MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.

FACULTÉ : DES SCIENCES
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES
OPTION : ANALYSE

Présentée par :

Amina DAOUI

Sujet :

Sur de nouvelles classes de fonctions presque périodiques

Devant le jury d'examen composé de :

Mohamed Aidene	Professeur	U.M.M.T.O.	Président
Mohamed Morsli	Professeur	U.M.M.T.O.	Rapporteur
Chikh Bouzar	Professeur	Univ. Oran	Examinateur
Mohand Arezki Moussaoui	Professeur	ENS Kouba	Examinateur
Arezki Kessi	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur
Fazia Bedouhene	Professeur	U.M.M.T.O.	Examinatrice

Soutenue le :

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale

Les espaces d'Orlicz de fonctions presque périodiques ont été introduits par T.R. Hillman dans ([21]) où une étude structurelle et topologique de ces espaces à été faite.
Cette thématique a été par la suite développée par M. Morsli et ses collaborateurs selon deux grands axes :
• L'étude des propriétés géométriques de ces espaces. Elle s'inspire des concepts et méthodes de la théorie classique des espaces d'Orlicz dans la caractérisation des propriétés métriques et autres propriétés de convexité.
• L'étude de questions relevant de l'analyse harmonique. Il s'agit notamment des questions de dualité et d'interpolation. Elle s'inspire des développements concernant ces questions dans le cadre restreint des espaces de Besicovitch de fonctions presque périodiques.

Les résultats essentiels obtenus concernent la caractérisation des propriétés géométriques telles que la stricte convexité, l'uniforme convexité, la k-convexité, pour chacune des deux normes usuelles [42, 43, 44, 41, 48, 47, 53].
Dans ([45])une version de l'inégalité d'interpolation de Hausdorff-Young est présentée et [46] traite les questions de dualité et les conditions de réflexivité des espaces étudiés.

Notre thèse se situe dans la continuité du premier axe de recherche :

l'étude de propriétés géométriques et topologiques de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.
Cette nouvelle classe d'espaces est une généralisation naturelle de la première ; elle a été introduite récemment par M.Morsli et ses collaborateurs.
Les premiers travaux ont porté sur la structure générale de l'espace et le développement d'outils techniques et autres résultats de convergence ([47, 48, 53]).
Dans ces mêmes références, des conditions nécessaires et suffisantes pour la stricte et l'uniforme convexité sont énoncées lorsque l'espace est muni de sa norme usuelle de Luxemburg.
D'autres questions relevant de la géométrie locale de cet espace sont aussi considérées dans [5]. Elles constituent une partie de notre modeste contribution.

Dans cette thèse, l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques sera muni d'une deuxième norme dite d'Orlicz qui s'avère équivalente topologiquement à la norme initiale de Luxemburg.
Il est connu que la structure métrique d'un espace est liée aux propriétés spécifiques de la norme considérée. Pour deux normes distinctes, même équivalentes, les propriétés métriques de l'espace relativement à chacune peuvent être totalement différentes.
Il est donc tout à fait naturel d'étudier et caractériser les propriétés métriques de notre espace relativement à cette nouvelle norme.
Sur un autre plan, la norme d'Orlicz se prête mieux aux questions relevant de la dualité. Dans [14], nous avons caractérisé le dual de notre espace, donné des conditions nécessaires et suffisantes pour sa réfléxivité et énoncé un résultat concernant la représentation des fonctionnelles définies sur cet espace.
De même moyennant une réécriture plus commode de cette norme d'Orlicz à l'aide de la norme d'Amemiya, nous avons énoncé une condition nécessaire et suffisante pour la stricte convexité de l'espace [15].
Pour mieux situer notre contribution, nous introduisons brièvement nos espaces et les éléments fondamentaux les concernant.

Soit donc φ une fonction de Musielak-Orlicz , i.e.
$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est telle que :

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t,.)$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(.,x)$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t,x) = 0$ ssi $x = 0$.

   On suppose de plus que φ vérifie les deux conditions suivantes :
3. $\varphi(.,.)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(.,x)$ est périodique de période T indépendante de x (on peut supposer $T = 1$).

Soit maintenant $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les fonctions Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
La fonctionnelle

$$\begin{aligned}\rho_\varphi : \mathcal{M} &\longrightarrow [0,+\infty] \\ f &\longrightarrow \rho_\varphi(f) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi(t,|f(t)|)dt = \overline{M}[\varphi(.,|f(.)|)].\end{aligned}$$

est une pseudo modulaire convexe sur $\mathcal{M}$ (voir [6]).
L'espace modulaire associé :

$$\begin{aligned}B^\varphi &= \{f \in \mathcal{M} : \lim_{\alpha\to 0} \rho_\varphi(\alpha f) = 0\}, \\ &= \{f \in \mathcal{M} : \rho_\varphi(\lambda f) < +\infty, \text{ pour un } \lambda > 0\},\end{aligned}$$

est appelé espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz.
Cet espace est naturellement muni de la norme de Luxemburg :

$$\|f\|_\varphi = \inf\left\{k > 0,\ \rho_\varphi\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques généralisés, i.e.,

$$\mathcal{A} = \{P_n(t) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j e^{i\lambda_j t},\ a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques noté par $B^\varphi p.p.$ est la fermeture de l'ensemble $\mathcal{A}$ relativement à la norme de Luxemburg,

$$B^\varphi p.p. = \{f \in B^\varphi : \exists\{p_n\} \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \lim_{n\to+\infty} \|f - p_n\|_\varphi = 0\}.$$

La fermeture de l'ensemble $\mathcal{A}$ relativement à la modulaire ρ_φ est le sous-espace de B^φ noté par $\widetilde{B}^\varphi p.p.$:

$$\widetilde{B}^\varphi p.p. = \{f \in B^\varphi : \exists\{p_n\} \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi(\alpha(f-p_n)) = 0 \text{ pour un certain } \alpha > 0\}.$$

Les inclusions suivantes découlent des définitions :

$$\mathcal{A} \subset B^\varphi p.p. \subset \widetilde{B}^\varphi p.p. \subset B^\varphi$$

On peut aussi considérer dans B^φ la norme d'Amemiya définie comme suit :

$$\|f\|_\varphi^A = \inf\left\{\frac{1}{k}(\rho_\varphi(kf) + 1), k > 0\right\}.$$

Cette norme est en fait équivalente à la norme de Luxemburg :

$$\|f\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi^A \leq 2\|f\|_\varphi, \quad \text{pour tout } f \in B^\varphi \quad \text{(voir [28])}.$$

Dans cette thèse on munit l'espace $B^\varphi p.p.$ de la norme dite d'Orlicz :

$$\|f\|_\varphi^o = \sup\{\overline{M}(|fg|), \quad g \in B^\psi a.p., \quad \rho_\psi(g) \leq 1\}.$$

Où ψ est la fonction complémentaire de φ, i.e.

$$\psi(t,x) = \sup_{y\geq 0}\{xy - \varphi(t,y)\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

On démontre que, sur le sous espace $B^\varphi p.p.$, nous avons l'égalité :

$$\|f\|_\varphi^o = \inf\left\{\frac{1}{k}(1 + \rho_\varphi(kf)), k > 0\right\},$$

de plus

$$\|f\|_\varphi^o = \frac{1}{k_0}(1 + \rho_\varphi(k_0 f)), \quad \text{pour un certain } k_0 > 0.$$

Cette identification s'avère très pratique dans l'étude des propriétés métriques et topologiques de l'espace $B^{\varphi}p.p.$

La thèse est structurée en trois chapitres.
Le premier chapitre est introductif et concerne les éléments essentiels de la théorie des espaces de type Orlicz et des différentes classes de fonctions presque périodiques.
Dans le deuxième chapitre, nous introduisons l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Nous présentons les outils et résultats techniques, notamment des résultats de convergence, nécessaires dans l'étude de la géométrie de l'espace. On termine le chapitre par énoncer un théorème d'équivalence de certaines propriétés géométriques locales de $B^{\varphi}p.p.$ muni de la norme de Luxemburg.
Dans le dernier chapitre, l'espace $B^{\varphi}p.p.$ est muni de la norme dite d'Orlicz. Il contient l'essentiel de notre contribution : nous étudions des questions de dualité et caractérisons la réflexivité de l'espace $B^{\varphi}p.p.$ et nous terminons le chapitre par l'étude de la stricte convexité de l'espace muni de la norme d'Orlicz.

CHAPITRE 1

Préliminaires

1.1 Espaces modulaires

Dans ce qui suit, nous présentons les notions essentielles sur les espaces modulaires.

Définition 1.1. *Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$).*
Une fonction $\rho : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est dite pseudo-modulaire (resp. modulaire) lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\rho(0) = 0$ ($\rho(x) = 0$ *ssi* $x = 0$),
2. $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| = 1$,
3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ *pour tous* $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

Si de plus la fonctionnelle ρ est convexe i.e.

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y) \text{ pour tous } \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1,$$

elle est dite pseudo-modulaire convexe(modulaire convexe).
L'espace

$$X_\rho = \{x \in X : \rho(\lambda x) < +\infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\},$$

est dit espace pseudo-modulaire (modulaire).

1.1.1 Topologie et convergence dans les espaces modulaires

Lorsque la pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ est convexe, le couple $\left(X_\rho, \|.\|_\rho\right)$ est un espace pseudo-normé (resp.normé), où

$$\|x\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\},$$

est la pseudo-norme (norme) dite de Luxemburg.

- Une suite (x_n) d'éléments de l'espace X_ρ est dite convergente au sens de la pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ ou ρ-convergente vers $x \in X_\rho$ et on écrit $x_n \xrightarrow{\rho} x$ lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(\lambda\left(x_n - x\right)\right) = 0$ pour un certain $\lambda > 0$.
- La ρ-convergence est en général une propriété moins forte que la convergence en norme (la $\|x\|_\rho$-convergence), plus précisément :

  $$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\|_\rho = 0 \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} \rho\left(\lambda\left(x_n - x\right)\right) = 0, \forall\lambda > 0.$$
- Une suite (x_n) est dite de Cauchy au sens de la modulaire ρ ou ρ-Cauchy lorsque $\lim\limits_{k,l\to\infty} \rho\left(\lambda\left(x_k - x_l\right)\right) = 0$ pour un certain $\lambda > 0$.
- Pour tout $x \in X_\rho$, la fonction $\alpha \longrightarrow \|\alpha x\|_\rho$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- Une pseudo-modulaire (resp. modulaire) ρ est dite :
  - continue à droite, lorsque $\lim\limits_{\lambda\to1^+} \rho\left(\lambda x\right) = \rho(x)$ pour tout $x \in X_\rho$,
  - continue à gauche, lorsque $\lim\limits_{\lambda\to1^-} \rho\left(\lambda x\right) = \rho(x)$ pour tout $x \in X_\rho$,
  - continue, lorsqu'elle est continue à droite et à gauche à la fois.
- Si ρ est continue à droite, alors pour tout $x \in X_\rho$ les inégalités $\|x\|_\rho < 1$ et $\rho\left(x\right) < 1$ sont équivalentes.
- Si ρ est continue à gauche, alors pour tout $x \in X_\rho$ les inégalités $\|x\|_\rho \leq 1$ et $\rho\left(x\right) \leq 1$ sont équivalentes.
- La fonctionnelle $\|.\|_\rho^A$ définie pour tout $x \in X_\rho$ par :

  $$\|x\|_\rho^A = \inf \frac{1}{k}\left[1 + \rho\left(kx\right)\right],$$

  est la pseudo-norme (norme) sur X_ρ dite d'Amemiya . Elle est équivalente à la norme de Luxemburg, précisément , pour tout $x \in X_\rho$,

  $$\|x\|_\rho \leq \|x\|_\rho^A \leq 2\|x\|_\rho.$$

- Un ensemble $A \subset X_\rho$ est dit ρ-fermé, lorsque pour toute suite $\{x_n\}$ dans A telle que $x_n \xrightarrow{\rho} x$, on a x est dans A
- Le plus petit ensemble ρ-fermé contenant un sous-ensemble $A \subset X_\rho$ est appelé ρ-fermeture de A dans X_ρ et est noté par $\overline{A}^\rho$.
- un sous-ensemble $A \subset X_\rho$ est ρ-fermé si et seulement si $A = \overline{A}^\rho$. Si $A \subset X_\rho$ est ρ-fermé, alors A est fermé par rapport à $\|.\|_\rho$.
- Les inclusions suivantes $A \subset \overline{A}^{\|.\|_\rho} \subset \overline{A}^\rho$ ont lieu. $\overline{A}^{\|.\|_\rho}$ désigne la fermeture de A par rapport à la norme $\|.\|_\rho$.

Pour plus de détails sur la théorie des espaces modulaires, nous renvoyons le lecteur à [4], [38], [49].

1.2 Espaces d'Orlicz

1.2.1 Introduction

Les espaces d'Orlicz ont été introduits par Orlicz en 1932. Par la suite la théorie s'est développée dans plusieurs directions à travers de nombreuses écoles : H.Nakano à Sapporo (Japon), M.A.Krasnolskii et Ya.B.Rutickii à Voronezh (USSR), A.C.Zaanen et W.A.J. Luxemburg à Leyden (Holland), W.Orlicz et J. Musielak à Poznan (Pologne), J.Lindenstrauss et L.Tzafriri à Jerusalem et l'école chinoise à Harbin.

H. Nakano et son équipe ont développé la théorie générale des espaces modulaires. L'essentiel de leurs travaux est présenté dans l'ouvrage "Modulared semi-ordered linear spaces " (1950).

L'école de Voronezh a développé la théorie des espaces d'Orlicz et ses applications aux équations intégrales. Leurs résultats sont consignés dans l'ouvrage de Krasnoselskii-Rutiki, "Convex functions and Orlicz spaces" (1958).

Les résultats de recherche de l'école de Leyden sont consignés dans une série d'articles par Luxemburg et Zaanen et dans l'ouvrage de Zaanen "Integration" (1967).

L'école Polonaise a développé la théorie générale des espaces modulaires ansi que la structure et la géométrie des espaces d'Orlicz et Musielak-Orlicz. Ces résultats ont été publiés dans le livre de Musielak "Orlicz spaces and modular spaces" (1983).

L'école de Jerusalem a étudié les espaces d'Orlicz du point de vue isomorphique. Ces questions sont présentées dans les livres de Lindenstrauss et Tzafriri "Classical Banach spaces "I (1977), II (1979)

L'école Chinoise a étudié quelques propriétés spéciales des espaces d'Orlicz, elle a aussi été le prolongement de l'école polonaise à travers l'étude de nombreuses propriétés géométriques dans les espaces d'Orlicz. Leurs résultats sont développés et consignés dans deux ouvrages essentiels : Wu Cong-Xin et Wang Ting-Fu " Orlicz spaces and their Applications" (1983)et Shutao Chen "Geometry of Orlicz spaces." (1996)

1.2.2 Définitions et Propriétés

Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré de mesure $\sigma-$ finie, complète et non atomique.
Une fonction $\varphi : T \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite fonction de Musielak-Orlicz ou fonction d'Orlicz à paramètre si elle vérifie les conditions suivantes :

- $\varphi(., u)$ est mesurable pour tout $u \geq 0$.
- $\varphi(t, u) = 0$ ssi $u = 0$ et $\varphi(t, .)$ est convexe pour μ presque tout $t \in T$.

Sur $M(T, \Sigma, \mu)$ l'ensemble des fonctions Σ mesurables sur T et à valeurs dans $\mathbb{R}$, que l'on notera pour simplifier, M on définit la fonctionnelle suivante :

$$\rho_\varphi(f) = \int_T \varphi(t, |f(t)|) d\mu.$$

ρ_φ est une modulaire convexe, l'espace modulaire correspondant

$$L^\varphi = \{f \in M,\ \rho_\varphi(\lambda f) < \infty \text{ pour un certain } \lambda > 0\},$$

est dit espace de Musielak-Orlicz. Cet espace est naturellement muni de la norme de Luxumburg :

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\{k > 0,\ \rho_{\varphi}(\frac{f}{k}) \leq 1\}.$$

Pour toute fonction de Musielak-Orlicz φ, on associe sa fonction complémentaire ou fonction conjuguée comme suit :

$$\psi(t,v) = \sup_{u>0}\{u|v| - \varphi(t,u)\}$$

La fonction complémentaire est aussi une fonction de Musielak-Orlicz.
On peut définir sur L^{φ} une deuxième norme dite d'Orlicz en posant :

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \sup\{|\int_T f(t)g(t)|, g \in L^{\psi}(T),\ \rho_{\psi}(g) \leq 1\}.$$

La norme d'Orlicz est en fait égale à la norme dite d'Amemiya [16],

$$\|f\|_{\varphi}^{a} = \inf\{\frac{1}{k}(\rho_{\varphi}(kf) + 1), k > 0\}.$$

On dit que la fonction φ satisfait la condition Δ_2, s'il existe une constante $K > 0$ et une fonction positive f telle que $\rho_{\varphi}(f) < \infty$, pour lesquelles

$$\varphi(t, 2u) \leq K\varphi(t,u),$$

pour μ presque tout $t \in T$ et pour tout $u \geq f(t)$

On écrit φ est ∇_2 pour exprimer que ψ est Δ_2.

Les structures topologiques et géométriques des espaces de Musielak-Orlicz sont bien étudiées. Parmi les propriétés essentielles caractérisées nous pouvons citer :

- L^{φ} est réflexif ssi φ est $\Delta_2 \cap \nabla_2$ [27].
- $(L^{\varphi}, \|.\|_{\varphi})$ est strictement convexe ssi φ est strictement convexe et satisfait la condition Δ_2 [23].
- $(L^{\varphi}, \|.\|_{\varphi})$ et uniformément convexe ssi φ est uniformément convexe et satisfait la condition Δ_2 [24].

Des propriétés géométriques équivalentes à la réflexivité, sont mises en évidence. Il s'agit entre autres de la P-convexié et de la B-convexité [33].

Dans le cas où L^φ est muni de la norme dite d'Orlicz nous pouvons citer essentiellement les deux travaux suivants [16] où la norme d'Orlicz est décrite à l'aide de la norme d'Amemyia et [31] où la stricte convexité est caractérisée.

Dans les dérnières années l'étude des propriétés géométriques et toplogiques des espaces de Musielak-Orlicz se fait dans le cadre plus général des espaces de Calderon-Lozanovskii voir ([11, 17, 18, 19]).

Nous terminons cette section par les définitions d'une fonction de Musielak-Orlicz strictement convexe et uniformément convexe.

Définition 1.2. *On dit qu'une fonction de Musielak-Orlicz $\varphi(t,x)$ est strictement convexe lorsque :*

$$\varphi\left(t, \frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left\{\varphi(t,u) + \varphi(t,v)\right\},$$

pour tout $u \neq v$ dans $\mathbb{R}_+$ et pour μ presque tout $t \in T$.

Définition 1.3. *Une fonction $\varphi\,(t,u)$ est dite uniformément convexe si pour tout $a \in \,]0,1[$, il existe $\delta(a) \in \,]0,1[$ tel que l'inégalité suivante :*

$$\varphi(t, \frac{1+b}{2}u) \leq (1-\delta(a))\frac{\varphi(t,u)+\varphi(t,bu)}{2},$$

soit vraie pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ $0 \leq b \leq a$ et pour μ presque tout $t \in T$.

Cette définition a été introduite par Musielak dans [49], où il démontre que c'est une condition suffisante pour l'uniforme convexité de l'espace de Musielak Orlicz muni de la norme de Luxemburg. Par la suite Hudzik dans [24] donne la définition suivante qui est moins forte et qui s'avère aussi nécessaire dans la caractérisation de l'uniforme convexité de l'espace de Musielak Orlicz muni de la norme de Luxemburg.

