|u\|_W = \left(\|u\|_{L^2(a, b; V)}^2 + \|u'\|_{L^2(a, b; V')}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : $H^1(0.1; L^2(\Gamma))$ est l'espace des distributions vectorielles $w \in D'(0.1; L^2(\Gamma))$ tels que w et w' appartiennent à $L^2(0.1; L^2(\Gamma))$ gurent dans

Eléments de géométrie différentielle

L'objet de cette section est d'introduire un système de coordonnées adapté à la construction des conditions d'impédance (C L E) . On pourra utilement se reporter à [24] et [14]

Eléments de géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.38 : On appelle courbe différentielle paramétrée de $\mathbb{R}^d$ une application différentiable α d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$. Si le vecteur dérivé $\alpha'(s)$ est non nul, il représente la tangente orientée en s . Soit : $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ une courbe différentiable paramétrée et $s_0 \in I$. La longueur de l'arc paramétré entre s_0 et s est par définition :

$$t(s) = \int_{s_0}^s \|\alpha'(s)\|_2 ds.$$

La fonction $s \rightarrow t(s)$ est dérivable de dérivée $\frac{dt}{ds} = \|\alpha'(s)\| > 0$. La fonction t est strictement croissante et admet une fonction réciproque $s = \varphi(t)$. Les conditions de dérivabilité montrent que s est une fonction de t de classe C^∞ et on peut donc considérer $\alpha(\varphi(t))$ qui est de classe C^∞ . Ceci conduit à dire : pour que la courbe différentielle soit régulière il faut que la condition suivante soit vérifiée

$$\forall s \in I, \alpha'(s) \neq 0.$$

Une courbe différentielle régulière peut être paramétrée par son abscisse curviligne t . On a alors

$$t = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\delta)\|_2 d\delta,$$

et en dérivant, on constate que $\|\alpha'(t)\|_2 = 1$

Etude géométrique locale d'une courbe paramétrée

Définition 1.39

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne, le nombre

$$c(t) = \left\| \alpha''(t) \right\|_2,$$

s'appelle la courbure en t de la courbe α .

Si on change l'orientation de la courbe, la valeur de la courbure ne change pas.

Aux points où $c(t) \neq 0$, on peut définir le rayon de courbure de en t par :

$$R(t) = \frac{1}{c(t)}$$

Par dérivation de $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ en t , on constate que le vecteur $\vec{n}(t)$ est orthogonal au vecteur tangent $\vec{\tau}(t)$ en t .

Le vecteur $\vec{n}(t)$ est appelé le vecteur normal à α en t .

Le plan déterminé par les vecteurs $\vec{n}(t)$ et $\vec{\tau}(t)$ s'appelle le plan osculateur à α en t .

Là où $c(t)$ est nul, ce plan n'existe pas, on dit alors que l'on a un point singulier à l'ordre 1. Dans la suite nous supposons qu'il n'y a pas de telles singularités. la normale est partout définie.

Le vecteur unitaire $\vec{b}(t) = \vec{\tau}(t) \wedge \vec{n}(t)$ s'appelle le vecteur binormal à α en t .

Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\tau}(t)$ et $\vec{b}(t)$ s'appelle le plan rectifiant à α en t . Le repère $\vec{\tau}(t), \vec{b}(t), \vec{n}(t)$ s'appelle le repère de Frenet à α en t .

Soit : $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne n'ayant pas de singularité au premier ordre ; le nombre $\kappa(t)$ défini par $\vec{b}'(t) = \kappa(t) \vec{n}(t)$ est la torsion de α en t .

Formules de Frénet

On connaît les dérivées premières de s et b . Calculons maintenant celle de n . D'après la définition de $\vec{b}$ on a $\vec{n}(t) = b(t) \wedge \vec{\tau}(t)$ et donc en dérivant $\vec{n}'(t) = \vec{b}'(t) \wedge \vec{\tau}(t) + \vec{b}(t) \wedge \vec{\tau}'(t)$ ce qui donne $\vec{n}'(t) = -\kappa(t) \vec{b}(t) - c(t) \vec{\tau}(t)$. En regroupant, on obtient les formules de Frénet.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\tau}(t)}{dt} &= c(t) \vec{n}(t) \\ \frac{d\vec{n}(t)}{dt} &= -\kappa(t) \vec{b}(t) - c(t) \vec{\tau}(t) \\ \frac{d\vec{b}(t)}{dt} &= \kappa(t) \vec{n}(t) \end{aligned}$$

Eléments de géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Soit un ouvert Ω_∞ de $\mathbb{R}^3$ tel que Ω_∞^c est un compacte, $\overline{\Omega_\infty}$ de frontière Γ de classe C^∞ et $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0. On note $\Omega_i = \mathbb{R}^3 / \overline{\Omega_\infty}$ et

$$\Omega_e^\varepsilon = \{x \in \Omega_i, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$$

Nous introduisons une paramétrisation locale du domaine Ω_e^ε

$$x \in \Omega_e^\varepsilon \longrightarrow (x_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, \varepsilon] \text{ telle que } x = x_\Gamma + sn(x_\Gamma) \quad (1.1)$$

Où x_Γ est caractérisé par

$$|x - x_\Gamma| = \min_{y \in \Gamma} |x - y|$$

Pour tout $x_\Gamma \in \Gamma$ on note T_{x_Γ} le plan tangent à Γ au point x_Γ qui n'est autre que le plan passant par x_Γ et orthogonal à $n(x_\Gamma)$. Par ailleurs, nous aurons à distinguer, pour un champ de vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$, la partie normale de la partie tangentielle. On notera :

$$v = \Pi_\parallel v + \Pi_\perp v \text{ où } \Pi_\parallel v = n \times (v \times n) \text{ et } \Pi_\perp v = (v \cdot n) \cdot n,$$

1. Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle 19

les projecteurs $\Pi_{\parallel}v$ et $\Pi_{\perp}v$ dépendent de x_{Γ} .

Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow x_{\Gamma} \in \Gamma$ une paramétrisation d'un voisinage de x_{Γ}^0 ou $\xi \in O$ un ouvert $\mathbb{R}^2$. On définit la base covariante $(\tau_{\alpha})_{\alpha=1,2}$ du plan $T_{x_{\Gamma}}$ par

$$\tau_{\alpha} = \partial_{\xi_{\alpha}} x_{\Gamma}$$

La base contravariante (ou duale) $(\tau^{\alpha})_{\alpha=1,2}$ est définie par

$$\tau^{\alpha} \cdot \tau_{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \quad \text{pour} \quad \beta = 1,2 \quad \text{et} \quad \tau^{\alpha} \cdot n = 0 \quad (1.2)$$

où δ_{α}^{β} désigne le symbole de Kronecker. On dénotera par $(e_i)_{i=1,2,3}$ ($= (e^i)_{i=1,2,3}$ par convention) une base orthonormale fixe de $\mathbb{R}^3$, et on utilisera dans toute la suite la convention de sommation sur les indices répétés en haut et en bas, où les indices grecs varient entre 1 et 2 et les indices romains varient entre 1.2.3.

Définition 1.40 (tenseur de courbure) *On introduit $\tilde{n}$ le champ de vecteurs définis sur le domaine Ω_e^{ε} par $\tilde{n}(x) = n(x_{\Gamma})$ ou $x \in \Omega_e^{\varepsilon}$ et x_{Γ} sont liés par (1.1). On définit les tenseurs de courbure C_s , $s \in [0, \eta]$, et C par*

$$C_s(x_{\Gamma}) = \overrightarrow{\nabla} \tilde{n}(x_{\Gamma}, s) \quad , \quad C(x_{\Gamma}) = C_0(x_{\Gamma}) \quad (1.3)$$

Pour tout $x_{\Gamma} \in \Gamma$, l'opérateur C est symétrique. Il admet 0 comme valeur propre associé au vecteur propre n et admet deux autres valeurs propres (c_1, c_2) , appelées courbures principales, qui sont associées à des vecteurs propres tangentiels et unitaires $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$.

Définition 1.41 *Si (c_1, c_2) des valeurs propres de l'opérateur C , on appelle*

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} C = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) \quad ,$$

la courbure moyenne de la surface Γ et

$$G = c_1 c_2 \quad ,$$

la Gaussienne de la surface Γ .

Proposition 1.42 *Nous avons alors la propriété très utile*

$$C \cdot (v \times n) + (C \cdot v) \times n = 2Hv \times n \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

qui se vérifie sans difficulté dans la base orthonormale $(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, n)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle 20

En utilisant la paramétrisation (ξ_1, ξ_2) , et en différenciant n par rapport à (ξ_1, ξ_2) on obtient l'autre définition possible de C .

$$\partial_{\xi_\alpha} n = C\tau_\alpha$$

Définissons l'opérateur tangentiel R_s sur Γ par

$$[I + s C(x_\Gamma)] R_s(x_\Gamma) = I_\Gamma(x_\Gamma), \quad (1.5)$$

où $I_\Gamma(x_\Gamma)$ est la projection sur le plan tangente en x_Γ de Γ .

Définition 1.43 (L'opérateur gradient surfacique) Soit v une fonction scalaire définie sur Γ , on introduit le prolongement $\hat{v}$ sur Ω_e^ε satisfaisant :

$$\hat{v}(x) = v(x_\Gamma),$$

où x et x_Γ sont reliés par la relation (1.1). L'opérateur ∇_Γ peut alors être défini par

$$(\nabla \hat{v})(x_\Gamma, 0) = (\nabla_\Gamma v)(x_\Gamma), \quad x_\Gamma \in \Gamma \quad (1.6)$$

C'est un opérateur tangentiel dont l'expression en fonction de la base contravariante de T_{x_Γ} s'écrit (localement)

$$\nabla_\Gamma v = \partial_{\xi_\alpha} v \tau^\alpha. \quad (1.7)$$

Pour montrer (1.7), il suffit d'utiliser (1.6) et différentier la fonction $\hat{v}$ par rapport aux coordonnées (ξ_1, ξ_2, s) , on obtient :

$$\left| \begin{array}{l} (\partial_{\xi_\alpha} \hat{v})(x_\Gamma, s) = (\nabla \hat{v})(x_\Gamma, s) \cdot (\tau_\alpha + s C \tau_\alpha) \\ (\partial_s \hat{v})(x_\Gamma, s) = (\nabla \hat{v}) \cdot n \end{array} \right.$$

En prenant $s = 0$ et en utilisant le fait que $(\partial_s \hat{v}) = 0$ (par définition du prolongement $\hat{v}$), on montre que

$$(\nabla_\Gamma v) \cdot \tau_\alpha = \partial_{\xi_\alpha} v \quad \text{et} \quad (\nabla_\Gamma v) \cdot n = 0$$

L'expression (1.7) s'en déduit immédiatement, puisque $(\tau^1; \tau^2; n)$ est la base duale de (τ_1, τ_2, n) dans $\mathbb{R}^3$ et si v un champ de vecteurs tangentiels défini sur Γ , l'opérateur divergence surfacique div_Γ est défini par.

$$\text{div}_\Gamma v \equiv (\nabla_\Gamma (v \cdot e^i)) \cdot e_i = (\partial_{\xi_\alpha} v) \cdot \tau^\alpha$$

Première partie

Conditions aux limites approchées pour un problème posé sur un domaine avec couche mince

Chapitre 2

Conditions aux limites approchées en dimension 2

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'investigation des conditions aux limites approchées, pour le problème de Helmholtz bidimensionnel dans un domaine borné avec une couche mince. Voir pour une étude similaire en mécanique des structures [19] et pour le Laplacien [11]

L'étude que nous proposons est divisée en trois sections principales : dans la section 2.1, on précise le cadre variationnel pour résoudre notre problème et l'estimation à priori qui en découle. Dans la section 2.2, on écrit les opérateurs dans un système de coordonnées locales, on transforme le domaine en un domaine fixe à l'aide d'une dilatation dans la couche mince de rapport ε^{-1} et on écrit le développement asymptotique de la solution. Dans la section 2.3, l'utilisation de l'analyse multi-échelle permet d'obtenir des problèmes avec conditions aux limites approchées et des estimations optimales de l'erreur commise.

2.1 Présentation du problème

Soit Ω_i un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de bord Γ de classe C^∞ . On note $\vec{n}(x)$, la normale au point x de Γ . Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ assez petit, Ω_ε représente la couche mince autour de Ω_i , d'épaisseur uniforme ε , ε étant un paramètre positif destiné

à tendre vers 0 :

$$\Omega_e^\varepsilon = \{x \in \Omega_i, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}.$$

On désigne par $\Omega^\varepsilon = \Omega_i \cup \Omega_e^\varepsilon \cup \Gamma$ le domaine complet dont le bord est noté Γ_e^ε voir Fig(2.1) .

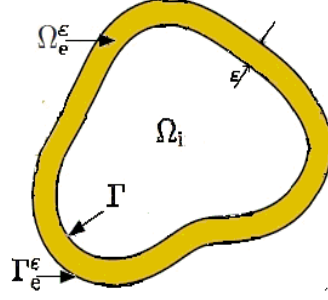


FIG. 2.1 – La géométrie du domaine avec une couche mince

On s'intéresse au problème de transmission, posé dans le domaine régulier Ω^ε suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ \Delta u_e^\varepsilon + k_e^2 u_e^\varepsilon = f_e \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon \\ \partial_n u_i^\varepsilon = \partial_n u_e^\varepsilon + g \quad \text{sur } \Gamma \\ u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma \\ u_e^\varepsilon = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ou} \quad \partial_n u_e^\varepsilon = 0 \quad (\text{Neumann}) \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon \end{array} \right. \quad (2.1)$$

On souhaite remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites, dite condition aux limites généralisées ou condition d'impédance. Plus précisément, on cherche une condition aux limites $CL_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon)$, tel que le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v^\varepsilon + k^2 v^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ CL_\varepsilon(v^\varepsilon, \partial_n v^\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

soit bien posé et que sa solution v^ε soit "proche" (quand ε est voisin de 0) de u_i^ε , la restriction intérieure de celle du problème (2.1). Ces conditions seront établies par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur de la couche mince.

2.1.1 Existence et unicité de la solution

Dans ce qui suit, on notera par V l'espace $H^1(\Omega^\varepsilon)$ ou $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ et par V^* l'espace dual de V . Introduisons la forme :

$$a(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_i^2 \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx - k_e^2 \int_{\Omega_e^\varepsilon} u^\varepsilon w dx.$$

On peut écrire le problème (2.1) sous la forme variationnelle suivante :

$$\text{trouver } u^\varepsilon \in V, \quad a(u^\varepsilon, w) = - \int_{\Omega_i} f_i w dx - \int_{\Omega_e^\varepsilon} f_e w dx + \int_{\Gamma} g w d\gamma, \quad \forall w \in V. \quad (2.2)$$

La difficulté principale de la résolution de ce problème réside dans la nature non coercive de celui-ci. La preuve d'existence et d'unicité de la solution est basée sur les deux théorèmes classiques de Rellich et de représentation de Riesz, ainsi que sur l'alternative de Fredholm.

Théorème 2.1 Soient $f_i \in L^2(\Omega_i)$ et $g \in L^2(\Gamma)$. Considérons le problème (2.1) sans couche mince avec conditions aux limites $u_i^\varepsilon = 0$ ou $\partial_n u_i^\varepsilon = 0$ sur Γ :

$$\begin{cases} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^\varepsilon = 0 \text{ (Dirichlet)} \text{ ou } \partial_n u_i^\varepsilon = 0 \text{ (Neumann)} & \text{sur } \Gamma \end{cases}. \quad (2.3)$$

Alors si k_i^2 n'est pas une valeur propre du problème (2.3) et si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ est suffisamment petit, le problème (2.2) admet une solution unique $u^\varepsilon \in V$. En plus il existe une constante M indépendante de $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ telle que

$$\|u^\varepsilon\|_{1, \Omega^\varepsilon} \leq M \|L\|_{V^*}. \quad (2.4)$$

Démonstration. La preuve s'opère en quatre étapes.

Etape 1 -étude du problème (2.3) : Bien entendu le problème (2.3) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\text{trouver } u \in V, \quad \forall w \in V \quad a_0(u, w) = L(w), \quad (2.5)$$

où

$$a_0(u, w) = \int_{\Omega_i} \nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_i^2 \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx \quad ; \quad L(w) = - \int_{\Omega_i} f_i w dx.$$

Dans un premier temps nous cherchons à écrire a_0 sous la forme

$$a_0(u, w) = \langle (I + T) u, w \rangle_V,$$

où T est un opérateur linéaire de V dans V . On a

$$a_0(u, w) = \int_{\Omega_i} (\nabla u^\varepsilon \nabla w dx + u^\varepsilon w) - (k_i^2 + 1) \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne la continuité de la forme bilinéaire suivante :

$$(u, w) \longrightarrow - (k_i^2 + 1) \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx,$$

le théorème 1.8 de représentation de Riesz nous assure l'existence d'un opérateur linéaire T continu de V dans V défini par

$$\langle Tu, w \rangle_V = - (k_i^2 + 1) \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx.$$

Donc on obtient

$$a_0(u, w) = \langle (I + T) u, w \rangle_V.$$

On peut également par le théorème 1.8 de représentation de Riesz définir Φ et écrire

$$L(w) = \langle \Phi, w \rangle,$$

ainsi résoudre l'équation (2.5) revient à résoudre dans V la suivante :

$$(I + T) u = \Phi$$

Dans l'intention d'utiliser l'alternative de Fredholm, nous allons désormais montrer que $(I + T)$ est la somme d'un opérateur coercive et d'un opérateur compact. On a

$$\langle Tu, w \rangle_V = - (k_i^2 + 1) \int_{\Omega_i} u^\varepsilon w dx$$

Soit (u_k) une suite bornée dans V , nous montrons que l'on peut en extraire une sous-suite (u_{k_ℓ}) tel que $T(u_{k_\ell})$ converge dans V . Nous avons

$$\|Tu_k - Tu\|_1^2 = \langle Tu_k - Tu, u_k - u \rangle_{L^2(\Omega_i)}.$$

L'injection de V dans $L^2(\Omega_i)$ étant compacte, il existe alors une sous-suite (u_{k_ℓ}) de (u_k) telle que $u_{k_\ell} \rightarrow u$ quand $\ell \rightarrow \infty$. Comme (u_{k_ℓ}) est aussi une suite bornée dans V , T étant un opérateur linéaire continu de V dans V , alors (Tu_{k_ℓ}) reste bornée dans V . On utilise à nouveau le théorème 1.20, on extrait une sous-suite (u_{k_p}) tel que $Tu_{k_p} \rightarrow Tu$ pour $p \rightarrow \infty$ dans $L^2(\Omega_i)$, ainsi $Tu_{k_p} \rightarrow Tu$ quand $p \rightarrow \infty$ dans V . D'où T est compact.

L'alternative de Fredholm nous dit que : $(I + T)$ est inversible si et seulement si $(I + T)$ est injectif. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.4). En remplaçant u et w par $v = u_1 - u_2$ dans la formulation (2.5), on obtient

$$\int_{\Omega_i} (\nabla v)^2 dx - k_i^2 \int_{\Omega_i} v^2 dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_{\Omega_i} -(\Delta v + k_i^2 v) v dx + \int_{\Gamma} \partial_n v v dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

Considérant d'abord $v \in C_c^\infty(\Omega_i) \subset V$, on obtient

$$\int_{\Omega_i} -(\Delta v + k_i^2 v) v dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega_i).$$

Par conséquent

$$(\Delta v + k_i^2 v) = 0 \quad \text{pp dans } L^2(\Omega_i).$$

Donc, la fonction v vérifie

$$\begin{cases} \Delta v + k_i^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ v = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ Dirichlet}, \\ \text{ou} \\ \partial_n v = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ Neumann.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Or, par hypothèse, k_i^2 n'est pas une valeur propre, d'où $v = 0$. Alors $(I + T)$ injectif sur l'espace V .

Etape 2 -étude sur $\Omega^\varepsilon = \Omega_i \cup \Omega_e^\varepsilon$

On note A_ε l'opérateur correspondant au problème :

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon + k_i^2 u^\varepsilon = f_i \text{ dans } \Omega^\varepsilon = \Omega_i \cup \Omega_e^\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \text{ou} \\ \partial_n u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (2.7)$$

dont la forme bilinéaire associée est :

$$a_1(u, w) = \int_{\Omega^\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_i^2 \int_{\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon w dx,$$

danc on peut définir A_ε par

$$A_\varepsilon \left| \begin{array}{l} V(\Omega^\varepsilon) \rightarrow V^*(\Omega^\varepsilon) \\ \langle A_\varepsilon u, w \rangle = a_1(u, w) \end{array} \right.$$

On définit une application A_0 de $V(\Omega_i)$ dans $V^*(\Omega_i)$ par :

$$A_0 \left| \begin{array}{l} V(\Omega_i) \rightarrow V^*(\Omega_i) \\ \langle A_0 u, v \rangle = a_0(u, v) \end{array} \right.$$

où $V^*(\Omega_i)$ désigne le dual de $H^1(\Omega_i)$ ou le dual de $H_0^1(\Omega_i)$. Cherchons maintenant à démontrer que A_ε est inversible. Pour cela, on définit le changement de variable suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \Omega_i \rightarrow \Omega^\varepsilon \\ y \rightarrow x = (1 + \varepsilon) y, \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned} a_1(u, w) &= \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \int_{\Omega_i} \nabla u^\varepsilon [(1 + \varepsilon) y] \nabla w [(1 + \varepsilon) y] dy \\ &\quad - k_i^2 (1 + \varepsilon) \int_{\Omega_i} u^\varepsilon [(1 + \varepsilon) y] w [(1 + \varepsilon) y] dy. \end{aligned}$$

Si on note θ l'application suivante :

$$\theta \left| \begin{array}{l} V(\Omega^\varepsilon) \rightarrow V(\Omega_i) \\ u \rightarrow [y \rightarrow u^\varepsilon [(1 + \varepsilon) y]] \end{array} \right. ,$$

et $\tilde{A}_\varepsilon$ l'opérateur $A_\varepsilon \circ \theta^{-1}$, on a :

$$A_\varepsilon \circ \theta^{-1} = A_0 + \frac{\varepsilon \Delta}{(1 + \varepsilon)} - k_i^2 \varepsilon.$$

En effet, on a

$$a_1(u, w) = \frac{1}{(1 + \varepsilon)} \int_{\Omega_i} \nabla (\theta u^\varepsilon) \nabla w [(1 + \varepsilon) y] dy - k_i^2 (1 + \varepsilon) \int_{\Omega_i} (\theta u^\varepsilon) w [(1 + \varepsilon) y] dy,$$

et

$$\begin{aligned}
\langle A_\varepsilon \circ \theta^{-1} u, w \rangle &= \frac{1}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla w \, dy - k_i^2 (1+\varepsilon) \int_{\Omega_i} u \, w \, dy \\
&= \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla w \, dy - k_i^2 \int_{\Omega_i} u \, w \, dy - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla w \, dy - k_i^2 \varepsilon \int_{\Omega_i} u \, w \, dy \\
&= \left\langle \left(A_0 + \frac{\varepsilon \Delta}{(1+\varepsilon)} - k_i^2 \varepsilon \right) u, w \right\rangle.
\end{aligned}$$

Si bien que $\tilde{A}_\varepsilon$ apparaît comme une perturbation de A_0 . Alors les opérateurs $\tilde{A}_\varepsilon$, A_ε sont simultanément inversibles de V dans V^* . on en déduit que si k_i^2 n'est pas une valeur propre de (2.3) et si ε est assez petit, A_ε est inversible et donc le problème (2.7) est bien posé.

Etape 3 -étude du problème (2.1)

Soit A l'opérateur associé au problème (2.1), on a :

$$A = -\Delta - k^2,$$

où la fonction $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$k(x) = \begin{cases} k_i & \text{dans } \Omega_i \\ k_e & \text{dans } \Omega_e^\varepsilon \end{cases}.$$

On veut prouver que A est une perturbation de A_ε . On a :

$$a(u^\varepsilon, w) - a_1(u, w) = (k_i^2 - k_e^2) \int_{\Omega_e^\varepsilon} u^\varepsilon w \, dx.$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe une constante $c > 0$ et une fonction $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ telles que :

$$\forall u \in V, \int_{\Omega_e^\varepsilon} |u|^2 \, dx \leq c \, \eta(\varepsilon) \|u\|_{1, \Omega_e^\varepsilon}^2.$$

On a, par Cauchy-Schwartz

$$\int_{\Omega_e^\varepsilon} |u|^2 \, dx \leq [\text{mes}(\Omega_e^\varepsilon)]^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^4(\Omega_e^\varepsilon)}^2.$$

En outre, par interpolation de Gagliardo-Nirenberg

$$\int_{\Omega_\varepsilon^\varepsilon} |u|^2 dx \leq c [\text{mes}(\Omega_\varepsilon^\varepsilon)]^{\frac{1}{2}} \|u\|_{0,\Omega_\varepsilon^\varepsilon} \|u\|_{1,\Omega_\varepsilon^\varepsilon}$$

Donc on déduit avec $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\text{mes}(\Omega_\varepsilon^\varepsilon)}$ que A est une perturbation de A_ε . D'où A est inversible.

