

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI
-TIZI OUZOU-

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Civil

MÉMOIRE DE MASTER ACADÉMIQUE

Spécialité : Génie Civil

Option : Structures

Intitulé du Mémoire :

**ÉTUDE COMPARATIVE DE MODÈLES D'ÉLÉMENTS
FINIS DE TYPE POUTRE EN BÉTON ARMÉ**

Proposé et encadré par :

Dr . S . DRIZI

Présenté par :

M^r DEBIT Belaid

Promotion : 2012/2013

A la mémoire de mon ami Mr AMROUNI AMRANE qui nous a quitté le samedi 13 novembre 2010.

Puisse Dieu lui accorder sa miséricorde et l'accueillir en son vaste paradis...

REMERCIEMENTS

Au terme de cette étude, il m'est très agréable d'exprimer toute ma gratitude, ma reconnaissance et mes très vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail de thèse.

Je remercie Monsieur Saïd DRIZI de m'avoir proposé ce sujet de thèse et pour l'intention qu'il a portée à mon travail.

Je tiens à remercier tous les étudiants de la section M₂ structure (2012/2013).

Je remercie exceptionnellement, mes camarades : Khaled. G, Karima O.B, Fateh .H Lynda. C, Ahlem. A et Thouria.G , pour leurs soutiens et leurs présence au moment de doute en réalisant cette thèse.

Je remercie également mes amis : Hacene H, Marzouk. B, Meziane. I, Ferhat. H et Samir .A avec lesquelles j'ai partagé beaucoup de choses ces dernières années.

Résumé

Ce travail est une contribution à la modélisation et à la simulation numérique du comportement non linéaire des ossatures planes en béton armé.

Un programme informatique poutre_mince2 (discrétisation à 2 nœuds) rédigé en langage fortran 90 permettant la simulation numérique est déjà existant. Ce dernier est basé sur un modèle d'élément fini poutre à deux nœuds (6 d d l°) formulé sur la base de la théorie de Navier Bernoulli pour les sections droites.

L'objectif principal de notre travail consiste à élaborer et à formuler deux modèles d'éléments finis poutre à trois nœuds et à quatre nœuds. Puis l'enrichissement du programme existant en créant d'autres versions basées sur les deux modèles d'éléments finis élaborés.

Enfin une étude comparative permettant d'évaluer la performance des modèles de poutre élaborés est réalisée.

Mots clés :

Modélisation, élément fini, poutres, ossatures, béton armé.

ABSTRACT

This work is a contribution to the modelling and the digital simulation of the nonlinear behaviour of the plane reinforced concrete frameworks.

A computer program thin_beam2 (discretization with 2 nodes) written in language FORTRAN 90 allowing the digital simulation is already existing. This last is based on a model of finite element beam with two nodes (6 d .o.f) formulated on the basis of theory of Navier Bernoulli for the cross-sections.

The main aim of our work consists in working out and formulating two models of finite elements beam with three nodes and four nodes. Then the enrichment of the existing program by creating other versions based on the two models of elaborate finite elements.

Finally a comparative study making it possible to evaluate the performance of the elaborate models of beam is carried out

Key words:

Modelling, finite element, beams, frameworks, reinforced concrete.

Table des matières

	N° Pages
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE	1
1.1 problématique.....	1
1.2 Objectifs du travail.....	2
1.3 Plan de l'étude.....	3
CHAPITRE 2 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	4
2-1 Introduction	4
2-2 comportement non -linéaire des structures en béton armé	4
2.2.1 Les non- linéarités matérielles.....	4
2.2.2 Les non- linéarités géométriques.....	5
2-3 Aperçu sur les travaux consacrés à l'analyse.....	5
non linéaire des ossatures planes en béton armé	
2-4 Caractéristiques et comportement des matériaux.....	8
2.4.1 Le béton	8
2-4-1-1 Comportement en compression	8
2-4-1-2 Comportement en traction	10
2.4.2 L'acier.....	11
a) acier naturel	12
b) acier écroué:.....	12
2.4.3 Le béton armé.....	13
2-4-3.1 la fissuration d'une poutre en béton armé.....	13
2.4.3.2. l'adhérence acier – béton	14
2.4.3.3 concept du tension stiffening	17
CHAPITRE 3 : FORMULATION D'UN ELEMENT POUTRE PLANE SELON LA THEORIE DE NAVIER- BERNOULLI	19
3.1. Hypothèses de base	19
3.2. Cinématique.....	20
3.3. Relation contraintes-déformations.....	22
3.4. Relation déformations-déplacements.....	22
3.5. Principe des travaux virtuels (P.T.V)	23
3.6. Relation entre efforts s et déformations.....	25
3.7. Discrétisation de la section transversale	26
CHAPITRE 4 : ELABORATION ET PRESENTATION DE 3 MODELES D'ELEMENTS FINIS DE TYPE POUTRE.	29
4-1. introduction.....	29
4-2. poutre_mince à deux nœuds	29

4-2.1 hypothèses	29
4-2.2. calcul de la matrice de rigidité élémentaire	32
4-2.3.calcul des expressions des N'_i et des N''_i	34
4-2.4. évaluation du vecteur des forces résiduelles	35
4-2.4.1. évaluation de $\{p\}$ pour chaque élément.....	36
4-3. poutre_mince à trois nœuds	37
4-3.1 hypothèses	37
4-3.2. calcul de la matrice de rigidité élémentaire	40
4-3.3.calcul des expressions des N'_i et des N''_i	42
4-3.4. évaluation du vecteur des forces résiduelles	43
4-4. poutre_mince à trois nœuds	44
4-4.1 hypothèses	44
4-4.2. calcul de la matrice de rigidité élémentaire	48
4-4.3.calcul des expressions des N'_i et des N''_i	50
4-4.4. évaluation du vecteur des forces résiduelles	51
CHAPITRE 5 : MODELISATION DU COMPORTEMENT NON	
LINEAIRE DES ELEMNTS EN BETON ARME	53
5.1. Introduction.....	53
5-2. Modélisation des matériaux	53
5- 2-1 Modélisation du comportement du béton	53
a) comportement en compression	53
b) comportement du béton en traction	57
5-2-2 modélisation du comportement des aciers	60
5-3. procédures de calcul non linéaire	62
5-3-2 : L'algorithme de résolution non linéaire	64
5-3-3 : Organigramme de calcul	65
CHAPITRE 6 : PROGRAMMATION INFORMATIQUE	66
6.1. Présentation du programme existant	66
6.2 .Description des différentes sous-routines.....	67
6-3.Elaboration des versions modifiant de programme existant	69
6-4 Présentation du fichier de données	71
6-5 Description des variables du fichier de données	73
CHAPITRE 7 : VALIDATION ET ETUDE	77
COMPARATIVE	
7-1 Introduction	77
7-2. validation.....	77
7-2.1 Étude de l'essai de Low – Moehle.....	77
a) présentation	77
b) Influence de la finesse de discrétisation	78
c) comparaison essai-calculs	80
7-2-2 .étude du portique en béton armé du CEBTP.....	81

a) présentation.....	81
b) Simulation.....	82
7-3.étude comparative des trois versions du programme élaborées précédemment	83
7-3.1. Etude de l'essai de Low-Moehle	83
7-4.Etude de la performance des trois modèles d'élément finis type poutre.....	86
7-4.1.poteau de Low-Moehle	86
7-4.2.exemple d'un portique théorique	88
7-5.Influence du type de discrétisation	91
7-5-1.Etude du poteau de Low-Moehle	91
7-5-2. Etude de l'exemple du portique théorique	92
CONCLUSION GENERALE	94
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	95

ANNEXES

Annexe A.

Annexe B.

Indices et notations

$u_0(x)$	Déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre
$\theta(x)$	Rotation de la normale de la section transversale d'abscisse x .
γ	Rotation due au cisaillement transversal.
$u(x, z)$	Déplacement axial selon x
$w(x, z)$	Déplacement transversal selon z
E	Module de Young.
ν	Coefficient de poisson.
$\varepsilon_{0,x}$	Déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.
ϕ	Courbure.
f_z	Chargement repartit transversal.
f_x	Chargement longitudinal.
h	Hauteur de la section transversale
$b(z)$	Longueur de la section transversale variant avec la hauteur.
$N(x)$	Effort normal de la section transversale d'abscisse x .
$M(x)$	Moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x .
\overline{EA}	Rigidité à l'effort normal (de membrane).
\overline{ES}	Rigidité du au couplage effort normal + flexion.
\overline{EI}	Rigidité à la flexion.
$[k]_e$	Matrice de rigidité élémentaire.
z_j	Ordonnée du milieu de la couche j / à l'axe de référence.
b_j	Largeur du milieu de la couche j .
b_{inf}	Largeur inférieure du trapèze.
b_{sup}	Largeur supérieure du trapèze.
z_{inf}	Position inférieure par rapport à l'axe de référence.
z_{sup}	Position supérieure par rapport à l'axe de référence.
h_{layr}	Epaisseur de la couche j .
b_{layr}	Largeur au niveau du milieu de la couche.
h_{trap}	Hauteur du trapèze en cours (itrap).
$[N]$	Matrice des fonctions d'interpolation (de forme)
$\{p\}^e$	Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.
$\{f\}^e$	Vecteur des forces nodales résultant des efforts repartis.
$\{F\}^j$	Incrémentation du chargement appliqué
$[K(U)]$	Matrice de rigidité de la structure dépendant de vecteur $\{u\}$.
$\{F\}$	Vecteur des forces nodales appliquées à la structure.
$\{\psi(U)\}$	Vecteur des forces résiduelles, à une étape de chargement donné.

$\{U\}$	Vecteur des déplacements nodaux.
$f(x)$	Les valeurs de la fonction $f(x)$ au point de Gauss d'abscisse x de l'élément
α_i	Coefficient de pondération correspondant au point de Gauss d'abscisse x_i .
f_{bc}	Résistance à la compression du béton.
E_{bo}	Module élastique du béton à la compression.
ε_0	Déformation correspondant au pic des contraintes.
ε_{cu}	Déformation de rupture de béton.
σ_r	Contrainte de rupture.
f_{bt}	Contrainte à la traction de béton
ε_{bft}	Déformation de la fibre la plus tendue
ε_{btu}	Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu.
E_a	Module longitudinal de l'acier
ε_e	Déformation limite élastique de l'acier
ε_u	Déformation ultime de l'acier.
f_e	Limite élastique des aciers.
f_{bu}	Résistance résiduelle de traction
f_{ft}	Résistance à la traction de composite
ε_u	Déformation ultime
ε_{bt}	Déformation à la rupture du béton en traction
f_{cj}	Résistance du béton à la compression,
E_{bo}	Module initial du béton,
ε_0	Déformation du pic des contraintes du béton.

Tables des figures

Figure 2.1	Comportement de béton en compression uni axiale	09
Figure 2.2	Comportement du béton en traction simple	10
Figure 2.3	Comportement de l'acier en traction simple	11
Figure 2.4	courbe contrainte- déformation pour acier naturel	12
Figure 2.5	courbe contrainte-déformation pour l'acier écroué	12
Figure 2.6	schématisation d'une poutre fissurée soumise à deux charges concentrées p	14
Figure 2.7	Principe du dispositif expérimental Pour réaliser un essai d'arrachement.	15
Figure 2.8	fissuration du béton sous l'effet de la tension de la barre	15
Figure 2.9	élément de béton tendue fissuré	17
Figure 2.10	Comportement d'un tirant avec et sans participation du béton tendu fissuré	17
Figure 3.1	représentation du chargement agissant dans le plan x-z et de la section transversale de la poutre	20
Figure 3.2	schématisation de l'élément avant et après déformation	20
Figure 3.3	poutre mince de Bernoulli	21
Figure 3.4	représentation graphique du chargement	23
Figure 3.5	discrétisation de la section transversale en couches trapézoïdales	27
Figure 4.1	élément fini à 2 nœuds à 6 ddl	29
Figure 4.2	représentation graphique des abscisses des points de Gauss	33
Figure 4.3	élément fini à 3 nœuds	37
Figure 4.4	représentation graphique des abscisses des points de Gauss	41
Figure 4.5	élément fini à 04 nœuds	44
Figure 4.6	représentation des abscisses des points de Gauss	49
Figure 5.1	courbe contrainte- déformation selon SARGIN	54
Figure 5.2	diagramme contrainte- déformation de la loi de SARGIN avec un tronçon droit	55
Figure 5.3	diagramme contrainte- déformation (loi parabolique)	56
Figure 5.4	diagramme contrainte- déformation (loi parabole-rectangle)	57
Figure 5.5	diagramme contrainte-déformation (élastique-fragile)	58
Figure 5.6	diagramme contrainte-déformation (branche linéaire au-delà du pic des contraintes)	58
Figure 5.7	diagramme contrainte-déformation (branche décroissante parabolique, au- delà du pic des contraintes)	59
Figure 5.8	comportement des aciers naturels	60
Figure 5.9	comportement des aciers écrouis	61
Figure 5.10	Représentation des méthodes de résolution	63
Figure 5.11	L'organigramme de calcul	65

Figure 6.1	organisation du programme poutre_mince	66
Figure 7.1	Caractéristiques géométriques et ferrailage de la console	77
Figure 7.2	représentation du maillage utilisé	78
Figure 7.3	résultats de la simulation pour le poteau de Low-Moehle	79
Figure 7.4	détail de portique CEBTP	81
Figure 7.5	résultats de la simulation donnés par le programme pour le portique CEBTP	82
Figure 7.6	représentation graphique des résultats de la simulation donnés par les différentes versions du programme poutre_mince	84
Figure 7.7	comparaison des courbes forces-déplacements donnés par les trois versions du programme	85
Figure 7.8	courbes erreur relative (en %) sur la charge –Nombre d’élément pour toutes les versions du programme	87
Figure 7.9	courbes erreur relative (en %) sur le déplacement - Nombre d’élément pour toutes les versions du programme	87
Figure 7.10	Détail du portique étudié	88
Figure 7.11	Détail de discrétisation pour le portique étudié	89
Figure 7.12	Résultats de la simulation numérique pour une discrétisation à 19 nœuds réalisée par les trois versions du programme	89
Figure 7.13	Histogramme donnant les charges de ruine et les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation	90
Figure 7.14	Détail du maillage pour les différents modèles à deux nœuds utilisés	91
Figure 7.15	Influence du type de discrétisation sur les résultats de calcul pour le poteau de Low-Moehle	92
Figure 7.16	Détail de discrétisation pour le portique étudié	93
Figure 7.17	Courbes forces- déplacements pour les différents types de discrétisations de portique	93

Liste des tableaux

TABLEAU	TITRE	PAGE
Tableau 4.1	abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à deux nœuds	66
Tableau 4.2	abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à trois nœuds	67
Tableau 4.3	abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisé pour l'intégration numérique de l'élément à quatre nœuds	68
Tableau 7.1	caractéristiques des matériaux de poteau de Low-Moehle	69
Tableau 7.2	principaux résultats d'essai en fonction de nombre d'éléments.....	70
Tableau 7.3	comparaison des résultats calcul-expérience de poteau de Low-Moehle.	71
Tableau 7.4	caractéristiques des matériaux pour le portique CEBTP.....	72
Tableau 7.5	comparaison des résultats calcul-expérience de portique CEBTP donnés par poutre_mince2	72
Tableau 7.6	Récapitulation des principaux résultats donnés par les différentes versions du programme	73
Tableau 7.7	Propriétés des matériaux qui forment le portique étudié	74

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE**1-1 problématique :**

La méthode des éléments finis est un outil puissant qui permet de modéliser et d'analyser divers types de structures ; ceci grâce au développement de l'outil informatique et des modèles de comportement non linéaire des matériaux.

Dans le domaine des constructions civiles et industrielles on s'intéresse en particulier à l'étude et l'analyse des éléments d'ossatures planes en béton armé.

Le traitement par la méthode des éléments finis des structures, conduit d'une façon générale à une formulation discrétisée, cette méthode est largement utilisée dans la modélisation des structures en béton armé , béton précontraint et béton de fibres ; elle est introduite dans l'analyse en tenant compte des différents effets de non- linéarités dans le comportement matériels et structural des éléments .la résolution de ces systèmes s'effectue la plus part du temps en utilisant des procédures itératives

En littérature, on rencontre deux types d'approches pour la modélisation du comportement non linéaire des structures en béton armé.

- **L'approche locale** : Elle consiste à modéliser la structure étudiée par des éléments finis plans ou tridimensionnels et d'évaluer finement les champs de contraintes, de déplacements et de déformations par l'utilisation de lois de comportement locales multidimensionnelles des matériaux constitutifs .Cette approche permet une analyse fine des phénomènes non linéaires tels que l'interaction acier – béton et la fissuration mais elle est très coûteuse.
- **L'approche globale** : Elle consiste à utiliser des éléments finis poutres .Elles est bien adaptée à l'analyse et à la simulation des ossatures en béton armé, constituées de poutres et poteaux .Cette dernière approche permet la modélisation des phénomènes non linéaires en utilisant des lois de comportement uniaxiales .Elle constitue le cadre de la présente étude.

Un programme informatique existant, permet de simuler le comportement monotone jusqu'à la rupture, d'une ossature plane quelconque soumise à des charges verticales fixes et des charges horizontales croissantes.

Ce programme, basé sur le modèle de Navier-Bernoulli, utilise des éléments finis poutres à 2 nœuds (6 d° d l), et est fonctionnelle.

Néanmoins, pour obtenir une précision suffisante dans les résultats des calculs, il est nécessaire d'affiner le maillage surtout dans les zones de fortes non linéarités.

On se propose alors d'enrichir ce programme à l'aide d'éléments finis plus performants (éléments finis poutres à 3 où à 4 nœuds).

1-2 Objectifs du travail :

- Contribution au calcul et à la simulation du comportement non linéaire des ossatures planes, en béton armé, constituées d'éléments de type poutre.
- Formulation et présentation de trois modèles d'élément finis de type poutre.
 - Élément à 2 nœuds (à 6 ddl)
 - Élément à 3 nœuds (à 9 ddl)
 - Élément à 4 nœuds (à 12 ddl)
- Etude comparative de la performance des 3 modèles de poutre à l'aide de simulations numériques.

1-3 Plan de l'étude :

La présente étude est développée comme suit :

- ❖ **Le chapitre 2** cette partie est consacrée à la revue bibliographique sur les études relatives à la modélisation du comportement non linéaire des ossatures planes en béton armé.
- ❖ **Dans le Chapitre3 :** on s'intéresse a la formulation de modèles d'éléments finis type poutre, qui permettent la modélisation du comportement en flexion composé jusqu'à rupture des structures planes. pour cela on se base sur l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- ❖ **le chapitre4** est consacré à l'élaboration et la présentation des trois modèles d'éléments finis type poutre.
- ❖ **dans le chapitre5** nous avons présenté les différentes lois de comportements des matériaux utilisés.
- ❖ **Le chapitre6 est intitulé programmation informatique :**
Ce chapitre est consacré à la présentation de programme informatique existant poutre_mince ainsi que le fichier de données, les différentes sous-routines, et les également les modifications apportées au programme poutre_mince.
- ❖ **Chapitre 7 :** validation des trois versions du programme en se basant sur des exemples existant dans la littérature puis étude comparative par simulation numérique de la performance des 3 modèles étudiés.
- ❖ **Conclusion générale .**

CHAPITRE 2

CHAPITRE 2 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**2-1 Introduction :**

Le béton armé est un matériau largement utilisé dans le domaine de génie civil. La compatibilité de travail mécanique entre le béton et les aciers a permis d'introduire des armatures dans les zones tendues du béton afin de compenser son mauvais comportement. En effet la totalité des efforts de traction transmis par le béton est reprise par les armatures. Plusieurs études ont été réalisées afin de comprendre le comportement de béton et de l'acier ainsi que les structures réalisées avec ces deux matériaux. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à citer quelques travaux de recherches consacrés aux structures planes en béton armé ainsi que le comportement de béton et de l'acier sous différentes sollicitations.

2-2 Comportement non linéaire des structures en béton armé : [6]

Par hypothèse le comportement des structures en béton armé peut être considéré comme linéaire. Sous faibles chargements, cette linéarité peut être traduite par la linéarité entre les contraintes et les déformations (linéarité matérielle) et aussi la linéarité entre les déformations et les déplacements (linéarité géométrique).

