

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERIE de Tizi-Ouzou



Faculté des sciences
Département de Mathématiques
MEMOIRE DE MASTER
Option : Recherche opérationnelle

*La résolution d'un problème Min -Max de fonctionnelle non
différentiable*

Réalisé par :

M^{elle} : Taous BENREJDAL

M^{elle} : Lilia AGHRI

Proposé et dirigé par :

M^{me} : TICHERFATINE SAMIRA

Devant le jury :

M^{me} TITOUCHE SALIHA : Maître de conférences classe B UMMTO.

M^{me} REZKI FARIZA : Maître assistant classe A.

Promotion : 2020/2021

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	3
1 Résolution d'un problème Min Max avec contraintes simples	7
1.1 Position du problème et définitions essentielles	8
1.2 Support plan	9
1.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle	11
1.4 Critère d'optimalité	13
1.5 Décomposition de la valeur de suboptimalité	14
1.6 Critère de suboptimalité	15
1.7 La résolution par la méthode adaptée	20
1.8 La résolution par la méthode duale	27
1.9 Exemple numérique	28
1.9.1 La résolution par la méthode adaptée	28
1.9.2 La résolution par la méthode duale :	35
2 Résolution d'un problème Min Max avec contraintes généralisées.	39
2.1 Position du problème et définitions essentielles	40
2.2 Support plan	41
2.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle	42
2.4 Critère d'optimalité	44
2.5 Critère de suboptimalité	44
2.6 Itération	46
2.7 Exemple numérique	50
2.7.1 La résolution par la méthode adaptée	51
2.7.2 La résolution par la méthode duale	57

3	Résolution d'un problème Min Max avec la methode du simplexe et comparaison.	60
3.1	Les étapes de l'algorithme du simplexe :	61
3.2	Résolution du programme linéaire :	62
3.2.1	Choix de la variable entrante :	62
3.2.2	Choix de la variable sortante :	62
3.2.3	Pivotage :	62
3.2.4	Critère d'arret :	62
3.3	Exemple numérique :	63
3.3.1	Comparaison entre la méthode adaptée et la méthode du Simplexe .	69
3.4	Conclusion générale	70
	Bibliographie	70

Remerciements

On tient à exprimer notre profonde gratitude a madame Ticherfatine Samira, notre directrice de mémoire, pour la confiance qu'elle nous a faite et pour ses aides et directives importantes tout au long de notre travail, ainsi que pour ces précieux conseils, patience et orientations.

Un immense merci à nos parents (Ahmed et Nacera AGHRI) ainsi que (Mouloud et Farida BENREJDAL), nos frères, et nos soeurs respectifs, ainsi que ma grand-mère (Feroudja) et mon défunt grand-père le chahid commandant AGHRI si moh said ouzeffoune, pour leur soutien inconditionnel et leur aide, vous étiez notre force tout au long de notre parcours

On remercie Tasaadith, Walid et Idir qui nous sont particulièrement chers ainsi que tout nos amis, nos collègues pour leur soutien et leurs encouragements.

Enfin à tous ceux qui nous ont soutenu de près ou de loin, a toute personne ayant apporté un plus positif sur nos chemins, a tout nos enseignants tout au long de notre cursus estudiantin. veuillez trouver ici le témoignage de nos très profondes grâtes.

“Le monde repose sur trois bases : l'étude, le travail, la charité.”

Introduction générale

La recherche opérationnelle (RO) est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis environs une décennie, les domaines d'application de la RO s'est élargi à divers champs comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RO a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public. La recherche opérationnelle est née pendant la Seconde Guerre mondiale des efforts conjugués d'éminents mathématiciens (dont von Neumann, Dantzig, Blackett) à qui il avait été demandé de fournir des techniques d'optimisation des ressources militaires. Le premier succès de cette approche a été obtenue en 1940 par le Prix Nobel de physique Patrick Blackett qui résolut un problème d'implantation optimale de radars de surveillance. A partir des années 50, la recherche opérationnelle fait son entrée dans les entreprises. La discipline commence à être enseignée dans les universités et les grandes écoles. Puis, au milieu des années 70, sans doute à cause d'un excès d'enthousiasme au départ et à l'inadéquation des moyens informatiques à l'application des méthodes de la RO, la discipline s'essouff. A partir du milieu des années 90, on assiste à un retour en force la RO, les outils informatiques étant maintenant à la hauteur des méthodes proposées par la recherche opérationnelle. On assiste depuis à une explosion du nombre de logiciels commerciaux et l'apparition de nombreuses boîtes de conseil. Si l'on cherche à trouver des précurseurs à la Recherche Opérationnelle, on peut penser à Alcuin ou à Euler qui se sont tous deux intéressés à des problèmes du type RO, bien qu'aucune application n'ait motivé leur travail. L'optimisation mathématique, également nommée «programmation mathématique» regroupe un ensemble de sujets

dans l'étude de problèmes d'optimisation. Une fonction objectif, parfois nommée critère, est donnée, et le problème consiste à trouver —caractériser— calculer un point minimisant (ou maximisant) cette fonction. Parfois, tous les points de l'espace sont candidats, parfois, des contraintes limitent le domaine de recherche.

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple, la main-d'œuvre, les matières premières, les capitaux, ... qui sont disponibles en quantité limitée et qu'on veut répartir d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication

Des algorithmes numériques performants ont été obtenus dans les années 1980 tel que l'algorithme de Karmarkar et la fonction Solveur du tableur Excel pour la solution des programmes linéaires.

tout au long de ce mémoire notre objectif est d'appliquer les principes de la méthode adaptée (conçus par R.Gabassov et F.M.Kirillova durant les années 80), à un problème de la forme Min Max de fonctionnelle non différentiable [7]. Comme on a introduit une nouvelle structure dite "support coordinateur "[2,7]. La particularité de cette méthode est le fait qu'elle permet le démarrage de l'itération à partir d'un point intérieur et permet l'obtention d'une solution ε -optimale avec une précision $\varepsilon \geq 0$ choisie à l'avance [1,3,4,5,11]. L'avantage réside aussi dans le fait qu'elle manipule les contraintes telles qu'elles se présentent sans chercher à les modifier, par conséquent on a un gain en temps de calcul et en espace mémoire, ce qui fait la comparaison avec la méthode de simplexe, la méthode duale, le principe de décomposition de Dantzig-Wolfe, les méthodes de point intérieur, etc [6,8].

Ce travail est constitué d'une introduction, d'une partie essentielle qui est le développement et d'une conclusion. La partie développement est consacrée à la résolution de problèmes Min Max de fonctionnelle non différentiable en programmation linéaire qui est répartie aussi en trois chapitres (la résolution d'un problème Min Max avec contraintes simples, avec contraintes généralisées et la partie comparaison des deux méthodes de résolution). En se basant sur le concept de la matrice support et le support coordonnateur de la méthode adaptée. Nous avons obtenu la formule d'accroissement de la fonctionnelle, ainsi que les deux critères d'optimalité et de suboptimalité, puis nous avons construit les itérations de l'algorithme de résolution. Cette méthode est illustrée par des exemples numériques.

Enfin, ce mémoire est clôturé par une conclusion générale et bibliographie.

Chapitre 1

Résolution d'un problème Min Max avec contraintes simples

Introduction

de nos jours, la théorie des problèmes Min Max est l'une des classes les plus développées en optimisation non différentiable, qui est un secteur très vif et objet de maintes recherches. Les problèmes Min Max sont connus entant qu'un des principes d'estimation de paramètre et d'approximation des problèmes de norme L_∞ .

L'approche traditionnelle et plus simple pour résoudre des problèmes Min Max est de les transformer en problèmes de programmation linéaire l'inconvénient avec cette méthode est qu'on obtient des problèmes à grand nombre de contraintes d'une part et d'autre part on perd la spécificité du Min Max. Pour ces raisons, on garde le problème sous sa forme originale et pour sa résolution on exploite les techniques de la méthode adaptée avec une nouvelle construction dite du "support coordinateur".

1.1 Position du problème et définitions essentielles

Considérons le problème Min Max en programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} f(x) = \max_{l \in L} |c_l^t x + d_l| \rightarrow \min_x \\ d_* \leq x \leq d^* \end{aligned} \quad (1.1)$$

où $x = x(J)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J) \in \mathbb{R}^n$; $c_l = c_l(J) \in \mathbb{R}^n$, $d_l \in \mathbb{R}$,

$$l \in L = \{1, 2, \dots, l^*\}, \quad J = \{1, 2, \dots, n\}$$

Définition 1

Tout vecteur x qui vérifie la contrainte $d_* \leq x \leq d^*$ est dit plan du problème (1.1).

Définition 2

Un plan x^0 est optimal s'il réalise le minimum de la fonction f du problème (1.1) c'est à dire $f(x^0) \leq f(x)$.

Définition 3

Un plan x^ε est dit ε -optimal ou bien suboptimal si $f(x^\varepsilon) - f(x^0) \leq \varepsilon$ du problème (1.1) ou x^0 est une solution optimal du problème (1.1) et ε est un nombre supérieur ou égal à zéro donnée.

Pour facilité les taches le problème (1.1) peut être écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} x_0 \rightarrow \min, \\ -x_0 \leq c_l^t x + d_l \leq x_0, \quad l \in L = \{1, 2, \dots, l^*\}; \\ d_* \leq x \leq d^*. \end{aligned} \quad (1.2)$$

En utilisant cette forme, on construit le support du problème (1.1) :

1.2 Support plan

De l'ensemble J , on choisit le sous-ensemble J_{sup} et posons $\bar{J}_{sup} = \{J_{sup}\} \cup \{0\}$
 $J_n = J \setminus J_{sup}$ et de l'ensemble L le sous-ensemble L_{sup} tel que $|L_{sup}| = |J_{sup}| + 1$.
On fait une subdivisions L_{sup} en deux sous-ensembles $L_{sup}^+ \subseteq L_{sup}$ et $L_{sup}^- = L_{sup} \setminus L_{sup}^+$.
Notons $e(L) = (e(l) = 1; l \in L)$, $L_n = L \setminus L_{sup}$.

Considérons la matrice $A_{sup} = A(L_{sup}, \bar{J}_{sup})$ définie par :

$$A_{sup} = \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J_{sup}) \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \end{bmatrix}$$

Calculons les vecteurs des potentiels $u(L) = (u(L_{sup}), u(L_n))$:

$$u^t(L_{sup}) = c_0^t(\bar{J}_{sup})A_{sup}^{-1} ; c_0 = (c_{00} = -1, c_{0j} = 0, j \in J_{sup}), u(L_n) = 0, \quad (1.3)$$

et des estimations $E(J)$:

$$E_j = u^t(L_{sup})c(L_{sup}, j), j \in J_n. \quad (1.4)$$

Par construction, on a :

$$E_j = 0, j \in J_{sup}; \sum_{l \in L_{sup}} |u_l| = 1. \quad (1.5)$$

Définition 4

La paire $k_{sup} = \{L_{sup}, \bar{J}_{sup}\}$ est dite support du problème (1.1) si $\det(A_{sup}) \neq 0$ et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$u(L_{sup}^-) \leq 0, u(L_{sup}^+) \geq 0.$$

Définition 5

La paire $\{x, K_{sup}\}$ formée du plan x du problème (1.1) et du support K_{sup} est dite support plan du problème (1.1).

Définition 6

Un support plan $\{x, K_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{aligned} d_{*j} < x_j < d_j^* & , j \in J_{sup} \\ |c_l^t x + d_l| < f(x) & , l \in L_n. \end{aligned}$$

Définition 7

Un support K_{sup} est dit support coordinateur associé au plan x si :

$$\begin{aligned} L_{sup}^+ & \subseteq L^+(x) = \{l \in L : c_l^t x + d_l = f(x)\}; \\ L_{sup}^- & \subseteq L^-(x) = \{l \in L : c_l^t x + d_l = -f(x)\}. \end{aligned}$$

Remarque 1

$$K_{sup} = \{L_{sup}, \bar{J}_{sup}\}, J_{sup} = \emptyset, L_{sup} = l_* \in L, \quad (1.6)$$

est un support du problème (1.1) , avec $u(L_{sup}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{sup}^+ = l_* , \\ -1 & \text{si } L_{sup}^- = l_* . \end{cases}$

1.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soient $\{x, K_{sup}\}$ un support plan du problème (1.1) et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan du problème (1.1).

Le plan x vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} c_l^t x - x_0 = w_l - d_l & , \quad l \in L_{sup}^+ , \\ c_l^t x + x_0 = w_l - d_l & , \quad l \in L_{sup}^- , \end{cases} \quad (1.7)$$

de même que le plan \bar{x} :

$$\begin{cases} c_l^t \bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l & , \quad l \in L_{sup}^+ , \\ c_l^t \bar{x} + \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l & , \quad l \in L_{sup}^- , \end{cases} \quad (1.8)$$

où $w(L_{sup}) = (w_l, l \in L_{sup})$, $\bar{w}(L_{sup}) = (\bar{w}_l, l \in L_{sup})$ sont des vecteurs d'écart tel que :

$$\bar{w}(L_{sup}) = w(L_{sup}) + \Delta w(L_{sup}) .$$

En vertu des formules (1.8) et (1.7) , on obtient :

$$\begin{cases} c_l^t \Delta x - \Delta x_0 = \Delta w_l & , \quad l \in L_{sup}^+ , \\ c_l^t \Delta x + \Delta x_0 = \Delta w_l & , \quad l \in L_{sup}^- , \end{cases}$$

De là on a :

$$\begin{cases} \Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l & ; \quad l \in L_{sup}^- , \\ -\Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l & ; \quad l \in L_{sup}^+ , \end{cases}$$

En développant les dernières équations , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x(J_{sup}) \end{pmatrix} = -A_{sup}^{-1} [c(L_{sup}, J_n) \Delta x(J_n) - \Delta w(L_{sup})] , \quad (1.9)$$

pour tous $\Delta x(J_n)$ et $\Delta w(L_{sup})$.

De la formule (1.9), résulte la formule de décroissance de la fonctionnelle du problème (1.1) suivante :

$$\Delta x_0 = \sum_{j \in J_n} E_j \Delta x_j - \sum_{l \in L_{sup}} u_l \Delta w_l . \quad (1.10)$$

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle :

$-\Delta f(x) = -[f(x + \Delta x) - f(x)] = -\Delta x_0$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j , & j \in J_n , \\ \Delta w_l \leq -w_l & , \quad l \in L_{sup}^+ , \\ \Delta w_l \geq -w_l & , \quad l \in L_{sup}^- , \end{cases} \quad (1.11)$$

est atteint pour :

$$\Delta x_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j & , \quad E_j > 0 , \\ d_j^* - x_j & , \quad E_j < 0 , \\ 0 & , \quad E_j = 0 , \quad j \in J_n , \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Delta w_l = \begin{cases} -w_l & , \quad l \in L_{sup}^+ , \\ -w_l & , \quad l \in L_{sup}^- , \end{cases}$$

et est égal à :

$$\begin{aligned} \beta(x, K_{sup}) = & \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_j^*) + \\ & \sum_{l \in L_{sup}^+} u_l (f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l (-f(x) - c_l^t x - d_l) \end{aligned} \quad (1.13)$$

appelée valeur de suboptimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

De là, on a toujours l'inégalité :

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \beta(x, K_{sup}) , \quad \forall \bar{x} . \quad (1.14)$$

De cette inégalité, on déduit le critère suivant .

1.4 Critère d'optimalité

Théorème 1 [7]

Soit x un plan du problème (1.1), K_{sup} un support coordonateur associé à x .

Les relations :

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & , \text{ si } E_j > 0 ; \\ x_j = d_j^* & , \text{ si } E_j < 0 ; \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & , \text{ si } E_j = 0 , j \in J_n, \end{cases} \quad (1.15)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

Preuve

i) Condition suffisante

Soient x un plan du problème (1.1), K_{sup} un support coordonateur associé à x et $\bar{x} = x + \Delta x$ un nouveau plan du problème (1.1).