Définition 1.4. *Une fonction de Musielak-Orlicz $\varphi(t,u)$ est dite uniformément convexe lorsque :*

$$\forall \varepsilon \in \left]0,1\right[, \exists f_\varepsilon \in L^0 \text{ avec } \rho_\varphi(f_\varepsilon) = \varepsilon \text{ et } \exists p(\varepsilon) \in \left]0,1\right[\text{ tel ques } : \forall x, y \in [0,+\infty[$$
$$\left[\varphi(t,|f_\varepsilon(t)|) \leq \max(\varphi(t,x),\varphi(t,y)) \leq \varepsilon^{-1}\varphi\left(t,\frac{x-y}{2}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \varphi\left(t,\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1-p(\varepsilon)}{2}(\varphi(t,x)+\varphi(t,y)), \text{ pour } \mu \text{ presque tout } t \in T.$$

1.3 Fonctions presque périodiques et leurs généralisations

1.3.1 Introduction

Notons par A l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés :

$$A = \left\{ P_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{i\lambda_j t}, a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.1}$$

La classe $C^0 p.p.$ des fonctions presque périodiques au sens de Bohr est la fermeture de l'ensemble A par rapport à la norme uniforme, dans l'espace $C_b(\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

Cette caractérisation topologique a été à la base des différentes extensions. En considérant la fermeture de A par rapport à d'autres normes spécifiques, nous pouvons obtenir d'autres classes de fonctions presque périodiques. La première généralisation est due à A. S. Besicovitch (cf. [7]) dans le contexte des espaces de Lebesgue L^p, qui définit les espaces $S^q_{p.p.}$, $W^q_{p.p.}$ et $B^q_{p.p.}$ (resp.l'espace de Stepanoff, Weyl et Besicovitch de fonctions presque périodiques).

Dans [21], T. R. Hilmann a utilisé une approche similaire dans le cadre des espaces d'Orlicz, pour introduire les espaces $S^\varphi_{p.p.}$, $W^\varphi_{p.p.}$ et $B^\varphi_{p.p.}$ (resp.l'espace de Stepanoff-Orlicz, Weyl-Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques). Son travail a été essentiellement consacré à l'étude des propriétés structurelles et topologiques de ces nouvelles classes.

1.3.2 Différentes classes de fonctions presque périodiques

Depuis leurs introduction par H.Bohr dans les années vingt, les fonctions presque périodiques (p.p.) ont joué un rôle important dans différentes branches des Mathématiques. Plusieurs variantes et extensions du concept de Bohr ont été développées par la suite, notamment par A.S. Besicovitch, V.V. Stepanoff et H. Weyl auquels on associe un nombre important de monographies et articles couvrant un large spectre de notions de presque périodicité et leurs applications.

Une des extensions du concept originel (scalaire) de Bohr est la généralisation aux fonctions presque périodiques à valeurs vectorielles, grâce notamment aux travaux de S. Bochner dans les années trente. Sur ce sujet il y a de nombreuses références, dont les monographies de L. Amerio et G. Prouse [3], de B.M. Levitan et V.V. Zhikov [35]. Ce cas à valeurs vectorielles (dans un espace de Banach) est particulièrement important pour les applications aux équations différentielles et aux systèmes dynamiques (comportement asymptotique des solutions).

Dans la théorie des fonctions p.p. plusieurs définitions sont utilisées dont la majorité liées aux noms de H. Bohr, S. Bochner, V.V. Stepanoff, H. Weyl et A.S. Besicovitch.

Il est connu par exemple, que les définitions des fonctions uniformément presque périodiques (u.p.p. ou p.p. de type Bohr) exprimées en terme :

- de relative densité de l'ensemble des presque périodes (critère de Bohr),
- de compacité de l'ensemble des translatées (critère de Bochner ou critère de normalité),
- de fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la norme sup (critère d'approximation),

sont équivalentes.

Ces équivalences restent vraies pour la classe de Stepanoff de fonctions p.p.(cf. [7], [8]), ce n'est pas le cas pour la classe de Besicovitch de fonctions p.p.. Pour la classe de Weyl, la situation est plus compliquée du fait que dans la définition standard (critère de Bohr), la métrique qui a été utilisée est celle de Stepanoff et non pas celle de Weyl.
Une généralisation au cadre des espaces d'Orlicz a été initiée par J.Albrycht et T.R. Hilmann.

1.3.3 Fonctions presque périodiques de Bohr

Définitions et propriétés fondamentales

Définition 1.5. *Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense (r.d.) dans $\mathbb{R}$ s'il existe un nombre réel $l > 0$ pour lequel, tout intervalle $[a, a+l]$ contient au moins un point de l'ensemble X.*

Définition 1.6. *Une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$(l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$) est dite uniformément presque périodique (u.p.p.) si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensembe*

$$T(f, \varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \right\},$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

- Les éléments de l'ensemble $T(f, \varepsilon)$ sont appelés ε-presque périodes de f ou ε-nombres de translation de f.
- Toute fonction périodique continue est u.p.p.
- L'ensemble des fonctions u.p.p. a la structure d'une algèbre.
- Toute fonction u.p.p. est uniformément continue.
- Toute fonction u.p.p. est bornée.
- Si une fonction f est la limite uniforme dans $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions u.p.p., alors f est u.p.p.. Autrement dit, l'ensemble des fonctions u.p.p. est fermé par rapport à la convergence uniforme. C'est donc un espace de Banach.

Définition 1.7. *Une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dite uniformément normale si, de toute suite de nombres réels $\{h_i\}$, on peut extraire une sous suite $\{h_{ni}\}$ telle que la suite de fonctions $\{f(x + h_{ni})\}$ soit uniformément convergente.*

- Les fonctions $f^{h_i}(x) = f(x + h_i)$ sont appelées fonctions translatées de f.
- En d'autres termes, f est uniformément normale si l'ensemble de ses translatées est précompact dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
- Toute fonction obtenue comme limite d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés est u.p.p.. En conséquence la définition suivante vient naturellement.

Définition 1.8. *On note par $C^0_{p.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace de Banach obtenu comme fermeture de l'ensemble A des polynômes trigonométriques généralisés dans l'espace $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

On sait alors que

$$f \in C^0_{p.p.}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Leftrightarrow f \in \{u.p.p.\} \Leftrightarrow f \text{ est uniformément normale}$$

Valeur moyenne d'une fonction u.p.p.

Pour toute fonction u.p.p. f, la valeur moyenne $M[f]$ définie par :

$$M[f] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x)dx,$$

existe et est finie.
De plus,

1. $$M[f] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{+T} f(x)dx = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(x)dx.$$
2. $$M[f] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{\alpha-T}^{\alpha+T} f(x)dx,$$
   uniformément par rapport à $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1. *1. Toute fonction paire vérifie la propriété 1. pécédente, par contre une condition nécessaire pour qu'une fonction impaire soit u.p.p. est que sa valeur moyenne soit nulle.*

2. La valeur moyenne d'une fonction u.p.p. positive non identiquement nulle est strictement positive.

Série de Fourier associée à une fonction u.p.p.

Pour toute fonction u.p.p. et tout nombre réel λ, la fonction $f(x)\exp(-i\lambda x)$ reste u.p.p., le nombre

$$a(\lambda, f) = M[f(x)\exp(-i\lambda x)],$$

est donc bien défini.
En fait l'ensemble des réels λ vérifiant $a(\lambda, f) \neq 0$, est au plus dénombrable. De tels nombres sont appelés les exposants de Fourier-Bohr de f et les $a(\lambda, f)$ associés sont les coefficients de Fourier-Bohr de la fonction f.
L'ensemble

$$\Lambda(f) = \{\lambda_n \in \mathbb{R} : a(\lambda_n, f) \neq 0\},$$

est appelé spectre de f.

– la série formelle

$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1} a(\lambda_n, f)\exp(i\lambda_n x),$$

est la série de Fourier-Bohr de f.
– Les coefficients de Fourier-Bohr d'une fonction u.p.p. f vérifient l'égalité de Parseval :

$$\sum_{n\geq 1} a(\lambda_n, f)^2 = M[f|(x)|^2].$$

– Deux fonctions u.p.p. distinctes possèdent différentes séries de Fourier-Bohr.
– Si la série de Fourier-Bohr d'une fonction u.p.p f est uniformément convergente, alors sa somme est égale à f.

Polynôme d'approximation de Bochner-Fejér d'une fonction u.p.p.

L'égalité de Parseval, qui est un résultat fondamental dû à H. Bohr donne lieu à un résultat important d'approximation d'une fonction u.p.p. par des polynômes trigonométriques particuliers (dits polyômes de Bochner-Fejér) qui généralise la propriété classique d'approximation de Fejèr pour les fonctions périodiques. Plus pécisément :

Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...\}$ un ensemble dénombrable de nombre réels rationnellement linéairement indépendants, c'est à dire que pour tout entier $p \geq 1$ les seuls rationnels $r_1, r_2, ..., r_p$ vérifiant l'équation :

$$r_1\alpha_{n_1} + r_2\alpha_{n_2} + ...r_p\alpha_{n_p} = 0,$$

sont $r_1 = r_2 = ... = r_p = 0$.
Alors le polynôme de Bochner-Fejér σ_B est donné par l'expression suivante :

$$\sigma_B (x) = M [f (x + .) K_B (.)] ,$$

où K_B est le noyau de Bochner-Fejèr défini par :

$$K_B (t) = K_{n_1} (\alpha_1 t) K_{n_2} (\alpha_2 t) ....K_{n_p} (\alpha_p t) ,$$

et pour tout i, $i = 1, ...n_p$

$$K_{n_i} (t) = \frac{1}{n_i} \left(\frac{\sin \frac{n_i}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right),$$

est le noyau de Fejèr classique.

- $\sigma_B (x) = \sigma_p (x) = \sum_{k=1}^{k=n(p)} r_{k,p} a(\lambda_k, f) \exp(i\lambda_k x)$, où les $r_{k,p}$ sont des rationnels qui ne dependent que de λ_k et de p et non de $a(\lambda_k, f)$.
- La suite de polynômes de Bochner-Fejèr ainsi définie converge uniformément vers f lorsque p tend vers l'infini.

1.3.4 Fonctions presque périodiques de type Orlicz

Soient A l'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés définis sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $M(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Considérons les trois pseudomodulaires suivantes :

$\rho_{S_l^\varphi}(f) = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \displaystyle\int_s^{s+l} \varphi(|f(t)|)dt,$

$\rho_{W^\varphi}(f) = \lim\limits_{l\to+\infty} \sup\limits_{s\in\mathbb{R}} \frac{1}{l} \displaystyle\int_s^{s+l} \varphi(|f(t)|)dt,$

$\rho_{B^\varphi}(f) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{+T} \varphi(|f(t)|)dt.$

Et notons par $G^{\varphi}(\mathbb{R})$ l'un des trois espaces modulaires : $S_l^{\varphi}(\mathbb{R})$, $W^{\varphi}(\mathbb{R})$ ou $B^{\varphi}(\mathbb{R})$ correspondant aux pseudomodulaires $\rho_{S_l^{\varphi}}$, $\rho_{W^{\varphi}}$, $\rho_{B^{\varphi}}$ respectivement. Et par $\|.\|_{G^{\varphi}}$ la norme de Luxemburg correspondante.
Il est clair que A est un sous espace linéaire de $G^{\varphi}(\mathbb{R})$. La fermeture de A relativement à la (pseudo)norme $\|.\|_{G^{\varphi}}$ permet de définir l'espace correspondant du type Orlicz de fonctions presque périodiques, noté $G^{\varphi}.p.p$, appelé respectivement : Stepanoff-Orlicz, Weyl -Orlicz et Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. On écrit, donc :

$$G^{\varphi}.p.p = \overline{A}^{\|\cdot\|_{G^{\varphi}}}$$

ou d'une manière plus explicite :

$$G^{\varphi}.p.p = \left\{ f \in G^{\varphi}(\mathbb{R}),\ \exists \{f_n\}_{n\geq 1} \subset A,\ \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{G^{\varphi}} = 0 \right\}.$$

La fermeture de A relativement à la (pseudo)modulaire $\rho_{G^{\varphi}}$ permet de définir une classe plus large de fonctions presque périodiques, notée $\widetilde{G}^{\varphi}.p.p$. Plus précisement :

$$\widetilde{G}^{\varphi}.p.p = \left\{ f \in G^{\varphi}(\mathbb{R}),\ \exists \{f_n\}_{n\geq 1} \subset A,\ \exists k > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \rho_{G^{\varphi}}(k(f_n - f)) = 0 \right\}.$$

Il est clair que les deux espaces $G^{\varphi}.p.p$ et $\widetilde{G}^{\varphi}.p.p$ sont linéaires, de plus, on a l'inclusion suivante :

$$G^{\varphi}.p.p \subset \widetilde{G}^{\varphi}.p.p,$$

l'égalité des deux espaces a lieu si et seulement si φ vérifie la condition-Δ_2.
Les fonctions de $\widetilde{G}^{\varphi}.p.p$ peuvent aussi être caracterisées en termes de propriétés de translation ou de presque périodicité. La caractérisation des fonctions de $B^{\varphi}.p.p$ n'est cependant pas commode. De manière précise :

1. Une fonction $f \in S_1^{\varphi}(\mathbb{R})$ sera dite satisfaire la propriété de translation au sens de Stepanoff-Orlicz lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$S_l^{\varphi}T(f;\varepsilon) = \left\{ \tau \in \mathbb{R},\ \|f_\tau - f\|_{S_l^{\varphi}} \leq \varepsilon \right\}$$

   est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

2. Une fonction $f \in W^{\varphi}(\mathbb{R})$ sera dite satisfaire la propriété de translation au sens de Weyl-Orlicz lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\ell_0(\varepsilon) = \ell_0 > 0$ tel que l'ensemble $S^{\varphi}_{\ell_0}T(f;\varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
3. Une fonction $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ satisfait la propriété de translation au sens de Besicovitch-Orlicz, si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une suite $\{\tau_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels équirépartie dans $\mathbb{R}$, telle que :
   (a) $\rho_{B^{\varphi}}\left(\dfrac{f_{\tau_i} - f}{\alpha}\right) < \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{Z}$.
   (b) $\overline{M}_x\overline{M}_i\{\frac{1}{c}\int\limits_x^{x+c}\varphi(|f(t+\tau_i) - f(t)|)d\mu\} \leq \varepsilon$, $\forall c > 0$, où α est une constante qui ne dépend que de f.

L'ensemble des fonctions de $G^{\varphi}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de translation correspondantes est noté $G^{\varphi}.p.t$. Cet espace contient $G^{\varphi}.p.p$ et lui est égal si et seulement si φ vérifie la condition-Δ_2(cf.[21]).
Les propriétés topologiques essentielles des espaces $G^{\varphi}.p.p(\mathbb{R})$ et $G^{\varphi}.p.t(\mathbb{R})$ sont étudiées dans [2],[21]. Tous ces espaces sont non séparables. Les espaces $S^{\varphi}_l.p.p$, $S^{\varphi}_l.p.t$, $B^{\varphi}.p.p$ et $B^{\varphi}.p.t$ sont complets alors que $W^{\varphi}.p.p$ et $W^{\varphi}.p.t$ ne le sont pas.

Remarque 1.2. *Des résultats classiques d'analyse fonctionnelle affirment que les espaces $C_0([0,1])$, des fonctions continues f telles que $f(0) = f(1)$, et $L^p([0,1])$, $p \geq 1$ s'identifient à la fermeture de l'ensemble $A_0 = \langle\{\exp(2in\pi x), n \geq 0\}\rangle$ pour les normes correspondantes.*
La fermeture pour des (pseudo)normes du même type de l'ensemble A des polynômes trigonométriques généralisés nous a permis de définir les différentes classes de fonctions presque périodiques. En fait on peut préciser cette dualité cf. [3]

1. *L'algèbre $\{u.p.p\}$ est isométriquement isomorphe à un espace abstrait $C(K)$ où K est le compactifié de Bohr de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Haar.*
2. *L'identification de 1) se prolonge lorsque φ est Δ_2, en une identification entre les espaces $B^{\varphi}.p.p$ et $L^{\varphi}(K)$.(cf.[21])*

Comparaison des espaces $S_l^\varphi.p.p$, $W^\varphi p.p$ et $B^\varphi.p.p$

Les espaces $S_l^\varphi.p.p$, $W^\varphi.p.p$ et $B^\varphi.p.p$ sont par définition les fermetures respectives de l'ensemble A relativement aux (pseudo)normes de Luxemburg $\|.\|_{S_1^\varphi}$, $\|.\|_{W^\varphi}$ et $\|.\|_{B^\varphi}$. Ces (pseudo)normes vérifient les inégalités

$$\|.\|_\infty \geq \|.\|_{S_l^\varphi} \geq \|.\|_{W^\varphi} \geq \|.\|_{B^\varphi} \geq \|.\|_{B^1}$$

Ces inégalités impliquent les relations d'inclusion :

$$A \subset \{u.p.p\} \subset S_1^\varphi.p.p \subset W^\varphi.p.p \subset B^\varphi.p.p \subset B^1.p.p$$

Propriétés d'approximation dans les espaces $S_1^\varphi.p.p$, $W^\varphi.p.p$ et $B^\varphi.p.p$

Toute fonction u.p.p. admet un développement en série de Fourier et peut être approchée, au sens de la norme uniforme, par une suite de polynômes de Bochner-Fejèr. Ce résultat se généralise aussi au cas de fonctions presque périodiques définies dans les espaces du type Orlicz. De manière précise, les fonctions de $B^1p.p.(\mathbb{R})$, en particulier donc celles de $G^\varphi p.p.(\mathbb{R})$ possèdent un développement en série de Fourier. A toute fonction f de $B^1p.p.(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on associe le coefficient de Fourier-Bohr $a(\lambda) = \lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} f(t) \exp(-i\lambda t)\, dt$. Ces coefficients sont nuls sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ noté $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_{2,\ldots,}\lambda_n, \ldots\}$. On considère alors la série formelle $S(f)(x) = \sum\limits_{n\geq 1} a(\lambda_n) \exp(i\lambda_n x)$.

Les questions concernant la convergence de cette série sont en général difficiles. On montre toutefois l'existence de polynômes d'approximation de Bochner-Fejèr. Cette approche généralise l'approximation classique de Fejèr dans le cas des fonctions périodiques :

Soient $f \in G^\varphi.p.p$, où $G^\varphi.p.p$ désigne toujours l'un des trois espaces $S_\ell^\varphi.p.p$, $W^\varphi.p.p$ ou $B^\varphi.p.p$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a(\lambda_k,\, f)\, e^{i\,\lambda_k\, x}$ les sommes partielles de sa série de Fourier. Il existe une suite de polynômes trigonométriques $\sigma_m(f)$, $m \geq 1$ (qui sont les polynômes d'approximation de Bochner-Fejèr) de la forme :

$$\sigma_m\,(f)\,(x) = \sum_{k=1}^{r_m} \mu_{m\,k}\, a\,(\lambda_k,\ f)\ e^{i\,\lambda_k\,x} \qquad .$$

Les facteurs $\{\mu_{m\,k}\}$ dépendent seulement de la suite des exposants $\{\lambda_k\}$de f et on a : $0 < \mu_{m\,k} \leq 1$.

Pour tout $f \in B^{\varphi}p.p$, la suite $\{\sigma_m\,(f)\}$ possède les propriétés d'approximation suivantes :

1. $\|\,\sigma_m\,(f)\|_{G^\varphi} \leq \|\,f\,\|_{G^\varphi} \quad , \quad m = 1, 2... \qquad (\rho_{G^\varphi}\,(\,\sigma_m\,(f)) \leq \rho_{G^\varphi}\,(\,f))$.
2. $\|\,\sigma_m\,(f) - f\|_{G^\varphi} \to 0$ quand $m \to \infty$.