Mais dans le cas le plus général, ce comportement n'est plus linéaire, mais il s'agit de comportement non linéaire, les non linéarités sont :

- Géométriques
- Matérielles

2-2.1 les non-linéarités matérielles :

Elles peuvent provenir de la loi de comportement intrinsèque du matériau (loi de comportement élastique parfaitement plastique par exemple), de la fissuration du matériau, du comportement de béton tendue entre les fissures, du mode d'assemblage.

2-2.2 les non-linéarités géométriques :

Il n'y a plus de proportionnalité entre les déformations et les déplacements (les déformations ne sont plus des fonctions linéaires des déplacements).

Les non -linéarités peuvent se traduisent soit sous forme :

- De grandes déformations : cas de grandes de déformations et des rotations grandes où petites.
- Grandes rotations : le cas de grandes rotations et des petites déformations.

Les non-linéarités géométriques se produisent lorsque les déplacements devient suffisamment importants pour influencer l'analyse du fait des chargements ; ces non linéarités peuvent avoir plusieurs conséquences, comme par exemple le changement de la position de l'analyse de l'équilibre du système tel que cette dernière devient celle déformée ; donc la prise en compte des effets de la non linéarité géométrique (les effets du second ordre)est indispensable pour l'analyse des structures élancées vis-à-vis du flambement.

2-3 Aperçu sur les travaux consacrés à l'analyse non linéaire des ossatures planes en béton armé :

L'analyse des structures en béton armé a été l'un des grands axes de recherche dans le siècle passé, mais ces études ont vues un grand développement dès la fin des années 60 et le début des années 70 et cela revient essentiellement au développement de l'outil informatique.

Plusieurs méthodes ont été développées mais la méthode la plus utiliser et la plus efficace est celle des éléments finis.

Ces méthodes se différent entre elles en tant que la prise en compte du béton tendu où non, la prise compte des effets des non linéarités...

En 1970, **FRANKLIN**(Californie) (d'après [16]), a développé une approche reposant sur un élément de poutre à 3 degrés de liberté par nœud (2 translations, une rotation) dans laquelle il a introduit les effets des non-linéarités matérielles, son étude a été limitée à la théorie du premier ordre des déplacements.

Le premier travail prenant en compte les non linéarités géométriques est attribuable à **GUNNIN** (Austin, 1970) (d'après [16]). L'analyse porte sur un élément de poutre à 6 degrés de liberté. La considération des effets de second ordre n'est qu'approximative. Pour les non linéarités matérielles l'auteur considère que les rigidités extensionnelle (EA) et flexionnelle (EI) constantes le long de l'élément. Dans ce calcul le béton tendu n'est pas pris en considération.

Au tout début des années 70, **LAZARRO** (d'après [6]) a développé un modèle semblable à celui de **GUINNIN**. **LAZARRO** semble introduire une correction pour prendre en compte la fissuration du béton.

En 1972 **Blaauwendraad** (d'après [6]) est le premier à faire des éléments finis <<classiques>>, issus de la méthode des déplacements. Il introduit les fonctions de forme pour interpoler le champ des déplacements, et en déduire les quantités k_0 , k_1 et k_2 résultants d'une intégration numérique des déformations issues du champ des déplacements.

Un article de **JENNINGS** (d'après [6]) datant en 1968, va être le point de départ d'une série de travaux, la non-linéarité géométrique, en 2D, peut être prise en compte de façon exacte, grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes.

MENEGOTTO et PINTO (Rome 1972, 1974) (d'après [16]) ont développé une méthode qui tient compte des effets des non-linéarités matérielles dans un repère mobile, lié à la position déformée de l'élément. La prise en compte des ces effets repose sur l'intégration des déformations des sections le long de l'élément. Cette approche aboutit à la formulation de la matrice de flexibilité élémentaire qui, inversée fournit la matrice de rigidité, la section transversal est discrétisé en fibres horizontales et pour ce qui concerne le béton tendue sa résistance est négligée.

GRELAT.A (CEBTP, PARIS 1978) [6] s'inspire du programme de **Menegotto et Pinto**, il a introduit pour le béton comprimé la loi de **SARGIN**, ainsi que une forme originale et efficace de tension-stiffening, et valide son programme par de nombreux cas test.

FERRARO-MAIA (CEBTP, 1979) (d'après [16]) poursuit le travail de **GRELAT** au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Le tracé des câbles est supposé parabolique. L'influence de l'inclinaison des câbles dans la formation de la matrice de rigidité n'est pas considérée.

Ce type d'approche utilisée pour la formation de la matrice de rigidité élémentaire, on le retrouve aussi dans le travail de **CAROL et MURCIA** (Barcelone, 1984) (d'après [16])

L'approche par élément fini de type << déplacement >> se poursuit : **Aladstedt** (Trondheim, 1975) [6], reprend les fonctions de forme de **Blaauwendraad** en les intégrant dans le cadre de la description lagrangienne.

Dans les années 80 est exactement en 1986 **ESPION** (Bruxelles), (d'après [16]), a fait une approche plus réaliste et plus complète tant sur la prise en compte des non linéarités matérielles que sur la théorie de second ordre des déplacements. L'auteur utilise un élément de poutre à 9 degré de liberté.

Son approche bien que mathématiquement consistante, reste encombrante numériquement. En effet, l'analyse théorique aboutit à la formation de la matrice de rigidité élémentaire (9x9). Elle est doc lourde à étudier numériquement.

ESPION prend en compte la fissuration du béton en introduisant un modèle basé sur la proposition de **QUAST**. L'auteur considère aussi les effets différés. Son modèle a été confronté avec de nombreux résultats publiés. En plus des ossatures en béton armé des études numériques ont été effectuées sur les structures métalliques.

En 1984, **Mazars** [12] a mené une étude reposant sur l'application de la mécanique d'endommagement et de rupture des structures en béton armé. Ce travail tient compte de la fissuration du béton et du béton tendu.

En 1989, **Abou –Ezzi** [12] a utilisé un modèle basé sur la mécanique de l'endommagement afin de rendre compte dans un calcul de structure du comportement non -linéaire du béton.

Tandis qu'en 1990, **Kwak** [12] a introduit la non -linéarité matérielle dans ses travaux sur des structures en appliquant la méthode des éléments finis.

En 1997, **Filippou et al** [12] ont réalisé plusieurs travaux sur l'analyse non -linéaire des éléments en béton armé sous des charges monotones par la méthode des éléments finis.

En 2000, **Spacone et Al** [12] ont mené une analyse non -linéaire d'un élément poutre en tenant compte de phénomène d'adhérence acier -béton.

Enfin en 2005[12], **Ramirez et Ragueneau** ont étudié l'effet d'adhérence dans la distribution des fissures dans des éléments en béton armé.

2-4 Caractéristiques et comportement des matériaux :

2-4.1 le béton :

Le béton est un matériau composite constitué d'un mélange de matériaux appelés agrégats, ces dernier sont : les granulats (sable et le gravier sous ces différentes formes), le ciment où bien le liant hydraulique et l'eau ; le béton est un matériau anisotrope ayant une bonne résistance à la compression, ce que ni pas évident à la traction.

Selon le type de béton qu'on a besoin et sa résistance désirée on peut le formulé en jouant sur les quantités de ces constituants tel que par exemple on peut avoir des bétons ordinaires de résistance de l'ordre de 20 à 40Mpa, cette résistance est assuré principalement par les gravier tandis que le ciment assure la liaison des déférents grains entre eux et l'eau sert a mouillé le mélange.

2-4-1-1 Comportement en compression :

Le béton présente une relative bonne résistance à la compression. Les résistances obtenues avec des essais de compression simple, ces dernières dépendent de la composition du béton en question. En général, les essais sont réalisés sur des éprouvettes normalisées, appelées 16x32, de forme cylindrique de hauteur 32 cm et de diamètre 16 cm (Aire de 200 cm²).

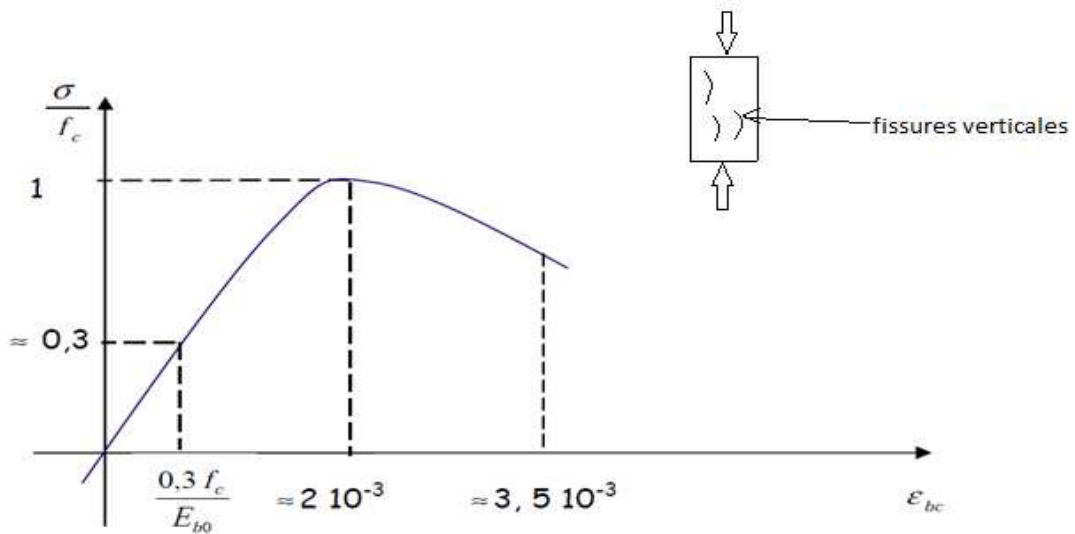


Figure2-1 : comportement de béton en compression uni axiale [10]

On distingue les phases suivantes : [11]

- La déformation croît de façon linéaire jusqu'à environ 30% de la contrainte ultime.
- Entre 30 et 100% la contrainte ultime de la courbe s'incurve et le comportement devient non linéaire. Ceci correspond à l'apparition puis le développement des fissures verticales dans l'éprouvette.
- L'atteinte du pic définit la contrainte ultime qui caractérise la résistance du béton à la compression. Elle correspond à une déformation de l'ordre 2‰.
- La rupture se produit au delà du pic avec fissuration verticale et écrasement de l'éprouvette. Elle correspond à une déformation de l'ordre de 3.5‰.

2-4-1-2 Comportement en traction :

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante.

Le béton est un matériau fragile, sa résistance en traction est de l'ordre de 10% de celle en compression.

Cette résistance on peut l'obtenir, soit par un essai de traction directe, ou bien à l'aide des essais indirecte tel que l'essai de traction par fendage où par flexion.

Terrien en 1980, a réalisé un essai de traction directe sur une éprouvette cylindrique. Nous pouvons distinguer les deux phases suivantes :

- L'avant pic ($\sigma < f_t$) où la courbe est presque linéaire (f_t étant la limite en traction).
- L'après pic où la contrainte chute brutalement avant de se stabiliser, les déformations pouvant continuer à croître, Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).

L'allure de la courbe contrainte- déformation est représentée à la **figure 2-2**.

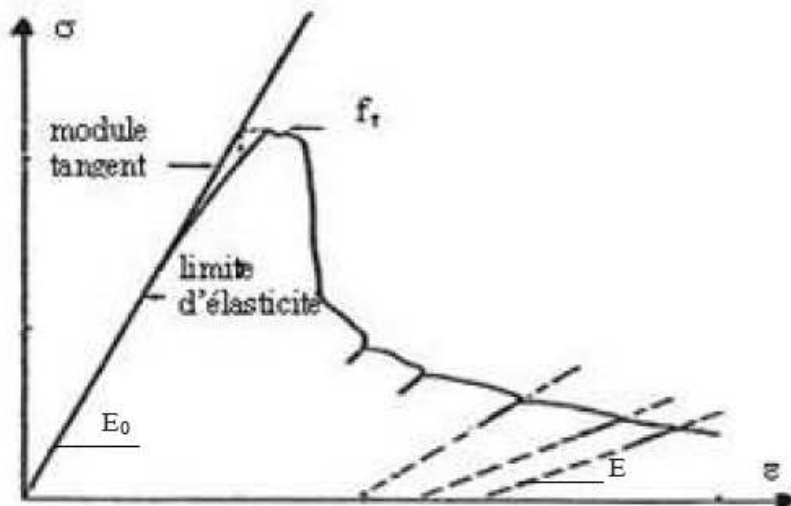


Figure 2-2 : comportement du béton en traction simple [14]

2-4.2 l'acier [11]:

Contrairement au béton, le comportement de l'acier est quasi identique en traction et en Compression. La courbe de la **figure 2-3** montre l'allure du comportement de l'acier soumis à un essai de traction. Nous y constatons clairement deux comportements :

- Tant que nous restons au-dessous du point de la limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge (quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve sa forme initiale).
- Quand le chargement dépasse la limite élastique, et si ensuite nous enlevons la charge des déformations permanentes apparaissent. Contrairement au béton, le module de décharge est pratiquement le même avec le module de Young initial.

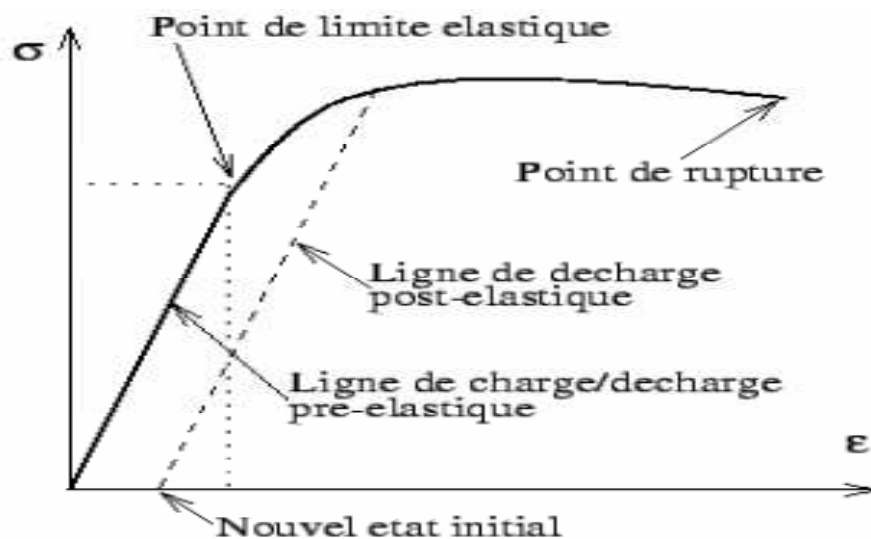


Figure 2-3 : Comportement de l'acier en traction simple [11]

L'acier est introduit sous forme de barre d'armature avant bétonnage de l'élément d'où l'appellation du matériau résultant béton armé.

Généralement deux types d'acier sont utilisés pour le renforcement du béton : acier écroui et acier naturel.

a) acier naturel :

La courbe contrainte-déformation pour les aciers naturels est représenté sur la **figure 2-4**,

Cette courbe présente un palier de ductilité après l'atteinte de la limite élastique f_e .

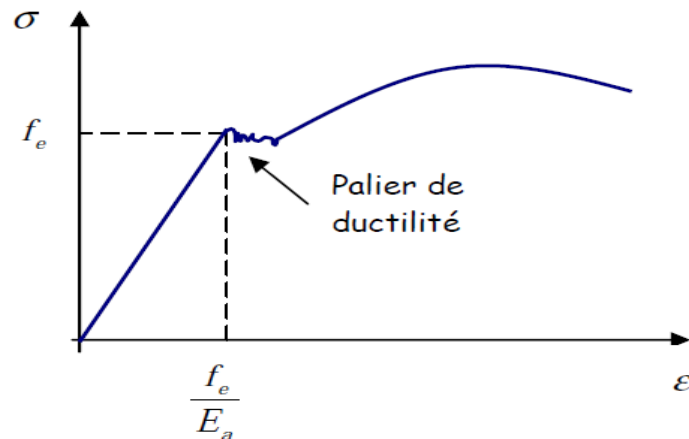


Figure 2-4: courbe contrainte- déformation pour acier naturel [5]

b) acier écroué [12] :

La **figure 2-5** présente la loi de comportement pour un acier écroui ; à noter que l'action d'écrouissage permet d'augmenter la limite d'élasticité en faisant disparaître le palier de ductilité et diminuer l'allongement à rupture. La limite élastique correspond à une Déformation de l'ordre de 2‰.

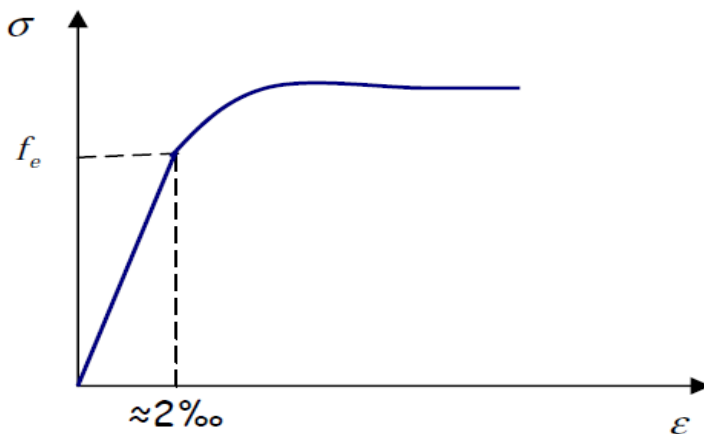


Figure 2-5 : courbe contrainte-déformation pour l'acier écroué[5]

2-4-3 : béton armé :

Comme nous venons de le voir, le comportement de l'acier est très bien connu et celui du béton est bien connu. Le béton armé étant une structure composite Béton et acier. Il est nécessaire de bien connaître aussi le comportement de l'interface entre les deux matériaux, la fissuration des éléments en béton armé ... etc.

2-4-3.1 la fissuration d'une poutre en béton armé [12] :

En faisant accroître les charges p , et en observant le comportement expérimental de la poutre, on constate que :

- Sous faible chargement, le béton n'est pas fissuré.
- un deuxième temps, des fissures verticales de flexion apparaissent, en fibre inférieures dans la zone du moment maximal et des fissures inclinées d'effort tranchant se forment au niveau des appuis.
- Avec l'accroissement du chargement, les fissures de flexion deviennent plus nombreuses et plus importantes et les fissures d'effort tranchant deviennent plus inclinées et progressent vers la face supérieure.
- A la rupture, la fissuration devient très importante et la poutre se transforme en un système de blocs de béton fissurés, dont l'équilibre est assuré par leurs réactions mutuelles et par celles des armatures qui les relient.

En fonction de l'élançement de la poutre, la résistance du béton, du pourcentage et de la nature du ferrailage, la rupture peut survenir :

- Soit par ouverture excessive des fissures de flexion (poutre faiblement ferrillée en flexion).
- Soit par écrasement transversale du béton (armatures transversales insuffisantes).
- Soit par destruction de la liaison acier-béton (adhérence insuffisante).

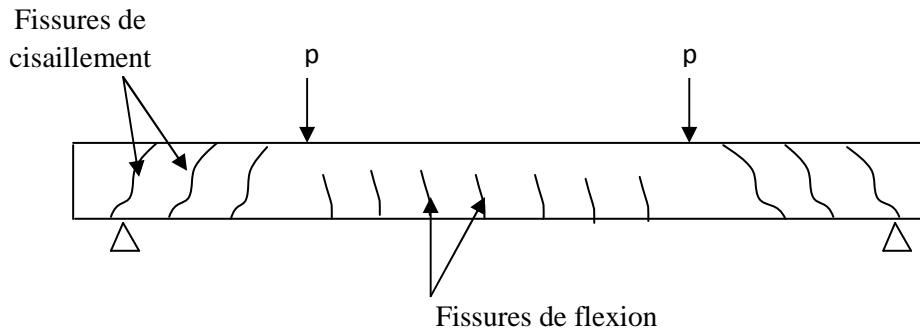
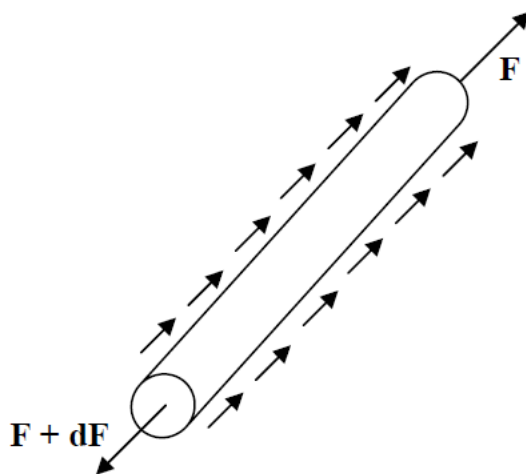


Figure 2-6 : schématisation d'une poutre fissurée soumise à deux charges concentrées p [12]

2-4-3-2l'adhérence acier –béton :

a) **Définition** : Dans les constructions en béton armé les efforts sont appliqués au béton et non pas aux aciers ceux-ci seront sollicités grâce à liaisons avec le béton. La transmission des efforts à lieu le long de la surface latérale des barres grâce au Phénomène d'adhérence. L'adhérence désigne l'action des forces de liaisons qui s'opposent au glissement des barres suivant l'axe par rapport au béton qui l'entoure. Ces forces de liaisons sont mesurées par la contrainte d'adhérence qui est définie comme étant le rapport entre la variation par unité de longueur de l'effort axial équilibré par la barre et le périmètre de cette barre.



$$\tau = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{1}{U}$$

$\frac{dF}{dx}$: La variation de l'effort axial par unité de longueur.