Si les relations (1.15) sont vérifiées alors de (13) on a $\beta(x, K_{sup}) = 0$.

Comme $-\Delta f(x) \leq \beta(x, K_{sup})$, alors $-(f(\bar{x}) - f(x)) \leq 0$, pour tout \bar{x} .

D'où $f(\bar{x}) \geq f(x)$, pour tout \bar{x} , ce qui implique que $\{x, K_{sup}\}$ est un support plan optimal.

ii) Condition nécessaire

On va procéder par absurde :

Soit $\{x, K_{sup}\}$ un support plan optimal non dégénéré et supposons que les relations (1.15) ne soient pas vérifiées, c'est à dire : $\exists j_0 \in J_n$ tel que :

$$\begin{cases} x_{j_0} \neq d_{j_0}^* \text{ et } E_{j_0} < 0 ; \\ \text{ou} \\ x_{j_0} \neq d_{*j_0} \text{ et } E_{j_0} > 0 . \end{cases}$$

Construisons le nouveau plan $\bar{x} = x + \Delta x$.

Pour cela posons :

$$\begin{cases} \Delta x_{j_0} = -\text{sign}E_{j_0} , \\ \Delta x_j = 0 & ; j \in J_n \setminus j_0 , \\ \Delta w_l = 0 & ; l \in L_{sup} . \end{cases} \quad (1.16)$$

Les composantes Δx_j , $j \in J_{sup}$ et le nombre Δx_0 sont définis par le système d'équation (1.9) .

Comme $\{x, K_{sup}\}$ est un support plan non dégénéré , alors : $\exists \theta > 0$ tel que $\bar{x} = x + \theta \Delta x$ soit aussi un plan pour le problème (1.1) .

Et par suite : $f(\bar{x}) = f(x) + \theta \Delta x_0$.

On remplace Δx par sa valeur trouvée dans (1.16) , on obtient :

$$f(x + \Delta x) = f(x) - \theta |E_{j_0}| .$$

Donc : $f(\bar{x}) < f(x)$, ceci contredit l'optimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

C.Q.F.D.

1.5 Décomposition de la valeur de suboptimalité

Construisons le problème dual du problème (1.1) :

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= d^t \gamma + d_*^t v - d^{*t} w \rightarrow \max , \\ c^t \gamma - v + w &= 0 , \\ v \geq 0 , \quad w \geq 0 , \quad \sum_{l \in L} |\gamma_l| &= 1 , \end{aligned} \quad (1.17)$$

où $c = \begin{pmatrix} c_l^t(J) , \\ l \in L \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\lambda = (\gamma, v, w)$ construit avec le support K_{sup} du problème (1.1) et vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \gamma(L) = u(L) ; \\ v_j = E_j , \quad w_j = 0 , \quad \text{si } E_j \geq 0 , \\ v_j = 0 , \quad w_j = -E_j , \quad \text{si } E_j < 0 , j \in J , \end{cases} \quad (1.18)$$

est un plan dual .

Les relations (1.6) et (1.18) nous donnent :

$$\begin{aligned} \beta(x, K_{sup}) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_j^*) + \\ &\quad \sum_{l \in L_{sup}^+} u_l (f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l (-f(x) - c_l^t x - d_l) \\ &= E^t x - v^t d_* + w^t d^* + f(x) - E^t x - u^t d \\ &= f(x) - u^t d - v^t d_* + w^t d^* \\ &= f(x) - \phi(\lambda) \\ &= f(x) - f(x^0) + \phi(\lambda^0) - \phi(\lambda) \\ &= \beta(x) + \beta(K_{sup}), \end{aligned}$$

où λ^0 : est le plan dual optimal et x^0 le plan primal optimal du problème (1.1) .

$\beta(x) = f(x) - f(x^0)$: est la mesure de non optimalité du plan x .

$\beta(K_{sup}) = \phi(\lambda^0) - \phi(\lambda)$:est la mesure de non optimalité du support K_{sup} .

1.6 Critère de suboptimalité

Théorème 2 [7]

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné . Le plan x du problème (1.1) est ε -optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel : $\beta(x, K_{sup}) \leq \varepsilon$.

preuve

Condition suffisante :

Soient $\{x, K_{sup}\}$ un support plan du problème (1.1) pour lequel $\beta(x, K_{sup}) \leq \varepsilon$ et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan du problème (1.1).

On a : $f(\bar{x}) - f(x) \geq -\beta(x, K_{sup}) \geq -\varepsilon$, pour tout \bar{x} .

Par consequant, pour $\bar{x} = x^0$, on aura : $f(x^0) - f(x) \geq -\varepsilon$,

d'où : $f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon$.

Donc x est ε -optimal.

Condition nécessaire :

Soit x un plan ε -optimal du problème (1.1), c'est à dire : $f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon$.

Si on prend un support \tilde{K}_{sup}^0 correspondant au plan dual optimal $\tilde{\lambda}^0$, on aura :

$$\beta(\tilde{K}_{sup}^0) = \phi(\tilde{\lambda}^0) - \phi(\lambda) = 0,$$

et par consequant de la décomposition de β , on obtient : $\beta(x, \tilde{K}_{sup}^0) = f(x) - f(x^0) \leq \varepsilon$.

Montrons qu'on peut construire un tel support :

Soit $\lambda^0 = (\gamma^0, v^0, w^0)$ un plan dual optimal.

Notons $L_0 = \{l \in L : \gamma_l^0 = 0\}$; $L_{sup} = L \setminus L_0$;

$$L_{sup}^+ = \{l \in L : \gamma_l^0 > 0\} \quad ; \quad L_{sup}^- = L_{sup} \setminus L_{sup}^+ ;$$

$$J_0 = \{j \in J : E_j^0 = c^t(L, j)\gamma^0 = 0\} \quad ; \quad J_n = J \setminus J_0.$$

.1^{er} cas :

Supposons que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J), \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \end{bmatrix} = |L_{sup}|. \quad (1.19)$$

Considérons l'ensemble d'indices J_{sup} ($J_{sup} \subseteq J_0$) qui contient un nombre maximum d'indices et correspondant aux vecteurs linéairement indépendants :

$$(e(L_{sup}^-), -e(L_{sup}^+))^t ; c(L_{sup}, j) , j \in J_{sup} .$$

. Si $|J_{sup}| + 1 = |L_{sup}|$ alors :

la paire $\tilde{K}_{sup}^0 = \{L_{sup}, J_{sup}\}$ est un support correspondant au plan dual optimal $\tilde{\lambda}^0 = \lambda^0$.

. Si $|J_{sup}| + 1 < |L_{sup}|$ alors :

D'après la dépendance linéaire dans les colonnes $(e(L_{sup}^-), e(L_{sup}^+))^t ; c(L_{sup}, j) , j \in J_0$:

$\exists \Delta \gamma(L_{sup}) \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \gamma^t(L_{sup})c(L_{sup}, J_0) = 0 ; \\ e^t(L_{sup}^+) \Delta \gamma(L_{sup}^+) - e^t(L_{sup}^-) \Delta \gamma(L_{sup}^-) = 0 . \end{cases}$$

D'autre part, d'après (1.19) on a :

$$\Delta \gamma^t(L_{sup})c(L_{sup}, J_n) \neq 0 .$$

Posons $\Delta \gamma(L_0) \equiv 0$, d'où :

$$\delta(J_0) = \Delta \gamma^t(L)c(L, J_0) \equiv 0 ;$$

(1.20)

$$\delta(J_n) = \Delta \gamma^t(L)c(L, J_n) \neq 0 .$$

Calculons $\sigma_0 = \min\{\sigma_{l_0}, \sigma_{j_0}\}$ avec :

$$\sigma_{l_0} = \min_{l \in L_{sup}} \sigma_l , \sigma_l = \begin{cases} -\gamma_l^0 / \Delta \gamma_l & \text{si } \Delta \gamma_l < 0 , l \in L_{sup}^+ ; \\ -\gamma_l^0 / \Delta \gamma_l & \text{si } \Delta \gamma_l > 0 , l \in L_{sup}^- ; \\ \infty & \text{dans les autres cas , } l \in L_{sup} . \end{cases}$$

(1.21)

$$\sigma_{j_0} = \min_{j \in J_n} \sigma_j , \sigma_j = \begin{cases} -E_j^0 / \delta_j & \text{si } E_j^0 \delta_j < 0 ; \\ \infty & \text{si non , } j \in J_n , \end{cases}$$

où δ est calculé d'après (1.20) .

Calculons $\bar{\gamma}^0 = \gamma^0 + \sigma_0 \Delta \gamma$

$$\bar{E}^0 = E^0 + \sigma_0 \delta$$

Notons $\bar{\lambda}^0$ le nouveau plan dual optimal du problème dual (1.17) .

-Si $\sigma_0 = \sigma_{l_0}$: Posons $\bar{L}_{sup} = L_{sup} \setminus l_0$ et définissons l'ensemble \bar{J}_{sup} ,

avec la même méthode que précédemment .

-Si $\sigma_0 = \sigma_{j_0}$: Posons $\bar{L}_{sup} = L_{sup}$; $\bar{J}_0 = J_0 \cup j_0$; $\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup j_0$.

Comme $\delta_{j_0} \neq 0$ alors les vecteurs $(e(\bar{L}_{sup}^-), -e(\bar{L}_{sup}^+))^t$; $c(\bar{L}_{sup}, j)$, $j \in \bar{J}_{sup}$ sont linéairement indépendants .

.2^{eme} cas :

La relation (1.19) n'est pas vérifiée , c'est à dire :

$$rang \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J) \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \end{bmatrix} < |L_{sup}| .$$

Alors : $\exists \Delta \gamma(L_{sup}) \neq 0$ tel que

$$\begin{cases} \Delta \gamma^t(L_{sup})c(L_{sup}, J) = 0 ; \\ e^t(L_{sup}^+) \Delta \gamma(L_{sup}^+) - e^t(L_{sup}^-) \Delta \gamma(L_{sup}^-) = 0 . \end{cases}$$

Posons $\Delta \gamma(L_0) \equiv 0$, on aura :

$$\delta(J) = \Delta \gamma^t(L)c(L, J) \equiv 0$$

Avec les relations (1.21) , on calcule σ_{l_0} et on construit les nouveaux ensembles $\bar{L}_0 = L_0 \cup l_0$, $\bar{L}_{sup} = L_{sup} \setminus l_0$ et le nouveau plan dual optimal $\bar{\lambda}^0$ du problème (1.17) correspondant , avec $\bar{\gamma}^0 = \gamma^0 + \sigma_{l_0} \Delta \gamma$ et $\bar{E}^0 = E^0$.

Montrons que le processus de construction du support \tilde{K}_{sup}^0 est fini :

Comme le cardinal de l'ensemble L_{sup} n'augmente pas, alors deux cas sont possibles :

1. Pour certaines itérations : $|L_{sup}| = 1$ correspondant à construire le support vide $\tilde{K}_{sup}^0 = \{L_{sup}, J_{sup}\}$, $J_{sup} = \emptyset$.
2. La structure de l'ensemble L_{sup} est fixée après un nombre fini d'itération . Dans ce cas , on conduit le processus d'une façon à augmenter l'ensemble J_{sup} jusqu'à ce que le support $\tilde{K}_{sup}^0 = \{L_{sup}, J_{sup}\}$ avec $|L_{sup}| = |J_{sup}| + 1$ est construit .

Finalement , on peut construire le support \tilde{K}_{sup}^0 correspondant au plan dual optimal .

C.Q.F.D.

Corollaire 1

Le plan x du problème (1.1) est optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel :

$$\beta(x, K_{sup}) = 0 . \quad (1.22)$$

Remarque 2 :

L'équation (1.22) est vraie si et seulement si les relations (1.15) ont lieu et K_{sup} est un support coordinateur associé au plan optimal x .

Si le critère d'optimalité et de suboptimalité ne sont pas vérifiés alors on passe à l'itération de l'algorithme qui est constituée de deux procédures :

- Changement de plan
- Changement de support .

1.7 La résolution par la méthode adaptée

1.7.1 Changement de plan ($x \rightsquigarrow \bar{x}$)

Construisons tout d'abord le pseudo-plan κ associé au support K_{sup} par les relations suivantes :

$$\kappa_j = \begin{cases} d_{*j} & \text{si } E_j \geq 0 \text{ ,} \\ d_j^* & \text{si } E_j < 0 \text{ ,} \end{cases} \quad j \in J_n \text{ ;}$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(J_{sup}) \end{pmatrix} = -A_{sup}^{-1}(c(L_{sup}, J_n)\kappa(J_n) + d(L_{sup}))$$

a/ Si les relations :

$$\begin{aligned} d_{*j} &\leq \kappa_j \leq d_j^* \quad , \quad j \in J_{sup} \text{ ;} \\ |c_l^t \kappa + d_l| &\leq \kappa_0 \quad , \quad l \in L_n \text{ ;} \\ \kappa_0 &\geq 0 \quad \text{si } L_n = \text{ ,} \end{aligned} \tag{1.23}$$

sont vérifiées alors κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0$.

b/ Si les relations (1.23) ne sont pas vérifiées alors :

Construisons la direction $q \in \mathbb{R}^n$ (pour améliorer le plan x) comme suit :

$$q = \kappa - x \tag{1.24}$$

La fonction objectif du problème (1.1) diminue le long de la direction q car :

$$\partial f(x)/\partial q = -\beta(x, K_{sup}) < -\epsilon \text{ .}$$

Par conséquent , d'après le principe de diminution de la non optimalité du plan x , on va construire le nouveau plan \bar{x} par la relation :

$$\bar{x} = x + \theta q \text{ ,}$$

où $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$ est un long pas (pas important) , tel que :

- . 1 est le pas , en tenant compte des contraintes de non-support .
- . θ_{j_0} est le pas , en tenant compte des contraintes de support .
- . θ_f est le pas , en tenant compte des contraintes obtenues à partir de la fonction objectif.

Les différents pas sont obtenus par les formules suivantes :

$$\theta_{j_0} = \min \theta_j , j \in J_{sup} \quad ; \quad \theta_j = \begin{cases} (d_{*j} - x_j)/q_j & \text{si } q_j < 0 , \\ (d_j^* - x_j)/q_j & \text{si } q_j > 0 , \\ \infty & \text{si } q_j = 0 , \end{cases} j \in J_{sup} .$$

$$\theta_f = \min\{\theta_0 , \theta_{l_0}\} \quad ; \quad \theta_0 = f(x)/\beta(x, K_{sup}) \quad , \quad \theta_{l_0} = \min\{\theta_l^+ , \theta_l^-\} \quad , \quad l \in L_n \quad ; \quad (1.25)$$

$$\theta_l^+ = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l + x_0)/(c_l^t q + \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q + \beta(x, K_{sup}) > 0 \quad ; \\ \infty & \text{si non} \end{cases} , \quad l \in L_n .$$

$$\theta_l^- = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l - x_0)/(c_l^t q - \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q - \beta(x, K_{sup}) < 0 \quad , \\ \infty & \text{si non} \end{cases} , \quad l \in L_n .$$

En utilisant le nouveau plan $\bar{x} = x + \theta q$ du problème (1.1) , on calcule la valeur de suboptimalité du support plan $\{\bar{x}, K_{sup}\}$:

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, K_{sup}) &= \sum_{j \in J_n, E_j > 0} E_j (\bar{x}_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_n, E_j < 0} (\bar{x}_j - d_j^*) - \sum_{l \in L_{sup}} u_l w_l \\ &= \beta(x, K_{sup}) + \theta \sum_{j \in J_n} E_j q_j \end{aligned}$$

En remplaçant les q_j par leurs valeurs données par les formules (1.24) , on obtient :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}).$$

Si le support plan $\{x, K_{sup}\}$ est non dégénéré , alors $\theta > 0$ et par conséquent :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) < \beta(x, K_{sup}).$$

Du calcul de θ , on a les différents cas suivants :

.1^{er} cas : $\theta = \theta_0$, alors $\bar{x} = x + \theta q$ est optimal et $f(\bar{x}) = 0$

ou bien $\bar{x} = x + \theta q$ est epsilon-optimal et $f(\bar{x}) \leq \epsilon$.

