

N° d'ordre: .....

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOU MAMMERRI DE TIZI OUZOU  
FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
LABORATOIRE LMPA



# MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques  
Spécialité : Analyse Mathématiques & Applications

Par

AMEL BERRAHAL

## SUR LES SOMMES DE DEDEKIND ET LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

Soutenu le décembre 2022 devant le jury :

Mme.	FARIDA SLIMI	UMMTO	Président du jury
Mme.	FAROUDJA AUMORASSI	UMMTO	Examineur
Mr.	MOULOU Goubi	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022



# REMERCIEMENTS

**I**L m'est agréable d'adresser mes premiers remerciements à mon promoteur, Monsieur Moloud Goubi et je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude à l'administration, et à l'ensemble de tous les Enseignants de Mathématiques de l'Université de Tizi Ouzou.  
je remercie le jury, la présidente Madame Slimi Farida et L'examinatrice Madame Aumorassi Faroudja pour avoir accepté de lire ce travail.  
je remercie mon cher Mari de m'avoir soutenu tout au long de mes études de Master.

Tizi-Ouzou, le 6 février 2023.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
INTRODUCTION	1
1 LES SOMMES DE DEDEKIND, DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS	2
1.1 INTRODUCTION . . . . .	2
1.2 SÉRIES DE FOURIER . . . . .	2
1.2.1 Développement en série de Fourier . . . . .	2
1.3 FONCTIONS PARTIE ENTIÈRE ET PARTIE FRACTIONNAIRE . . . . .	2
1.4 LES NOMBRES DE BERNOULLI . . . . .	3
1.5 LES POLYNÔMES DE BERNOULLI . . . . .	4
1.6 SOMME DE DEDEKIND . . . . .	6
1.7 LA LOI DE RÉCIPROCITÉ . . . . .	8
1.8 LES DIFFÉRENTES PREUVES DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA LITTÉRATURE . . . . .	10
1.8.1 La démonstration de Goubi . . . . .	10
2 LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN	14
2.1 INTRODUCTION . . . . .	14
2.2 LES NOMBRES COMPLEXES . . . . .	14
2.3 FONCTION HOLOMORPHES – FONCTIONS MÉROMORPHES . . . . .	15
2.4 FONCTION GAMMA $\Gamma(s)$ COMPLEXE. . . . .	16
2.5 FONCTION ZÊTA DE RIEMANN. . . . .	17
2.6 FONCTION ZÊTA ET FONCTION GAMMA. . . . .	17
2.7 LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN ET LES NOMBRES DE BERNOULLI. . . . .	18
2.8 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ET FORME D’EULER. . . . .	18
2.9 L’HYPOTHÈSE DE RIEMANN. . . . .	21
3 LES SOMMES DE DEDEKIND ET LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN	22
3.1 INTRODUCTION . . . . .	22
3.2 FONCTION ZÊTA DE HURWITZ . . . . .	22
3.3 LES SOMME COTANGENTE . . . . .	22
3.4 ESPACE DE HILBERT ET LIEN AVEC LES SOMMES DE VASSIONNINE . . . . .	23
3.5 LOI DE RÉCIPROCITÉ . . . . .	26
CONCLUSION GÉNÉRALE	27
BIBLIOGRAPHIE	28

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

DANS ce travail, on s'intéresse aux sommes de Dedekind -Rademacher . Elles sont connues sous le nom sommes de Dedekind et elles satisfont la loi de réciprocité. La preuve de cette loi est faite par plusieurs auteurs ; la dernière est donnée par M.Goubi dans [Goubi \[2018\]](#). Dans le premier chapitre on rappelle les notions de base sur les sommes de Dedekind, on donne les différentes démonstrations les plus connues dans la littérature. En suite, on rappelle les différentes extensions de ces sommes. Dans le deuxième chapitre on expose la fonction  $\zeta(s)$  de la variable complexe  $s$  est devenue : fonction zêta de Riemann et ces quelques propriétés. En particulier on rappelle l'hypothèse de Riemann. Riemann a calculé quelques zéros et a conjecturé que tous les zéros non triviaux de  $\zeta(s)$  se trouvent sur la ligne critique  $\sigma=1/2$  du plan complexe. Dans ce chapitre j'ai rappelé les propriétés des fonctions d'une variable complexe, de la fonction Gamma  $\Gamma(s)$ , les fonctions ( holomorphes – fonctions méromorphes). On termine le travail par le chapitre trois consacré à la relation entre les sommes de Dedekind et la fonction zêta de Riemann.

# LES SOMMES DE DEDEKIND, DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS



## 1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on donne la définition des sommes de Dedekind à la base de la fonction partie fractionnaire. En premier temps, on rappelle les ingrédients nécessaires à la définition.

## 1.2 SÉRIES DE FOURIER

**Définition 1.1** Une série trigonométrique est une série de fonctions dont le terme général est de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T})$$

Où  $x$  est une variable réelle et  $(a_n), (b_n)$  sont des suites complexes ou réelles.

**Remarque 1.1** Le terme général  $u_n$  est une fonction continue de période  $T$ .

**Remarque 1.2** Le réel  $T$  étant positif, posons  $u_n(x) = a_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{T}$ .  $u_n$  est une fonction continue de période  $T$ ,  $w = \frac{2\pi}{T}$  pulsation et  $f = \frac{1}{T}$  est la fréquence.

### 1.2.1 Développement en série de Fourier

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , de période  $T$  et localement intégrable.

**Définition 1.2** Les coefficients de Fourier de la fonction  $f$  sont les nombres complexes ou réels :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos nx \, dx \text{ et } b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 0)$$

$$\text{Ou encore : } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \quad (n \text{ entier relatif}) \text{ C.SERVIEN [1996]}$$

## 1.3 FONCTIONS PARTIE ENTIÈRE ET PARTIE FRACTIONNAIRE

La partie entière de  $x$  est l'unique entier  $n$  (positif ; négatif ou nul) qui est le plus grand entier inférieur à  $x$  de telle sorte que  $n \leq x < n + 1$ . On écrit  $[x] = n$ . On peut la calculer avec la formule suivante :

$$[x] = \sum_{k \leq x} 1 \quad (\text{pour } x > 0)$$

Quelques propriétés de la fonction partie entière sont :

- $x = [x] + \{x\}$  ; et  $0 \leq \{x\} < 1$  ;
- Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $[x + n] = [x] + n$
- $[-x] + [x] = \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
- $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$  ; Avec  $y$  réel
- Pour tout entier  $n$  strictement positif on a
- $0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1$  (car  $n[x] \leq nx \leq n[x] + n$ ) ;
- $\left[ \frac{[nx]}{n} \right] = [x]$  (car  $[x] \leq \frac{[nx]}{n} \leq x$ ) , d'ou  $\left[ \frac{[x]}{n} \right] = \left[ \frac{x}{n} \right]$

La partie fractionnaire de  $x$  est par définition  $\{x\} = x - [x]$ . En plus des propriétés qu'on peut tirer de la fonction partie entière, le développement en série de Fourier de cette fonction est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 1.1** Pour tout  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on a la relation suivante :

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}$$

*Démonstration.* Posons  $f(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$ . Nous allons effectuer le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ . On remarque, tout d'abord, que la fonction de  $f$  est 1 et impaire. Donc on calcule uniquement les coefficients réels  $b_n$  du développement en série de Fourier. Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{1} \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(2\pi nx) dx = \int_0^1 (2x - 1) \sin(2\pi nx) dx \\ &= \left[ \frac{-(2x - 1) \cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nx)}{\pi n} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi n} [\cos(2\pi n) + 1] + 0 = \frac{-1}{n\pi} \quad \text{C.SERVIEN [1996]} \end{aligned}$$

Ainsi la série de Fourier de la fonction  $f$  est :

$$S(f)(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi}.$$

Comme la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux, le théorème de Dirichlet permet d'obtenir la convergence de  $S(f)$  vers  $f$  lorsque  $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Pour récupérer les autres valeurs de  $x$  on peut écrire

$$((x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n\pi} \begin{cases} 0 & \text{Si } x \in \mathbb{Z} \\ \{x\} - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Rademacher [1963]}$$

□

## 1.4 LES NOMBRES DE BERNOULLI

Les nombres de Bernoulli notés par  $B_n$  sont donnés par la fonction génératrice suivante

$$\frac{x}{(e^x - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

On a :

$$\frac{x}{(e^x - 1)} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{42}x^6 - \frac{1}{30}x^8 + \frac{5}{66}x^{10} - \frac{691}{2730}x^{12} + \frac{7}{6}x^{14} + \dots$$

**Proposition 1.1** Pour calculer les nombres  $B_n$  on utilise la récurrence suivante :

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^k B_k$$

Les premiers nombres de Bernoulli sont donnés par la table suivante : [ZAGIER \[2005-2006\]](#)