U : le périmètre de la barre.

b) le dispositif expérimental :

Le dispositif expérimental qui permet la caractérisation de la capacité d'adhérence d'une barre d'acier au béton est l'essai d'arrachement (pull out test).

L'essai < **pull out test** > est un essai normalisé, dans le quel une barre d'acier est moulée dans un cube en béton, la barre est ensuite tendue par une machine de traction à l'une de ses extrémités.

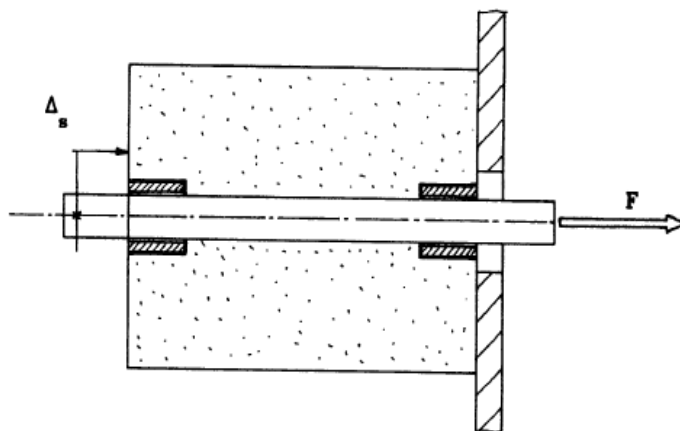


Figure 2-7 : Principe du dispositif expérimental

Pour réaliser un essai d'arrachement. [3]

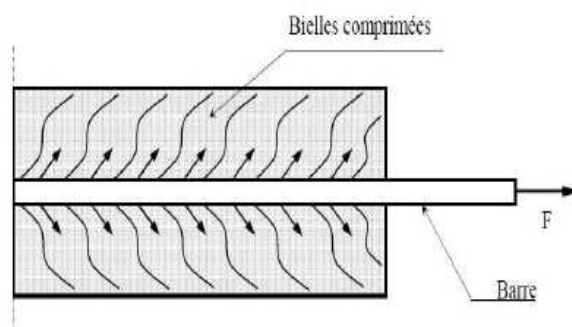


Figure2-8 : fissuration du béton sous l'effet de la tension de la barre [2]

Cet essai montre que l'adhérence n'est pas due uniquement à un phénomène de collage entre les deux matériaux car elle subsiste même à des déplacements (glissement) notables. Il s'agit en fait d'un phénomène de frottement.

c) Facteurs qui influent sur l'adhérence acier –béton [2] :

- L'adhérence physico chimique : la rouille des armatures augmente l'adhérence
Acier - béton.

- l'enrobage du béton autour de la barre :
L'amélioration de la qualité du béton d'enrobage entraine l'augmentation de l'adhérence entre le béton et l'acier.

- retrait du béton :
Les contraintes de compression normales à la barre, créés par le retrait du béton, influent sur l'adhérence acier-béton.

- L'état de surface et la forme de la barre d'acier :
L'adhérence est améliorée lorsque la barre possède des nervures en saillies où lorsque sa surface est rugueuse.

- le confinement du béton autour des armatures

2-4-3-3 Le concept du « tension stiffening » :

Ce concept définit la contribution du béton tendue entre les fissures, à la rigidité d'un élément en béton armé soumis à la traction.

Pour illustrer la contribution du béton tendue à la rigidité d'un élément en béton armé fissuré, considérant l'exemple simple d'un tirant en béton armé soumis à la traction uni axiale (figure 2-9).

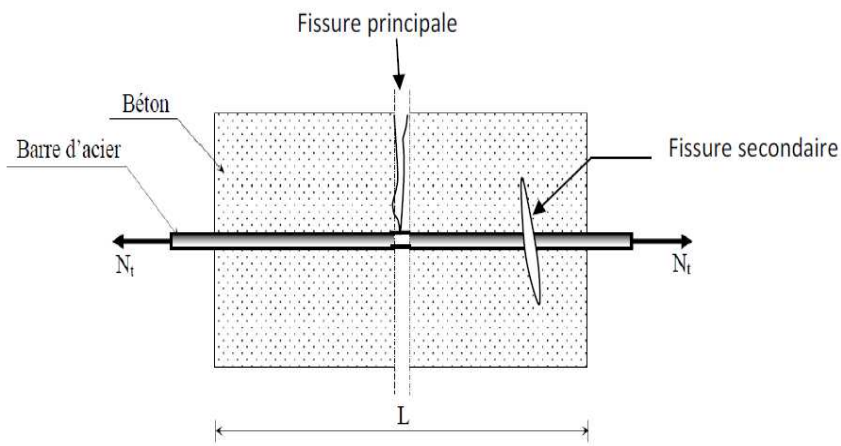


Figure 2-9 : élément de béton tendue fissuré

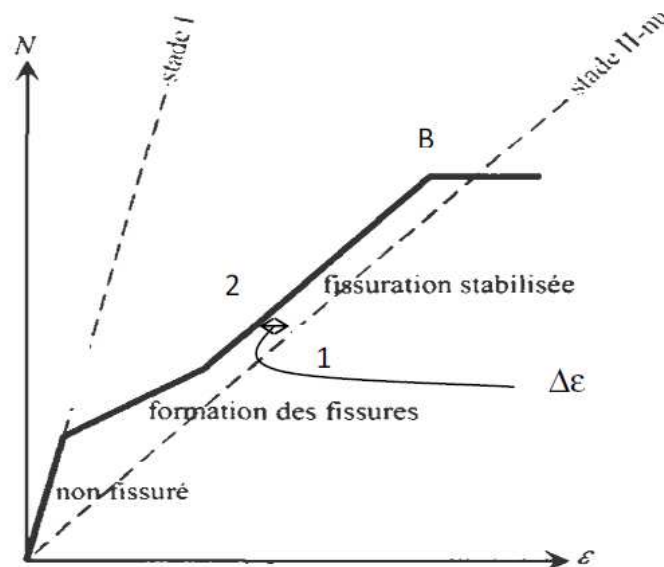


Figure 2-10: Comportement d'un tirant avec et sans participation du béton tendu fissuré [8]

La courbe (1) de la figure (2-10) représente le comportement expérimental de l'acier nu.

La courbe (2) représente le comportement expérimental moyen du tirant. La différence entre la déformation moyenne du tirant et celle de l'acier nu montre la participation du béton tendu entre les fissures à la rigidité du tirant (effet du « tension stiffening »).

La courbe (2) de la même figure peut être décrite comme suit:

- la droite OA représente le comportement du tirant avant fissuration, qui reste sensiblement élastique linéaire.
- en A, le béton atteint sa résistance à la traction : c'est le début de fissuration.
- entre A et B, la fissuration se développe. La rigidité du tirant diminue notablement et tend à celle de l'acier nu lorsqu'on atteint la plastification de ce dernier.

Remarque :

Pour prendre en compte l'effet du béton tendu entre la fissure dans le comportement des éléments, en béton armé, on peut citer quelques lois de comportements fictifs telles que :

- la loi de Grelat.
- la loi de Quast
- la loi Vecchio

CHAPITRE 3

**CHAPITRE 3: FORMULATION DE MODELES ELEMENTS POUTRE
PLANE SELON LA THEORIE DE NAVIER -BERNOULLI****3.1 Hypothèses de bases :**

On s'intéresse à des éléments poutres planes orientés selon l'axe longitudinale x et dont les dimensions dans le plan $y-z$ normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale x (**figure 3-1**).

On se base sur les hypothèses suivantes :

- a) L'axe longitudinal de la poutre est droit.
- b) La section droite est symétrique par rapport au plan $x-z$.
- c) Les chargements agissants sur la poutre sont appliqués dans le plan $x-z$.
- d) La poutre se déforme dans le plan symétrique $x-z$ (en membrane, flexion et cisaillement).
- e) La poutre plane transmet des efforts normaux $N_x(x)$ suivant x , des efforts tranchants $T_z(x)$ suivant la direction z et des moments fléchissant $M_y(x)$ autour de l'axe local y orthogonal au plan $x-z$.
- f) Les sections planes et droites avant déformation restent planes, droites et perpendiculaires par rapport à l'axe neutre après déformation ; les déformations de l'effort tranchant sont négligées (hypothèse de Navier Bernoulli).
- g) Les déformations et les déplacements du second ordre sont négligés (relation linéaire entre déformations et déplacements).

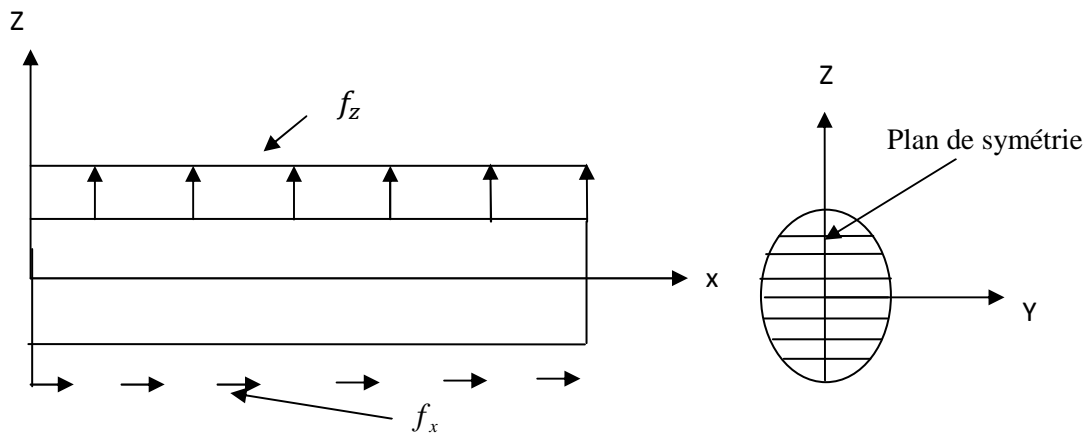


Figure 3-1 : représentation du chargement agissant dans le plan x-z et de la section transversale de la poutre

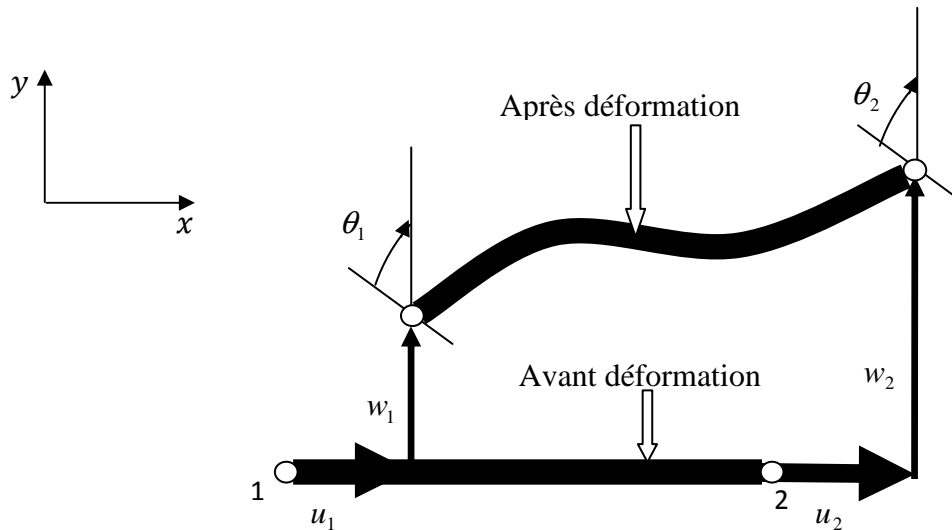


Figure 3- 2 : schématisation de l'élément avant et après déformation.

3-2 Cinématique :

Considérons un tronçon de poutre de la figure 3-3 avant et après déformation. Soit le point $M(x, z)$ sur la configuration non déformée après déformation le point $M(x, t)$ subit un déplacement axial $u(x, t)$ selon x et un déplacement transversal $w(x, z)$ selon z , tels que :

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= u_0(x) + z \times \theta(x) \\
 w(x, z) &= w(x)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (3-1)$$

Où : $u_0(x)$ est le déplacement axial au niveau de l'axe de référence de la poutre.

$\theta(x)$ est la rotation de la normale de la section transversale d'abscisse x .

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} + \gamma \dots\dots\dots (3-2)$$

γ est la rotation due au cisaillement transversal.

Dans le cadre de l'hypothèse de Navier Bernoulli, les déformations dues a l'effort tranchant (où cisaillement) sont négligées (**hypothèse f**).

$$\Rightarrow \gamma = 0$$

$$\theta(x) = -\frac{dw}{dx} \dots\dots\dots (3-2')$$

La relation 3-1 devient :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{dw(x)}{dx} \dots\dots\dots (3-3)$$

La relation (3-3) exprime l'hypothèse de Navier-Bernoulli valable dans le cas des poutres minces.

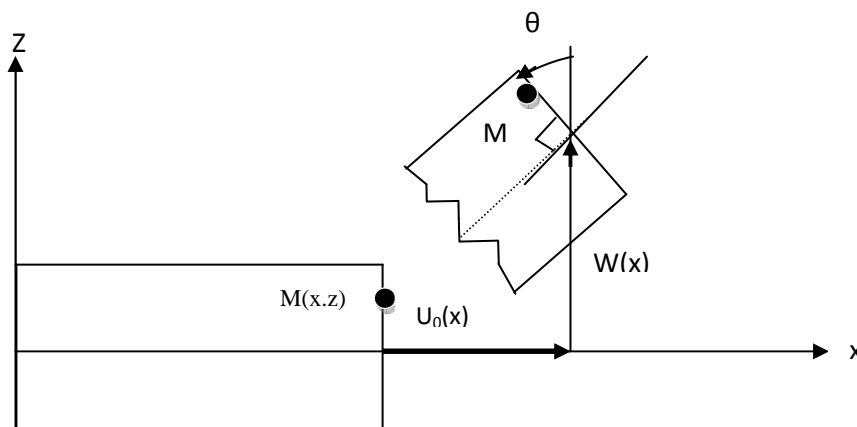


Figure 3-3 : poutre mince de Bernoulli

3-3 Relation contraintes-déformations :

On considère un état plan de contraintes au point M(x, z). Dans l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire et isotrope, on a :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3-4)$$

Où E : module de Young.

ν : coefficient de poisson.

Dans le cas des poutres, on considère un état de contraintes uni axial, alors

$$\sigma_z = 0 \dots\dots\dots (3-5)$$

À partir de (3-4) et (3-5) on obtient :

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x \dots\dots\dots (3-6)$$

En remplaçant 3-6 dans 3-4, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_x = E \epsilon_x \\ \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{cases} \dots\dots\dots (3-7)$$

Avec $G = \frac{E}{(1+\nu)}$

3-4 Relation déformation – déplacement :

Selon l'hypothèse (g), la relation entre déformations et déplacements est linéaire.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \dots\dots\dots (3-8)$$

En tenant compte de 3-3 on obtient :

$$\epsilon_x = \frac{du_0(x)}{dx} - z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \dots\dots\dots (3-9)$$

Où encore

$$\epsilon_x = \epsilon_{0x} + z\phi \dots\dots\dots (3-10)$$

Avec :

$$\begin{cases} \epsilon_{0x} = \frac{du_0(x)}{dx} \\ \phi = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \end{cases}$$

Où :

ϵ_{0x} = déformation longitudinale au niveau de l'axe de référence.

ϕ = courbure.

3- 5 : principe des travaux virtuels (le P.T.V) :

On considère une poutre mince droite de longueur ℓ ayant une section transversale de hauteur h et de largeur $b(z)$ variant avec la hauteur. On suppose que cette poutre est soumise à un chargement repartie transversalement et f_z et longitudinalement f_x .

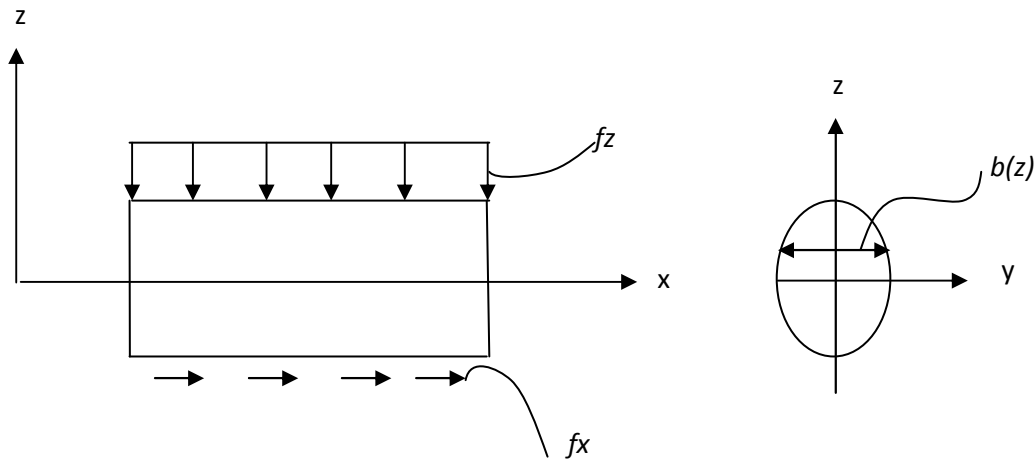


Figure 3-4 : représentation graphique du chargement [12]

D'après le principe des travaux virtuels (P.T.V), pour toute variation des déplacements déformations virtuels $\delta\hat{u}, \delta\hat{w}$ et $\delta\hat{\epsilon}$, le travail des efforts intérieurs est égal au travail des efforts extérieurs.

$$\partial \hat{w}_{int} = \partial \hat{w}_{ext} \dots\dots\dots (3- 11)$$

Ce qui donne l'expression :

$$\int_v \langle \hat{\delta \epsilon} \rangle \{ \sigma \} dv = \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx + \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx \quad \forall \delta \hat{\epsilon}, \delta \hat{w} \text{ et } \delta \hat{u}$$

$$\int_0^\ell \int_s \delta \hat{\epsilon}_x \sigma_x ds dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

Or d'après (3-10) on a :

$$\delta \hat{\epsilon}_x = \delta \hat{\epsilon}_{x0} + z \delta \hat{\phi}$$

$$\int_0^\ell \int_s \left(\delta \hat{\epsilon}_{x0} + z \delta \hat{\phi} \right) \sigma_x ds dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^\ell \int_s \left(\delta \hat{\epsilon}_{x0} \sigma_x + \delta \hat{\phi} \sigma_x z \right) ds dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

$$\int_0^\ell \left[\delta \hat{\epsilon}_{x0} \int_s \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int_s \sigma_x z ds \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \quad \dots\dots\dots (3- 12)$$

Où encore :

$$\int_0^\ell \left[\delta \hat{\epsilon}_{x0} N + \delta \hat{\phi} M \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

Avec :

$$N = \int_s \sigma_x ds \quad \text{Et} \quad M = \int_s \sigma_x z ds$$

3-6 Relations entre efforts et déformations :

L'effort normal dans la section transversale d'abscisse x est :

$$\begin{aligned}
 N = N(x) &= \int_S \sigma_x ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_x ds \\
 &= \int_S E(\varepsilon_{0x} + z\phi) ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_{0x} ds + \int_S E z \cdot \phi ds \\
 &= \varepsilon_{0x} \int_S E ds + \phi \int_S E z ds
 \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
 \overline{EA} &= \int_S E ds = \text{rigidité à l'effort normal(de membrane)} \\
 \overline{ES} &= \int_S E z ds = \text{rigidité du au couplage effort normal + flexion.}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = \overline{EA} \cdot \varepsilon_{0x} + \overline{ES} \cdot \phi \dots\dots\dots (3-13).$$

Le moment fléchissant dans la section transversale d'abscisse x par rapport à l'axe de référence :

$$\begin{aligned}
 M = M(x) &= \int_S \sigma_x z ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_x z ds \\
 &= \int_S E(\varepsilon_{0x} + z\phi) z ds \\
 &= \int_S E \varepsilon_{0x} z ds + \int_S E z^2 \cdot \phi ds \\
 &= \varepsilon_{0x} \int_S E z ds + \phi \int_S E z^2 ds
 \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \overline{ES} &= \int E z ds = \text{rigidité due au couplage effort normal + flexion.} \\ \text{et } \overline{EI} &= \int E z^2 ds = \text{rigidité à la flexion.} \\ \Rightarrow M &= \overline{ES} \varepsilon_{0x} + \overline{EI} \phi \dots \dots \dots (3-14) \end{aligned}$$

Ainsi dans la section transversale d'abscisse x , la relation entre les efforts et les déformation est données par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (3-15)$$

En tenant compte de (3-13) et (3- 14), on peut réécrire (3-12) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[\delta \varepsilon_{x0}^\wedge N + \delta \phi^\wedge M \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \\ \int_0^\ell \langle \delta \varepsilon_{0x}^\wedge, \delta \phi^\wedge \rangle \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^\ell \langle \delta \varepsilon_{0x}^\wedge, \delta \phi^\wedge \rangle \begin{bmatrix} \overline{EA} & \overline{ES} \\ \overline{ES} & \overline{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx &= 0 \quad \forall \delta \varepsilon_{0x}^\wedge, \text{ et } \forall \phi \dots \dots (3-16) \end{aligned}$$

3.7 Discrétisation de la section transversale :

Pour la discrétisation de la section transversale, on adopte l'approche multi couches qui signifie la subdivision de la section en un nombre finis des couches horizontales, pour permettre d'évaluer l'état de contrainte – déformation et de déterminer la matrice de rigidité et des efforts dans la section droite et dans l'élément poutre dans sa totalité.