1.4 Quelques propriétés géométriques dans les espaces de Banach

Les notions de stricte et d'uniforme convexité ont été introduites par J. A. Clarkson [13]. Les espaces uniformément convexes sont le cadre adéquat pour la théorie de l'approximation.
La relation entre les différents types de convexité des espaces de Banach et leur réflexivité a fait l'objet de nombreuses études. D. Milman en 1938 (cf. [40]) démontra que tout espace uniformément convexe est réflexif.
De nombreuses autres propriétés intermédiaires entre la stricte et l'uniforme convexité ont été introduites. Il s'agit entre autres de l'uniforme convexité locale, l'uniforme convexité dans toute direction, la H-propriété(noté aussi K.K.P).

• Un espace normé $(X, \|\ .\ \|)$ est dit strictement convexe lorsque tout point x de sa sphère unité $S(X)$ est un point extrême de sa boule unité $B(X)$ c'est à dire si

$$x \in S(X) \text{ et } x = \frac{y+z}{2}, y, z \in B(X)$$

alors $y = z = x$.
On a aussi la caractérisation équivalente suivante :

$$\|\ \frac{x+y}{2}\ \| < 1$$

pour tous $x, y \in X$ tels que

$$\| x \| = \| y \| = 1 \text{ et } \| x - y \| > 0$$

Pour introduire la notion d'uniforme convexité de $(X, \| \cdot \|)$, nous commençons par rappeler la définition de son module de convexité :
le module de convexité d'un espace $(X, \| \cdot \|)$ est la fonction $\delta_X(.) :]0,2] \longrightarrow [0,1]$ définie par la formule :

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= \inf\left\{1 - \| \tfrac{x+y}{2} \| : x, y \in S(X); \| x - y \| = \epsilon\right\} \\ &= \inf\left\{1 - \| \tfrac{x+y}{2} \| : x, y \in S(X); \| x - y \| \geq \epsilon\right\} \\ &= \inf\left\{1 - \| \tfrac{x+y}{2} \| : x, y \in B(X); \| x - y \| \geq \epsilon\right\} \end{aligned}$$

La fonction $\delta_X(.)$ est continue et croissante sur l'intervalle ouvert $]0,2[$.
Il est facile de voir que l'espace $(X, \| \cdot \|)$ est strictement convexe si et seulement si $\delta_X(2) = 1$.

- $(X, \| \cdot \|)$ est dit uniformément convexe lorsque $\delta_X(\varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon \in]0,2]$.

L'uniforme convexité de $(X, \| \cdot \|)$ est équivalente à chacune des quatre conditions suivantes :

(i) Pour tout $\varepsilon \in]0,2[$, il existe $\delta(\varepsilon) \in]0,1[$ tel que pour tous $x, y \in S(X)$ vérifiant
$\| x - y \| \geq \varepsilon$, on a
$$\| \frac{x+y}{2} \| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

(ii) Pour tout $\varepsilon \in]0,2[$, il existe $\sigma(\varepsilon) \in]0,1[$ tel que pour tous $x, y \in B(X)$ vérifiant $\| x - y \| \geq \varepsilon$, on a
$$\| \frac{x+y}{2} \| \leq 1 - \sigma(\varepsilon).$$

(iii) Pour toutes suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans $S(X)$, la condition
$$\lim_{n \to +\infty} \| x_n + y_n \| = 2$$
implique que
$$\lim_{n \to +\infty} \| x_n - y_n \| = 0$$

(iv) Pour toutes suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans X telles que la condition

$$\lim_{n\to+\infty} \| x_n \|= \lim_{n\to+\infty} \| y_n \|= \lim_{n\to+\infty} \| \frac{x_n+y_n}{2} \|,$$

est vérifiée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \| x_n - y_n \|= 0.$$

• Un espace de Banach $(X, \|.\|)$ est dit localement uniformément convexe (LUC) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et $y \in S(X)$ il existe un $\delta_X(\varepsilon, y) > 0$ tel que si

$$x \in S(X) \text{ et } \|x-y\| \geq \varepsilon \text{ alors } \|\frac{1}{2}(x+y)\| \leq 1-\delta_X(\varepsilon, y).$$

Il existe une caractérisation séquentielle de LUC :
L'espace $(X, \|.\|)$ est LUC ssi pour chaque $x \in S(X)$ et tout suite (y_n) dans $S(X)$ (ou dans B(X)) pour laquelle $\|\frac{1}{2}(x+y_n)\| \longrightarrow 1$, nous avons aussi $\|y_n - x\| \longrightarrow 0$.

• Soit $x \in S(X)$, on dira que x est un $H-$point de $B(X)$ lorsque l'implication suivante a lieu : $(x_n \rightharpoonup x)$ et $\|x_n\| \longrightarrow \|x\| = 1$ alors $x_n \longrightarrow x$ en norme.
Si tout point de $S(X)$ est un $H-$point de $B(X)$ alors on dit que X possède la $H-$propriété ou satisfait la propriété de Kadec-Klee (K.K.P.).
• L'espace X est dit midpoint localement uniformément convexe (MLUC) quand tout point $x \in S(X)$ est un point fortement extrême. i.e. : Pour tout $x \in S(X)$ et toutes suites (x_n), $(y_n) \in B(X)$ on a $\frac{x_n+y_n}{2} \longrightarrow x \Rightarrow x_n - y_n \longrightarrow 0$.

• L'espace de Banach X est dit uniformément convexe dans toutes les directions (UCED) si la propriété suivante est vérifiée : $\forall z \neq 0 \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x, y \in S(X)$ $x - y = az$ on a $|a| \geq \varepsilon \Rightarrow \|\frac{1}{2}(x+y)\| \leq 1-\delta$.

On a la caractérisation suivante :

Pour tout $z \in X$, et toute suite (x_n) dans X, les conditions

$$\|x_n\| \longrightarrow 1, \|x_n+z\| \longrightarrow 1 \text{ et } \|2x_n+z\| \longrightarrow 2 \text{ impliquent } z=0.$$

Notons que les implications suivantes ont lieu dans un espace de Banach[39] :

- $LUC \Longrightarrow MLUC \Longrightarrow SC$.
- $LUC \Longrightarrow H-$ propriété.
- $UCED \Longrightarrow SC$.

CHAPITRE 2

Espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques

2.1 Introduction

Les espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques ont été récemment introduits dans [47], [48] et [53], où certaines de leurs propriétés géométriques ont été caractérisées. Ils constituent une généralisation naturelle des espaces de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. L'objectif de ce chapitre est de présenter ces espaces ainsi que les méthodes et autres résultats techniques qui sont développés dans le but d'étudier leurs propriétés topologiques et géométriques.

2.2 Définitions et notations

Soit φ une fonction de Musielak-Orlicz , i.e. $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et telle que :

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t, .)$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(.,x)$ est Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t,x) = 0$ ssi $x = 0$.

   Dans la suite nous supposons que φ vérifie aussi les deux conditions suivantes :

3. $\varphi(.,.)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(.,x)$ est périodique de période T indépendante de x (on peut supposer que $T = 1$).

Remarque 2.1.
•*L'hypothèse $\varphi(t,x) = 0$ ssi $x = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, nous assure que pour tout $\alpha > 0$,*

$$\inf\{\varphi(t,\alpha), t \in \mathbb{R}\} = \phi(\alpha) > 0.$$

Cette dernière propriété est importante dans l'étude des propriétés structurelles de nos espaces comme en le verra dans la Remarque 2.3
• *Notons aussi que la fonction ϕ est convexe.*

Soit maintenant $\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{C}) = \mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les fonctions Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{C}$.
La fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} \rho_\varphi : \mathcal{M} & \longrightarrow & [0,+\infty] \\ f & \longrightarrow & \rho_\varphi(f) = \overline{\lim\limits_{T\to+\infty}} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{+T} \varphi(t,|f(t)|)dt = \overline{M}[\varphi(.,|f(.)|)]. \end{array}$$

est une pseudo modulaire convexe sur $\mathcal{M}$ (voir [6]).
L'espace modulaire associé :

$$\begin{array}{rcl} B^\varphi & = & \{f \in \mathcal{M} : \lim\limits_{\alpha\to 0} \rho_\varphi(\alpha f) = 0\}, \\ & = & \{f \in \mathcal{M} : \rho_\varphi(\lambda f) < +\infty,\ \text{pour un } \lambda > 0\}, \end{array}$$

est appelé espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz.
Cet espace est naturellement muni de la norme de Luxemburg :

$$\|f\|_\varphi = \inf\left\{k > 0,\ \rho_\varphi\left(\frac{f}{k}\right) \leq 1\right\}.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les polynômes trigonométriques généralisés, i.e.,

$$\mathcal{A} = \{P_n(t) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j e^{i\lambda_j t},\ a_j \in \mathbb{C}, \lambda_j \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques noté par $B^{\varphi}a.p.$ est la fermeture de l'ensemble $\mathcal{A}$ relativement à la norme de Luxemburg,

$$B^{\varphi}a.p. = \{f \in B^{\varphi} : \exists\{p_n\} \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \lim_{n\to+\infty} \|f - p_n\|_{\varphi} = 0\}.$$

Quand $\varphi(t,x) = |x|$ l'espace $B^{\varphi}a.p.$ est noté par $B^1p.p.$
La fermeture de l'ensemble $\mathcal{A}$ relativement à la modulaire ρ_{φ} est le sous-espace de B^{φ} noté par $\widetilde{B}^{\varphi}p.p.$:

$$\widetilde{B}^{\varphi}a.p. = \{f \in B^{\varphi} : \exists\{p_n\} \in \mathcal{A} \text{ t.q. } \lim_{n\to+\infty} \rho_{\varphi}(\alpha(f-p_n)) = 0 \text{ pour un certain } \alpha > 0\}.$$

On a clairement les inclusions suivantes :

$$B^{\varphi}a.p. \subseteq \widetilde{B}^{\varphi}a.p. \subseteq B^{\varphi}.$$

Une condition de croissance importante dans les espaces modulaires imposée sur la fonction génératrice φ, est la condition Δ_2 :

Définition 2.1. *On dit que φ satisfait la condition $\Delta_2^{B^1}$ s'il existe une constante $k > 0$ et une fonction positive h avec $\rho_1(h) < +\infty$ telles que,*

$$\varphi(t,2x) \leq k\varphi(t,x) + h(t),\ \textit{pour presque tout}\ \ t \in \mathbb{R}, \textit{et tout } x \in \mathbb{R}^+.$$

On dit que φ est $\nabla_2^{B^1}$ si ψ est $\Delta_2^{B^1}$.

On peut écrire de manière équivalente (voir [27]) :
φ vérifie la condition $\Delta_2^{B^1}$, s'il existe $k > 0$ et $h \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ tels que

$$\varphi(t,2u) \leq k\varphi(t,u),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u \geq h(t)$.
Cette dernière est notée uniquement Δ_2 quand il n'y a pas de risque de confusion.

2.3 Lemmes techniques et résultats de convergence

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques lemmes techniques et des résultats de convergence développés pour étudier la structure géométrique des espaces de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Soit $\Sigma = \Sigma(\mathbb{R})$ la $\sigma-$ algèbre de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\overline{\mu}$ la fonction d'ensemble définie sur Σ par :

$$\overline{\mu}(A) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \chi_A(t)dt = \overline{\lim}\frac{1}{2T}\mu(A\cap[-T,+T]).$$

Où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On notera que $\overline{\mu}$ n'est pas une mesure, en effet elle n'est pas $\sigma-$additive. Il suffit de remarquer que :

$$\overline{\mu}(\mathbb{R}) = 1 \text{ alors que } \mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]-n,+n[, \text{ et } \overline{\mu}(]-n,+n[) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Définition 2.2. *Une suite $\{f_n\} \subseteq B^{\varphi}(\mathbb{R})$ est dite $\overline{\mu}-$convergente vers $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ et on écrit $f_n \xrightarrow{\overline{\mu}} f$ lorsque, pour tout $\alpha > 0$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}\{t\in\mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| > \alpha\} = 0.$$

Ce concept de convergence satisfait la propriété suivante :
Si $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont deux suites de fonctions $\overline{\mu}$ convergentes vers f et g respectivement, alors $\{\alpha f_n + \beta g_n\}$ converge en $\overline{\mu}$ vers $\alpha f + \beta g$.

Lemme 2.1. *Soit $f \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$. Alors* $\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}\{t\in\mathbb{R}, \quad |f(t)| \geq n\} = 0.$

Démonstration. f étant dans $B^{\varphi}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha > 0$ pour lequel $\rho_{\varphi}(\alpha f) < \infty$.

Pour un entier N, soit f_N la troncature de f i.e.

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad |f(t)| \leq N \\ N & \text{si} \quad |f(t)| \geq N. \end{cases}$$

Posons $E_N = \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq N\}$, alors du fait de la convexité de ϕ, on a pour chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(\alpha f) &\geq \rho_\varphi(\alpha f_N) \\ &\geq \rho_\varphi(\alpha f_N \chi_{E_N}) \\ &= \rho_\varphi(\alpha N \chi_{E_N}) \\ &\geq \phi(\alpha N)\overline{\mu}(E_N). \end{aligned}$$

Il découle directement que $\overline{\lim_{N\to\infty}}\, \overline{\mu}(E_N) = 0$.

Lemme 2.2. *Soit* $\nu(A) = \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi(t, \chi_A(t))dt$.
Alors, la fonction d'ensemble $\overline{\mu}$ *est absolument continue par rapport à* ν, *i.e. :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \textit{ tel que } : A \in \Sigma,\ \nu(A) \leq \delta \Longrightarrow \overline{\mu}(A) \leq \varepsilon.$$

La preuve découle du fait que $\nu(A) \geq \phi(1)\overline{\mu}(A)$.

Remarque 2.2. *On a aussi*

$$\nu(A) \leq \sup_{t\in[0,1]} \varphi(t, 1)\overline{\mu}(A.)$$

Ce qui veut dire aussi que ν *est absolument continue par rapport à* $\overline{\mu}$.

Lemme 2.3. *Soit* $\{f_n\} \subseteq B^\varphi(\mathbb{R})$ *une suite convergente au sens de la modulaire vers* $f \in B^\varphi(\mathbb{R})$. *Alors* $\{f_n\}$ *est* $\overline{\mu}$ *convergente vers* f.
Autrement dit : Si pour un $\alpha > 0$ *nous avons* $\rho_\varphi(\alpha(f_n - f)) \longrightarrow 0$ *alors* , $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}\{t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\} = 0$.

Pour la preuve voir [41] et [53].

Remarque 2.3.
• *La preuve du lemme précédent est donnée dans le cas sans paramètre dans*

[41] avec $\alpha = 1$*, mais on remarque facilement qu'elle reste valable pour tout* $\alpha > 0$.

• *La condition* $\phi(\alpha) > 0$ *pour tout* $\alpha > 0$ *est une condition nécessaire pour la vérification du lemme précédent.*
En effet l'exemple suivant fournit une suite de fonctions convergente en modulaire sans qu'elle ne le soit en $\overline{\mu}$*, dans le cas où cette condition n'est pas vérifiée.*
Nous définissons $\varphi : \mathbb{R}\times [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *par* $\varphi(t,u) = f(t).u^2$ *où* $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty[$ *est une fonction continue et périodique (avec une période* $T = 1$*) définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & si \;\; t \in \left[0, \frac{3}{8}\right] \\ 8t-3 & si \;\; t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right] \\ -8t+5 & si \;\; t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right] \\ 0 & si \;\; t \in \left[\frac{5}{8}, 1\right] \end{cases}$$

Considérons aussi la fonction continue et périodique (avec une période $T = 1$*) définie comme suit :*

$$h(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\\ -8t+3 & si \;\; t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right[\\ 0 & si \;\; t \in \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right[\\ 8t-5 & si \;\; t \in \left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right[\\ 1 & si \;\; t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$\varphi(t,|h(t)|) = f(t)h^2(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}, et\ donc\ \rho_\varphi(h) = 0.$$

Mais,

$$\bar{\mu}\left\{t \in \mathbb{R}, |h(t)| \geq \frac{1}{2}\right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Lemme 2.4. *Soit* $h \in B^\varphi(\mathbb{R})$*, alors pour tout* $\theta \in]0,1[$*,* $\exists \beta > 0$ *t.q.*

$$\overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \ |h(t)| \leq \beta\} \geq \theta.$$

Démonstration. Supposons que l'assertion du lemme n'est pas vérifiée. Alors $\exists\theta \in]0,1[$ tel que

$$\forall\beta > 0 \ \ \overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \ |h(t)| \leq \beta\} < \theta.$$

c.à.d. aussi ;
$\exists\theta \in]0,1[$ tel que

$$\forall\beta > 0 \ \ \overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \ |h(t)| > \beta\} \geq (1-\theta)$$

.
D'où, en posant $A = \{t \in \mathbb{R} : \ |h(t)| > \beta\}$,

$$\rho_\varphi(h) \geq \rho_\varphi(h\chi_A) \geq \phi(\beta)\overline{\mu}(A) \geq \phi(\beta)(1-\theta), \ \forall\beta > 0,$$

ce qui contredit le fait que $\rho_\varphi(h) < +\infty$.

Lemme 2.5. *Soit $\{f_n\}$ une suite dans $B^\varphi(\mathbb{R})$ $\overline{\mu}$ convergente vers f dans $B^\varphi(\mathbb{R})$. Alors $\varphi(.,|f_n(.)|)$ est $\overline{\mu}$ convergente vers $\varphi(.,|f(.)|)$*

Démonstration. Soit $\bar{\theta} \in \,]0,1[$. Par le Lemme 2.4, il existe une constante strictement positive β pour laquelle $\bar{\mu}\left(\bar{G}\right) \geq \bar{\theta}$ où

$$\bar{G} = \{t \in \mathbb{R} : |f\,(t)| \leq \beta\}\,.$$

Pour $\alpha > 0$, posons $A_n^\alpha = \{t \in \mathbb{R} : |f_n\,(t) - f\,(t)| > \alpha\}\,.$
On a clairement $|f_n\,(t)| \leq \beta + \alpha, \forall t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)'\,.$

Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}\times\,[0,+\infty[$, elle est uniformément continue sur $[0,1]\times[0,\alpha+\beta]$. Du fait de sa périodicité par rapport à $t \in \mathbb{R}$, elle sera φ uniformément continue sur $\mathbb{R}\times[0,\alpha+\beta]\,.$

Alors, pour tout réel $\eta > 0$, il existe $\alpha_\eta > 0$ tel que pour tout $t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)^{'}$:

$$|\varphi\,(t,|f_n\,(t)|) - \varphi\,(t,|f\,(t)|)| \geq \eta \Longrightarrow |f_n\,(t) - f\,(t)| > \alpha_\eta.$$

Mais $f_n \overset{\bar{\mu}}{\rightarrow} f$, d'où nous aurons aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{\mu}\left\{t \in \bar{G} \cap (A_n^\alpha)^{'} : |\varphi\,(t,|f_n\,(t)|) - \varphi\,(t,|f\,(t)|)| \geq \eta\right\} = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\bar{\mu}\left\{t\in\mathbb{R}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
\leq\ &\bar{\mu}\left\{t\in\bar{G}\cap\left(A_{n}^{\alpha}\right)^{\prime}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
&+\bar{\mu}\left\{t\in\left(\bar{G}\right)^{\prime}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
&+\bar{\mu}\left\{t\in A_{n}^{\alpha}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
\leq\ &\bar{\mu}\left\{t\in\bar{G}\cap\left(A_{n}^{\alpha}\right)^{\prime}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
&+\bar{\mu}\left(\left(\bar{G}\right)^{\prime}\right)+\bar{\mu}\left(A_{n}^{\alpha}\right)\\
\leq\ &\bar{\mu}\left\{t\in\bar{G}\cap\left(A_{n}^{\alpha}\right)^{\prime}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\\
&+\left(1-\bar{\theta}\right)+\bar{\mu}\left(A_{n}^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtiendrons :

$$\overline{\lim_{n\rightarrow+\infty}}\bar{\mu}\left\{t\in\mathbb{R}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}\leq\left(1-\bar{\theta}\right).$$

Finalement, comme $\bar{\theta}\in\left]0,1\right[$ est arbitraire, on déduit que

$$\forall\eta>0,\lim_{n\rightarrow+\infty}\bar{\mu}\left\{t\in\mathbb{R}:\left|\varphi\left(t,\left|f_{n}\left(t\right)\right|\right)-\varphi\left(t,\left|f\left(t\right)\right|\right)\right|\geq\eta\right\}=0. \tag{2.1}$$

Lemme 2.6. *Soit $g\in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que :*

$$\overline{\mu}(Q)\leq\delta\Longrightarrow\rho_{\varphi}(g\chi_{Q})\leq\varepsilon.$$

g est alors dite absolument intégrable.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $p_{\varepsilon}\in\{u.p.p.\}$ tel que

$$\rho_{\varphi}(2(g-p_{\varepsilon}))\leq\varepsilon.$$

(Par définition des fonctions de $B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$).
D'autre part : $\rho_{\varphi}(g)\leq\frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2(g-p_{\varepsilon}))+\frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2p_{\varepsilon})$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\varphi}(g.\chi_{Q}) &\leq \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2(g-p_{\varepsilon})\chi_{Q})+\frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2p_{\varepsilon}\chi_{Q})\\
&\leq \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\delta.2\sup|p_{\varepsilon}(t)|.
\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2.\sup|p_\varepsilon(t)|}$

Lemme 2.7. *Soit $f \in B^\varphi p.p.$. Alors, on a l'équivalence suivante :*

$$\rho_\varphi(f) = 0 \quad ssi \quad f = 0 \ \overline{\mu} \ p.p.$$

Démonstration. L'assertion $\rho_\varphi(f) = 0$ implique $f = 0 \ \ \overline{\mu}$ *p.p.* est une consequence directe du Lemme 2.3.