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$B_n$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

**Théorème 1.2** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$B_{2n+1} = 0.$$

*Démonstration.* Pour trouver le résultat il suffit de démontrer que la fonction suivante est paire :

$$f(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1} - 1 + \frac{x}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\exp(x) - 1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{2x + x \exp(x) - x}{2(\exp(x) - 1)} - 1 = \frac{\exp(-x)x + x}{2(1 - \exp(-x))} - 1 = \frac{(-x - x \exp(-x))}{2(\exp(-x) - 1)} - 1 \\ &= \frac{(-2x + x - x \exp(-x))}{2(\exp(-x) - 1)} - 1 = \frac{(-2x - x(\exp(-x) - 1))}{2(\exp(-x) - 1)} - 1 = \frac{(-x)}{(\exp(-x) - 1) - 1} + \frac{(-x)}{2} - 1 \\ &= f(-x). \end{aligned}$$

Alors  $f$  est paire et comme on a :

$$f(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1} - B_0 - xB_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(B_n x^n)}{n!}.$$

Ainsi tous les coefficients impairs de  $x \rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}$ , sont nuls (par parité de la fonction).  $\square$

## 1.5 LES POLYNÔMES DE BERNOULLI

Les polynômes de Bernoulli notés  $B_n(x)$  sont donnés par la fonction génératrice suivante

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

**Proposition 1.2** On a la relation suivante :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k x^{n-k} \quad \text{ZAGIER [2005 - 2006]}$$

Les premiers polynômes sont

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x,$$

$$B_4 = x^4 - 2x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{30}$$

Ainsi le  $n$ -ième polynôme de Bernoulli est un polynôme de degré  $n$ . Les polynômes et les nombres de Bernoulli sont reliés par les égalités  $b_n = B_n(0)$ . Quelques propriétés des polynômes de Bernoulli sont

— Dérivée :  $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$

— Translation :  $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$

— Symétrie :  $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$  et  $(-1)^n B_n(-x) = B_n(x) + nx^{n-1}$

—  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n(x) = 2^{n-1} (B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2}))$

—  $\forall p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n k^p = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)}{p+1}$

Le polynôme  $\overline{B}_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$  est le polynôme réduit il coïncide avec  $B_1(x)$  pour  $0 < x < 1$ .  $\overline{B}_n(x) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$  si  $0 < x < 1$ .

Les Polynôme  $B_n(x)$  satisfait la relation suivante

**Théorème 1.3**

$$\sum_{r=1}^{q-1} \overline{B}_1\left(\frac{r}{q}\right) = 0$$

Démonstration. En effet on a :  $0 < \frac{r}{q} < 1$ , d'où  $\overline{B}_1\left(\frac{r}{q}\right) = \frac{r}{q} - \frac{1}{2}$  et

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B}_1\left(\frac{r}{q}\right) &= \sum_{r=1}^{q-1} \left(\frac{r}{q} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q-1} r - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{q-1} 1 = \frac{1}{2q}(q-1)q - \frac{1}{2}(q-1) \\ &= \frac{1}{2}(q-1)q - \frac{1}{2}(q-1) = \frac{1}{2}(q-1) = 0 \end{aligned}$$

En suite il est facile de voir que :

$$\sum_{r=1}^{q-1} \overline{B}_1\left(\frac{rp}{q}\right) = \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B}_1\left(\frac{r}{q}\right)$$

Même si  $\left\{\frac{r}{q}\right\} \neq \left\{\frac{rp}{q}\right\}$ .

Afin d'évaluer les sommes de Dedekind, on utilise des sommes du type

$$\sum_{k=1}^{n-1} K^m = 0^m + 1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m$$

Pour des valeurs entières  $m$ , cette somme s'écrit comme un polynôme de la variable  $n$  dont les premiers termes sont :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} K^m &= \frac{1}{m+1} \left( m^{m+1} - \frac{1}{2} \binom{m+1}{1} n^m + \frac{1}{6} \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \frac{1}{30} \binom{m+1}{4} n^{m-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{42} \binom{m+1}{6} n^{m-5} + \dots \right). \text{ Ayotte [6-02-2019]} \end{aligned}$$

□

**Théorème 1.4**

$$\sum_{r=1}^{q-1} r = \frac{q(q-1)}{2}$$

et

$$\sum_{r=1}^{q-1} r^2 = \frac{q(q-1)(2q-1)}{6}$$

*Démonstration.* La première somme est la somme des  $q-1$  premier termes d'une suite arithmétique facile à calculer. Pour la deuxième somme on procède de la manière suivante : La formule de Binôme de Newton donne

$$(r + 1)^3 = r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

Qui découle de la forme générale

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3.$$

D'une autre part on a

$$\sum_{r=1}^n (r + 1)^3 - r^3 = (n + 1)^3 - 1$$

Donc

$$\sum_{r=1}^{q-1} (r + 1)^3 - r^3 = q^3 - 1$$

Mais

$$q^3 - 1 = \sum_{r=1}^{q-1} (3r^2 + 3r + 1) = 3 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 + 3 \sum_{r=1}^{q-1} r + \sum_{r=1}^{q-1} 1$$

Alors

$$3 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = q^3 - 1 - 3 \sum_{r=1}^{q-1} r - \sum_{r=1}^{q-1} 1$$

$$3 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = q^3 - 1 - 3 \frac{q(q-1)}{2} - (q-1)$$

$$6 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = 2q^3 - 2 - 3q^2 + 3q - 2q + 2$$

$$6 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = 2q^3 - 3q^2 + q = q(2q^2 - 3q + 1)$$

D'où

$$6 \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = q(q-1)(2q-1)$$

et enfin

$$\sum_{r=1}^{q-1} r^2 = \frac{q(q-1)(2q-1)}{6}$$

□

## 1.6 SOMME DE DEDEKIND

**Définition 1.3** La somme de Dedekind est une fonction définie pour deux entiers positif  $(p,q)=1$  de la manière suivante.

$$S(p, q) = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} \quad P. Barrucand M. Deboe [1984]$$

Le théorème suivant donne une autre formule pour  $S(p,q)$  en fonction des polynômes de Bernoulli réduits.

**Théorème 1.5** On a

$$S(p, q) = \frac{1}{4}(q-1) + s(p, q)$$

avec

$$S(p, q) = \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1}\left(\frac{r}{q}\right) \overline{B_1}\left(\frac{rp}{q}\right)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} S(p, q) &= \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \sum_{r=1}^{q-1} \left( \overline{B_1}\left(\frac{r}{q}\right) + \frac{1}{2} \right) \left( \overline{B_1}\left(\frac{rp}{q}\right) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{q-1} 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1}\left(\frac{r}{q}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1}\left(\frac{rp}{q}\right) + \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1}\left(\frac{r}{q}\right) \overline{B_1}\left(\frac{rp}{q}\right) = \frac{1}{4}(q-1) + s(p, q) \end{aligned}$$

□

Quelques sommes utiles par la suite sont données par le lemme suivant

**Lemme 1.1** Les formules suivantes sont vraies :

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \frac{q-1}{2},$$

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\}^2 = \frac{(q-1)(2q-1)}{6q},$$

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left[ \frac{rp}{q} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

et

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left[ \frac{rp}{q} \right]^2 = \frac{(p^2+1)(q-1)(2q-1)}{6q} - 2pS(p, q).$$

**Preuve.** Pour la première relation soit  $\bar{p}$  l'inverse de  $p$  modulo  $q$ , c'est-à-dire  $\bar{p}p \equiv 1[q]$ . Alors

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp\bar{p}}{q} \right\} = \sum_{t=1}^{q-1} \left\{ \frac{tp}{q} \right\}$$

et

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q-1} r = \frac{q-1}{2}$$

Pour la seconde relation on a

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\}^2 = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\}^2 = \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 = \frac{(q-1)(2q-1)}{6q},$$

La preuve de la relation trois est

$$\sum_{r=1}^{q-1} \left[ \frac{rp}{q} \right] = \sum_{r=1}^{q-1} \left( \frac{rp}{q} - \left\{ \frac{rp}{q} \right\} \right) = \frac{p}{q} \sum_{r=1}^{q-1} r - \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \frac{p(q-1)}{2} - \frac{q-1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Enfin pour la dernière relation on a

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \left[ \frac{rp}{q} \right]^2 &= \sum_{r=1}^{q-1} \left( \frac{rp}{q} - \left\{ \frac{rp}{q} \right\} \right)^2 = \sum_{r=1}^{q-1} \left( \frac{r^2 p^2}{q^2} - 2 \frac{rp}{q} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} + \left\{ \frac{rp}{q} \right\}^2 \right) = \frac{p^2}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 + \\ &\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\}^2 - 2p S(p, q) = \frac{p^2(q-1)(2q-1)}{6q} + \frac{(q-1)(2q-1)}{6q} - 2S(p, q) \\ &= \frac{(p^2+1)(q-1)(2q-1)}{6q} - 2p S(p, q) \end{aligned}$$