Etape 4- L'estimation

Le problème variationnel (2.2) est équivalent au problème suivant :

$$\text{trouver } u^\varepsilon \in V, \quad D_\varepsilon(u^\varepsilon, w) + B_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = L_\varepsilon(w) \quad \forall w \in V, \quad (2.8)$$

où

$$D_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega^\varepsilon} (\nabla u^\varepsilon \nabla w + uw) dx \quad \text{et} \quad B_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = - [k^2(x) + 1] \int_{\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon w dx.$$

La forme bilinéaire D_ε est uniformément coercive de $V \times V$. On définit la famille des opérateurs continus K_ε de V dans V vérifiant

$$D_\varepsilon(K_\varepsilon u^\varepsilon, w) = B_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = - [k^2(x) + 1] \int_{\Omega^\varepsilon} u^\varepsilon w dx,$$

Par conséquent, (2.8) est équivalent à

$$(I + K_\varepsilon) u = \Phi_\varepsilon \quad \forall w \in V,$$

où Φ_ε est défini par :

$$D_\varepsilon(\Phi_\varepsilon, u^\varepsilon) = L(w).$$

De plus Φ_ε vérifie

$$\|\Phi_\varepsilon\|_V \leq C \sup_{v \in V, \|v\|_V=1} |L_\varepsilon(v)|.$$

Les mêmes arguments permettent d'écrire $a_0(u, w) = L_0(w) \quad \forall w \in V$, sous la forme $(I + K_0) u = \Phi_0$, où $\Phi_0 \in V$ est défini par

$$D_0(K_0 u, w) = B_0(u^0, w) = - [k_i^2(x) + 1] \int_{\Omega_i} u^0 w dx.$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème $a_0(u, w) = L_0(w)$ implique que $(I + K_0)$ est inversible. Pour toute suite ε_n qui converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$,

la famille des opérateurs compacts K_{ε_n} converge vers l'opérateur compact K_0 . Donc, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ l'opérateur $(I + K_\varepsilon)$ est inversible. Il existe alors une constante C' indépendante de ε telle que

$$\|(I + K_\varepsilon)^{-1} \Phi_\varepsilon\|_V \leq C' \|\Phi_\varepsilon\|_V.$$

Par conséquent

$$\|u^\varepsilon\|_V \leq M \sup_{v \in V, \|w\|_V=1} |L_\varepsilon(w)|,$$

où M est indépendante de ε . ■

2.2 Construction du développement asymptotique

2.2.1 Changement d'échelle

On note $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal (extérieur à Ω_i) sur Γ

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

et les formules de Frénet qui définissent la courbure $c(t)$ au point d'abscisse curviligne t

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = -c(t)\vec{n} \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = c(t)\vec{\tau}. \quad (2.9)$$

Expression du Laplacien en coordonnées locales : Afin d'exprimer les opérateurs intervenant dans les équations de notre problème, nous avons besoin de l'écriture des dérivées selon les variables cartésiennes en fonction des dérivées dans le repère de Frénet. Les formules de Frénet (2.9) entraînent :

$$\begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + sc(t))n_2 & -(1 + sc(t))n_1 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix},$$

par inversion de ce système, on obtient

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_2}{(1 + sc(t))} & n_1 \\ \frac{-n_1}{(1 + sc(t))} & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_s \end{pmatrix},$$

d'où l'expression du Laplacien dans les variables (t, s) :

$$\Delta = \frac{1}{1 + sc(t)} \partial_t \left(\frac{1}{1 + sc(t)} \partial_t \right) + \frac{c(t)}{1 + sc(t)} \partial_s + \partial_s^2. \quad (2.10)$$

2.2.2 Le problème dans un domaine fixe

L'objet de cette sous-section consiste à réécrire le système (2.1) dans un domaine à géométrie fixe. À l'aide des coordonnées de Frénet, la couche mince s'écrit de manière tensorielle

$$\Omega_e^\varepsilon = \Gamma \times [0, \varepsilon] .$$

On introduit la variable dilatée,

$$\left| \begin{array}{l} \Omega_e^\varepsilon = \Gamma \times [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega^+ = [0, \ell_\Gamma] \times [0, 1] \\ (t, s) \rightarrow (t, y = \frac{s}{\varepsilon}) \end{array} \right. ,$$

où (ℓ_Γ est la longueur de la courbe). Soit alors les fonctions définies sur Ω^+ par

$$u_e^\varepsilon(t, s) = U_e^\varepsilon(t, y) ; F_e(t, y) = f_e(t, \varepsilon y) .$$

La dilatation $s \rightarrow y = \frac{s}{\varepsilon}$ transforme la couche en un domaine fixe ; le petit paramètre ε apparaît maintenant dans les équations.

lemme 2.2 *Le Laplacien s'écrit dans les coordonnées $(t, y = \frac{s}{\varepsilon})$.*

$$\Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\partial_y^2 + \sum_{\ell=1}^{\ell=N} \varepsilon^\ell A_\ell \right] + \varepsilon^{N-1} T_\varepsilon^N ,$$

les opérateurs (A_ℓ) comportent au plus une dérivée selon y et T_ε^N est un opérateur uniformément borné en ε .

Remarque : Il est possible de donner un procédé récurrent de construction des opérateurs A_ℓ mais on utilisera seulement les formes explicites de A_0 , A_1 , A_2 , et A_3 dont les expressions sont :

$$A_0 = \partial_y^2 ; A_1 = c \partial_y ; A_2 = (\partial_t^2 - y c^2 \partial_y) ; A_3 = (c^3 y^2 \partial_y - c' y \partial_t - 2 c y \partial_t^2) \text{ où } c(t) = c .$$

Les développements en puissance de ε donnés sont formels : on ne cherche pas à donner un sens à la convergence des séries. Ce point de vue est généralement adopté en analyse asymptotique multi-échelles.

Dans les nouvelles coordonnées (t, y) , le problème de transmission (2.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\partial_y^2 + \sum_{\ell=1}^{\ell=N} \varepsilon^\ell A_\ell + \varepsilon^{N+1} T_\varepsilon^N \right) U_e^\varepsilon + k_e^2 U_e^\varepsilon = F_e \quad \text{dans } \Omega^+, \\ \partial_n u_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_y U_e^\varepsilon + g \quad \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \\ u_i^\varepsilon = U_e^\varepsilon \quad \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \\ U_e^\varepsilon(t, 1) = 0 \quad \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma), \\ \text{ou} \\ \partial_y U_e^\varepsilon(t, 1) = 0 \quad \text{pour } t \in (0, \ell_\Gamma). \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Si f_e est suffisamment régulier, on peut écrire son développement de Taylor au voisinage de Γ : on obtient alors l'expression suivante pour F_e .

$$F_e(t, y) = \sum_{\ell=0}^{\ell=N} F_e^\ell(t) y^\ell + O(\varepsilon^{N+1}).$$

2.2.3 Les problèmes élémentaires

Dans un premier temps, on se place dans le cas où la perméabilité magnétique est indépendante du paramètre ε . La structure des équations (2.11) laisse apparaître des puissances entières de ε , ce qui conduit naturellement à effectuer un développement sous la forme :

$$u_i^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_i^n \quad \text{et} \quad U_e^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_e^n, \quad (2.12)$$

où les fonctions u_i^n et U_e^n ne dépendent pas de ε . L'objet de cette section est la description du procédé algorithmique de construction des termes du développement asymptotique de la solution du problème.

On substitue l'ansatz (2.12) dans (2.11) puis on identifie les termes selon les puissances de ε . On obtient une famille de problèmes indépendants de ε couplés par leurs conditions sur Γ

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 U_e^n = F_e^{n-2}(t) y^{n-2} - k_e^2 U_e^{n-2} - \sum_{\substack{\ell+p=n \\ p \geq 1 ; \ell \geq 0}} A_p U_e^\ell \quad \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^n = \partial_n u_i^{n-1} - \delta_1^n g \quad \text{pour } y = 0, \\ U_e^n = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_y U_e^n = 0 \quad \text{pour } y = 1, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \Delta u_i^n + k_i^2 u_i^n = \delta_0^n f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^n = U_e^n & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.14)$$

(δ désigne le symbole de Kronecker et on pose $F_e^{-2} = F_e^{-1} = u_i^{-1} = U_e^{-2} = U_e^{-1} = 0$).

Remarque : Si on suppose connus $(u_i^k), (U_e^k)$ pour $k < n$, alors les seconds membres des deux problèmes précédents sont bien définis. Le problème (2.13) est unidimensionnel et admet une solution unique dans les deux cas Dirichlet ou Neumann. Quant à (2.14), on a aussi existence et unicité (pour des données suffisamment régulières). Les conditions de transmission des dérivées normales sont découplées en raison du décalage dans les puissances de ε . Ceci va nous permettre une résolution alternative dans chacun des domaines Ω_i et Ω_e^ε . Une fois les premiers termes déterminés, le procédé algorithmique de construction du développement asymptotique est défini, c'est pourquoi on recherche d'abord les quatre premiers termes extérieurs.

2.2.4 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet

Termes de rang 0

Les équations (2.13) et (2.14) donnent :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $U_e^0 = 0$ et par conséquent u_i^0 est solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^0 = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Termes de rang 1

Pour $n = 1$ on obtient :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^1 = U_e^1 & \text{sur } \Gamma \end{cases},$$

ce qui donne :

$$U_e^1(t, y) = (\partial_n u_i^0 - g)(y - 1)$$

Par conséquent, u_i^1 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^1 = -\partial_n u_i^0 + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 2

En utilisant les expressions de A_1 , A_2 et les formes explicites de U_e^1 et U_e^0 , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = -c(\partial_n u_i^0 - g) + F_e^0(t) & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^2 = U_e^2 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

ce qui donne alors :

$$U_e^2(t, y) = -c(\partial_n u_i^0 - g) \frac{(y^2 - 1)}{2} + \int_{[1, y]} \int_{[0, h]} F_e^0(t, u) du dh + \partial_n u_i^1 (y - 1).$$

Par conséquent, u_i^2 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^2 + \partial_n u_i^1 = \frac{c}{2} \partial_n u_i^0 - \frac{c}{2} g - \int_{[0, 1]} \int_{[0, y]} F_e^0(t, u) du dy & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

2.2.5 Calcul des premiers termes : cas Neumann

Termes de rang 0

L'équation (2.13) donne :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 1, \end{cases}$$

si bien que $U_e^0(t, y)$ résout un problème unidimensionnel homogène de Neumann. Alors, $U_e^0(t, y) = \beta_0(t)$ est une fonction indépendante de la variable y qui ne peut pas être déterminée à ce stade. Pour avoir $U_e^0(t, y)$, on fait appel aux termes de rang 1

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Ces équations montrent que

$$\partial_y U_e^1(t, 1) - \partial_y U_e^1(t, 0) = 0,$$

ce qui donne :

$$\partial_n u_i^0 = g.$$

D'où, u_i^0 est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u_i^0 = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.15)$$

Grâce à la condition de continuité à travers Γ ($u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon$ sur Γ) et à l'unicité de la solution du problème (2.15), $\beta_0(t)$ est déterminé comme $\beta_0(t) = u_i^0|_\Gamma = u_i^0(t, 0)$.

Termes de rang 1

Pour $n = 1$, on obtient

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1 \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 0 \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1 \end{cases}$$

Comme précédemment, $U_e^1(t, y)$ résout un problème unidimensionnel de Neumann. Alors $U_e^1(t, y)$ est une fonction de longueur d'arc notée $\beta_1(t)$. Pour l'avoir, on fait appel aux termes de rang 2 :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = -c(t)\partial_y U_e^1 - (\partial_t^2 - yc^2\partial_y)U_e^0 - k_e^2 U_e^0 + F_e^0(t) & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

On a :

$$\partial_y U_e^2(t, 1) - \partial_y U_e^2(t, 0) = -\partial_n u_i^1 = -\partial_t^2 u_i^0 - k_e^2 u_i^0 + \int_{[0,1]} F_e^0(t, y) dy.$$

d'où u_i^1 est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u_i^1 = \partial_t^2 u_i^0(t) + k_e^2 u_i^0(t) - \int_{[0,1]} F_e^0(t, y) dy & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.16)$$

De même, l'unicité de la solution du problème (2.16) et la condition de continuité à travers Γ ($u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon$ sur Γ) permet de définir $\beta_1(t)$ comme $u_i^1|_\Gamma = \beta_1(t) = u_i^1(t, 0)$.

Termes de rang 2

Sans perdre de généralité, on suppose ici que $f_e \equiv 0$. On a

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = -c(t)\partial_y U_e^1 - (\partial_t^2 - yc^2\partial_y)U_e^0 - k_e^2 U_e^0 & \text{dans } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{sur } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{sur } y = 1, \end{cases}$$

si bien que $U_e^2(t, y)$ résout un problème unidimensionnel et on a

$$U_e^2(t, y) = \frac{1}{2} (y^2 - 2y) (-\partial_t^2 u_i^0 - k_e^2 u_i^0) + U_e^2(t, 0)$$

Pour bien déterminer U_e^2 , on fait appel au terme de rang 3. On a

$$\partial_y^2 U_e^3 = -k_e^2 u_i^1 - c (\partial_t^2 u_i^0 + k_e^2 u_i^0) (1 - y) - \partial_t^2 u_i^1 + c' y \partial_t u_i^0 + 2cy \partial_t^2 u_i^0$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\partial_n u_i^2 = k_e^2 u_i^1 + \frac{c}{2} (\partial_t^2 u_i^0 + k_e^2 u_i^0) + \partial_t^2 u_i^1 - \frac{1}{2} c' \partial_t u_i^0 - c \partial_t^2 u_i^0$$

Par conséquent, u_i^2 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u_i^2 = k_e^2 u_i^1 + \frac{c}{2} (\partial_t^2 u_i^0 + k_e^2 u_i^0) + \partial_t^2 u_i^1 \\ - \frac{1}{2} c' \partial_t u_i^0 - c \partial_t^2 u_i^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.17)$$

L'unicité de la solution du problème (2.17) et la condition de continuité à travers Γ ($u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon$ sur Γ) permet de définir $\beta_2(t)$ comme $u_i^2|_\Gamma = \beta_2(t) = u_i^2(t, 0)$.

Remarque : Les calculs des premiers termes exigent des données suffisamment régulières. Pour bien définir U_e^1 et u_i^1 , les données doivent vérifier

$$\partial_n u_i^0|_\Gamma - g \in H^1(\Gamma),$$

ce qui requiert les conditions

$$u_i^0 \in H^2(\Omega_i) \text{ et } g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Mais si on suppose que $f_i \in H^1(\Omega_i)$ alors $u_i^0 \in H^2(\Omega_i)$ car Ω^ε est régulier. Si on veut donc poursuivre la construction du développement asymptotique, on a besoin d'une plus grande régularité sur les données.

2.2.6 Le développement complet. Estimation du reste

Le procédé décrit dans le paragraphe précédent peut-être poursuivi à tout ordre, pourvu que les données soient suffisamment régulières. On peut aussi estimer l'erreur commise en tronquant la série à un nombre fini de termes.

Théorème 2.3 *On suppose que la courbe définissant Γ le bord du domaine Ω_i et les seconds membres, f_i et f_e , sont de classe C^∞ . Alors, la solution u^ε du problème (2.1) admet le développement asymptotique :*

$$u^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u^n \quad \text{ou} \quad u^n|_{\Omega_i} = u_i^n \text{ et } u^n|_{\Omega_e} = U_e^n(t, \frac{s}{\varepsilon}).$$

Les termes u_i^n et U_e^n ne dépendent pas de ε et sont construits à l'aide des équations (2.13) et (2.14). Au sens des développements asymptotiques, $u^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u^n$ est bien défini et de plus pour tout entier N ; il existe une constante C_N , telle que, le reste d'ordre N défini par :

$$r_\varepsilon^N = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u^n ,$$

Satisfasse l'estimation

$$\|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega_i} + \sqrt{\varepsilon} \|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega_e} \leq C_N \varepsilon^{N+1}. \quad (2.18)$$

Démonstration. Nous trouverons la démonstration de ce théorème 2.3 dans le cas tridimensionnel au chapitre 3. ■

Remarque : Ce résultat ne donne aucune information sur la convergence de la série $\sum u_n$. On s'intéresse ici à la convergence de $r_{\varepsilon,i}^N$ quand ε tend vers 0, mais pas à la convergence de $r_{\varepsilon,i}^N$ quand $n \rightarrow +\infty$ (c'est ce que l'on nomme convergence au sens des développements asymptotiques).

2.3 Conditions aux limites approchées

Même, s'il est possible d'approcher numériquement u^ε , les calculs deviennent délicats quand ε est très petit. On préfère remplacer l'effet de la couche mince par une condition aux limites sur le bord Γ , dite condition aux limites approchée. On va voir dans ce paragraphe comment le développement asymptotique

obtenu précédemment permet l'identification d'une telle condition et surtout sa validation.

Pour construire des conditions aux limites approchées, notre méthode consiste à approcher u^ε par la série donnant son développement asymptotique tronquée à un ordre donné, la condition vérifiée par cette approximation sur Γ fournissant la condition aux limites approchées recherchées.

2.3.1 Conditions équivalentes : cas Dirichlet

Condition d'ordre 0

On ne conserve ici qu'un seul terme dans le développement asymptotique de u^ε , on obtient l'approximation

$$u^\varepsilon \approx u^{[0]} = u_i^0$$

qui résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^{[0]} + k_i^2 u^{[0]} = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ u^{[0]} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Cela revient à enlever la couche mince et à imposer la condition de Dirichlet $u = 0$ sur Γ . La première condition aux limites approchées apparait immédiatement : il s'agit tout simplement de la condition de Dirichlet $u = 0$ sur Γ . Cela n'est rien d'autre que le cas limite $\varepsilon = 0$. La condition de Dirichlet imposée sur Γ_e^ε se transmet directement sur Γ . L'estimation du théorème 2.3 permet d'estimer l'erreur commise

$$\| u^{[0]} - u_i^0 \|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon$$

Proposition 2.4 *Soit $v_{[0]}^\varepsilon$ la solution du problème (2.19) (ne dépend pas de ε) :*

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ v_{[0]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.19)$$

Alors, on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ε) telle que :

$$\| u_i^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon \|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon$$

Condition d'ordre 1

Plus intéressant est le cas où on conserve deux termes dans le développement :
Définissons $u^{[1]}$ comme :

$$u_i^\varepsilon \simeq u^{[1]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1$$

En explicitant les problèmes résolus par u_i^0 et u_i^1 , on montre que $u^{[1]}$ résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[1]} + k_i^2 u^{[1]} = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ u^{[1]} + \varepsilon \partial_n u^{[1]} - \varepsilon g = O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

En effet

$$u^{[1]} + \varepsilon \partial_n u^{[1]} - \varepsilon g = \varepsilon^2 \partial_n u_i^1 = O(\varepsilon^2)$$

Ceci suggère l'idée de négliger le terme en $O(\varepsilon^2)$ et de définir ainsi la condition aux limites approchée de type Robin sur Γ et par conséquent le problème approché suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.20)$$

La différence du cas $\varepsilon = 0$, est que on n'a pas $u^{[1]} = v_{[1]}^\varepsilon$. En effet, les solutions $u^{[1]}$ et $v_{[1]}^\varepsilon$ résolvent un même problème avec des seconds membres qui diffèrent d'une quantité $O(\varepsilon^2)$.

lemme 2.5 Soit $\Phi \in L^2(\Gamma)$; alors le problème

$$\begin{cases} \Delta v + k_i^2 v = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ v + \varepsilon \partial_n v = \Phi & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Possède une unique solution qui vérifie l'estimation a priori suivante :

$$\exists C \geq 0 \text{ telle que } \|v\|_{1,\Omega_i} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\Phi\|_{1,\Gamma}. \quad (2.21)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème Rellich et de l'alternative de Fredholm. ■

Proposition 2.6 On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (2.1) et la solution de (2.20) :

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}. \quad (2.22)$$

Démonstration. Soit $\phi = u^{[1]} - v_{[1]}^\varepsilon$. alors

$$\begin{cases} \Delta\phi + k_i^2\phi = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ \phi + \varepsilon\partial_n\phi = O(\varepsilon^2) \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Car

$$\phi + \varepsilon\partial_n\phi = u^{[1]} - v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon\partial_n(u^{[1]} - v_{[1]}^\varepsilon) = \underbrace{(u^{[1]} + \varepsilon\partial_n u^{[1]})}_{\varepsilon g + \varepsilon^2\partial_n u_i^1} - \underbrace{(v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon\partial_n v_{[1]}^\varepsilon)}_{\varepsilon g} = O(\varepsilon^2).$$

En utilisant l'estimation (2.21), nous obtenons alors

$$\|\phi\|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

La majoration du reste du développement asymptotique (2.18) donne :

$$\|u_i^\varepsilon - u^{[1]}\|_{1,\Omega_i} \leq C' \varepsilon^2.$$

Par conséquent

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\varepsilon$$

La perte d'une demi puissance de ε est due à l'estimation (2.22). ■

Remarque : Pour le problème (2.20) ne faisant pas intervenir la couche mince, il est aisé de construire le développement asymptotique de sa solution. Alors une meilleure méthode consiste à déterminer le développement de la fonction $v_{[1]}^\varepsilon$ et de le comparer avec celui obtenu au théorème 2.3.

Théorème 2.7 *On suppose que le second membre f_i et le bord du domaine Ω_i sont de classe C^∞ . Alors la solution $v_{[1]}^\varepsilon$ du problème (3.17) admet le développement asymptotique :*

$$v_{[1]}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n v_{[1]}^n. \quad (2.23)$$

où les $v_{[1]}^n$ ne dépendent pas du paramètre ε et sont construits à l'aide des équations (2.25) plus bas. Le développement (2.23) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\varepsilon) = v_{[1]}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_{[1]}^n,$$

satisfasse l'estimation optimale

$$\|r^N(\varepsilon)\|_{1,\Omega_i} \leq C_N \varepsilon^{N+1}. \quad (2.24)$$

Démonstration. En injectant l'ansatz polynomial (2.23) dans les équations (2.20) et en identifiant les termes de même puissance de ε , on obtient :

$$\begin{cases} (\Delta v_{[1].}^n + k_i^2 v_{[1].}^n) = \delta_0^n f_i & \text{dans } \Omega_i \\ v_{[1].}^n + \partial_n v_{[1].}^{n-1} = \delta_1^n g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.25)$$

Avec la convention $v_{[1].}^{-1} = 0$. L'estimation du reste se traite de la même manière que dans la preuve du théorème 3.2 du chapitre 3. Il est facile de voir que les premiers termes des développements (2.23) et le développement asymptotique de la solution u^ε du problème (2.1) coïncident pour $n = 0$ et $n = 1$. Mais pour les termes suivants $v_{[1].}^n$ et u_i^n pour $n \geq 2$ sont génériquement différents car les $v_{[1].}^n$ et u_i^n sont des solutions de problèmes différents si bien qu'on obtient une estimation optimale de la différence. ■

Théorème 2.8 *La différence entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (2.1) et celle du problème (2.20) avec condition aux limites généralisée d'ordre 1 est donnée par*

$$\| u_i^\varepsilon - v_{[1].}^\varepsilon \|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^2.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'estimation du reste (2.24) d'ordre 2 et l'estimations (2.18). ■

Condition d'ordre 2

On effectue la même étude que précédemment, en conservant les trois premiers termes du développement asymptotique. On suppose ici que $f_e = 0$ et $g = 0$. On pose

$$u^{[2]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2.$$

On vérifie aisément que $u^{[2]}$ est solution de :

$$\begin{cases} \Delta u^{[2]} + k_i^2 u^{[2]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u^{[2]} + \frac{\varepsilon}{2} (2 - \varepsilon c) \partial_n u^{[2]} = O(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Théorème 2.9 *Le problème avec condition d'impédance d'ordre 2 s'écrit*

$$\begin{cases} \Delta v_{[2].}^\varepsilon + k_i^2 v_{[2].}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[2].}^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} (2 - \varepsilon c) \partial_n v_{[2].}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.26)$$

On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (2.1) et la solution de (2.26) :

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^3$$

Démonstration. La preuve est la même que pour le théorème 2.8 : on effectue le développement asymptotique de $v_{[2]}^\varepsilon$, dont les trois premiers termes coïncident avec celui de u_i^ε . Les estimations des restes permettent de conclure. ■

2.3.2 Conditions équivalentes : cas Neumann

Condition d'ordre 0

De même on ne conserve qu'un seul terme dans le développement asymptotique de u^ε :

$$u^\varepsilon \approx u^{[0]} := u_i^0,$$

qui résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[0]} + K u^{[0]} = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n u^{[0]} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La condition de Neumann non homogène $\partial_n u^{[0]} = g$ sur Γ est toute fois inintéressante puisqu'elle ne prend pas en compte l'effet de la couche mince. Le théorème 2.3 donne l'erreur commise par l'approximation $u^\varepsilon \approx u^{[0]}$

$$\|u^{[0]} - u_i^0\|_{1,\Omega_i} \leq C\varepsilon.$$

Proposition 2.10 On note $v_{[0]}^\varepsilon$ la solution du problème suivant qui ne dépend pas de ε

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + K v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n v_{[0]}^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Alors on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ε) telle que

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\varepsilon.$$

Condition d'ordre 1

Conservons maintenant deux termes dans le développements :

$$u_i^\varepsilon \simeq u^{[1]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1$$

En explicitant les problèmes résolus par u_i^0 , on montre que $u^{[1]}$ résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[1]} + k_i^2 u^{[1]} = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n u^{[1]} - \varepsilon \partial_t^2 u^{[1]} - k_e^2 \varepsilon u^{[1]} = O(\varepsilon^2) - \varepsilon \int_{[0,1]} F_e^0(t, y) dy & + g \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

En effet

$$\partial_n u^{[1]} - \varepsilon \partial_t^2 u^{[1]} - k_e^2 \varepsilon u^{[1]} = \varepsilon^2 \partial_t^2 u_i^1 - \varepsilon^2 k_e^2 u_i^1 - \varepsilon F_e^0(t) + g.$$

Théorème 2.11 *Le problème avec condition d'impédance d'ordre 1 s'écrit :*

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n v_{[1]}^\varepsilon - \varepsilon \partial_t^2 v_{[1]}^\varepsilon - \varepsilon k_e^2 v_{[1]}^\varepsilon \\ = -\varepsilon \int_{[0,1]} F_e^0(t, y) dy & + g \text{ sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.27)$$

Si on suppose que $f_i \in C^\infty(\Omega_i)$, alors la solution $v_{[1]}^\varepsilon$ du problème (2.27) admet le développement asymptotique :

$$v_{[1]}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n v_{[1]}^n. \quad (2.28)$$

Les termes $v_{[1]}^n$ ne dépendent pas de ε et sont construits à l'aide des équations (2.30) plus bas. Le développement (2.28) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\varepsilon) = v_{[1]}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_{[1]}^n.$$

Satisfasse l'estimation optimale

$$\|r^N(\varepsilon)\|_{1, \Omega_i} \leq C_N \varepsilon^{N+1}. \quad (2.29)$$

De plus la différence entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (2.1) et celle du problème (2.27) avec condition aux limites généralisée d'ordre 1. Donnée par

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1, \Omega_i} \leq C \varepsilon^2$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème 2.7 avec :

$$\begin{cases} (\Delta v_{[1].}^n + k_i^2 v_{[1].}^n) = \delta_0^n f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n v_{[1].}^0 = g & \text{sur } \Gamma \\ -\partial_n v_{[1].}^{n+1} + k_e^2 v_{[1].}^n + \partial_t^2 v_{[1].}^n = \delta_0^n \mathcal{F} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.30)$$

tel que $\mathcal{F} = \int_{[0,1]} F_e^0(t, y) dy$. ■

Condition d'ordre 2

De façon similaire on ne conserve ici que les trois premiers termes du développement asymptotique :

$$u^{[2]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2.$$

On suppose que $f_e = g = 0$ et en explicitant les problèmes résolus par u_i^0 , u_i^1 et u_i^2 , on montre facilement que $u^{[2]}$ résout le problème :

$$\begin{cases} \Delta u^{[2]} + k_i^2 u^{[2]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u^{[2]} = \frac{\varepsilon}{2} (c\varepsilon + 2) \partial_t^2 u^{[2]} + \frac{\varepsilon}{2} k_e^2 (2 - c\varepsilon) u^{[2]} - \frac{1}{2} c' \varepsilon^2 \partial_t u^{[2]} + O(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Théorème 2.12 On note $v_{[2].}^\varepsilon$ la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta v_{[2].}^\varepsilon + k_i^2 v_{[2].}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n v_{[2].}^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} k_e^2 (2 - c\varepsilon) v_{[2].}^\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} (c\varepsilon + 2) \partial_t^2 v & \\ -\frac{1}{2} c' \varepsilon^2 \partial_t v_{[2].}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.31)$$

Alors on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ε) telle que

$$\| u_i^\varepsilon - v_{[2].}^\varepsilon \|_{1, \Omega_i} \leq C \varepsilon^3.$$

Démonstration. La preuve est la même que pour le théorème 2.8 : on effectue le développement asymptotique de $v_{[2].}^\varepsilon$, dont les trois premiers termes coïncident avec celui de u_i^ε .