Montrons maintenant l'implication inverse.
Supposons que $f = 0 \ \overline{\mu}$ *p.p.* Alors, on aura pour tout $n \geq 1$

$$\overline{\mu}\{G_n\} \leq \frac{1}{n}, \quad avec \quad G_n = \{t \in \mathbb{R}, |f(t)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

De là, en utilisant le Lemme 2.6, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi(f\chi_{G_n}) = 0.$$

D'autre part :

$$\rho_\varphi(f\chi_{G_n^c}) \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t, \frac{1}{n})\overline{\mu}(G_n^c) = \varphi(a, \frac{1}{n})\overline{\mu}(G_n^c) \leq \sup_{t\in[0,1]} \varphi(t, \frac{1}{n}).$$

Maintenant du fait que $\{\varphi_n(.)\}_n = \{\varphi(., \frac{1}{n})\}_n$ est uniformément continue sur $[0,1] \times [0,1]$, elle est équicontinue dans $(\mathbb{C}[0,1], \mathbb{R})$ sa convergence simple coincide avec sa convergence uniforme.

Ce qui implique

$$\rho_{\varphi \atop n\to+\infty}(f\chi_{G_n^c}) = 0.$$

Finalement, en utilisant la formule

$$\rho_\varphi(f) \leq \rho_\varphi(f\chi_{G_n}) + \rho_\varphi(f\chi_{G_n^c}),$$

on obtient $\rho_\varphi(f) = 0$.

Définition 2.3. *Une suite $\{f_n\} \subset B^\varphi(\mathbb{R})$ est dite équi-absolument intégrable quand :*

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall Q \in \Sigma, \ \ \overline{\mu}(Q) \leq \delta \ \ et \ \ n \geq n_0 \Longrightarrow \rho_\varphi(f_n\chi_Q) \leq \varepsilon.$$

Lemme 2.8. *Soit* $\{f_n\} \subset B^1(\mathbb{R})$ *une suite* $\overline{\mu}$ *convergente vers* $f \in B^1(\mathbb{R})$ *absolument intégrable. Alors, si* $\{f_n\}$ *est équi-absolument intégrable nous avons* $\rho_1(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_1(f)$.

Démonstration. Fixons $\theta > 0$ et considérons l'ensemble :

$$A_n^\theta = \{t \in \mathbb{R} : |f_n(t) - f(t)| > \theta\}.$$

La suite $\{f_n\}$ étant $\overline{\mu}$ convergente vers f, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{\mu}(A_n^\theta) = 0. \tag{2.2}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\rho_1(|f_n - f|) &\leq \rho_1(|f_n - f|\chi_{A_n^\theta}) + \rho_1(|f_n - f|\chi_{CA_n^\theta}) \\
&\leq \rho_1(|f_n|\chi_{A_n^\theta}) + \rho_1(|f|\chi_{A_n^\theta}) + \rho_1(|f_n - f|\chi_{CA_n^\theta}) \\
&\leq \rho_1(f_n\chi_{A_n^\theta}) + \rho_1(f\chi_{A_n^\theta}) + \theta.
\end{aligned}$$

Pour un $\varepsilon > 0$ donné, l'équi-absolue intégrabilité de $\{f_n\}$ assure l'existence de $n_1 \in \mathbb{N}$ et $\delta_1 > 0$ t.q.

$$\forall Q \in \Sigma, \quad \overline{\mu}(Q) \leq \delta_1 \textit{ et } n \geq n_1 \Longrightarrow \rho_1(f_n\chi_Q) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

D'autre part l'absolue intégrabilité de f assure l'existence d'un δ_2 t.q.

$$\overline{\mu}(Q) \leq \delta_2 \Longrightarrow \rho_1(f\chi_Q) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.4}$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Alors par (2.2) il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_2$ nous avons $\overline{\mu}(A_n^\theta) \leq \delta$, de là pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$ on a $\forall n \geq n_0$,

$$\max(\rho_1(f\chi_{A_n^\theta}), \rho_1(f_n\chi_{A_n^\theta})) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \rho_1(|f_n - f|) \leq \varepsilon + \theta.$$

Faisant tendre n vers l'infini on obtient :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \rho_1(f_n - f) \leq \theta.$$

Finalement, puisque $\theta > 0$ est arbitraire on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_1(f_n - f) = 0$. D'où $\rho_1(f_n) \longrightarrow \rho_1(f)$, qd $n \longrightarrow +\infty$.

Remarque 2.4. *Sous les mêmes hypothèses, le résultat du Lemme 2.8 reste vrai quand* $\{f_n\} \subset B^{\varphi}$ *et* $f \in B^{\varphi}a.p.$, *i.e.* $\rho_{\varphi}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_{\varphi}(f)$.

Corollaire 2.1. *Soit* $\{f_n\} \subset B^{\varphi}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\varphi} = 0$, *avec* $f \in B^{\varphi}a.p.$. *Alors on affirme que* $\rho_{\varphi}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_{\varphi}(f)$.

Démonstration. Puisque la suite $\{f_n\}$ est $\overline{\mu}$ convergente vers f, il suffit de montrer qu'elle est équi-absolument intégrable. En fait : $\rho_{\varphi}(f_n) \leq \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2(f_n - f)) + \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2f)$.
Étant donné un $\varepsilon > 0$, puisque $2f \in B^{\varphi}a.p.$ il existe $\delta > 0$ t.q. $\forall Q \in \Sigma$ nous avons $\overline{\mu}(Q) \leq \delta \Longrightarrow \rho_{\varphi}(2f\chi_Q) \leq \varepsilon$.
D'autre part, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\rho_{\varphi}(2(f_n - f)) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$. Finalement, nous avons :

$$\rho_{\varphi}(f_n\chi_Q) \leq \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2(f_n - f)\chi_Q) + \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2f\chi_Q) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall Q \in \Sigma.$$

Corollaire 2.2. *Soit* $\{f_n\}_n \subset B^1(\mathbb{R})$ *une suite* $\bar{\mu}$*-convergente vers* $f \in B^1(\mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe une fonction* $g \in B^1(\mathbb{R})$ *absolument intégrable telle que* $\max(|f_n|, |f|) \leq g$. *Alors*

$$\rho_1(f_n) \to \rho_1(f).$$

Démonstration.
De l'hypothèse $\max(|f_n|, |f|) \leq g$, avec g absolument intégrable on déduit que la suite $\{f_n\}$ est équi-absolument intégrable et f est absolument intégrable. Le résultat est alors une conséquence du Lemme 2.8.

Proposition 2.1. *Soit* $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$. *Alors,* $\varphi(t, |f(t)|) \in B^1p.p.(\mathbb{R})$ *et en conséquence la limite* $\lim\limits_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t, |f(t)|)\, dt$ *existe et est finie.*

Démonstration. Soit $\{f_n\}$ la suite de polynômes trigonométriques approximant f.
Par le Lemme 2.3 nous avons aussi $f_n \xrightarrow{\overline{\mu}} f$. En utilisant le Lemme 2.5 on montre que $\varphi(., |f_n(.)|)$ converge en $\overline{\mu}$ vers $\varphi(., |f(.)|)$. Par la suite en remarquant que $(\varphi(., |f_n(.)|)$ est équi-absolument intégrable et en utilisant le lemme 2.8, on montre que $\rho_1(\varphi(., |f_n(.)|) - \varphi(., |f(.)|)) \longrightarrow 0$.
La conclusion découle du fait que $\varphi(., |f_n(.)||) \in \{u.p.p.\}$ voir [12].

Lemme 2.9. *Soit $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$. Alors, la fonctionnelle $\lambda \mapsto \rho_{\varphi}\left(\dfrac{f}{\lambda}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$.*

Démonstration. Notons que $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ entraîne que $\rho_{\varphi}\left(\dfrac{f}{\lambda}\right) < +\infty$ pour tout réel $\lambda > 0$.
Soit alors $\lambda_0 \in]0, +\infty[$ et $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres réels convergente vers λ_0.

Nous avons, pour tout entier $n \geq n_0$

$$\rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda_n} - \frac{f}{\lambda_0}\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0}\right| \rho_{\varphi}(f),$$

d'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda_n} - \frac{f}{\lambda_0}\right) = 0.$$

Du Lemme 2.3, on sait que

$$\frac{f}{\lambda_n} \xrightarrow{\bar{\mu}} \frac{f}{\lambda_0},$$

par le lemme 2.5,

$$\varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{\lambda_n}\right) \xrightarrow{\bar{\mu}} \varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{\lambda_0}\right).$$

De plus,

$$\max\left(\varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{\lambda_n}\right), \varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{\lambda_0}\right)\right) \leq \varphi\left(t, \frac{2}{\lambda_0}|f(t)|\right),$$

Avec :

$$\varphi\left(t, \frac{2}{\lambda_0}|f(t)|\right) \text{ absolument intégrable }.$$

Par conséquent, et en utilisant le corollaire 2.2, nous avons

$$\rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda_n}\right) \to \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda_0}\right).$$

Ce qui signifie que $\lambda \mapsto \rho_{\varphi}\left(\dfrac{f}{\lambda}\right)$ est continue en λ_0, donc sur$]0, +\infty[$.

Corollaire 2.3. *Soit* $f \in B^{\varphi}_{p.p.}(\mathbb{R})$. *Alors,*

1. $\|f\|_{\varphi} \leq 1$ *si et seulement si* $\rho_{\varphi}(f) \leq 1$.
2. $\|f\|_{\varphi} = 1$ *si et seulement si* $\rho_{\varphi}(f) = 1$.

Démonstration. Ces équivalences sont une conséquence directe du Lemme 2.9 et des arguments usuels de la théorie des espaces d'Orlicz (cf. [10], [52])

Remarque 2.5. *Rappelons que le résultat similaire dans les espaces de Musielak-Orlicz, a lieu sous la condition supplémentaire* Δ_2, *qui assure justement la continuité de la fonction* $\lambda \mapsto \rho_{\varphi}\left(\frac{f}{\lambda}\right)$. *Cette condition n'est pas nécessaire dans notre cas car nous nous sommes restreints à* $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$.

Lemme 2.10. *Soit* $\varphi \in \Delta_2$. *Alors, la condition suivante, notée par* Δ_2', *est satisfaite :*

Pour tout $\theta \in]0,1[$ *et* $\varepsilon > 0$ *il existe* $h_{\varepsilon} \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$, $k' > 1$ *et un ensemble* $G \in \Sigma$ *tels que :*

$$\varphi(t, 2u) \leq k'\varphi(t, u) \quad \forall u \geq h_{\varepsilon}(t), \forall t \in G \tag{2.5}$$

avec $\bar{\mu}(G') < \theta$ *et* $\rho_{\varphi}(h_{\varepsilon}) < \varepsilon$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \Delta_2$. Alors, il existe $k > 1$ et $h \in B^{\varphi}(\mathbb{R})$ tels que

$$\varphi(t, 2u) \leq k\varphi(t, u),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $u \geq h(t)$.

Remarquons qu'on peut supposer dans cette définition que $h(t) \geq \delta$, $\forall t \in \mathbb{R}$ pour un certain $\delta > 0$. .

Du Lemme 2.4, pour tout $\theta \in]0,1[$ il existe $\beta > 0$ pour lequel $\bar{\mu}(G') \leq \theta$ où

$$G = \{t \in \mathbb{R} : |h(t)| \leq \beta\}.$$

Posons maintenant

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t) & \text{si} \quad t \in G \\ \beta & \text{si} \quad t \in G' \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$ nous avons $\rho_\varphi\left(\dfrac{h_1}{\eta_0}\right) < \varepsilon$ pour un certain $\eta_0 \geq 1$.

Posons $h_\varepsilon = \dfrac{h_1}{\eta_0}$ et $k' = \max(k, k_1)$ où

$$k_1 = \max\left(\frac{\varphi(t, 2u)}{\varphi(t, u)},\ u \in \left[\frac{\delta}{\eta_0}, \beta\right],\ t \in \mathbb{R}\right),$$

nous obtiendrons (2.5).

Lemme 2.11. *Si* $\varphi \in \Delta_2$, *alors pour tout* $\varepsilon \in]0,1[$ *il existe* $\delta(\varepsilon) \in]0,1[$ *tel que*

$$\rho_\varphi(f) \leq 1 - \varepsilon \Rightarrow \|f\|_\varphi \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

Pour tout $f \in \tilde{B}^\varphi p.p.(\mathbb{R})$

Démonstration.

Supposons que cette implication n'est pas vraie ; i.e. :
$\exists \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists f_n \in \tilde{B}^\varphi p.p.(\mathbb{R})$ telle que

$$\rho_\varphi(f_n) \leq 1 - \varepsilon \text{ et } \|f_n\| > 1 - \frac{1}{n}.$$

Il existe donc une suite $\{f_n\} \subset \tilde{B}^\varphi p.p.(\mathbb{R})$ avec $\{\|f_n\|\}$ croissante vers 1 et $\|f_n\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$ telle que

$$\rho_\varphi(f_n) \leq 1 - \varepsilon.$$

Maintenant posons : $a_n = \frac{1}{\|f_n\|} - 1$, et $L = \sup\{\rho_\varphi(2f_n)\}$

Nous avons grace au Corollaire 2.3 :

$$\begin{aligned}
1 = \rho_\varphi\left(\frac{f_n}{\|f_n\|}\right) &= \rho_\varphi((1 + a_n)f_n) \\
&= \rho_\varphi(2a_n f_n + (1 - a_n)f_n) \\
&\leq a_n \rho_\varphi(2f_n) + (1 - a_n)\rho_\varphi(f_n) \\
&\leq a_n L + (1 - a_n)(1 - \varepsilon).
\end{aligned}$$

Puis en faisant $n \to +\infty$, on aura une contradiction.

Lemme 2.12. *Soit $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_{\varphi} = 1$. Alors, pour tout $\delta \in]0,1[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$\overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t, |f(t)|) \leq 1 - \delta\} < \theta.$$

Démonstration.

Soit $\delta \in \ ]0,1[$ et $\{P_n\}$ une suite de polynômes trigonométriques approchant f, c'est à dire telles que $\|f - P_n\|_{\varphi} \to 0$. Prenons P_δ tel que

$$\rho_{\varphi}\left(2\left|f(t) - P_\delta(t)\right|\right) < \frac{\delta}{4},$$

et posons

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi\left(t, 2P_\delta(t)\right).$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left(\frac{\delta}{4} + M\varepsilon\right) < \delta,$$

et supposons que l'assertion du Lemme 2.12 n'est pas vérifiée. Alors pour $\theta = 1 - \varepsilon$, on a $\overline{\mu}(G) = \overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t, |f(t)|) \leq 1 - \delta\} \geq \theta$.

D'où

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi}(f) &\leq \rho_{\varphi}(f\chi_G) + \rho_{\varphi}(f\chi_{G'}) \\ &\leq (1 - \delta) + \rho_{\varphi}(f\chi_{G'}). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \rho_{\varphi}(f\chi_{G'}) &\leq \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2(f - P_\delta)\chi_{G'}) + \frac{1}{2}\rho_{\varphi}(2P_\delta\chi_{G'}) \\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{\delta}{4} + M\varepsilon) \\ &\leq \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

par conséquent, nous avons

$$\rho_{\varphi}(f) \leq 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Finalement, utilisant le lemme 2.11, nous obtiendrons

$$\|f\|_{\varphi} \leq 1 - p(\delta)$$

pour un certain $p(\delta) \in \ ]0,1[$. Ce qui contredit le fait que $\|f\|_{\varphi} = 1$.

Lemme 2.13. *Soit $f \in B^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ avec $\|f\|_{\varphi} = 1$. Alors, il existe des nombres réels $0 < \alpha < \beta$ et $\theta \in (0,1)$ tels que, si*

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : \alpha \leq |f(t)| \leq \beta\},$$

on a $\bar{\mu}(G_1) \geq \theta$.

Démonstration. Soit $\delta \in]0,1[$, alors des propriétés de φ on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|\sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t, \alpha)| \leq 1 - \delta$$

Soit $\tilde{\theta} \in]0,1[$ donné par le Lemme 2.12 :

$$\overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t, |f(t)|) \leq 1 - \delta\} = \overline{\mu}(\tilde{G}) < \tilde{\theta},$$

et soit $\theta \in]0,1[> \tilde{\theta}$ alors par le Lemme 2.4 il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\overline{\mu}(G) = \overline{\mu}\{t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq \gamma\} \geq \theta.$$

Soit $\beta > \max(\alpha, \gamma)$, considérons

$$G_1 = \{t \in \mathbb{R} : \alpha \leq |f(t)| \leq \beta\},$$

alors

$$G_1' = \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| < \alpha\} \cup \{t \in \mathbb{R} : |f(t)| > \beta\} \subseteq \tilde{G} \cup G',$$

et

$$\overline{\mu}(G_1') \leq \overline{\mu}(\tilde{G}) + \overline{\mu}(G') \leq \tilde{\theta} + (1 - \theta) = 1 - (\theta - \tilde{\theta}).$$

D'où $\overline{\mu}(G_1) \geq \theta - \tilde{\theta}$.

Dans ce qui suit nous allons montrer que l'espace de Musielak- Orlicz $L^{\varphi}([0,1])$ de fonctions définies sur $[0,1]$ s'injecte isométriquement dans l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques $\widetilde{B}^{\varphi}a.p.$ Nous allons d'abord prouver le Lemme important suivant :

Lemme 2.14. *Soit $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n > 0$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on associe un ensemble mesurable A_n t.q.*

i. $A_i \cap A_j = \phi$, *pour* $i \neq j$ *et* $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \subset [0,1]$.

ii. $\sum\limits_{n\geq 0} \int\limits_0^1 \varphi\left(t, a_n\chi_{A_n}\right) dt < +\infty$.