□

**Lemme 1.2** pour  $(p, q)=1$  deux nombres entier on a :

$$\sum_{r=1}^{q-1} \sum_{t < \frac{rp}{q}} t = \frac{(p-1)(2pq-3p+2q)}{12} + ps(p, q)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{r < \frac{rp}{q}} t &= \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{r > \frac{tq}{p}} t = \sum_{t=1}^{p-1} \left( \sum_{r=1}^{q-1} t - \sum_{r < \frac{tq}{p}} t \right) = \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{r=1}^{q-1} t - \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{r < \frac{tq}{p}} t \\ &= \frac{(q-1)(p-1)p}{2} - \sum_{t=1}^{p-1} t \left[ \frac{tq}{p} \right] = \frac{(q-1)(p-1)p}{2} - \sum_{t=1}^{p-1} t \left( \frac{tq}{p} - \left\{ \frac{tq}{p} \right\} \right) \\ &= \frac{(q-1)(p-1)p}{2} - \frac{q}{p} \sum_{t=1}^{p-1} t^2 + p \frac{q}{p} \sum_{t=1}^{p-1} \left\{ \frac{t}{p} \right\} \left\{ \frac{tq}{p} \right\} \\ &= \frac{(p-1)q-1p}{2} - \frac{q(p-1)(2p-1)}{6} + ps(q, p) \\ &= \frac{(q-1)(p-1)p}{2} - \frac{q(p-1)(2p-1)}{6} + \frac{p(p-1)}{4} + ps(q, p) \\ &= \frac{(2q-1)(p-1)p}{4} - \frac{q(p-1)(2p-1)}{6} + ps(q, p) \\ &= \frac{(p-1)(2pq-3p+2q)}{12} + ps(q, p) \end{aligned}$$

Ainsi s'achève la démonstration. □

## 1.7 LA LOI DE RÉCIPROCITÉ

La relation entre les sommes  $S(p, q)$  et  $S(q, p)$  en fonction des nombres  $p$  et  $q$  est appelée la loi de réciprocité de  $S$ , elle est connue sous la forme :

$$S(p, q) + S(q, p) = \frac{(p^2 + q^2 + 1)}{12pq} - \frac{3}{4} \quad \text{H. Rademacher [1972]}$$

Ce qui permet de trouver La loi de réciprocité de  $s(p, q)$ . Justement le théorème suivant donne le résultat désiré.

**Théorème 1.6** *Théorème :*

$$s(p, q) + s(q, p) = \frac{(p^2 + q^2 - 3pq + 1)}{12pq}$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1} \left( \frac{rp}{q} \right)^2 &= \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1} \left( \frac{r}{q} \right)^2 = \sum_{r=1}^{q-1} \left( \frac{r}{q} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 - \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q-1} r + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{q-1} 1 \\ \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1} \left( \frac{rp}{q} \right)^2 &= \frac{(q-1)(2q-1)}{6q} - \frac{q-1}{2} + \frac{q-1}{4} = \frac{(q-1)(2q-1)}{6q} - \frac{q-1}{4} \end{aligned}$$

Et aussi

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1} \left( \frac{rp}{q} \right)^2 &= \sum_{r=1}^{q-1} \left( \left\{ \frac{rp}{q} \right\} - \frac{1}{2} \right)^2 = \sum_{r=1}^{q-1} \left( \frac{rp}{q} - \left[ \frac{rp}{q} \right] - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} \left( \left( \frac{rp}{q} \right)^2 - \frac{2rp}{q} \left( \left[ \frac{rp}{q} \right] + \frac{1}{2} \right) + \left( \left[ \frac{rp}{q} \right] + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{p^2}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 + 2p \sum_{r=1}^{q-1} \frac{r}{q} \overline{B_1} \left( \frac{rp}{q} \right) + \sum_{r=1}^{q-1} \left( \left[ \frac{rp}{q} \right] + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{p^2}{q^2} \sum_{r=1}^{q-1} r^2 + 2ps(p, q) + \sum_{r=1}^{q-1} \left[ \frac{rp}{q} \right] \left( \left[ \frac{rp}{q} \right] + 1 \right) + \frac{q-1}{4} \end{aligned}$$

Avec

$$\left[ \frac{rp}{q} \right] \left( \left[ \frac{rp}{q} \right] + 1 \right) = 2 \sum_{r=1}^{q-1} t$$

$$\sum_{r=1}^{q-1} \overline{B_1} \left( \frac{rp}{q} \right)^2 = \frac{q-1}{4} - \frac{p^2(q-1)(2q-1)}{6q} + 2ps(p, q) + \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{r < \frac{rp}{q}} t$$

$$\frac{q-1}{4} - \frac{p^2(q-1)(2q-1)}{6q} + 2ps(p, q) + \frac{q-1}{4} - \frac{(p-1)(2pq-3p+2q)}{6} + 2ps(p, q)$$

Alors

$$\begin{aligned} 2p(s(p, q) + s(q, p)) &= \frac{q-1}{4} + \frac{p^2(q-1)(2q-1)}{6q} - \frac{(p-1)(2pq-3p+2q)}{6} + \frac{(q-1)(2q-1)}{6q} \\ &\quad - \frac{q-1}{4} = \frac{1}{6q}(p^2 + q^2 - 3pq + 1) \end{aligned}$$

Donc

$$s(p, q) + s(p, q) = \frac{(p^2 + q^2 - 3pq + 1)}{12pq}$$

$$\begin{aligned} s(p, q) + s(q, p) &= \sum_{r=1}^{q-1} B_1 \left( \frac{r}{q} \right) B_1 \left( \frac{rp}{q} \right) + \sum_{r=1}^{p-1} B_1 \left( \frac{r}{p} \right) B_1 \left( \frac{rq}{p} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} \left( \left\{ \frac{r}{q} \right\} - \frac{1}{2} \right) \left( \left\{ \frac{rp}{q} \right\} - \frac{1}{2} \right) + \sum_{r=1}^{p-1} \left( \left\{ \frac{r}{p} \right\} - \frac{1}{2} \right) \left( \left\{ \frac{rq}{p} \right\} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{q-1} 1 + \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{r}{p} \right\} \left\{ \frac{rq}{p} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{r}{p} \right\} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{rq}{p} \right\} + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{p-1} 1 \\
 = & S(p, q) + S(q, p) - \frac{p+q-2}{4} = \frac{p^2+q^2+1}{12pq} + \frac{p+q}{4} - \frac{3}{4} - \frac{p+q-2}{4} \\
 = & \frac{p^2+q^2-3pq+1}{12pq}
 \end{aligned}$$

□

## 1.8 LES DIFFÉRENTES PREUVES DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DANS LA LITTÉRATURE

Hans Rademacher et Emil Grosswald ont énuméré les différentes démonstrations de la loi de réciprocité dans le livre [hans]. La première preuve est due à Ulrich Dieter [Ulrich]. La deuxième et la troisième sont données dans [hans], où ils utilisent la théorie des résidus. La quatrième est basée sur un lemme concernant l'intégrale de Stieltjes [Stieltjes]. Dans ce qui suit on expose la preuve de M. Goubi. [Yeap et B. Pin \[2002\]](#)

### 1.8.1 La démonstration de Goubi

Pour  $q > p$  deux nombres entiers positifs, la division euclidienne  $q$  sur  $p$  est donnée par  $q = ap + b$  avec  $1 \leq b \leq p - 1$ . On a

$$S(p, q) = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\}$$

Puisque  $r$  appartient à l'ensemble  $1, 2, 3, \dots, q - 1$  et  $q = ap + b$  nous pouvons écrire  $r = an + t$  avec  $0 \leq t \leq a$  pour  $r$  entre  $1$  et  $q - b$ . et  $r = ap + t$  avec  $1 \leq t \leq p - 1$  lorsque  $r$  appartient à l'ensemble  $ap + 1, \dots, ap + b$ . Alors on distingue deux cas.