Les estimations des restes permettent de conclure. ■

2.4 Cas où la perméabilité magnétique dépendante de l'épaisseur

Jusqu'à présent, on a supposé la perméabilité magnétique constante, indépendante de l'épaisseur. On veut s'intéresser maintenant au cas où la perméabilité magnétique dépend de l'épaisseur. Précisément, on suppose que la perméabilité magnétique dans la couche mince varie comme $\varepsilon^{-1}p_e$, et vaut p_i dans le domaine intérieur Ω_i .

La technique développée dans les paragraphes précédents s'applique encore dans cette situation. La seule différence réside dans le décalage d'une puissance de ε pour les opérateurs dans la couche. On obtient alors une famille des problèmes indépendants de ε couplés par leurs conditions sur Γ :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^n = F_e^{n-2}(t)y^{n-2} - k_e^2 U_e^{n-1} - \sum_{\substack{\ell+p=n \\ p \geq 1, \ell \geq 0}} A_p U_e^\ell & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^n = \partial_n u_i^{n-1} - \delta_1^n g(\gamma(t)) & \text{pour } y = 0, \\ U_e^n = 0 \text{ ou } \partial_y U_e^n = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

(δ désigne le symbole de Kronecker et on pose $F_e^{-2} = F_e^{-1} = u_i^{-1} = U_e^{-2} = U_e^{-1} = 0$).

2.4.1 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet

Un calcul similaire que précédemment, permet de vérifier facilement que u_i^0 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^0 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Et le terme de rang 1 u_i^1 est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^1 = -\partial_n u_i^0 + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 2 Sans perdre de généralité on suppose ici que $f_e = g = 0$. On

a

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = -k_e^2 \partial_n u_i^0 (y-1) - c \partial_n u_i^0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que

$$U_e^2(t; y) = (y - 1) \partial_n u_i^1 - \frac{1}{6} k_e^2 \partial_n u_i^0 (y^3 - 3y^2 + 2) - \frac{1}{2} c \partial_n u_i^0 (y^2 - 1).$$

Par conséquent u_i^2 vérifie le problème

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^2 = -\partial_n u_i^1 - \frac{1}{3} k_e^2 \partial_n u_i^0 + \frac{1}{2} c \partial_n u_i^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.4.2 Calcul des premiers termes : cas Neumann

Termes de rang 0 L'équation (2.32) donne :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Comme $U_e^0(t, y)$ résout un problème unidimensionnel homogène de Neumann nous obtenons que $U_e^0(t, y) = \beta_0(t)$. De façon similaire, pour déterminer $U_e^0(t, y)$, on fait appel aux termes de rang 1

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = -k_e^2 \beta_0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}.$$

On vérifie aisément que u_i^0 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ -\partial_n u_i^0 + k_e^2 u_i^0 = -g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Termes de rang 1 pour $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = -k_e^2 \beta_0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Alors

$$U_e^1(t, y) = -\frac{1}{2} k_e^2 \beta_0 (y^2 - 2y) + \beta_1.$$

On effectue la même étude que précédemment, pour déterminer la fonction $\beta_1(t) = U_e^1(t, 0)$. On calcule le terme de rang 2

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = c k_e^2 \beta_0 (y-1) - \partial_t^2 \beta_0 + \frac{1}{2} k_e^4 \beta_0 (y^2 - 2y) - k_e^2 \beta_1 + F_e^0(t) & \text{dans } 0 \leq y \leq 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Alors u_i^1 vérifie sur Γ

$$-\partial_n u_i^1 + k_e^2 u_i^1 = -\frac{1}{2} c k_e^2 u_i^0 - \partial_t^2 u_i^0 - \frac{1}{3} k_e^4 u_i^0 + \int_{(0,1)} F_e^0(t, \mu) d\mu.$$

Par conséquent, u_i^1 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_e^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ -\partial_n u_i^1 + k_e^2 u_i^1 = -\frac{1}{2} c k_e^2 u_i^0 - \partial_t^2 u_i^0 - \frac{1}{3} k_e^4 u_i^0 + \int_{(0,1)} F_e^0(t, \mu) d\mu & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Dans ce qui suit, on supposera, pour simplifier, que $f_e \equiv 0$.

Termes de rang 2 Pour $n = 2$, on a

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = c k_e^2 u_i^0 (y-1) - \partial_t^2 u_i^0 + \frac{1}{2} k_e^4 u_i^0 (y^2 - 2y) - k_e^2 u_i^1 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Si bien que $U_e^2(t, y)$ résout un problème unidimensionnel et on a

$$\begin{aligned} U_e^2(t, y) - U_e^2(t, 0) &= c k_e^2 u_i^0 \left[\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} y \right] - \partial_t^2 u_i^0 \left[\frac{1}{2} y^2 - y \right] \\ &+ \frac{1}{2} k_e^4 u_i^0 \left[\frac{1}{12} y^4 - \frac{1}{3} y^3 + \frac{2}{3} y \right] - k_e^2 u_i^1 \left[\frac{1}{2} y^2 - y \right] \end{aligned}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, on utilise le terme de rang 3 pour déterminer $U_e^2(t, 0)$:

$$\partial_y^2 U_e^3 = -k_e^2 U_e^2 - c \partial_y U_e^2 - (\partial_t^2 - y c^2 \partial_y) U_e^1 - (c^3 y^2 \partial_y - c' y \partial_t - 2cy \partial_t^2) U_e^0.$$

En intégrant sur $[0, 1]$, on obtient

$$\begin{aligned} -\partial_n u_i^2 + k_e^2 u_i^2 &= \left[-\frac{1}{12} k_e^6 - \frac{1}{3} c k_e^4 \right] u_i^0 - \frac{2}{3} k_e^2 \partial_t^2 u_i^0 - \frac{1}{3} k_e^4 u_i^1 \\ &+ \frac{1}{2} c \partial_t^2 u_i^0 - \frac{1}{2} c k_e^2 u_i^1 - \partial_t^2 u_i^1 + \frac{1}{2} c' \partial_t u_i^0. \end{aligned}$$

Par conséquent, u_i^2 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ -\partial_n u_i^2 + k_e^2 u_i^2 = \left[-\frac{1}{12} k_e^6 - \frac{1}{3} c k_e^4 \right] u_i^0 - \frac{2}{3} k_e^2 \partial_t^2 u_i^0 - \frac{1}{3} k_e^4 u_i^1 + \frac{1}{2} c \partial_t^2 u_i^0 \\ -\frac{1}{2} c k_e^2 u_i^1 - \partial_t^2 u_i^1 + \frac{1}{2} c' \partial_t u_i^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.5 Conditions aux limites approchées

Après avoir calculé les premiers termes, on en déduit immédiatement les problèmes avec conditions aux limites approchées dans les deux cas Dirichlet et Neumann.

2.5.1 Conditions équivalentes : cas Dirichlet

Condition d'ordre 0

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[0]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 1

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 2

$$\begin{cases} \Delta v_{[2]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[2]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[2]}^\varepsilon = -\varepsilon \partial_n v_{[2]}^\varepsilon - \frac{1}{3} k_e^2 \varepsilon^2 \partial_n v_{[2]}^\varepsilon + \frac{1}{2} c \varepsilon^2 \partial_n v_{[2]}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

2.5.2 Conditions équivalentes : cas Neumann

Condition d'ordre 0

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ -\partial_n v_{[0]}^\varepsilon + k_e^2 v_{[0]}^\varepsilon = -g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 1

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ -\partial_n v_{[1]}^\varepsilon + k_e^2 v_{[1]}^\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} c k_e^2 v_{[1]}^\varepsilon - \varepsilon \partial_t^2 v_{[1]}^\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} k_e^4 v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \int_{(0,1)} F_e^0(t, \mu) d\mu - g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Condition d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_{[2]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[2]}^\varepsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ -\partial_n v_{[2]}^\varepsilon + k_e^2 v_{[2]}^\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} c k_e^2 v_{[2]}^\varepsilon - \varepsilon \partial_t^2 v_{[2]}^\varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} k_e^4 v_{[2]}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{12} (k_e^6 + 4ck_e^4) v_{[2]}^\varepsilon, \\ -\frac{\varepsilon^2}{3} k_e^2 \partial_t^2 v_{[2]}^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} c \partial_t^2 v_{[2]}^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} c' \partial_t v_{[2]}^\varepsilon, \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Remarque : La même analyse que précédemment permet d'obtenir les estimations optimales suivantes dans les deux cas Dirichlet et Neumann

$$\begin{aligned} \left\| u_i^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_i} &\leq C \varepsilon \\ \left\| u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_i} &\leq C \varepsilon^2 \\ \left\| u_i^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon \right\|_{1, \Omega_i} &\leq C \varepsilon^3 \end{aligned}$$

Chapitre 3

Conditions aux limites approchées en dimension 3

Ce chapitre est une extension du chapitre précédent au cas tridimensionnel. Le principe de construction des conditions aux limites approchées développée dans le chapitre précédent s'applique encore dans ce chapitre. La démarche qui suit est inspirée de [19] , [11], [14]

3.1 Présentation du problème

Soit Ω_i un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$. Le bord de Ω_i est noté Γ , supposé régulier. La couche mince Ω_e^ε qui entoure le domaine Ω_i est d'épaisseur uniforme ε , ε étant un paramètre positif destiné à tendre vers 0. Elle est définie par

$$\Omega_e^\varepsilon = \{x \in \Omega_i, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$$

On désigne par $\Omega^\varepsilon = \Omega_i \cup \Omega_e^\varepsilon \cup \Gamma$ le domaine complet dont le bord est noté Γ_e^ε (Voir Fig(2.1)). Dans un premier temps, comme le chapitre 2, on se place dans le cas où la perméabilité magnétique de la couche mince est indépendante du paramètre ε . On s'intéresse au problème de transmission suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\varepsilon + k_e^2 u_e^\varepsilon = f_e \text{ dans } \Omega_e^\varepsilon, \\ \partial_n u_i^\varepsilon = \partial_n u_e^\varepsilon + g \text{ sur } \Gamma, \\ u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \text{ sur } \Gamma, \\ u_e^\varepsilon = 0 \text{ (Dirichlet) ou } \partial_n u_e^\varepsilon = 0 \text{ (Neumann) sur } \Gamma_e^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Remarque : Nous gardons les mêmes notations que dans le chapitre 2, à savoir V est l'espace $H^1(\Omega^\varepsilon)$ ou $H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ et V^* l'espace dual de V .

Le problème (3.1) est bien posé, de plus il existe une constante M indépendante de $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, telle que

$$\|u^\varepsilon\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq M \|L\|_{V^*}. \quad (3.2)$$

La démonstration est similaire à celle du théorème 2.1 du chapitre 2.

3.2 Construction du développement asymptotique

L'objet de cette section est la description du procédé algorithmique de construction des termes du développement asymptotique de la solution du problème.

3.2.1 Système d'équations mises à l'échelle

Le domaine $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ varie avec ε . Par conséquent, les u^ε appartiennent à des espaces fonctionnels différents et donc on ne peut pas les comparer entre eux directement. Pour cela, on écrit la couche mince sous forme tensorielle grâce aux coordonnées locales. Afin de se ramener à une géométrie fixe, nous effectuons une dilatation normale de la couche de rapport ε^{-1} .

Commençons par écrire l'expression du Laplacien en coordonnées locales. On a

$$\nabla = R_s \nabla_\Gamma + \partial_s n, \quad (3.3)$$

où ∇_Γ est l'opérateur gradient surfacique sur Γ . De plus, si on pose

$$J_s = \det(I + sC) = 1 + 2sH + s^2G,$$

alors avec la formule d'intégration par parties et (3.3), on obtient

$$\Delta = \frac{1}{J_s} \operatorname{div}_\Gamma (R_s J_s R_s) \nabla_\Gamma + \frac{1}{J_s} \partial_s J_s \partial_s. \quad (3.4)$$

Soit Λ un opérateur tangentiel indépendant de s défini par

$$I_\Gamma + s\Lambda = J_s R_s \text{ tel que } C\Lambda = I_\Gamma G.$$

Par conséquent, l'identité (3.4) peut être transformée en

$$\Delta = \frac{1}{J_s} \operatorname{div}_\Gamma \left(\frac{1}{J_s} (I_\Gamma + s\Lambda)^2 \right) \nabla_\Gamma + \frac{1}{J_s} \partial_s J_s \partial_s, \quad (3.5)$$

ou sous une forme équivalente

$$J_s^3 \Delta = J_s \operatorname{div}_\Gamma (I_\Gamma + s\Lambda)^2 \nabla_\Gamma - \nabla_\Gamma J_s \cdot (I_\Gamma + s\Lambda)^2 \nabla_\Gamma + J_s^3 \partial_s^2 + 2J_s^2 (H + sG) \partial_s.$$

Soit Q un opérateur défini dans la couche mince par :

$$Q = J_s^3 \Delta + J_s^3 k_e^2.$$

Nous allons utiliser le changement de variable

$$(x_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, \varepsilon] \longrightarrow (x_\Gamma, s) \in \Gamma \times [0, 1], \quad s = \varepsilon y. \quad (3.6)$$

lemme 3.1 Dans les coordonnées (x_Γ, y) , Q prend la forme :

$$Q = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\ell=0}^{\ell=8} \varepsilon^\ell A_\ell,$$

où les A_ℓ sont des opérateurs différentiels indépendants de ε . En particulier

$$\begin{aligned} A_0 &= \partial_y^2, \\ A_1 &= 6Hy\partial_y^2 + 2H\partial_y, \\ A_2 &= 3(G + 4H^2)y^2\partial_y^2 + k_e^2 + 2(G + 4H^2)y\partial_y + \Delta_\Gamma, \\ A_3 &= 4H(3G + 2H^2)y^3\partial_y^2 + 6Hyk_e^2 + 4H(3G + 2H^2)y^2\partial_y - 2y[\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] \\ &\quad + 2y[\operatorname{div}_\Gamma(\Lambda \nabla_\Gamma) + H\Delta_\Gamma]. \end{aligned}$$

Démonstration. Vérification immédiate à l'aide de la formule (3.5). ■

Soient U_e^ε et F_e les fonctions définies sur Ω_e^ε par

$$u_e^\varepsilon(x_\Gamma, s) = U_e^\varepsilon(x_\Gamma, y), \quad F_e(x_\Gamma, y) = f_e(x_\Gamma, \varepsilon y) \quad (x_\Gamma, y) \in \Gamma \times (0, 1)$$

Dans les nouvelles coordonnées (semi-dilatées), le problème de transmission (3.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\sum_{\ell=0}^{\ell=8} \varepsilon^\ell A_\ell U_e^\varepsilon \right] = J_{\varepsilon y}^3 F_e \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon, \\ \partial_s u_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_y U_e^\varepsilon + g \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_i^\varepsilon = U_e^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma, \\ U_e^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon \quad \text{ou} \quad \partial_y^\varepsilon U_e^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Le petit paramètre apparaît maintenant dans les équations et non plus dans la géométrie du problème. On suppose que F_e est suffisamment régulière ce qui permet d'écrire son développement de Taylor au voisinage de Γ comme suit :

$$F_e(x_\Gamma, y) = \sum_{\ell=1}^{\ell=N} \varepsilon^\ell F_e^\ell(x_\Gamma) y^\ell + O(\varepsilon^{N+1})$$

3.2.2 Les problèmes élémentaires

Pour construire un développement asymptotique de u^ε lorsque ε tend vers zéro, on effectue un Ansatz dans la couche mince Ω_e^ε du type

$$U_e^\varepsilon(x_\Gamma, y) = U_e^0(x_\Gamma, y) + \varepsilon U_e^1(x_\Gamma, y) + \dots + \varepsilon^n U_e^n(x_\Gamma, y) + \dots \quad (3.8)$$

et on pose dans Ω_i

$$u_i^\varepsilon(x) = u_i^0(x) + \varepsilon u_i^1(x) + \varepsilon^2 u_i^2(x) + \dots + \varepsilon^n u_i^n(x) + \dots \quad (3.9)$$

On substitue l'Ansatz (3.8) et (3.9) dans (3.7) puis on identifie les termes selon les puissances de ε . On obtient une famille de problèmes indépendants de ε couplés par leurs conditions sur Γ :

$$\begin{cases} \sum_{p \in [0,8] \cap \mathbb{N}}^{\ell+p=n} A_p U_e^\ell = F_e^{n-2}(x_\Gamma) y^{n-2} \quad \ell \geq 0, \quad n \geq 0 \text{ pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^n = \partial_n u_i^{n-1} - \delta_1^n g \text{ pour } y = 0, \\ U_e^n = 0 \text{ ou } \partial_y U_e^n = 0 \text{ pour } y = 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \Delta u_i^n + k_i^2 u_i^n = \delta_0^n f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ u_i^n = U_e^n \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.11)$$

Où δ est le symbole de Kronecker, on pose $F_e^{-2} = F_e^{-1} = u_i^{-1} = U_e^{-2} = U_e^{-1} = 0$

3.2.3 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet

Termes de rang 0 Pour $n = 0$ les équations (3.10) et (3.11) donnent :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 \text{ pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 \text{ pour } y = 0, \\ U_e^0 = 0 \text{ pour } y = 1. \end{cases}$$

Si bien que $U_e^0 = 0$ et u_i^0 est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 1

À l'ordre 1, le problème extérieur s'écrit.

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne alors

$$U_e^1(x_\Gamma, y) = (\partial_n u_i^0 - g)(y - 1)$$

Par conséquent, u_i^1 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ u_i^1 = -\partial_n u_i^0 + g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Termes de rang 2

Le terme extérieur U_e^2 résout le problème :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 = F_e^0(x_\Gamma) - 2H (\partial_n u_i^0 - g) & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1, \end{cases}$$

qui après résolution donne :

$$U_e^2 = \frac{1}{2} (y^2 - 1) F_e^0(x_\Gamma) - H (\partial_n u_i^0 - g) (y^2 - 1) + (y - 1) \partial_n u_i^1$$

En vertu de (3.11), u_i^2 est alors solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i. \\ u_i^2 = -\frac{1}{2} F_e^0(x_\Gamma) + H (\partial_n u_i^0 - g) - \partial_n u_i^1 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

3.2.4 Calcul des premiers termes : cas NeumannTermes de rang 0

En vertu de l'équation (3.10), U_e^0 résout le problème unidimensionnel homogène de Neumann suivant :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Alors U_e^0 est une fonction indépendante de la variable y notée $\beta_0(x_\Gamma)$, qu'on pourra déterminer en utilisant le terme de rang 1 :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1 \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 0 \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1 \end{cases}$$

Les équations ci-dessus montrent que

$$\partial_y U_e^1(x_\Gamma, 1) - \partial_y U_e^1(x_\Gamma, 0) = 0.$$

Ce qui donne

$$\partial_n u_i^0 = g.$$

D'où u_i^0 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_n u_i^0 = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.12)$$

Grâce à la condition de continuité à travers $\Gamma(u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \text{ sur } \Gamma)$ et l'unicité de la solution du problème (3.12), $\beta_0(x_\Gamma)$ est déterminée comme $\beta_0(x_\Gamma) = u_i^0|_\Gamma = u_i^0(x_\Gamma, 0)$.

Termes de rang 1

Pour $n = 1$, l'équation (3.10) donne

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Noter ici que $U_e^1(x_\Gamma, y)$ est une solution d'un problème unidimensionnel homogène de Neumann. La résolution donne $U_e^1(x_\Gamma, y) = \beta_1(x_\Gamma)$, où β_1 est une fonction indépendante de la variable y . Pour la déterminer, on fait appel aux termes de rang 2 :

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 + k_e^2 u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 = F_e^0(x_\Gamma) & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

En intégrant sur $[0; 1]$, on obtient

$$\partial_n u_i^1 = k_e^2 u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 - F_e^0(x_\Gamma).$$

D'où u_i^1 est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + K_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u_i^1 = k_e^2 u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 - F_e^0(x_\Gamma) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.13)$$

L'unicité de la solution du problème (3.13) et la condition de continuité à travers $\Gamma(u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \text{ sur } \Gamma)$ permet de définir $\beta_1(x_\Gamma)$ comme $\beta_1(x_\Gamma) = u_i^1|_\Gamma = u_i^1(x_\Gamma, 0)$

Termes de rang 2

Pour $n = 2$, l'équation (3.10) donne

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 + k_e^2 \beta_0 + \Delta_\Gamma \beta_0 = F_e^0(x_\Gamma) & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$U_e^2(x_\Gamma, y) = \frac{1}{2} (2y - y^2) (F_e^0(x_\Gamma) - k_e^2 \beta_0 - \Delta_\Gamma \beta_0) + U_e^2(x_\Gamma, 0).$$

Pour avoir $U_e^2(x_\Gamma, 0)$, on fait appel aux termes de rang 3

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^3 + 6Hy \partial_y^2 U_e^2 + 2H \partial_y U_e^2 + k_e^2 \beta_1 + \Delta_\Gamma \beta_1 \\ + 2y [3Hk_e^2 - \nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma + \text{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) + H \Delta_\Gamma] \beta_0 = F_e^1(x_\Gamma) y & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^3 = \partial_n u_i^2 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^3 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

En intégrant sur $[0; 1]$ on obtient

$$\partial_n u_i^2 = \Delta_\Gamma \beta_1 + k_e^2 \beta_1 - 3H \Delta_\Gamma \beta_0 - H k_e^2 \beta_0 - [\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] \beta_0 + \text{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) \beta_0 + 4H F_e^0(x_\Gamma) - \frac{1}{2} F_e^1(x_\Gamma)$$

Par conséquent, u_i^2 résout le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + K_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u_i^2 = \Delta_\Gamma \beta_1 + k_e^2 \beta_1 - 3H \Delta_\Gamma \beta_0 - H k_e^2 \beta_0 - [\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] \beta_0 \\ + \text{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) \beta_0 + 4H F_e^0(x_\Gamma) - \frac{1}{2} F_e^1(x_\Gamma) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.14)$$

L'unicité de la solution du problème (3.14) et la condition de continuité à travers $\Gamma(u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \text{ sur } \Gamma)$ permet de définir $U_e^2(x_\Gamma, 0)$ comme $U_e^2(x_\Gamma, 0) = u_i^2|_\Gamma = u_i^2(x_\Gamma, 0)$

3.2.5 Le développement complet : estimation du reste

Le procédé décrit dans le paragraphe précédent peut être poursuivi à tout ordre, pourvu que les données soient suffisamment régulières. Il permet l'obtention du développement asymptotique de la solution u^ε du problème. On peut aussi estimer l'erreur commise en tronquant la série à un nombre fini de termes. Ceci est illustré dans le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Si $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega_i})$, f_e est la restriction à Ω_e^ε d'une fonction de $C^\infty(\overline{\Omega_e^{\varepsilon_0}})$, $g \in C^\infty(\Gamma)$ et Γ est une courbe de classe C^∞ , on peut construire la suite (u_i^n, U_e^n) – indépendante de ε – définie par les équations (3.10) et (3.11). La solution u^ε du problème (3.1) admet alors le développement asymptotique :*

$$u^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u^n \quad \text{où} \quad u^n|_{\Omega_i} = u_i^n \text{ et } u^n|_{\Omega_e^\varepsilon} = U_e^n(x_\Gamma, \frac{s}{\varepsilon}),$$