Considérons la fonction $f = \sum\limits_{n\geq 1} a_n\chi_{A_n}$ *définie sur* $[0,1]$ *et soit* $\tilde{f}$ *l'extension périodique de* f *à tout* $\mathbb{R}$ *(de période* $\tau = 1$*). Alors* $\tilde{f} \in \widetilde{B}^{\varphi}$*p.p.*

Démonstration. Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq n_0} \int_0^1 \varphi(t, a_n\chi_{A_n}) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

et considérons $M = \max\limits_{n\leq n_0}\sup\limits_{t}\varphi(t, 2a_n)$, et $\delta > 0$ avec $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3M}$.

Soit $f_1 = \sum_{n=1}^{n=n_0} a_n\chi_{A_n}$, et notons par f_1^r la restriction de f_1 à l'intervalle $[0, 1-\delta]$.

Par le théorème de Luzin il existe g_ε^r une fonction continue sur $[0, 1-\delta]$ telle que :

$$\mu\{t \in [0, 1-\delta] : \varphi(t, |f_1^r - g_\varepsilon^r|) > 0\} \leq \frac{\varepsilon}{3M}.$$

De plus, puisque f_1^r est bornée, g_ε^r est aussi bornée (de même borne).

Soit maintenant g_ε l'extension linéaire de g_ε^r à $[0,1]$, précisément $g_\varepsilon = g_\varepsilon^r$ sur $[0, 1-\delta]$, est linéaire sur $[1-\delta, 1]$ et satisfait $g_\varepsilon(1) = g_\varepsilon(0)$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt &\leq \int_0^1 \varphi\left(t, \frac{|f(t) - f_1| + |f_1(t) - g_\varepsilon(t)|}{2}\right) dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t, |f - f_1|)dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t, |f_1 - g_\varepsilon|)dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi\left(t, \sum_{n\geq n_0} a_n\chi_{A_n}\right) dt + \frac{1}{2}\int_0^{1-\delta} \varphi(t, |f_1^r - g_\varepsilon^r|)dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{1-\delta}^1 \varphi(t, |f_1 - g_\varepsilon|)dt \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n\geq n_0}\int_0^1 \varphi(t, a_n\chi_{A_n})dt + \frac{1}{2}M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{1}{2}M\frac{\varepsilon}{3M} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{g}_\varepsilon$ les extensions périodiques respectives de f et g à $\mathbb{R}$. Puisque $\tilde{g}_\varepsilon \in \{u.a.p.\} \subset B^\varphi p.p.$, alors il existe $p_\varepsilon \in \mathcal{A}$ t.q. $\rho_\varphi\left(\dfrac{\tilde{g}_\varepsilon - p_\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Utilisant la périodicité de φ nous aurons :

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f}-\tilde{g}_\varepsilon}{2}\right) &= \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{|\tilde{f}-\tilde{g}_\varepsilon|}{2}\right)dt \\
&= \int_0^1 \varphi\left(t,\frac{|f-g_\varepsilon|}{2}\right)dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f}-p_\varepsilon}{4}\right) &\leq \frac{1}{2}\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{f}-\tilde{g}_\varepsilon}{2}\right)+\frac{1}{2}\rho_\varphi\left(\frac{\tilde{g}_\varepsilon-p_\varepsilon}{2}\right), \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *Soit $f \in L^\varphi([0,1])$. Alors,*

1. *Si $\widetilde{f}$ est l'extension périodiques de f (avec la période $\tau = 1$), nous avons $\widetilde{f} \in \widetilde{B}^\varphi p.p.$.*
2. *L'injection $i : L^\varphi([0,1]) \hookrightarrow \widetilde{B}^\varphi a.p.$, $i(f) = \widetilde{f}$ est une isométrie relativement aux modulaires et pour les normes de Luxemburg respectives.*

Démonstration. Nous montrons d'abord que $i(L^\varphi) \subset \tilde{B}^\varphi p.p.(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^\varphi([0,1])$. Alors, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\varphi(t,\lambda|f(t)|) \in L^1([0,1])$.

Des arguments usuels de la théorie de Lebesgue, nous avons $\lim\limits_{N\to+\infty}\mu(V_N) = 0$ où

$$V_N = \{t \in [0,1] : \varphi(t,\lambda|f(t)|) \geq N\}.$$

Soit

$$E_N = \{t \in [0,1] : |f(t)| \geq N\}$$

Alors, pour $t \in E_N$ nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\lambda|f(t)|) &\geq \varphi(t,\lambda N) \\
&\geq \lambda N\varphi(t,1) \\
&\geq \lambda N\phi(1)
\end{aligned}$$

où $\phi(1) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t,1)$, $\phi(1) > 0$ (on peut supposer que $\phi(1) = 1$)

Il vient que $E_N \subset V_{\lambda N}$ et donc $\lim_{N\to+\infty} \mu(E_N) = 0$.

Considérons la fonction

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad f(t) \leq N. \\ N & \text{si} \quad f(t) \geq N. \end{cases}$$

Il est clair que $\{f_N\}$ est croissante et $f_N \leq f$.

De plus, comme $\lim_{N\to+\infty} \mu(E_N) = 0$, nous avons $\lim_{N\to+\infty} \int_{E_N} \varphi(t, \lambda |f(t)|)\, dt = 0$.

Alors, pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_0^1 \varphi(t, \lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|)\, dt \leq \int_{E_{N\varepsilon}} \varphi(t, \lambda |f(t)|)\, dt \leq \varepsilon.$$

Maintenant, comme f_{N_ε} est bornée, il existe une suite de fonctions simples $(S_{N_\varepsilon})_n$ uniformément convergente vers f_{N_ε}. En particulier, une fonction simple S_{N_ε} telle que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\lambda(f_{N_\varepsilon}(t) - S_{N_\varepsilon}(t))| \leq \inf_{t\in[0,1]} \varphi^{-1}(t,\varepsilon).$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi\left(t, \frac{\lambda}{2} |f(t) - S_{N_\varepsilon}(t)|\right) dt \\ \leq \ & \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \varphi(t, \lambda |f(t) - f_{N_\varepsilon}(t)|)\, dt + \int_0^1 \varphi(t, \lambda |f_{N_\varepsilon}(t) - S_{N_\varepsilon}(t)|)\, dt\right] \\ \leq \ & \varepsilon. \end{aligned}$$

Notons par $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_{N_\varepsilon}$ et $\widetilde{S}_{N_\varepsilon}$ les extensions périodiques réspectives (avec une période $T = 1$) des fonctions f, f_{N_ε} et S_{N_ε}. Des propriétés de périodicité de φ, $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}_{N_\varepsilon}$ et $\widetilde{S}_{N_\varepsilon}$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\lambda}{2}\left(\widetilde{f}-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\right)\right) &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi\left(t,\frac{\lambda}{2}\left|\widetilde{f}\left(t\right)-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right)dt \\
&= \int_0^1\varphi\left(t,\frac{\lambda}{2}\left|f\left(t\right)-S_{N_\varepsilon}\left(t\right)\right|\right)dt \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

De plus, par le Lemme 2.14, nous avons $\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\in\widetilde{B}^{\varphi}p.p.\left(\mathbb{R}\right)$. Alors, il existe $P_\varepsilon\in A$ pour lequel

$$
\rho_\varphi\left(\frac{1}{4}\left(\widetilde{S}_{N_\varepsilon}-P_\varepsilon\right)\right)\leq\varepsilon
$$

.

Finalement, en posant $\alpha=\min\left(\lambda,\frac{1}{4}\right)$ nous aurons :

$$
\begin{aligned}
\rho_\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\left(\widetilde{f}-P_\varepsilon\right)\right) &\leq \frac{1}{2}\left\{\rho_\varphi\left(\frac{\lambda}{2}\left(\widetilde{f}-\widetilde{S}_{N_\varepsilon}\right)\right)+\rho_\varphi\left(\frac{1}{4}\left(\widetilde{S}_{N_\varepsilon}-P_\varepsilon\right)\right)\right\} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

C'est à dire que $\widetilde{f}\in\tilde{B}^{\varphi}p.p.\left(\mathbb{R}\right)$.

Dans la section suivante nous allons présenter les résultats concernant la caractérisation de la stricte convexité ainsi que l'uniforme convexité de l'espace $\tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ muni de la norme de Luxemburg.

2.4 Stricte et uniforme convexité de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Lemme 2.15. *Supposons que la fonction $\varphi\left(t,u\right)$ est strictement convexe et $f_n,g_n\in B^{\varphi}p.p.\left(\mathbb{R}\right)$ deux suites telles que, pour un certain $r>0$, nous avons :*

$$
\rho_\varphi\left(f_n\right)\leq r,\rho_\varphi\left(g_n\right)\leq r \text{ et } \lim_{n\to\infty}\rho_\varphi\left(\frac{f_n+g_n}{2}\right)=r.
$$

Alors $\left(f_n-g_n\right)\xrightarrow{\bar{\mu}}0$.

Démonstration.

Supposons le contraire . Alors, il existerait $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ et $n_k \nearrow^{\infty}$ tels que, si $E_k = \{t \in \mathbb{R} : |f_{n_k}(t) - g_{n_k}(t)| \geq \sigma\}$ nous aurons $\bar{\mu}(E_k) > \varepsilon$. Prenons un nombre $k_\varepsilon > 1$ tel que l'inégalité suivante soit vraie

$$\bar{\mu}(E) \geq \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \rho_\varphi(\chi_E) > \frac{r}{k_\varepsilon},$$

où $r > 0$ est la constante du Lemme 2.2

Posons alors,

$$\begin{aligned} A_k &= \{t \in \mathbb{R} : |f_{n_k}(t)| > k_\varepsilon\} \\ B_k &= \{t \in \mathbb{R} : |g_{n_k}(t)| > k_\varepsilon\} \end{aligned}$$

Nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} r &\geq \rho_\varphi(f_{n_k}) \\ &= \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi(t, |f_{n_k}(t)|)\, dt \\ &\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{A_k \cap [-T,T]} \varphi(t, k_\varepsilon)\, dt \\ &\geq k_\varepsilon \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{A_k \cap [-T,T]} \varphi(t, 1)\, dt \\ &= k_\varepsilon \rho_\varphi(\chi_{A_k}). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\rho_\varphi(\chi_{A_k}) \leq \frac{r}{k_\varepsilon},$$

d'où

$$\bar{\mu}(A_k) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De la même manière, nous montrons que

$$\bar{\mu}(B_k) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Maintenant, soit l'ensemble :

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \, |u| \leq k_\varepsilon, |v| \leq k_\varepsilon, |u - v| \geq \sigma\},$$

et considérons la fonction :

$$F(t,u,v)=\frac{2\varphi\left(t,\frac{u+v}{2}\right)}{\varphi\left(t,u\right)+\varphi\left(t,v\right)}.$$

Comme φ est strictement convexe, $F(t,u,v)<1, \forall\ (t,u,v)\in\mathbb{R}\times Q$. et, en utilisant la continuité de φ sur $\mathbb{R}\times Q$ (où Q est un ensemble compact sur $\mathbb{R}^2$) et sa périodicité par rapport à t, il vient que pour un certain $\delta>0$,

$$\sup_{\mathbb{R}\times Q}F(t,u,v)=1-\delta.$$

Plus précisément, pour tout $(t,u,v)\in\mathbb{R}\times Q$, nous avons :

$$\varphi\left(t,\frac{u+v}{2}\right)\leq(1-\delta)\,\frac{\varphi\left(t,u\right)+\varphi\left(t,v\right)}{2}.$$

Soit maintenant $t\in E_k\backslash\left(A_k\cup B_k\right)$, Alors $f_{n_k}(t), g_{n_k}(t)\in Q$ et en conséquent,

$$\varphi\left(t,\frac{|f_{n_k}(t)+g_{n_k}(t)|}{2}\right)\leq(1-\delta)\,\frac{\varphi\left(t,|f_{n_k}(t)|\right)+\varphi\left(t,|g_{n_k}(t)|\right)}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
& r-\rho_{\varphi}\left(\frac{f_{n_k}+g_{n_k}}{2}\right)\\
\geq\ & \frac{\rho_{\varphi}\left(f_{n_k}\right)+\rho_{\varphi}\left(g_{n_k}\right)}{2}-\rho_{\varphi}\left(\frac{f_{n_k}+g_{n_k}}{2}\right)\\
\geq\ & \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\left[\frac{\varphi\left(t,|f_{n_k}(t)|\right)+\varphi\left(t,|g_{n_k}(t)|\right)}{2}-\varphi\left(t,\frac{|f_{n_k}(t)+g_{n_k}(t)|}{2}\right)\right]dt\\
\geq\ & \frac{\delta}{2}\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\left[\varphi\left(t,|f_{n_k}(t)|\right)+\varphi\left(t,|g_{n_k}(t)|\right)\right]dt\\
\geq\ & \delta\,\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{[E_k\backslash(A_k\cup B_k)]\cap[-T,+T]}\varphi\left(t,\frac{|f_{n_k}(t)-g_{n_k}(t)|}{2}\right)dt\\
\geq\ & \delta\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right)\left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}\right)\\
=\ & \delta\frac{\varepsilon}{2}\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} r-\rho_{\varphi}\left(\frac{f_n+g_n}{2}\right) &\geq \delta\frac{\varepsilon}{2}\phi\left(\frac{\sigma}{2}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse $\rho_{\varphi}\left(\dfrac{f_n+g_n}{2}\right) \to r.$

Théorème 2.1. $\tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ *est strictement convexe si et seulement si* φ *est strictement convexe et* $\varphi \in \Delta_2$.

Démonstration. Suffisance :

Supposons que φ est strictement convexe, $\varphi \in \Delta_2$ et soient f et $g \in \tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ telles que :

$$\|f\|_{\varphi} = \|g\|_{\varphi} = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{\varphi} = 1.$$

Du corrolaire 2.3, nous obtiendrons

$$\rho_{\varphi}(f) = \rho_{\varphi}(g) = \rho_{\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\right) = 1.$$

Alors par le Lemme 2.15, il vient que pour tout $\alpha > 0$,

$$\bar{\mu}\{t \in \mathbb{R} : |f-g| > \alpha\} = 0.$$

Finalement, en utilisant le Lemme 2.13, on obtient que

$$\rho_{\varphi}(f-g) = 0.$$

Nécessité : Comme $i : L^{\varphi}([0,1]) \hookrightarrow \tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ est une isométrie, la stricte convexité de $\tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ implique celle de $L^{\varphi}([0,1])$.

Par conséquent $\varphi(t,u), t \in [0,1], u \in \mathbb{R}^+$ est strictement convexe et satisfait la condition Δ_2 pour l'espace de Musielak-Orlicz (voir [23]). La fonction prolongée périodiquement $\varphi(t,u), t \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^+$ est alors clairement strictement convexe et vérifie la condition Δ_2 pour l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz.

Théorème 2.2. *$\tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$ est uniformément convexe si et seulement si φ est uniformément convexe et satisfait la condition Δ_2.*

Démonstration. Suffisance :

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et f,g dans $\tilde{B}^{\varphi}p.p.$ telles que

$$\|f\|_{\varphi} = \|g\|_{\varphi} = 1, \text{ et } \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{\varphi} \geq \varepsilon.$$

Du corollaire 2.3, on a aussi

$$\rho_{\varphi}(f) = \rho_{\varphi}(g) = 1 \text{ et } \rho_{\varphi}\left(\frac{f-g}{2}\right) \geq \delta,$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon) \in]0,1[$.

Soit h_{δ} une fonction mesurable telle que $\rho_{\varphi}(h_{\delta}) = \frac{\delta}{4}$, alors, de l'uniforme convexité de φ, il existe $p(\delta) \in]0,1[$ pour lequel l'implication suivante soit vérifiée

$$\begin{aligned} & \left[|h_{\delta}(t)| \leq \max\left(|f(t)|, |g(t)|\right) \leq \frac{4}{\delta}|f(t)-g(t)|\right] \\ \Longrightarrow \quad & \left[\varphi\left(t, \frac{|f(t)+g(t)|}{2}\right) \leq \frac{1-p(\delta)}{2}\left[\varphi(t,|f(t)|) + \varphi(t,|g(t)|)\right]\right]. \end{aligned}$$

Posons

$$B = \left\{t \in \mathbb{R}, |h_{\delta}(t)| \leq \max\left(|f(t)|, |g(t)|\right) \leq \frac{4}{\delta}|f(t)-g(t)|\right\},$$

alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi\left(t, \frac{|f(t)+g(t)|}{2}\right)\chi_B dt \\ \leq \quad & \frac{1-p(\delta)}{2}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi(t,|f(t)|)\chi_B dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \varphi(t,|g(t)|)\chi_B dt\right], \end{aligned}$$

il viendra que

$$\rho_{\varphi}\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right) \leq \frac{1-p(\delta)}{2}\left[\rho_{\varphi}(f\chi_B) + \rho_{\varphi}(g\chi_B)\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned} 1-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right) &= \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi(f)+\rho_\varphi(g)\right)-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right)-\rho_\varphi\left(\frac{f+g}{2}\chi_B\right) \\ &\geq \frac{p(\delta)}{2}\left(\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Soient maintenant les ensembles :

$$C=\{t\in B' \text{ t.q. } \max(|f(t)|,|g(t)|)<|h_\delta(t)|\}$$

$$D=\left\{t\in B' \text{ t.q. } |f(t)-g(t)|<\frac{\delta}{4}\max(|f(t)|,|g(t)|)\right\}.$$

Alors $B'=CUD$ et

$$\begin{aligned} \rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_C\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\rho_\varphi(f\chi_C)+\rho_\varphi(g\chi_C)\right] \\ &\leq \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_D\right) &\leq \frac{\delta}{8}\left[\rho_\varphi(f\chi_D)+\rho_\varphi(g\chi_D)\right] \\ &\leq \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Il vient donc,

$$\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_{B'}\right)\leq\frac{\delta}{2},$$

or, compte tenu des hypothèses,

$$\rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_B\right)\geq\frac{\delta}{2}.$$

On aura

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} &\leq \rho_\varphi\left(\frac{f-g}{2}\chi_B\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi(f\chi_B)+\rho_\varphi(g\chi_B)\right), \end{aligned}$$

d'où

$$(\rho_\varphi (f\chi_B) + \rho_\varphi (g\chi_B)) \geq \delta,$$

puis en utilisant l'inégalité (2.6), on déduit :

$$\rho_\varphi \left(\frac{f+g}{2}\right) \leq 1 - \frac{\delta p(\delta)}{2}.$$

Finalement, comme $\varphi \in \Delta_2$ et rappelant que $\delta = \delta(\varepsilon)$ dépend de ε, par le Lemme 2.11, il existe $q(\varepsilon) \in]0,1[$ tel que $\left\|\frac{f+g}{2}\right\| \leq 1 - q(\varepsilon)$.

Nécessité :

La nécessité de l'uniforme convexité de la fonction φ vient du fait que cette condition est nécessaire pour l'uniforme convexité de l'espace L^φ (voir[24]) qui s'injecte dans $\tilde{B}^\varphi p.p.$

La nécessité de la conditionΔ_2 découle de sa nécessité pour la stricte convexité de l'espace L^φ(voir [23]).

Nous terminons ce chapitre par l'études de certaines propriétés géométriques locales équivalentes de $\tilde{B}^\varphi p.p.(\mathbb{R})$ muni de la norme de Luxemburg.