Les quantités $\overline{EA}, \overline{ES}$ et \overline{EI} sont évaluées en divisant la section transversale en un certain nombre de trapèze. Chaque trapèze est subdivisé en un certain nombre de couches horizontales de modules E_j , d'épaisseur h_j et de largeur b_j , et qui seront comptées de bas en haut (voir figure 3.5)

Soit n_c le nombre total de couches horizontales. Les expressions des différentes rigidités s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{EA} &= \int_s E ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \\ \overline{ES} &= \int_s E \cdot z ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \cdot z_j \quad \dots\dots\dots (3.17) \\ \overline{EI} &= \int_{sE} E \cdot z^2 ds = \sum_{j=1}^{n_c} E_j \cdot b_j \cdot h_j \cdot z_j^2 \end{aligned}$$

z_j : ordonnée du milieu de la couche j / à l'axe de référence.

b_j : largeur du milieu de la couche j .

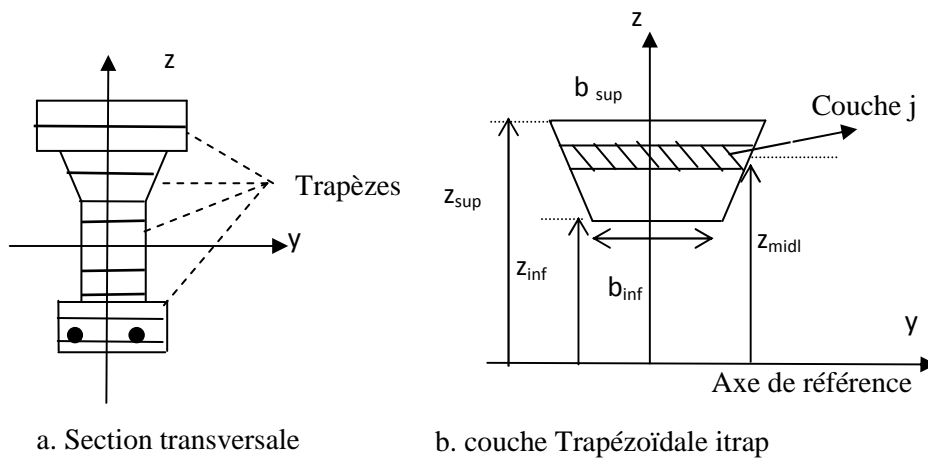


Figure 3.5 : discrétisation de la section transversale en couches trapézoïdales [12]

Sachant que chaque trapèze est caractérisé par :

b_{inf} = largeur inférieure du trapèze.

b_{sup} = largeur supérieure du trapèze.

z_{inf} = position inférieure par rapport à l'axe de référence.

z_{sup} = position supérieure par rapport à l'axe de référence.

Pour chaque couche, on considère la déformation au milieu de la couche.

La position de la couche en cours par rapport à l'axe de référence est définie par z_{midl} .

$$z_{midl} = z_{inf} + h_{layer} (j - 0.5) \quad \dots\dots\dots (3.18)$$

Où : h_{layr} est l'épaisseur de la couche j .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + z\phi \text{ D'après (3.10).}$$

La largeur au niveau du milieu de la couche est :

$$b_{layr} = b_{inf} + (b_{sup} - b_{inf}) \frac{h_{layr}}{h_{trap}} (j - 0.5) \dots\dots\dots (3.19)$$

Où h_{trap} est la hauteur du trapèze en cours ($itrap$)

CHAPITRE 4

CHAPITRE4 : ELABORATION ET PRESENTATION DE 3 MODELE D'ELEMENTS
FINIS DE TYPE POUTRE.

4-1 : Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à la formulation des modèles d'éléments finis permettant la modélisation du comportement non linéaire des ossatures planes. Pour ce faire on se base sur la méthode des éléments finis. Dans ce qui suit, nous allons présenter des formulations détaillées des éléments finis de type poutres.

4-2. poutre mince à deux nœuds :

4-2-1 hypothèses :

Pour la discrétisation des déplacements On utilise des éléments finis poutres à 2 nœuds et à 3 ddl par nœud.

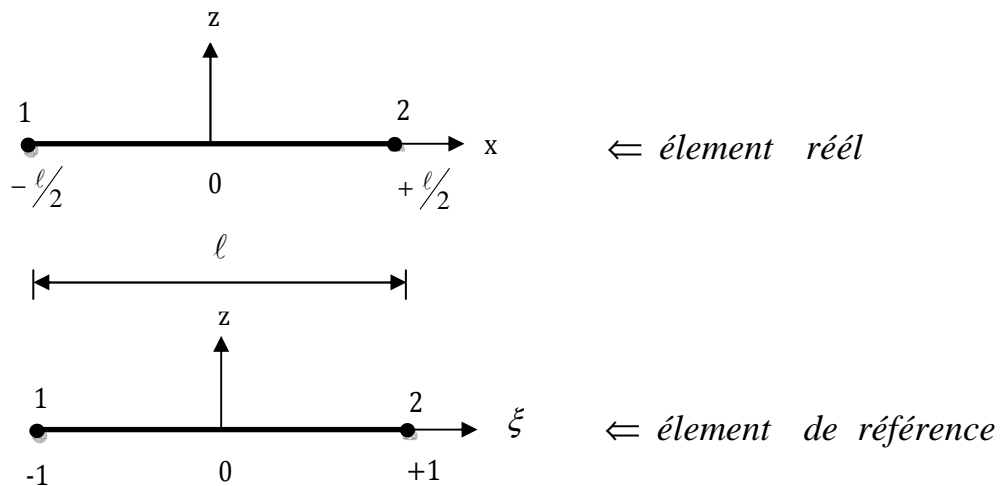


Figure 4-1 : élément fini à 2 nœuds à 6 ddl

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$ au niveau de l'axe de référence est approximé par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 1, dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \dots \dots \dots (4 - 1)$$

Où : u_1 , et u_2 sont les valeurs de déplacement longitudinal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

et :

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right) \\ N_2(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right) \end{cases} \dots \dots \dots (4 - 2)$$

Où encore :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right) \\ N_4(\xi) = \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \dots\dots\dots (4-3)$$

Avec :

$$\xi = \frac{x}{\ell/2} = \frac{2x}{\ell}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right)u_1 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)u_2 \dots\dots\dots (4-4)$$

Pour le déplacement transversal w(x), on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 3 dans la base polynomiale.

$$w(x) = N_2 w_1 + N_3 \theta_1 + N_5 w_2 + N_6 \theta_2 \dots\dots\dots (4-5)$$

Où les fonctions d'interpolation sont données par :

$$\begin{cases} N_2(x) = \frac{1}{2} \left[4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right) + 1 \right] \\ N_3(x) = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right) + \frac{1}{8} \right] \\ N_5(x) = \frac{1}{2} \left[3\left(\frac{x}{\ell}\right) - 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 1 \right] \\ N_6(x) = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{\ell}\right) - \frac{1}{8} \right] \end{cases} \dots\dots\dots (4-6)$$

Où bien

$$\begin{cases} N_2(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\xi)^3 - \frac{3}{2}(\xi) + 1 \right] \\ N_3(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^3 - (\xi)^2 - \xi + 1 \right] \\ N_5(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}(\xi) - \frac{1}{2}(\xi)^3 + 1 \right] \\ N_6(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^3 + (\xi)^2 - \xi - 1 \right] \end{cases} \dots\dots\dots (4-7)$$

Avec :

w_1, w_2 : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1 et 2 respectivement.

θ_1, θ_2 : les valeurs de la rotation aux nœuds 1 et 2 respectivement.

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{0x} &= \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-8) \\ &= \langle N'_1, N'_4 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-8') \end{aligned}$$

La rotation :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= -\frac{dw(x)}{dx} = -\left\langle \frac{\partial N_2(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_3(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_5(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_6(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-9) \\ &= \langle -N'_2, -N'_3, -N'_5, -N'_6 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-9') \end{aligned}$$

et la courbure

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \langle -N''_2, -N''_3, -N''_5, -N''_6 \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-10)$$

la relation entre les déformations (ϵ_{0x}, ϕ) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-11)$$

Où plus simplement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0,x} \\ \phi \end{Bmatrix} = [B] \{u_n\} \dots\dots\dots (4-12)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4-13)$$

et

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \rangle$$

4-2-2 : calcul de la matrice de rigidité élémentaire:

À partir de l'expression du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^T [D] [B] \{u_n\} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \dots\dots\dots (4-14)$$

La

matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T [D] [B] dx \dots\dots\dots (4-15)$$

Rappel :

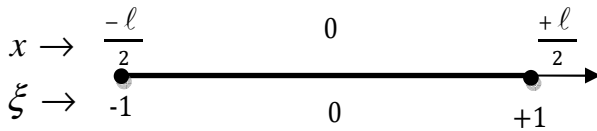
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \dots\dots\dots (4-16)$$

Avec :

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{x_2 - x_1} \left[x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right]$$

pour :

$$x_1 = \frac{-\ell}{2}, \quad x_2 = \frac{+\ell}{2} \Rightarrow \xi = \frac{2}{\ell} (x - 0) = \frac{2x}{\ell} \dots\dots OK$$



$$[K]_e = \int_{-l/2}^{+l/2} [B(x)]^T [D(x)] [B(x)] dx = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi \dots \dots \dots (4-17)$$

L'évaluation de $[K]_e$ est effectuée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i$$

- où
- $n =$ nombre de point de Gauss
 - $\xi_i =$ abscisse du point de Gauss i
 - $\alpha_i =$ poids d'integration au point de Gauss i

Dans notre cas, on utilise trois points de Gauss $n=3$

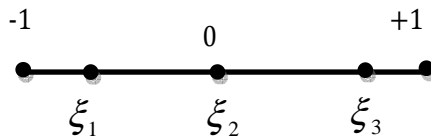


Figure4-2 : représentation graphique des abscisses des points de Gauss

Les Abscisses des points de Gauss	Les poids d'intégration aux points de Gauss i
$\xi_1 = -\sqrt{3/5}$	$\alpha_1 = 5/9$
$\xi_2 = 0$	$\alpha_2 = 8/9$
$\xi_3 = +\sqrt{3/5}$	$\alpha_3 = 5/9$

Tableau 4-1 : abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisés pour l'intégration numérique de l'élément à deux nœuds

4-2-3 calcul des expressions des N'_i et des N''_i :

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \dots\dots\dots (4-18)$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2x}{l} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l} \\ \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{l} \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc les expressions des N'_i sont données comme suit :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow N'_1(\xi) = -\left(\frac{1}{l}\right) \\ N_4(\xi) = \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N'_4(\xi) = \left(\frac{1}{l}\right) \end{cases} \dots\dots\dots (4-19)$$

Et pour les expressions des N''_i :

On a :

$$\begin{cases} N_2(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\xi)^3 - \frac{3}{2}(\xi) + 1 \right] \Rightarrow N''_2(\xi) = \frac{6}{l^2} \xi \\ N_3(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^3 - (\xi)^2 - \xi + 1 \right] \Rightarrow N''_3(\xi) = -\frac{4}{l^2} \left(\frac{\ell}{4} - \frac{3\ell}{4} \xi \right) \\ N_5(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}(\xi) - \frac{1}{2}(\xi)^3 + 1 \right] \Rightarrow N''_5(\xi) = -\frac{6}{l^2} \xi \\ N_6(\xi) = \frac{\ell}{8} \left[(\xi)^3 + (\xi)^2 - \xi - 1 \right] \Rightarrow N''_6(\xi) = \frac{4}{l^2} \left(\frac{\ell}{4} + \frac{3\ell}{4} \xi \right) \end{cases} \dots\dots\dots (4-20)$$

4-2-4 Evaluation du vecteur des forces résiduelles $\{R\}_e$:

D'après la relation (3-12) du P.T.V, on a :

$$\int_0^\ell \delta \left[\hat{\epsilon}_{0,x} \int_s \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int_s \sigma_x \cdot z ds \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \dots\dots\dots (4-21)$$

Qui peut s'écrire encore sous la forme :

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{\epsilon}_{0,x}, \delta \hat{\phi} \rangle \left\{ \begin{matrix} \int_s \sigma_x ds \\ \int_s \sigma_x z ds \end{matrix} \right\} dx - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{u}, \delta \hat{w} \rangle \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_z \end{matrix} \right\} dx = 0 \dots\dots\dots (4-22).$$

Or $\left\{ \begin{matrix} \delta \hat{\epsilon}_{0,x} \\ \delta \hat{\phi} \end{matrix} \right\} = [B] \{ \hat{u}_n \}$ d'après (4-12). Où $[B]$ est donné par la relation (4-13).

$\{ \hat{u}_n \}$: Vecteur des déplacements nodaux

Et : $\left\{ \begin{matrix} \delta \hat{u} \\ \delta \hat{w} \end{matrix} \right\} = [N] \{ \hat{u}_n \}$

Avec $[N]$: matrice des fonctions d'interpolation (de forme)

En posant :

$$\int_s \sigma_x ds = N(x) \text{ Effort normal à l'abscisse } x \text{ de l'élément}$$

$$\int_s \sigma_x \cdot z ds = M(x) \text{ Moment fléchissant à l'abscisse } x \text{ de l'élément}$$

L'expression devient :

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t \left\{ \begin{matrix} N(x) \\ M(x) \end{matrix} \right\} dx - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] \left\{ \begin{matrix} f_x \\ f_z \end{matrix} \right\} dx = 0$$

Ce qui donne :

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \langle \delta \hat{u}_n \rangle [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx \quad \forall \delta \hat{u}_n \dots\dots\dots (4-23)$$

Où :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0 \dots\dots\dots (4-24)$$

Ou plus simplement

$$\{p\}^e - \{f\}^e = 0 \dots\dots\dots (4-25)$$

Avec :

$\{p\}^e$: Vecteur des forces nodales résultant des efforts intérieurs.

$\{f\}^e$: Vecteur des forces nodales résultant des efforts reparties appliques à l'élément en Cours.

Remarque : Dans le cas non linéaire, les efforts intérieurs dépendent de la solution $\{u_n\}^e$.a chaque étape de résolution, il reste des forces résiduelles qu'il faut équilibrer à l'étape suivante :

$$\{p\}^e - \{f\}^e = \{\psi\}^e \neq \{0\}.$$

Le processus de calcul non linéaire consiste à rechercher la solution $\{u_n\}$ qui rend les forces résiduelles aussi proches que possible de zéro.

4-2-4-1 Evaluation de $\{p\}$ pour chaque élément :

$$\{p\}^e = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx \dots\dots\dots (4-26)$$

Le calcul des composantes de $\{p\}^e$ se fait à l'aide d'une intégration numérique sur l'élément de référence.

On a :

$$\{p\}^e = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \ell/2 \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} d\xi \dots\dots\dots (4-27)$$

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} d\xi = \sum [B(\xi_i)]^t \begin{Bmatrix} N(\xi_i) \\ M(\xi_i) \end{Bmatrix} \alpha_i \dots\dots\dots (4-28)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 \end{bmatrix}$$

4-3. poutre mince à trois nœuds :

4-3-1 hypothèses :

Pour la discrétisation des déplacements, on utilise des éléments finis poutres à 3 nœuds et à 3 ddl par nœud.

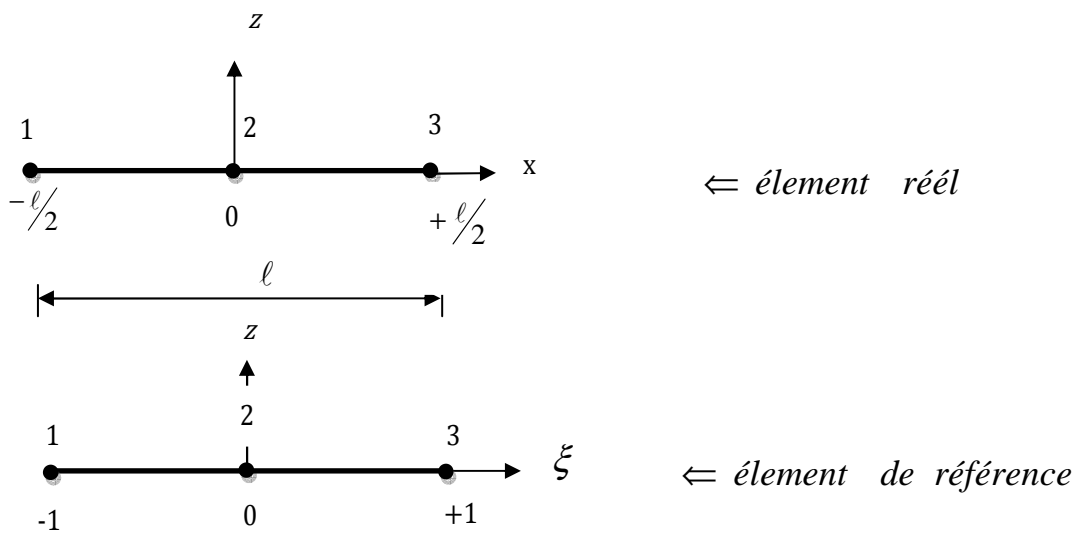


Figure 4-3: élément fini à 3 nœuds

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$ au niveau de l'axe de référence est approximé par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 2, dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 u_1 + N_4 u_2 + N_7 u_3 \dots\dots\dots (4-29)$$

Où :

u_1, u_2 et u_3 sont les valeurs de déplacement longitudinal au 1,2 et 3 respectivement.