**b=1.**

Dans ce cas  $r$  appartient à l'ensemble  $1, 2, \dots, ap$  et alors

$$S(p, q) = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a \left\{ \frac{an+t}{q} \right\} \left\{ \frac{p(ant+1)}{q} \right\}$$

On remarque

$$p(an+t) = (ap+1)n + pt - n = qn + pt - n, 1 < pt - n \leq q - 1,$$

Et

$$1 < an + t \leq q - 1,$$

Alors

$$\left\{ \frac{p(an+t)}{q} \right\} = \left\{ \frac{pt-n}{q} \right\} = \frac{pt-n}{q}$$

D'ou

$$S(p, q) = \frac{1}{q^2} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{t=1}^a (an+t)(pt-n)$$

On a :

$$(an + t)(q + pt - pb) = -abn^2 + (pa - b)nt + pt^2 = -abn^2 + (q - 2b)nt + pt^2$$

Donc

$$\sum_{t=1}^a (an + t)(tp - nb) = -ba^2n^2 + \frac{a(a+1)(q-2b)n}{2} + \frac{ap(a+1)(2a+1)}{6}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a (an + t)(tp - nb) &= -\frac{ba^2(p-1)(2p-1)}{6} + \frac{ap(a+1)(q-2b)(p-1)}{4} \\ &+ \frac{ap^2(a+1)(2a+1)}{6} = -\frac{b(ap)^2(p-1)(2p-1)}{6p} + \frac{ap(ap+p)(q-2b)(p-1)}{4p} \\ &\quad + \frac{ap(ap+p)(2ap+p)}{6p} \end{aligned}$$

Tel que  $ap = q - b$ ,  $ap + p = q + p - b$  et  $2ap + p = 2q + p - 2b$ , on obtient

$$\begin{aligned} &= -\frac{b(q-1)^2(p-1)(2p-1)}{6p} + \frac{(q-b)(q+p-b)(q-2b)(p-1)}{6p} \\ &\quad + \frac{(q-b)(q+p-b)(2q+p-2b)}{6p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(p, q) &= \frac{1}{6pq^2}(q-1)^2(p-1)(2p-1) + \frac{1}{4pq^2}(q-2)(q-1)(p-1)(p+q-1) \\ &\quad + \frac{1}{6pq^2}(q-1)(p+q-1)(2q+p-2) \end{aligned}$$

Puisque

$$S(q, p) = S(1, p)$$

Donc

$$S(q, p) = \frac{(p-1)(2p-1)}{6p}$$

Alors

$$\begin{aligned} S(p, q) + S(q, p) &= \frac{1}{6pq^2}(p-1)(2p-1)(2q-1) + \frac{1}{4pq^2}(q-2)(q-1)(p-1)(p+q-1) \\ &\quad + \frac{1}{6pq^2}(q-1)(p+q-1)(2q+p-2) = \frac{p^2 + q^2 + 1}{12pq} + \frac{p+q}{4} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\mathbf{b} \geq 2$ . Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} S(p, q) &= \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \sum_{r=1}^{ap} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} = \sum_{r=ap+1}^{ap+b-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a \left\{ \frac{an+t}{q} \right\} \left\{ \frac{p(an+t)}{q} \right\} + \sum_{r=1}^{b-1} \left\{ \frac{ap+t}{q} \right\} \left\{ \frac{(ap+t)p}{q} \right\} \end{aligned}$$

On remarque que

$$p(an + t) = (ap + b)n + pt - nb = qn + pt - nb,$$

$$p(ap + t) = qp + pt - pb,$$

$$pt - pb < 0, (1 < q + pt - pb < q - 1)$$

Et

$$|pt - nb| < q$$

$$\left\{ \frac{p(an + t)}{q} \right\} = \left\{ \frac{pt - nb}{q} \right\}$$

Et

$$\left\{ \frac{p(ap + t)}{q} \right\} = \left\{ \frac{pt - pb}{q} \right\} = \left\{ \frac{q + pt - pb}{q} \right\} = \frac{q + pt - pb}{q}$$

$$S(p, q) = \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a \left\{ \frac{an + t}{q} \right\} \left\{ \frac{pt - nb}{q} \right\} + \frac{1}{q^2} \sum_{t=1}^{b-1} (ap + t)(q + pt - pb)$$

$$\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a \left\{ \frac{an + t}{q} \right\} \left\{ \frac{pt - nb}{q} \right\}$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{p-1} \left( \sum_{t < \frac{nb}{p}} (an + t)(q + pt - np) + \sum_{t > \frac{nb}{p}} (an + t)(pt - nb) \right)$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{p-1} \left( \sum_{t < \frac{nb}{p}} (an + t)(q + pt - np) - \sum_{t > \frac{nb}{p}} (an + t)(pt - nb) \right) + \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a (an + t)(pt - nb)$$

$$= \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a (an + t)(pt - nb) + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t < \frac{nb}{p}} (an + t)$$

$$S(p, q) = \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t=1}^a (an + t)(pt + nb) + \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t < \frac{nb}{p}} (an + t) + \frac{1}{q^2} \sum_{t=0}^{p-1} (ap + t)(q + pt - pb)$$

$$\sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t < \frac{nb}{p}} (an + t) = a \sum_{n=1}^{p-1} n \left[ \frac{nb}{p} \right] + \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{t < \frac{nb}{p}} t = a \sum_{n=1}^{p-1} n \left[ \frac{nb}{p} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \left[ \frac{nb}{p} \right] \left( \left[ \frac{nb}{p} \right] + 1 \right)$$

$$= \frac{(p-1)(b-1)}{4} + \frac{(b^2+1)(p-1)(2p-1)}{12p} - bS(b, p) + \frac{ab(p-1)(2p-1)}{6} - apS(b, p)$$

$$= \frac{1}{12p}(p-1)(2p-1)(2qb - b^2 + 1) + \frac{(p-1)(b-1)}{4} - qS(q, p)$$

$$\sum_{t=1}^{b-1} (ap + t)(q + pt - pb) = \sum_{t=1}^{b-1} (ap(q - pb) + (ap^2 + q - pb)t + pt^2)$$

$$= \sum_{t=1}^{b-1} ((q - b)(q - pb) + (qp + q - 2pb)t + pt^2)$$

$$= (q - b)(q - pb)(b - 1) + \frac{b(qp + q - 2pb)}{2} + \frac{pb(b-1)(2b-1)}{6}$$

Donc

$$S(p, q) = -\frac{1}{6p}(q - b)^2 b(p - 1)(2p - 1) + \frac{1}{4p}(q - 2b)(q - 2p)(p - 1)(p + q - b)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{6p}(q-b)(p+q-b)(2q+p-2b) + \frac{1}{12p}(p-1)(2p-1)(2qb-b^2+1) \\
 & + \frac{(p-1)(b-1)}{4} - qS(q,p) + (q-b)(q-pb)(b-1) + \frac{b(qp+q-2pb)(b-1)}{2} \\
 & \quad + \frac{pb(b-1)(2b-1)}{6}
 \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 S(p,q) + S(q,p) &= -\frac{b(q-1)^2(p-1)(2p-1)}{6pq^2} + \frac{(q-b)(q+p-b)(q-2b)(p-1)}{4pq^2} \\
 & + \frac{(q-b)(q+p-b)(2q+p-2b)}{6pq^2} + \frac{(q-b)(q-pb)(b-1)}{q^2} + \frac{b(qp+q-2pb)(b-1)}{2q^2} \\
 & + \frac{pb(b-1)(2b-1)}{6q^2} + \frac{1}{12pq}(p-1)(2p-1)(2qb-b^2+1) + \frac{(p-1)(b-1)}{4q^2}
 \end{aligned}$$

Alors  $S(p,q) + S(q,p)$  est le polynôme  $p(b) = a_0 b^3 + a_1 b^2 + a_2 b + a_3$  de degré 3 et ses coefficients sont :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= -\frac{(p-1)(2p-1)}{6pq^2} - \frac{(p-1)}{2pq^2} - \frac{1}{3pq^2} + \frac{p}{q^2} - \frac{p}{q^2} + \frac{p}{3q^2} \\
 a_1 &= \frac{q(p-1)(2p-1)}{3pq} - \frac{(p-1)(2p+5q)}{4pq^2} + \frac{3p+6q}{2pq^2} - \frac{pq+p+q}{q^2} + \frac{pq+2p+q}{2q^2} \\
 & \quad - \frac{p}{2q^2} - \frac{(p-1)(2p-1)}{2q^2} \\
 a_2 &= -\frac{(p-1)(2p-1)q}{6pq} - \frac{(p-1)(3pq+4q^2)}{4pq^2} - \frac{p^2+6pq+6q^2}{6pq^2} + \frac{q^2+pq+q}{q^2} \\
 & \quad - \frac{q+pq}{2q^2} + \frac{p}{6q^2} + \frac{(p-1)(2p-1)q}{6pq} \\
 a_3 &= \frac{(p-1)(2p-1)q}{4pq^2} + \frac{p^2q+3pq^2+2q^3}{4pq^2} - 1 + \frac{(p-1)(2p-1)}{12pq} - \frac{p-1}{4q} \\
 &= \frac{1}{12pq} [3(p-1)(pq-q^2) + 2(p^2+3pq+2q^2) + (p-1)(2p-1) - p(p-1)] - 1
 \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0 \quad \text{Et} \quad a_3 = \frac{(p^2+q^2+1)}{12pq} + \frac{(p+q)}{4} - \frac{3}{4}$$

D'où

$$S(p,q) + S(q,p) = \frac{p^2+q^2+1}{12pq} + \frac{p+q}{4} - \frac{3}{4} \quad \text{Goubi [2018]}$$

Et le résultat découle.

# LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

# 2

## 2.1 INTRODUCTION

La fonction zêta de Riemann est définie sous forme d'une série pour les complexes  $s$  de [Tezena \[2018-2019\]](#) partie réelle strictement supérieure à 1. Pour mieux comprendre la fonction zêta, on rappelle quelques notions de base sur les nombres complexes et le développement en séries entières et en séries de Laurent.

## 2.2 LES NOMBRES COMPLEXES

Soit  $d$  un nombre il est un carré dans le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels si et seulement si  $d \geq 0$ . Il en résulte que l'équation algébrique :

$$x^2 + 1 = 0$$

N'admet pas de solution réelle. Elle admet deux solutions qui ne sont pas réelles et qui sont notées  $i$  et  $-i$ , ce sont des nombres imaginaires donc purement complexes.

**Définition 2.1** *L'unité complexe est le nombre  $i$ , non réel, de carré  $i^2 = -1$ . Ainsi un nombre complexe est de la forme :  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  Réels. L'ensemble des nombres complexes est un corps commutatif,  $\mathbb{C} = \{z = x + iy\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ .*

*Quelques propriétés des nombres complexes.*

*La conjugué de  $i$  est  $-i$ ; le conjugué de  $z = x + iy$  est  $\bar{z} = x - iy$ ,  
La conjugaison des nombres complexes est la fonction :  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que*

$$f(x + iy) = x - iy.$$

*La norme d'un nombre complexe  $z = x + iy$  est égale à :*

$$N(z) = z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

*Un nombre imaginaire pur s'écrit sous la forme  $z = iy$ , c'est-à-dire la partie réelle est 0. L'inverse de  $z = x + iy$  est le nombre complexe :*

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

*Tout nombre complexe  $z = x + iy$  peut être considéré comme le point  $P = (x, y)$  dans le plan  $Oxy$ .  $Ox$  est l'axe des parties réelles et  $Oy$  est l'axe des parties imaginaires.*

$z$  est l'affixe du point  $P = (x, y)$  de l'angle orienté  $(\overline{Ox}, \overline{Oy}) = \theta$  est l'argument de  $z$  est la longueur  $r = OP$ , il est le module de  $z$ . Il en résulte la formule trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Avec un simple calcul on obtient la formule de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

**Définition 2.2** Le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est algébriquement clos tout polynôme  $f(x)$  de degré  $n$  de l'anneau  $\mathbb{C}[X]$  admet  $n$  zéros dans  $\mathbb{C}$ . Le corps  $\mathbb{C}$  est la clôture algébrique de  $\mathbb{R}$ .

## 2.3 FONCTION HOLOMORPHES – FONCTIONS MÉROMORPHES

**Définition 2.3** Une fonction d'une variable complexe est une fonction :  $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ , ( $\mathbb{D}$  est le domaine de définition). De valeur définie par :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv.$$

Alors

$$\bar{f}(z) = u - iv \text{ et } f(z)\bar{f}(z) = u^2 + v^2$$

**Exemple :** Pour  $z = x + iy$ , on a quelques fonctions élémentaires de  $z$  :

$$- f(z) = \frac{1}{z} = u + iv; \text{ Alors } u = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ et } v = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$- f(z) = z^2 = u + iv; \text{ Alors } u = x^2 - y^2 \text{ et } v = 2xy.$$

$$- f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ avec } cz + d \neq 0, a, b, c, d \text{ réels,}$$

$$\text{Alors : } u = \frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+acy^2}{(cx+d)^2+c^2y^2} \text{ et } v = \frac{(ad+bc)y}{(cx+d)^2+c^2y^2}.$$

**Définition 2.4** Une fonction  $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est continue en un point  $z_0$  de  $\mathbb{D}$  si elle satisfait la condition suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(z_0 + h) = f(z_0).$$

$f$  est dérivable en un point  $z_0$  de  $D$  si elle satisfait :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = l.$$

$l$  un nombre complexe, il est la dérivée de  $f$  en  $z_0$ .  $f$  est dérivable sur le domaine complexe  $\mathbb{D}$  si elle est dérivable en tout point de  $\mathbb{D}$ . Les conditions de dérivabilité d'une fonction  $f(z)$  sont précisées par la proposition suivante :

**Proposition 2.1** Soit une fonction  $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  d'une variable complexe  $z$ , avec  $f(z) = u + iv$ . Alors  $f(z)$  est dérivable sur  $D$  si elle satisfait le système des dérivées partielles :

$$\partial U / \partial x = \partial V / \partial y \text{ Et } \partial U / \partial y = -\partial V / \partial x.$$

**Exemple :**

$$f(z) = z^2 = u + iv, \quad u = x^2 - y^2 \text{ Et } v = 2xy.$$

Alors les dérivées partielles sont :

$$\partial U / \partial x = 2x \text{ Et } \partial U / \partial y = -2y, \quad \partial V / \partial x = 2y \text{ et } \partial V / \partial y = 2x.$$

**Définition 2.5** Les conditions de dérivabilité de  $f(z) = u + iv$  sont les conditions de Cauchy- Riemann.

**Proposition 2.2** Soient  $f, g : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions dérivables. Les relations suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g'; \\ (fg)' &= f'g + fg'; \\ g(z) \neq 0, (f/g)' &= ((f'g - fg')/g^2).\end{aligned}$$

**Définition 2.6** Un domaine  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$  est connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints. Un domaine  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$  est connexe par arcs si 2 points  $M$  et  $l$  de  $\mathbb{D}$  peuvent être joints par une ligne continue. Il y a 2 types de développement en séries infinie de  $f(z)$  : un développement en série entière et un développement en série de Laurent.

**Définition 2.7** Une fonction holomorphe en  $a$  est une fonction  $f(z)$  qui admet un développement en série entière de la forme :

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + \dots + a_n(z - a)^n + \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

**Définition 2.8** Une fonction méromorphe est une fonction  $f(z)$  qui admet un développement en série de Laurent de la forme :

$f(z) = g(z)/(z - a)^n, n \geq 1; g(z)$  une série entière.  
 $a$  est un pôle de  $f(z)$  d'ordre  $n$ . Alors :

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z - a)^n} + \dots + \frac{g^{(p)}(a)}{p!(z - a)^{n-p}} + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n + 1)!}(z - a) + \dots,$$

$$f(z) = \sum_{k \geq -n} a_k(z - a)^k, a_k = \frac{g^{(n+k)}(a)}{(n + k)!};$$

avec  $g^{(d)}$  la dérivée d'ordre  $d \geq 0$  de  $g$  et  $k = -n, -n + 1, \dots$ . Le coefficient  $a_{-1}$  est le résidu de la fonction  $f(z)$  au pôle  $z = a$  de  $f(z)$ .

**Exemple :**  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ ; Cette fonction admet un pôle simple en  $z = 1$  et un pôle double en  $z = -1$ . Les résidus sont égaux à :  
 $a_{-1} = 1/4$  Pour le pôle  $z = 1$  et  $a_{-1} = -1/4$  pour le pôle  $z = -1$ . [GUERBOUSSA \[2010\]](#)

## 2.4 FONCTION GAMMA $\Gamma(s)$ COMPLEXE.

**Définition 2.9** La fonction  $\Gamma(s)$  d'une variable complexe  $s(R(s) > 0)$  est l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)x^{s-1}dx, s = \sigma + it \in \mathbb{C}.$$

Elle satisfait la formule de Weierstrass :

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{s/k}}{1 + s/k}$$

où  
 $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})]$  est la constante d'Euler.

**Proposition 2.3** La fonction analytique  $\Gamma(s)$  satisfait les propriétés :

1. Le résidu de  $\Gamma(s)$  en  $s = -n$  est égal à  $(-1)^n / n!$ ,

2.  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ ,
3.  $\Gamma(n + 1) = n!$ , Pour  $n \geq 0$ ,
4.  $\Gamma(s) \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ , (Formule des compléments)
5.  $\Gamma(s)\Gamma(s + \frac{1}{2}) = 2^{1-2s} \sqrt{\pi} \Gamma(2s)$ , (Formule de multiplication)
6.  $\log \Gamma(s) = (s - 1/2) \log s - \frac{1}{2} \log 2\pi - \int_0^{+\infty} \frac{\{x\} - 1/2}{s+x} dx$ , (formule de Stirling).