.2^{eme} cas : $\theta = 1$, alors $\bar{x} = \kappa$ est optimal.

.3^{eme} cas : $(1-\theta)B(x, K_{sup}) > \epsilon$, alors On passe au changement du support.

1.7.2 Changement de support ($K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$)

Le changement de support $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$ entraine le changement de plan dual $\lambda \rightsquigarrow \bar{\lambda}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} u(\bar{L}) = u(L) + \sigma_0 t(L) ; \\ E(\bar{J}) = E(J) + \sigma_0 t(J) , \end{cases}$$

où le vecteur $t(J, L)$ est la direction d'augmentation de la fonction objectif duale et σ_0 est le pas dual maximal suivant cette direction.

Ce changement du support se fait en fonction de la valeur de θ , Pour cela on distingue les deux cas suivants :

a/ $\theta = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{sup}$:

Introduisons la valeur suivante :

$$\mu_* = \begin{cases} d_{*j_0} - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} < d_{*j_0} ; \\ d_{j_0}^* - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} > d_{j_0}^* , \end{cases} \quad (1.26)$$

et calculons la direction t :

Posons :

$$\begin{cases} t_{j_0} = \text{sign} \mu_* ; \\ t(J_{sup} \setminus j_0) = 0 ; \\ t(L_n) = 0 , \end{cases} \quad (1.27.1)$$

et de l'admissibilité de \bar{u} , \bar{E} on obtient :

$$\begin{cases} t^t(L_{sup}) = (0, t(J_{sup}))^t A_{sup} ; \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup}) c(L_{sup}, J_n) . \end{cases} \quad (1.27.2)$$

Calculons les pas σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$:

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j & \text{si } E_j t_j < 0 ; \\ 0 & \text{si } E_j = 0 , t_j > 0 , \kappa_j \neq d_{*j} , \text{ ou } E_j = 0 , t_j < 0 , \kappa_j \neq d_j^* ; \\ \infty & \text{dans les autres cas , } j \in j_n . \end{cases} \quad (1.28.1)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} -u_k/t_k & \text{si } t_k < 0 , k \in L_{sup}^+ ; \\ -u_k/t_k & \text{si } t_k > 0 , k \in L_{sup}^- ; \\ \infty & \text{dans les autres cas , } k \in L_{sup} . \end{cases} \quad (1.28.2)$$

Mettons σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$ dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2} \leq \dots \leq \sigma_{j_p} , \quad j_k \in \{J_n \cup L_{sup}\} .$$

Pour chaque j_k , nous calculons le saut de la fonction objectif duale :

$$\Delta \mu_k = -|t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) .$$

La fonction objectif duale se comporte selon la direction t comme une fonction concave, continue, linéaire par morceaux et leurs pentes sur les intervalles $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ sont égales à :

$$\begin{cases} \mu_k = \mu_{k-1} - |t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) , & k = 1, \dots, \bar{p} ; \\ \mu_0 = |\mu_*| , \end{cases} \quad (1.29)$$

où $\bar{p} \leq p$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{p} = p & \text{si } j_k \in J_n , \quad \forall i = \overline{1, \bar{p}} ; \\ \text{ou bien} \\ \bar{p} < p & \text{si } j_{\bar{p}+1} \in L_{sup} . \end{cases}$$

Remarque 3 :

μ_0 est le taux (la vitesse initiale) de changement initial de la fonction objectif duale. Il intervient dans l'expression de $\beta(\bar{x}, K_{sup})$ quand on passe du vecteurs $E(J)$, $u(L)$ au nouveaux vecteurs $\bar{E}(J) = E(J) + \sigma^{(1)}t(J)$, $\bar{u}(L) = u(L) + \sigma^{(1)}t(L)$ comme suit :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) &= \sum_{j \in j_n, E_j > 0} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_n, E_j < 0} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_j^*) - \sum_{l \in L_{sup}} \bar{u}_l \bar{w}_l \\ &= \beta(\bar{x}, K_{sup}) + \sigma^{(1)} \left[\sum_{j \in J_n, E_j > 0} t_j(\bar{x}_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_n, E_j < 0} t_j(\bar{x}_j - d_j^*) - \sum_{l \in L_{sup}} t_l \bar{w}_l \right] \\ &= \beta(\bar{x}, K_{sup}) - \sigma^{(1)} |\mu_*| = (1 - \theta) \beta(x, K_{sup}) - \sigma^{(1)} \mu_0 \end{aligned}$$

On continue le mouvement suivant la direction t jusqu'à ce que la fonction objectif du dual atteigne son maximum .

1- Si $\mu_{\bar{p}} > 0$, alors $\bar{p} < p$. De là posons $\sigma_0 = \sigma_{j_{\bar{p}+1}}$, $s_0 = j_{\bar{p}+1}$, $s = \bar{p} + 1$.

2- Si $\mu_{\bar{p}} \leq 0$, alors on va trouver un indice ν , $0 < \nu \leq \bar{p}$ tel que $\mu_{\nu-1} \geq 0$ et $\mu_\nu < 0$. Posons $\sigma_0 = \sigma_\nu$, $s_0 = j_\nu$, $s = \nu$.

L'itération se termine par la construction des nouveaux vecteurs :

$$\begin{cases} \bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0 t(J) & ; \\ \bar{u}(L) = u(L) + \sigma_0 t(L) & . \end{cases} \quad (1.30)$$

et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$: $\bar{J}_{sup} = \{0\} \cup \bar{J}_{sup}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \setminus j_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \setminus s_0 , \end{cases} \text{ si } s_0 \in L_{sup} , \quad , \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup s_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} , \end{cases} \text{ si } s_0 \in J_n .$$

b/ $\theta = \theta_{l_0}$, $l_0 \in L_n$:

Calculons :

$$\mu_* = \begin{cases} -\kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+ ; \\ \kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^- , \end{cases} \quad (1.31)$$

et posons :

$$\begin{cases} t_{l_0} = \text{sign} \mu_* ; \\ t(L_n \setminus l_0) = 0 ; \\ t(J_{sup}) = 0 , \end{cases} \quad (1.32.1)$$

de l'admissibilité de \bar{u} et \bar{E} , on obtient :

$$\begin{cases} t^t(L_{sup}) = (1, -t_{l_0} c_{l_0}^t(J_{sup})) A_{sup}^{-1} , \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup}) c(L_{sup}, J_n) + t_{l_0} c_{l_0}^t(J_n) . \end{cases} \quad (1.32.2)$$

On applique la même méthode utilisée en (a) pour trouver l'indice s_0 et le pas σ_0 . L'itération se termine avec la construction des vecteurs $\bar{E}(J)$, $\bar{u}(L)$ définis par la formule (1.30) et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$: $\bar{J}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup}, \\ \bar{L}_{sup} = (L_{sup} \setminus s_0) \cup l_0, \end{cases} \text{ si } s_0 \in L_{sup}, \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup s_0, \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \cup l_0, \end{cases} \text{ si } s_0 \in J_n,$$

tel que :

$$\begin{cases} l_0 \in \bar{L}_{sup}^+ & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+; \\ l_0 \in \bar{L}_{sup}^- & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^-, \end{cases}$$

Par construction le nouveau support est un support coordinateur associé au plan \bar{x} et la valeur de la suboptimalité au support plan $\{\bar{x}, \bar{K}_{sup}\}$ est donnée par la formule :

$$\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}) - \sum_{k=0}^{s-1} \mu_k (\sigma_{j_{k+1}} - \sigma_{j_k}), \quad \sigma_{j_0} = 0.$$

Définition 8

Un support K_{sup} est dit non dégénéré si :

$$\begin{cases} E_j \neq 0, & j \in J_n; \\ u_l \neq 0, & l \in L_{sup}. \end{cases}$$

Remarque 4

Il est clair que dans le cas de la non dégénérescence du support K_{sup} , la mesure de non optimalité du support K_{sup} diminue avec le changement $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$.

Théorème 3 [7]

Si à chaque itération, le support est non dégénéré alors la méthode est finie.

Preuve :

Comme le support est non dégénéré c'est à dire :

$$\begin{cases} E_j \neq 0, & j \in J_n; \\ u_l \neq 0, & l \in L_{sup}. \end{cases}$$

Alors les formules (1.28.1),(1.28.2) nous donnent le pas $\sigma_0 \neq 0$ et ceci entraîne :

$$\begin{aligned} E(\bar{J}) &= E(J) + \sigma_0 t(J) \neq E(J) ; \\ u(\bar{L}) &= u(L) + \sigma_0 t(L) \neq u(L) . \end{aligned}$$

D'où $\bar{\lambda} \neq \lambda$, $\bar{K}_{sup} \neq K_{sup}$ et ceci pour chaque itération . Donc le nombre d'itérations pour construire le plan dual λ^0 ainsi le support K_{sup}^0 est fini . Par conséquent le nombre de support est fini . De plus le plan dual optimal λ^0 est basique , non dégénéré et unique . D'après la théorie de la dualité , K_{sup}^0 défini une solution basique κ^0 optimale et il ne reste qu'une seule itération d'un pas $\theta = 1$ pour l'algorithme . Comme ça , on a montré d'après le théorème qu'on a besoin d'un nombre fini d'itérations pour résoudre le problème (1.1).

1.8 La résolution par la méthode duale

Dans la théorie constructive des problèmes linéaires , la méthode duale joue un rôle important . Elle permet d'une part de résoudre des problèmes qui n'ayant pas d'information sur les solutions réalisables et d'autre part, elle nous donne l'estimation des solutions des problèmes avec des paramètres perturbés .

Le but de la méthode est de construire une solution optimale par construction d'un support K_{sup} à chaque itération (le changement $K_{sup} \rightsquigarrow \overline{K}_{sup}$ est dit une itération de la méthode duale) .

On prend comme support initial le support vide (1.6) .

On construit la pseudo-solution κ et $\kappa_0 = f(\kappa)$ accompagnées .

- Si les relations (1.23) sont vérifiées , alors la méthode se termine et la pseudo-solution κ est optimale pour le problème (1.1) .
- Le cas : $\kappa_0 < 0$, $L_n =$, où le plan κ du problème (1.1) est considéré dégénéré. Il indique que la valeur optimale de la fonction objectif en (1) est probable d'être égale à zéro et n'est pas considérée dans notre travail .
- Si non, on calcule le nombre $\mu = \max_{j,l} \{|\mu_j|, |\mu_l|\}$ tel que : $|\mu_l| = \max_l \{|\mu_l^+|, |\mu_l^-|\}$,

$$\mu_j = \begin{cases} d_{*j} - \kappa_j & \text{si } \kappa_j < d_{*j} \ ; \\ d_j^* - \kappa_j & \text{si } \kappa_j > d_j^* \ ; \\ 0 & \text{dans les autres cas , } j \in J_{sup} \ . \end{cases}$$

$$\mu_l^+ = \begin{cases} -\kappa_0 + c_l^t \kappa + d_l & \text{si } c_l^t \kappa + d_l > \kappa_0 \ ; \\ 0 & \text{dans les autres cas , } l \in L_n \ . \end{cases}$$

$$\mu_l^- = \begin{cases} \kappa_0 + c_l^t \kappa + d_l & \text{si } c_l^t \kappa + d_l < -\kappa_0 \ ; \\ 0 & \text{dans les autres cas , } l \in L_n \ . \end{cases}$$

Deux situations sont possibles :

1. $\mu = |\mu_{j_0}|$, $j_0 \in J_{sup}$;
2. $\mu = |\mu_{l_0}|$, $l_0 \in L_n$.

Dans le 1^{er} cas , on suit les règles de la situation : $\theta = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{sup}$, dans la deuxième procédure de la méthode adaptée (changement de support).

Dans le 2^{eme} cas , on suit les règles de la situation : $\theta = \theta_{l_0}$, $l \in L_n$, toujours dans la deuxième procédure de la méthode adaptée .

Théorème 4 [7]

Si à chaque itération , le support est non dégénéré alors la méthode décrite est finie .

Preuve

Elle est analogue avec la preuve du Théorème 3 précédent .

1.9 Exemple numérique

$$\max(|2x_1 - 2x_2 + x_3|, |x_1 + 4x_2 - x_3 - 3|, |x_1 - x_2 - x_3 + 2|) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$-1 \leq x_1 \leq 3, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1.$$

1.9.1 La résolution par la méthode adaptée

La première itération :

On pose $x=(0,0,0)$, un plan de départ du problème (1.1) et $K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}$ est le support coordinateur associé à x tel que :

$$\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}, \quad J_{sup} = \emptyset, \quad J_n = \{1, 2, 3\}, \quad L_{sup} = \{1, 3\}.$$

sachant que $|L_{sup}| = |J_{sup}| + 1$, derterminons L_{sup} :

$$\max_{i \in \{1, 2, 3\}} f_i(x) = f_2(x) = |-3| = 3, \quad \text{c-à-d } L_{sup} = 2 = L_{sup}^- \text{ et } L_{sup}^+ = \emptyset,$$

$$L_n = L = \{1, 3\} , J_n = \{1, 2, 3\}$$

Calcul des vecteurs des potentiels :

$$\text{On a } u(L_n) = (u(1), u(3)) = (0, 0) \text{ et } u(L_{sup}) = u(2) = -1 \times 1 = -1 .$$

$$\text{donc } u(L) = (0, -1, 0) .$$

Calcul des vecteurs des estimations :

$$E_j = u^t(L_{sup})c(L_{sup}, j) , j \in J_n = \{1, 2, 3\} ,$$

$$E_1 = -1 \times 1 = -1 , E_2 = -1 \times 4 = -4 , E_3 = -1 \times -1 = 1 .$$

$$\text{donc } E(J_n) = (-1, -4, 1) , \text{ avec } J_n \in \{1, 2, 3\} .$$

Calcul de la valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, K_{sup}) = E_3(x_3 - d_{*3}) + E_1(x_1 - d_1^*) + E_2(x_2 - d_2^*) = 8 > \epsilon \text{ (}\epsilon \text{ donné)} , \text{ donc}$$

le support plan $\beta(x, K_{sup})$ n'est pas optimal .

Changement de plan : $(x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta q)$

Construisons un pseudo-plan κ

$$\kappa(J_n) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) , J_n = \{1, 2, 3\} ; \text{ on a } E_1 < 0 , E_2 < 0 , E_3 > 0 \text{ donc}$$

$$\kappa_1 = 3 , \kappa_2 = 1 \text{ et } \kappa_3 = -1 .$$

$$\text{donc } \kappa(J_n) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (3, 1, -1).$$

Calculons κ_0 :

$$\kappa_0 = -[(1)(1, 4, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3] = -5$$

on a : $|c_1\kappa + d_1| = |3| \leq -5$ (fausse) et $|c_3\kappa + d_3| = |5| \leq -5$; (fausse) donc κ_0 ne vérifie pas les contraintes c-à-d κ n'est pas optimal.

On construit la direction "q" pour améliorer x comme suit :

$$q = \kappa - x = (3, 1, -1) - (0, 0, 0) = (3, 1, -1) = q$$

On a $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$ et $J_{sup} = \emptyset$; donc : $\theta_f = \min\{\theta_0, \theta_{l_0}\}$ avec $l \in L_n$,

On a : $\theta_{l_0} = \min\{\theta_l^+, \theta_l^-\}$, $l \in L_n = \{1, 3\}$ Avec $\theta_1^+ = 3/11$, $\theta_1^- = 3/5$,
 $\theta_3^+ = 1/11$, $\theta_3^- = 1$. et $\theta_0 = 3/8$

Donc $\theta_{l_0} = \min\{3/11, 3/5, 1/11, 1\} = 1/11$, et $\theta = \theta_{l_0} = \theta_3^+ = 1/11$.