En définissant le reste d'ordre N comme la différence entre la solution exacte et la série tronquée :

$$r_\varepsilon^N = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u^n,$$

on a l'estimation suivante, où C_N ne dépend pas de $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega_i} + \sqrt{\varepsilon} \|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega_e^\varepsilon} \leq C_N \varepsilon^{N+1}. \quad (3.15)$$

Démonstration. Si les seconds membres f_i et f_e sont des classes C^∞ , alors les problèmes (3.10) et (3.11) sont bien posés dans H^1 . Analysons maintenant le reste r_N . Par construction, les premiers termes de Q à l'extérieur s'annulent

$$\begin{aligned} Q(r_{\varepsilon,e}^N) &= f_e - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n Q(U_e^n) = f_e - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-2} (A_0 U_e^n + \varepsilon A_1 U_e^n + \varepsilon^2 A_1 U_e^n + \cdots + \varepsilon^8 A_8 U_e^n) \\ &= f_e - A_0 \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-2} U_e^n + A_1 \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-1} U_e^n + \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n A_1 U_e^n + \cdots + A_8 \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-6} U_e^n \\ &= f_e - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-2} \sum_{\ell+p=n} A_p U_e^\ell. \end{aligned}$$

En utilisant (3.10), on obtient :

$$= f_e - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^{n-2} F_e^{n-2}(x_\Gamma) y^{n-2} = O(\varepsilon^{N-1}) \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon.$$

De même pour les dérivées normales

$$\partial_n r_{\varepsilon,i}^N - \partial_n r_{\varepsilon,e}^N = \partial_n (u_i^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u_i^n) - \partial_n (u_e^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u_e^n) = \partial_n u_i^\varepsilon - \partial_n u_e^\varepsilon + \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n (\partial_n u_e^n - \partial_n u_i^n),$$

selon (3.10), on a

$$\sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n (\partial_n u_e^n - \partial_n u_i^n) = \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n [(\partial_n u_i^{n-1} - \delta_1^n g) - \partial_n u_i^n] = -g + \varepsilon^N \partial_n u_i^N,$$

d'où

$$\partial_n r_{\varepsilon,i}^N - \partial_n r_{\varepsilon,e}^N = O(\varepsilon^N).$$

Sur Γ_e^ε , (3.10) donne

$$r_{\varepsilon,e}^N = u_e^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u_e^n = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon,$$

alors,

$$\partial_n r_{\varepsilon,e}^N = \partial_n u_e^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n \partial_y u_e^n = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon.$$

Pour la partie intérieure dans Ω_i :

$$\Delta r_{\varepsilon,i}^N + k_i^2 r_{\varepsilon,i}^N = \Delta (u_i^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u_i^n) + k_i^2 (u_i^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n u_i^n) = \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n (\Delta u_i^n + k_i^2 u_i^n).$$

Selon (3.11), on a

$$\Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n (\Delta u_i^n + k_i^2 u_i^n) = f_i - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n \delta_0^n \quad f_i = 0.$$

Ainsi r_ε^N vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta r_{\varepsilon,i}^N + k_i^2 r_{\varepsilon,i}^N = 0 \text{ dans } \Omega_i, \\ Q r_{\varepsilon,e}^N = O(\varepsilon^{N-1}) \text{ dans } \Omega_e^\varepsilon, \\ \partial_n r_{\varepsilon,i}^N - \partial_n r_{\varepsilon,e}^N = O(\varepsilon^N) \text{ sur } \Gamma, \\ r_{\varepsilon,i}^N = r_{\varepsilon,e}^N \text{ sur } \Gamma, \\ r_{\varepsilon,e}^N = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon, \\ \partial_n r_{\varepsilon,e}^N = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon. \end{cases}$$

L'estimation à priori (3.2) permet de déduire que

$$\|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega^\varepsilon} \leq M O(\varepsilon^{N-1}) \Rightarrow \|r_{\varepsilon,i}^N\|_{1,\Omega^\varepsilon} = O(\varepsilon^{N-1}).$$

Afin d'obtenir la majoration annoncée, il suffit d'écrire

$$r_\varepsilon^N = r_\varepsilon^{N+2} + \varepsilon^{N+1} u^{N+1} + \varepsilon^{N+2} u^{N+2}.$$

À l'intérieur, les u_i^{N+p+1} sont réguliers sur Ω_i et de plus Ω_i est bornés. Alors

$$M_N = \sup_{p \geq 0} \|u_i^{N+p+1}\|_{1, \Omega_i} < +\infty,$$

donc par l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\|r_{\varepsilon, i}^N\|_{1, \Omega_i} \leq \varepsilon^{N+1} M_N \frac{1}{1 - \varepsilon} \leq \varepsilon^{N+1} M'_N.$$

Pour la partie extérieure, l'utilisation de la variable semi-dilatées donne :

$$R_e^N = U_e^\varepsilon - \sum_{n=0}^{n=N} \varepsilon^n U_e^n,$$

de même par l'inégalité triangulaire on obtient

$$\|R_e^N\|_{1, \Omega_\varepsilon} \leq \varepsilon^{N+1} M''_N.$$

De plus

$$\|U_e^{N+p+1}\|_{1, \Omega_\varepsilon}^2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_e} (|U_e^{N+p+1}(x_\Gamma, y)|^2 + |\nabla U_e^{N+p+1}|^2) d\Gamma dy.$$

Par conséquent

$$\sqrt{\varepsilon} \|r_{\varepsilon, e}^N\|_{1, \Omega_\varepsilon} = \|R_e^N\|_{1, \Omega_\varepsilon}$$

Cela prouve l'estimation de théorème 3.2. ■

3.3 Conditions aux limites approchées

L'objet de ce paragraphe consiste à identifier les conditions aux limites approchées qui vont modéliser l'effet de la couche mince. Le principe de construction est le même que dans le cas bidimensionnel : l'idée consiste à approcher u^ε par la série donnant son développement asymptotique tronquée à un ordre donné, la condition vérifiée par cette approximation sur Γ fournissant la condition aux limites approchée recherchée. En outre les estimations du théorème 3.2 permettent, de prouver des estimations optimales de l'erreur commise.

3.3.1 Conditions équivalentes : cas Dirichlet

Condition d'ordre 0

Nous approchons u^ε par $u^\varepsilon \approx u^{[0]} = u_i^0$, qui résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[0]} + k_i^2 u^{[0]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u^{[0]} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le théorème 3.2 permet d'estimer l'erreur commise

$$\| u^{[0]} - u_i^0 \|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon.$$

Proposition 3.3 *On note $v_{[0]}^\varepsilon$ la solution du (3.16) (ne dépend pas de ε)*

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[0]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.16)$$

Alors on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ε) telle que :

$$\| u_i^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon \|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon.$$

Condition d'ordre 1

Plus intéressant si nous approchons u^ε par

$$u_i^\varepsilon \simeq u^{[1]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1.$$

Par conséquent $u^{[1]}$ vérifie

$$\begin{cases} \Delta u^{[1]} + k_i^2 u^{[1]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u^{[1]} = -\varepsilon \partial_n u^{[1]} + \varepsilon g + O(\varepsilon^2) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Il s'agit d'une condition aux limites mixte de type Robin, qui nous conduit à considérer le problème

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[1]}^\varepsilon + \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\varepsilon = \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.17)$$

Théorème 3.4 *On suppose que la courbe Γ définissant le bord du domaine Ω_i et le second membre f_i et sont de classe C^∞ . Alors, la solution $v_{[1]}^\varepsilon$ du problème (3.17) admet le développement asymptotique :*

$$v_{[1]}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n v_{[1]}^n. \quad (3.18)$$

Les termes $v_{[1]}^n$ ne dépendent pas du paramètre ε et sont construits à l'aide des équations (3.20) plus bas. Le développement (3.18) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\varepsilon) = v_{[1]}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_{[1]}^n,$$

satisfasse l'estimation optimale

$$\|r^N(\varepsilon)\|_{1,\Omega_i} \leq C_N \varepsilon^{N+1}. \quad (3.19)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du théorème 2.7.

$$\begin{cases} (\Delta v_{[1]}^n + k_i^2 v_{[1]}^n) = \delta_0^n f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[1]}^n + \partial_n v_{[1]}^{n-1} = \delta_1^n g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.20)$$

■

Théorème 3.5 *La différence entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (3.1) et celle du problème (3.17) avec condition aux limites généralisée d'ordre 1 est donnée par*

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^2.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'estimation du reste (3.19) d'ordre 2 et l'estimations (3.15). ■

Condition d'ordre 2

On effectue la même étude que précédemment, en approchant u^ε par

$$u^{[2]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2.$$

Pour simplifier, on suppose ici que $g = f_e = 0$. On vérifie aisément, que $u^{[2]}$ est solution de

$$\begin{cases} \Delta u^{[2]} + k_i^2 u^{[2]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ u^{[2]} + \varepsilon(1 - \varepsilon H) \partial_n u^{[2]} = O(\varepsilon^3) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Proposition 3.6 *Le problème avec condition d'impédance d'ordre 2 s'écrit*

$$\begin{cases} \Delta v_{[2]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[2]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[2]}^\varepsilon + \varepsilon (1 - \varepsilon H) \partial_n v_{[2]}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.21)$$

On a l'estimation suivante entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (3.1) et la solution de (3.21)

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[2]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C \varepsilon^3.$$

Démonstration. La preuve de l'estimation est la même que pour l'estimation de la condition aux limites généralisée d'ordre 1 : on effectue le développement asymptotique de $v_{[2]}^\varepsilon$ dont les trois premiers termes coïncident avec ceux de u_i^ε . Les estimations des restes permettent de conclure. ■

3.3.2 Conditions équivalentes : cas Neumann

Condition d'ordre 0

La condition d'ordre 0 s'obtient en approchant la solution exacte sur Ω_i^ε du problème par son développement asymptotique à l'ordre 0. Cette condition est en fait naturelle elle consiste à enlever tout simplement la couche mince. On considère

$$u^\varepsilon \approx u^{[0]} = u_i^0,$$

qui résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[0]} + k_i^2 u^{[0]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u^{[0]} = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

La condition de Neumann non homogène $\partial_n u^{[0]} = g$ sur Γ est toutefois inintéressante puisqu'elle ne prend pas en compte l'effet de la couche mince. L'estimation théorème 3.2 donne l'erreur commise par l'approximation

$$\|u^{[0]} - u_i^0\|_{1,\Omega_i} \leq C\varepsilon.$$

Proposition 3.7 *On note $v_{[0]}^\varepsilon$ la solution du problème suivant qui ne dépend pas de ε*

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\varepsilon + k_i^2 v_{[0]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n v_{[0]}^\varepsilon = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ε) telle que

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[0]}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} \leq C\varepsilon.$$

Condition d'ordre 1

La condition d'ordre 0 n'est satisfaisante que lorsque l'épaisseur de la couche devient presque nulle, il nous faut donc aller plus loin dans notre développement pour aboutir à des conditions d'ordres supérieurs plus utiles qui font intervenir l'effet de la couche. On conserve deux termes dans le développement : définissons $u^{[1]}$ comme :

$$u_i^\varepsilon \simeq u^{[1]} := u_i^0 + \varepsilon u_i^1,$$

En déduit immédiatement à l'aide des problèmes résolus par u_i^1, u_i^0 que $u^{[1]}$ vérifie

$$\begin{cases} \Delta u^{[1]} + k_i^2 u^{[1]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u^{[1]} - k_e^2 \varepsilon u^{[1]} - \varepsilon \Delta_\Gamma u^{[1]} = O(\varepsilon^2) - \varepsilon F_e^0(x_\Gamma) + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Théorème 3.8 *Le problème avec condition d'impédance d'ordre 1 s'écrit :*

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\varepsilon + K_i^2 v_{[1]}^\varepsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n v_{[1]}^\varepsilon - k_e^2 \varepsilon v_{[1]}^\varepsilon - \varepsilon \Delta_\Gamma v_{[1]}^\varepsilon = -\varepsilon F_e^0(x_\Gamma) + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.22)$$

Supposons que $f_i \in C^\infty(\Omega_i)$. Alors la solution $v_{[1]}^\varepsilon$ du problème (3.22) admet le développement asymptotique :

$$v_{[1]}^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n v_{[1]}^n. \quad (3.23)$$

Les termes $v_{[1]}^n$ ne dépendent pas du paramètre ε et sont construits à l'aide des équations (3.25) plus bas. Le développement (3.23) est valide au sens des développements asymptotiques, i.e. pour tout entier N , il existe une constante C_N telle que le reste d'ordre N défini par

$$r^N(\varepsilon) = v_{[1]}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_{[1]}^n,$$

satisfasse l'estimation optimale

$$\|r^N(\varepsilon)\|_{1, \Omega_i} \leq C_N \varepsilon^{N+1} \quad (3.24)$$

De plus la différence entre la partie intérieure de la solution du problème de transmission (3.1) et celle du problème (2.27) avec condition aux limites généralisée d'ordre 1 est donnée par

$$\|u_i^\varepsilon - v_{[1]}^\varepsilon\|_{1, \Omega_i} \leq C \varepsilon^2.$$

Démonstration. De façon similaire en injectant l'ansatz polynomial (3.23) dans les équations (3.22), on obtient :

$$\begin{cases} (\Delta v_{[1]}^n + K_i^2 v_{[1]}^n) = \delta_0^n f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n v_{[1]}^0 = g & \text{sur } \Gamma. \\ \partial_n v_{[1]}^{n+1} - K_e^2 v_{[1]}^n - \Delta_\Gamma v_{[1]}^n = -\delta_0^n F_e^0(t) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.25)$$

La preuve de l'estimation d'erreur est analogue à celle du théorème 2.7 dans le cas bidimensionnel. ■

Condition d'ordre 2

On conserve ici les trois premiers termes du développement asymptotique :

$$u^{[2]} := u_i^0 + \epsilon u_i^1 + \epsilon^2 u_i^2.$$

En explicitant les problèmes résolus par u_i^0 , u_i^1 , u_i^2 , on montre que $u^{[2]}$ résout le problème

$$\begin{cases} \Delta u^{[2]} + K u^{[2]} = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n u^{[2]} = \epsilon k_e^2 (1 - H\epsilon) u^{[2]} + \epsilon (1 - 3H\epsilon) \Delta_\Gamma u^{[2]} - \epsilon^2 \nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma u^{[2]} + \epsilon^2 \operatorname{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) u^{[2]} \\ + O(\epsilon^3) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Proposition 3.9 *On note $v_{[2]}^\epsilon$ la solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} \Delta v_{[2]}^\epsilon + K_i^2 v_{[2]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ \partial_n v_{[2]}^\epsilon = \epsilon k_e^2 (1 - H\epsilon) v_{[2]}^\epsilon + \epsilon (1 - 3H\epsilon) \Delta_\Gamma v_{[2]}^\epsilon \\ - \epsilon^2 \nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma v_{[2]}^\epsilon + \epsilon^2 \operatorname{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) v_{[2]}^\epsilon & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.26)$$

Alors on a l'estimation suivante : $\exists c \geq 0$ (indépendante de ϵ) telle que

$$\| u_i^\epsilon - v_{[2]}^\epsilon \|_{1, \Omega_i} \leq C \epsilon^3.$$

Démonstration. La preuve de l'estimation est la même que pour l'estimation de la condition aux limites généralisée d'ordre 1. Les estimations des restes permettent de conclure. ■

3.4 Cas où la perméabilité magnétique dépend de l'épaisseur

Dans cette section, on suppose que la perméabilité magnétique est d'ordre ε^{-1} . Précisément, nous allons écrire des conditions aux limites approchées pour un problème transmission de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i, \\ \Delta u_e^\varepsilon + \frac{k_e^2}{\varepsilon} u_e^\varepsilon = f_e \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon, \\ \partial_n u_i^\varepsilon = \partial_n u_e^\varepsilon + g \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_e^\varepsilon = 0 \text{ (Dirichlet) ou } \partial_n u_e^\varepsilon = 0 \text{ (Neumann)} \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

3.4.1 Système d'équations mises à l'échelle

L'opérateur Q dans ce cas s'écrit :

$$Q = J_s^3 \Delta + J_s^3 \frac{k_e^2}{\varepsilon}.$$

Nous effectuons d'abord le changement de variable (3.6). L'opérateur Q devient alors dans le nouveau système de coordonnées $(x_\Gamma, y) \in \Gamma \times [0,1]$:

$$Q = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\ell=0}^{\ell=7} \varepsilon^\ell A_\ell.$$

Ceci permet après identification des coefficients de même puissance de ε d'obtenir :

$$\begin{aligned} A_0 &= \partial_y^2, \\ A_1 &= 6Hy\partial_y^2 + 2H\partial_y + k_e^2, \\ A_2 &= 3(G + 4H^2)\partial_y^2 + 6Hyk_e^2 + 2(G + 4H^2)y\partial_y + \Delta_\Gamma, \\ A_3 &= 4H(3G + 2H^2)y^3\partial_y^2 + 3(G + 4H^2)y^2k_e^2 + 4H(3G + 2H^2)y^2\partial_y - 2y[\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] \\ &\quad + 2y[\operatorname{div}_\Gamma(\Lambda \nabla_\Gamma) + H\Delta_\Gamma], \end{aligned}$$

où les opérateurs A_ℓ sont indépendants de ε . Dans les nouvelles coordonnées (semi-dilatées), le problème de transmission (3.27) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = f_i \quad \text{dans } \Omega_i, \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\sum_{\ell=0}^{\ell=7} \varepsilon^\ell A_\ell U_e^\varepsilon \right] = J_{\varepsilon y}^3 F_e \quad \text{dans } \Omega_e^\varepsilon, \\ \partial_s u_i^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_y U_e^\varepsilon + g \quad \text{sur } \Gamma, \\ u_i^\varepsilon = U_e^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma, \\ U_e^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon \text{ Dirichlet}, \\ \partial_y U_e^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^\varepsilon \text{ Neumann}. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

L'identification formelle, après injection des expressions (3.8) et (3.9) dans (3.28), nous permet de déterminer de manière récurrente les différents termes du développement asymptotique, couplés par leurs conditions sur Γ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{\ell+p=n \\ p \in [0,7] \cap \mathbb{N}}} A_p U_e^\ell = F_e^{n-2}(x_\Gamma) y^{n-2} \quad \ell \geq 0, \quad n \geq 0 \text{ pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^n = \partial_n u_i^{n-1} - \delta_1^n g \quad \text{pour } y = 0, \\ U_e^n = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_y U_e^n = 0 \quad \text{pour } y = 1 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^n + k_i^2 u_i^n = \delta_0^n f_i \quad \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^n = U_e^n \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

3.4.2 Calcul des premiers termes : cas Dirichlet

Termes de rang 0 pour $n = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 U_e^0 = 0 \quad \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 \quad \text{pour } y = 0, \\ U_e^0 = 0 \quad \text{pour } y = 1. \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que u_i^0 résout le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = f_i \quad \text{dans } \Omega_i \\ u_i^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Termes de rang 1 pour $n = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y^2 U_e^1 = 0 \quad \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g \quad \text{pour } y = 0, \\ U_e^1 = 0 \quad \text{pour } y = 1. \end{array} \right.$$

On obtient

$$U_e^1(x_\Gamma, y) = (\partial_n u_i^0 - g)(y - 1).$$

Donc u_i^1 résout le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^1 = -\partial_n u_i^0 + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 2 pour $n = 2$

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 + (6Hy\partial_y^2 + 2H\partial_y + k_e^2)(\partial_n u_i^0 - g)(y - 1) - F_e^0(x_\Gamma) = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Nous supposons que $f_e = g = 0$, alors

$$U_e^2(x_\Gamma, y) - (y - 1)\partial_n u_i^1 + H\partial_n u_i^0(y^2 - 1) + \frac{1}{6}k_e^2\partial_n u_i^0(y^3 - 6y + 5) = 0.$$

Donc u_i^2 résout le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i^2 + \partial_n u_i^1 = \frac{1}{6}(6H - 5k_e^2)\partial_n u_i^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

3.4.3 Calcul des premiers termes : cas Neumann

Termes de rang 0 pour $n = 0$

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^0 = 0 & \text{sur } y = 1. \end{cases}$$

$U_e^0(x_\Gamma, y)$ résout un problème unidimensionnel homogène de Neumann. $U_e^0(x_\Gamma, y)$ est une fonction indépendante de y , notée $\beta_0(x_\Gamma)$. A l'aide des termes de rang 1 on obtient

$$\partial_n u_i^0 - g = K_e^2 \beta_0.$$

D'où u_i^0 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + K_i^2 u_i^0 = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 u_i^0 + \partial_n u_i^0 = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 1 Pour $n = 1$, on a

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^1 + k_e^2 u_i^0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^1 = \partial_n u_i^0 - g & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^1 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$U_e^1(x_\Gamma, y) = -\frac{1}{2}k_e^2 u_i^0 (y^2 - 2y) + U_e^1(x_\Gamma, 0).$$

Pour que la fonction $\beta_1(x_\Gamma) = U_e^1(x_\Gamma, 0)$ soit bien déterminée, on aura besoin du terme de rang 2

$$\partial_y^2 U_e^2 - 6Hyk_e^2\beta_0 - 2Hk_e^2 u_i^0 (y - 1) - \frac{1}{2}k_e^4 u_i^0 (y^2 - 2y) + k_e^2 \beta_1 + 6Hyk_e^2 u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 = F_e^0(x_\Gamma).$$

En intégrant sur $[0 ; 1]$ on obtient

$$-\partial_n u_i^1 - 3Hk_e^2 u_i^0 + Hk_e^2 u_i^0 + \frac{k_e^4}{3} u_i^0 + k_e^2 \beta_1 + 3Hk_e^2 u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 = F_e^0(x_\Gamma).$$

Ce qui montre que u_i^1 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^1 + K_i^2 u_i^1 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 u_i^1 + \partial_n u_i^1 = \frac{1}{3} (3Hk_e^2 + k_e^4) u_i^0 + \Delta_\Gamma u_i^0 - F_e^0(x_\Gamma) & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Termes de rang 2 On suppose que $f_e = g = 0$

$$\begin{cases} \partial_y^2 U_e^2 - 2Hk_e^2\beta_0 (y - 1) - \frac{1}{2}k_e^4\beta_0 (y^2 - 2y) + k_e^2\beta_1 + 6Hyk_e^2\beta_0 + \Delta_\Gamma\beta_0 = 0 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \partial_y U_e^2 = \partial_n u_i^1 & \text{pour } y = 0, \\ \partial_y U_e^2 = 0 & \text{pour } y = 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} U_e^2(x_\Gamma, y) = & -\frac{1}{3}Hk_e^2\beta_0 (-y^3 + 3y^2 - 3y) - \frac{1}{24}k_e^4\beta_0 (-y^4 + 4y^3 - 8y) \\ & + \frac{1}{2}(2y - y^2)k_e^2\beta_1 + \frac{1}{2}(2y - y^2)\Delta_\Gamma\beta_0 - (3y - y^3)Hk_e^2\beta_0 + \beta_2. \end{aligned}$$

Pour déterminer la fonction $\beta_2(x_\Gamma) = U_e^2(x_\Gamma, 0)$, il faut calculer le terme de rang 3

$$\begin{aligned} \partial_y^2 U_e^3 + 6Hy\partial_y^2 U_e^2 + 2H\partial_y U_e^2 + k_e^2 U_e^2 + 3(G + 4H^2)\partial_y^2 U_e^1 + 6Hyk_e^2 U_e^1 + 2(G + 4H^2)y\partial_y U_e^1 \\ + \Delta_\Gamma U_e^1 + 3(G + 4H^2)y^2 k_e^2 \beta_0 - 2y[\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma]\beta_0 + 2y[\text{div}_\Gamma(\Lambda \nabla_\Gamma) + H\Delta_\Gamma]\beta_0 = 0. \end{aligned}$$

Une intégration sur $[0, 1]$ de cette équation donne

$$\begin{aligned} & -\partial_n u_i^2 + \Delta_\Gamma \beta_1 - 2H \Delta_\Gamma \beta_0 + \frac{1}{3} \Delta_\Gamma \beta_0 k_e^2 + \frac{2}{15} \beta_0 k_e^4 + \frac{1}{3} \beta_1 k_e^4 - 20H^2 \beta_0 k_e^2 - \frac{5}{3} G \beta_0 k_e^2 \\ & + H \beta_1 k_e^2 + \frac{23}{12} H \beta_0 k_e^4 - \nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma \beta_0 + \operatorname{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) \beta_0 = 0. \end{aligned}$$

D'où u_i^2 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_i^2 + K_i^2 u_i^2 = 0 & \text{dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 u_i^2 + \partial_n u_i^2 = \frac{1}{3} (k_e^4 + 3H k_e^2) u_i^1 - \frac{1}{15} (2k_e^6 + 140H^2 k_e^2 + 25G k_e^2 + 10H k_e^4) u_i^0 \\ + \Delta_\Gamma u_i^1 - [\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] u_i^0 + \operatorname{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) u_i^0 - H \Delta_\Gamma u_i^0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

3.4.4 Conditions équivalentes : cas Dirichlet

Condition d'ordre 0

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\epsilon + K_i^2 v_{[0]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[0]}^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 1

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\epsilon + k_i^2 v_{[1]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[1]}^\epsilon + \varepsilon \partial_n v_{[1]}^\epsilon = \varepsilon g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 2

$$\begin{cases} \Delta v_{[2]}^\epsilon + k_i^2 v_{[2]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ v_{[2]}^\epsilon + \varepsilon \partial_n v_{[2]}^\epsilon - \frac{1}{6} (6H - 5k_e^2) \varepsilon^2 \partial_n v_{[2]}^\epsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

3.4.5 Conditions équivalentes : cas Neumann

Condition d'ordre 0

$$\begin{cases} \Delta v_{[0]}^\epsilon + K v_{[0]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 v_{[0]}^\epsilon + \partial_n v_{[0]}^\epsilon = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 1

$$\begin{cases} \Delta v_{[1]}^\epsilon + K_i^2 v_{[1]}^\epsilon = f_i & \text{dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 v_{[1]}^\epsilon + \partial_n v_{[1]}^\epsilon = \frac{\varepsilon}{3} (3H k_e^2 + k_e^4) v_{[1]}^\epsilon + \varepsilon \Delta_\Gamma v_{[1]}^\epsilon - \varepsilon F_e^0(x_\Gamma) + g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Condition d'ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_{[2].}^\varepsilon + K_i^2 v_{[2].}^\varepsilon = f_i \text{ dans } \Omega_i, \\ -k_e^2 v_{[2].}^\varepsilon + \partial_n v_{[2].}^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{3} (3Hk_e^2 + k_e^4) v_{[2].}^\varepsilon + \varepsilon \Delta_\Gamma v_{[2].}^\varepsilon + \varepsilon^2 \operatorname{div}_\Gamma (\Lambda \nabla_\Gamma) v_{[2].}^\varepsilon, \\ -\frac{1}{15} (2k_e^6 + 140H^2 k_e^2 + 25Gk_e^2 + 10Hk_e^4) \varepsilon^2 v_{[2].}^\varepsilon - \varepsilon^2 H \Delta_\Gamma v_{[2].}^\varepsilon - \varepsilon^2 [\nabla_\Gamma H \nabla_\Gamma] v_{[2].}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Remarque : Les estimations du théorème 3.2 s'appliquent encore dans cette situation. Une analyse similaire à celle effectuée précédemment permet d'obtenir les estimations optimales suivantes dans les deux cas Dirichlet et Neumann

$$\begin{aligned} \|u_i^\varepsilon - v_{[0].}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} &\leq C\varepsilon, \\ \|u_i^\varepsilon - v_{[1].}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} &\leq C\varepsilon^2, \\ \|u_i^\varepsilon - v_{[2].}^\varepsilon\|_{1,\Omega_i} &\leq C\varepsilon^3. \end{aligned}$$

Deuxième partie

Diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince

Chapitre 4

Couche mince de perméabilité variable

Introduction

Dans ce chapitre, Nous étudions la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une fine couche de perméabilité variable. Ainsi nous étudions une famille d'équations de la forme suivante :

$$\Delta u + k^2 p u = F,$$

où p est une fonction positive variable dans la couche mince.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section 4.1, on introduit le problème de transmission et on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Puis, on définit l'opérateur de Steklov-Poincaré qui permet de ramener le problème à un problème posé sur un domaine borné. On effectue ensuite un changement d'échelle qui permet d'écrire la formulation variationnelle du problème dans un domaine fixe.