Avec :

$$\begin{cases} N_1(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \\ N_4(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \dots\dots\dots (4-30) \\ N_7(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)\left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \end{cases}$$

Où encore

$$\begin{cases} N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \\ N_4(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi) = 1 - \xi^2 \dots\dots\dots (4-30') \\ N_7(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi) = \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \end{cases}$$

Avec :

$$\xi = \frac{x}{\ell/2} = \frac{2x}{\ell}$$

$$\Rightarrow u_0(x) = \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right)u_1 + (1 - \xi^2)u_2 + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2}\right)u_3 \dots\dots\dots (4-31)$$

Pour le déplacement transversal w(x), on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 5 dans la base polynomiale.

$$w(x) = N_2 w_1 + N_3 \theta_1 + N_5 w_2 + N_6 \theta_2 + N_8 w_3 + N_9 \theta_3 \dots\dots\dots (4-32)$$

Où les fonctions d'interpolation sont données par :

$$\begin{cases} N_2(x) = 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 8\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + 24\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \\ N_3(x) = \ell \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \right] \\ N_5(x) = 1 - 8\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \\ N_6(x) = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell}\right) - 8\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \right] \dots\dots\dots (4-33) \\ N_8(x) = 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 10\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 8\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - 24\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \\ N_9(x) = \ell \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 \right] \end{cases}$$

Où bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(\xi) = \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \\ N_3(\xi) = \frac{\ell}{8}[\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2] \\ N_5(\xi) = \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \\ N_6(\xi) = \frac{\ell}{2}[\xi^5 - 2\xi^3 + \xi] \\ N_8(\xi) = -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \\ N_9(\xi) = \frac{\ell}{8}[\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2] \end{array} \right. \dots\dots\dots (4-33')$$

Avec :

w₁, w₂ et w₃ : les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1, 2 et 3 respectivement.

θ₁, θ₂ et θ₃ : les valeurs de la rotation aux nœuds 1,2 et 3 respectivement.

La déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{0,x} &= \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_7(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-34) \\ &= \left\langle N'_1, N'_4, N'_7 \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-34') \end{aligned}$$

La rotation :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= -\frac{dw(x)}{dx} = -\left\langle \frac{\partial N_2(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_3(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_5(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_6(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_8(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_9(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-35) \\ \theta(x) &= \left\langle -N'_2, -N'_3, -N'_5, -N'_6, -N'_8, -N'_9 \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-35') \end{aligned}$$

et la courbure :

$$\phi(x) = -\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \langle -N''_2, -N''_3, -N''_5, -N''_6, -N''_8, -N''_9 \rangle \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (4-36)$$

la relation entre les déformations (ϵ_{0x}, ϕ) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & -N''_9 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots (4-37)$$

Où plus simplement :

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{matrix} \right\} = [B] \{u_n\} \dots\dots\dots (4-37')$$

Avec

$$[B] = \left[\begin{matrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & -N''_9 \end{matrix} \right]$$

et

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad u_3 \quad w_3 \quad \theta_3 \rangle$$

4-3-2: calcul de la matrice de rigidité élémentaire:

À partir de l'expression du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^T [D][B] \{u_n\} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0 \dots\dots\dots (3-38)$$

La matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T [D][B] dx \dots\dots\dots (4-39)$$

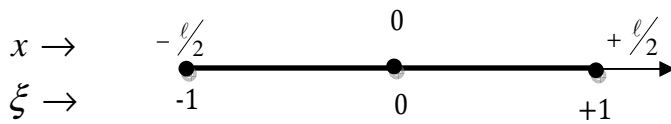
Rappel:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)d\xi \dots\dots\dots(4-40)$$

Avec :

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{x_2 - x_1} \left[x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right]$$

pour $x_1 = \frac{-\ell}{2}, x_2 = \frac{+\ell}{2} \Rightarrow \xi = \frac{2}{\ell}(x - 0) = \frac{2x}{\ell} \dots\dots OK$



$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B(x)]^T [D(x)][B(x)]dx = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)]d\xi \dots\dots\dots(4-41)$$

La matrice $[K]_e$ est évaluée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)]d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)][B(\xi_i)]\alpha_i$$

où $\left\{ \begin{array}{l} n = \text{nombre de point de Gauss} \\ \xi_i = \text{abscisse du point de Gauss } i \\ \alpha_i = \text{poids d'integration au point de Gauss } i \end{array} \right.$

Dans notre cas, on utilise cinq points de Gauss n=5.

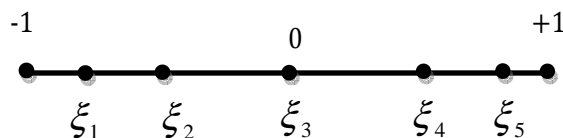


Figure 4-4 : représentation graphique des abscisses des points de Gauss

Les Abscisses des points de Gauss	Les poids d'intégration aux points de Gauss i
$\xi_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{5+4\sqrt{5/14}}$	$\alpha_1 = \frac{161}{450} - \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$
$\xi_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{5-4\sqrt{5/14}}$	$\alpha_2 = \frac{161}{450} + \frac{13}{180\sqrt{5/14}}$
$\xi_3 = 0$	$\alpha_3 = 128/225$
$\xi_4 = -\xi_2$	$\alpha_4 = \alpha_2$
$\xi_5 = -\xi_1$	$\alpha_5 = \alpha_1$

Tableau 4-2 : abscisses et poids d'intégration de Gauss utilisés pour l'intégration numérique de l'élément à trois nœuds.

4-3-3. calcul des expressions des N_i' et des N_i'' :

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dans notre cas

$$\xi = \frac{2x}{l} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{2}{l}$$

et $\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2$

Donc les expressions des N_i' sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi) = -\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \Rightarrow N_1'(\xi) = \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) \frac{2}{l} \\ N_4(\xi) = 1 - \xi^2 \Rightarrow N_4'(\xi) = (-2\xi) \frac{2}{l} \\ N_7(\xi) = \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \Rightarrow N_7'(\xi) = \left(\frac{1}{2} + \xi\right) \frac{2}{l} \end{array} \right. \dots\dots\dots (4-42)$$

et pour les expressions des N'_i :

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(\xi) = \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \Rightarrow N''_2(\xi) = \left(15\xi^3 - 6\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + 2\right)\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \\ N_3(\xi) = \frac{\ell}{8}[\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2] \Rightarrow N''_3(\xi) = \left(\frac{\ell}{8}\right)(20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2)\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \\ N_5(\xi) = \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \Rightarrow N''_5(\xi) = (12\xi^2 - 4)\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \\ N_6(\xi) = \frac{\ell}{2}[\xi^5 - 2\xi^3 + \xi] \Rightarrow N''_6(\xi) = \frac{\ell}{2}[20\xi^3 - 12\xi]\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \\ N_8(\xi) = -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \Rightarrow N''_8(\xi) = \left(-15\xi^3 - 6\xi^2 + \frac{15}{2}\xi + 2\right)\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \\ N_9(\xi) = \frac{\ell}{8}[\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2] \Rightarrow N''_9(\xi) = \left(\frac{\ell}{8}\right)(20\xi^3 + 12\xi^2 - 6\xi - 2)\left(\frac{2}{\ell}\right)^2 \end{array} \right. \dots\dots (4-43)$$

4-3-4 Evaluation du vecteur des forces résiduelles $\{R\}_e$:

D'après la relation (3-12) du P.T.V, on a :

$$\int_0^\ell \delta \left[\hat{\epsilon}_{0,x} \int_s \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int_s \sigma_x \cdot z ds \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

Après le développement on aura :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0 \dots\dots\dots (4-44)$$

Ou plus simplement

$$\{p\}^e - \{f\}^e = 0 \dots\dots\dots (4-45)$$

Remarque : $\{p\}^e$ et $\{f\}^e$ sont calculés à l'aide d'intégration numérique

$$\{p\}^e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} d\xi = \frac{\ell}{2} \sum [B(\xi_i)]^T \begin{Bmatrix} N(\xi_i) \\ M(\xi_i) \end{Bmatrix} \alpha_i \dots\dots\dots (4-46)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & -N''_9 \end{bmatrix}$$

4-4. poutre mince à quatre nœuds :

4-4-1 hypothèses :

Pour la discrétisation des déplacements On utilise des éléments finis poutres à 4 nœuds et à 3 d.d.l par nœud.

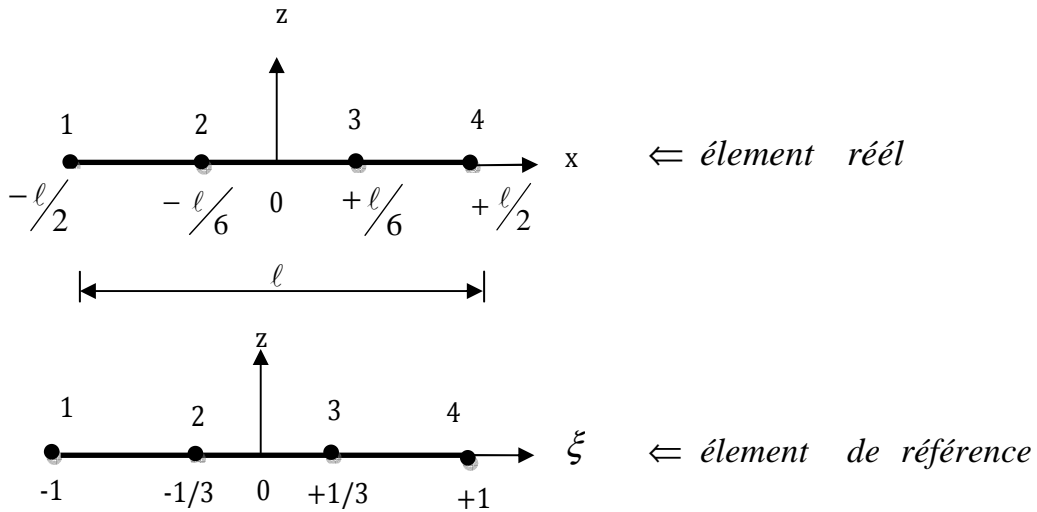


Figure 4-5 : élément fini à 4 nœuds.

Le déplacement longitudinal $u_0(x)$ au niveau de l'axe de référence est approximé par des fonctions d'interpolation de type Lagrange de degré 3, dans la base polynomiale.

$$u_0(x) = N_1 u_1 + N_4 u_2 + N_7 u_3 + N_{10} u_4 \quad \dots\dots\dots (4-47)$$

Ou u_1, u_2 et u_3 sont les valeurs de déplacement longitudinal au 1,2, 3 et 4 respectivement.

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x) = -\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) \\ N_4(x) = \left(\frac{27}{2}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_7(x) = -\left(\frac{27}{2}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_{10}(x) = \left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) \end{array} \right. \dots\dots\dots (4-48)$$

Où encore

$$\begin{cases} N_1(\xi) = -\left(\frac{9}{16}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{1}{16}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \\ N_4(\xi) = \left(\frac{27}{16}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{27}{16}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_7(\xi) = -\left(\frac{27}{16}\right)\xi^3 - \left(\frac{9}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{27}{16}\right)\xi + \left(\frac{9}{16}\right) \\ N_{10}(\xi) = \left(\frac{9}{16}\right)\xi^3 + \left(\frac{9}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{16}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \end{cases} \dots\dots\dots (4-48')$$

Avec :

$$\xi = \frac{x}{\ell/2} = \frac{2x}{\ell}$$

Pour le déplacement transversal w(x), on utilise des fonctions d'interpolation de type Hermite de degré 7 dans la base polynomiale.

$$w(x) = N_2 w_1 + N_3 \theta_1 + N_5 w_2 + N_6 \theta_2 + N_8 w_3 + N_9 \theta_3 + N_{11} w_4 + N_{12} \theta_4 \dots\dots(4-49)$$

Où les fonctions d'interpolation sont données par la formule (3-50) suivante:

$$\begin{cases} N_2(x) = \left(\frac{13}{512}\right) - \left(\frac{15}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{281}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{1413}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{891}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \\ N_3(x) = \ell \left[\left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{19}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{99}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \left(\frac{81}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \right] \\ N_5(x) = \left(\frac{243}{512}\right) - \left(\frac{1215}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{4617}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{5589}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{2187}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \\ N_6(x) = \ell \left[\left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{297}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{513}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \left(\frac{243}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \right] \\ N_8(x) = \left(\frac{243}{512}\right) + \left(\frac{1215}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{4617}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + \left(\frac{5589}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \left(\frac{2187}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \\ N_9(x) = \ell \left[-\left(\frac{27}{512}\right) - \left(\frac{81}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{297}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{891}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{513}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{1539}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + \left(\frac{243}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{729}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \right] \\ N_{11}(x) = \left(\frac{13}{512}\right) + \left(\frac{15}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{243}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{281}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{1215}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 + \left(\frac{1413}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 - \left(\frac{729}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 - \left(\frac{891}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \\ N_{12}(x) = \ell \left[-\left(\frac{1}{512}\right) - \left(\frac{1}{256}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(\frac{19}{128}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{19}{64}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - \left(\frac{99}{32}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^4 - \left(\frac{99}{16}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^5 + \left(\frac{81}{8}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^6 + \left(\frac{81}{4}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^7 \right] \end{cases}$$

Remarque : la représentation graphique des différentes fonctions de forme sont donné dans l'annexe A:

Où bien :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(\xi) = \left(\frac{891}{512}\right)\xi^7 - \left(\frac{729}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{1413}{512}\right)\xi^5 + \left(\frac{1215}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{281}{512}\right)\xi^3 - \left(\frac{243}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{15}{512}\right)\xi + \left(\frac{13}{512}\right) \\ N_3(\xi) = \ell \left[\left(\frac{81}{512}\right)\xi^7 - \left(\frac{81}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{99}{512}\right)\xi^5 + \left(\frac{99}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{19}{512}\right)\xi^3 - \left(\frac{19}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{512}\right)\xi + \left(\frac{1}{512}\right) \right] \\ N_5(\xi) = \left(\frac{2187}{512}\right)\xi^7 + \left(\frac{729}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{5589}{512}\right)\xi^5 - \left(\frac{1215}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{4617}{512}\right)\xi^3 + \left(\frac{243}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{1215}{512}\right)\xi + \left(\frac{243}{512}\right) \\ N_6(\xi) = \ell \left[\left(\frac{729}{512}\right)\xi^7 - \left(\frac{243}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{1539}{512}\right)\xi^5 + \left(\frac{513}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{891}{512}\right)\xi^3 - \left(\frac{297}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{81}{512}\right)\xi + \left(\frac{27}{512}\right) \right] \\ N_8(\xi) = -\left(\frac{2187}{512}\right)\xi^7 + \left(\frac{729}{512}\right)\xi^6 + \left(\frac{5589}{512}\right)\xi^5 - \left(\frac{1215}{512}\right)\xi^4 - \left(\frac{4617}{512}\right)\xi^3 + \left(\frac{243}{512}\right)\xi^2 + \left(\frac{1215}{512}\right)\xi + \left(\frac{243}{512}\right) \dots\dots\dots (4 - 50') \\ N_9(\xi) = \ell \left[\left(\frac{729}{512}\right)\xi^7 + \left(\frac{243}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{1539}{512}\right)\xi^5 - \left(\frac{513}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{891}{512}\right)\xi^3 + \left(\frac{297}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{81}{512}\right)\xi - \left(\frac{27}{512}\right) \right] \\ N_{11}(\xi) = -\left(\frac{891}{512}\right)\xi^7 - \left(\frac{729}{512}\right)\xi^6 + \left(\frac{1413}{512}\right)\xi^5 + \left(\frac{1215}{512}\right)\xi^4 - \left(\frac{281}{512}\right)\xi^3 - \left(\frac{243}{512}\right)\xi^2 + \left(\frac{15}{512}\right)\xi + \left(\frac{13}{512}\right) \\ N_{12}(\xi) = \ell \left[\left(\frac{81}{512}\right)\xi^7 + \left(\frac{81}{512}\right)\xi^6 - \left(\frac{99}{512}\right)\xi^5 - \left(\frac{99}{512}\right)\xi^4 + \left(\frac{19}{512}\right)\xi^3 + \left(\frac{19}{512}\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{512}\right)\xi - \left(\frac{1}{512}\right) \right] \end{array} \right.$$

Avec :

w₁, w₂, w₃ et w₄: les valeurs de déplacement transversal aux nœuds 1, 2, 3 et 4 respectivement.

θ₁, θ₂, θ₃ et θ₄ : les valeurs de la rotation aux nœuds 1, 2, 3 et 4 respectivement.

la déformation longitudinale, au niveau de l'axe de référence de l'élément est donnée par :

$$\epsilon_{0,x} = \frac{du_0(x)}{dx} = \left\langle \frac{\partial N_1(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_4(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_7(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_{10}(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-51)$$

$$= \langle N'_1, N'_4, N'_7, N'_{10} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-51')$$

la rotation :

$$\theta(x) = -\left\langle \frac{\partial N_2(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_3(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_5(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_6(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_8(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_9(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_{11}(x)}{\partial x}, \frac{\partial N_{12}(x)}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4-52)$$

$$\theta(x) = \langle -N'_2, -N'_3, -N'_5, -N'_6, -N'_8, -N'_9, -N'_{11}, -N'_{12} \rangle \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{matrix} \right\} \dots (4-52')$$

et la courbure

$$\phi(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \langle -N''_2, -N''_3, -N''_5, -N''_6, -N''_8, -N''_9, -N''_{11}, -N''_{12} \rangle \left\{ \begin{matrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{matrix} \right\} \dots (4-53)$$

la relation entre les déformations (ϵ_{0x}, ϕ) et les déplacements nodaux s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & -N''_9 & 0 & -N''_{11} & -N''_{12} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{matrix} \right\} \dots (4-54)$$

Où plus simplement :

$$\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{0x} \\ \phi \end{matrix} \right\}_{(2 \times 1)} = [B]_{(2 \times 12)} \{u_n\}_{(12 \times 1)} \dots (4-54')$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 & N'_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & -N''_9 & 0 & -N''_{11} & -N''_{12} \end{bmatrix}$$

et

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad u_3 \quad w_3 \quad \theta_3 \quad u_4 \quad w_4 \quad \theta_4 \rangle$$

4-4-2: calcul de la matrice de rigidité élémentaire :

À partir de l'expression du P.T.V, on obtient :

$$\int_0^\ell \langle \delta \hat{u}_n \rangle [B]^T [D][B] \{u_n\} dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

La matrice de rigidité élémentaire

$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^T [D][B] dx \dots\dots\dots (4-55)$$

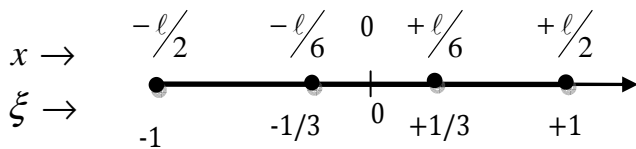
Rappel :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi$$

Avec :

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{x_2 - x_1} \left[x - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right]$$

pour $x_1 = \frac{-\ell}{2}, x_2 = \frac{+\ell}{2} \Rightarrow \xi = \frac{2}{\ell} (x - 0) = \frac{2x}{\ell} \dots\dots OK$



$$[K]_e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B(x)]^T [D(x)][B(x)] dx = \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)][B(\xi)] d\xi$$

La matrice $[K]_e$ est évaluée par intégration numérique :

$$\int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^T [D(\xi)] [B(\xi)] d\xi = \sum_{i=1}^n [B(\xi_i)]^T [D(\xi_i)] [B(\xi_i)] \alpha_i$$

où $\left\{ \begin{array}{l} n = \text{nombre de point de Gauss} \\ \xi_i = \text{abscisse du point de Gauss } i \\ \alpha_i = \text{poids d'integration au point de Gauss } i \end{array} \right.$

Dans notre cas, on utilise sept points de Gauss n=7

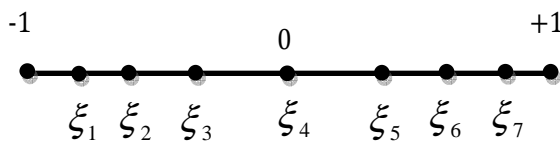


Figure 4-6 : représentation des abscisses des points de Gauss

Les Abscisses des points de Gauss	Les poids d'intégration aux points de Gauss i
$\xi_1 = -0.9491079123\ 42759$	$\alpha_1 = 0.1294849661\ 68870$
$\xi_2 = -0.7415311855\ 99394$	$\alpha_2 = 0.2797053914\ 89277$
$\xi_3 = -0.405845151377397$	$\alpha_3 = 0.3818300505\ 05119$
$\xi_4 = 0$	$\alpha_4 = 0.4179591836\ 73469$
$\xi_5 = -\xi_3$	$\alpha_5 = \alpha_3$
$\xi_6 = -\xi_2$	$\alpha_6 = \alpha_2$
$\xi_7 = -\xi_1$	$\alpha_7 = \alpha_1$

Tableau 4-3 : abscisse et poids d'intégration de Gauss utilisés pour l'intégration numérique de l'élément à quatre nœuds.