2.5 Sur quelque propriétés géométriques équivalentes de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Ici nous allons montrer l'équivalence de certaines propriétés géométriques de l'espace de Besicovitch-Musiealak-Orlicz de fonctions presque périodiques. Précisément on montrera que la stricte convexité, l'uniforme convexité locale, la H-propriété, la midpoint locale uniforme convexité et l'uniforme convexité en toutes directions sont équivalentes. Nous aurons besoin des deux lemmes techniques suivants :

Lemme 2.16. *Soit $\{f_n\}_n$ une suite dans $B^\varphi_{p.p.}$, $\overline{\mu}-$ convergente vers $f \in B^\varphi_{p.p.}$, alors nous avons :*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \rho_\varphi(f_n) \geq \rho_\varphi(f).$$

Démonstration.
Considérons la suite

$$g_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad |f_n(t)| > |f(t)| \\ f_n(t) & \text{si} \quad |f_n(t)| \leq |f(t)| \end{cases}$$

alors

$$|g_n(t) - f(t)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f_n(t)| > |f(t)| \\ |f_n(t) - f(t)| & \text{si} \quad |f_n(t)| \leq |f(t)| \end{cases}$$

Il en découle que $|g_n(t) - f(t)| \leq |f_n(t) - f(t)|$ et par conséquent la suite $\{g_n\}_n$ est aussi $\overline{\mu}$-convergente vers f.
Maintenant, puisque $|g_n(t)| \leq |f(t)|$ et $f \in B^{\varphi}p.p.$, on déduit que $\lim \rho_{\varphi}(g_n) = \rho_{\varphi}(f)$.
En définitive, en notant que l'on a aussi $|g_n| \leq |f_n|$, on déduit

$$\rho_{\varphi}(f) = \lim_{n \to +\infty} \rho_{\varphi}(g_n) \leq \underline{\lim}_{n \to +\infty} \rho_{\varphi}(f_n).$$

Lemme 2.17. *Soit $(\{f_n\})_{n \geq 1}$ une suite dans $B^{\varphi}p.p.$. Supposons que $\{f_n\}$ est $\overline{\mu}-$ convergente vers $f \in B^{\varphi}p.p.$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_{\varphi}(f_n) = \rho_{\varphi}(f)$. Alors,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \rho_{\varphi}(\frac{f_n - f}{2}) = 0.$$

Démonstration.
On peut montrer que $\left\{ \varphi\left(., \dfrac{|f_n - f|}{2} \right) \right\}_n$ est $\overline{\mu}-$convergente vers 0 et par consequent la suite $g_n = \dfrac{\varphi\left(., |f_n|\right) + \varphi\left(., |f|\right)}{2} - \varphi\left(., \dfrac{|f_n - f|}{2} \right)$ est aussi $\overline{\mu}-$convergente vers $g = \varphi\left(., |f|\right)$.
En vertu du lemme précédent, nous avons

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \rho_1(g_n) \geq \rho_1(g) = \rho_{\varphi}(f).$$

D'où en utilisant l'existence de la limite dans l'expression de $\rho_1(g)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\rho_\varphi(f) &= \rho_1(g) \\
&\leq \varliminf_{n\to+\infty} \rho_1\left(\frac{\varphi(|f_n|)+\varphi(|f|)}{2} - \varphi\left(\frac{|f_n-f|}{2}\right)\right) \\
&\leq \varliminf_{n\to+\infty} \left\{\frac{1}{2}\rho_\varphi(f_n) + \frac{1}{2}\rho_\varphi(f) - \rho_\varphi\left(\frac{f_n-f}{2}\right)\right\} \\
&\leq \rho_\varphi(f) - \varlimsup_{n\to+\infty} \rho_\varphi\left(\frac{f_n-f}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_\varphi\left(\frac{f_n-f}{2}\right)=0.$

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 2.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\tilde{B}^\varphi a.p.$ *est LUC*
2. $\tilde{B}^\varphi a.p.$ *est MLUC*
3. $\tilde{B}^\varphi a.p.$ *possède la H−propriété*
4. $\tilde{B}^\varphi a.p.$ *est UCED*
5. $\tilde{B}^\varphi a.p.$ *est SC*
6. φ *est strictement convexe et* φ *satisfait la condition* Δ_2

Démonstration.

Les implications suivantes sont vérifiées dans les espaces de Banach généraux : $LUC \Longrightarrow MLUC \Longrightarrow SC$, $LUC \Longrightarrow H$-propriété et $UCED \Longrightarrow SC$.

Du Théorème 2.1 on a l'équivalence suivante :

$$\tilde{B}^\varphi p.p. \text{ est SC} \Longleftrightarrow \varphi \text{ est SC et satisfait la condition} \Delta_2$$

On peut montrer grace à la Proposition 2.2 que

$$\tilde{B}^\varphi p.p. \text{ possède la H-propriété alors } \varphi \text{ est SC et satisfait } \Delta_2.$$

Il reste donc à montrer les implications suivantes :

Si φ est SC et satisfait Δ_2 alors $\tilde{B}^\varphi p.p.$ est LUC et UCED.

Soit $f_n,\ f \in \tilde{B}^\varphi p.p.$ avec $\|f_n\|_\varphi = \|f\|_\varphi = 1$ et $\left\|\frac{f+f_n}{2}\right\|_\varphi \to 1$ quand

$n \to +\infty$. Nous avons aussi $\rho_{B^\varphi}(f_n) = \rho_{B^\varphi}(f) = 1$ et $\rho_{B^\varphi}\left(\dfrac{f+f_n}{2}\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$ car φ est Δ_2.

En effet ; on montre que si $\{f_n\}$ une suite dans la boule unité de $\tilde{B}^\varphi p.p.$ est telle que $\|f_n\|_\varphi \longrightarrow 1$ alors $\rho_\varphi(f_n) \longrightarrow 1$. Pour cela, supposons le contraire i.e., il existerait donc un $\varepsilon > 0$ et une sous suite de $\{f_n\}$ qu'on notera aussi $\{f_n\}$ telle $\forall n \in \mathbb{N}$ $\rho_\varphi(f_n) \leq 1 - \varepsilon$ (remarquons que l'on a l'équivalence $\|f_n\|_\varphi \leq 1 \Leftrightarrow \rho_\varphi(f_n) \leq 1$ puisque φ est Δ_2).

Maintenant φ étant Δ_2 alors $\rho_\varphi(\frac{f_n}{\|f_n\|}) = 1$ et $\sup_n \rho_\varphi(2f_n) < +\infty$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
1 &= \rho_\varphi(\frac{f_n}{\|f_n\|}) \\
&= \rho_\varphi\left(\left(\frac{1}{\|f_n\|} - 1\right) 2f_n + \left(2 - \frac{1}{\|f_n\|}\right) f_n\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{\|f_n\|} - 1\right) \sup_n \rho_\varphi(2f_n) + \left(2 - \frac{1}{\|f_n\|}\right) \rho_\varphi(f_n) \\
&\leq (1 - \varepsilon).
\end{aligned}$$

Contradiction.

Alors du Lemme 2.15 la suite $(f_n)_n$ est $\overline{\mu}-$convergente vers f et en utilisant le Lemme 2.17 ainsi que la condition Δ_2, on déduit $\|f_n - f\|_{B^\varphi} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Maintenant soient $\{f_n\}$ et $\{f_n + g\}$ dans $\tilde{B}^\varphi p.p.$ telles que : $\|f_n\|_\varphi \longrightarrow 1$, $\|f_n + g\|_\varphi \longrightarrow 1$ et $\|2f_n + g\|_\varphi \longrightarrow 2$. Comme φ est Δ_2, on montre également que l'on a $\rho_\varphi(f_n) \longrightarrow 1$, $\rho_\varphi(f_n + g) \longrightarrow 1$ et $\rho_\varphi(\frac{2f_n+g}{2}) \longrightarrow 1$. Par le Lemme 2.15, on obtient $g = 0$ $\overline{\mu}$ $p.p.$ (Ce qui veux dire que $\|g\|_\varphi = 0$ par le Lemme 2.7.)

CHAPITRE 3

Etude de certaines propriétés topologiques et géométriques de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons définir sur l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques la norme d'Orlicz. Nous montrerons que cette dernière est égale à la norme d'Amemiya, une forme beaucoup plus facile à manipuler. Un théorème de dualité sera énnoncé en utilisant en partie la réfléxivité de l'espace qui sera aussi caractérisée. Nous caractérisons aussi la stricte convexité de l'espace.

Tout au long de ce chapitre nous allons supposer que la fonction φ vérifie la condition supplémentaire suivante :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(t,x)}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(t,x)}{x} = 0$.

On dénote par ψ la fonction complémentaire de φ, i.e.

$$\psi(t,x) = \sup_{y\geq 0}\{xy - \varphi(t,y)\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Rappelons que ψ est aussi une fonction de Musielak-Orlicz (voir [49]). la paire (φ, ψ) satisfait l'inégalité de Young :

$$xy \leq \varphi(t,x) + \psi(t,y) \ \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ et } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

On peut aussi considérer la norme d'Amemiya définie comme suit :

$$\|f\|_\varphi^A = \inf\left\{\frac{1}{k}(\rho_\varphi(kf)+1), k>0\right\}.$$

Cette norme est en fait équivalente à la norme de Luxemburg :

$$\|f\|_\varphi \leq \|f\|_\varphi^A \leq 2\|f\|_\varphi, \ \text{ pour tout } f \in B^\varphi \ \text{ (voir [28]).} \tag{3.1}$$

Nous allons maintenant définir la norme dite d'Orlicz dans $B^\varphi p.p.$,

$$\|f\|_\varphi^o = \sup\{\overline{M}(|fg|), \ \ g \in B^\psi a.p., \ \ \rho_\psi(g) \leq 1\}.$$

Par l'inégalité de Young il est facile de voir que :

$$\|f\|_\varphi^o \leq \|f\|_\varphi^A, \quad \text{pour tout } f \in B^\varphi a.p. \tag{3.2}$$

3.2 Résultats auxiliaires

Lemme 3.1. *1. Si $f \in B^\varphi a.p.$ avec $\|f\|_\varphi \neq 0$, alors $\rho_\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\varphi}\right) = 1$.*

2. Si $f \in B^\varphi a.p.$, $g \in B^\psi a.p.$, alors $f.g \in B^1 a.p.$. De plus nous avons l'inégalité dite de Hölder

$$M(|f.g|) \leq 2\|f\|_\varphi.\|g\|_\psi.$$

3. Si $f \in B^\varphi a.p.$, alors $\|f\|_\varphi^o \leq 2\|f\|_\varphi$.

Démonstration.
(1) découle immédiatement de la propriété : $\|f\|_\varphi = 1$ ssi $\rho_\varphi(f) = 1$ pour $f \in B^\varphi a.p.$ (voir [48]).

(2) Soit $f \in B^\varphi a.p.$, $g \in B^\psi a.p.$, $\|f\|_\varphi \neq 0$, $\|g\|_\psi \neq 0$. De l'inégalité de Young nous avons :

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_\varphi}.\frac{|g(t)|}{\|g\|_\psi} \leq \varphi\left(t, \frac{|f(t)|}{\|f\|_\varphi}\right) + \psi\left(t, \frac{|g(t)|}{\|g\|_\psi}\right).$$

D'où

$$\overline{M}\left(\frac{|f.g|}{\|f\|_\varphi\|g\|_\psi}\right) \leq \rho_\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\varphi}\right) + \rho_\psi\left(\frac{g}{\|g\|_\psi}\right) \leq 2.$$

C.a.d.

$$\overline{M}(|f.g|) \leq 2\|f\|_\varphi.\|g\|_\psi.$$

D'autre part $f.g \in B^1 a.p.$. En effet, soient $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ deux suites dans $\mathcal{A}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|p_n - f\| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|q_n - g\| = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\overline{M}(|f.g - p_n.q_n|) &= \overline{M}(|f.g - fq_n + fq_n - p_n.q_n|) \\
&\leq \overline{M}(|f|.|g - q_n|) + \overline{M}(|q_n|.|f - p_n|) \\
&\leq 2\left(\|f\|_\varphi.\|g - q_n\|_\psi + \|q_n\|_\psi.\|f - p_n\|_\varphi\right) \\
&\leq 2(\|f\|_\varphi.\|g - q_n\|_\psi + (\sup_n \|q_n\|_\psi).\|f - p_n\|_\varphi).
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{M}(|f.g - p_n.q_n|) = 0$.
Par consequent nous avons : $f.g \in B^1 a.p.$ et $\overline{M}(f.g) = M(f.g) \leq 2\|f\|_\varphi.\|g\|_\psi$.

(3) Soit $f \in B^\varphi a.p.$, $\|f\|^o_\varphi = \sup\{M(|fg|), g \in B^\psi a.p., \rho_\psi(g) \leq 1\}$.
En vue de l'inégalité de Hölder nous avons :

$$M(|f.g|) \leq 2\|f\|_\varphi.\|g\|_\psi, \quad \forall f \in B^\varphi p.p., \quad \forall g \in B^\psi p.p..$$

De là

$$\|f\|^o_\varphi \leq 2\|f\|_\varphi. \tag{3.3}$$

3.3 Égalité entre la norme Orlicz et la norme d'Amemiya

La norme d'Orlicz n'est pas facile à manipuler, dans la section suivante nous allons énoncer et démontrer qu'elle peut s'écrire sous la forme beaucoup plus simple qu'est la forme d'Amemiya.

Théorème 3.1. *Soit $f \in B^{\varphi}a.p.$, alors*

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \inf\left\{\frac{1}{k}(1+\rho_{\varphi}(kf)), k>0\right\},$$

de plus

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \frac{1}{k_0}(1+\rho_{\varphi}(k_0 f)), \quad \textit{pour un certain } k_0 > 0.$$

Démonstration.
I)On suppose premièrement que φ est strictement convexe relativement à x pour tout $t \in \mathbb{R}$ et possède une dérivé continue $\varphi^{'}(t,x) = \frac{\delta\varphi}{\delta x}(t,x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$.
Dans ce cas sa fonction conjuguée ψ vérifie les mêmes propriétés que φ.
On démontre le théorème en deux étapes :

Étape1 Cas où $f = p$ est un polynôme trigonométrique généralisé.
En vue de l'inégalité (3.2) il suffit de montrer l'inégalité inverse :

$$\|f\|_{\varphi}^{o} \geq \frac{1}{k_0}(1+\rho_{\varphi}(k_0 f)), \quad \text{pour un certain } k_0 > 0.$$

Pour cela, considérons la fonction $F(k)$; $k \geq 0$ définie comme suit,

$$F(k) = \rho_{\psi}(\varphi^{'}(.,k|p(.)|)) = \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\psi(t,\varphi^{'}(t,k|p(t)|))dt.$$

On affirme que $\lim\limits_{k\to+\infty} F(k) = +\infty$. En effet :

par le Lemme 2.13 il existe $\alpha > 0$, $\theta \in]0,1[$ et un ensemble $G = \{t \in \mathbb{R} : |p(t)| \geq \alpha\}$ tels que $\overline{\mu}(G) \geq \theta$. Alors

$$\begin{aligned}
F(k) &\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{[-T,+T]\cap G} \psi(t,\varphi^{'}(t,k\alpha))dt \\
&\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T}\int_{[-T,+T]\cap G} \inf_{t\in\mathbb{R}} \psi(t,\varphi^{'}(t,k\alpha))dt \\
&\geq \overline{\mu}(G)\psi(t_0,\varphi^{'}(t_0,k\alpha)) \\
&\geq \theta\psi(t_0,\varphi^{'}(t_0,k\alpha)) \\
&\geq \theta\psi\left(t_0,\frac{\varphi(t_0,k\alpha)}{k\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(t,x)}{x} = +\infty, \quad \forall t\in\mathbb{R}$, on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} F(k) = +\infty$.
Montrons maintenant que F est continue sur $[0,+\infty[$.
Soit $k_* \in [0,+\infty[$ et $\{k_n\}$ une suite dans $[0,+\infty[$ convergente vers k_*. Il est clair que

$$k_n|p(.)| \;\; est \;\; \overline{\mu} \;\; convergente \;\; vers \;\; k_*|p(.)|.$$

De plus, en utilisant le Lemme 2.5, on obtient :

$$\varphi^{'}(.,k_n|p(.)|) \xrightarrow{\overline{\mu}} \varphi^{'}(.,k_*|p(.)|).$$

Puisque $\{k_n\}$ est bornée nous avons $\max(\varphi^{'}(.,k_n|p(.)|),\varphi^{'}(.,k_*|p(.)|)) \leq \varphi^{'}(.,M|p(.)|)$ avec $\varphi^{'}(.,M|p(.)|) \in \{u.a.p.\} \subset B^{\psi}a.p.$.
Utilisant le Corollaire 2.2, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_{\psi}(\varphi^{'}(.,k_n|p(.)|)) = \rho_{\psi}(\varphi^{'}(.,k_*|p(.)|)).$$

Cela prouve la continuité de F.
Par conséquent, puisque $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} F(k) = +\infty$, il existe un $k_0 \in]0,+\infty[$ tel que

$$\rho_{\psi}(\varphi^{'}(.,k_0|p(.)|)) = 1.$$

Maintenant, considérons le cas de l'égalité dans l'inégalité de Young on obtient

$$\begin{aligned}
\|p\|_{\varphi}^{o} &\geq \frac{1}{k_0} M\left(k_0|p|\varphi^{'}(.,k_0|p(.)|)\right) \\
&\geq \frac{1}{k_0}\left(\rho_{\varphi}(k_0|p|) + \rho_{\psi}(\varphi^{'}(.,k_0|p(.)|))\right) \qquad (3.4)\\
&\geq \frac{1}{k_0}\left(\rho_{\varphi}(k_0|p|) + 1\right).
\end{aligned}$$

Combinant les inégalités (3.4) et (3.2) on obtient

$$\|p\|_{\varphi}^{o} = \inf\{\frac{1}{k}\left(1 + \rho_{\varphi}(k|p|)\right)\} = \frac{1}{k_0}\left(\rho_{\varphi}(k_0|p|) + 1\right).$$

Notons aussi que nous avons

$$\|p\|_{\varphi}^{o} = M(|p(.)|\varphi^{'}(.,k_0|p(.)|)). \tag{3.5}$$

Étape2 Maintenant nous allons prouver que le résultat reste vrai pour $f \in B^{\varphi}a.p.$

Soit $\{p_n\} \subset \mathcal{A}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_n - f\|_{\varphi} = 0.$
De l'étape1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k_n \in]0,+\infty[$ tel que

$$\|p_n\|_{\varphi}^{o} = \frac{1}{k_n}\left(\rho_{\varphi}(k_n p) + 1\right). \tag{3.6}$$

Utilisant l'inégalité (3.3), on obtient

$$\frac{1}{k_n} \leq \|p_n\|_{\varphi}^{o} \leq 2\|p_n\|_{\varphi} \leq 2\sup_n \|p_n\|_{\varphi},$$

de là

$$k_n \geq \frac{1}{2\sup_n \|p_n\|_{\varphi}} = C_1 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part $\{k_n\}$ est bornée supérieurement. En effet, dans le cas contraire, il existerait une sous suite que l'on va noter aussi par $\{k_n\}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$.
Alors, encore par le Lemme 2.13, il existerait $\alpha > 0$, $\theta \in]0,1[$ et $G_n = \{t \in$

$\mathbb{R} : |p_n(t)| \geq \alpha\}$, tels que $\overline{\mu}(G_n) \geq \theta$. Donc,

$$\begin{aligned} 1 = \rho_\psi \left(\varphi^{'}(., k_n|p_n(.)|)\right) &\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{[-T,+T]\cap G_n} \psi(t, \varphi^{'}(t, k_n\alpha))dt \\ &\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{1}{2T} \int_{[-T,+T]\cap G_n} \inf_{t\in\mathbb{R}} \psi(t, \varphi^{'}(t, k_n\alpha))dt \\ &\geq \overline{\mu}(G)\psi(t_0, \varphi^{'}(t_0, k\alpha)) \\ &\geq \theta\psi(t_0, \varphi^{'}(t_0, k_n\alpha)) \\ &\geq \theta\psi\left(t_0, \frac{\varphi(t_0, k_n\alpha)}{k_n\alpha}\right), \end{aligned}$$

et alors $\lim_{n\to+\infty} \rho_\psi(\varphi^{'}(., k_n|p_n(.)|)) = +\infty$, contradiction.
Maintenant $\{k_n\}$ étant bornée, il existe une sous suite notée encore par $\{k_n\}$ qui converge vers un certain $k_0 > 0$.
Nous avons $\lim_{n\to+\infty} \|k_n p_n - k_0 f\|_\varphi = 0$ et par le corollaire 2.1 on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_\varphi(k_n p_n) = \rho_\varphi(k_0 f).$$