Donc $\bar{x} = (0, 0, 0) + 1/11(3, 1, -1) \implies \bar{x} = (3/11, 1/11, -1/11)$.

et $\beta(\bar{x}, K_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}) = 80/11 > \epsilon$ (ϵ donné).

Donc $\beta(\bar{x}, K_{sup})$ n'est pas optimal.

Changement de support : $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$

On a :

$$\mu_* = -\kappa_0 + c_3^t \kappa + d_3 = 10; \text{ et } \begin{cases} t_{l_0} = t_3 = 1 \\ t_{L_n \setminus L_0} = t_1 = 0 \\ J_{sup} = \emptyset \end{cases} , \text{ donc } (t_1, t_3) = (0, 1); \{1, 3\} \in L_n.$$

$t^t(L_{sup}) = t(2) = 1$, $2 \in L_{sup}^-$,

$t^t(J_n) = (t_1, t_2, t_3) = (2, 3, -2)$, $\{1, 2, 3\} \in J_n$.

Calcul des σ_j , $J \in J_n$ et σ_k , $k \in L_{sup}$.

On a :

$$E_1 t_1 = -2 < 0 \implies \sigma_1 = -E_1/t_1 = 1/2$$

$$E_2 t_2 = -12 < 0 \implies \sigma_2 = -E_2/t_2 = 4/3$$

$$E_3 t_3 = -2 < 0 \implies \sigma_3 = -E_3/t_3 = 1/2 , 1, 2, 3 \in J_n.$$

On a : $L_{sup} = 2$; $2 \in L_{sup}$, $t_2 = 1 > 0 \implies \sigma_2 = 1$.

Ordre croissant des σ :

On a $1/2 \leq 1/2 \leq 1 \leq 4/3$, posons donc $1/2 = \sigma_{j_1}$, $1/2 = \sigma_{j_2}$, $1/2 = \sigma_{j_3}$, $1/2 = \sigma_{j_4}$.

Calcul du saut de la fonction objectif duale $\Delta\mu_k$:

$$\Delta\mu_k = -|t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) , k = 1, \dots, \bar{p} \text{ et } \bar{p} = 2 .$$

$$\Delta\mu_1 = -8 .$$

$$\Delta\mu_2 = -4 . \text{ Donc } \Delta\mu_k = (-8, -4).$$

et $\mu_k = (2, -2) = (\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_0 = |\mu_*| = 10$.

On pose $s_0 = 3$, $3 \in J_n$ et $\sigma_{s_0} = \sigma = 1/2$, $v = 2$ et $s_0 = j_v = j_2$.

Donc on termine par le nouveau support $\overline{K}_{sup} = \{\overline{J}_{sup}, \overline{L}_{sup}\}$ avec

$$\overline{J}_{sup} = \{0\} \cup \overline{J}_{sup}, \{\overline{J}_{sup}\} = J_{sup} \cup s_0 = \emptyset \cup J_2$$

$$\text{donc } \overline{J}_{sup} = \{3\}, \overline{L}_{sup} = L_{sup} \cup l_0 = \{2, 3\}, \quad 3 \in L_{sup}^+ .$$

La deuxième itération : Changement de plan $\overline{x} \rightsquigarrow \overline{\overline{x}}$

Calcul des vecteurs d'estimations :

$$E(\overline{J}_n) = (E_1, E_2), E(\overline{J}_{sup}) = E_3 = 0$$

$$E_1 = 0, E_2 = -5/2$$

$$\overline{E}(\overline{J}_n) = (0, -5/2), \quad \overline{J}_n = \{1, 2\}, \quad E(3) = 0, \quad 3 \in \overline{J}_{sup}.$$

Calcul des vecteurs des potentiels :

$$\overline{\mu}(L) = (0, -1/2, 1/2). \text{ ainsi : } \beta(\overline{x}, \overline{K}_{sup}) = \beta(\overline{x}, K_{sup}) - \sum_{k=0}^{S-1} \mu_k (\sigma_{j_{k-1}} - \sigma_{j_k}), \text{ avec}$$

$$\sigma_{j_0} = 0, S = 2,$$

$$\beta(\overline{x}, \overline{K}_{sup}) = 25/11 > \epsilon, \quad \epsilon \text{ donné}$$

Donc $\{\overline{x}, \overline{K}_{sup}\}$ n'est pas un support plan optimal, on passe donc au changement de plan.

construisons tout d'abord $\kappa(\overline{J}_n)$:

On a :

$$E_1 = 0 \geq 0 \text{ donc } \kappa_1 = -1$$

$$E_2 = -5/2 < 0 \text{ donc } \kappa_2 = 1$$

$$\text{donc : } \kappa(\overline{J}_n) = (\kappa_1, \kappa_2) = (-1, 1)$$

Calculons $\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\overline{J}_{sup}) \end{pmatrix}$:

$$\text{On a } A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2 \\ -1/2 - 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\overline{J}_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a pour $l = 1 \in L_n$: $|-4| = |c_1 x + d_1| = 4 \leq \kappa_0 = 0$ est faux donc κ n'est pas optimal.

Construisons la direction q :

$$\text{On a : } q = \kappa - \overline{x} = (-14/11, 10/11, 1/11).$$

Calcul du pas θ :

$\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$, tel que $\theta_f = \min\{\theta_0, \theta_{l_0}\} = \theta_1^- = 14/36 = 7/18$;

ainsi $\theta = \min\{1, 12/11, 7/18\} = 7/18 = \theta_1$, avec $1 \in L_n$

Calcul de la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup})$:

$$\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) = (1 - 7/18) 25/11 = 25/18 > \epsilon ,$$

Donc $\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup})$ n'est pas optimal, avec $\bar{x} = \bar{x} + \theta q$.

$$\bar{x} = (-22/99, 44/99, -1/18) .$$

Changement de support $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$:

Construisons la direction t et le pas σ :

On est dans le cas b) $\theta = \theta_{l_0} = \theta_1^- = 7/18$, $1 \in \bar{L}_n$

Calculons $\mu_* = -4$ et posons :
$$\begin{cases} t_{l_0} = t_1 = -1 \\ t(\bar{J}_{sup}) = t_3 = 0 / \bar{J}_{sup} = \{3\} \end{cases}$$

et on obtient :
$$\begin{cases} t^t(\bar{L}_{sup}) = (t_2, t_3) = (0, -1) \\ t^t(\bar{J}_n) = (t_1, t_2) = (-3, 3) \end{cases} .$$

et trouvons les indices s_0, s , et σ :

$$\sigma(J_n) = (0, 5/6) = (\sigma_1, \sigma_2) , \sigma(\bar{L}_{sup}) = (\sigma_2, \sigma_3) = (+\infty, 1/2) .$$

Mettons les dans l'ordre croissant : $0 \leq 1/2 \leq 5/6 \leq +\infty$,

posons :
$$\begin{cases} \sigma_{j_1} = 0 \rightsquigarrow \sigma_1 , 1 \in \bar{J}_n \\ \sigma_{j_2} = 1/2 \rightsquigarrow \sigma_3 , 3 \in \bar{L}_{sup} \\ \sigma_{j_3} = 5/6 \rightsquigarrow \sigma_2 , 2 \in \bar{J}_n \\ \sigma_{j_2} = \infty \rightsquigarrow \sigma_2 , 2 \in \bar{L}_{sup} \end{cases}$$

$$\Delta\mu_k = -12 = \Delta\mu_1 , k = 1, \dots, \bar{p} = 1 , \text{car } \bar{p} + 1 = 2 .$$

$$\mu_1 = -8 , \text{ avec } \mu_0 = |\mu_*| = 4 .$$

$\mu_{\bar{p}} = -8 \leq 0$, alors $v = 1$, $\sigma = \sigma_{j_1}$ correspond à $1 \in J_n$, $s_0 = j_1$ et $s = 1 = v$.

Alors : $\beta(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) = 100/72 = 25/18 > \epsilon$, (ϵ donné)

avec $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$, $\bar{J}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$, $\bar{J}_{sup} = \{3\} \cup \{1\} = \{1, 3\}$,

$\bar{L}_{sup} = \{1, 2, 3\}$, $1 \in L_{sup}^-$, $(\bar{J}_n = \{2\})$, $\bar{L}_n = \emptyset$.

La troisième itération : Changement de plan $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{\bar{x}} = \bar{x} + \theta q$

On a $E(\bar{J}_n) = E(J_n) + \sigma(\bar{J}_n) = -5/2 = \bar{\bar{E}}_2$, $2 \in \bar{J}_n$ et $\sigma = 0$.

$\mu(\bar{\bar{L}}) = \mu(L) + \sigma t(\bar{\bar{L}}) = (0, -1/2, 1/2) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $1, 2, 3 \in \bar{\bar{L}}_{sup}$

Donc $\kappa(J_n) = \kappa_2 = 1$, $2 \in J_n$

$$\text{On a : } A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & -1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\overline{\overline{J}}_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_3 \end{pmatrix}.$$

κ_0 ne verifie pas les relations (1.23), donc κ n'est pas optimal.

Calcul de la direction q :

$$q = \kappa - \overline{\overline{x}} = (55/99, 55/99, 25/18).$$

Calcul du pas θ :

$$\text{On a : } \theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$$

$$\text{tel que : } \theta_{j_0} = \min\{\theta_1, \theta_3\} = \min\{319/55, 19/25\}$$

$$\theta_{j_0} = 19/25 = \theta_3, 3 \in \overline{\overline{J}}_{sup}, \text{ et } \theta_0 = 1.$$

Dans le cas présent on a : $L_n = \emptyset$, donc on ne calcul pas θ_f ,

$$\text{Donc } \theta = \min\{1, \theta_3, \theta_0\} = \theta_3 = 19/25, 3 \in \overline{\overline{J}}_{sup}.$$

Calcul de la valeur de suboptimalité :

$$\beta(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{K}}_{sup}) = 1/3 > \epsilon, (\epsilon \text{ donné}).$$

Donc la solution n'est pas optimale, on passe au changement de support ;

Changement de support :

$$\text{On a : } \theta = \theta_{j_0} = \theta_3, \text{ et } \kappa_3 = 4/3 > 1, 3 \in \overline{\overline{J}}_{sup}$$

$$\text{Donc : } \mu_* = 1 - 4/3 = -1/3.$$

$$\text{Posons } \begin{cases} t_3 = -1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} t^t(L_{sup}) = (-1/2, 1/2, 1/6) = (t_1, t_2, t_3) \\ t(J_n) = t_2 = 5/2 \end{cases}.$$

Calculons les pas σ_j , $j \in \overline{\overline{J}}_n$:

$$\text{On a : } E_2 \times t_2 < 0 \implies \sigma_j = \sigma_2 = 1,$$

Calculons σ_k , $k \in \overline{\overline{L}}_{sup}$, avec $\overline{\overline{L}}_{sup} = \{1, 2, 3\}$;

$$\text{On a } t_1 < 0 \implies \sigma_1 = \infty, 1 \in \overline{\overline{L}}_{sup}^-, t_2 > 0 \implies \sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_3 = \infty, 3 \in \overline{\overline{L}}_{sup}^+$$

Calculons le saut de la fonction :

$$\Delta\mu_1 = -5$$

ainsi : $\mu_1 = -14/3 \leq 0$ donc $v = 1$ et $s_0 = j_v = j_1$

Le nouveau support est donc : $\overline{\overline{K}}_{sup} = \{\overline{\overline{J}}_{sup}, \overline{\overline{K}}_{sup}\}$ avec $\overline{\overline{J}}_{sup} = \overline{\overline{J}}_{sup} \cup \{0\}$, $\overline{\overline{J}}_{sup} = \{1, 3\}$
et $\overline{\overline{L}}_{sup} = \overline{\overline{L}}_{sup} = \{1, 2, 3\}$.

Calcul de la valeur de suboptimalité :

$$\beta(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{K}}_{sup}) = 1/3 - 1/3(1 - 0) = 0,$$

Donc $\{\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{K}}_{sup}\}$ est un support plan optimal du probleme (1)

Avec : $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} + \theta q = (-22/99, 44/99, -1/18) + 19/28(55/99, 55/99, 25/28)$

$$\overline{\overline{x}} = (-1/33, 7/11, 14/33).$$

1.9.2 La résolution par la méthode duale :

La première itération :

On prend comme support initial le support vide, :

$$K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\}, \text{ tel que } \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\}, J_{sup} = \emptyset \text{ et } L_{sup} = \{2\} = L_{sup}^-.$$

Calcul des vecteurs des potentiels $u(L_{sup})$ et $u(L_n)$:

$$A_{sup} = 1.$$

$$u(L_{sup}) = u(L_{sup}^-) = u_2 = -1, 2 \in L_{sup}^-$$

$$u(L_n) = (u_1, u_3) = (0, 0); 1, 3 \in L_n$$

Calcul des vecteurs d'estimations $E(J)$:

$$E(J_n) = (E_1, E_2, E_3) = (-1, -4, 1),$$

$$E(J_{sup}) = E(\emptyset) \quad \text{car } J_{sup} = \emptyset$$

Construction du pseudo plan κ :

On a :

$$E_1 = -1 < 0 \implies \kappa_1 = 3$$

$$E_2 = -4 < 0 \implies \kappa_2 = 1$$

$$E_3 = 1 > 0 \implies \kappa_3 = -1$$

$$\text{Donc } \kappa(J_n) = (3, 1, -1) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3).$$

On a :

$$J_{sup} = \emptyset \text{ donc } \kappa(J_{sup}) = \kappa(\emptyset)$$

$$\text{et } \kappa_0 = -5.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} |c_1x + d_1| = |0| \leq -5 \text{ est fausse} \\ \text{et} \\ |c_3x + d_3| = |2| \leq -5 \text{ est fausse} \end{cases}$$

Calcul des pas μ :

Dans ce cas on a : $J_{sup} = \emptyset$, donc on ne calcul pas $\mu_j, j \in J_{sup}$

$$\text{On a : } \mu_1^+ = 8, \mu_1^- = -2, \mu_3^+ = 10, \mu_3^- = 0, 1 \text{ et } 3 \in L_n$$

Donc $\max_l \{|\mu_l^+|, |\mu_l^-|\} = 10 = \mu_3^+$, $3 \in L_n$ et qui correspond au pas θ_3^+ trouvée lors de la résolution par la méthode adaptée du meme problème.

On a $\mu_* = \mu_3^+ = 10$, posons donc $\begin{cases} t_3 = 1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$, $1 \text{ et } 3 \in L_n$.

On obtient : $t(L_{sup}) = t_2 = 1$ et $t(J_n) = (t_1, t_2, t_3) = (2, 3, -2)$

Remarque :

On trouve la meme direction t et le meme pas σ que la méthode adaptée.

Calculons σ :

On a :

$$E_1 t_1 = -1 < 0 \implies \sigma_1 = 1/2$$

$$E_2 t_2 = -16 < 0 \implies \sigma_2 = 4/3$$

$$E_3 t_3 = -2 < 0 \implies \sigma_3 = 1/2; 1, 2, 3 \in J_n$$

On a : $\sigma_2 = 1/2$ car $t_2 = 1 > 0$ avec $2 \in L_{sup}$;

En tenant compte de l'ordre croissant des σ Calculons $\Delta\mu_k$:

$$\Delta\mu_k = (-8, -4), k = 1, \dots, \bar{p}, \text{ avec } \bar{p} = 2 \text{ car } \bar{p} + 1 = 3 \in L_{sup}$$

$$\mu_k = (\mu_1, \mu_2) = (2, -2).$$

Posons $s_0 = j_3$ correspond à $3 \in J_n$ et $\sigma_{s_0} = \sigma_3 = \sigma = 1/2$, $s_0 = v = 3$

Donc le support est : $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$ tel que $\bar{J}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$,

$$\bar{J}_{sup} = \{3\}, \quad \bar{L}_{sup} = \{2, 3\} / 3 \in L_{sup}^+.$$

La deuxième itération :

On construit le pseudo plan $\kappa(J_n)$:

On a :

$$E(\bar{J}_n) = (E_1, E_2) = (0, 5/2)$$

$$E_1 = 0 \geq 0 \text{ donc } \kappa_1 = -1$$

$$E_2 = -5/2 < 0 \text{ donc } \kappa_2 = 1$$

$$\text{Donc et } \kappa(J_n) = (-1, 1) = (\kappa_1, \kappa_2), J_n = \{1, 2\}$$

on a :

$$u(\bar{L}) = (0, -1/2, 1/2) \text{ et } A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\bar{J}_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $\kappa_0 = 0$ ne vérifie pas la relation(1.23) car $|-4| = 4 \leq 0$ n'est pas vérifiée.