**Calcul de valeurs particulières de  $\Gamma(s)$ .**

Avec la formule 3, nous trouvons :

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \Gamma(5) = 24, \Gamma(6) = 120, \text{ etc...}$$

Ainsi on obtient

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Avec la formule 4, nous trouvons :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},$$

La formule 6 de Stirling est liée au comportement asymptotique de la (s) :

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \Gamma(s) s^{s-1/2} \exp(-s) \sqrt{2\pi} = 1. \text{MARCAY [2010]}$$

## 2.5 FONCTION ZÊTA DE RIEMANN.

**Définition 2.10** La fonction  $\zeta$  zêta de Riemann est définie par la série numérique suivante :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, R(s) > 1, \text{ C.Sabbah et N.Berline [2011]}$$

avec  $n^s = \exp(s \log(n))$ .

## 2.6 FONCTION ZÊTA ET FONCTION GAMMA.

Pour récupérer les autres valeurs de la fonction zêta on a l'équation fonctionnelle suivante :

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s).$$

Ou encore :

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Ainsi par exemple on  $\zeta(-2n) = 0$ . Il existe une autre représentation de  $\zeta(s)$  liée à la fonction  $\Gamma(s)$ . En inversant l'ordre de sommation et d'intégration dans :

$$\Gamma(s)n^{-s} = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp(-nx) dx,$$

Nous obtenons la forme :

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \text{ pour } R(S) > 1,$$

Et

$$\zeta(s) = \frac{e^{-is} \Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_c \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz$$

Sur un contour d'intégration convenable C. La fonction  $\zeta(s)$  est une fonction méromorphe qui admet une seule singularité : un pôle  $s = 1$  de résidu égal à 1.

## 2.7 LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN ET LES NOMBRES DE BERNOULLI.

Les nombres de Bernoulli sont les coefficients  $B_m$  dans le développement en série infinie :

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 + \sum_{m \geq 1} B_m \frac{t^m}{m!}. \quad (2.1)$$

**Théorème 2.1** Les nombres de Bernoulli satisfont la relation de récurrence :

$$1 + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} B_k = 0, \quad m \geq 2, \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

**Théorème 2.2** — Tous les nombres de Bernoulli  $B_{2m+1}$ ,  $m > 0$ , sont nuls ;  
 — Les nombres de Bernoulli  $B_{4m+2}$  positifs ;  
 — Les nombres de Bernoulli  $B_{4m}$  sont négatifs.  
 La relation (1) devient,

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{m \geq 1} \frac{t^{2m}}{(2m)!}$$

**Théorème 2.3** Soit un nombre premier  $p$ , un nombre pair  $2m$  et les nombres de Bernoulli  $B_{2m}$ . Alors on a

- Si  $p - 1$  ne divise pas  $2m$ , alors  $B_{2m}$  est  $p$ -entier : il ne contient pas  $p$  au dénominateur.
- Si  $p - 1$  ne divise pas  $2m$ , alors  $p \mid B_{2m} - 1 \pmod{p}$ .

On a

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

On peut désormais calculer les premières valeurs de  $\zeta$  pour les entiers négatifs :

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = \frac{(-1)}{12}, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}.$$

$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \dots \zeta(-2n) \dots = 0$ . Ainsi les nombres  $-2, -4, -6, \dots, -2n, \dots$  sont appelés les zéros triviaux de la fonction zêta. [G.DMY F. THIRY \[2019-2020a\]](#)

## 2.8 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ET FORME D'EULER.

La fonction Zêta de Riemann est la fonction complexe,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}, \quad s = \sigma + it \in \mathbb{C}$$

Cette série converge absolument sur le demi-plan  $\sigma = R(s) > 1$ .

Posons :  $\zeta(s) = 1 + \lim_{N \rightarrow 0} \int_{n=2}^N n^{-s}$ ,

La fonction  $f(x) = x^{-s}$  admet des dérivées d'ordre  $k \geq 1$ ,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k s(s+1)\dots(s+k-1)x^{-s-k},$$

Avec la formule de la « somme d'Euler-Mac Lauren » nous obtenons,

$$\zeta(s) = 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \int_1^N x^{-s} dx + \frac{1}{2}(N^{-s} - 1) - \sum_{r=2}^k \frac{B_r}{r!} s(s+1)\dots(s+r-2)(N^{-s-r+1}) \right\}$$

$$-\frac{1}{k!}s(s+1)\dots(s+k-1) \int_1^N B_k(x-[x])x^{-s+k} dx \}$$

En passant à la limite, devient :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^k \frac{B_r}{r!} s(s+1)\dots(s+r-2) - \frac{1}{k!}s(s+1)\dots(s+k-1) \int_1^\infty B_k(x-[x])x^{-s+k} dx,$$

Cette intégrale converge sur le demi-plan  $\sigma \geq 1 - k$ ,

Il en résulte que  $\zeta(s)$  est une fonction méromorphe avec un pôle simple en  $s = 1$ .

La formule d'Euler de la fonction  $\zeta(s)$  est

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \frac{\pi}{p} (1 - p^{-s})^{-1}, \text{ pour } \sigma > 1.$$

Les nombres de Bernoulli sont liés à la fonction zêta  $\zeta(s)$  par la relation donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.4** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\zeta(2k)$  est non nul, il est donné par

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}.$$

**Démonstration.** L'idée est d'utiliser le développement en série entière de  $y \rightarrow \cot(y)$ .

D'après les formules d'Euler. On obtient pour  $y \in ]0; \pi[$  :

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= y \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \\ &= iy \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{e^{iy} - e^{-iy}} \\ &= iy \frac{e^{2iy} + 1}{e^{2iy} - 1}. \end{aligned}$$

Posons  $z = 2iy$ , il vient :

$$y \cot(y) = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z - 1}.$$

D'après la définition des nombres de Bernoulli (avec  $|z| = 2y < 2\pi$ ) :

$$\begin{aligned} y \cot(y) &= \frac{z}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 + B_1 z + \frac{z}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \\ &= B_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Or, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $B_{2n+1} = 0$  donc :

$$ycot(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k} z^{2k}}{(2k)!}.$$

Par définition,  $z = 2iy$ , ainsi :

$$ycot(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} y^{2k}$$

Nous utilisons la formule suivante

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  :

$$\pi cot(\pi x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

On peut poser  $x = \frac{y}{\pi}$  pour  $y \in ]0, 1[$  :

$$\pi cot(y) = \frac{\pi}{y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y}{\pi(n^2 - (\frac{y}{\pi})^2)},$$

On multiplie par  $y$  l'expression et on simplifie :

$$\begin{aligned} ycot(y) &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} \\ &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - (\frac{y}{\pi n})^2}. \end{aligned}$$

On a  $|\frac{y}{\pi n}| < 1$  car  $n \geq 1$  et  $|y| < 1$ , donc on peut développer en série géométrique :

$$ycot(y) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k}.$$

Le terme général des séries est positif, donc d'après le théorème de Fubini, on peut inverser les deux sommes, ainsi :

$$ycot(y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) \frac{-2}{\pi^{2k}} \right] y^{2k}.$$

On utilise l'autre formule du développement de  $ycot(y)$  trouvée précédemment. Par unicité du développement en série entière. On peut identifier les coefficients :

$$\frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} = \frac{-2}{\pi^{2k}} \zeta(2k).$$

On trouve finalement :

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} (2)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}. \text{ G.DMYF. THIRY [2019 – 2020b]}$$

**Exemple.** On peut donc calculer les premières valeurs de zêta de Riemann pour les entiers positifs pairs :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

□

## 2.9 L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN.

L'hypothèse de Riemann stipule que tous les zéros de la fonction zêta sont de partie réel  $\frac{1}{2}$ .  $s = \frac{1}{2}$  est nommé le point central. La droite  $R(s) = \frac{1}{2}$  est la ligne critique en fin les point s avec  $0 \leq R(s) \leq 1$  est la bande critique. [Soto \[2018-2019\]](#)

Holomorphe et méromorphe de la fonction zêta de Riemann et la fonction Gamma pour  $R(s) > 0$ . [Baez-Duarte \[1993\]](#)

# LES SOMMES DE DEDEKIND ET LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN

# 3

## 3.1 INTRODUCTION

Les sommes de Dedekind et la fonction zêta de Riemann associées par rapport à des autres fonctions, comme la fonction cotangente  $C_{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$ .