Finalement, utilisant l'inégalité (3.3) et faisant tendre n vers l'infini dans (3.6) on obtient :

$$\|f\|^o_\varphi = \lim_{n\to+\infty} \|p_n\|^o_\varphi = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{k_n}\left(\rho_\varphi(k_n p_n + 1)\right)\right) = \frac{1}{k_0}\left(\rho_\varphi(k_0 f) + 1\right).$$

II) Pour compléter la preuve du théorème, on va montrer que le résultat reste vrai pour une fonction de Musielak-Orlicz générale φ.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction de Musielak-Orlicz φ_ε de dérivé continue $\varphi^{'}_\varepsilon = \frac{\delta\varphi_\varepsilon}{\delta x}(t, x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vérifiant l'inégalité

$$\varphi(t, x) \leq \varphi_\varepsilon(t, x) \leq \varphi(t, (1 + \varepsilon)x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Un exemple d'une telle fonction est le suivant (voir [16], [28]),

$$\varphi_\varepsilon(t, x)^1 = \frac{1}{\ln(1 + \varepsilon)} \int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{\varphi(t, s)}{s} ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

[1] $\varphi_\varepsilon(t, x)$ vérifie $\varphi_\varepsilon(t, x) = 0$ ssi $x = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

De plus, définissons la nouvelle fonction

$$\varphi^{\varepsilon}(t,x)^2 = \varphi(t,(1+\varepsilon)x - \varepsilon\ln(x+1)).$$

On peut facilement vérifier que φ^{ε} est strictement convexe relativement à $x \in \mathbb{R}^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et satisfait l'inégalité

$$\varphi(t,x) \leq \varphi^{\varepsilon}(t,x) \leq \varphi(t,(1+\varepsilon)x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

En résumé, on affirme que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction de Musielak-Orlicz strictement convexe φ_{ε} de dérivée continue $\varphi_{\varepsilon}^{'}(t,x) = \frac{\delta\varphi_{\varepsilon}}{\delta x}(t,x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ satisfaisant :

$$\varphi(t,x) \leq \varphi_{\varepsilon}(t,x) \leq \varphi(t,(1+\varepsilon)x). \tag{3.7}$$

De là, il suit immédiatement (voir [16], [28]) que :

$$B^{\varphi}p.p. = B^{\varphi_{\varepsilon}}p.p.$$

et

$$\|f\|_{\varphi}^{A} \leq \|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{A} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{\varphi}^{A}\ ; \qquad \|f\|_{\varphi}^{o} \leq \|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{o} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{\varphi}^{o}. \tag{3.8}$$

Rappelons qu'il a été démontré dans étape I que,

$$\|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{o} = \|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{A}. \tag{3.9}$$

Cette égalité reste vraie pour φ. En effet, on sait que $\|f\|_{\varphi}^{o} \leq \|f\|_{\varphi}^{A}$. Alors utilisant (3.9) et (3.2) on peut écrire

$$\|f\|_{\varphi}^{o} \leq \|f\|_{\varphi}^{A} \leq \|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{A} = \|f\|_{\varphi_{\varepsilon}}^{o} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{\varphi}^{o}.$$

Finalement, puisque ε est arbitrairement petit, on déduit que

$$\|f\|_{\varphi}^{o} = \|f\|_{\varphi}^{A}.$$

[2]Puisque $(1+\varepsilon) - \varepsilon\ln(x+1)$ est s.c. et $\varphi(t,x) = 0$ ssi $x = 0$ alors $\varphi^{\varepsilon}(t,x)$ est s. c. (voir [22]).

Pour finir cette preuve, montrons que

$$\|f\|_\varphi^o = \frac{1}{k_0}\left(\rho_\varphi(k_0 f) + 1\right) \text{ pour un certain } k_0 > 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\|f\|_{\varphi_\varepsilon}^0 = \frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_{\varphi_\varepsilon}(k_\varepsilon f) + 1\right),$$

pour un certain $k_\varepsilon > 0$ tel que

$$\rho_{\psi_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon^{'}(., k_\varepsilon f)) = 1.$$

Utilisant le même raisonnement que celui fait dans la partie précédente , on peut déduire que la suite $\{k_\varepsilon\}$ est bornée. Alors on peut extraire une sous suite notée aussi par $\{k_\varepsilon\}$ convergente vers un certain $k_0 > 0$.

Maintenant, nous avons de (3.8) que

$$\|f\|_\varphi^o = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_{\varphi_\varepsilon}(k_\varepsilon f) + 1\right).$$

D'autre part

$$\frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_\varphi(k_\varepsilon f) + 1\right) \le \frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_{\varphi_\varepsilon}(k_\varepsilon f) + 1\right) \le \frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_\varphi(k_\varepsilon(1+\varepsilon) f) + 1\right).$$

En faisant tendre ε vers *zero* et avec la continuité de la fonction $\alpha \longrightarrow \rho_\varphi(\alpha f)$ on déduit que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{k_\varepsilon}\left(\rho_{\varphi_\varepsilon}(k_\varepsilon f) + 1\right) = \frac{1}{k_0}\left(\rho_\varphi(k_0 f) + 1\right) = \|f\|_\varphi^o.$$

Ce qui complète la preuve du théorème 1.

Lemme 3.2. *La norme d'Orlicz est équivalente à la norme de Luxemburg dans $B^\varphi p.p.$*

$$\|f\|_\varphi \le \|f\|_\varphi^o \le 2\|f\|_\varphi, \quad f \in B^\varphi p.p.$$

Démonstration.

C'est une consequence immédiate de (3.1) et du Théorème 3.1.

On donne ici une autre preuve de ce résultat.

Il reste à montrer uniquement l'inégalité de gauche, ou d'une façon équivalente que

$$\rho_\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\varphi^o}\right) \le 1.$$

Soit d'abord $p \in \mathcal{A}$, $p \neq 0$ et soit $g \in B^\psi a.p.$, alors nous avons à considérer deux cas :

- $\rho_\psi(g) \le 1$, dans ce cas nous avons $M(|p.g|) \le \|p\|_\varphi^o$.
- $\rho_\psi(g) > 1$, dans ce cas nous avons $\rho_\psi\left(\frac{g}{\rho_\psi(g)}\right) \le \frac{1}{\rho_\psi(g)}.\rho_\psi(g) \le 1$, de là $M(|p.\frac{g}{\rho_\psi(g)}|) \le \|p\|_\varphi^o$.

Il en découle que dans les deux cas nous avons

$$M(|p.g|) \le \max(1, \rho_\psi(g))\|p\|_\varphi^o.$$

Utilisant le cas de l'égalité dans l'inégalité de Young on obtient pour une fonction g convenable,

$$\rho_\varphi\left(\frac{p}{\|p\|_\varphi^o}\right) + \rho_\psi(g) = M\left(\left|\frac{p}{\|p\|_\varphi^o}.g\right|\right) \le \max(1, \rho_\psi(g)),$$

et alors

$$\rho_\varphi\left(\frac{p}{\|p\|_\varphi^o}\right) \le 1.$$

Soit maintenant $f \in B^\varphi a.p.$ satisfaisant $\|f\| \neq 0$ et prenons $\{p_n\}$ dans $\mathcal{A}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n - f\|_\varphi = 0.$$

Soit $k_n = \dfrac{1}{\|p_n\|_\varphi^o}$. De l'inégalité (3.3) nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = k_0 = \dfrac{1}{\|f\|_\varphi^o}$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \|k_n p_n - k_0 f\|_\varphi = 0.$$

Et utilisant le Corollaire 2.1 on déduit que

$$\rho_\varphi\left(\frac{p_n}{\|p_n\|_\varphi^o}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho_\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\varphi^o}\right).$$

Maintenant puisque $\rho_\varphi\left(\dfrac{p_n}{\|p_n\|_\varphi^o}\right) \le 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que

$$\rho_\varphi\left(\frac{f}{\|f\|_\varphi^o}\right) \le 1.$$

Finalement, nous avons

$$\|f\|_\varphi \leq \|f\|^o_\varphi \leq 2\|f\|_\varphi.$$

3.4 Dualité dans $B^\varphi p.p.$

3.4.1 Réflexivité de l'espace $\widetilde{B}^\varphi p.p.$

Définition 3.1. *La fonction φ est uniformément convexe sur $\mathbb{R}^+$ ([49]) lorsque, $\forall a \in]0,1[, \exists \delta(a) \in]0,1[,\ \forall b \in [0,a]$:*

$$\varphi(t, \frac{x+bx}{2}) \leq (1-\delta(a))\frac{\varphi(t,x)+\varphi(t,bx)}{2},$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 3.2. *L'espace $\widetilde{B}^\varphi p.p.$ est réflexif ssi $\varphi \in \triangle_2^{B^1} \cap \nabla_2^{B^1}$.*

Démonstration. Nécessité : supposons que $\widetilde{B}^\varphi a.p.$ est réflexif.
De [48] on sait que $\widetilde{B}^\varphi p.p.$ contient une copie isométrique de l'espace de Musielak-Orlicz $L^\varphi[0,1]$.
De [27] une condition nécessaire et suffisante pour la réflexivité de $L^\varphi[0,1]$ est que φ satisfait la condition $\triangle_2^{L^1} \cap \nabla_2^{L^1}$ [3].
Dans ce cas φ satisfait aussi la condition $\triangle_2^{B^1} \cap \nabla_2^{B^1}$ (voir la preuve du théorème 1 dans [48], page 457).

Suffisance : Supposons que $\varphi \in \Delta_2^{B^1} \cap \nabla_2^{B^1}$. on peut voir directement que $\varphi \in \Delta_2^{L^1} \cap \nabla_2^{L^1}$.
Alors de [27] il existe une fonction de Musielak-Orlicz φ_1 définie sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ uniformément convexe équivalente à la restriction de φ sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$.
Maintenant la 1- extension périodique de φ_1 notée par $\widetilde{\varphi}_1$[4], define sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ est aussi uniformément convexe et équivalente à φ.
On déduit que $(B^{\widetilde{\varphi}_1}p.p., \|.\|_{\widetilde{\varphi}_1})$ est uniformément convexe (voir [47]) et donc réflexif. De là $B^\varphi p.p.$ est réflexif.

[3] On dit que φ est $\Delta_2^{L^1}$ s'il existe une constante $k>0$ et une fonction positive h avec $\int_0^1 h(t)dt < +\infty$ t.q. $\varphi(t,2x) \leq k\varphi(t,x)+h(t)$, pour presque tout $t\in[0,1]$ et tout $x \geq 0$.

[4] De la construction de φ_1 faite dans [27] page 61, on remarque que $\widetilde{\varphi}_1$ hérite la continuité de φ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

3.4.2 Théorème de représentation de Riesz dans $B^{\varphi}p.p.$

En vue de (3.7), on peut supposer dans la suite que φ possède une dérivé continue $\varphi^{'}$ et est strictement convexe (où d'une façon équivalente que $\varphi^{'}(t,x)$ est strictement croissante relativement à $x \in \mathbb{R}^{+}$ et tout $t \in \mathbb{R}$).

Lemme 3.3. *Si $f \in B^{\psi}p.p.$ alors*

$$\begin{aligned} \|f\|_{\psi}^{o} &= \sup\{|M(f.g)|, g \in B^{\varphi}a.p., \quad \rho_{\varphi}(g) \leq 1\} \\ &= \sup\{|M(f.g)|, g \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_{\varphi}(g) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Démonstration.
Considérons le cas $f = p \in \mathcal{A}$, de la définition de la norme d'Orlicz nous avons :

$$|M(p.q)| \leq M(|p.q|) \leq \|p\|_{\psi}^{o}, \quad \forall q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_{\varphi}(q) \leq 1.$$

De la preuve du Théorème 3.1, on sait qu'il existe $k_0 > 0$ tel que

$$\rho_{\varphi}(\psi^{'}(.,k_0|p(.)|) = 1,$$

et

$$\|p\|_{\psi}^{o} = M\left(|p(.)\psi^{'}(.,k_0|p(.)|)|\right) = M(p(.)signp(.)\psi^{'}(.,k_0|p(.)|)).$$

Notons que $signp(.)\psi^{'}(.,k_0|p(.)|) \in \{u.a.p.\}$. En effet, soit

$$F\left(t,u\right) = \begin{cases} \dfrac{u}{|u|}.\psi^{'}\left(t,k_0|u|\right) & \text{si} \quad u \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors F est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$ et périodique en t uniformément relativement à u. Puisque

$$\text{sign}p(t)\psi^{'}\left(t,k_0|p(t)|\right) = F(t,p(t))$$

la conclusion découle du Théorème 2.8 dans ([12]).
Donc, nous avons

$$\|p\|_{\psi}^{o} = M(p.q),$$

où

$$q(.) = \text{sign}p(.)\psi^{'}(., k_0|p(.)|)$$

.

Alors on peut affirmer que :

$$\|p\|_\psi^o = \sup\{|M(p.q)|, \quad q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_\varphi(q) \leq 1\}. \tag{3.10}$$

Maintenant montrons que (3.10) reste vraie pour $f \in B^\psi p.p.$
Soit $\{p_n\} \subset \mathcal{A}$ une suite telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|p_n - f\|_\psi = 0$ et considérons la quantité

$$I(f) = \sup\{|M(f.q)|, \quad q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_\varphi(q) \leq 1\}.$$

Il est clair que nous avons

$$I(f) \leq \|f\|_\psi^o.$$

De plus, pour un $\varepsilon > 0$ fixé, nous avons $\|f\|_\psi^o \leq \|p_n\|_\psi^o + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, pour un certain $n_0 > 0$. De là

$$\|f\|_\psi^o - \varepsilon \leq \|p_n\|_\psi^o = \sup\{|M(p_n.q)|,\ q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_\varphi(q) \leq 1\}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on affirme que :

$$\begin{aligned}
\|p_n\|_\psi^o &\leq \sup\{2\|p_n - f\|_\psi.\|q\|_\varphi,\ q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_\varphi(q) \leq 1\} \\
&+ \sup\{|M(fq)|,\ q \in \{u.a.p.\}, \quad \rho_\varphi(q) \leq 1\} \\
&\leq 2\varepsilon + I(f),\ \forall n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|f\|_\psi^o \leq I(f) + 3\varepsilon.$$

Finalement, puisque ε est arbitraire, on conclut que

$$\|f\|_\psi^o \leq I(f).$$

Par conséquent,

$$\|f\|_\psi^o = I(f).$$

Ce qui complète la preuve.

Théorème 3.3. *Si* $\varphi \in \Delta_2^{B_1} \cap \nabla_2^{B_1}$*, alors* $(\widetilde{B}^{\varphi}p.p., \ \|.\|_{\varphi})^*$ *est isomorphiquement isométrique à* $(\widetilde{B}^{\psi}p.p., \ \|.\|_{\psi}^{o})$*.*
Plus précisément : si G est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\widetilde{B}^{\varphi}p.p.$ *alors il existe une unique* $g \in \widetilde{B}^{\psi}p.p.$ *telle que :*

- $G(f) = M(fg), \forall f \in \widetilde{B}^{\varphi}p.p.$ *et*
- $\|G\| = \|g\|_{\psi}^{o}$.

Inversement la condition $\varphi \in \Delta_2^{B_1} \cap \nabla_2^{B_1}$ *est nécessaire pour cette identification.*

Démonstration.

Considérons l'application lineaire

$$\begin{array}{rcl} A: \ (B^{\psi}a.p., \ \|.\|_{\psi}^{o}) & \longrightarrow & (B^{\varphi}a.p., \|.\|_{\varphi})^* \\ g & \longrightarrow & A(g), \quad A(g)(f) = M(f.g). \end{array}$$

A est bien définie. De plus, en utilisant le Lemme 3.3 nous avons :

$$\|A(g)\| = \sup_{\|f\|_{\varphi} \leq 1} |A(g)(f)| = \sup_{\rho_{\varphi}(f) \leq 1} |A(g)(f)| = \|g\|_{\psi}^{o}.$$

A est donc une isométrie.
Il reste à montrer que A est surjective.
Soit $E = A(B^{\psi}a.p.)$. alors E est un sous espace complet de $(B^{\varphi}a.p.)^*$.
D'un résultat classique de Banach, il est suffisant de montrer que pour chaque $F \in (B^{\varphi}a.p.)^{**}$ telle que $F(A(g)) = 0, \ \forall g \in B^{\psi}a.p.$, nous avons $F(h) = 0, \ \forall h \in (B^{\varphi}a.p.)^*$.
Soit alors $F \in (B^{\varphi}a.p.)^{**}$ telle que $F(A(g)) = 0, \ \forall g \in B^{\psi}a.p.$.
Puisque $B^{\varphi}p.p.$ est réflexif, il existe $f \in B^{\varphi}p.p.$ telle que $\pi(f) = F$, i.e.

$$\pi(f)(A(g)) = A(g)(f) = M(f.g) = 0, \quad \forall g \in B^{\psi}a.p..$$

Utilisant le Lemme 3.3 on déduit que $\|f\|_{\varphi}^{o} = 0$ et donc $\|F\| = 0$.

Inversement, si l'identification $(\widetilde{B}^{\varphi}p.p.)^* = \widetilde{B}^{\psi}p.p.$ a lieu, nous aurons aussi

$$(\widetilde{B}^{\varphi}p.p.)^{**} = (\widetilde{B}^{\psi}p.p.)^* = \widetilde{B}^{\varphi}p.p..$$

Donc $\widetilde{B}^{\varphi}p.p.$ est réflexif et, par conséquent, $\varphi \in \Delta_2^{B_1} \cap \nabla_2^{B_1}$.

3.5 Caractérisation de la stricte convexité de l'espace de Besicovitch-Musielak-Orlicz de fonctions presque périodiques.

Dans ce paragraphe on caractérise la stricte convexité de l'espace $B^{\varphi}a.p.$ muni la norme d'Orlicz via sa fonction génératrice de Musielak-Orlicz.

Nous avons établit dans le chapitre précédent l'injection isométrique de l'espace $L^{\varphi}[0,1]$ dans l'espace $\tilde{B}^{\varphi}p.p.(\mathbb{R})$, le Lemme suivant montre que nous avons aussi le même résultat concernant les espaces $E^{\varphi}[0,1] = \{f \in L^{\varphi}[0,1] : \rho_{\varphi}(\lambda f) < +\infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $B^{\varphi}p.p.$

Lemme 3.4. *Soit $f \in E^{\varphi}([0,1])$. Alors,*

1. *Si $\tilde{f}$ est le prolongement périodique de f à tout $\mathbb{R}$ (de période $\tau = 1$), nous avons $\tilde{f} \in B^{\varphi}a.p.$.*
2. *L'injection $i : E^{\varphi}([0,1]) \hookrightarrow B^{\varphi}p.p.$, $i(f) = \tilde{f}$ est une isométrie relativement aux modulaires et pour les normes respectives*

Démonstration.

(1) Supposons d'abord que $f = \sum_{i=0}^{i=n_0} a_i \chi_{A_i}$ avec $\cup_{i=1}^{i=n_0} A_i \subset [0,1]$, et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Par le Lemme 2.14 nous avons $\tilde{f} \in \widetilde{B}^{\varphi}a.p.$. De plus puisque $n\tilde{f} \in \widetilde{B}^{\varphi}a.p.$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous avons ce qui suit :

$$\forall n > 0, \quad \exists p_n \in \mathcal{A} \quad \text{t.q. } \rho_{\varphi}\left(\frac{n(\tilde{f} - p_n)}{4}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

De là on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\tilde{f} - p_n\|_{\varphi} = 0$ et alors $\tilde{f} \in B^{\varphi}a.p.$.
Soit maintenant $f \in E^{\varphi}([0,1])$, alors il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions simple sur $[0,1]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{E^{\varphi}} = 0$.
Notons par $\tilde{f}$ et $\tilde{f}_n$ les extensions périodiques de f et f_n respectivement, alors utilisant la périodicité de φ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{\varphi} = \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{E^{\varphi}} = 0$. Ce qui veux dire que $\tilde{f} \in B^{\varphi}a.p.$.
(2) L'injection $i : E^{\varphi}([0,1]) \hookrightarrow B^{\varphi}a.p.$, $i(f) = \tilde{f}$ est clairement une isométrie relativement aux modulaires et donc aux normes respectives.