Cancel des μ_j :

Sur \bar{J}_{sup} : On a $\kappa_3 = 0 \implies \mu_3 = 0$, avec $\bar{J}_{sup} = \{3\}$

Sur \bar{L}_n : on a $c_1^t \kappa + d_1 = -4 < -\kappa_0$ Donc $\mu_* = \mu_1^- = -4$; $1 \in \bar{L}_n$, (Correspond a θ_1^- dans la méthode adaptée).

On pose : $\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_3 = 0 \end{cases}$, et on trouve la meme direction t et le meme pas σ que la méthode adaptée.

$t^t(L_{sup}) = (t_2, t_3) = (0, -1)$ et $t(J_n) = (t_1, t_2) = (-3, 3)$.

Calculons σ_j et σ_k , $j \in \bar{J}_n$, $k \in \bar{L}_{sup}$.

$\sigma(\bar{J}_n) = (0, 5/6)$ et $\sigma(\bar{L}_{sup}) = (+\infty, 1/2)$.

En prenant en consideration l'ordre croissant des σ_j et σ_k on aura :

$\Delta\mu_1 = -12$ avec $(\bar{p} = 1)$ et $\mu_1 = \mu_{\bar{p}} = -8 \leq 0 \implies v = 1$, $\sigma_0 = \sigma_{j_1} = 0$ et

$s_0 = j_1$; $s = 1 = v$, avec J_1 correspond à $1 \in J_n$.

Donc le nouveau support est : $\bar{\bar{K}}_{sup} = \{\bar{\bar{J}}_{sup}, \bar{\bar{L}}_{sup}\} / \bar{\bar{J}}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$ et $\bar{\bar{J}}_{sup} = \{3, 1\}$; $\bar{\bar{L}}_{sup} = \{1, 2, 3\}$.

La troisième itération :

$\bar{J}_n = \{2\}$, $\bar{L}_{sup} = \{1, 2, 3\}$, $\bar{J}_{sup} = \{3, 1\}$;

$E(\bar{J}_n) = -5/2 + 0 \times 3 = -5/2 = E_2$.

$u(\bar{\bar{L}}_{sup}) = (0, -1/2, -1/2) = (u_1, u_2, u_3)$.

Construisons le pseudo-plan κ :

Sur J_n On a :

$$\kappa_2 = 1 \text{ car } E_2 < 0$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\bar{\bar{J}}_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

κ_0 ne vérifie pas les relation (1.23), Calculons donc μ_j , $j \in \bar{\bar{J}}_{sup}$.

On a :

$\kappa_1 = 1/3 < 3$ donc $\mu_1 = 0$, $1 \in \bar{\bar{J}}_{sup}$

$\kappa_3 = 4/3 > 1$ donc $\mu_3 = -1/3$, $3 \in \bar{\bar{J}}_{sup}$

$\mu = \max\{|\mu_1|, |\mu_3|\} = |\mu_3| = 1/3$, $3 \in \bar{\bar{J}}_{sup}$,

Donc $\mu_* = \mu_3 = 1/3$, correspond à $\theta = \theta_3$, $3 \in \bar{\bar{J}}_{sup}$ dans la méthode adaptée.

$$\text{Posons } \begin{cases} t_3 = 1 \\ t_1 = 0 \end{cases} .$$

On aura donc :

$$t(\bar{\bar{l}}_{sup}) = (-1/2, 1/2, 1/6) = (t_1, t_2, t_3)$$

$$t(\bar{\bar{J}}_{sup}) = t_2 = 5/2$$

On remarque qu'on a la meme direction t lors de la résolution par la méthode adaptée ainsi que le même pas $\sigma = \sigma_2 = 1$, $2 \in \bar{\bar{J}}_n$,

Donc le nouveau support est :

$$\bar{\bar{\bar{K}}}_{sup} = \{\bar{\bar{\bar{J}}}_{sup}, \bar{\bar{\bar{L}}}_{sup}\} \text{ avec } \bar{\bar{\bar{J}}}_{sup} = \bar{\bar{J}}_{sup} \cup \{0\}, \bar{\bar{\bar{J}}}_{sup} = \{1, 2\}, \bar{\bar{\bar{L}}}_{sup} = \{1, 2, 3\}.$$

La quatrième itération :

$$E(\bar{\bar{\bar{J}}}_n) = -1 = E_3$$

$$u(\bar{\bar{\bar{L}}}_{sup}) = (-1/2, 0, 2/3) = (u_1, u_2, u_3).$$

Construisons le pseudo-plan κ :

Sur $\bar{\bar{\bar{J}}}_n$ on a :

$$E_3 = -1 < 0 \implies \kappa_3 = 1$$

Sur $\bar{\bar{\bar{J}}}_{sup}$ on a :

$$A_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 \\ -2/15 & 1/5 & 1/15 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(\bar{\bar{\bar{J}}}_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/5 \\ 13/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} .$$

On a $\kappa_0 = 1/3 \geq 0$, donc les relations (1.23) sont vérifiées, c-à-d que notre pseudo-plan κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0 = 1/3$.

Finalement le support final est :

$$\bar{\bar{\bar{\bar{K}}}}_{sup} = \{\bar{\bar{\bar{\bar{J}}}}_{sup}, \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup}\} \text{ avec } \bar{\bar{\bar{\bar{J}}}}_{sup} = \bar{\bar{\bar{J}}}_{sup} \cup \{0\}, \bar{\bar{\bar{\bar{J}}}}_{sup} = \{1, 2\}, \\ \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup} = \{1, 2, 3\} = \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup}^- \cup \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup}^+, \text{ avec } \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup}^- = \{1, 2\} \text{ et } \bar{\bar{\bar{\bar{L}}}}_{sup}^+ = \{3\}.$$

Ainsi notre pseudo-plan κ correspond a $\bar{\bar{\bar{x}}}$ trouvé lors de la résolution par la méthode adaptée et $\kappa_0 = x_0$ tel que $x_0 = f(\bar{\bar{\bar{x}}}) = 1/3$.

Chapitre 2

Résolution d'un problème Min Max avec contraintes généralisées.

Introduction :

Dans le présent chapitre, on fait une généralisation au problème du premier chapitre et qui aura pour particularité l'ajout d'une contrainte supplémentaire. Après avoir donné quelques définitions, on a construit le support de la méthode adaptée, on a calculé la formule d'accroissement de la fonctionnelle. Par la suite, on a construit les deux critères d'optimalité et de suboptimalité, ainsi que l'algorithme de résolution, que l'on a illustré sur un exemple numérique.

2.1 Position du problème et définitions essentielles

Considérons le problème Min Max suivant :

$$\begin{aligned} f(x) &= \max_{l \in L} |c_l^t x + d_l| \rightarrow \min , \\ Ax &= b , \\ d_* &\leq x \leq d^* , \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $A = A(I, J) = \begin{pmatrix} a_i^t \\ i \in I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^t, j \in J \\ i \in I \end{pmatrix}$ est une $m \times n$ -matrice ,
 $b = b(I) = (b_i, i \in I)$ un m - vecteur, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Définition 1

Un vecteur x est dit plan du problème (2.1) s'il vérifie les contraintes générales $Ax = b$ et les contraintes de borne $d_* \leq x \leq d^*$ du problème (2.1).

Le problème (2.1) peut être écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \min , \\ -x_0 &\leq c_l^t x + d_l \leq x_0 , \quad l \in L ; \\ a_i^t x &= b_i , \quad i \in I ; \\ d_* &\leq x \leq d^* . \end{aligned} \tag{2.2}$$

En utilisant cette forme, on construit le support du problème (2.1) :

2.2 Support plan

De l'ensemble J , on choisit le sous-ensemble J_{sup} et posons $\bar{J}_{sup} = \{J_{sup}\} \cup \{0\}$, $J_n = J \setminus J_{sup}$, et de l'ensemble L le sous-ensemble L_{sup} tel que $|L_{sup}| + |I| = |J_{sup}| + 1$. Subdivisons L_{sup} en deux sous-ensembles $L_{sup}^+ \subseteq L_{sup}$ et $L_{sup}^- = L_{sup} \setminus L_{sup}^+$. Notons $e(L) = (e_l = 1, l \in L)$; $L_n = L \setminus L_{sup}$.

Considérons la matrice $B_{sup} = B(L_{sup}, \bar{J}_{sup})$ définie par :

$$B_{sup} = \begin{bmatrix} e(L_{sup}^-) & c_l^t(J_{sup}), \\ -e(L_{sup}^+) & l \in L_{sup} \\ 0 & \alpha_i^t(J_{sup}), \\ & i \in I \end{bmatrix}.$$

Calculons les vecteurs :

des potentiels $u(L) = (u(L_{sup}), u(L_n))$, $\pi(I)$; par :

$$(u(L_{sup}), \pi(I)) = c_0^t(\bar{J}_{sup})B_{sup}^{-1}, \quad u(L_n) = 0, \quad c_0 = (c_{00} = -1, c_{0j} = 0, j \in J_{sup}),$$

et des estimation $E(J)$:

$$E_j = u^t(L_{sup})c(L_{sup}, j) + \pi(I)A(I, J), \quad j \in J_n,$$

par construction, on a :

$$E_j = 0, \quad j \in J_{sup};$$

Définition 2

La paire $k_{sup} = \{L_{sup}, \bar{J}_{sup}\}$ est dite support du problème (2.1) si $\det(B_{sup}) \neq 0$ et les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$u(L_{sup}^-) \leq 0, \quad u(L_{sup}^+) \geq 0.$$

Définition 3

La paire $\{x, K_{sup}\}$ formée d'un plan x du problème (2.1) et d'un support K_{sup} est dite support plan du problème (2.1).

Définition 4

Un support plan $\{x, K_{sup}\}$ est dit non dégénéré si :

$$\begin{aligned} d_{*j} < x_j < d_j^* \quad , j \in J_{sup} ; \\ |c_l^t x + d_l| < f(x) \quad , l \in L_n . \end{aligned}$$

Définition 5

Un support K_{sup} est dit support coordinateur associé au plan x si :

$$\begin{aligned} L_{sup}^+ \subseteq L^+(x) &= \{l \in L : c_l^t x + d_l = f(x)\} ; \\ L_{sup}^- \subseteq L^-(x) &= \{l \in L : c_l^t x + d_l = -f(x)\} . \end{aligned}$$

2.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soient $\{x, K_{sup}\}$ un support plan du problème (2.1) et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan du problème (2.1) .

Le plan x vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^t x - x_0 = w_l - d_l \quad , l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t x + x_0 = w_l - d_l \quad , l \in L_{sup}^- \\ a_i^t x = w_i + b_i \quad , i \in I \end{array} \right. , \quad (2.3)$$

de même que le plan \bar{x} :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^t \bar{x} - \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l \quad , l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t \bar{x} + \bar{x}_0 = \bar{w}_l - d_l \quad , l \in L_{sup}^- \\ a_i^t \bar{x} = \bar{w}_i + b_i \quad , i \in I \end{array} \right. , \quad (2.4)$$

où $w = (w(L_{sup}), w(I))$, $\bar{w} = (\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I))$ sont des vecteurs d'écarts tel que :
 $(\bar{w}(L_{sup}), \bar{w}(I)) = (w(L_{sup}), w(I)) + (\Delta w(L_{sup}), \Delta w(I))$, $\bar{w}(I) = w(I) = \Delta w(I) = 0_I$.

En faisant la différence entre les formules (2.3) et (2.4) , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_l^t \Delta x - \Delta x_0 = \Delta w_l \quad , l \in L_{sup}^+ \\ c_l^t \Delta x + \Delta x_0 = \Delta w_l \quad , l \in L_{sup}^- \\ a_i^t \Delta x = \Delta w_i \quad , i \in I \end{array} \right. ,$$

de là on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l, l \in L_{sup}^- \\ -\Delta x_0 + c[l, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -c[l, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_l, l \in L_{sup} \\ A[i, J_{sup}] \Delta x(J_{sup}) = -A[i, J_n] \Delta x(J_n) + \Delta w_i, i \in I \end{array} \right.,$$

en développant les dernières équations , on obtient :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c[L_{sup}, J_n] \\ A[I, J_n] \end{pmatrix} \Delta x(J_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ \Delta w(I) \end{pmatrix} \right],$$

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta x(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c[L_{sup}, J_n] \\ A[I, J_n] \end{pmatrix} \Delta x(J_n) - \begin{pmatrix} \Delta w(L_{sup}) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (2.5)$$

pour tout $\Delta x(J_n)$ et $\Delta w(L_{sup})$.

De la formule (2.5) , résulte la formule de décroissance de la fonctionnelle du problème (2.1) :

$$\Delta x_0 = \sum_{j \in J_n} E_j \Delta x_j - \sum_{l \in L_{sup}} u_l \Delta w_l . \quad (2.6)$$

Le maximum d'accroissement de la fonctionnelle :

$-\Delta f(x) = -[f(x + \Delta x) - f(x)] = -\Delta x_0$ sous les contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{*j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_j^* - x_j, j \in J_n; \\ \Delta w_l \leq -w_l, l \in L_{sup}^+; \\ \Delta w_l \geq -w_l, l \in L_{sup}^-, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

est atteint pour :

$$\Delta x_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j, E_j > 0, \\ d_j^* - x_j, E_j < 0, \\ 0, E_j = 0, j \in J_n, \end{cases}; \Delta w_l = \begin{cases} -w_l, l \in L_{sup}^+; \\ -w_l, l \in L_{sup}^-, \end{cases} \quad (2.8)$$

et est égal à :

$$\begin{aligned} \beta(x, K_{sup}) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j (x_j - d_j^*) + \\ &\sum_{l \in L_{sup}^+} u_l (f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l (-f(x) - c_l^t x - d_l) \end{aligned} \quad (2.9)$$

appelée valeur de suboptimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

De là, on a toujours l'inégalité :

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq B(x, K_{sup}), \forall \bar{x} . \quad (2.10)$$

De cette inégalité, on déduit le critère d'optimalité qui reste vrai .

2.4 Critère d'optimalité

Théorème 1

Soit x un plan du problème (2.1), K_{sup} un support coordinateur associé à x .

Les relations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_j = d_{*j} & , \text{ si } E_j > 0 ; \\ x_j = d_j^* & , \text{ si } E_j < 0 ; \\ d_{*j} \leq x_j \leq d_j^* & , \text{ si } E_j = 0 , j \in J_n, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, K_{sup}\}$.

Preuve :

Elle est analogue à celle du théorème 1 de 1^{er} chapitre .

2.5 Critère de suboptimalité

Théorème 2

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné . Le plan x du problème (2.1) est ε -optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel : $\beta(x, K_{sup}) \leq \varepsilon$.