4-4-3 calcul des expressions des N'_i et des N''_i :

On a :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2x}{l} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{2}{l} \\ \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{2}{l} \\ \text{et } \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} \left(\frac{2}{l}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc les expressions des N'_i sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} N'_1(\xi) &= \left[-\left(\frac{27}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{9}{8}\right)\xi + \left(\frac{1}{16}\right) \right] \frac{2}{l} \\ N'_4(\xi) &= \left[\left(\frac{81}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{9}{8}\right)\xi - \left(\frac{27}{16}\right) \right] \frac{2}{l} \\ N'_7(\xi) &= \left[-\left(\frac{81}{16}\right)\xi^2 - \left(\frac{9}{8}\right)\xi + \left(\frac{27}{16}\right) \right] \frac{2}{l} \dots\dots\dots (4 - 56) \\ N'_{10}(\xi) &= \left[\left(\frac{27}{16}\right)\xi^2 + \left(\frac{9}{8}\right)\xi - \left(\frac{1}{16}\right) \right] \frac{2}{l} \end{aligned} \right.$$

et pour les expressions des N''_i :

$$\left\{ \begin{aligned} N''_2(\xi) &= -\left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{18711}{256}\right)\xi^5 - \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{7065}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{843}{256}\right)\xi - \left(\frac{243}{256}\right)\right) \\ N''_3(\xi) &= \left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(-\left(\frac{1701}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{1215}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{495}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{57}{256}\right)\xi + \left(\frac{19}{256}\right)\right) \ell \\ N''_5(\xi) &= -\left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{45927}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{27945}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{13851}{256}\right)\xi + \left(\frac{243}{256}\right)\right) \\ N''_6(\xi) &= \left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(-\left(\frac{15309}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{3645}{256}\right)\xi^4 + \left(\frac{7695}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{1539}{128}\right)\xi^2 - \left(\frac{2673}{256}\right)\xi + \left(\frac{297}{256}\right)\right) \ell \\ N''_8(\xi) &= \left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{45927}{256}\right)\xi^5 - \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{27945}{128}\right)\xi^3 + \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{13851}{256}\right)\xi - \left(\frac{243}{256}\right)\right) \\ N''_9(\xi) &= -\left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{15309}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{3645}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{7695}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{1539}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{2673}{256}\right)\xi + \left(\frac{297}{256}\right)\right) \ell \\ N''_{11}(\xi) &= \left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{18711}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{10935}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{7065}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{3645}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{843}{256}\right)\xi + \left(\frac{243}{256}\right)\right) \\ N''_{12}(\xi) &= -\left(\frac{4}{\ell^2}\right)\left(\left(\frac{1701}{256}\right)\xi^5 + \left(\frac{1215}{256}\right)\xi^4 - \left(\frac{495}{128}\right)\xi^3 - \left(\frac{297}{128}\right)\xi^2 + \left(\frac{57}{256}\right)\xi + \left(\frac{19}{256}\right)\right) \ell \end{aligned} \right. \dots \dots \dots (4-56)$$

4-3-4 Evaluation du vecteur des forces résiduelles $\{R\}_e$:

D'après la relation (3-12) du P.T.V, on a :

$$\int_0^\ell \delta \left[\hat{\epsilon}_{0,x} \int_s \sigma_x ds + \delta \hat{\phi} \int_s \sigma_x \cdot z ds \right] dx - \int_0^\ell \delta \hat{w} f_z dx - \int_0^\ell \delta \hat{u} f_x dx = 0$$

Après le développement on aura :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx - \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [N] \begin{Bmatrix} f_x \\ f_z \end{Bmatrix} dx = 0 \dots \dots \dots (4-57)$$

Ou plus simplement

$$\{p\}^e - \{f\}^e = 0 \dots \dots \dots (4-58)$$

Remarque : $\{p\}^e$ et $\{f\}^e$ sont calculés à l'aide d'intégration numérique

$$\{p\}^e = \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} [B]^t \begin{Bmatrix} N(x) \\ M(x) \end{Bmatrix} dx = \ell/2 \int_{-1}^{+1} [B(\xi)]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} d\xi = \ell/2 \sum [B(\xi)]^t \begin{Bmatrix} N(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} \alpha_i \dots (4-59)$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & N'_7 & 0 & 0 & N'_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -N''_2 & -N''_3 & 0 & -N''_5 & -N''_6 & 0 & -N''_8 & N''_9 & 0 & -N''_{11} & -N''_{12} \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 5

CHAPITRE 5 : MODELISATION DU COMPORTEMENT NON LINEAIRE DES ELEMENTS EN BETON ARME.

5-1. introduction

Dans ce chapitre nous avons représenté les différents modèles numériques permettant la simulation de comportement des ossatures planes en béton armé. Le béton est principalement modélisé par la loi de Sargin en compression et par la loi de Grelat en traction. Le calcul utilisé est un calcul élastique non linéaires cela a induit l'utilisation des méthodes itératifs, dans ce qui suit on va présenter quelqu'une d'eux.

5-2 Modélisation des matériaux :

5 2-1 Modélisation du comportement du béton :

a) comportement en compression :

- **Modèle de SARGIN [12] :**

Pour représenter le comportement du béton en compression, on admet un comportement élastique non linéaire, représenté par la loi de **SARGIN [12]** :

$$\sigma = f_{bc} \frac{k_1 \bar{\epsilon} + (k_2 - 1) \bar{\epsilon}^2}{1 + (k_1 - 2) \bar{\epsilon} + k_2 \bar{\epsilon}^2} \dots\dots\dots (5-1)$$

Où

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\epsilon_{b0}} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{E_{b0} \cdot \epsilon_{b0}}{f_{bc}}$$

Avec :

f_{bc} : résistance à la compression du béton.

E_{b0} : module élastique du béton à l'origine.

ϵ_{b0} : déformation correspondant au pic des contraintes.

σ : contrainte de rupture.

k_2 et k_1 : sont des paramètres adimensionnels ajustent la branche descendante et Ascendante, respectivement, de la loi de SARGIN.

L'allure de la courbe contrainte-déformation est donnée par le diagramme représenté dans la figure5-1

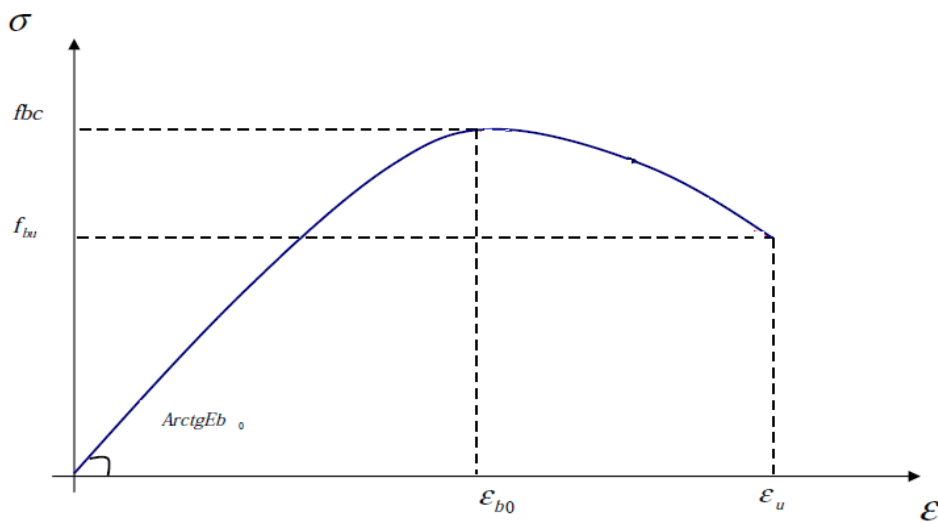


Figure 5-1 : courbe contrainte- déformation selon SARGIN [12]

Remarque

$k_2 = k_1 - 1$ si $f_{bc} \leq 30$ Mpa.

$k_2 = (k_1 - 1) \left(\frac{55 - f_{bc}}{25} \right)$ si $30 \leq f_{bc} \leq 55$ Mpa.

$k_2 = 0$ si $f_{bc} \geq 55$ Mpa.

Si $k_1 = 2$ et $k_2 = 0$ on obtient la loi parabolique

- loi de SARGIN avec branche linéaire ($\epsilon > \epsilon_{b0}$) [12] :

pour $\epsilon < \epsilon_{b0}$, l'équation de la loi est la même que l'équation de la loi de Sargin.

Pour $\epsilon > \epsilon_{b0}$, la loi se présente sous la forme d'un tronçon droit qui est donné par l'équation :

$$\sigma = f_{bc} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{f_{bu}}{f_{bc}}\right)(\bar{\epsilon} - 1)}{\left(\frac{\epsilon_{bu}}{\epsilon_{b0}} - 2\right)} \right] \dots\dots\dots (5-2)$$

Le diagramme contrainte- déformation est représenté sur la figure 5-2 :

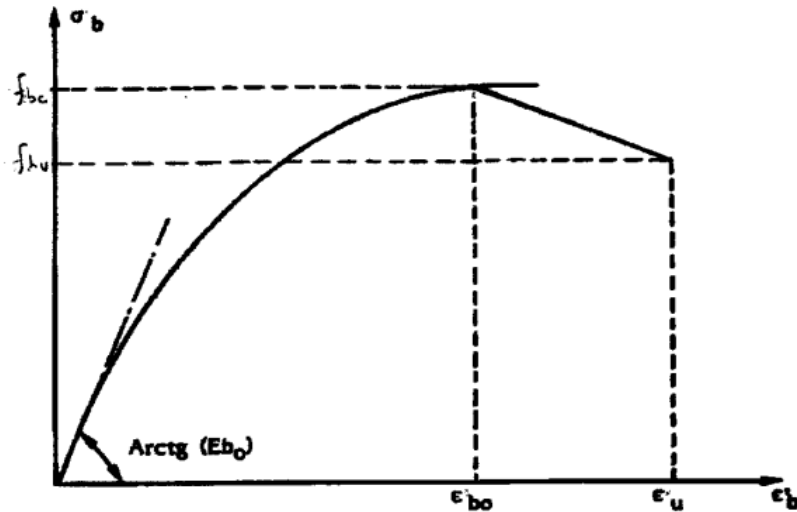


Figure 5-2: diagramme contrainte- déformation de la loi de SARGIN avec un tronçon droit.

- loi parabolique : [12]

Lorsque les paramètres $k_1 = 2$ et $k_2 = 0$ dans la loi de SARGIN on retrouve la loi parabolique qui s'écrit comme suit :

$$\sigma = f_{bc} \left[2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b0}} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b0}} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (5-3)$$

La courbe de la loi est représentée comme suit :

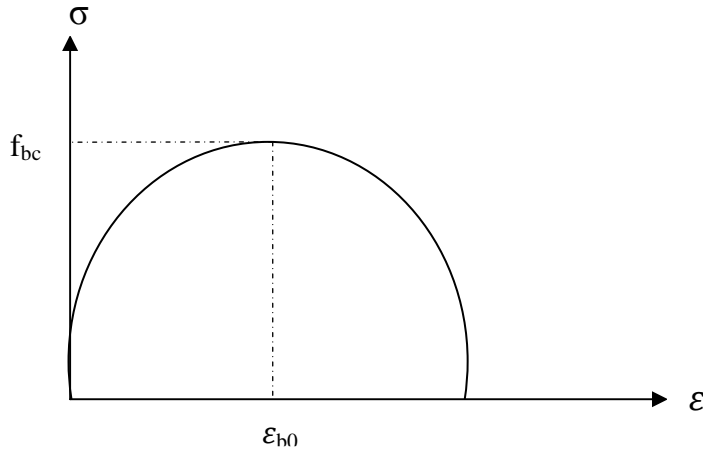


Figure 5-3 : diagramme contrainte- déformation (loi parabolique).

• loi parabole rectangle : [13]

Ce modèle est celui représenté dans les règles BAEL, ce dernier est une solution lorsque le calcul précis ni pas nécessaire ; la courbe est constitué de deux parties distinctes :

- une partie parabolique jusqu'à une déformation de valeur $\epsilon = 2\text{‰}$
- une partie droite allant de $2\text{‰} \leq \epsilon \leq 3.5\text{‰}$

L'équation de cette courbe est obtenue de loi de SARGIN dans laquelle $k_1 = 2$ et $k_2 = 0$ et cela jusqu' une déformation qui égale 2 ‰, mais au delà de cette déformation jusqu'à 3.5 ‰ la courbe présente un palier linéaire d'intensité f_{bc} .

$$\begin{cases} \text{pour } 0 \leq \epsilon \leq 2\text{‰} \dots \dots \dots \sigma = f_{bc} \left[2\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^2 \right] \\ \text{pour } 2\text{‰} \leq \epsilon \leq 3.5\text{‰} \dots \dots \dots \sigma = f_{bc} \end{cases} \dots \dots \dots (5-4)$$

Cette loi permet d'effectuer des calculs et des vérifications réglementaires.

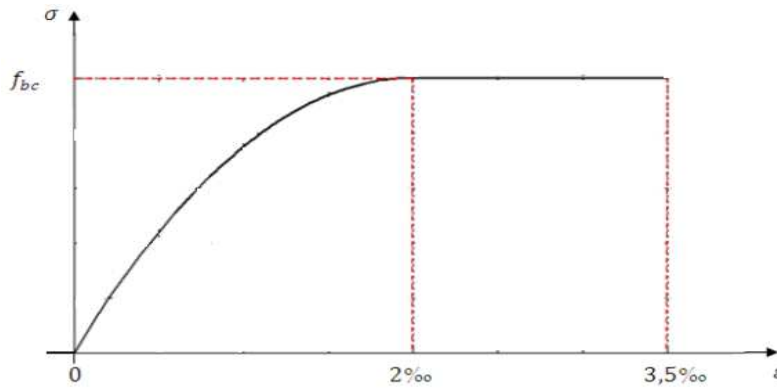


Figure 5-4 : diagramme contrainte- déformation (loi parabole-rectangle).

b) comportement du béton en traction :

• **loi élastique fragile (itbt=1) : [12]**

Dans cette loi, le comportement est représenté par une courbe linéaire jusqu'à une déformation $\epsilon = \epsilon_{bft}$; telle que $\epsilon_{bft} = \frac{f_{bt}}{E_{b0}}$. Au-delà de ϵ_{bft} la contrainte est ramené à 0.

$$\begin{cases} 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{bft} & \sigma = E_b \cdot \epsilon \\ \epsilon \geq \epsilon_{bft} & \sigma = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (5-5)$$

Avec :

E_{b0} : Module élastique du béton à la compression.

f_{bt} : Contrainte à la traction du béton.

ϵ_{bft} : Déformation correspondante à la contrainte à la traction du béton.

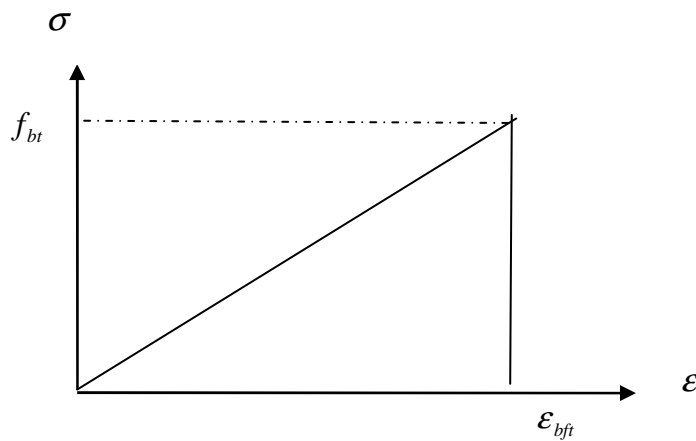


Figure 5-5 : diagramme contrainte-déformation (élastique-fragile).

- loi élastique adoucissante avec branche décroissante linéaire (itbt=2) :

C'est une loi qui est représentée par une branche linéaire à partir du pic des contraintes (la limite élastique)

$$\begin{aligned}
 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{bft} & \quad \sigma = E_{b0} \cdot \epsilon \\
 \epsilon_{bft} \leq \epsilon \leq \epsilon_{btu} & \quad \sigma = f_{bt} \left[\frac{(\epsilon_{btu} - \epsilon)}{(\epsilon_{btu} - \epsilon_{bft})} \right] \dots\dots\dots (5-6)
 \end{aligned}$$

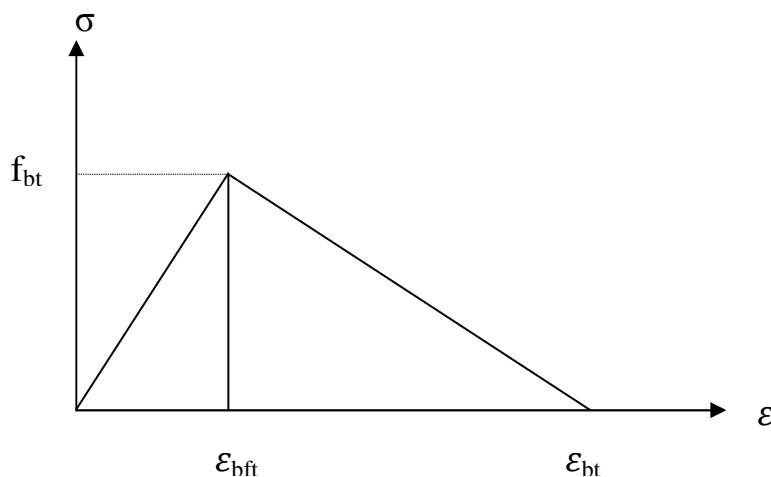


Figure 5-6 : diagramme contrainte-déformation (branche linéaire au-delà du pic des contraintes)

• loi de GRELAT (itbt=3) [15]:

La formulation de Grelat consiste à attribuer une distribution triangulaire fictive des contraintes dans la zone tendue fissurée de la section transversale. Au delà du pic la contrainte du béton au niveau de l'armature la plus tendue décroît paraboliquement jusqu'à s'annuler complètement lorsque l'armature est plastifiée. Ceci suppose que la contribution du béton tendu entre les fissures disparaît après la plastification des aciers. Ce modèle s'exprime comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Avant fissuration : } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bft} & \sigma = E_b \cdot \varepsilon \\ \text{Après fissuration } \varepsilon_{bft} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{btu} & \sigma = f_{bt} \left[\frac{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon)}{(\varepsilon_{btu} - \varepsilon_{bft})} \right]^2 \dots\dots\dots (5-7) \end{array} \right.$$

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton.

σ : Contrainte dans le béton au niveau de l'armature la plus tendue.

ε_{btu} : Déformation correspondant à la plastification des aciers.

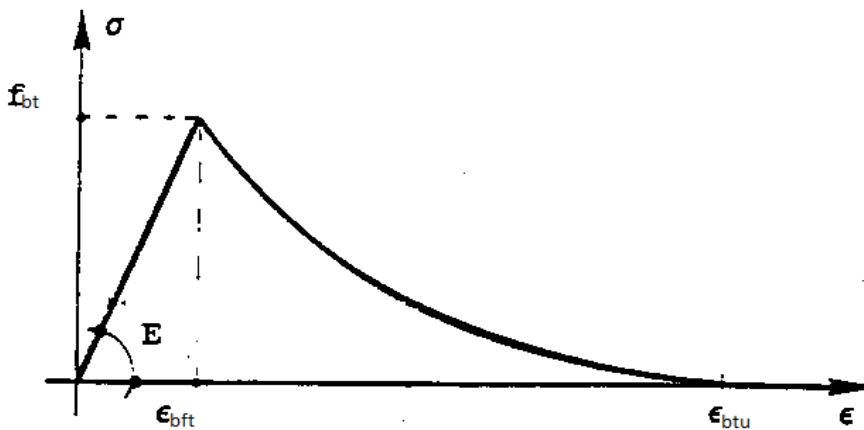


Figure 5-7 : diagramme contrainte-déformation (branche décroissante parabolique, au-delà du pic des contraintes) [15]

5-2-2 modélisation du comportement des aciers :

- **Aciers naturels** : ils sont caractérisés par une loi élasto-plastique parfaite [4] :

$$\begin{array}{lll}
 \sigma = E_a \cdot \varepsilon & \text{pour} & \varepsilon \leq \varepsilon_e \\
 \sigma = \sigma_e & \text{pour} & \varepsilon_e < \varepsilon \leq \varepsilon_u \dots\dots\dots (5-8) \\
 \sigma = 0 & \text{pour} & \varepsilon > \varepsilon_u
 \end{array}$$

Avec :

- E_a : Module longitudinal de l'acier.
- ε_e : Déformation limite élastique de l'acier.
- σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier.
- ε_u : Déformation ultime de l'acier.