## 3.2 FONCTION ZÊTA DE HURWITZ

La fonction zêta de Hurwitz est une généralisation de la fonction zêta de Riemann. Elle définit, pour toute valeur du paramètre  $x$ , nombre complexe de partie réelle strictement positive  $R(s) > 1$ , par la série suivante :

$$\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+x)^{-s}. \text{Kowalenko [14Feb.2017]}$$

Par prolongement analytique,  $\zeta(s, x)$  s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe, d'unique pôle  $s = 1$

Pour  $x = 1$  on a

$$\zeta(s, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

Alors

$\zeta(s, 1)$  Est la fonction zêta de Riemann

## 3.3 LES SOMME COTANGENTE

Ou  $a \in \mathbb{C}$ ,  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers positifs et  $\zeta(a, x)$  désigne la fonction Zêta de Hurwitz. Nous prouvons une formule explicite pour le Dedekind généralisé.

$$C_a\left(\frac{p}{q}\right) = -q^a \sum_{k=1}^{q-1} \zeta\left(-a, \left\{\frac{kp}{q}\right\}\right) \cot\left(\frac{k\pi}{q}\right)$$

Tout au long de ce travail,  $p$  et  $q$  sont deux nombres premiers. Pour  $a \in \mathbb{Z}$ , Bettin- Conrey a étudié les sommes cotangentes.

$$C_a\left(\frac{p}{q}\right) = q^a \sum_{k=1}^{q-1} \cot\left(\frac{\pi kp}{q}\right) \zeta\left(-a, \frac{k}{p}\right)$$

On observe que si  $a$  est un entier positif,  $C_a$  admet une reformulation en polynômes de Bernoulli.

$$C_a\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{q^a}{a+1} \sum_{k=1}^{q-1} B_{a+1}\left(\frac{k}{q}\right) \cot\left(\frac{k\pi p}{q}\right)$$

Où  $B_{a+1}$  est le nombre de Bernoulli d'ordre  $a+1$ . De plus, si  $a$  est négatif,  $C_a$  admet une reformulation en fonction polygamma

$$C_a\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{(-1)^a}{q^{-a}(-a-1)!} \sum_{k=1}^{q-1} e_{-a-1}\left(\frac{k}{q}\right) \cot\left(\frac{k\pi p}{q}\right) e_m(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \log \Gamma(z)$$

Est la fonction polygamma d'ordre  $m$ ; nous renvoyons à Kölbig pour plus de détails. Dans le cas particulier  $m=0$ ,  $e_0 = e$  est la fonction diagamme définie  $z \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}$

$$e(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right).$$

Qui satisfait la formule de réflexion

$$\pi \cot \pi z = e(1-z) - e(z).$$

De plus,  $e_m$  est relié à la fonction zêta de Hurwitz par la relation suivante

$$e_m(z) = (-1)^{m+1} m! \zeta(1+m, z). \text{A. Bayad [2013]}$$

Dans le cas où  $a$  est entier négatif impair, Bettin-conrey énonce le

$$C_a\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{\pi}{2q^{-a}(-a-1)!} \sum_{k=1}^{q-1} \cot\left(\frac{\pi m p}{q}\right) \cot\left(\frac{k\pi p}{q}\right) \frac{d^{-a-1} \cot(\pi z)}{dz^{-a-1}} \Big|_{z=\frac{k}{q}}$$

Et puis nous avons

$$C_{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = 2\pi s(p, q).$$

Où  $s(p, q)$  est la somme bien connue de Dedekind

$$s(p, q) = \frac{1}{4q} \sum_{m=1}^{q-1} \cot\left(\frac{\pi m p}{q}\right) \cot\left(\frac{\pi m}{q}\right)$$

D'abord, nous définissons la somme cotangente généralisée  $v_a$  pour deux nombres premiers entre eux  $p, q$  et  $a \in \mathbb{Z}$  comme étant Nous définissons la somme cotangent généralisée pour deux nombres premiers entre eux comme étant

$$-C_a\left(\frac{\bar{p}}{q}\right) = V_a\left(\frac{p}{q}\right) \text{ M. Goubi A. Bayad [2018]}$$

### 3.4 ESPACE DE HILBERT ET LIEN AVEC LES SOMMES DE VASSION-NINE

On considère l'espace de Hilbert  $H = L^2([0, +\infty[ t^{-2} dt)$  muni de produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t) \overline{g(t)} t^{-2}, f, g \in H \text{ B. Landreau et F. Richard [2002]}$$

Pour tout entier  $p$ , considère la fonction  $e_p$  défini par

$$e_p(t) = \left\{ \frac{t}{p} \right\}$$

Et fonction indicatrice de l'intervalle  $[1, \infty[$  donnée par

$$\aleph(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ } t \in [1, +\infty[ \\ 0 \text{ ailleurs} \end{array} \right\}$$

La distance  $d_n$  de  $\aleph$  à le sous-espace  $H_n$  est donnée par

$$d_n = \text{dis}(\aleph, H_n) = \inf_{h \in H_n} \| \aleph - h \|$$

Les auteurs on conjecturé que

$$d_n^2 \sim \frac{2 + a - \log 4 + o(1)}{\log n}, n \rightarrow \infty$$

Par contre ils ont démontré que

$$d_n^2 \geq \frac{2 + a - \log 4\pi + o(1)}{\log n}, n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi pour calculer cette distance on doit évaluer deux types de produit internes ; le premier est connu  $\langle \aleph, e_p \rangle$  qui est donné par la formule suivante :

$$\langle \aleph, e_p \rangle = \frac{\log p + 1 - a}{p}$$

Le deuxième produit scalaire est  $\langle e_p, e_q \rangle$ . sa valeur est donnée par la formule de vasionnine

$$\langle e_p, e_q \rangle = \frac{\log 2\pi - \gamma}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{p-q}{pq} \log \frac{p}{q} - \frac{\pi}{2pq} [V(q, p) + V(p, q)] \text{ Vasyunin [1995]}$$

La somme vassionnin-cotangente  $V(p, q)$  est toujours curieuse, récemment, Bettin et Conrey ont prouvés la loi de réciprocité suivante

$$\frac{\bar{q}}{p} V(q, p) + V(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{\pi p} - g\left(\frac{\bar{q}}{p}\right)$$

Ou  $g$  est une fonction analytique dans  $\mathbb{C} / \mathbb{R}$  qui a le développement asymptotique suivant d'ordre  $N \geq 2, n \rightarrow \infty$

$$g(n) = -\frac{\log 2\pi n - \alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{\zeta(k) \beta_k}{k} n^k + O(x^{N+1})$$

Pour  $q = 1$ , la somme des cotangentes

$$V\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=1}^{q-1} \left\{ \frac{kp}{q} \right\} \cot\left(\frac{\pi kp}{q}\right)$$

Est d'abord étudié par Vasionnine, il a montré la formule asymptotique (pour  $p$  assez grand) suivante

$$V(1, p) = -\frac{p \log p}{\pi} + \frac{p}{\pi} (\log 2\pi - \alpha) + O(\log p).$$

Ou la notation  $g$  grand  $O$  de Landau dénote le caractère dominé d'une fonction par rapport à une autre. M. Th. Rassia et H. Maire ont montré que

$$V(1, p) = -\frac{p \log p}{\pi} + \frac{p}{\pi} (\log 2\pi - \alpha) + O(1).$$

Ou encore pour  $P, n \in \mathbb{N}, p > 6N$  avec  $N = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ ; M. Th. Rassias et H. Maier ont montré qu'il existe des constantes réelles positives  $A_1, A_2 \leq 1$  et des constantes réelles  $E_2, k \in \mathbb{N}$  avec  $|E_2| \geq (A_2 k)^{2p}$ , tel que chaque  $n$  on a :

$$V(1, p) = -\frac{p \log p}{\pi} + \frac{p}{\pi} (\log 2\pi - \gamma) + \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^n E_2 p^{-1} - R_n^*(p)$$

Avec  $|R_n^*(p)| \leq (n A_2)^{4n} \cdot p^{-(n+1)}$ . [M. Goubi A. Bayad M. O. Hernane \[2017\]](#)

**Propriétés :**

$$e_p(t) = \left\{ \frac{t}{p} \right\} \quad \text{Et} \quad v_p \left( \frac{[t]}{p} \right)$$

$$v_p = e_p - \frac{1}{p} e_p$$

$$\langle v_p, v_q \rangle = \frac{1}{pq} G(p, q)$$

$$\langle v_p, v_p \rangle = \frac{1}{p^2} G(p, p)$$

**Lemme 3.1**

$$v(1, p) = \frac{1}{\pi} G(p, p) - \frac{p-1}{\pi} \log p.$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \langle v_p, v_p \rangle &= \langle e_p - \frac{1}{p} e_1, e_p - \frac{1}{p} e_1 \rangle = \langle e_p, e_p \rangle + \frac{1}{p^2} \langle e_1, e_1 \rangle - \frac{2}{p} \langle e_1, e_p \rangle \\ &= \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) (\log 2\pi - \gamma) - \frac{2}{p} \langle e_1, e_p \rangle \end{aligned}$$