Preuve :

Elle est analogue à celle du théorème 2 de 1^{er} chapitre, pour cela on fait une décomposition de la valeur de suboptimalité en utilisant le problème dual du problème (2.1) suivant :

$$\phi(\lambda) = d^t \gamma - b^t y + d_*^t v - d^{*t} w \rightarrow \max ,$$

$$c^t \gamma + A^t y - v + w = 0 ,$$

$$y = y_1 - y_2 , \quad y_1 \geq 0 , \quad y_2 \geq 0 , \quad (2.12)$$

$$v \geq 0 , \quad w \geq 0 , \quad \sum_{l \in L} |\gamma_l| = 1 ,$$

$$\text{où } c = \begin{pmatrix} c_i^t(J) , \\ l \in L \end{pmatrix} .$$

Le vecteur $\lambda = (\gamma = u(L) , y = \pi(I) , y_1 , y_2 , v , w)$ construit avec le support K_{sup} du problème (2.1) et vérifiant les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(L) = u(L) \quad ; \\ v_j = E_j , \quad w_j = 0 \quad , \quad \text{si } E_j \geq 0 \quad , \\ v_j = 0 \quad , \quad w_j = -E_j \quad , \quad \text{si } E_j < 0 \quad , \quad j \in J \quad ; \\ y_{1i} = y_i , \quad y_{2i} = 0 \quad , \quad \text{si } y_i \geq 0 \quad , \\ y_{1i} = 0 \quad , \quad y_{2i} = -y_i \quad , \quad \text{si } y_i \leq 0 \quad , \quad i \in I \quad . \end{array} \right. \quad (2.13)$$

est un plan dual de problème (2.12) .

Alors $\beta(x, K_{sup}) = \beta(x) + \beta(K_{sup})$.

Conséquence 1

Le plan x du problème (2.1) est optimal si et seulement s'il existe un support K_{sup} pour lequel :

$$\beta(x, K_{sup}) = 0 . \quad (2.14)$$

Remarque 1

L'équation (2.14) est vraie si et seulement si les relations (2.11) ont lieu et K_{sup} est le support coordinateur associe au plan optimal x .

Si le critère d'optimalité et de suboptimalité ne sont pas vérifiés alors on passe à l'itération de l'algorithme .

2.6 Itération

L'itération de l'algorithme est constituée de deux procédures qui sont le changement du plan et du support .

2.6.1 Changement de plan ($x \rightsquigarrow \bar{x}$)

Construisons tout d'abord le pseudo-plan κ associé au support K_{sup} par les relations suivantes :

$$\kappa_j = \begin{cases} d_{*j} & \text{si } E_j \geq 0 , \\ d_j^* & \text{si } E_j < 0 , \end{cases} \quad j \in J_n ;$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c(L_{sup}, J_n) \\ A(I, J_n) \end{pmatrix} \kappa(J_n) + \begin{pmatrix} d(L_{sup}) \\ -b(I) \end{pmatrix} \right] \quad (2.15)$$

a/ Si les relations :

$$\begin{aligned} d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^* & , \quad j \in J_{sup} ; \\ |c_l^t \kappa + d_l| \leq \kappa_0 & , \quad l \in L_n ; \\ \kappa_0 \geq 0 & \quad \text{si } L_n = \quad , \end{aligned} \quad (2.16)$$

sont vérifiées alors κ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0$.

b/ Si les relations (2.16) ne sont pas vérifiées alors, on construit la direction $q \in \mathbb{R}^n$ (pour améliorer le plan x) comme suit :

$$q = \kappa - x , \quad (2.17)$$

et le nouveau plan \bar{x} sera défini par : $\bar{x} = x + \theta q$,

où $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$ le pas maximal selon la direction q , tel que :

Les différents pas θ_{j_0} , θ_f sont obtenus par les formules suivantes :

$$\theta_{j_0} = \min \theta_j , \quad j \in J_{sup} ; \quad \theta_j = \begin{cases} (d_{*j} - x_j)/q_j & \text{si } q_j < 0 , \\ (d_j^* - x_j)/q_j & \text{si } q_j > 0 , \\ \infty & \text{si } q_j = 0 , \quad j \in J_{sup} . \end{cases}$$

$$\theta_f = \min\{\theta_0 , \theta_{l_0}\} ; \quad \theta_0 = f(x)/\beta(x, K_{sup}) , \quad \theta_{l_0} = \min\{\theta_l^+ , \theta_l^-\} , \quad l \in L_n ; \quad (2.18)$$

$$\theta_l^+ = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l + x_0)/(c_l^t q + \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q + \beta(x, K_{sup}) > 0 ; \\ \infty & \text{si non} \end{cases}, \quad l \in L_n .$$

$$\theta_l^- = \begin{cases} (-c_l^t x - d_l - x_0)/(c_l^t q - \beta(x, K_{sup})) & \text{si } c_l^t q - \beta(x, K_{sup}) < 0 , \\ \infty & \text{si non} \end{cases}, \quad l \in L_n .$$

En utilisant le nouveau plan $\bar{x} = x + \theta q$ du problème (2.1) et en remplaçant les q_j par leurs valeurs données par les formules (2.17), on obtient :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}).$$

Si le support plan $\{x, K_{sup}\}$ est non dégénéré, alors $\theta > 0$ et par conséquent :

$$\beta(\bar{x}, K_{sup}) < \beta(x, K_{sup}).$$

Du calcul de θ , on a les différents cas suivants :

- .1^{er} cas : $\theta = \theta_0$, alors $\bar{x} = x + \theta q$ est optimal et $f(\bar{x}) = 0$
ou bien $\bar{x} = x + \theta q$ est ε -optimal et $f(\bar{x}) \leq \varepsilon$.
- .2^{eme} cas : $\theta = 1$, alors $\bar{x} = \kappa$ est optimal.
- .3^{eme} cas : $(1 - \theta)\beta(x, K_{sup}) > \epsilon$, alors on passe au changement du support.

2.6.2 Changement de support ($K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$)

Le changement de support $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$; entraîne le changement de plan dual $\lambda \rightsquigarrow \bar{\lambda}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} u(\bar{L}) = u(L) + \sigma_0 t(L) ; \\ E(\bar{J}) = E(J) + \sigma_0 t(J) , \end{cases}$$

où le vecteur $t(J, L)$ est la direction d'augmentation de la fonction objectif duale et σ_0 est le pas dual maximal suivant cette direction .

Ce changement du support se fait en fonction de la valeur de θ , Pour cela on

distingue les deux cas suivants :

a/ $\theta = \theta_{j_0}$, $j_0 \in J_{sup}$:

Introduisons la valeur suivante :

$$\mu_* = \begin{cases} d_{*j_0} - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} < d_{*j_0} ; \\ d_{j_0}^* - \kappa_{j_0} & \text{si } \kappa_{j_0} > d_{j_0}^* , \end{cases} \quad (2.19)$$

et calculons la direction t :

Posons :

$$\begin{cases} t_{j_0} = \text{sign}\mu_* ; \\ t(J_{sup} \setminus j_0) = 0 ; \\ t(L_n) = 0 , \end{cases} \quad (2.20.1)$$

et de l'admissibilité de \bar{u} , \bar{E} on obtient :

$$\begin{cases} (t(L_{sup}), t(I)) = (0, t(J_{sup}))^t B_{sup}^{-1} ; \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup})c(L_{sup}, J_n) + t^t(I)A(I, J_n) . \end{cases} \quad (2.20.2)$$

Calculons les pas σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$:

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j & \text{si } E_j t_j < 0 ; \\ 0 & \text{si } E_j = 0 , t_j > 0 , \kappa_j \neq d_{*j} , \text{ ou } E_j = 0 , t_j < 0 , \kappa_j \neq d_j^* ; \\ \infty & \text{dans les autres cas , } j \in j_n . \end{cases} \quad (2.21.1)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} -u_k/t_k & \text{si } t_k < 0 , k \in L_{sup}^+ ; \\ -u_k/t_k & \text{si } t_k > 0 , k \in L_{sup}^- ; \\ \infty & \text{dans les autres cas , } k \in L_{sup} . \end{cases} \quad (2.21.2)$$

Mettons σ_j , $j \in J_n$; σ_k , $k \in L_{sup}$ dans l'ordre croissant :

$$\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2} \leq \dots \leq \sigma_{j_p} , \quad j_k \in \{J_n \cup L_{sup}\} .$$

Pour chaque j_k , nous calculons le saut de la fonction objectif duale :

$$\Delta\mu_k = -|t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) .$$

La fonction objectif duale se comporte selon la direction t comme une fonction concave, continue , linéaire par morceaux et leur pentes sur l'intervalle $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ sont égales à :

$$\begin{cases} \mu_k = \mu_{k-1} - |t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k}) , & k = 1, \dots, \bar{p} ; \\ \mu_0 = |\mu_*| , \end{cases} \quad (2.22)$$

où $\bar{p} \leq p$ tel que :

$$\begin{cases} \bar{p} = p & \text{si } j_k \in J_n, \quad \forall i = \overline{1, p} ; \\ \text{ou bien} & \\ \bar{p} < p & \text{si } j_{\bar{p}+1} \in L_{sup} . \end{cases}$$

Remarque 2 : μ_0 est la vitesse initiale de changement de la fonction objectif duale.

On cherche le pas σ_0 et les indices s, s_0 pour les lesquels la fonction objectif du dual atteint son maximum .

1- Si $\mu_{\bar{p}} > 0$, alors $\bar{p} < p$. De là posons $\sigma_0 = \sigma_{j_{\bar{p}+1}}$, $s_0 = j_{\bar{p}+1}$, $s = \bar{p} + 1$.

2- Si $\mu_{\bar{p}} \leq 0$, alors on va trouver un indice ν , $0 < \nu \leq \bar{p}$ tel que $\mu_{\nu-1} \geq 0$ et $\mu_\nu < 0$. Posons $\sigma_0 = \sigma_{j_\nu}$, $s_0 = j_\nu$, $s = \nu$.

L'itération se termine par la construction des nouveaux vecteurs :

$$\begin{cases} E(\bar{J}) = E(J) + \sigma_0 t(J) ; \\ u(\bar{L}) = u(L) + \sigma_0 t(L) . \end{cases} \quad (2.23)$$

et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$: $\bar{J}_{sup} = \{0\} \cup \bar{J}_{sup}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \setminus j_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \setminus s_0 , \quad \text{si } s_0 \in L_{sup} , \end{cases} , \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup s_0 , \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} , \end{cases} \quad \text{si } s_0 \in J_n .$$

b/ $\theta = \theta_{l_0}$, $l_0 \in L_n$:

Calculons :

$$\mu_* = \begin{cases} -\kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+ ; \\ \kappa_0 + c_{l_0}^t \kappa + d_{l_0} , & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^- , \end{cases} \quad (2.24)$$

et posons :

$$\begin{cases} t_{l_0} = \text{sign} \mu_* ; \\ t(L_n \setminus l_0) = 0 ; \\ t(J_{sup}) = 0 , \end{cases} \quad (2.25.1)$$

de l'admissibilité de \bar{u} et \bar{E} , on obtient :

$$\begin{cases} (t(L_{sup}), t(I)) = (1, -t_{l_0} c_{l_0}^t(J_{sup})) B_{sup}^{-1}, \\ t^t(J_n) = t^t(L_{sup}) c(L_{sup}, J_n) + t_{l_0} c_{l_0}^t(J_n) + t^t(I) A(I, J_n). \end{cases} \quad (2.25.2)$$

On applique la même méthode utilisée en (a) pour trouver l'indice s_0 et le pas σ_0 .

L'itération se termine avec la construction des vecteurs $E(\bar{J})$, $u(\bar{L})$ définis par la formule (2.23) et le nouveau support $\bar{K}_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$: $\bar{J}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$,

$$\begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup}, \\ \bar{L}_{sup} = (L_{sup} \setminus s_0) \cup l_0, \end{cases} \quad \text{si } s_0 \in L_{sup}, \quad \begin{cases} \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup s_0, \\ \bar{L}_{sup} = L_{sup} \cup l_0, \end{cases} \quad \text{si } s_0 \in J_n,$$

tel que :

$$\begin{cases} l_0 \in \bar{L}_{sup}^+ & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^+; \\ l_0 \in \bar{L}_{sup}^- & \text{si } \theta_{l_0} = \theta_{l_0}^-, \end{cases}$$

Par construction le nouveau support est un support coordinateur associé au plan \bar{x} et la valeur de la suboptimalité au support plan $\{\bar{x}, \bar{K}_{sup}\}$ est donnée par la formule :

$$B(\bar{x}, \bar{K}_{sup}) = (1 - \theta) B(x, K_{sup}) - \sum_{k=0}^{s-1} \mu_k (\sigma_{j_{k+1}} - \sigma_{j_k}), \quad \sigma_{j_0} = 0.$$

2.7 Exemple numérique

$$\max(|2x_1 - 2x_2 + x_3|, |x_1 + 4x_2 - x_3 - 3|, |x_1 - x_2 - x_3 + 2|) \rightarrow \min,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$-1 \leq x_1 \leq 3, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1.$$

2.7.1 La résolution par la méthode adaptée

1-La première itération

on cherche une solution de base réalisable.

$$Ax = b \implies x = A^{-1}b$$

On prend une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$Ax = b \implies \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } x = A^{-1}b \implies x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$ et $x_3 = 0$, qui vérifient bien les contraintes de bornes.

on a $1 \geq x_1 \geq -1$, $1 \geq x_2 \geq -1$, donc les contraintes directes sont vérifiées càd que $x = (6/7, 5/7, 0)$ est un plan du problème (2.1).

notons donc : $J_{sup} = \{1, 2\}$, $J_n = J \setminus J_{sup} = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}$ et $I = \{1, 2\}$, remarquons que $|L_{sup}| + |I| = |J_{sup}| + 1$.

déterminons donc $|L_{sup}|$: on a $\max(f(x))_{l \in \{1, 2, 3\}} = \max_{l \in \{1, 2, 3\}} |C_l^t x + d_l|$.

$$f_1(x) = |2x_1 - 2x_2 + x_3| = |2/7|$$

$$f_2(x) = |x_1 + 4x_2 - x_3 - 3| = |5/7|$$

$$f_3(x) = |x_1 - x_2 - x_3 + 2| = |15/7|$$

donc $\max(f)_{l \in \{1, 2, 3\}} = f_3(x) = |15/7|$

càd $L_{sup} = \{3\} = L_{sup}^+$, $L_{sup}^- = \emptyset$, $L_n = \{1, 2\}$, $K_{sup} = \{\bar{j}_{sup}, L_{sup}\}$ avec

$\bar{j}_{sup} = \{0\} \cup J_{sup} = \{0, 1, 2\}$, et $K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, I, L_{sup}\}$ est le support coordinateur associé à x .

donc $\{x, K_{sup}\}$ est un primal support non dégénéré.

Procédons au calcul des vecteurs des potentiels $u(L)$ et des estimations $E(J)$

Calcul de $u(L)$:

$$u(L) = \{(u(L_{sup}), u(L_n), \pi(I))\},$$

$$(u(L_{sup}), \pi(I)) = C_0^t (\bar{J}_{sup}) B_{sup}^{-1}$$

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det B_{sup} = -7$$

$$B_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (\mu(L_{sup}), \pi(I)) = (-1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

$$(u(L_{sup}), \pi(I)) = (1 \ -3/7 \ 1/7) = (u_3 \ \pi_1 \ \pi_2) .$$

Calcul des $E(j)$, $j \in J$:

$$\text{on a } E(J) = u^t(L_{sup})c(L_{sup}) + \pi(I)A(I, J)$$

$$E_j = u^t(L_{sup})c(L_{sup}, j) + \pi(I)A(I, J), \quad j \in J_n \quad \text{et} \quad E_j = 0, \quad j \in J_{sup} = \{1, 2\} .$$

$$E_3 = u^t(L_{sup})c(L_{sup}, 3) + \pi(I)A(I, J) = u_3 c(3, 3) + (\pi_1, \pi_2)A(I, 3).$$

$$\implies E_3 = -31/14$$

Calcul de la valeur de suboptimalité $\beta(x, K_{sup})$:

on a :

$$\begin{aligned} \beta(x, K_{sup}) = & \sum_{E_j > 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_{*j}) + \sum_{E_j < 0, j \in J_n} E_j(x_j - d_j^*) + \\ & \sum_{l \in L_{sup}^+} u_l(f(x) - c_l^t x - d_l) + \sum_{l \in L_{sup}^-} u_l(-f(x) - c_l^t x - d_l) \end{aligned}$$

Alors :

$$\beta(x, K_{sup}) = E_3(x_3 - d_{*3}) = 31/14 > \epsilon \quad (\epsilon \text{ donné})$$

d'où le support plan $\{x, K_{sup}\}$ n'est pas optimal

1-1 Changement de plan : $x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta q$

avec q : la direction , et θ : le pas.