Définition 3.2. *La fonction* $\varphi(.,.)$ *est dite strictement convexe quand, pour presque tout* $t \in \mathbb{R}$ *la fonction* $\varphi(t,.)$ *est strictement convexe. Plus précisément :*
Il existe $E \subset \mathbb{R}$ *avec* $\mu(E^c) = 0$ *tel que* $\forall t \in E$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ *on a :*

$$\varphi(t, \alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha\varphi(t,x) + (1-\alpha)\varphi(t,y), \qquad \forall \alpha \in]0,1[. \tag{3.11}$$

Théorème 3.4. $\left(B^{\varphi}a.p., \|.\|_{\varphi}^{o}\right)$ *est strictement convexe si et seulement si* φ *est strictement convexe.*

Démonstration. Suffisance :
Soit $K(f) = \{k > 0,\ \ t.q.\ \ \|f\|_{\varphi}^{o} = \frac{1}{k}(\rho_{\varphi}(kf)+1)\}$, alors en vue du Théorème (3.1), $K(f) \neq \emptyset$.

Soit f_1 et $f_2 \in B^{\varphi}a.p.$ t.q. $\|f_1\|_{\varphi}^{o} = \|f_2\|_{\varphi}^{o} = 1$ et $\|f_1 - f_2\|_{\varphi}^{o} > 0$. Alors, pour $s \in K(f_1)$ et $m \in K(f_2)$ il est clair que $\|sf_1 - mf_2\|_{\varphi}^{o} > 0$.
En effet dans le cas contraire nous aurons $\|sf_1\|_{\varphi}^{o} = \|mf_2\|_{\varphi}^{o}$ et par consequent $s = m$ ce qui implique que $\|f_1 - f_2\|_{\varphi}^{o} = 0$, contradiction.

Maintenant par le Lemme 2.13 il existe $\sigma > 0$, $\theta \in]0,1[$ t.q. : $\overline{\mu}(G) > \theta$ où $G = \{t \in \mathbb{R} : |sf_1(t) - mf_2(t)| \geq \sigma\}$.

Pour un $k > 0$ donné, considérons les ensembles suivants :

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} : |f_1(t)| \geq k\}, \qquad A_2 = \{t \in \mathbb{R} : |f_2(t)| \geq k\}.$$

Nous avons clairement :

$$1 = \|f_i\|_{\varphi}^{o} \geq \|f_i\|_{\varphi} \geq \|f\chi_{A_i}\|_{\varphi} \geq k\|\chi_{A_i}\|_{\varphi},\ i = 1, 2,$$

i.e.

$$\|\chi_{A_i}\|_{\varphi} \leq \frac{1}{k},\ i = 1, 2.$$

On peut choisir $k > 1$ tel que :

$$\forall A \in \Sigma,\ \ \overline{\mu}(A) \geq \frac{\theta}{4} \Longrightarrow \|\chi_A\|_{\varphi} > \frac{1}{k},$$

en effet du Lemme 1 dans ([48]) on sait que $\forall\alpha > 0$, $\exists\delta > 0$, tel que

$$\rho_\varphi(\chi_A) \leq \delta \Rightarrow \overline{\mu}(A) < \alpha, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Le résultat découle facilement puisque $\rho_\varphi(\chi_A) \leq \|\chi_A\|_\varphi$ quand $\|\chi_A\|_\varphi < 1$.
Par consequent nous avons

$$\overline{\mu}(A_i) < \frac{\theta}{4},\ i = 1, 2.$$

Maintenant, pour k, σ comme précédemment et $b = \max(s, m)$, définissons l'ensemble :

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \text{ t.q. : } |x| \leq bk, \quad |y| \leq bk, \quad |x - y| \geq \sigma\}.$$

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, considérons sur $\mathbb{R} \times Q$ la fonction suivante :

$$F(t, x, y) = \frac{\varphi(t, \alpha x + (1 - \alpha)y)}{\alpha\varphi(t, x) + (1 - \alpha)\varphi(t, y)}$$

Nous avons $F(t, x, y) < 1$, $\forall(t, x, y) \in E \times Q$.

De (3.11)et la périodicité de $\varphi(., x)$, il existe $E_1 \subset [0, 1]$ avec $\mu(E_1^c) = 0$ tel que pour tout $t \in E_1$, $\varphi(t, .)$ est strictement convexe.
Soit $K^\theta = \bigcup\limits_{n_i\in\mathbb{Z}} \{K_1^\theta + n_i\}$ où $K_1^\theta \subset E_1$ est un sous ensemble compacte tel que $\mu(E_1/K_1^\theta) < \frac{\theta}{4}$. Nous avons aussi $\overline{\mu}(E/K^\theta) < \frac{\theta}{4}$.
En utilisant la périodicité et la continuité de F sur $E \times Q$, On peut trouver $\delta > 0$ t.q.

$$\sup_{K^\theta \times Q} F(t, x, y) = 1 - \delta.$$

Posons $H = (G \cap K^\theta)/(A_1 \cup A_2)$. Notons que $\overline{\mu}(H) \geq \frac{\theta}{4}$. Maintenant pour tout $t \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi(t, \frac{m}{s+m}(s|f_1(t)|) + \frac{s}{s+m}(m|f_2(t)|)) &= \varphi(t, \frac{sm}{s+m}(|f_1(t)| + |f_2(t)|)) \\ &\leq (1 - \delta)(\frac{m}{s+m}\varphi(t, s|f_1(t)|) + \frac{s}{s+m}\varphi(t, m|f_2(t)|)). \end{aligned}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
2-\|f_1+f_2\|_\varphi^o &\geq \frac{1}{s}(1+\rho_\varphi(sf_1))+\frac{1}{m}(1+\rho_\varphi(mf_2))-\frac{s+m}{sm}(1+\rho_\varphi(\frac{sm}{s+m}(f_1+f_2)) \\
&\geq \frac{1}{s}\rho_\varphi(sf_1)+\frac{1}{m}\rho_\varphi(mf_2)-\frac{s+m}{sm}\rho_\varphi(\frac{sm}{s+m}(f_1+f_2)) \\
&\geq \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(\frac{1}{s}\varphi(t,s|f_1|)+\frac{1}{m}\varphi(t,m|f_2|)-\frac{s+m}{sm}\varphi(t,\frac{sm}{s+m}(|f_1+f_2|))\right)dt \\
&\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(\frac{1}{s}\varphi(t,s|f_1|)+\frac{1}{m}\varphi(t,m|f_2|)-\frac{s+m}{sm}\varphi(t,\frac{sm}{s+m}(|f_1|+|f_2|))\right)\chi_{H^C} \\
&\geq \overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\left(\frac{1}{s}\varphi(t,s|f_1|)+\frac{1}{m}\varphi(t,m|f_2|)-\frac{s+m}{sm}(1-\delta)(\frac{m}{s+m}\varphi(t,s|f_1|)\right. \\
&+ \left.\frac{s}{s+m}\varphi(t,m|f_2|)\right)\chi_H dt \\
&\geq \frac{2\delta}{b}\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,\frac{|sf_1|+|mf_2|}{2})\chi_H dt \\
&\geq \frac{2\delta}{b}\overline{\lim_{T\to+\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\varphi(t,\frac{|sf_1-mf_2|}{2})\chi_H dt \\
&\geq \frac{2\delta}{b}\frac{\sigma}{2}\overline{\mu}(H) \\
&\geq \frac{2\delta}{b}\frac{\sigma}{2}\frac{\theta}{4} \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

D'où la stricte convexité de $B^\varphi p.p., \|.\|_\varphi^o$

Nécessité : Supposons que $\varphi(t,.)$ n'est pas strictement convexe. Alors[5], on peut trouver un ensemble $E\subset\mathbb{R}$ avec $\mu(E)>0$ et un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$ tels que $\forall t\in E$, $\varphi(t,.)$ est affine sur $[a,b]$. Maintenant puisque $\varphi(.,x)$ est périodique avec comme période $\tau=1$ il existe un ensemble $A\subset [0,1]$ avec $\mu(A)>0$ et un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$ tels que $\forall t\in A$, $\varphi(t,.)$ est affine sur $[a,b]$ i.e. :

$$\varphi(t,x)=\alpha(t)x+\beta(t), \forall x\in[a,b], \quad \forall t\in A.$$

Soit maintenant $x^*\in]a,b[$ et $\varepsilon>0$ tel que $x^*+\varepsilon\in[a,b]$ et $x^*-\varepsilon\in[a,b]$. On définie sur $[0,1]$ la fonction f par :

$$f=x^*\chi_A+y^*\chi_B,$$

[5]Voir [10] page 182.

où $B \subset [0,1]/A$ et $y^* \in \mathbb{R}^+$ sont tels que :

$$\int_0^1 \psi(t, \varphi^{'}(t, f(t)))dt = 1,$$

ce qui implique que $\|f\|^o_{E_\varphi} = 1 + \rho_{E_\varphi}(f)$, voir [10].

Maintenant, soit $\{C_1, C_2\}$ une partition de A telle que

$$\int_{C_1} \alpha(t)dt = \int_{C_2} \alpha(t)dt.$$

Définissons g_1 et g_2 comme suit :

$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}(x^* + \varepsilon) & \text{si} \quad t \in C_1, \\ \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}(x^* - \varepsilon) & \text{si} \quad t \in C_2, \\ \frac{f}{\|f\|^o_\varphi} & sinon. \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{\|f\|^o_\varphi}(x^* - \varepsilon) & \text{si} \quad t \in C_1, \\ \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}(x^* + \varepsilon) & \text{si} \quad t \in C_2, \\ \frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}} & sinon. \end{cases}$$

Alors, clairement $g_1 \neq g_2$ et $g_1 + g_2 = 2\frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}}$, de plus

$$\begin{aligned}
\|g_1\|^o_{E_\varphi} &\leq \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\{1 + \rho_\varphi(\|f\|^o_{E_\varphi} g_1)\} \\
&\leq \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\{1 + \rho_\varphi(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\chi_{[0,1]/A}) + \int_{C_1}(\alpha(t)(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{x^*}{\|f\|^o_{E_\varphi}} + \varepsilon) + \beta(t))dt \\
&+ \int_{C_2}(\alpha(t)(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{x^*}{\|f\|^o_{E_\varphi}} - \varepsilon) + \beta(t))dt\} \\
&\leq \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\{1 + \rho_\varphi(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\chi_{[0,1]/A}) + \int_{C_1}(\alpha(t)(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{x^*}{\|f\|^o_{E_\varphi}}) + \beta(t))dt \\
&+ \int_{C_2}(\alpha(t)(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{x^*}{\|f\|^o_{E_\varphi}}) + \beta(t))dt\} \\
&\leq \frac{1}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\{1 + \rho_\varphi(\|f\|^o_{E_\varphi}\frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}})\} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

De la même façon on obtient $\|g_2\|^o_{E_\varphi} \leq 1$.
Maintenant considérons les 1-extension périodiques $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ et $\tilde{f}$ de g_1, g_2 et f respectivement alors nous avons ce qui suit : $\|\tilde{g}_1\|^o_\varphi = \|g_1\|^o_{E_\varphi} \leq 1$, $\|\tilde{g}_2\|^o_\varphi = \|g_2\|^o_{E_\varphi} \leq 1$ et $\|\frac{\tilde{f}}{\|\tilde{f}\|^o_\varphi}\|^o_\varphi = \|\frac{f}{\|f\|^o_{E_\varphi}}\|^o_{E_\varphi} = 1$ avec $\frac{\tilde{f}}{\|\tilde{f}\|^o_\varphi} = \frac{1}{2}(\tilde{g}_1 + \tilde{g}_2)$. Ce qui signifierait que $B^\varphi p.p.$ n'est pas strictement convexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Akimovic, On uniformly convex and uniformly smooth Orlicz spaces, Teonia Funkcii Funk. Anal. i Pril. 15(1970), 114-120.

[2] Albricht J., The theory of Marcinkiewicz-Orlicz spaces, Dissertation Math, No 27 (1962).

[3] Amerio L., Prouse G., Almost periodic functions and functional equations. New-York : Van Norstrand Reinhold Co.1971.

[4] Bardaro C., Musielak J., Vinti G., Nonlinear integral operators and applications, Walter de Gruyter. berlin. New York 2003.

[5] Bedouhene, F. ; Daoui, A. ; Kourat, H., On some convexity properties in the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions with Luxemburg norm, Commentat.Math.Univ.Carol. 53, N°.4, 535-547 (2012).

[6] A.S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge Univ.Press, 1932.

[7] Besicovitch A.S., Almost periodic functions, Dover publ. Inc. , New York, 1954.

[8] Bohr H., Fœlner, On some type of fonctional spacesœ, Acta Math., 76 (1945), 31-155.

[9] Calderon A.P., Intermediate spaces and interpolation, the complexe method, Stadia Math. 24(1964),113-190.

[10] Chen S., Geometry of Orlicz spaces, Dissertationes Math. No 356, (1996)

[11] Cerda J., Hudzik H., Mastylo, M., On the geometrie of some Calderon-Lozanovskii interpolation spaces, Indag. Mathem., N.S., 6(1)(1995), 35-49.

[12] Corduneanu C., Gheorghiu N. and Barbu V., Almost periodic function, Chelsea Publishing company, (1989).

[13] Clarkson, Uniformly convexe spaces, Trans. Amer Math. Soc. 40, (1936), 394-414.

[14] A.Daoui, M. Morsli, M. Smaali, Duality properties and Riesz representation theorem in Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions.Com. Math. Univ. Carolin. 53,2. 237-251 (2012).

[15] A.Daoui, M.Morsli, M.Smaali, On the strict convexity of Besicovitch-Musielak-Orlicz spaces of almost periodic functions equipped with the Orlicz norm, com. Math. vol. 53, 201-211, (2013)

[16] X. L. Fan, *Amemiya Norm Equals Orlicz Norm in Musielak-Orlicz Spaces.* Acta. Math. Sinica. 23,2. 281-288. (2007).

[17] Foralewski P., On some geometric properties of generalized Calderon-Lozanovskii spaces, Acta Math.Hungar., 80(1-2)(1998), 55-66.

[18] Foralewski P., Hudzik H., Some basic properties of generalized Calderon-Lozanovskii spaces, Commect. Math. 48, 4-6(1997), 523-538.

[19] Foralewskii P., Kolwicz P., Local uniform rotundity in Calderon-Lozanovskii spaces, Journal of Convex Analysis, Volume 14, No. 2, 395-412.

[20] Giesy, On a covexity condition in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc, 125 (1969), 114-146.

[21] Hillmann T.R., Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions. Real and Stochastic Analysis. 164, Wiley Ser. in probability and Math. Stat., Wiley., New York, 1986.

[22] H. Hudzik, *Musielak-Orlicz spaces isomorphic to strictly convex spaces.* Bulletin de l'académie polonaise des sciences. Série des Sciences mathématiques. Vol. XXIX, No.9-10, 1981.

[23] Hudzik H., Strict convexity of Musielak- Orlicz spaces with Luxemburg 's Norm, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 39, No 5-6 (1981), 235-247.

[24] H. Hudzik, Convexity in Musielak- Orlicz spaces, Hokkaido Mathematical journal, Vol. 14(1985), p. 85-96.

[25] Hudzik, H., An estimation of the modulus of convexity in a class of Orlicz spaces. Math. Japonica 32(2), 227-237(1987).

[26] Hudzik H., Geometry of some classes of Banach function spaces, Proceedings of the International Symposium on Banach and function Spaces, Kitakyushu, Japan, October, 2-4(2003), 17-57.

[27] Hudzik H., Kaminska A., On uniformly convexifiable and B-convex Musielak-Orlicz spaces, Comment. Math. Prace Mat. 25,(1985), 59-75.

[28] H. Hudzik, L. Maligranda *Amemiya norm equals Orlicz norm in general.* Indag. Math. 11,4. 573-585. (2000).

[29] James R. C., A nonreflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral, Israel J. Math., 18 (1974), 145-155.

[30] James R. C., Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math., 2 (1964), 542-550.

[31] Z.Jimin, S.Lihuan and C.Yun'an *The HR-point of the Musielak-Orlicz Function space equipped with Orlicz norm.* Thai Journal of Mathematics 4,1. 209-222. (2006).

[32] Kolwicz P., Rotundity proprerties in Calderon-lozanovskii spaces, Houston Journal of Mathematics, volume 31, No. 3, (2005), 883-912.

[33] Kolwicz P., Pluciennik R., On p-convex Musielak-Orlicz spaces, Comment.Math.Univ.Carolin.6,4(1995)655–672

[34] Kottman C. A., Paking and reflexivity in Banach spaces, Trans. Math. Soc., 150 (1970), 565-576.

[35] Levitan B. M. and V. Zhikov, Almost periodic functions and differential equations. Cambridge University Press 1982.

[36] Lozanovskii G.Ya, On some Banach lattices, Sbirsk. Math. Zh. 10(1969), 584-599.

[37] Luxemburg W.A.J., Banach Function Spaces, Thèse de doctorat, 1955.

[38] Maligranda,L. Orlicz spaces and interpolation, seminarios de mathematica 5, Departamento de Matematica, Compinas, 1989.

[39] Megginson R.E., An introduction to Banach spaces theory, Springer, 1998.

[40] Milmann D., On some criteria for the regularity of spaces of type (B), Doklady Akad. Nauk SSSR, 20 (1938).

[41] Morsli M., Espace de Besicovitch-Orlicz de fonctions presque périodiques. Structure générale et géométrie, Thèse de Doctorat (1996).

[42] Morsli M. and Bedouhene F., On the uniform convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions with Orlicz norm, Colloquium Mathematicum, Vol. 102, No 1 ((2005), 97-111.

[43] Morsli M., On some convexity properties of the Besicovitch-Orlicz spaces of almost periodic functions, Comment. Math. 34 (1994), 137-152.

[44] Morsli M. and Bedouhene F., On the strict convexity of the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions, Revista Matematica Complutense 16, Num.2 (2003), 399-415.

[45] M.Morsli, D.Drif, An extension of the Hausdroff Young to Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions. Ren.Mat.Apll., VII., SER. 22, 171-192 (2002).

[46] M. Morsli, F. Bedouhene, F. Boulahia *Duality properties and Riesz representation therem in the Besicovitch-Orlicz space of almost periodic functions.* Comment. Math. 43,1. 103-117. (2002).

[47] M. Morsli, M. Smaali, *Characterization of the uniform convexity of the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions.* Commentationes Mathematicae, Prace matematyczne, XLVI (2), (2006) 215-231.

[48] M. Morsli, M. Smaali, *Characterization of the strict convexity of the Besicovitch-Musielak-Orlicz space of almost periodic functions* . Comment. Math. Univ. Carolin. 48,3.443-458. (2007).

[49] Musielak J., Orlicz spaces and Modular spaces, Lecture notes in math. 1034, springer-Verlag, 1983.

[50] Musielak J. and Orlicz W., On modular spaces, Studia Math. 18(1959),49-65.

[51] Pankov A., Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. London : Kluwer Acad. Publ. 1990.

[52] Rao M.M., Ren, Z.D., Theory of Orlicz spaces, Marcel Dekker, Inc.(1991).

[53] Smaali M., Étude et application de quelques propriétés géométriques dans les espaces de Calderon Lozanovskii, Thèse de Doctorat (2010).