Les difficultés rencontrées dans notre analyse sont d'une part la stabilité de la solution par rapport à l'épaisseur de la couche, due au fait que le problème est un problème de perturbation singulière, et d'autre part les variations rapides de la perméabilité magnétique de la couche mince dans la direction tangentielle. Afin de surmonter les difficultés, on donne dans la section 4.3 un résultat de stabilité de la solution dans des espaces convenables. Dans la section 4.4, on expose une méthode qui consiste à faire un développement asymptotique à partir de la formulation variationnelle, puis on détermine les premiers termes du

développement asymptotique. Enfin, on montre comment l'étude des premiers termes du développement asymptotique permet d'obtenir des conditions aux limites approchées pour le problème. De plus, on donne des estimations d'erreur, ce qui nous permet de justifier l'écriture formelle de ces conditions approchées.

4.1 Présentation du problème extérieur

Soit Ω_∞ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ de complémentaire compact et de frontière Γ de classe C^∞ . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on note $\Omega_i = \mathbb{R}^3 / \overline{\Omega_\infty}$ et on désigne par $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_i, d(x, \Gamma) < \varepsilon\}$, la couche mince uniforme d'épaisseur ε . Voir Figure 4.1

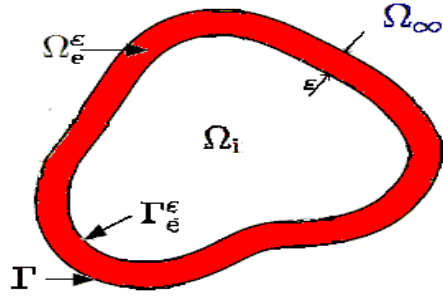


FIG. 4.1 – La géométrie du domaine

On considère la fonction v_0 qui représente l'onde incidente définie sur un voisinage V de Γ et qui satisfait

$$\Delta v_0 + k_i^2 v_0 = 0 \text{ dans } D'(V).$$

Le problème ci-dessus s'énonce alors de façon équivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v_i^\varepsilon + k_i^2 v_i^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\infty, \\ \Delta v_\varepsilon^\varepsilon + k_\varepsilon^2 q(\xi_1, \xi_2, \frac{s}{\varepsilon}) v_\varepsilon^\varepsilon = (k_i^2 - k_\varepsilon^2 q) v_0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \\ [\chi \partial_n v^\varepsilon] = -[\chi \partial_n v_0] \text{ sur } \Gamma, \\ [v^\varepsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Où ∂_n désigne la dérivée normale selon $\vec{n}$, $[v^\varepsilon] = v_i^\varepsilon|_\Gamma - v_\varepsilon^\varepsilon|_\Gamma$ est le saut de la trace d'une fonction définie sur $\Omega_\infty \cup \Omega_\varepsilon$ à travers la frontière Γ . k_i est une constante

strictement positive et q est une fonction bornée de la variable $(\xi_1, \xi_2, \frac{s}{\varepsilon})$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$, où (ξ_1, ξ_2) sont les coordonnées dans la base contravariante (ou duale) $(\tau^\alpha)_{\alpha=1,2}$ définies par (1.2). Nous désignons dans l'équation (4.1) par χ la fonction constante par morceaux définie par :

$$\chi = \begin{cases} \alpha = \alpha > 0 & \Omega_e^\varepsilon, \\ 1 & \text{dans } \Omega_\infty. \end{cases}$$

Nous imposerons une condition de Neumann (E-polarisation) non homogène

$$\partial_n v_e^\varepsilon = -\partial_n v_e^0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon,$$

ou de Dirichlet (H-polarisation) non homogène

$$v_e^\varepsilon = -v_e^0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon.$$

Pour que le problème (4.1) soit bien posé, il faut fermer le système par une condition de radiation de Sommerfeld à l'infini :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla v_i^\varepsilon \frac{x}{|x|} - i k_i v_i^\varepsilon \right) = 0 \quad (C.R.).$$

Physiquement traduisant le fait que l'onde réfléchie $u_i^\varepsilon - u^{in}$ se propage de Γ vers l'extérieur de Ω_e^ε .

On pose $\theta \in D(\mathbb{R}^3)$ tel que $\theta \equiv 1$ dans ϑ voisinage de Γ et de $\text{supp} \theta \subset \Omega_{\varepsilon, \infty} = \overline{\Omega}_\infty \cup \Omega_e^\varepsilon$. Avec le changement de variable $v = u - \theta v_0$; le problème précédent s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\overline{\Omega}_{\varepsilon, \infty}) \\ \Delta u_i^\varepsilon + k_i^2 u_i^\varepsilon = -h \text{ dans } \Omega_\infty \\ \Delta u_e^\varepsilon + k_e^2 q(\xi_1, \xi_2, \frac{s}{\varepsilon}) u_e^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_e^\varepsilon \\ [\chi \partial_n u^\varepsilon] = 0 \text{ sur } \Gamma \\ u_i^\varepsilon = u_e^\varepsilon \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^\varepsilon \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^\varepsilon \right) = 0 \quad (C.R.) \end{cases} \quad (4.2)$$

Avec la condition de Neumann homogène

$$\partial_n u_e^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon,$$

ou la condition de Dirichlet homogène

$$u_e^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\varepsilon,$$

où $h = -2\nabla\theta \cdot \nabla v_0 - \Delta\theta v_0$ est une fonction source à support compact inclu dans Ω_∞ et $h \in D(\Omega_\infty)$. Le comportement de $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon, u_e^\varepsilon)$ à l'infini est décrit par la condition de radiation de Sommerfeld. Aussi, on associe au problème (4.2) l'espace de Fréchet

$$H_{loc}^1(\overline{\Omega_{\varepsilon,\infty}}) = \{u \in D'(\Omega_{\varepsilon,\infty}), \varphi u \in H^1(\overline{\Omega_{\varepsilon,\infty}}), \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3)\}.$$

Théorème 4.1 *Dans les deux cas condition aux limites de Neumann ou Dirichlet sur Γ_e^ε , le problème (4.2) admet une unique solution. De plus, si $f_i \in H^s(\Omega_\infty)$ alors on a*

$$u \in H^{s+2}(\Omega_\infty) \cap H_{loc}^{2+s}(\overline{\Omega_\infty}) \quad \forall s \geq 0.$$

Démonstration. La preuve est basée sur le lemme de Rellich (cf.[5]). ■

4.2 Le problème dans un domaine tronqué

L'opérateur de Steklov-Poincaré : Dans cette section, nous reformulons le problème (4.2) d'une manière équivalente comme suit : nous introduisons une frontière artificielle Σ de classe C^∞ renfermant l'obstacle ainsi que le support de h . Σ divise Ω_∞ en un domaine borné Ω et un domaine extérieur $\Omega'_\infty = \Omega_\infty \setminus \overline{\Omega}$, voir Figur (4.2).

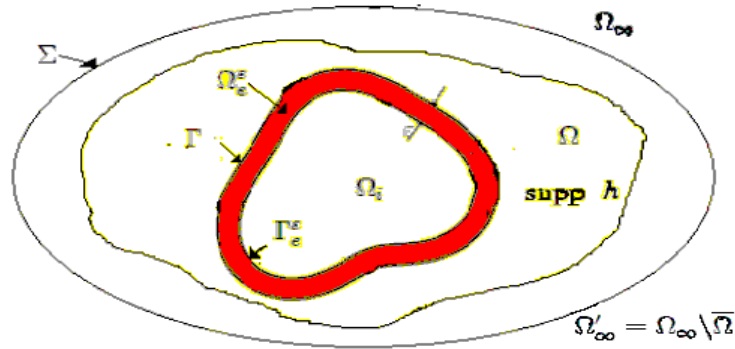


FIG. 4.2 – Le domaine tronqué

Si nous désignons par $\vec{n}_\Sigma$ la normale sur Σ dirigée vers l'extérieur de Ω'_∞ , alors à l'aide d'un opérateur dit de Steklov-Poincaré (Dirichlet-to-Neumann), nous pouvons ramener le problème (4.1) à un problème posé sur un domaine

borné $\Omega_\varepsilon = \Omega_{\varepsilon,\infty} \setminus \overline{\Omega'_\infty}$. C'est avec cet opérateur que nous considérons une certaine condition aux limites qui remplace la condition de radiation à l'infini posée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et s'écrit sous la forme suivante :

$$S_k u^\varepsilon + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}_\Sigma} = 0.$$

L'opérateur Steklov-Poincaré¹ S_k est défini pour tout $k_i \in \mathbb{R}_+$ de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ comme suit : soit $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, w solution de :

$$\begin{cases} w \in H^1_{loc}(\overline{\Omega'_\infty}), \\ \Delta w + k_i^2 w = f_i \quad \text{dans } D'(\Omega'_\infty), \\ w = \psi \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla w \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i w \right) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Alors $S_k \psi$ est obtenu en posant $S_k \psi = \partial_{n_\Sigma} w$. Le signe de $\langle S_k \psi, \bar{\psi} \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, doit être contrôlé avant d'établir le résultat de stabilité.

Pour clore cette section, nous allons décrire un résultat qui va être employé dans la preuve du théorème de stabilité. Nous considérons aussi l'opérateur de Steklov-Poincaré $S\psi = \partial_{n_\Sigma} w$ pour le problème coercive suivant :

$$\begin{cases} w \in H^1(\overline{\Omega'_\infty}), \\ -\Delta w + w = f_i \quad \text{dans } D'(\Omega'_\infty), \\ w = \psi \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{cases}$$

Des résultats de régularité classiques de la solution du problème de Dirichlet et la théorie des opérateurs pseudodifférentiel donnent les deux propriétés suivantes pour l'opérateur Steklov-Poincaré

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad (S\psi, \bar{\psi}) &\geq c \|\psi\|_{\frac{1}{2}, \Sigma} \quad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), \\ R_k = S_k - S &\in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)\right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹L'opérateur de Steklov-Poincaré (Dirichlet-to-Neumann) S_k est continu de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et en dimension 2 si $\Omega = D(0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq \rho\}$ alors S_k admet l'expression analytique suivant :

$$S_k u^\varepsilon = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n k_i \frac{H_n^{(1)'}(k_i \rho)}{H_n^{(1)}(k_i \rho)} e^{in\rho}, \quad u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{[2, 2\pi]} u(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Dans cette expression $H_n^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel d'ordre n et de première espèce

R_k est un opérateur compact de $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ et $\|\psi\|_{\frac{1}{2},\Sigma}$ désigne la norme de ψ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

4.2.1 La formulation variationnelle du problème

On peut écrire notre problème sous forme variationnelle. On montre que la solution u^ε vérifie

$$\int_{\Omega_\infty} [\nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_i^2 u^\varepsilon w] d\Omega_\infty + \int_{\Omega_\varepsilon^\varepsilon} \alpha [\nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_e^2 q u^\varepsilon w] d\Omega_\varepsilon^\varepsilon = \int_{\Omega_\infty} h w d\Omega_\infty,$$

où w est une fonction test appartenant à un à un sous-espace X_ε de $H^1(\Omega_\varepsilon)$, arbitrairement prolongée à une fonction de $H^1(\Omega_{\varepsilon,\infty})$ avec un support borné et vérifie la condition aux limites de Neumann ou de Dirichlet sur $\Gamma_\varepsilon^\varepsilon$. A l'aide de l'opérateur Steklov-Poincaré et la formule de Green on obtient le problème :

$$\text{Trouver } v \in X_\varepsilon, w \in X_\varepsilon \text{ } a_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega} h w dx, \quad (4.5)$$

où

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega_\varepsilon^\varepsilon} \alpha [\nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_e^2 q u^\varepsilon w] dx + \int_{\Omega} [\nabla u^\varepsilon \nabla w dx - k_i^2 u^\varepsilon w] dx + \langle S_k u^\varepsilon, w \rangle$$

4.2.2 La formulation variationnelle dans un domaine fixe

Changement d'échelle : La dérivation des conditions aux limites approchées repose d'abord sur un changement d'échelle à l'intérieur de la couche mince qui permet d'enlever la dépendance de la géométrie du problème vis à vis du petit paramètre ε . On introduit donc une paramétrisation en coordonnées locales et on dilate $\Omega_\varepsilon^\varepsilon$ d'un facteur ε^{-1} .

$$\begin{cases} \Omega^+ = \Gamma \times [0,1] \rightarrow \Omega_\varepsilon^\varepsilon, \\ (x_\Gamma, t) \rightarrow x = x_\Gamma + \varepsilon t n(x_\Gamma). \end{cases}$$

Ce changement d'échelle va porter le petit paramètre sur les opérateurs et non plus sur le domaine, ce qui permet d'obtenir des résultats de convergence dans des domaines indépendants de ε . Nous définissons pour chaque fonction w définie dans $\Omega_\varepsilon^\varepsilon$ une fonction associée $\tilde{w}$ définie dans Ω^+ par :

$$\tilde{w}(x_\Gamma, t) = w(x).$$

On considère une paramétrisation locale sur $\Gamma : (U, \psi)$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \psi : U \rightarrow \Gamma \\ (\xi_1, \xi_2) \rightarrow x_\Gamma = \psi(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

$\tau_\alpha = \partial_{\xi_\alpha} \psi$ est la base contravariante (ou duale) du plan tangent, on suppose que (U, ψ) est compatible avec l'orientation dans le sens :

$$n = \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}.$$

Où $\times$ est le produit cartésien dans $\mathbb{R}^3$. Alors, en exprimant les expressions $\tilde{w}$ dans les coordonnées locales (ξ_1, ξ_2, t) , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi^\alpha} &= \frac{\partial w}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \nabla w \frac{\partial x}{\partial \xi^\alpha}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \nabla w \frac{\partial x}{\partial t}. \end{aligned}$$

L'expression de x en coordonnées (ξ_1, ξ_2, t) est donnée par la relation :

$$x = \psi(\xi_1, \xi_2) + \epsilon t n(\psi(\xi_1, \xi_2)).$$

Et en différenciant n par rapport à (ξ_1, ξ_2) , on obtient

$$\partial_{\xi_\alpha} n = C \tau_\alpha,$$

C étant un opérateur linéaire symétrique du plan tangent T_{x_Γ} qui caractérise la courbure au point $x_\Gamma = \psi(\xi_1, \xi_2)$ sur Γ , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi^\alpha} &= \nabla w \cdot (I + \epsilon t C) \tau_\alpha, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \epsilon \nabla w \cdot n. \end{aligned}$$

Dans la suite, I designera l'identité du plan tangent. Comme le vecteur $(I + \epsilon t C) \tau_\alpha$ est dans le plan de tangent T_{x_Γ} et $(I + \epsilon t C)$ est un opérateur symétrique de T_{x_Γ} , nous pouvons d'une manière équivalente écrire les expressions ci dessus en utilisant la projection Π_{x_Γ} de $\mathbb{R}^3$ sur T_{x_Γ} :

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi^\alpha} = (I + \epsilon t C) \Pi_{x_\Gamma} \nabla w \cdot \tau_\alpha.$$

D'où

$$\Pi_{x_\Gamma} \nabla w = (I + \epsilon t C)^{-1} \nabla_\Gamma \tilde{w}. \quad (4.6)$$

De même, nous pouvons également exprimer l'élément de volume :

$$\begin{aligned} d\Omega_e^\varepsilon &= \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial x}{\partial t} d\xi_1 d\xi_2 dt; \\ d\Omega_e^\varepsilon &= (I + \varepsilon t C) \tau_1 \times (I + \varepsilon t C) \tau_2 \frac{\partial x}{\partial t} d\xi_1 d\xi_2 dt. \end{aligned}$$

Les propriétés usuelles du déterminant donnent

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \det(I + \varepsilon t C) \tau_1 \times \tau_2.$$

Comme l'élément de surface $d\Gamma = |\tau_1 \times \tau_2| d\xi_1 d\xi_2$, nous avons

$$d\Omega_e^\varepsilon = \varepsilon \det(I + \varepsilon t C) d\Gamma dt.$$

Enfin, les intégrales du problème (4.5) se transforment aussi comme suit

$$\int_{\Omega_e^\varepsilon} w_e^\varepsilon d\Omega_e^\varepsilon = \varepsilon \int_{\Gamma \times [0,1]} \int \tilde{w} \det(I + \varepsilon t C) dt d\Gamma.$$

$$\int_{\Omega_e^\varepsilon} \nabla u_e^\varepsilon \nabla w d\Omega_e^\varepsilon = \varepsilon \int_{\Gamma \times [0,1]} \int \left[(I + \varepsilon t C)^{-2} \nabla_\Gamma \tilde{w} \nabla_\Gamma \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_t \tilde{w} \partial_t \tilde{u} \right] \det(I + \varepsilon t C) dt d\Gamma.$$

Maintenant, il nous faut considérer les images associées, par le changement d'échelle de la solution u^ε de problème (4.5) et de la fonction test w . Plus précisément :

$$u_e^\varepsilon = \tilde{u}|_{\Omega_e^\varepsilon}^\varepsilon, \quad w^+ = \tilde{w}.$$

Afin de préciser la formulation variationnelle du problème (4.5) dans un domain fixe, on définit les espaces variationnels suivants selon le choix de la condition aux bord sur Γ_e^ε

$$\begin{aligned} X &= X_N = \{w = (w^+, w^-) \in H^1(\Omega^+) \times H^1(\Omega) \mid w^+(\cdot, 0) = w^- \text{ sur } \Gamma\}, \\ X &= X_D = \{w \in X_N \mid w^+(\cdot, 1) = 0\}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on note par

$$u^\varepsilon = (u_e^\varepsilon, u_i^\varepsilon) \text{ où } u_i^\varepsilon = u|_\Omega^\varepsilon \text{ et } u_e^\varepsilon = u|_{\Omega_e^\varepsilon}^\varepsilon,$$

la solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in X & w^\varepsilon \in X \\ \varepsilon a^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) + \varepsilon b^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) + a_k^-(u_i^\varepsilon, w^-) = L(\varepsilon, w^+, w^-) \end{cases} \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned}
a^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) &= \int_{\Gamma \times [0,1]} \alpha \left[(I + \varepsilon t C)^{-2} \nabla_\Gamma u_e^\varepsilon \nabla_\Gamma w^+ + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_t u_e^\varepsilon \partial_t w^+ \right] \det(I + \varepsilon t C) d\Omega^+, \\
b^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) &= - \int_{\Gamma \times [0,1]} \alpha k_e^2 q(x_\Gamma, t) u_e^\varepsilon w^+ \det(I + \varepsilon t C) d\Omega^+, \\
a_k^-(u_i^\varepsilon, w^-) &= \int_{\Omega} [\nabla u_i^\varepsilon \nabla w^- - k_i^2 u_i^\varepsilon w^-] d\Omega + \langle S_k u, w \rangle, \\
L(\varepsilon, w_\varepsilon^+, w^-) &= \int_{\Omega} h w_\varepsilon^- d\Omega.
\end{aligned}$$

4.3 Stabilité par rapport à l'épaisseur

En général lors d'une analyse asymptotique, les auteurs considèrent un problème coercive tel que la norme de l'inverse de la forme bilinéaire associé au problème considéré, est majorée par la constante de coercivité, qui est indépendante de ε . Dans un contexte plus général, certains auteurs invoquent également le principe du maximum pour démontrer un résultat de stabilité en norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ lorsque cela est possible. Ici le problème (4.7) n'est pas coercive et ne suit pas le principe du maximum donc on ne peut pas avoir la stabilité d'une manière directe, autrement dit la formulation variationnelle n'est pas suffisante par elle-même pour assurer la stabilité en ce qui concerne l'épaisseur de la couche sur la quelle l'analyse asymptotique est basée. Remarquons que (4.7) est un problème de perturbation singulière. En effet, il est possible que le coefficient de $\varepsilon a^+(\varepsilon, \cdot, \cdot)$ et la dérivée tangentielle $\nabla_\Gamma v^\varepsilon$ de la solution v^ε dans la formulation (4.7), soient non bornés quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans une telle situation, le signe du premier membre du problème (4.7) pour $v^\varepsilon = w^\varepsilon$ ne peut pas être contrôlé car il peut produire une solution dépendante singulièrement du ε dans Ω . À l'aide de la régularité jusqu'aux frontières du problème obtenu en négligant complètement l'effet de la couche mince et la régularité de la frontière Γ , le second membre qui apparaît dans l'analyse asymptotique du problème (4.7) se comporte d'une manière à compenser le comportement singulier du premier membre.

4.3.1 Altrentive de Fredholm pour un domaine fixe

Selon le choix des conditions aux bords sur Γ_ε , on définit les espaces variationnels suivants :

$$\begin{aligned} Y = Y_N &= \left\{ w^\varepsilon = (w^+, w^-) \in H^1(0,1; L^2(\Gamma)) \times H^1(\Omega) \mid w^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma \right\}, \\ Y = Y_D &= \left\{ w^\varepsilon \in Y_N \mid w^+(\cdot, 1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Y est muni de la norme canonique suivante :

$$\|w\|_Y^2 = \varepsilon \|w^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t w^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|w^-\|_{1,\Omega}^2$$

Rappelons encore que pour t fixé, la fonction trace $t \rightarrow w(\cdot, t)$ est continue de $(0,1)$ à valeurs dans $L^2(\Gamma)$. Nous allons montrer que, pour une première membre approprié, la solution u^ε du problème (4.7) sera bornée dans l'espace Y au sens de la norme affaiblie $\|w\|_Y$. Pour la prouver nous aurons besoin de définir les deux formes bilinéaires continues dans $H^1(\Omega)$ suivantes :

$$a^-(u^\varepsilon, w^\varepsilon) = \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx + \langle S u^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle, \quad b_k^-(u^\varepsilon, w^\varepsilon) = - \int_{\Omega} k_i^2 \nabla u^\varepsilon \nabla w^\varepsilon dx + \langle R_k u^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle.$$

A partir de la relation (4.4) et la continuité de la trace, on peut en déduire directement l'estimation

$$\exists c > 0 : a^-(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \geq c \|u^\varepsilon\|_1^2 \quad \forall u^\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad (4.8)$$

donc d'après le lemme de Lax-Milgram, nous pouvons définir un opérateur T_ε de Y dans X tel que pour tout u^ε dans Y , $T_\varepsilon u^\varepsilon = p_\varepsilon \in X$ est une solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} p_\varepsilon \in X & ; \forall w^\varepsilon \in X, \\ \varepsilon a^+(\varepsilon, p_\varepsilon^+, w^+) + a^-(p_\varepsilon^-, w^-) = \varepsilon b^+(\varepsilon, u^\varepsilon, w^+) + b_k^-(u^\varepsilon, w^-). \end{cases} \quad (4.9)$$

Ainsi, d'après, le théorème de compacité locale de Rellich de H^1 dans L^2 et la compacité de l'opérateur R_k , on en déduit que T_ε est un opérateur compact de Y dans X pour tout $\varepsilon > 0$ fixe et par conséquent de Y dans Y .