On construit un pseudo-plan κ avec $\kappa_3 = 1$, $3 \in J_n$:

on a :

$$\begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(J_{sup}) \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c(L_{sup}, J_n) \\ A(I, J_n) \end{pmatrix} \kappa(J_n) + \begin{pmatrix} d(L_{sup}) \\ -b(I) \end{pmatrix} \right]$$

$$\implies \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = -B_{sup}^{-1} \left[\begin{pmatrix} c(3, 3) \\ A(I, 3) \end{pmatrix} \kappa_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/14 \\ -13/14 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

κ_1 et κ_2 verifient les contraintes directes , mais $|c_l^t \kappa + d_l| \leq \kappa_0$, $l \in L_n = \{1, 2\}$ nous

$$\text{donne : } \begin{cases} 36/14 \leq -1/14 \\ 61/14 \leq 1/14 \end{cases} \quad \text{faux}$$

donc κ ne verifie pas les contraintes de la fonctionnelle sur $L_n \implies \kappa$ n'est pas optimal.

Construisons la direction q :

$$\text{on a } q = \kappa - x = (-25/14, -4/7, 1) .$$

Calculons le pas θ , avec $\theta = \min\{1, \theta_{j_0}, \theta_f\}$ tel que $\theta_{j_0} = \min \theta_j$, $j \in J_{sup}$,

$J_{sup} = \{1, 2\}$ et $\theta_{l_0} = \min\{\theta_l^+, \theta_l^-\}$ et $\theta_f = \min\{\theta_0, \theta_{l_0}\}$; avec

$$\theta_0 = f(x)/\beta(x, K_{sup})$$

.

$$\theta_{j_0} = \theta_1 = 26/25 \text{ c-à-d } j_0 = 1, 1 \in J_{sup} .$$

$$\theta_0 = 30/31 .$$

$$\theta_{l_0} = \theta_2^- = 20/51 , 2 \in L_n .$$

$$\text{donc } \theta = \min\{1, 26/25, 20/51\} = 20/51$$

$$\text{donc } \theta = \theta_2^- = 20/51 , 2 \in L_n .$$

$$\text{et on a } \beta(\bar{x}, K_{sup}) = (1 - \theta)\beta(x, K_{sup}) = 961/714 < \beta(x, K_{sup}) ,$$

on a $\bar{x} = x + \theta q = (56/357, 175/357, 20/51)$ et $\beta(\bar{x}, K_{sup}) > \epsilon$ (ϵ donné) ; donc \bar{x} n'est pas optimal.

1-2 Changement de support : $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$

le changement de support $K_{sup} \rightsquigarrow \bar{K}_{sup}$ entraine le changement du plan dual $\lambda \rightsquigarrow \bar{\lambda}$
c-à-d

$$\begin{cases} E(\bar{J}) = E(J) + \sigma_0 t(J) & ; \\ u(\bar{L}) = u(L) + \sigma_0 t(L) & . \end{cases}$$

.

Le changement de support se fait en fonction de θ ;

On a $\theta = \theta_2^-$; $2 \in L_n$ donc :

$$\mu_* = \kappa_0 + c_2^t \kappa + d_2 = -31/7.$$

et la direction t est donnée par :

$$(t(L_{sup}), t(I)) = (1, -t_{l_0} c_{l_0}^t(J_{sup})) B_{sup}^{-1} = (1, -(-1)(1, 4)) \begin{pmatrix} -1 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix} ;$$

tel que : $t_{l_0} = t - 2 = -1$; $t_1 = 0$, $1 \in L_n \setminus l_0$; $t(J_{sup}) = (t - 1, t_2) = (0, 0)$;

$$(t_3, t_1, t_2) = (-1, 11/7, 8/7) ; 3 \in L_{sup}^+ , \{1, 2\} \in I.$$

$$t^t(J_n) = t^t(L_{sup}) c(L_{sup}, J_n) + t_{l_0} c_{l_0}^t(J_n) + t^t(I) A(I, J_n) = t_3 = -1(-1) + (-1)(-1) + (11/7, 8/7) \begin{pmatrix} 3 \\ 1/2 \end{pmatrix} ;$$

$$t_3 = 102/14 , 3 \in J_n.$$

Calculons les pas $\sigma_j, j \in J_n$ et $\sigma_k, k \in L_{sup}$:

on a :

$$E_3 t_3 = -31/14 \times 51/7 = -3162/196 < 0 ; \implies \sigma_3 = -E_3/t_3 = 31/102, 3 \in J_n.$$

et $\sigma_3 = -\mu_3/t_3 = 1$ car $t_3 = -1 < 0, 3 \in L_{sup+}$;

Ordonons ces pas $\sigma_{j_3}, 3 \in J_n, \sigma_{l_3}, l_3 \in L_{sup}$ par ordre croissant :

on a $\sigma_{j_3} = 31/102 \leq \sigma_{l_3} = 1$; posons $31/102 = \sigma_{j_1}$ et $1 = \sigma_{j_2}$;

On aura donc :

$$\sigma_{j_1} \leq \sigma_{j_2}, j_1 = 3 \in J_n ; j_2 = 3 \in L_{sup}^+.$$

Pour chaque j_k calculons le saut de la fonction objectif duale :

On a $\Delta\mu_k = -|t_{j_k}|(d_{j_k}^* - d_{*j_k})$, $k = 1, \dots, \bar{p}$, avec $\bar{p} = 1$ car $j_{\bar{p}+1} = j_2 \in L_{sup}$

c-à-d pour j_1 : $\Delta\mu_1 = -|t_{j_1}|(d_{j_1}^* - d_{*j_1}) \implies \Delta\mu_1 = -102/7.$

et : $\mu_1 = \mu_0 + \Delta\mu_1 = -71/7 / \mu_0 = |\mu_*| = 31/7.$

Trouvons σ_0 ainsi que les indices s, s_0 :

On a : $\mu_{\bar{p}} = \mu_1 = -71/7 \leq 0$

soit : $0 < v \leq 1 = \bar{p}$ avec $\mu_{v-1} \geq 0$ et $\mu_v < 0$ c-à-d $v = 1 = s.$

et $\sigma_0 = \sigma_{j_1}$, correspond à $\sigma_3, 3 \in J_n, s_0 = j_1, s = 1.$

On termine donc par la construction de nouveau vecteurs :

$$\begin{cases} E(\bar{J}) = E(J) + \sigma_0 t(J) \\ u(\bar{L}) = u(L) + \sigma_0 t(L) \end{cases} \quad \bar{K}_{sup} = \{\bar{\bar{J}}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$$

avec $\bar{\bar{J}}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}$;

On a $\bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup s_0 \implies \bar{J}_{sup} = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}.$

donc $\bar{\bar{J}}_{sup} = \{0\} \cup \{1, 2, 3\}$, $J_n = \emptyset$, $\bar{L}_{sup} = L_{sup} \cup \{2\} = \{3\} \cup \{2\} = \{2, 3\}$,

$$L_n = \{1\}, I = \{1, 2\}.$$

Finalement :

$$E(\bar{J}_{sup}) = (0, 0, 0) \text{ et } u(\bar{L}) = (u_1, u_2, u_3) = (0, -31/102, 71/102) \text{ avec } 1 \in L_n$$

et $2, 3 \in L_{sup}$

$$\beta(\bar{x}, \bar{k}_{sup}) = \beta(\bar{x}, k_{sup}) - \mu_0(\sigma_{j_1} - \sigma_{j_0}) = 961/714 - 31/7(31/102 - 0) = 0.$$

Donc $\{\bar{x}, \bar{k}_{sup}\}$ est un support optimal et $\bar{x} = (56/357, 175/357, 20/51)$ est une solution optimale.

2.7.2 La résolution par la méthode duale

1-La première itération

On prend le même premier support que la méthode adaptée,

$$K_{sup} = \{\bar{J}_{sup}, L_{sup}\} \quad , \quad \bar{J}_{sup} = J_{sup} \cup \{0\} \quad , \quad J_{sup} = \{1, 2\} \quad , \quad I = \{1, 2\} \quad ,$$

$$L_{sup} = \{3\} = L_{sup}^+ \quad \text{est le support du problème} \quad (2.1)$$

$$\text{avec } B_{sup} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } B_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & 4/7 & 1/7 \\ 0 & 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Soit $\kappa(J_n)$ un pseudo-plan associé au support K_{sup} , avec $\kappa(J_n) = \kappa(3) = 1$, car

$$E_3 = -31/14 < 0 \quad .$$

$$\text{On a} \quad \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa(J_{sup}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/14 \\ -13/14 \\ 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} ;$$

$\kappa_0 = -1/14$ ne vérifie pas les relations (1, 2, 3) donc κ_0 n'est pas optimal ;

On passe au calcul de $\mu = \max_{j,l} (|\mu_j|, |\mu_l|)$, $J_{sup} = \{1, 2\}$

avec $|\mu_l| = \max_{l \in L_n} (|\mu_l^+|, |\mu_l^-|)$ tel que $L_n = \{1, 2\}$, $J_{sup} = \{1, 2\}$

Pour $j \in J_{sup} = \{1, 2\}$ on a : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$ (d'après les relations (1.28)).

Pour $l \in L_n = \{1, 2\}$ on a : $\mu_1^+ = 0$, $\mu_2^+ = 0$, $\mu_1^- = -16/14$ et $\mu_2^- = -31/7$.

Alors $\mu = |\mu_2^-| = |-31/7| = 31/7$, $2 \in L_n$, correspond à $\theta = \theta_2^-$, $2 \in L_n$ dans la méthode adaptée

Calculons la direction t :

Remarque :

On trouve la même direction t et le même pas σ que la méthode adaptée suivant la situation $\theta = \theta_2^-$, $2 \in L_n$ c-à-d : $\mu_* = \mu_2^- = -31/7$.

$$\text{et } \begin{cases} t_{l_0} = t_2 = \text{sign}\mu_* = -1 \\ t(L_n \setminus 2) = t_1 = 0, \{1\} \in L_n ; \\ t(J_{sup}) = t_1 = t_2 = 0, \{1, 2\} \in J_{sup} \end{cases}$$

$$(t(L_{sup}), t(I)) = (-1, 11/7, 8/7) = (t_3, t_1, t_2), 3 \in L_{sup}^+ \text{ et } \{1, 2\} \in I.$$

$$t^t(J_n) = t_3 = 102/14, 3 \in J_n.$$

Et le pas : $\sigma_0 = \sigma_3 = 31/102, 3 \in J_n$

On conclut donc qu'on a le meme nouveau support tel que : $\bar{k}_{sup} = \{\bar{\bar{J}}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$

Avec $\bar{\bar{J}}_{sup} = \{0\} \cup \{\bar{J}_{sup}\}, \bar{J}_{sup} = \{1, 2, 3\}$ et $\bar{L}_{sup} = \{2, 3\}$ tel que : $2 \in L_{sup}^-$ et $3 \in L_{sup}^+, \bar{J}_n = \emptyset, \bar{L}_n = \{1\}$.

2-La deuxième itération :

Selon le support précédent $\bar{K}_{sup} = \{\bar{\bar{J}}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$, on a la matrice de support suivante :

$$B_{sup} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 1/2 \end{pmatrix} \implies B_{sup}^{-1} = \begin{pmatrix} 31/102 & -71/102 & -5/102 & -25/51 \\ 25/102 & 25/102 & 19/102 & -7/51 \\ 4/51 & 4/51 & 1/51 & 10/51 \\ -7/51 & -7/51 & 11/51 & 8/51 \end{pmatrix}$$

Calculons le pseudo-plan κ :

$$\kappa(\bar{J}_n) = \kappa(\emptyset), \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130/102 \\ 16/102 \\ 25/51 \\ 20/51 \end{pmatrix},$$

$\kappa(\bar{J}_{sup}) = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (16/102, 25/51, 20/51)$, correspond à \bar{x} dans la méthode adaptée.

Les relations : $d_{*j} \leq \kappa_j \leq d_j^*, j \in \bar{J}_{sup}$ sont vérifiées,

et $|c_1^t \kappa + d_1| = 22/102 \leq \kappa_0 = 130/102, 1 \in L_n$ est vérifiée ;

alors $\kappa = (16/102, 25/51, 20/51)$ est optimal et $f(\kappa) = \kappa_0 = 130/102$ correspond au support précédent $\bar{K}_{sup} = \{\bar{\bar{J}}_{sup}, \bar{L}_{sup}\}$ avec $\bar{\bar{J}}_{sup} = \bar{J}_{sup} \cup \{0\}, \bar{J}_{sup} = \{1, 2, 3\},$

$\bar{L}_{sup} = \{2, 3\}, 2 \in \bar{L}_{sup}^-$ et $3 \in \bar{L}_{sup}^+, (\bar{J}_n = \emptyset, \bar{L}_n = \{1\}$ et $I = \{1, 2\}$ interchangeable.)

Remarques 3

1-On peut commencer l'algorithme par le support vide, jusqu'à trouver $\mu = 0$.

2-Le but de la méthode duale est d'arriver à la solution optimale sans connaître la solution initiale (le premier plan du problème (2.1) , en commençant par le pseudo-plan κ .

Conclusion

Dans ce chapitre, on a essayé de rassembler le support de la fonctionnelle, le support des contraintes dans la méthode adaptée et de parler d'un seul support coordinateur.

Chapitre 3

Résolution d'un problème Min Max avec la methode du simplexe et comparaison.

Introduction

La méthode du simplexe à été inventée en 1947 par le mathématicien Geotzig, elle est classée parmi les méthodes les plus efficaces pour la résolution d'un problème linéaire. Cette méthode est itérative et son principe de résolution nécessite de suivre certaines étapes qu'on exprimera dans les démarches qui suivront

Dans ce chapitre on procédera à la résolution d'un probleme Min Max par la méthode du simplexe, ce même problème ayant été présenté dans nos deux précédents chapitres a été résolu par deux autres méthodes différentes . A la fin de ce chapitre on fera une comparaison entre nos deux méthodes principales : La méthode du simplexe ainsi que celle de la méthode adaptée [9,10].

3.1 Les étapes de l'algorithme du simplexe :

Définition1 :

Un problème linéaire (PL) mis sous la forme particulière où toutes les contraintes sont des équations et toutes les variables sont non négatives est dit sous forme standard.

Définition2 :

Une variable d'écart est une variable qu'on rajoute ou qu'on retranche à une contrainte afin de mettre le problème linéaire sous sa forme standard.

a/ contrainte de type \leq : on ajoute pour chaque contrainte i une variable d'écart e_i tel que $e_i \geq 0$.

b/ Contrainte de type \geq : On retranche pour chaque contrainte i une variable d'excédent e_i tel que $e_i \geq 0$.

Variables de base et variables hors base :

Considérons un système à n variables et m équations où $n \geq m$, on obtiendra alors une solution de base de la manière suivante :

a/ On pose $n - m$ variables égales à 0, ces variables sont hors base.

b/ On résout le système pour les m variables restantes, elles seront alors des variables de base.

c/ Le vecteur de variables obtenu est la solution de base; cette dernière est dite admissible si toutes les variables sont ≥ 0 , graphiquement on dira que c'est un point extrême.

3.2 Résolution du programme linéaire :

3.2.1 Choix de la variable entrante :

Max des $C_j - Z_j$ pour les problèmes de Maximisation,

Min des $C_j - Z_j$ pour les problèmes de Minimisation.