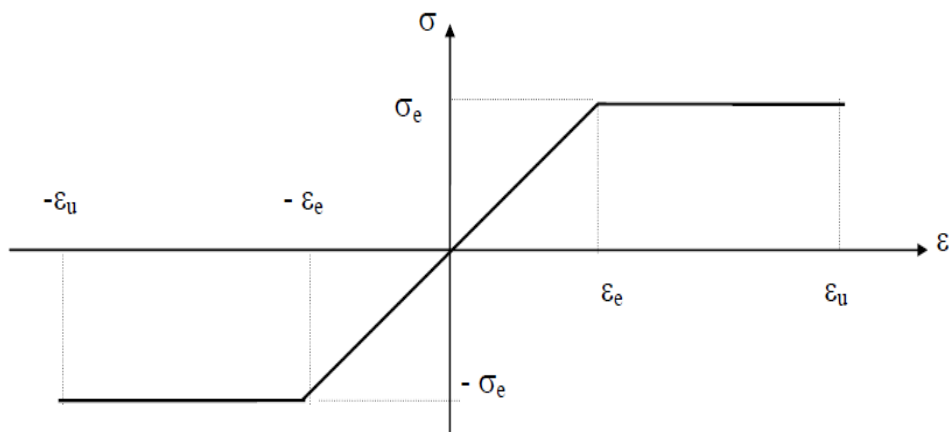


Figure 5-8 : comportement des aciers naturels [4]

Remarque :

- les déformations extrêmes sont fixées par le règlement BAEL à 10‰.
- le comportement est symétrique en traction et compression.

- **Aciers écrouis : [4]**

On adopte la loi préconisée par les règles BAEL 83, qui supposent un comportement linéaire élastique jusqu'à 70 % de la limite élastique (σ_e) ; au-delà, une courbe $\varepsilon = f(\sigma)$ du cinquième degré.

La loi de comportement se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma &= E_a \cdot \varepsilon && \text{pour } \sigma < 0.7\sigma_e \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_a} + 0.823\left(\frac{\sigma}{\sigma_e} - 0.7\right)^5 && \text{pour } 0.7\sigma_e < \sigma < 1.1\sigma_e \dots\dots\dots (5-9) \\ \sigma &= 1.1\sigma_e && \text{pour } 1\% < \varepsilon < \varepsilon_u \end{aligned}$$

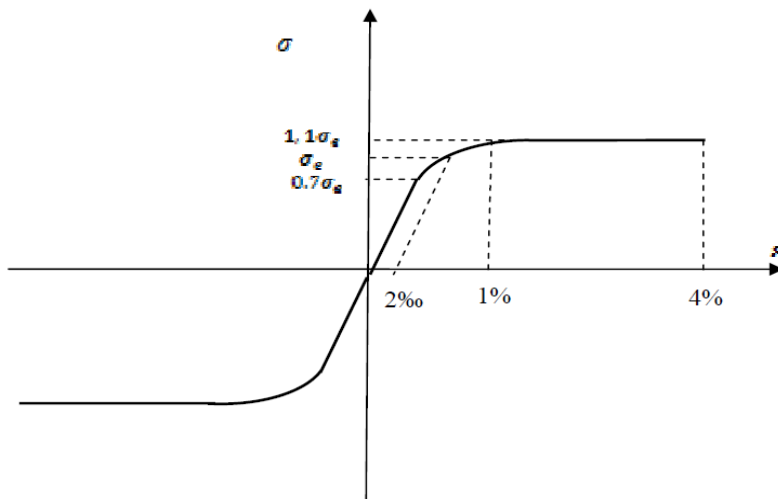


Figure 5-9 : comportement des aciers écrouis [4]

5-3 procédures de calcul non linéaire : [12]

Dans un calcul linéaire le principe des travaux virtuels conduit à la formule 5-10, où les composantes de la matrice de rigidité sont indépendantes de la solution de problème.

$$\{F\} = [K]\{U\} \dots\dots\dots (5.10)$$

Dans l'analyse du comportement non linéaire d'une structure, on aboutit à un système d'équations algébriques de la forme :

$$\{F\} - [K(U)]\{U\} = \{\psi(U)\} \neq 0 \dots\dots\dots (5.11)$$

Avec :

$[K(U)]$: Matrice de rigidité de la structure dépendant de vecteur $\{U\}$.

$\{F\}$: Vecteur de forces nodales appliquées à la structure.

$\{\psi(U)\}$: Vecteur des forces résiduelles, ou résidus, exprimant le déséquilibre entre les efforts appliqués à la structure et les efforts internes, à une étape du chargement donné.

$\{U\}$: Vecteur des déplacements nodaux.

Dans un calcul non linéaire, il est facile de déterminer les efforts si on connaît les déformations mais l'inverse nous oblige à utiliser les méthodes itératives ($K(U)$ dépend de la solution U) qui consiste à rechercher la solution $\{U_n\}$ qui rend le résidu $\{\psi\{U_n\}\}$ aussi proche que possible de zéro.

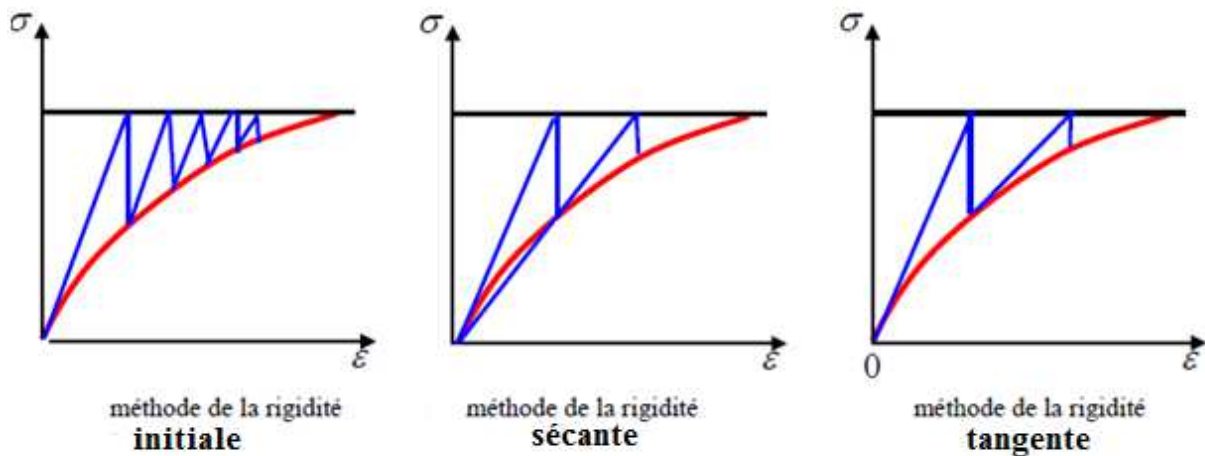
5-3-1. présentation des procédures itératives [7]:

Parmi les méthodes de résolution existant on citer trois méthodes :

- méthode de la rigidité initiale
- méthode de la rigidité tangente
- méthode de la rigidité sécante

Pour toutes les méthodes de résolution, la rigidité en un point de Gauss est nulle si une ou plusieurs fissures enregistrés en ce point. La convergence est plus rapide par la méthode de rigidité tangente et lente par la méthode de rigidité initiale. La méthode de la rigidité initiale calcule une seule fois la matrice rigidité en chaque itération.

Dans les structures en béton armé, la solution dépend généralement de l'état de contrainte de l'élément car la fissuration affecte considérablement la solution finale. Donc la méthode utilisé est est la méthode de la rigidité sécante où la matrice de rigidité est recherchée pour chaque incrément.



5-3-2 : L'algorithme de résolution non linéaire :

L'analyse non linéaire est effectuée selon une procédure itérative comme suit :

1- pour l'étape $j-1$, correspondant au chargement extérieur $\{F\}^{j-1}$, on suppose connu l'état de la structure étudiée (déplacement $\{U\}^{j-1}$, forces résiduelles $\{\Psi\}^{j-1}$), l'étape initiale $j=1$ correspond au chargement nul ($\{U\}^0 = \{0\}$ et $\{\Psi\}^0 = \{0\}$).

2- incrémentation du chargement extérieur.

$$2.1 - \{F\}^j = \{F\}^{j-1} + \{\Delta F\}^j.$$

2.2 - début de la procédure itérative $i=1$

2.3 – incrémentation des forces résiduelles à équilibrer.

$$\{\Psi\}^i = \{\Delta F\}^j + \{\Psi\}^{j-1}$$

3- évaluation des matrices des rigidités élémentaires $[K]_e^i$ puis assemblage de la matrice de rigidité globale $[K]^i$ en fonction de la solution de l'étape précédente $j-1$.

4- résolution de système d'équations $[K]^i \{\Delta U\}^i = \{\Psi\}^i$.

5- cumul du vecteur des déplacements nodaux $\{U\}^i = \{U\}^{i-1} + \{\Delta U\}^i$.

6- évaluation des forces résiduelles élémentaires $\{\Psi\}_e^{i+1}$ et assemblage dans le vecteur global des forces résiduelles.

7- test de convergence :

- si convergence, l'étape actuelle est convergente → passage à l'étape 2 pour l'incrément de chargement suivant $j+1$.
- sinon, passage à l'itération suivante $i+1$ → retour à l'étape 3 (si le nombre maximale d'itération est dépassé, le processus est divergent → arrêt de calcul)

5-3-3 : Organigramme de calcul :

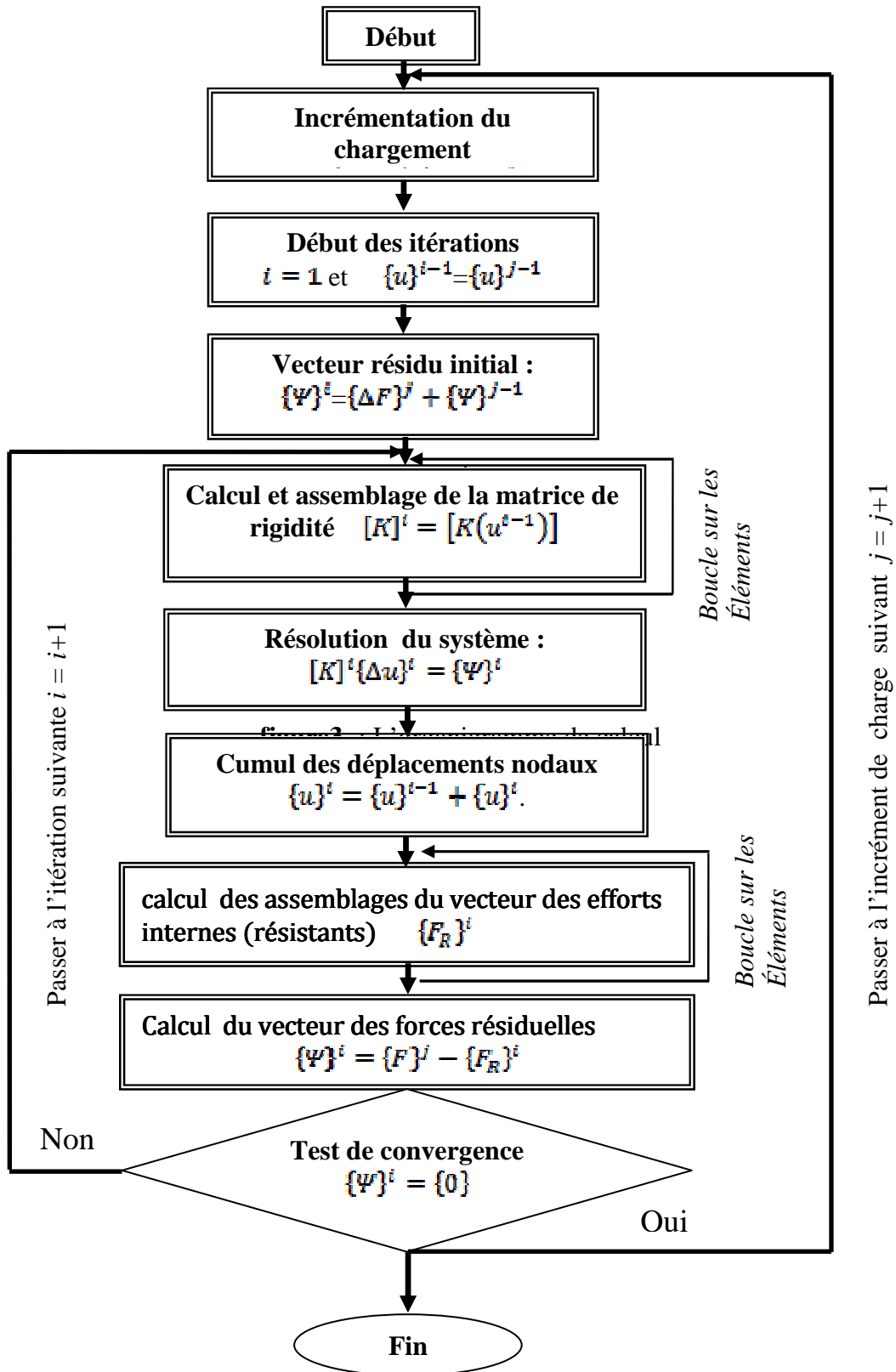


figure5-11- : L'organigramme de calcul

CHAPITRE 6

CHAPITRE 6 : PROGRAMMATION INFORMATIQUE.

6.1. Présentation du programme existant

Le programme informatique existant, poutre_mince, est rédigé en langage fortran90 [12].Ce programme permet la simulation numérique du comportement statique non linéaire, jusqu'à rupture d'une structure plane quelconque en béton armé où en béton de fibres, constituée d'éléments de type poutre.

Ce programme est caractérisé par une conception permettant sa modification et son enrichissement ; il est constitué d'un programme principal, bloc de calcul et de plusieurs sous-routines , l'organigramme détaillé est présenté sur le **figure 6-1**

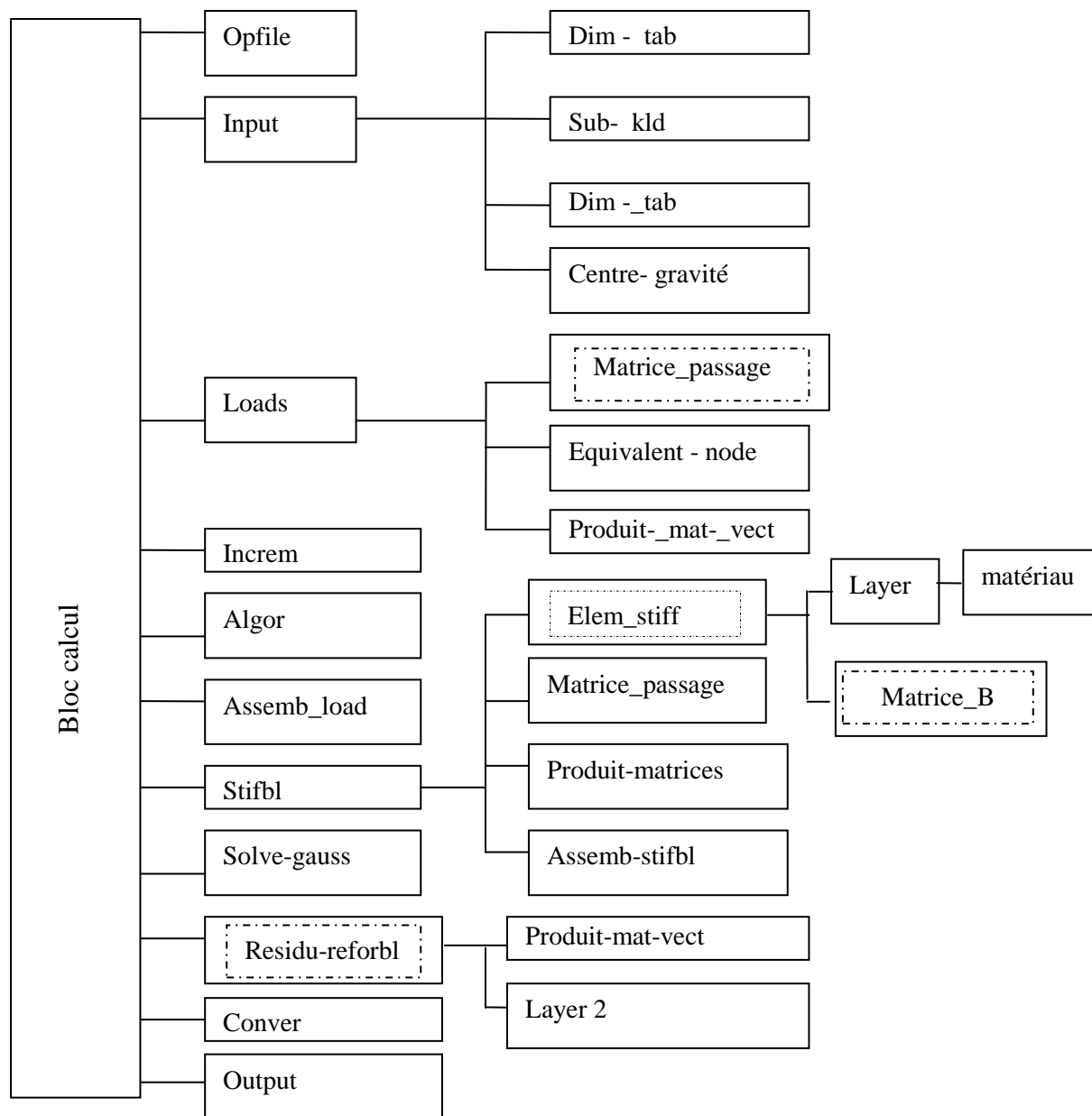


Figure 6.1 : organisation du programme poutre_mince

6.2 Description des différentes sous-routines

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme poutre _ mince :

- 1- **Sous-routines opfile** : ouverture du fichier de données **finp** et création du fichier des résultats **fout**.
- 2- **Sous-routines input** : lecture des principales données du problème.
- 3- **Sous-routines dim _ tab (itab)** : dimensionnement et initialisation des tableaux et vecteurs.
- 4- **Sous-routines sub _ kld** : calcul du vecteur **kld** de localisation des débuts de colonnes dans la matrice de rigidité globale (stockage en ligne de ciel)
- 5- **Sous-routine centre _ gravite** : calcul de la position du centre de gravité de la section par rapport à l'axe de référence.
- 6- **Sous-routine loadps** : lecture du chargement puis évaluation des forces nodales, pour chaque élément dans le vecteur "**rload**".
- 7- **Sous-routine équivalent_node_** : calcul du vecteur des forces nodales équivalentes dues aux charges réparties sur l'élément en cours.
- 8- **Sous-routine matrice-passage** : calcul de la matrice de passage.
- 9- **Sous-routine produit_matrice** : calcul du produit de deux matrices
$$A (l \times m) * B (m \times n)$$
- 10- **Sous-routine produit_mat_vect** : calcul du produit d'une matrice par un vecteur
$$A (l \times m) * v (m)$$
- 11- **Sous-routine increm** : lecture et incrémentation du chargement appliqué.
- 12- **Sous-routine algor** : calcul du paramètre **kresl** de l'algorithme de résolution en fonction de la valeur du paramètre **nalgo**.
- 13- **Sous-routine assemb_load** : assemblage du chargement dans le vecteur global « **gload** ».