Proposition 4.2 *Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $v^\varepsilon \in Y$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\begin{cases} \|\nabla_\Gamma p_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M \|u^\varepsilon\|_Y, \\ \|\partial_t p_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+} \leq \sqrt{\varepsilon} M \|u^\varepsilon\|_Y, \\ \|p_\varepsilon^-\|_{1,\Omega} \leq M \|u^\varepsilon\|_Y. \end{cases} \quad (4.10)$$

Démonstration. Il existe deux constantes positives ε_0 et M telles que

$$M^{-1} \leq \| [A_\varepsilon]^{-1} \|_{L^\infty(\Omega^+)} + \| A_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega^+)} \leq M \quad \forall \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Dans ce qui suit, M indiquera plusieurs constantes positives indépendantes de ε . L'estimation (4.8) implique

$$\varepsilon \| \nabla_\Gamma p_\varepsilon^+ \|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \| \partial_t p_\varepsilon^+ \|_{0,\Omega^+}^2 + \| p_\varepsilon^- \|_{1,\Omega}^2 \leq M \| u^\varepsilon \|_Y \quad (\varepsilon \| p_\varepsilon^+ \|_{0,\Omega^+} + \| p_\varepsilon^- \|_{1,\Omega})$$

Sachant que le problème est posé seulement dans un voisinage de $\varepsilon = 0$, la suite de la preuve s'obtient en utilisant l'estimation suivante :

$$\| w^+ \|_{0,\Omega^+} \leq M (\varepsilon \| \partial_t w_\varepsilon^+ \|_{0,\Omega^+} + \| w^- \|_{1,\Omega}).$$

La constante M est indépendante de w dans Y . La dernière estimation est une conséquence de la formule

$$w^+(x_\Gamma, t) = w^-(x_\Gamma) + \int_{[0,t]} \partial_t w^+(x_\Gamma, s) ds, \quad x_\Gamma \in \Gamma.$$

■

4.3.2 Passage a la limite dans l'alternative de Fredholm.

Les estimations (4.10) établies dans la proposition 4.2 entraîne l'existence d'une constante C indépendante du choix de $u^\varepsilon \in Y$ telle que

$$\| p_\varepsilon \|_Y \leq C \| u^\varepsilon \|_Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4.11)$$

Cette estimation assure l'existence d'une sous-suite notée encore $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, qui converge faiblement dans Y vers une limite $p_0 = (p_0^+, p_0^-)$. La proposition suivante caractérise p_0^- .

Proposition 4.3 *Selon le choix des conditions aux bords imposée sur Γ_ε , Le problème limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ fait apparaître les espaces suivants :*

$$W(\Omega) = H^1(\Omega) \quad \text{ou} \quad W(\Omega) = H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \{ u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \mid u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

Le p_0^- est la solution unique du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} p_0^- \in W(\Omega) \quad \forall w^- \in W(\Omega), \\ a^-(p_0^-, w^-) = b_k^-(v_i^0, w^-). \end{cases} \quad (4.12)$$

De plus p_0^+ est une fonction indépendante de t dans Ω^+ . D'autre part

$$p_0 = (p_0^+, p_0^-) \in X, \quad \text{où} \quad p_0^+(\cdot, t) = p_0^- \text{ sur } \Gamma, \quad \forall t \in [0,1].$$

Démonstration. L'estimation (4.10) donne $\partial_t p_0^+ = 0$. Grâce à la condition de transmission contenue dans la définition de l'espace Y , on obtient

$$p_0^+(\cdot, t) = p_0^- \text{ sur } \Gamma \quad \forall t \in [0, 1].$$

Soit w^- fixée et suffisamment régulier dans $W(\Omega)$, la régularité de w^- sur Γ permet de prolonger w^- dans Ω^+ . Ainsi on peut définir une fonction $w = (w^+, w^-) \in X$ qui vérifie la propriété ci-dessus de p_0 . Pour la condition de Dirichlet, elle se traduit simplement par $w^+ = 0$ sur Γ . Quant à la condition de Neumann, on utilise $\partial_t w^+ = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} \nabla_\Gamma w^+ = 0$ et les estimations (4.10) pour déduire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon a^+(\varepsilon, p_\varepsilon^+, w^+) = 0.$$

En effectuant un passage à la limite dans (4.9), on voit que le problème (4.12) est satisfait pour toute fonction w^- régulière. Comme toute fonction de $W(\Omega)$ peut être approchée par une suite de fonctions régulières, on déduit que p_0^- est une solution du problème (4.12). La formulation forte du problème (4.12) s'écrit :

$$\begin{cases} p_0^- \in H^1(\Omega), \\ \Delta p_0^- = k_i^2 u_i^0 \text{ dans } D'(\Omega), \\ p_0^- = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ ou } \partial_n p_0^- = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \partial_n p_0^- + S p_0^- = R_k v_i^0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{cases}$$

Dans l'équation ci-dessus, n indique la normale à Σ . Notons que selon les théorèmes de régularité classiques pour les équations elliptiques dans des domaines réguliers avec la condition de Dirichlet ou de Neumann sur le bord, p_0^- a la régularité H^3 au voisinage de Γ . Par conséquent p_0^- étant en particulier dans $H^1(\Gamma)$, donc p_0^- est dans X . ■

Définition 4.4 Pour toute suite $(p_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ qui converge vers p_0 on peut définir un opérateur

$$\begin{cases} T_0 : Y \rightarrow X \\ T_0 w = p_0 \end{cases}$$

Tel que T_0 soit borné de Y dans X

4.3.3 Résultat de stabilité

L'étude de la stabilité suggère une manipulation plus précise de la convergence de p_ε vers p_0 . Noter qu'ici l'argument principal est la régularité de p_0^- .

Proposition 4.5 *Il existe une constante C indépendante de $\varepsilon > 0$ et de $u^\varepsilon \in Y$ tel que*

$$\|p_\varepsilon - p_0\|_Y \leq C \sqrt{\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_Y. \quad (4.13)$$

Démonstration. Nous commençons par la condition de frontière de Neumann. Les définitions (4.9) et (4.12) respectivement de p_ε et de p_0 , permettent d'écrire

$$\epsilon a^+ (\varepsilon, p_\varepsilon^+ - p_0^+, w^+) + a^- (p_\varepsilon^- - p_0^-, w^-) = \epsilon b^+ (\varepsilon, u_\varepsilon^+, w^+) - \epsilon a^+ (\varepsilon, p_0^+, w^+).$$

En utilisant le fait que $\partial_t p_0^+ = 0$, on obtient

$$|a^+ (\varepsilon, p_0^+, w^+)| \leq C_1 \|\nabla_\Gamma p_0^+\|_{0,\Omega^+} \|\nabla_\Gamma w^+\|_{0,\Omega^+}.$$

Le point clé est d'employer la définition de p_0^+ et la régularité p_0^- qui est une conséquence de la régularité de Γ . Nous obtenons les estimations suivantes :

$$\|\nabla_\Gamma p_0^+\|_{0,\Omega^+} \leq C_2 \|p_0^-\|_{1,\Gamma}, \quad \|p_0^-\|_{1,\Gamma} \leq C_3 \|w^-\|_{0,\Omega}.$$

En notant $\theta_\varepsilon = (p_\varepsilon - p_0)$ on obtient

$$\|\theta_\varepsilon^+\|_{\Omega^+} \leq C' [\|\partial_t \theta_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+} + \|\theta_\varepsilon^-\|_{\Omega}], \quad (4.14)$$

Cette inégalité est une conséquence directe de la formule suivante :

$$\theta_\varepsilon^+ (x_\Gamma, t) = \theta_\varepsilon^- (x_\Gamma) + \int_{\Omega^+} \partial_t \theta_\varepsilon^+ (x_\Gamma, s) \, ds.$$

Comme

$$\epsilon a^+ (\varepsilon, \theta_\varepsilon^+, \theta_\varepsilon^+) + a^- (\theta_\varepsilon^-, \theta_\varepsilon^-) = \epsilon b^+ (\varepsilon, v_\varepsilon^+, \theta_\varepsilon^+) - \epsilon a^+ (\varepsilon, p_0^+, \theta_\varepsilon^+).$$

De façon tout à fait identique à la preuve de la proposition 4.2, nous obtenons aussi que

$$\epsilon a^+ (\varepsilon, \theta_\varepsilon^+, \theta_\varepsilon^+) + a^- (\theta_\varepsilon^-, \theta_\varepsilon^-) \geq M' \left[\varepsilon \|\nabla_\Gamma \theta_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t \theta_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|\theta_\varepsilon^-\|_{1,\Omega}^2 \right].$$

Il est facile de démontrer par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par la continuité des formes bilinéaires a^+ et b^+ et le fait que q soit borné que

$$\epsilon b^+ (\varepsilon, v_\varepsilon^+, \theta_\varepsilon^+) - \epsilon a^+ (\varepsilon, p_0^+, \theta_\varepsilon^+) \leq \varepsilon \|u^\varepsilon\|_Y M' [\|\nabla_\Gamma \theta_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t \theta_\varepsilon^+\|_{0,\Omega^+} + \|\theta_\varepsilon^-\|_{\Omega}].$$

Finalement nous obtenons

$$\varepsilon \|\nabla_{\Gamma} \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \|\theta_{\varepsilon}^{-}\|_{1,\Omega}^2 \leq \varepsilon M \|u^{\varepsilon}\|_Y \left[\|\nabla_{\Gamma} \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|\partial_t \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|\theta_{\varepsilon}^{-}\|_{\Omega} \right]$$

Ceci implique alors que

$$\begin{aligned} \|p_{\varepsilon} - p_0\|_Y^2 &\leq \varepsilon M \|u^{\varepsilon}\|_Y \left[\|\nabla_{\Gamma} \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|\partial_t \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|\theta_{\varepsilon}^{-}\|_{\Omega} \right] \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} M \|u^{\varepsilon}\|_Y \left[\sqrt{\varepsilon} \|\nabla_{\Gamma} \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\partial_t \theta_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|\theta_{\varepsilon}^{-}\|_{\Omega} \right] \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} C \|u^{\varepsilon}\|_Y \|p_{\varepsilon} - p_0\|_Y. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|p_{\varepsilon} - p_0\|_Y \leq C \sqrt{\varepsilon} \|u^{\varepsilon}\|_Y.$$

Nous allons maintenant considérer le cas de Dirichlet. La différence du cas précédent est le fait que p_{ε}^{-} n'est pas une fonction test valide pour le problème (4.12). En utilisant la formule de Green et la régularité de p_0^{-} sur Γ on écrit

$$a^{-}(p_0^{-}, w^{-}) = b_k^{-}(u_{\varepsilon}^{-}, w^{-}) + \int_{\Gamma} \partial_n p_0^{-} w^{-} d\gamma \quad \forall w^{-} \in H^1(\Omega).$$

Il faut rappeler que

$$p_{\varepsilon}^{+}(x_{\Gamma}, t) = p_{\varepsilon}^{-}(x_{\Gamma}) + \int_{[0,t]} \partial_t p_{\varepsilon}^{+}(x_{\Gamma}, s) ds.$$

Le fait que $p_{\varepsilon}^{+}(x_{\Gamma}, 1) = 0$ permet d'écrire

$$\|p_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}} + \|p_{\varepsilon}^{-}\|_{\Gamma} \leq c \|\partial_t p_{\varepsilon}^{+}\|_{\Omega^{+}}.$$

Comme p_0^{-} est régulier alors on a l'estimation suivante

$$\|\partial_n p_0^{-}\|_{\Gamma} \leq c \|u_{\varepsilon}^{-}\|_{0;\Omega}.$$

Un raisonnement semblable au cas de la condition de Neumann, permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\varepsilon \|\nabla_{\Gamma} p_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t p_{\varepsilon}^{+}\|_{0,\Omega^{+}}^2 + \|\theta_{\varepsilon}^{-}\|_{1,\Omega}^2 \leq C \|u^{\varepsilon}\|_Y \|\partial_t p_{\varepsilon}^{+}\|_{0;\Omega^{+}},$$

d'où

$$\|p_{\varepsilon} - p_0\|_Y \leq C \sqrt{\varepsilon} \|u^{\varepsilon}\|_Y.$$

■

Remarque : La proposition précédente permet de justifier la propriété de stabilité par rapport à ε de la solution du problème (4.7).

lemme 4.6 *Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$\| (I + T_\varepsilon) u^\varepsilon \|_Y \geq \gamma \| u^\varepsilon \|_Y \quad \forall u^\varepsilon \in Y,$$

pour pour $\varepsilon > 0$

Démonstration. Par des techniques standard, on montre que T_0 est un opérateur compact de Y dans Y (et même de X dans X). Dans l'intention d'utiliser l'alternative de Fredholm, nous allons montrer que $(I + T_0)$ est injectif. Soit $w \in Y$ qui satisfait

$$(I + T_0) w = 0$$

Pour un tel $w \in X$, nous utilisons l'opérateur de Steklov-poincaré pour prolonger w^- à tout Ω_∞ . Alors, w^- est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} w^- \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}) \\ \Delta w^- + k_i^2 w^- = 0 \text{ dans } D'(\Omega_\infty) \\ w^- = 0 \text{ ou } \partial_n w^- = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial w^-}{\partial r} - i k_i w^- \right) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

En vertu de l'unicité de la solution du problème (4.15), $w^- = 0$, le théorème 4.1 et par la définition de $T_0 w^+ = -w^+$, on obtient $w = 0$. Par ailleurs, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $\| (I + T_0) v^\varepsilon \|_Y \geq \gamma \| v^\varepsilon \|_Y$. On montre alors qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\| (I + T_\varepsilon) u^\varepsilon \|_Y \geq \gamma \| u^\varepsilon \|_Y$$

Mettons en oeuvre la preuve du théorème principal pour la prochaine analyse asymptotique du problème (4.7). ■

Théorème 4.7 *Soit $\{L_\varepsilon\}$ une famille donnée de formes linéaires sur X satisfaisant*

$$|L_\varepsilon w| \leq \theta(\varepsilon) \left\{ \sqrt{\varepsilon} \|\nabla_\Gamma w^+\|_{0,\Omega^+} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\partial_t w^+\|_{0,\Omega^+} + \|w^-\|_\Omega \right\}$$

Alors il existe une constante C indépendante de $\varepsilon > 0$ telle que la solution du problème variationnel suivant

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in X \quad \forall w^\varepsilon \in X \\ \epsilon a^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) + \epsilon b^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) + a_k^-(u_i^\varepsilon, w^-) = L_\varepsilon(w^\varepsilon) \end{cases}$$

Satisfait

$$\|u^\varepsilon\|_Y \leq C \theta(\varepsilon) \quad (4.16)$$

où $\theta(\varepsilon)$ est une fonction du ε non nécessairement bornée quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Démonstration. On note $u^\varepsilon = (I + T_\varepsilon)w$. Par conséquence de la définition elle-même de l'opérateur T_ε , u^ε est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in X, \forall w^\varepsilon \in X \\ \epsilon a^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, w^+) + a^-(u_i^\varepsilon, w^-) = L_\varepsilon(w^\varepsilon) \end{cases}$$

Grace à l'estimation (4.8) et par définition on a

$$a^-(u_i^\varepsilon, u_i^\varepsilon) + \epsilon a^+(\varepsilon, u_e^\varepsilon, u_e^\varepsilon) \geq \beta \left(\varepsilon \|\nabla_\Gamma u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+}^2 + \|u_i^\varepsilon\|_\Omega^2 \right)$$

alors

$$\varepsilon \|\nabla_\Gamma u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+}^2 + \|u_i^\varepsilon\|_\Omega^2 \leq \theta(\varepsilon) \left\{ \sqrt{\varepsilon} \|\nabla_\Gamma u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0,\Omega^+} + \|u_i^\varepsilon\|_\Omega \right\}.$$

Ce qui donne directement l'estimation (4.16). Le lemme 4.6 de stabilité termine la preuve du théorème. ■

4.4 Développement asymptotique et identification formelle

Contrairement au chapitre précédent où l'on a effectué un développement asymptotique à partir des équations et des conditions aux limites du problème, nous allons ici exposer une méthode qui consiste à faire un développement asymptotique à partir de la formulation variationnelle. Ces deux méthodes sont bien entendu équivalentes. Seulement, la dernière en question est bien plus rapide quoique elle est moins explicite.

Notre objectif est de construire un développement asymptotique de la solution du problème (4.1) à partir de la formulation variationnelle (4.7). Pour mettre en oeuvre notre processus asymptotique, on développe d'abord $A_\varepsilon^{-2} = (I + \epsilon t C)^{-2}$, par un résultat d'algèbre de Banach comme suit :

$$A_\varepsilon^{-2} = I - 2\epsilon t C + 3(\epsilon t C)^2 - 4(\epsilon t C)^3 + \dots + m(-\epsilon t C)^{m-1} + (-\epsilon t C)^m (mA_\varepsilon^{-1} + A_\varepsilon^{-2}).$$

Rappelons que $\det(A_\varepsilon) = 1 + 2\varepsilon t H + \varepsilon^2 t^2 G$, où $H = \frac{1}{2} \text{tr} C$ est la courbure moyenne de la surface Γ et $G = \det C$ est la Gaussienne de la surface Γ , les formes bilinéaires a^+, b^+ prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned} a^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) &= \varepsilon^{-2} a_{0,2}^+ + \varepsilon^{-1} a_{1,2}^+ + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+) + \varepsilon a_{1,1}^+ + \dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots + \varepsilon^{m-1} a_{m-1,1}^+ + \varepsilon^m r_m^+(\varepsilon, \cdot, \cdot), \\ b^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) &= b_0^+ + \varepsilon b_1^+ + \varepsilon^2 b_2^+. \end{aligned} \quad (4.17)$$

En identifiant les termes de même puissance de ε , on obtient respectivement les expressions des $b_{k'}^+$ $k' = 0.1.2$ et les expressions de $a_{k,l}^+$:

$$\begin{aligned} b_0^+(w, u) &= - \int_{\Omega^+} \alpha k_e^2 q w u d\Omega^+, \quad b_1^+(w, u) = - \int_{\Omega^+} 2\alpha k_e^2 t H q w u d\Omega^+, \\ b_2^+(w, u) &= - \int_{\Omega^+} \alpha k_e^2 G t^2 q w u d\Omega^+, \\ a_{0,2}^+(w, u) &= \int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w \partial_t u d\Omega^+, \quad a_{1,2}^+ = \int_{\Omega^+} \alpha 2t H \partial_t w \partial_t u d\Omega^+, \\ (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+)(w, u) &= \int_{\Omega^+} [\alpha t^2 G \partial_t w \partial_t u + \alpha \nabla_\Gamma w \nabla_\Gamma u] d\Omega^+, \\ a_{1,1}^+(w, u) &= \int_{\Omega^+} \alpha 2 [-C + H I] t \nabla_\Gamma w \nabla_\Gamma u d\Omega^+, \\ a_{2,1}^+(w, u) &= \int_{\Omega^+} \alpha [3C^2 - 4HC + GI] t^2 \nabla_\Gamma w \nabla_\Gamma u d\Omega^+. \end{aligned}$$

Par récurrence sur m on obtient

$$a_{m-1,1}^+ = \int_{\Omega^+} \alpha [(m-2) G C^{m-3} - (m-1) 2H C^{m-2} + m C^{m-1}] (-t)^{m-1} \nabla_\Gamma w \nabla_\Gamma u d\Omega^+,$$

et

$$\begin{aligned} r_m^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) &= \int_{\Omega^+} \alpha (B_{m,\varepsilon} + 2H B_{m-1,\varepsilon} + G B_{m-2,\varepsilon}) t^m d\Omega^+ \quad \text{tel que} \\ B_{m,\varepsilon} &= (-C)^m (m A_\varepsilon^{-1} + A_\varepsilon^{-2}) \quad \text{si } m \geq 0 \text{ et } B_{m,\varepsilon} = A_\varepsilon^{-2} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

4.4.1 Une hiérarchie d'équations

L'épaisseur ε de la couche mince $\Omega_\varepsilon^\varepsilon$ est supposée aussi petite que l'on souhaite : cela nous permet de postuler l'existence d'un développement asymptotique de la solution $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon, u_e^\varepsilon)$ du problème (4.2) de la forme suivante

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= u_0^\varepsilon + \varepsilon u_1^\varepsilon + \varepsilon^2 u_2^\varepsilon + \dots \dots \dots + \varepsilon^m u_m^\varepsilon + \varepsilon^{m+1} u_{m,\varepsilon}, \\ u_i^\varepsilon &= u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \dots \dots \dots + \varepsilon^m u_i^m + \varepsilon^{m+1} u_i^{\varepsilon,m} \quad \text{dans } \Omega_\infty, \\ u_e^\varepsilon &= u_e^0 + \varepsilon u_e^1 + \varepsilon^2 u_e^2 + \dots \dots \dots + \varepsilon^m u_e^m + \varepsilon^{m+1} u_e^{\varepsilon,m} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.18)$$

où $u_{m,\varepsilon} = (u_i^{\varepsilon,m}; u_e^{\varepsilon,m})$ est le reste d'ordre $m + 1$ dans X et de plus

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0 \quad \|u_{n,\varepsilon}\|_Y \leq C.$$

La norme du reste est uniformément bornée dans Y .

Le problème (4.7) s'écrit :

$$\begin{cases} u^\varepsilon \in X & w^\varepsilon \in X, \\ \varepsilon^{-1} a_{0,2}^+(u_\varepsilon^+, w^+) + a_{1,2}^+(u_\varepsilon^+, w^+) + \varepsilon a_{0,2}^+(u_\varepsilon^+, w^+) \\ + \sum_{\ell=0}^{\ell=m-1} \varepsilon^{\ell+1} a_{\ell,1}^+(u_\varepsilon^+, w^+) \\ + \varepsilon b_0^+ + \varepsilon^2 b_1^+ + \varepsilon^3 b_2^+ + a_k^-(u_\varepsilon^-, w^-) = L(\varepsilon, w^+, w^-). \end{cases} \quad (4.19)$$

En insérant l'ansatz (4.18) dans (4.19) et en identifiant les termes de même puissance de ε on obtient :

$$a_{0,2}^+(u_e^0, w^+) = 0, \quad (4.20)$$

$$a_k^-(u_i^0, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^1, w^+) = \int_{\Omega} h w^- d\Omega, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} a_k^-(u_i^1, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^1, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+)(u_e^0, w^+) \\ + a_{0,2}^+(u_e^2, w^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} a_k^-(u_i^2, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^2, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+)(u_e^1, w^+) \\ + (a_{1,1}^+ + b_1^+)(u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^3, w^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} a_k^-(u_i^3, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^3, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+)(u_e^2, w^+) \\ + (a_{1,1}^+ + b_1^+)(u_e^1, w^+) + (a_{2,1}^+ + b_2^+)(u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^4, w^+) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} a_k^-(u_i^m, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^m, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+)(u_e^{m-1}, w^+) \\ + (a_{1,1}^+ + b_1^+)(u_e^{m-2}, w^+) + (a_{2,1}^+ + b_2^+)(u_e^{m-3}, w^+) \\ + \sum_{\ell=4}^{\ell=m} a_{\ell-1,2}^+(u_e^{m-1}, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^{m+1}, w^+) = 0 \quad \ell \geq 4. \end{aligned} \quad (4.25)$$

La régularité du second membre du problème (4.7) et les équations au-dessus permettent de déterminer les termes à tout ordre. Ci-après, nous donnons des calculs explicites pour seulement les quatres premières termes. Nous traitons les deux cas de conditions aux limite séparément

4.4.2 Détermination des premiers termes : cas de la condition de Neumann

Détermination de u_i^0 L'équation (4.20) donne

$$\int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w \partial_t u_e^0(x_\Gamma, t) d\Gamma dt = 0 \quad \forall w \in X_N.$$

Par conséquent

$$\partial_t u_i^0(x_\Gamma, t) = 0,$$

d'où

$$u_e^0(x_\Gamma, t) = u_e^0(x_\Gamma), \quad x_\Gamma \in \Gamma. \quad (4.26)$$

Dans (4.21) nous choisissons w dans X_N , tel que $w^- = 0$, on obtient

$$\int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w \partial_t u_e^1 d\Gamma dt = 0,$$

une intégration par partie en t donne

$$\partial_t u_e^1 = 0. \quad (4.27)$$

Par conséquent, (4.21) est réduit à

$$\int_{\Omega} [\nabla u_i^0 \nabla w^- dx - k_i^2 u_i^0 w^-] d\Omega + \langle S_k u_i^0, w^- \rangle = \int_{\Omega} h w^- d\Omega \quad \forall w^- \in H^1(\Omega)$$

À l'aide de la formule de Green et l'opérateur de Steklov-Poincaré, on déduit que u_i^0 vérifie le problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^0 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = -h \text{ dans } D'(\Omega_\infty), \\ \partial_n u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^0 \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^0 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Ainsi, d'après la régularité d'une solution d'un problème homogène de Neumann ou de Dirichlet, on déduit que la trace de u_i^0 sur Γ est dans $H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma)$ si h appartient à $H^s(\overline{\Omega})$ pour $s \geq 0$. Donc pour h dans $L^2(\Omega)$, (4.26) prouve que u^0 est un élément bien défini dans X .