3.2.2 Choix de la variable sortante :

Dans un problème de maximisation ou de minimisation la variable sortante sera le Min des $\frac{b_i}{a_{ij}} / a_{ij} > 0$.

3.2.3 Pivotage :

Le pivotage s'effectue de la manière suivante :

- a- On commence pas diviser la ligne du pivot par le chiffre du pivot.
- b- Nous poursuivons avec la matrice identité pour les variables de base, nous inscrivons un 1 à l'intersection de chaque variable et 0 ailleurs.
- c- Le calcul des nouvelles valeurs pour les cases réstantes est de la manière suivante :

$$\text{Ancienne valeur} - \frac{\text{element de la ligne du pivot} * \text{element de la colonne du pivot}}{\text{Pivot}}$$

3.2.4 Critère d'arrêt :

On arrete lorsque le critère d'optimalité est obtenu,

$C_j - Z_j \leq 0$ Pour les problèmes de maximisation.

$C_j - Z_j \geq 0$ Pour les problèmes de minimisation.

3.3 Exemple numérique :

$$\max(|2x_1 - 2x_2 + x_3|, |x_1 + 4x_2 - x_3 - 3|, |x_1 - x_2 - x_3 + 2|) \rightarrow \min,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + 4x_2 + 1/2x_3 = 2$$

$$-1 \leq x_1 \leq 3, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -1 \leq x_3 \leq 1.$$

Forme standard du problème :

$$x_0 + Mx_{16} + Mx_{17} + Mx_{18} + Mx_{19} \rightarrow \min$$

$$2x_1 - 1 - 2x_2 + x_3 - x_0 + x_4 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_0 + x_5 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 - x_0 + x_6 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 + x_0 - x_7 + x_{16} = 3$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_0 - x_8 + x_{17} = 2$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_0 + x_9 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_{18} = 1$$

$$-x_1 + 4x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_{19} = 2$$

$$x_1 + x_{10} = 3$$

$$-x_1 + x_{11} = 1$$

$$x_2 + x_{12} = 1$$

$$x_2 + x_{13} = 1$$

$$x_3 + x_{14} = 1$$

$$x_3 + x_{15} = 1$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 0, \dots, 19$$

	c_j	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}		
c_b	b_i	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M	θ_j	
0	x_4	-1	2	-2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	x_5	-1	-2	2	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	x_6	-1	1	4	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3/4
0	x_9	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
0	x_{10}	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞
0	x_{11}	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞
0	x_{12}	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	x_{13}	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	x_{14}	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞
0	x_{15}	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
M	x_{16}	3	1	4	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3/4
M	x_{17}	2	1	1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2
M	x_{18}	1	0	-1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
M	x_{19}	2	0	4	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2/4
	Δ_j	$2M-1$	M	$8M$	$2M+(1/2)M$	0	0	0	-M	-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 3.1 – La résolution par la méthode du simplexe

$Max \Delta -j = 8M \implies x_2$ est la variable entrante dans la base,
 $Min \theta_j = 2/4 \implies x_{19}$ est la variable sortante de la base.

	c_j	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}		
c_b	b_i																					θ_j	
0	x_4	-1/2	-1	3/2	0	5/4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	-1/3
0	x_5	-1	-1	-3/2	0	-5/4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	2/3
0	x_6	1	-1	2	0	-3/2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1/2
0	x_9	3/2	-1	-3/4	0	7/8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/4	-2
0	x_{10}	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	x_{11}	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
0	x_{12}	1/2	0	1/4	0	-1/8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1/4	2
0	x_{13}	3/2	0	-1/4	0	1/8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1/4	-3/2
0	x_{14}	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	∞
0	x_{15}	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	∞
M	x_{16}	1	1	2	0	-3/2	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1/2
M	x_{17}	3/2	1	-3/4	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1/4	-2
M	x_{18}	3/2	0	7/4	0	25/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1/4	6/7
0	x_2	1/2	0	-1/4	1	1/8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/4	-2
	Δ_j	$2M-1$	3M	0	$(13/8)M$	0	0	0	-M	-M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2M	

TABLE 3.2 – La première itération

$Max \Delta -j = 3M \implies x_1$ est la variable entrante dans la base,
 $Min \theta_j = 1/2 \implies x_{16}$ est la variable sortante de la base.

	c_j	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M	
c_b	b_i																					θ_j
0	x_4	-5/4	-7/4	0	0	19/8	1	0	0	3/4	0	0	0	0	0	0	0	-3/4	0	0	5/4	-10/19
0	x_5	-1/4	-1/4	0	0	-19/8	0	1	0	-3/4	0	0	0	0	0	0	0	3/4	0	0	-5/4	2/19
0	x_6	0	-2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-2	∞
0	x_9	15/8	-5/8	0	0	5/16	0	0	0	-3/8	0	1	0	0	0	0	0	3/8	0	0	-5/8	6
0	x_{10}	5/2	-1/2	0	0	3/4	0	0	0	1/2	0	0	1	0	0	0	0	-1/2	0	0	1/2	10/3
0	x_{11}	3/2	1/2	0	0	-3/4	0	0	0	-1/2	0	0	1	0	0	0	0	1/2	0	0	-1/2	-2
0	x_{12}	3/8	-1/8	0	0	1/16	0	0	0	1/8	0	0	0	1	0	0	0	-1/8	0	0	-1/8	-2
0	x_{13}	13/8	1/8	0	0	-1/16	0	0	0	-1/8	0	0	0	0	1	0	0	1/8	0	0	1/8	-26
0	x_{14}	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
0	x_{15}	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1
0	x_1	1/2	1/2	1	0	-3/4	0	0	0	-1/2	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	0	-1/2	-2/3
M	x_{17}	15/8	11/8	0	0	-9/16	0	0	0	-3/8	-1	0	0	0	0	0	0	3/8	1	0	-5/8	-30/9
M	x_{18}	5/8	-7/8	0	0	71/16	0	0	0	7/8	0	0	0	0	0	0	0	-7/8	0	1	9/8	10/71
0	x_2	5/8	1/8	0	1	-1/16	0	0	0	-1/8	0	0	0	0	0	0	0	1/8	0	0	1/8	-10
	Δ_j	$(3/8)M-1$	0	0	$(31/8)M$	0	0	0	$(4/8)M$	-M	0	0	0	0	0	0	0	$(-4/8)M-M$	0	0	$(1/2)M-M$	

TABLE 3.3 – La deuxième itération

$Max \Delta -j = 31M/8 \implies x_3$ est la variable entrante dans la base,
 $Min \theta_j = 10/71 \implies x_{18}$ est la variable sortante de la base.

	C_j	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	
c_b		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M	
B	b_i																					θ_j
0	X4	225/142	-3.03	0	0	1	0	0	20/71	0	0	0	0	0	0	0	0	-20/71	0	-38/71	185/284	/
0	X5	6/71	-60/71	0	0	0	1	0	-20/71	0	0	0	0	0	0	0	0	20/71	0	38/71	-46/71	/
0	X6	0	-2	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-2	-2
0	X9	130/71	-40/71	0	0	0	0	0	-31/71	0	1	0	0	0	0	0	0	31/71	0	-5/71	-50/71	/
0	X10	2.39	-25/71	0	0	0	0	0	25/71	0	0	1	0	0	0	0	0	25/71	0	-12/71	22/71	/
0	X11	1.60	-0.02	0	0	0	0	0	13/568	0	0	0	1	0	0	0	0	-13/568	0	12/71	37/508	/
0	X12	26/71	-8/71	0	0	0	0	0	37/286	1/71	0	0	0	1	0	0	0	-8/71	0	-1/71	-10/71	/
0	X13	1.61	8/71	0	0	0	0	0	-8/71	0	0	0	0	0	1	0	0	8/71	0	1/71	10/71	14.34
0	X14	61/71	14/71	0	0	0	0	0	-14/71	0	0	0	0	0	0	1	0	14/71	0	-16/71	-18/71	4.35
0	X15	81/71	-14/71	0	0	0	0	0	14/71	0	0	0	0	0	0	0	1	-14/71	0	16/71	18/71	/
0	X1	43/71	25/71	1	0	0	0	0	-25/71	0	0	0	0	0	0	0	0	25/71	0	12/71	-22/71	1.72
M	X17	1.95	92/71	0	0	0	0	0	-30/71	-1	0	0	0	0	0	0	0	0.26	1	9/71	-137/284	1.5
0	X3	10/71	-14/71	0	0	1	0	0	14/71	0	0	0	0	0	0	0	0	-14/71	0	16/71	18/71	/
0	X2	0.6	8/71	0	1	0	0	0	-8/71	0	0	0	0	0	0	0	0	8/71	0	1/71	10/71	22
	Δ_j	1.2-M-1	0	0	0	0	0	0	-30M/71	-M	0	0	0	0	0	0	0	0.2M-M	0	0	0.12M-M	

TABLE 3.4 – La troisième itération

$Max\Delta_j = (92M/71) - 1 \implies x_0$ entre dans la base;

$Min\theta_j = 555/368 \implies x_{17}$ sort de la base

	C_j	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M	M	
C_b	b_i																					
0	3.779	0	0	0	0	1	0	0	-9235/13064	-861/368	0	0	0	0	0	0	0	0.336	861/368	-6235/26128	-0.477	
0	220/1633	0	0	0	0	0	1	0	-910/1633	-15/23	0	0	0	0	0	0	0	2965/6532	15/23	1009/1633	0.962	
0	0	3.016	0	0	0	0	0	0	1	568/1633	-71/46	0	0	0	0	0	0	0	0	0.592	71/46	9/46
0	2.680	0	0	0	0	0	0	0	-0.620	-10/23	1	0	0	0	0	0	0	1801/3266	10/23	-0.015	-0.913	
0	1.77	0	0	0	0	0	0	0	0.237	-25/92	0	1	0	0	0	0	0	0.423	25/92	-0.134	0.178	
0	1.640	0	0	0	0	0	0	0	0.015	-0.017	0	0	1	0	0	0	0	-0.018	13/736	0.171	0.056	
0	1.072	0	0	0	0	0	0	0	0.092	-8/92	0	0	0	1	0	0	0	-0.089	8/92	-0.003	-0.182	
0	1.481	0	0	0	0	0	0	0	-0.075	8/92	0	0	0	0	1	0	0	0.089	-8/92	0.003	0.182	
0	0.561	0	0	0	0	0	0	0	-0.132	14/92	0	0	0	0	0	1	0	0.156	-14/92	-0.244	-0.180	
0	0.85	0	0	0	0	0	0	0	0.132	-14/92	0	0	0	0	0	0	1	-0.156	14/92	0.244	0.180	
0	0.074	0	1	0	0	0	0	0	-0.237	25/92	0	0	0	0	0	0	0	0.280	-25/92	0.134	0.440	
M	1.50	1	0	0	0	0	0	0	-15/46	-71/92	0	0	0	0	0	0	0	0.203	71/92	9/92	-0.372	
0	0.438	0	0	0	1	0	0	0	0.132	-7/46	0	0	0	0	0	0	0	-0.156	7/92	0.259	0.180	
0	0.370	0	0	1	0	0	0	0	-0.0759	8/92	0	0	0	0	0	0	0	0.089	-8/92	0.003	0.182	
	Δ_j	0	0	0	0	0	0	0	-15/46	-71/92	0	0	0	0	0	0	0	0.18-M	(71/92)-M	(9/92)-M	-5.11-M	

TABLE 3.5 – Quatrième itération

$\Delta_j \leq 0 \implies$ L'optimum est atteint ;

La solution optimale est $x^* = \begin{pmatrix} 1949 & 5945 & 5725 & 395055 & 2220 & 39405 & 0 & 0 & 8755 & 76435 & 342831 & 1751 & 10415 & 7339 & 11203 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
Notons que : $f(\bar{x}) \rightsquigarrow x_0 = \frac{39405}{26128}$; tel que (\bar{x} est la solution trouvée par la méthode adaptée).

Remarque : La solution trouvée en résolvant par la méthode du Simplexe est approchée à cause des calculs manuels très grand, ce qui accentue l'efficacité de la résolution par la méthode adaptée qui nous assure une solution exacte en moins de temps.

3.3.1 Comparaison entre la méthode adaptée et la méthode du Simplexe

- Les deux méthodes ont des algorithmes de résolution fini.
- On remarque d'après notre exemple que la résolution du problème par la méthode du Simplexe nécessite l'ajout de variables supplémentaires(variables d'écart et variables artificielles) ainsi que l'ajout d'équations, ce qui engendre plus de calculs et d'itérations.
- En résolvant le problème par la méthode adaptée, la solution converge plus rapidement vers l'optimum en comparant avec la résolution par la méthode du Simplexe.
- Graphiquement la solution optimale trouvée avec la méthode du simplexe se réalise par des sauts sur les sommets décrits par le polyèdre des contraintes, par contre la méthode adaptée prend les points à l'intérieur du polyèdre ce qui explique sa rapidité et son efficacité.

3.4 Conclusion générale

Notre travail a été axé sur la résolution de deux types de problèmes Min Max de fonctionnelle non différentiable en programmation linéaire .

Pour cela, nous avons donné l'application de la méthode adaptée (développée par Gabasov et Kirillova) qui est basée sur un support spécial appelé " support coordinateur ". Dans un premier temps, cette méthode est appliquée sur un problème de programmation linéaire, sous forme d'un problème Min Max de fonctionnelle non différentiable avec contraintes simples. Par la suite, le même problème a été traité en rajoutant une contrainte supplémentaire qui nous conduit à une nouvelle structure de support. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle traite les problèmes tels qu'ils se présentent, ce qui engendre un gain en espace mémoire et en temps de calcul sur machine.

Un algorithme de résolution a été donné en se basant sur deux procédures : le changement de support et utilisant encore un critère d'arrêt ε -optimal. Cet algorithme est illustré par un exemple numérique.

En guise de perspectives, nous proposons les directions de recherche suivantes :

- Généralisation de cette méthode aux problèmes quadratiques à variables mixtes (multicritères).
- Implémentation numérique de la méthode adaptée sur différents problèmes de la programmation linéaire.
- Applications aux systèmes non linéaires.

Bibliographie

- [1] | al et R.Gabasov. "Optimal control of nonlinear systems". Comput. Maths, Maths.Phys, Vol.42.N°7, 2002.
- [2] | B.Brahmi. "Méthodes primale et duale pour la résolution des problèmes de programmation quadratique convexe".
- [3] | R.Gabasov. "Adaptive method of solving linear programming problems". Preprint series of university of Karlsruhe, institute for statistic and mathematics 1994.
- [4] | R.Gabasov. "Adaptive method of linear programming". Preprint of the university of Karlsruhe. Institute for statistic and mathematics.Karsruhe, Germany 1993.
- [5] | R.Gabasov, F.M.Kirillova. "Problèmes de contrôle optimale". Edition : science et technique, Institut de mathématiques, Académie des sciences de Bélarus. Minsk 1981.
- [6] | R.Gabasov, F.M.Kirillova. "Methods of linear programming". publishing of university Belarus Tome 2, page 239, 1978 ; Tome 3, page 369,1980.
- [7] | R.Gabasov^a, F.M.Kirillova^b and E.A.Kostina^b. "Adaptive methods for solving Minimax problems".^a Byelaorussian State University, Departement of Applied Mathematics and Informatics, F.Scorina.4, Minsk, 220050, Belarus.^b Institute of mathematics of academy of sciences, Surganov Str.11,Minsk, 220072, Belarus.
- [8] | R.Gabasov, F.M.Kirillova and O.I.Kostyukova."Dual algorithm of optimization of a linear dynamic system". Problems of contol and information theory.V.12.P.15-20, 1983.
- [9] | ww2.mat.ulaval.ca.

[10] foad.mooc.ouf.org, "leçon 0603c.La programmation linéaire 2 le simplexe"

[11] Ticherfatine Samir. "Optimisation de fonctionnelle non différentiable".