□

De la formule de la vasionnine on déduit la

$$\frac{2}{p} \langle e_1, e_p \rangle = (\log 2\pi - \gamma) \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1-p}{p^2} \log p - \frac{1}{\pi^2} v(1, p)$$

$$\langle v_p, v_p \rangle = \frac{\pi}{p^2} v(1, p) + \frac{p-1}{p^2} \log p$$

Alors

$$\langle 1, p \rangle = \frac{p^2}{\pi} \langle v_p, v_p \rangle - \frac{p-1}{\pi} \log p$$

D'ou

$$v \langle 1, p \rangle = \frac{1}{\pi} G(p, p) - \frac{p-1}{\pi} \log p. \quad \text{A. Bayad [2013]}$$

## 3.5 LOI DE RÉCIPROCITÉ

Les sommes de Dedekind sont apparues pour la première fois dans les propriétés de transformation de la fonction Dedekind et satisfont la réciprocité :

$$S(p, q) + S(q, p) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left( \frac{p}{q} + \frac{1}{pq} + \frac{q}{p} \right). \text{Mordell [Jul - 1951]}$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} C_a \left( \frac{p}{q} \right) + C_a \left( \frac{q}{p} \right) &= -\frac{\pi}{2q^{-a}(-a-1)!} \sum_{k=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m p}{q} \right) \frac{d^{-a-1} k \pi z}{dz^{-a-1}} \Big|_{z=\frac{k}{q}} \\ &\quad + \frac{\pi}{2p^{-a}(-a-1)!} \sum_{k=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m q}{p} \right) \frac{d^{-a-1} \cot(\pi z)}{dz^{-a-1}} \Big|_{z=\frac{k}{q}} \end{aligned}$$

Pour  $a = -1$  on a :

$$\begin{aligned} C_{-1} \left( \frac{p}{q} \right) + C_{-1} \left( \frac{q}{p} \right) &= \frac{1}{4q} \sum_{m=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m p}{q} \right) \cot \left( \frac{\pi m}{q} \right) + \frac{1}{4p} \sum_{m=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m q}{p} \right) \cot \left( \frac{\pi m}{p} \right) \\ &= 2\pi \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left( \frac{p}{q} + \frac{1}{pq} + \frac{q}{p} \right) \right) \text{H. Rademacher A. Whiteman [April - 1941]} \\ &= 2\pi(S(p, q) + S(q, p)) \end{aligned}$$

Les sommes de Dedekind et les sommes cotangente de deux nombres  $p, q$  positifs tel que  $(p, q) = 1$ .

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{q-1} \left\{ \frac{r}{q} \right\} \left\{ \frac{rp}{q} \right\} + \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{r}{p} \right\} \left\{ \frac{rq}{p} \right\} \\ &= \frac{p+q}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4q} \sum_{m=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m p}{q} \right) \cot \left( \frac{\pi m}{q} \right) + \frac{1}{4p} \sum_{m=1}^{q-1} \cot \left( \frac{\pi m q}{p} \right) \cot \left( \frac{\pi m}{p} \right) \text{H. Rademacher [1972]} \end{aligned}$$

□

Il existe un lien entre les sommes de Dedekind et la fonction zêta de Riemann.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Je constate que cette étude que j'ai présenté ici m'a demandé beaucoup d'efforts cependant, elle demeure incomplète. Il reste beaucoup à faire dans les sommes de Dedekind, et de trouver des preuves simples pour prouver la loi de réciprocité, et la fonction zêta de Hurwitz (les sommes cotangente, espace de Hilber, les somme de vassionnine...)  
Ca sera l'objectif de mes prochains travaux de recherche.

# BIBLIOGRAPHIE

- A. Bayad M. Goubi A. Bayad. Proof of the mobius conjecture revisited.[proc. jangjeon math. soc]. 16(2) :237–243, 2013.
- D. Ayotte. Les nombres de bernoulli, midi-conférence de l'aesmul. (34) :2–4, 6-02-2019.
- B. Landreau et F. Richard B. Landreau et F. Richard. Le critère de beurling et nyman pour l'hypothèse de riemann :aspects numériques. 11(3) :349–360, 2002.
- L. Baez-Duarte. On beurling real variable reformulation of the riemann hypothesis.[ adv. math]. (101) :10–30, 1993.
- C.Sabbah et N.Berline C.Sabbah et N.Berline. *la zêta de Riemann*. PhD thesis, 2011.
- C.SERVIEN. *ANALYSE 4 : séries de Fourier séries entières Intégrales multiples*. PhD thesis, 1996.
- G.DMY F. THIRY G.DMY F. THIRY. La fonction zêta de riemann : approche historique et liens avec les nombres premiers. [département de, athématiques, d'orsay]. (40) :14–16, 2019-2020a.
- G.DMY F. THIRY G.DMY F. THIRY. La fonction zêta de riemann : approche historique et liens avec les nombres premiers. [département de, athématiques, d'orsay]. (40) :17–19, 2019-2020b.
- M. Goubi. New arithmetical proof of the reciprocity law for dedekind sums. [On arxiv 1810]. (06102) :2–4, 2018.
- Y. GUERBOUSSA. Fonction zêta de riemann et applications. [On mémoire. (49) :4–6, 2010.
- H. Rademacher E. Grosswald H. Rademacher. *Dedekind sums, The mathematical association of America.[onWashington]*. PhD thesis, 1972.
- H. Rademacher A.Whiteman H. Rademacher A.Whiteman. The reciprocity formula for dedekind sums, americal journal of mathematics. 63(2) :377–407, April-1941.
- V. Kowalenko. *Generalized cosecant numbers and the Hurwitz zeta function arXiv : 1702. 04090v1 [Math. NT]*. PhD thesis, 14 Feb. 2017.
- M. Goubi A. Bayad M. Goubi A. Bayad. Reciprocity formulae for generalized dedekind-vasyugin-cotangent sums.[ math. meth. appl. sci]. (55) :1–17, 2018.

- M. Goubi A. Bayad M.O. Hernane M. Goubi A. Bayad M. O. Hernane. Explicit and asymptotic formulae for vasyunin-cotangent sums.[publ. inst. math]. (300) :155–157, 2017.
- F. DE MARCAY. Analyse complexe. [On département de mathématique d'orsay, université paris-saclay, france]. (457) :271–279, 2010.
- L. J. Mordell. The reciprocity formula for dedekind sums, americal journal of mathematics. 63(3) :593–598, Jul-1951.
- P. Barrucand M. Deboue P. Barrucand M. Deboue. Fraction continues, sommes de dedekind et formes quadratiques,[onrend. circ. mat. palermo]. 33(1) : 62–84, 1984.
- H. Rademacher. Dedekind sums. page 7, 1963.
- V. Soto. Théorème des premiers et hypothèse de riemann.[universite' grenoble alpes]. (55) :2, 2018-2019.
- E. Tezena. Prolongement de la fonction zêta de riemann. [On agrégation. (8) : 1, 2018-2019.
- V.I. Vasyunin. On a biorthogonal system associated with the riemann hypothesis algebra i analiz. 7(3) :118–135, 1995.
- B. C. Berndt B. P. Yeap et B.C.Berndt B. P.Yeap B.Pin B. Pin. Explicit evaluations and reciprocity theorems for finite trigonometric sums, adv. appl. math. 29 (3) :358–385, 2002.
- D. ZAGIER. Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli. [On gaëtan bisson]. (14) :3–5, 2005-2006.

## ملخص

في هذا العمل، قدمنا دراسة للعلاقة بين مجموع ديدكين و الدالة زيتا  
 بعض التذكيرات على الجزء الكامل والجزء الكسري  
 أرقام برنولي و متعددة الحدود  
 دالة زيتا وإعادة الصياغة في كثيرات حدود برنولي ودالة جاما  
 في نهاية هذه المذكرة، لدينا هويرويتز زيتا، إعادة صياغة قانون المعاملة بالمثل للمبالغ  
 التامة كدالة التمام.

## Résumé

Dans ce travail, on a présenté une étude de la relation entre les sommes de Dedekind et la fonction zêta de Riemann.  
 Quelques rappels sur la partie entière et la partie fractionnaire  
 Les nombres et les polyômes de Bernoulli  
 La fonction zêta de Riemann et reformulation en polynômes de Bernoulli et la fonction Gamma  
 A la fin de ce memoire, on a la fonction de Huirwtiz, reformulation de la loi réciprocity pour les sommes de dedekind en fonction cotangente

## Abstract

in this work, we presented a study of the relationship between the dedekind sums and the Riemann zeta function  
 some remindes on the integer part and the fractional part  
 Bernoulli numbers and polyomials the Riemann zeta function and reformulation in Bernoulli  
 polynomials and the Gama function  
 At the and of this memory, we have the Huirwitz function, reformulation of the reciprocity law of the dedekind sums as a cotangent function.