Maintenant, pour déterminer les termes d'ordres supérieurs dans le développement asymptotique, nous utilisons le lemme suivant : cas de la condition de Neumann

lemme 4.8 Soit $\ell \in L^2(\Omega^+)$ et ψ une fonction vectorielle dans $L^2(\Omega^+, \mathbb{C}^3)$, tels que l'application partielle $t \rightarrow \psi(\cdot, t)$ définie dans $[0, 1]$ soit à valeurs dans l'espace des champs de vecteurs tangents à Γ et que $\text{div}_\Gamma \psi \in L^2(\Omega^+)$. Alors, la solution φ de l'équation variationnelle

$$\mathcal{L}(v^+) = \int_{\Omega^+} \varphi \partial_y v^+ d\Gamma dt + \int_{\Omega^+} (\psi \cdot \nabla_\Gamma v^+ + \ell v^+) d\Omega^+ = 0, \quad (4.29)$$

pour tout $v^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+)$ tel que $H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+) = \{v \in H^1(\Omega^+) | v(\cdot, 0) = 0\}$ est explicitement déterminée par

$$\varphi(x_\Gamma, t) = \int_{[t,1]} (\text{div}_\Gamma \psi - \ell)(x_\Gamma, \mu) d\mu, \quad (4.30)$$

où div_Γ est la divergence surfacique du champs de vecteur $\psi(\cdot, t)$ tangent à Γ . De plus si $v^+(\cdot, 0) \neq 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(v^+) &= - \int_\Gamma \varphi(x_\Gamma, 0) v^+(x_\Gamma, 0) d\Gamma \\ &= \int_\Gamma \left(\int_{(0,1)} (\text{div}_\Gamma \psi - \ell)(x_\Gamma, \mu) dt \right) v^+(x_\Gamma, 0) d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Détermination de u_i^1 Nous choisissons de nouveau $w \in X_N$ dans (4.22) tel que $w^- = 0$

$$a_{1,2}^+(u_e^1, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+) (u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+ (u_e^2, w^+) = 0 \quad \forall w^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+).$$

Comme $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $u_i^0 \in H^2(\Gamma)$, $\Delta_\Gamma u_i^0 = \text{div}_\Gamma(\nabla u_i^0) \in L^2(\Gamma)$. En utilisant le lemme 4.8 pour $\varphi = \alpha \partial_t u_e^2$, $\psi = \alpha \nabla_\Gamma u_i^0$, $\ell = -\alpha k_e^2 q u_e^0 = -\alpha k_e^2 q u_i^0$, il vient que

$$\partial_t u_e^2 = (1-t) \Delta_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) + u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \int_{[t,1]} q(x_\Gamma, \mu) d\mu.$$

En utilisant la formule (4.31) on obtient

$$a_k^-(u_i^1, w^-) - \int_\Gamma \left[\alpha \Delta_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) + \alpha u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \int_{[0,1]} q(x_\Gamma, \mu) d\mu \right] w^- d\Gamma = 0 \quad \forall w^- \in H^1(\Omega).$$

On note

$$\widehat{q}(x_\Gamma) = \int_{[0,1]} q(x_\Gamma, t) dt.$$

Par conséquent

$$a_k^-(u_i^1, w^-) - \int_\Gamma \left[\alpha \Delta_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) + \alpha u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \widehat{q}(x_\Gamma) \right] w^- d\Gamma = 0 \quad \forall w^- \in H^1(\Omega).$$

L'utilisation de la formule de Green et l'opérateur de Steklov-Poincaré entraînent d'une manière équivalente que u_i^1 est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^1 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_\infty), \\ \partial_n u_i^1 - \alpha(\Delta_\Gamma + k_e^2 \widehat{q}) u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^1 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^1 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Puisque $\partial_n u_i^1 \in L^2(\Gamma)$, la régularité de la solution du problème de Neumann entraîne $u_i^1 \in H^1(\Gamma)$. En utilisant (4.27), nous pouvons définir u^ε dans X_N par

$$u_e^1(x_\Gamma, t) = u_i^1(x_\Gamma) \text{ dans } \Omega^+.$$

Détermination de u_i^2

La détermination de u_i^2 se fait de façon tout à fait identique à u_i^1 . La formule (4.30) et l'utilisation de (4.23) avec $w^- = 0$ donne

$$a_{1,2}^+(u_e^2, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+) (u_e^1, w^+) + (a_{1,1}^+ + b_1^+) (u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+ (u_e^3, w^+) = 0.$$

On pose dans la suite

$$\tilde{q}^1(x_\Gamma, t) = \int_{[t,1]} q(x_\Gamma, \mu) d\mu,$$

alors

$$\partial_t u_e^2 = (1-t) \Delta_\Gamma u_i^0 + u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \tilde{q}^1(x_\Gamma, t).$$

En substituant u_e^1 , u_e^2 et u_e^3 dans les formes bilinéaires puis en intégrant par parties en t , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} [\alpha 2t (-C + HI) \nabla_\Gamma u_i^0 + \alpha \nabla_\Gamma u_i^1 + 2(1-2t) \alpha H \nabla_\Gamma u_i^0] \nabla_\Gamma w^+ d\Gamma dt \\ & + \int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w^+ \partial_t u_e^3 d\Gamma dt + \int_{\Omega^+} [-u_i^0 \alpha 2H k_e^2 \tilde{q}^1 - \alpha k_e^2 q u_i^1] w^+ d\Gamma dt = 0. \end{aligned}$$

Comme $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, $u_i^1 \in H^2(\Gamma)$, nous allons maintenant considérer dans la formule (4.29)

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha \partial_t u_e^3; \quad \ell = -u_e^0 \alpha 2H k_e^2 \tilde{q}^1 - \alpha k_e^2 q u_e^1 \\ \psi &= [\alpha 2t (-C + HI) \nabla_\Gamma u_e^0 + \alpha \nabla_\Gamma u_e^1 + (1-2t) \alpha 2H \nabla_\Gamma u_i^0] \end{aligned}$$

On note aussi

$$\tilde{q}^2(x_\Gamma, t) = \int_{[t,1]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t u_e^3(x_\Gamma, t) &= (1 - t^2) \operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma u_e^0 + (1 - t) \Delta_\Gamma u_e^1 \\ &+ (-t + t^2) 2H \Delta_\Gamma u_e^0 - u_e^0 2H k_e^2 \tilde{q}^2 - k_e^2 u_e^1 \tilde{q}^1. \end{aligned} \quad (4.33)$$

En utilisant la formule (4.31), on obtient

$$\begin{aligned} a_k^-(u_i^2, w^-) &= \int_\Gamma [\alpha \operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma u_e^0 + \alpha \Delta_\Gamma u_e^1] w^-(x_\Gamma, 0) d\Gamma \\ &+ \int_\Gamma \left[u_e^0 \alpha 2H k_e^2 \int_{[0,1]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, t) dt + \alpha k_e^2 u_e^1 \hat{q} \right] w^-(x_\Gamma, 0) d\Gamma \quad \forall w^- \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

La formule de Green et l'opérateur Steklov-Poincaré entraînent d'une manière équivalente que u_i^2 est une solution de problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^2 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_\infty), \\ \partial_n u_i^2 = \phi(x_\Gamma) \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^2 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^2 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Où

$$\phi(x_\Gamma) = [\alpha \operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma u_e^0 + \alpha \Delta_\Gamma u_e^1] + \alpha 2H k_e^2 \tilde{q}^2(x_\Gamma, 0) u_e^0 + \alpha k_e^2 u_e^1 \hat{q}.$$

Les données sont suffisamment régulières, donc l'expression de u_e^2 peut-être déterminée par

$$u_e^2 = u_i^2 + \frac{1}{2} (2t - t^2) \Delta_\Gamma u_i^0 + u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu.$$

Détermination de u_i^3

On choisit $w \in X_N$ tel que $w^- = 0$ dans (4.24)

$$\begin{aligned} &a_{1,2}^+(u_e^3, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+) (u_e^2, w^+) \\ &+ (a_{1,1}^+ + b_1^+) (u_e^1, w^+) + (a_{2,1}^+ + b_2^+) (u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+ (u_e^4, w^+) = 0 \quad \forall w^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+). \end{aligned}$$

En substituant u_e^1 et u_e^2, u_e^3, u_e^4 dans les formes bilinéaires puis en intégrant par parties en t on obtient :

$$\varphi = \alpha \partial_t u_e^4$$

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha \Delta_\Gamma u_i^2 + \frac{\alpha}{2} (2t - t^2) \operatorname{div}_\Gamma \nabla_\Gamma (\Delta_\Gamma u_i^0) + \alpha k_e^2 \operatorname{div}_\Gamma \left[\nabla_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu \right] \\ &+ \alpha k_e^2 \operatorname{div}_\Gamma \left[u_i^0(x_\Gamma) \nabla_\Gamma \left[\int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu \right] \right] + \alpha 2t \operatorname{div}_\Gamma [-C + HI] \nabla_\Gamma u_i^1 \\ &+ \alpha t^2 \operatorname{div}_\Gamma [3C^2 - 4HC + GI] \nabla_\Gamma u_e^0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell = & (-1 + 3t^2) \alpha 2H \operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma u_i^0 + (-1 + 2t) \alpha 2H \Delta_\Gamma u_i^1 \\
& + (-3t^2 + 2t) \alpha 4H^2 \Delta_\Gamma u_i^0 - \alpha k_e^2 G t^2 q u_e^0 \\
& + u_i^0 4\alpha H^2 k_e^2 (\tilde{q}^2 - t\tilde{q}^1) + \alpha 2H k_e^2 u_i^1 (\tilde{q}^1 - tq) + G\alpha (-2t + 3t^2) \Delta_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) \\
& + \alpha k_e^2 G u_i^0(x_\Gamma) (-2t\tilde{q}^1 + t^2 q) - \alpha k_e^2 q u_i^2 - \frac{1}{2} (2t - t^2) \alpha k_e^2 q \Delta_\Gamma u_i^0 \\
& - u_i^0(x_\Gamma) k_e^2 \alpha k_e^2 q \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu - 2\alpha k_e^2 t H q u_i^1.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule (4.31) on obtient

$$a_k^-(u_i^3, w^-) = \int_\Gamma \left(\int_{(0,1)} (\operatorname{div}_\Gamma \psi - \ell)(x_\Gamma, t) dt \right) v^+(x_\Gamma, 0) d\Gamma$$

Or, $h \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$ et $u_i^3 \in H^4(\Gamma)$, la formule de Green et l'opérateur Steklov-Poincaré entraînent, d'une manière équivalente, que u_i^3 est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^3 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^3 + k_e^2 u_i^3 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_\infty), \\ \partial_n u_i^3 = \eta(x_\Gamma) \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^3 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_e u_i^3 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Où nous avons noté :

$$\begin{aligned}
\eta(x_\Gamma) = & 4\alpha H^2 k_e^2 u_i^0 \int_{[0,1]} (-\tilde{q}^2 + t\tilde{q}^1) dt - \alpha 2H k_e^2 u_i^1 \int_{[0,1]} (\tilde{q}^1 - tq) dt \\
& + \alpha k_e^2 G u_i^0 \int_{[0,1]} 2t\tilde{q}^1 dt + \alpha k_e^2 u_i^2 \int_{[0,1]} q dt + \frac{\alpha k_e^2}{2} \Delta_\Gamma u_i^0 \int_{[0,1]} (2t - t^2) q dt \\
& + \alpha k_e^4 u_i^0 \int_{[0,1]} \left[q \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu \right] dt + 2\alpha k_e^2 t H q u_i^1 \\
& + \alpha \Delta_\Gamma u_i^2 + \frac{\alpha}{3} \Delta_\Gamma (\Delta_\Gamma u_i^0) + \alpha \operatorname{div}_\Gamma [-C + HI] \nabla_\Gamma u_i^1 \\
& + \alpha k_e^2 \operatorname{div}_\Gamma \left[\nabla_\Gamma u_i^0(x_\Gamma) \int_{[0,1]} \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu dt \right] \\
& + \alpha k_e^2 \operatorname{div}_\Gamma \left[u_i^0(x_\Gamma) \nabla_\Gamma \left[\int_{[0,1]} \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu dt \right] \right] + \frac{\alpha}{3} \operatorname{div}_\Gamma [3C^2 - 4HC + GI] \nabla_\Gamma u_e^0.
\end{aligned}$$

Les données sont suffisamment régulières, donc l'expression de u_e^3 peut-être déterminée par

$$\begin{aligned}
u_e^3(x_\Gamma, t) = & \frac{1}{3} (3t - t^3) \operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma u_e^0 + \frac{1}{2} (2t - t^2) \Delta_\Gamma u_e^1 \\
& + \frac{1}{6} (-3t^2 + 2t^3) 2H \Delta_\Gamma u_i^0 - 2u_e^0 H k_e^2 \int_{[0,t]} \tilde{q}^2(x_\Gamma, \mu) d\mu - k_e^2 u_e^1 \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu.
\end{aligned}$$

4.4.3 Détermination des premiers termes : cas de la condition de Dirichlet

Détermination de u_i^0

Comme ci-dessus nous obtenons d'abord de (4.20), $\partial_t u_e^0 = 0$. Mais maintenant la condition $u_e^0(., 1)$ donne $u_e^0 = 0$, ce qui implique $u_i^0 = 0$ sur Γ . par conséquent, u_i^0 vérifie l'équation variationnelle suivante :

$$a_k^-(u_i^0, w^-) = \int_{\Omega} h w^- d\Omega \quad \forall w^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega).$$

Alors par une intégration par parties et l'opérateur Steklov-Poincaré, on déduit que u_i^0 est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^0 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_{\infty}}), \\ \Delta u_i^0 + k_i^2 u_i^0 = h \text{ dans } D'(\Omega_{\infty}), \\ u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^0 \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^0 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

lemme 4.9 Soit ψ une fonction vectorielle dans $L^2(\Omega^+, \mathbb{C}^3)$ tel que l'application partiel $t \rightarrow \psi(t)$ défini dans $[0,1]$ soit à valeurs dans l'espace des champs de vecteurs tangents à Γ et que $\text{div}_{\Gamma} \psi \in L^2(\Omega^+)$. Soient δ, ρ , et r des fonctions données respectivement dans $H^1(0,1; L^2(\Gamma))$, $L^2(\Omega^+)$ et $L^2(\Gamma)$. Alors l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega^+} \partial_t \varphi \partial_t v^+ d\Gamma dt + \int_{\Omega^+} (\psi \cdot \nabla_{\Gamma} v^+ + \delta \partial_t v^+ + \rho v^+) d\Gamma dt + \int_{\Gamma} r v^+ d\Gamma = 0. \quad (4.37)$$

Pour tout v^+ fixé dans $H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega^+) = \{v \in H^1(\Omega^+) | v(., 1) = 0\}$ détermine une unique $\varphi \in H^1(0,1; L^2(\Gamma))$ telle que $\varphi(., 1) = 0$, donné explicitement par

$$\theta(x_{\Gamma}, t) = \int_{[0,t]} (\rho - \text{div}_{\Gamma} \psi)(x_{\Gamma}, \mu) d\mu - \delta(x_{\Gamma}, t),$$

$$\varphi(x_{\Gamma}, 0) = - \int_{[0,1]} \theta(x_{\Gamma}, t) dt - r(x_{\Gamma}),$$

$$\varphi(x_{\Gamma}, t) = (1-t) \varphi(x_{\Gamma}, 0) - t \int_{[0,1]} \theta(x_{\Gamma}, t) dt + \int_{[0,t]} \theta(x_{\Gamma}, \mu) d\mu.$$

Détermination de u_i^1

Etant donné que h est dans $L^2(\Omega)$ et que la solution du problème (4.36) est régulière alors $\partial_n u_i^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. La formule de Green mène à

$$a_k^-(u_i^0, w^-) = \int_{\Omega} h w^- d\Gamma + \int_{\Gamma} \partial_n u_i^0 w^- d\Gamma \quad \forall w^- \in H^1(\Omega).$$

Aussi, selon (4.21) on a

$$a_k^-(u_i^0, w^-) + a_{1,2}^+(u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^1, w^+) = \int_{\Omega} h w^- d\Omega.$$

De plus

$$a_{1,2}^+(u_e^0, w^+) = \int_{\Omega^+} \alpha 2t H \partial_t w^+ \partial_t u_e^0 d\Omega^+ = 0; \quad a_k^-(u_i^0, w^-) = \int_{\Omega} h w^- d\Omega \quad \forall w^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega).$$

Alors

$$\int_{\Gamma} \partial_n u_i^0 w^+ d\Gamma + \int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w^+ \partial_t u_e^1 d\Gamma dt = 0 \quad \forall w^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+).$$

En utilisant l'équation variationnelle (4.37) avec

$$\psi = \rho = \delta = 0 \text{ et } \varphi = \alpha u_e^1 \text{ r } = \partial_n u_i^0,$$

on obtient

$$u_e^1(x_{\Gamma}, t) = -\frac{1}{\alpha} (1-t) \partial_n u_i^0. \quad (4.38)$$

Donc

$$u_i^1 = -\frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^0. \quad (4.39)$$

On choisit comme fonction test w telle que $w^+ = 0$ dans (4.22)

$$a_k^-(u_i^1, w^-) = 0 \quad \forall w^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega). \quad (4.40)$$

Il suffit d'utiliser une intégration par parties et l'opérateur Steklov-Poincaré, pour déduire que u_i^1 est une solution de problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^1 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_{\infty}}), \\ \Delta u_i^1 + k_i^2 u_i^1 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_{\infty}), \\ u_i^1 = -\frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^0 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^1 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^1 \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.41)$$

De plus par la condition (4.40) on peut déterminer u^{ε} dans X_D si et seulement si $u_i^1 \in H^1(\Gamma)$. La condition minimale est de supposer que $h \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

Détermination de u_i^2

On a $\partial_n u_i^1 \in L^2(\Gamma)$ alors si nous écrivons (4.40) dans $H^1(\Omega)$ on obtient

$$a_k^-(u_i^1, w^-) = \int_{\Gamma} \partial_n u_i^1 w^- d\Gamma \quad \forall w^- \in H^1(\Omega).$$

D'après (4.22)

$$\int_{\Gamma} \partial_n u_i^1 w^+ d\Gamma + \int_{\Omega^+} \alpha 2t H \partial_t u_e^1 \partial_t w^+ d\Omega^+ + \int_{\Omega^+} \alpha \partial_t w^+ \partial_t u_e^2 d\Omega^+ = 0 \quad \forall w^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+).$$

On utilise l'équation variationnelle (4.37) avec

$$\varphi = \alpha u_e^2, \quad r = \partial_n u_i^1, \quad \delta = \alpha 2t H \partial_t u_e^1, \quad \psi = \rho = 0.$$

et on obtient

$$\alpha u_e^2(x_\Gamma, 0) = 2H \int_{[0,1]} t \partial_t u_e^1 dt - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^1.$$

On déduit de (4.38) et de (4.39) que

$$u_i^2 = -H u_i^1 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^1.$$

Par conséquent,

$$u_e^2(x_\Gamma, t) = (1-t) u_i^2 + H (t-t^2) u_i^1 \quad (x_\Gamma, t) \in \Omega^+$$

Comme ci-dessus dès que $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, u_2^ε est bien définie et de plus en prenant w tel que $w^+ = 0$ dans (4.23), on obtient

$$a_k^-(u_i^2, w^-) = 0.$$

Nous obtenons ainsi que u_i^2 est une solution du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^2 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^2 + k_i^2 u_i^2 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_\infty), \\ u_i^2 = -H u_i^1 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^1 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^2 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^2 \right) = 0. \end{array} \right. \quad (4.42)$$

De plus par la condition (4.40) on peut déterminer u^ε dans X_D si et seulement si $u_i^1 \in H^2(\Gamma)$. La condition minimale est de supposer que $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

Détermination de u_i^3

De la même manière, en utilisant la formule de Green dans (4.23), on a $\forall w^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega^+)$

$$a_{1,2}^+(u_e^2, w^+) + (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+)(u_e^1, w^+) + (a_{1,1}^+ + b_1^+)(u_e^0, w^+) + a_{0,2}^+(u_e^3, w^+) + \int_{\Gamma} \partial_n u_i^2 w^+ d\Gamma = 0.$$

Maintenant il faut considérer dans la formule (4.37) que

$$\varphi = \alpha u_e^3, \quad \delta = \alpha 2t H \partial_t u_e^2 + \alpha t^2 G \partial_t u_e^1, \quad \rho = -\alpha k_e^2 q u_e^1, \quad \psi = \alpha \nabla_{\Gamma} u_e^1, \quad r = \partial_n u_i^2.$$

Par conséquent

$$u_i^3 = k_e^2 u_i^1 \underbrace{\int_{[0,1]} q(x_{\Gamma}, t) (1 - 2t - t^2) dt}_{\lambda(x_{\Gamma})} - \frac{1}{3} \Delta_{\Gamma} u_i^1 - H u_i^2 - \frac{1}{3} (H^2 - G) u_i^1 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^2.$$

De même si $h \in H^{\frac{5}{2}}(\Omega)$, u_3^{ε} est bien défini et en prenant w tel que $w^+ = 0$ dans (4.24), on obtient

$$a_k^-(u_i^3, w^-) = 0,$$

alors u_i^3 est solution du problème suivant :

$$\begin{cases} u_i^3 \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_{\infty}}), \\ \Delta u_i^3 + k_i^2 u_i^3 = 0 \text{ dans } D'(\Omega_{\infty}), \\ u_i^3 = \lambda(x_{\Gamma}) k_e^2 u_i^1 - \frac{1}{3} \Delta_{\Gamma} u_i^1 - H u_i^2, \\ -\frac{1}{3} (H^2 - G) u_i^1 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^2 \text{ sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^3 \cdot \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^3 \right) = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

4.4.4 Résultats de convergence

Notre principal objectif dans cette section est d'estimer la quantité

$$u^{\varepsilon} - (u_0^{\varepsilon} + \varepsilon u_1^{\varepsilon} + \varepsilon^2 u_2^{\varepsilon} + \dots + \varepsilon^m u_m^{\varepsilon}),$$

où $u^{\varepsilon} = (u_i^{\varepsilon}, u_e^{\varepsilon})$; $u_m^{\varepsilon} = (u_i^m, u_e^m)$. A cause du coefficient des dérivées tangentielles dans Ω^+ , la convergence ne peut pas se produire dans la norme de X même pour le cas coercive. Mais grâce au théorème 4.7 de stabilité nous prouvons une propriété de convergence dans la norme affaiblie de l'espace Y . Cependant cette convergence donne une information complète sur la convergence dans $H^1(\Omega_{\infty})$.

Théorème 4.10 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante M indépendante de ε et de $h \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Omega)$ (mais peut dépendre de m), tels que*

$$\|u^\varepsilon - (u_0^\varepsilon + \varepsilon u_1^\varepsilon + \varepsilon^2 u_2^\varepsilon + \cdots + \varepsilon^m u_m^\varepsilon)\|_Y \leq M \varepsilon^{m+\frac{1}{2}} \|h\|_{m+\frac{1}{2}, \Omega} \quad (4.44)$$

Démonstration. Comme $h \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Omega)$, tous les termes u_m^ε $m = \overline{0.m+1}$ peuvent être déterminés par les équations de (4.20) à (4.25), posons

$$\pi_\varepsilon = - (u_0^\varepsilon + \varepsilon^1 u_1^\varepsilon + \varepsilon^2 u_2^\varepsilon + \cdots + \varepsilon^m u_m^\varepsilon),$$

et définissons la forme linéaire suivante :

$$L_\varepsilon(w^\varepsilon) = \varepsilon a^+(\varepsilon, \pi_\varepsilon, w^+) + \varepsilon b^+(\varepsilon, \pi_\varepsilon, w^+) + a_k^-(\pi_\varepsilon, w^-), \quad (4.45)$$

Les expressions (4.17) des formes a^+ et b^+ donnent

$$\begin{aligned} \varepsilon a^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) + \varepsilon b^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) &= \varepsilon^{-1} a_{0,2}^+ + a_{1,2}^+ + \varepsilon (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+) + \varepsilon^2 (a_{1,1}^+ + b_1^+) \\ &+ \varepsilon^3 (a_{2,1}^+ + b_2^+) + \varepsilon^4 a_{3,1}^+ + \cdots + \varepsilon^m a_{m-1,1}^+ + \varepsilon^{m+1} r_m^e(\varepsilon; \cdot). \end{aligned}$$

Comme $u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, \dots, u_m^\varepsilon, u_{m+1}^\varepsilon$ sont respectivement des solutions des équations (4.20) - (4.25) alors

$$L_\varepsilon(w^\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon^{-1} a_{0,2}^+(u_e^{m+1}, w^+) - (a_{2,2}^+ + a_{0,1}^+ + b_0^+) (u_e^m, w^+) \\ &- (a_{1,1}^+ + b_1^+) (u_e^{m-1} + \varepsilon u_e^m, w^+) - (a_{2,1}^+ + b_2^+) (u_e^{m-2} + \varepsilon u_e^{m-1} + \varepsilon^2 u_e^m, w^+) \\ &- a_{3,1}^+ (u_e^{m-3} + \cdots + \varepsilon^3 u_e^m, w^+) - \cdots - a_{m-1,1}^+ (u_e^1 + \cdots + \varepsilon^{m-1} u_e^m, w^+) \\ &- r_m^e(\varepsilon; u_e^0 + \varepsilon^1 u_e^1 + \varepsilon^2 u_e^2 + \cdots + \varepsilon^m u_e^m, w^+) \end{aligned} \right\}.$$

Il faut noter que

$$u_e^\varepsilon(x_\Gamma, t) = u_i^\varepsilon(x_\Gamma) + \int_{[0,t]} \partial_t u_e^\varepsilon(x_\Gamma, s) ds.$$

D'où

$$\|u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} \leq C \left[\|u_i^\varepsilon\|_{1,\Omega} + \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} \right],$$

ce qui permet d'obtenir

$$L_\varepsilon(w^\varepsilon) \leq M \varepsilon^{m+1} \left[\|\nabla_\Gamma u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} + \|u_i^\varepsilon\|_{1,\Omega} + \varepsilon^{-1} \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} \right]$$

Finalement nous obtenons par une conséquence directe du théorème 4.7 que

$$L_\varepsilon(w^\varepsilon) \leq M \varepsilon^{m+1} \left[\sqrt{\varepsilon} \|\nabla_\Gamma u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} + \|u_i^\varepsilon\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|\partial_t u_e^\varepsilon\|_{0;\Omega^+} \right]$$

■

4.5 Conditions aux limites approchées

Afin d'obtenir les termes du développement asymptotique de la solution u^ε du problème (4.7) à un ordre donné, un bon candidat est sans doute la série tronquée suivante

$$u^{[m]} = u_i^0 + \varepsilon u_i^1 + \varepsilon^2 u_i^2 + \varepsilon^3 u_i^3 + \cdots \varepsilon^m u_i^m .$$

Par construction, $u^{[m]}$ vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} u^{[m]} \in H^1(\Omega) , \\ \Delta u^{[m]} + k_i^2 u^{[m]} = -h \text{ dans } D'(\Omega) , \\ \mathfrak{S}_m^\varepsilon u^{[m]} = \varepsilon^{m+1} \rho_\varepsilon^m \text{ sur } \Gamma , \\ \partial_n u^{[m]} + S_k u^{[m]} = 0 \text{ sur } \Sigma . \end{cases} \quad (4.46)$$

Nous allons établir les problèmes approchés d'ordre 0, 1, 2, 3, en remplaçant $u^{[m]}$ par $v^{[m]}$ avec $\rho_\varepsilon^m = 0$ sur Γ . Par ailleurs il y a réellement une règle simple pour construire la condition d'ordre m , cette dernière est obtenue en prenant la condition aux limites satisfaite par u_i^m et en remplaçant chaque terme u_i^j par $\varepsilon^{m-j} v^{[m]}$. L'autre condition d'ordre $m-1$ peut être obtenue à partir de celle d'ordre m en annulant successivement les termes d'ordre m puis par récurrence on obtient la condition d'ordre 0.

4.5.1 Problème de Neumann

– **Condition d'ordre 0**

$$\partial_n v^{[0]} = 0 \text{ sur } \Gamma .$$

– **Condition d'ordre 1**

$$\partial_n v^{[1]} - \varepsilon \alpha (\Delta_\Gamma + k_e^2 \hat{q}) v^{[1]} = 0 \text{ sur } \Gamma .$$

– **Condition d'ordre 2**

$$\partial_n v^{[2]} = \varepsilon^2 \alpha (\operatorname{div}_\Gamma (-C + HI) \nabla_\Gamma + 2Hk_e^2 \hat{q}^2(x_\Gamma, 0)) v^{[2]} + \varepsilon \alpha (\Delta_\Gamma + k_e^2 \hat{q}) v^{[2]} \text{ sur } \Gamma .$$

– **Condition d'ordre 3**

$$\begin{aligned} \partial_n v^{[3]} &= \varepsilon^3 \mathfrak{S}(x_\Gamma) v^{[3]} + \varepsilon^3 \frac{\alpha}{3} \operatorname{div}_\Gamma [3C^2 - 4HC + GI] \nabla_\Gamma v^{[3]} \\ &+ \frac{\alpha k_e^2}{2} \varepsilon^3 \int_{[0,1]} (2t - t^2) q dt \Delta_\Gamma v^{[3]} + \frac{\alpha}{3} \varepsilon^3 \Delta_\Gamma^2 v^{[3]} + \varepsilon^3 \alpha k_e^2 \operatorname{div}_\Gamma \left[\int_{[0,1]} \int_{[0,t]} \tilde{q}^1 d\mu dt \nabla_\Gamma v^{[3]} \right] \\ &+ \alpha k_e^2 \varepsilon^3 \operatorname{div}_\Gamma \left[v^{[3]} \nabla_\Gamma \left[\int_{[0,1]} \int_{[0,t]} \tilde{q}^1 d\mu dt \right] \right] - \alpha 2Hk_e^2 \varepsilon^2 \int_{[0,1]} (\tilde{q}^1 - tq) dt v^{[3]} \\ &+ \varepsilon^2 \alpha \operatorname{div}_\Gamma [-C + HI] \nabla_\Gamma v^{[3]} + \varepsilon^2 2\alpha k_e^2 t H q v^{[3]} + \varepsilon \alpha k_e^2 \int_{[0,1]} q dt v^{[3]} + \varepsilon \alpha \Delta_\Gamma v^{[3]} \text{ sur } \Gamma , \end{aligned}$$

où

$$\mathfrak{S}(x_\Gamma) = 4\alpha H^2 k_e^2 \int_{[0,1]} (-\tilde{q}^2 + t\tilde{q}^1) dt + \alpha k_e^2 G \int_{[0,1]} 2t\tilde{q}^1 dt + \alpha k_e^4 \int_{[0,1]} \left[q \int_{[0,t]} \tilde{q}^1(x_\Gamma, \mu) d\mu \right] dt.$$

4.5.2 Problème de Dirichlet

– **Condition d'ordre 0**

$$v^{[0]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 1**

$$\varepsilon^{-1} \alpha v^{[1]} + \partial_n v^{[1]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 2**

$$\alpha \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon H) v^{[2]} + \partial_n v^{[2]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 3**

$$\varepsilon^{-1} \alpha \left[1 + \varepsilon H + \varepsilon^2 \left(-\lambda(x_\Gamma) k_e^2 + \frac{1}{3} (H^2 - G + \Delta_\Gamma) \right) \right] v^{[3]} + \partial_n v^{[3]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Où

$$\lambda(x_\Gamma) = \int_{[0,1]} q(x_\Gamma, t) (1 - 2t - t^2) dt.$$

Remarque : Le lemme de Rellich caractérise le comportement de la solution de l'équation de Helmholtz dans un domaine extérieur et l'alternative de Fredholm assure facilement l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes approchés, mais pour le problème approché d'ordre 3 (le cas Neumann), la technique classique de Rellich et l'alternative de Fredholm ne permettent pas d'avoir l'existence et l'unicité de la solution. Pour la preuve, on utilise la théorie des opérateurs pseudodifférentiel.

4.6 L'estimation de l'erreur :

Théorème 4.11 *Il existe une constante β indépendante de ε et de la donnée $h \in H^{m+\frac{1}{2}}(\Omega)$ telle que la solution u^ε du problème (4.7) et la solution $v^{[m]}$ donnée par la conditions aux limites approchées d'ordre $m \leq 2$ vérifient*

$$\|u_i^\varepsilon - v^{[m]}\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon^{m+\frac{1}{2}} \beta \|h\|_{m+\frac{1}{2},\Omega}. \quad (4.47)$$

Démonstration.

Cas Neumann : Afin d'écrire l'estimation du reste, on introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{F} = \{w \in H^1(\Omega) \mid w|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)\},$$

muni de sa norme naturelle, $\mathcal{F}$ est un espace de Hilbert, de plus $C^\infty(\overline{\Omega})$ est un sous-espace dense dans $\mathcal{F}$. Définissons les formes sesquilinéaires sur $\mathcal{F}$ par

$$\begin{aligned} a_\Gamma^1(u, w) &= \int_\Gamma \alpha \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w \, d\Gamma ; \quad b_\Gamma^1(u, w) = - \int_\Gamma \alpha k_\varepsilon^2 q \, u w \, d\Gamma, \\ a_\Gamma^2(u, w) &= \int_\Gamma \alpha [HI - C] \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma w \, d\Gamma ; \quad b_\Gamma^2(u, w) = - \int_\Gamma \alpha k_\varepsilon^2 q \, H \, u w \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Pour unifier la définition, nous posons $\mathcal{F}^0 = H^1(\Omega)$ et $a_\Gamma^0 = b_\Gamma^0 \equiv 0$. Commençons par introduire un problème variationnel de la forme

$$\begin{cases} v^{[m]} \in \mathcal{F}^{(j)} \quad \forall w \in \mathcal{F}^{(j)}, \\ a_k^-(v^{[m]}, w) + \sum_{0 \leq l \leq m} \varepsilon^l [a_\Gamma^l(v^{[m]}, w) + b_\Gamma^l(v^{[m]}, w)] = \int_\Omega h w \, d\Omega. \end{cases} \quad (4.48)$$

Tel que $j = 0$ pour $m = 0$ et $j = 1$ sinon. Alors pour $m = 0, 1, 2$ $v^{[m]}$, est une solution du problème variationnel (4.48). L'estimation

$$\|u^{[m]} - u_i^\varepsilon\|_Y \leq M \varepsilon^{m+\frac{1}{2}} \|h\|_{m+\frac{1}{2}, \Omega},$$

ramène la question à la convergence de $u^{[m]} - v^{[m]}$. Considérons maintenant le cas $m = 2$. Les autres cas $m = 1$ et $m = 0$ sont similaires. $\theta^{[2]} = u^{[2]} - v^{[2]}$ est une solution du problème variationnel suivant

$$a_k^-(\theta^{[2]}, w) + \sum_{0 \leq l \leq m} \varepsilon^l [a_\Gamma^l(\theta^{[2]}, w) + b_\Gamma^l(\theta^{[2]}, w)] = \varepsilon^3 \int_\Omega \rho_\varepsilon^2 w \, d\Omega \quad \forall w \in \mathcal{F}.$$

L'argument essentiel sera un résultat de stabilité pour le problème ci-dessus. Cette stabilité peut être obtenue avec les arguments développés dans la preuve de théorème 4.7. Alors, on obtient

$$\|\theta^{[2]}\|_{1, \Omega} \leq \varepsilon^3 C \|\rho_\varepsilon^2\|_{0, \Gamma}.$$

La donnée $h \in H^{\frac{5}{2}}(\Omega)$ et les estimations elliptiques précédemment utilisées permettent de déduire respectivement

$$u_i^0 \in H^4(\Gamma), u_i^1 \in H^3(\Gamma), u_i^2 \in H^2(\Gamma) \quad \text{et} \quad \|\rho_\varepsilon^2\|_{0, \Gamma} \leq C \|h\|_{\frac{5}{2}, \Omega},$$

par l'inégalité triangulaire, nous déduisons le résultat.

Cas Dirichlet : L'espace fonctionnel adapté pour le problème avec la condition de Dirichlet sur le bord est $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ pour $m = 0$, et $H^1(\Omega)$ pour $m = 1$ et $m = 2$, et $\mathcal{F}^{(1)}$ pour $m = 3$. Contrairement au cas précédent, les conditions approchées sont simples jusqu'à l'ordre 3. Nous donnons une courte description de l'analyse de la condition d'ordre 3, les conditions inférieures au troisième ordre peuvent être traitées plus facilement d'une manière semblable.

– Nous définissons les formes bilinéaires suivantes sur $\mathcal{F}^{(1)}$

$$\begin{aligned} a_\Gamma(\varepsilon, v, w) &= \int_\Gamma (vw - \varepsilon^2 \nabla_\Gamma v \nabla_\Gamma w) d\Gamma, \\ b_\Gamma(\varepsilon, v, w) &= \int_\Gamma \left[H + \varepsilon \left(-\lambda k_e^2 + \frac{1}{3} (H^2 - G) \right) \right] v w d\Gamma. \end{aligned}$$

Notons que $v^{[3]}$ est une solution de la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} v^{[3]} \in \mathcal{F}^{(1)}, \forall w \in \mathcal{F}^{(1)}, \\ a_k^-(v^{[3]}, w) + \alpha b_\Gamma(\varepsilon, v^{[3]}, w) + \frac{\alpha}{\varepsilon} a_\Gamma(\varepsilon, v^{[3]}, w) = \int_\Omega h w d\Omega. \end{cases}$$

Nous gardons les mêmes notations que dans la section précédente, nous remarquons que $u^{[3]}$ est une solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} u^{[3]} \in \mathcal{F}^{(1)}, \forall w \in \mathcal{F}^{(1)}, \\ a_k^-(u^{[3]}, w) + \alpha b_\Gamma(\varepsilon, u^{[3]}, w) + \frac{\alpha}{\varepsilon} a_\Gamma(\varepsilon, u^{[3]}, w) = \int_\Omega h w d\Omega + \varepsilon^3 \int_\Gamma \rho_\varepsilon^3 w d\Gamma. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon^3 &= \frac{1}{3} [\Delta_\Gamma u_i^1 - 3k_e^2 \lambda(x_\Gamma) u_i^1 + (H^2 - G) u_i^1] + \frac{\varepsilon^2}{3} [\Delta_\Gamma u_i^3 + 3k_e^2 \lambda(x_\Gamma) u_i^3 + (H^2 - G) u_i^3] \\ &+ \varepsilon \left[\frac{1}{3} \Delta_\Gamma u_i^2 + H u_i^3 + \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^3 + k_e^2 \lambda(x_\Gamma) u_i^2 + \frac{1}{3} (H^2 - G) u_i^2 \right]. \end{aligned}$$

La donnée $h \in H^{\frac{7}{2}}(\Omega)$ et $\rho_\varepsilon^3 \in L^2(\Gamma)$. Donc, la régularité du problème de Dirichlet implique que $u_i^m \in H^{5-m}(\Gamma)$ et $\partial_n u_i^3 \in H^1(\Gamma)$ pour tout $m \leq 3$, de plus on a la stabilité du problème variationnel ci-dessus, alors on obtient

$$\|v^{[3]} - u^{[3]}\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon^3 C \|\rho_\varepsilon^3\|_{0,\Gamma},$$

Les estimations elliptiques utilisées précédemment permettent de déduire

$$\|\rho_\varepsilon^3\|_{0,\Gamma} \leq C \|h\|_{\frac{7}{2},\Omega},$$

et par l'inégalité triangulaire

$$\|u_i^\varepsilon - v^{[3]}\|_{1,\Omega} \leq \varepsilon^{\frac{7}{2}} \beta \|h\|_{\frac{7}{2},\Omega},$$

donc on obtient clairement une estimation semblable à (4.47).

■

4.7 Conditions aux limites approchées en dimension 2

Nous gardons les mêmes notations que dans le chapitre 2 à savoir : $c(t)$ la courbure au point d'abscisse curviligne t et $\vec{\tau}, \vec{n}$ les vecteurs unitaires respectivement tangent et normal, (t, s) une paramétrisation locale de son bord Γ supposé de classe C^∞ , $\Omega_\varepsilon = \Gamma \times [0, \varepsilon]$, le cas bidimensionnel est légèrement différent du cas tridimensionnel. En utilisant la formulation variationnelle (4.7) en dimension 2, on obtient :

$$a^+(\varepsilon, u_\varepsilon^\varepsilon, w^+) = \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha \left[[1 + \varepsilon y c(t)]^{-1} \partial_t \tilde{w} \partial_t \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_y \tilde{w} \partial_y \tilde{u} \right] dt dy;$$

$$b^+(\varepsilon, u_\varepsilon^\varepsilon, w^+) = - \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha k_e^2 q [1 + \varepsilon y c(t)] \tilde{w} \tilde{u} dt dy ; \quad L(\varepsilon, w_\varepsilon^+, w^-) = \int_\Omega h w_\varepsilon^- dx.$$

La forme bilinéaire a^+ prend la forme suivante :

$$a^+(\varepsilon, \cdot, \cdot) = \varepsilon^{-2} a_{0,2}^+ + \varepsilon^{-1} a_{1,2}^+ + a_{0,1}^+ + \varepsilon a_{1,1}^+ + \varepsilon^2 a_{2,1}^+ \dots + \varepsilon^{m-1} a_{m-1,1}^+ + \varepsilon^m r_m^+(\varepsilon, \cdot, \cdot),$$

$$a_{j,2}^+ = \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha (y c)^j \partial_y w \partial_y v dt dy, \quad j = 0,1 \quad \text{et} \quad a_{m,1}^+ = \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha (-y c)^m \partial_t w \partial_t v dt dy,$$

$$r_m^+(\varepsilon, u, v) = \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha \frac{(-t c)^m}{1 + \varepsilon t c} \partial_t w \partial_t v dt dy.$$

De plus

$$b^+ = - \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha k_e^2 q w u [1 + \varepsilon y c(t)] dt dy.$$

Alors

$$b_0^+(u, w) = - \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha k_e^2 q w u d\Omega^+, \quad b_1^+(u, w) = - \int \int_{[0,1] \times \Gamma} \alpha k_e^2 c y q w u d\Omega^+.$$

Pour construire un développement asymptotique de la solution, nous substituons un Ansatz dans la couche mince de type (4.18) puis on identifie les termes selon les puissances de ϵ . On obtient une famille de problèmes variationnels indépendants de ϵ :

$$a_{0,2}^+(u_e^0, w^+) = 0, \quad (4.49)$$

$$a_{0,2}^+(u_e^1, w^+) + a_{1,2}^+(u_e^0, w^+) + a_k^-(u_i^0, w^-) = \int_{\Omega} h w^- d\Omega, \quad (4.50)$$

$$a_{0,2}^+(u_e^2, w^+) + a_{1,2}^+(u_e^1, w^+) + a_{0,1}^+(u_e^0, w^+) + b_0^+(u_e^0, w^+) + a_k^-(u_i^1, w^-) = 0, \quad (4.51)$$

$$a_{0,2}^+(u_e^3, w^+) + a_{1,2}^+(u_e^2, w^+) + a_{0,1}^+(u_e^1, w^+) + a_{1,1}^+(u_e^0, w^+) + b_0^+(u_e^1, w^+) + b_1^+(u_e^0, w^+) + a_k^-(u_i^2, w^-) = 0, \quad (4.52)$$

$$a_{0,2}^+(u_e^4, w^+) + a_{1,2}^+(u_e^3, w^+) + a_{0,1}^+(u_e^2, w^+) + a_{1,1}^+(u_e^1, w^+) + a_{2,1}^+(u_e^0, w^+) + b_0^+(u_e^2, w^+) + b_1^+(u_e^1, w^+) + a_k^-(u_i^3, w^-) = 0. \quad (4.53)$$

On effectue la même étude que précédemment, pour déterminer les premiers termes, on obtient une famille de problèmes de la forme :

$$\begin{cases} u_i^m \in H_{loc}^1(\overline{\Omega_\infty}), \\ \Delta u_i^m + k_i^2 u_i^m = -\delta_0^m h \quad \text{dans } D'(\Omega_\infty), \\ \partial_n u_i^m = \sigma_m(u_i^0, \dots, u_i^{m-1}) \quad \text{sur } \Gamma \text{ (cas de Neumann)}, \\ u_i^m = \sigma_m(u_i^0, \dots, u_i^{m-1}) \quad \text{sur } \Gamma \text{ (cas de Dirichlet)}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\nabla u_i^m \frac{x}{|x|} - i k_i u_i^m \right) = 0. \end{cases}$$

Cas de la condition de Neumann :

$$\begin{aligned} m = 0, \quad \sigma_0 &= 0, \\ m = 1, \quad \sigma_1 &= \alpha \partial_t^2 u_i^0 - \alpha u_i^0 k_e^2 \hat{q}(t), \\ m = 2, \quad \sigma_2 &= \alpha \partial_t^2 u_i^1 - \alpha k_e^2 u_i^1 \hat{q} - \frac{\alpha}{2} \partial_t (c \partial_t u_e^0) - 2c u_i^0 \alpha k_e^2 \hat{q}^1 - c \frac{\alpha}{2} k_e^2 \hat{q} u_i^0, \end{aligned}$$

où

$$\hat{q}(t) = \int_{[0,1]} q(t, \mu) d\mu, \quad \hat{q}^1 = \int_{[0,1]} \int_{[s,1]} q(t, s) d\mu ds.$$

Cas de la condition de Dirichlet :

$$m = 0, \sigma_0 = 0,$$

$$m = 1, \sigma_1 = -\frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^0,$$

$$m = 2, \sigma_2 = \frac{1}{2\alpha} c(t) \partial_n u_i^0 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^1,$$

$$m = 3, \sigma_3 = \frac{1}{\alpha} \left(\lambda(1) k_e^2 - \frac{1}{3} c^2 \alpha \right) \partial_n u_i^0 - \frac{1}{3\alpha} \partial_t^2 (\partial_n u_i^0) + \frac{1}{2} c \partial_n u_i^1 - \frac{1}{\alpha} \partial_n u_i^2,$$

où

$$\lambda(y) = \iint_{[0,y] \times [0,\mu]} q(t,s) (1-s) ds d\mu.$$

4.7.1 Problème de Neumann

– **Condition d'ordre 0**

$$\partial_n v^{[0]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 1**

$$\partial_n v^{[1]} = \alpha \varepsilon \partial_t^2 v^{[1]} - \alpha \varepsilon k_e^2 \hat{q}(t) v^{[1]} \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 2**

$$\partial_n v^{[2]} = \alpha \varepsilon \partial_t^2 v^{[2]} - \alpha k_e^2 \varepsilon \hat{q} v^{[2]} - \frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 \partial_t (c \partial_t v^{[2]}) - 2c \varepsilon^2 \alpha k_e^2 \hat{q}^1 v^{[2]} - c \frac{\alpha}{2} \varepsilon^2 k_e^2 \hat{q} v^{[2]} \text{ sur } \Gamma.$$

4.7.2 Problème de Dirichlet

– **Condition d'ordre 0**

$$v^{[0]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 1**

$$\varepsilon^{-1} \alpha v^{[1]} + \partial_n v^{[1]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 2**

$$\varepsilon^{-1} v^{[2]} + \frac{1}{2\alpha} (-c(t) \varepsilon + 2) \partial_n v^{[2]} = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

– **Condition d'ordre 3**

$$\varepsilon^{-1} v^{[3]} = \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left(\lambda(1) k_e^2 - \frac{1}{3} c^2 \alpha \right) \partial_n v^{[3]} - \frac{\varepsilon^2}{3\alpha} \partial_t^2 (\partial_n u_i^0) + \frac{\varepsilon}{2} c \partial_n v^{[3]} - \frac{1}{\alpha} \partial_n v^{[3]} \text{ sur } \Gamma,$$

où

$$\lambda(1) = \iint_{[0,1] \times [0,\mu]} q(t,s) (1-s) ds d\mu.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'identification des conditions aux limites approchées pour des problèmes posés sur des domaines avec couches minces. Ces conditions permettent de modéliser l'effet de la couche mince et de définir des problèmes approchés plus simples à analyser numériquement.

Notre intérêt s'est porté sur l'équation de Helmholtz 2D et 3D. Dans la première partie, on a considéré ce problème posé sur un domaine borné entouré d'une couche mince. Dans la deuxième partie, on a étudié la diffraction d'une onde électromagnétique par un obstacle revêtu d'une couche mince de perméabilité variable. Les techniques développées ici peuvent être appliquées à d'autres modèles (Maxwell,etc.) et d'autres situations (couches minces périodiques,etc.). Il serait aussi très intéressant de mettre en évidence numériquement les résultats obtenus dans ce travail : il s'agit de valider l'utilisation de ces nouvelles conditions aux limites par FreeFem++, Matlab ,... etc.

Bibliographie

- [1] R. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] H.Ammari, C. Latiri-Grouz . Conditions aux limites approchées pour des couches minces périodiques. M2AN, Vol. 33, No 4, 1999, p. 673-692
- [3] N. Bartoli ; A. Bendali. Robust and high order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer. IMA (2002) 67, 479–508.
- [4] A. Bendali ; K. Lemrabet ; The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. SIAM J. Appl. Math.56 (6) (1996), 1664-1693
- [5] A. Bendali, K. Lemrabet ; Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric.
- [6] Birol Aslanyürek , Housseem Haddar, Hülya Şahintürk ; Generalized Impedance Boundary Conditions for Thin Dielectric Coatings with Variable Thickness. Rapport de recherche n°7145 December 2009- 53 pages
- [7] H. Brezis ; Analyse fonctionnelle Théorie et applications.Masson,Paris,1983.
- [8] B. Engquist, J-C. Nédélec ; Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Rapport interne 278,CMAP, école polytechnique, Palaiseau, France, 1993.
- [9] Françoise, D. Gilbert ; Espaces fonctionnels utilisation dans la résolution des équation aux dérivées partielles 15,rue maleranche,75005 Paris
- [10] Gabriel Caloz, Martin Costabel, Monique Dauge, and Grégory Vial ; Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. Asymptotic Analysis (2006).

-
- [11] Grégory Vial; Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin Université de Rennes1 Thèse de Doctorat juin 2003
 - [12] H. Haddar, P. Joly, and H.-M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(8) :1273–1300, 2005
 - [13] Housseem Haddar, Patrick Joly. Conditions équivalentes pour des couches minces ferromagnétiques. Étude du problème monodimensionnel. Rapport de recherche n°3431 - Mai 1998 -60 pages
 - [14] Housseem HADDAR; Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : Couches minces et homogénéisation. ENPC Thèse de Doctorat.
 - [15] Housseem Haddar —Armin Lechleiter. Asymptotic models for scattering problems from unbounded media with high conductivity. Rapport de recherche n°6841 — February 2009 — 26 pages
 - [16] Housseem Haddar Birol Aslanyürek , Hülya Şahintürk Generalized Impedance Boundary Conditions for Thin Dielectric Coatings with Variable Thickness. Rapport de recherche n°7145 — December 2009 — 53 pages
 - [17] K. Lemrabet, Etude de divers problèmes aux limites de ventcel d’origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse de Doctorat d’Etat, U.S.T.H.B, 1987.
 - [18] K. Lemrabet et D.E. Teniou, Vibration d’une plaque mince avec raidisseur sur le bord. *Maghreb.Math. Rev.*, vol 2, n°1, Juin 1992.
 - [19] Leila RAHMANI; Modélisation asyamtotique de l’effet dynamique de couche mince en mécanique des structures. USTHB Thèse de Doctorat 2006.
 - [20] L.Rahmani, Conditions aux limites approchées pour une plaque mince non linéaire. 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 343 (2006) 57–62
 - [21] L.Rahmani, Grégory Vial; Reonforcement of a thin plate bay a thin layer. *Mathematical methods in the applied sciences*. Wiley interscience Acad. Sci. (2008) 31 : 315–338 .
 - [22] Leila Rahmani , The Effect of a Thin Layer on a Nonlinear Thermoelastic. *Plate Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, 2008, no. 50, 2489 - 2499

- [23] Kersten Schmidt- Sébastien Tordeux ; High order transmission conditions for thin conductive sheets in magneto-quasistatics Rapport de recherche n° 7254 | April 2010 | 28 pages.
- [24] Y. Kerbrat ; J.M. Braemer, Géométrie des courbes et des surfaces. Hermann, Paris, 1976
- [25] T.B.A. Senior ; J.L. Volakis. Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics. IEE Press, New York and London, 1995.