- 14- Subroutine stifbl :** calcul et assemblage de la matrice de rigidité élémentaire
- 15- Subroutine elem_stiff :** calcul de la matrice de rigidité élémentaire **estif** (6x6) pour un élément poutre mince plane à 2 nœuds, de (9x9) pour un élément poutre mince plane à 03 nœuds et de (12x12) pour un élément poutre mince plane à 04 nœuds
- 16- subroutine matrice_B :** c'est la subroutine qui permet l'introduction de la matrice des déformations, nécessaire pour le calcul de la matrice de rigidité.
- 17- Subroutine assem_stifbl :** assemblage des matrices élémentaire dans la matrice globale.
« gstif » (en ligne de ciel)
- 18- Subroutine layer :** calcul des valeurs EA, ES, et EI par intégration sur la hauteur de la section transversale de l'élément en cours.
- 19- Subroutine solve_gauss :** résolution du système d'équations par la méthode d'élimination de gauss (la matrice de rigidité étant stockée en ligne de ciel), cumul des déplacements et réactions
- 19- Subroutine residu_reforbl :** calcul des forces nodales équivalentes
- 20- Subroutine layer 2 :** calcul des valeurs des efforts N et M au point **igauss** de la section transversale de l'élément en cours.
- 21- Subroutine matériau :** loi de comportement relation contrainte – déformation.
- 22- Subroutine conver :** test de convergence pour le calcul itératif.
- 23- Subroutine output :** sortie des résultats : - Déplacements nodaux
- Efforts internes N, T, M.
 - Réactions aux appuis.

6-3 Elaboration des versions modifiant de programme existant :

La première version du programme poutre_mince a été formulée sur la base d'une discrétisation par éléments finis à 2 nœuds, ayant 3 ddl par nœud, cette version de programme est appelée poutre_mince2 (2 nœuds par éléments).

Les composantes de la matrice de rigidité sont calculées à l'aide d'une intégration numérique avec 3 points de Gauss.

Pour élaborer les deux autres versions du programme, plusieurs modifications sont apportées, sur différentes sous-routines ; la principale modification concerne la **Matrice_B**.

a) poutre_mince3 (3 nœuds par élément):

Cette version du programme a été élaborée en effectuant des modifications sur les sous-routines suivantes :

- **subroutine matrice_passage** : cette sous-routine a été modifiée en augmentant la dimension de la matrice de passage [T] qui passe de (6x6) dans poutre_mince2 à (9x9).
- **subroutine elem_stiff** : dans cette dernière on a effectué des modifications sur la partie des déclarations (taille des vecteurs et des matrices), ainsi que le nombre d'abscisses et de poids de Gauss qui devient cinq au lieu de trois.
- **subroutines matrice_B** : c'est la sous-routine qui permet l'introduction de la matrice [B] des déformations, nécessaire pour le calcul de la matrice de rigidité. Notre travail consiste à augmenter sa taille et de modifier ces composantes. Pour un élément poutre mince plane à 3 nœuds, sa taille est de (2x9). Le calcul de cette matrice [B] est présenté en détail au chapitre 4.

b) poutre_mince4 (4noeuds par élément) :

Cette version du programme a été élaborée en effectuant des modifications sur les sous-routines considérées dans le paragraphe précédent.

- **subroutine matrice_passage :** cette sous-routine a été modifiée en augmentant la dimension de la matrice de passage [T] de (9x9) à (12x12).
- **subroutine elem_stiff :** dans cette dernière on a effectuée des modifications sur la partie des déclarations (taille des vecteurs et des matrices), ainsi que le nombre d'abscisses et de poids de gauss qui devient sept au lieu de cinq.
- **subroutines matrice_B :** notre travail consiste à augmenter sa taille de (2x9) à (2x12) et de modifier ces composantes. ceci en se basant sur la formulation élaborée dans le chapitre 4.

6-4 Présentation du fichier de données :

- **poutre_mince2**

début_titre

\$
 \$ Titre et/ou description du problème
 \$
fin_titre

donnees_globales

Npoin Nelem Nsect MaxTrap MaxAcier Nvfix Nmats Nprop Nincs Nalgo Ntype_charge

elements

NumElem TypElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2
 nelem lignes

coordonnees

NumNoeud CoordX CoordY
 npoin lignes

section

Numsect	Hsection	Ntrapeze	Nacier			
b_inf	b_sup	z_inf	z_sup	NumMat		
.....	Ntrapeze lignes	Nsect fois
z_acier	aire_acier	NumMat_acier				
.....		Nacier lignes		

conditions limites

NumNoeud_fix Code_CL Depl_fix_X Depl_fix_Y Rot_fix
 Nvfix lignes

materiaux

Numat itype_materiau prop (1) prop (2) ... prop (Nprop)
 Nmats lignes

charges

Indice_charge_Nodale Indice_charge_Repartie

charges_nodales

Nbre_charge_N
 NumNoeud_Charge Force_X Force_Y Moment
 Nbre_Charge_N lignes

charges_reparties

Nbre_charge_R
 Numel_Charge Ncas Numcas charge
 Nbre_Charge_R lignes

increment

Fact_Charge1 Tolerance1 Max_iterations1 Indice_sortie1
 Fact_Charge2 Tolerance2 Max_iterations2, Indice_sortie2
 Nincs lignes

increment

Fact_Charge1 Tolerance1 Max_iterations1 Indice_sortie1
 Fact_Charge2 Tolerance2 Max_iterations2, Indice_sortie2
 Nincs lignes

- **poutre_mince3 et poutre_mince4 :**

La structure des fichiers des données pour les deux nouvelles versions du programme est la même que celle de poutre_mince2 ; la seule modification concerne la connectivité des éléments ; donc il faut faire des groupements de 3 nœuds par élément pour poutre_mince3 et de 4 nœuds par élément pour poutre_mince4.

✓ **Pour poutre_mince3**

Elements

NumElem TypElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2 NumNoeud3

..... nelem lignes

✓ **pour poutre_mince4**

Elements

NumElem TypElem NumSect NumNoeud1 NumNoeud2 NumNoeud3 NumNoeud4

..... nelem lignes

6-5 Description des variables du fichier de données :

- Commande **début _ titre** : (bloc des commentaires)

Après cette commande, on peut introduire le titre, la description ou des commentaires concernant le problème à traiter. Cette partie est terminée par la commande **fin _ titre**.

- Commande **données _ globales** (lecture des principales données).

(On introduit 1 ligne contenant 11 variables)

Npoint : nombre total des points nodaux (nœuds).

Nelem : nombre total d'éléments.

Nsect : nombre de types de section.

Maxtrap: nombre maximum de trapèzes par section.

Maxacier : nombre maximum de lits d'acier par section.

Nvfix : nombre des nœuds ayant des conditions aux limites.

Numat : nombre de groupes de matériaux.

Nprop : nombre maximum des propriétés des matériaux.

Nincs : nombre d'incrément de chargement.

Nalgo : indicateur pour identifier le type d'algorithme de résolution.

Si **nalgo = 1** ==> la méthode de rigidité initiale

Si **nalgo = 2** ==> la matrice de rigidité est recalculée pour chaque itération pour chaque incrément de charge

Si **nalgo = 3** ==> la matrice de rigidité est recalculée pour la 1^{ère} itération pour chaque incrément de charge.

Ntype_charge : = 1 s'il ya seulement un chargement variable

= 2 s'il ya un chargement fixe + un chargement variable

-Commande **éléments** (connectivités nodales et types de sections)

(On introduit une ligne contenant 5 variables. Cette ligne est répétée nelem fois)

NumElem = numéro d'élément

TypElem = type de l'élément = 1 si élément **poutre**

2 si élément **barre**

NumSect = numéro de la section transversale constituant l'élément

NumNœud 1 = numéro du 1^{er} nœud de l'élément en cours

NumNœud 2 = numéro du 2^{ème} nœud de l'élément en cours

- Commande **coordonnée** (lecture des coordonnées nodales)

(On introduit une ligne contenant 3 variables. Cette ligne est répétée **Npoint** fois)

Num Noeud = numéro du noeud considéré

CoordX = abscisse du noeud considéré / repère global de la structure

CoordY = ordonnée du noeud considéré / repère global de la structure

- Commande **Section** (caractéristiques des différents types de sections)

(Ce bloc de données est répété **Nsect** fois)

Num Sect = numéro de la section considérée

Hsection = hauteur de la section considérée

Ntrapeze = nombre de trapèzes dans la section considérée

Nacier = nombre de lits d'acier dans la section considérée

b_inf = largeur de la base inférieure du trapèze considéré

b_sup = largeur de la base supérieure du trapèze considérée

Z_inf = ordonnée de la base inférieure / à l'axe de référence.

Z_sup = ordonnée de la base supérieure / à l'axe de référence.

Num Mat = numéro du matériau constituant le trapèze considéré

Z_acier = ordonnée du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

Aire- acier = aire du lit d'acier considéré / à l'axe de référence

Num Mat- acier = numéro du lit d'acier considéré

- commande **condition _ limites** (lecture des conditions aux limites)

(On introduit une ligne contenant 5 variables. Cette ligne est répétée **Nvfix** fois)

NumNoeud_fix = numéro du noeud ayant des C.L

Code_CL = code de la condition aux limites.

= **100** => déplacement longitudinal U imposé

= **010** => déplacement transversal V imposé

= **001** => rotation θ imposée

= **110** => déplacements U et V imposés (si U =V= 0 => appuis double)

= **111** => déplacements U, V et θ imposée (Si U =V= θ = 0 => encastrement)

Depl_fix_X = valeur du déplacement longitudinal imposé (0, s'il s'agit d'un appui)

Depl_fix_Y = valeur du déplacement transversal imposé (0, s'il s'agit d'un appui)

Rot_fix = valeur de rotation imposée (0 si la rotation est empêchée)

- Commande **matériau** (propriété des groupes de matériaux)

(On introduit une ligne contenant $2+Nprop$ variables. Cette ligne est répétée $Nmat$ fois)

Numat = numéro du matériau considéré

Itype _ matériau (numat) : type du matériau

Si **itype_ matériau =1** \Rightarrow matériau élastique

Prop (1) = module d'élasticité longitudinale E

Prop (2) = coefficient de poisson ν

Prop (3) = 0.

.....

Prop (nprop) = 0.

Si **itype_ matériau =2** \Rightarrow matériau béton

Prop (1) = module d'élasticité longitudinale du béton à l'origine. E_{b0}

Prop (2) = coefficient de poisson ν_b

Prop (3) = Résistance à la compression du béton

Prop (4) = le pic des contraintes du béton

Prop (5) = déformation correspondant au pic des contraintes.

Prop (6) = déformation de rupture.

Prop (7) = contrainte du béton à la traction f_{bt}

Prop (8) = déformation correspondante à l'atteinte de la contrainte limite du béton en traction.

Prop (9) = coefficient **itbc** caractérisant la loi du béton comprimé.

Prop(10) = coefficient **itbt** caractérisant la loi du béton tendu.

Si **itype_ matériau =3** \Rightarrow matériau acier

Prop (1) = module d'élasticité longitudinale E_a

Prop (2) = coefficient de poisson ν_a

Prop (3) = limite d'élasticité f_{ae}

Prop (4) = contrainte ultime f_{au}

Prop (5) = déformation ultime ϵ_{au}

Prop (6) = 0.

.....

Prop (nprop) = 0.

-Commande **charges** (lecture des paramètres de chargement)

(On introduit une ligne contenant 2 variables.)

Indice-charge_Nodale : paramètre du chargement nodal

Si **Indice-charge_Nodale** = 0 \Rightarrow pas de chargement nodal à introduire

Indice – charge _repartie : paramètre du chargement repartie sur les éléments

Si **Indice-charge_ repartie** = 0 \Rightarrow pas de chargement repartie

-Commande **charges_ nodales** (lecture des charges nodales
, si **indice _charge_ nodale** \neq 0)

Num Nœud_charge = numéro de nœud chargé

Force-x = valeur de la charge nodale F_x selon l'axe x appliquée au nœud

Force-y = valeur de la charge nodale F_y selon l'axe x appliquée au nœud

Moment = valeur du moment M appliqué au nœud

-Commande **charge _repartie** (lecture des charges reparties dans le repère local de
L'élément considéré si **indice _charge_repartie** \neq 0)

Numel = numéro de l'élément chargé

Ncas = nombre de cas de chargements repartis (1 à 4)

Numcas = numéro du cas de chargement

Si **Numcas** = 1 \Rightarrow charge longitudinale uniformément répartie

= 2 \Rightarrow charge transversale uniformément répartie

= 3 \Rightarrow charge triangulaire croissant de gauche à droite

= 4 \Rightarrow charge triangulaire croissant de droite à gauche

Charge = valeur de la charge répartie (force par unité de longueur)

- commande **incrément** (lecture des incréments de chargement)

Fact-charge 1 = facteur de chargement pour le 1^{er} incrément

Tolérance 1 = tolérance de convergence pour le 1^{er} incrément

Max-iteration 1 = nombre maximal d'itération pour le 1^{er} incrément

Indice sortie 1 = paramètre de sortie des résultants pour le 1^{er} incrément

Si **indice – sortie 1** = 0 \Rightarrow sortie des résultats après convergence
du 1^{er} incrément de chargement

Si **indice – sortie 1** = 1 \Rightarrow sortie des résultats après la première itération
du 1^{er} incrément

Si **indice – sortie 1** = 2 \Rightarrow sortie des résultats après chaque itération
du 1^{er} incrément

CHAPITRE 7

CHAPITRE7: VALIDATION ET ETUDE COMPARATIVE

7-1 Introduction :

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les formulations détaillées des modèles d'éléments finis poutre à 2, 3 et 4 nœuds. Ces modèles ont été introduits dans le programme poutre_mince. Nous avons obtenue ainsi 3 versions du programme (poutre_mince2, poutre_mince3 et poutre_mince4).

Le présent chapitre est scindé en 2 parties :

- la première, constitue une vérification et complément de validation de programme poutre_mince.
- la deuxième est une étude comparative entre les trois modèles.

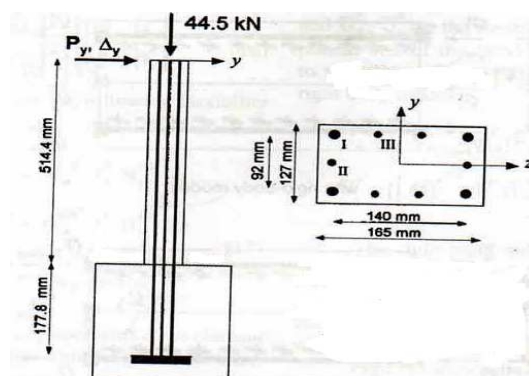
La finesse de discrétisation constitue le paramètre essentiel de cette étude. Dans ce cadre, nous avons traité l'exemple de Low-Moehle [9] et un portique théorique.

7-2. validation:

7-2.1 Étude de l'essai de Low – Moehle [9] :

a) Présentation :

Il s'agit d'un poteau de hauteur 514.4 mm, encastré à sa base, les caractéristiques géométriques et le ferrailage sont présentés sur la figure 7-1. Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont données au tableau 7-1.



$$1^{\text{er}} \text{ lit} : A_{s1} = 206. \text{ mm}^2 \rightarrow \text{Acier1}$$

$$2^{\text{eme}} \text{ lit} : A_{s2} = 64.3 \text{ mm}^2 \rightarrow \text{Acier2}$$

$$3^{\text{eme}} \text{ lit} : A_{s3} = 206.1 \text{ mm}^2 \rightarrow \text{Acier3}$$

Figure 7.1 : Caractéristiques géométriques et ferrailage de la console [9].

Le poteau est soumis à une charge verticale constante $N=44.5$ KN fixe et une charge horizontale variable croissante jusqu'à la rupture.

Caractéristiques du béton		Caractéristiques des aciers		Acier 1	Acier 2
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPa)	465.1	444.	
Module d'élasticité E (MPa)	33×10^3	Module d'élasticité E (MPa)	200×10^3	200×10^3	
Résistance en compression f_c (MPa)	42.13	Contrainte de rupture (MPa)	500	500	
Résistance en traction f_t (MPa)	3.05	Coefficient de poisson	0.3	0.3	

Tableau 7-1 : caractéristiques des matériaux de poteau de Low-Moehle.

b) Influence de la finesse de discrétisation :

Afin de mettre en évidence l'influence de la finesse de discrétisation, plusieurs simulations ont été effectuées en faisant varier le nombre d'éléments finis de type poutre à 2 nœuds.

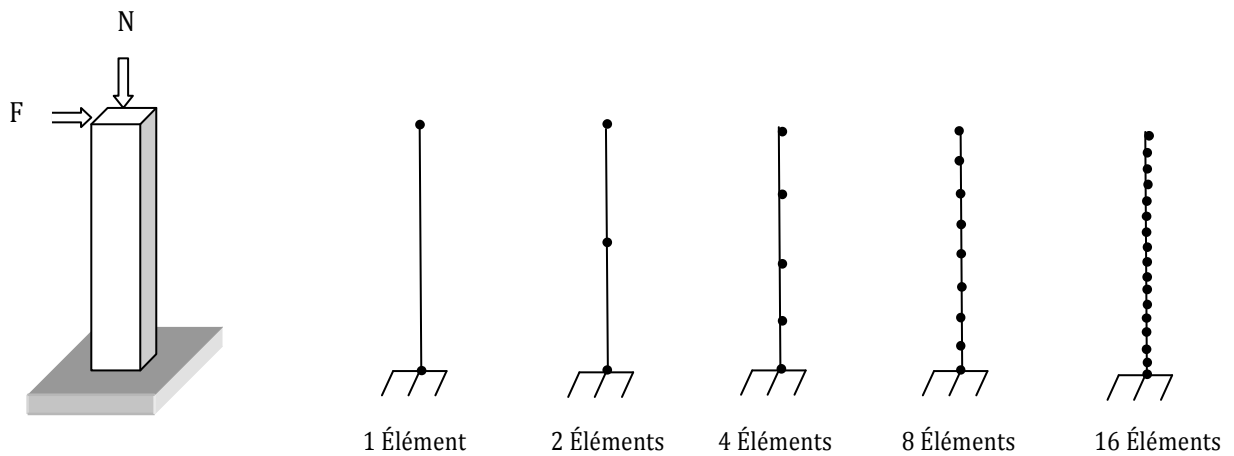


Figure7-2 : représentation du maillage utilisé.

Les résultats des calculs sont présentés à la figure7-3 :

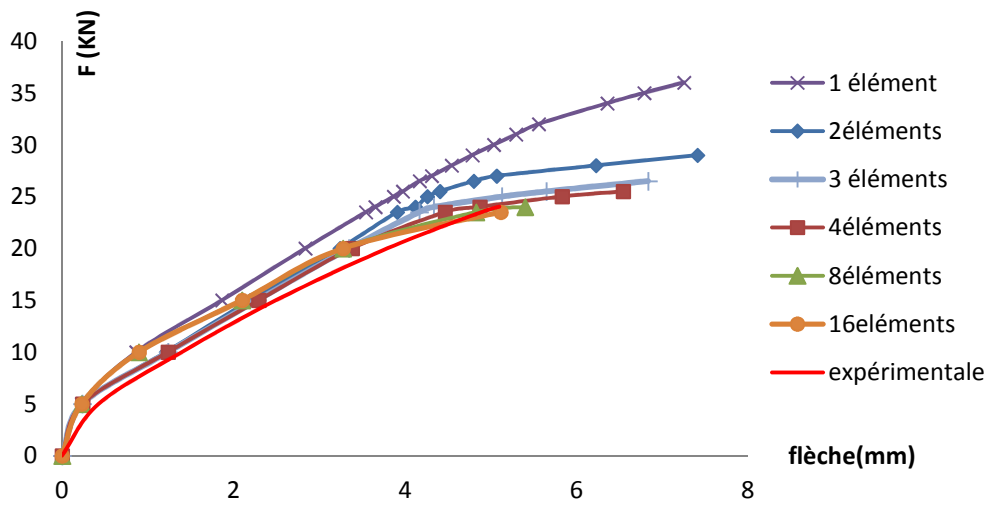


Figure 7-3 : résultats de la simulation pour le poteau de Low-Moehle

N éléments	$\frac{\Delta h}{h_t}$	$\frac{F \text{ max } n}{F \text{ max}(16)}$	$\frac{d \text{ max } n}{d \text{ max}(16)}$
1	1	1.55	1.5
2	0.5	1.23	1.45
4	0.25	1.085	1.28
8	0.125	1.02	1.05
16	0.0625	1	1

Tableau 7-2 : principaux résultats d'essai en fonction de nombre d'éléments

Δh : est la hauteur d'un élément.

h_t : la hauteur total du poteau.

D'après la figure 7-3 et le tableau 7-2 on peut faire les remarques suivantes :

- la finesse de discrétisation influence considérablement les résultats, que ce soit en termes de déplacement, où bien en termes de charge de ruine. En augmentant le nombre d'éléments, les courbes de calcul se rapprochent de plus en plus de la courbe expérimentale.

- avec une discrétisation en 16 éléments, les résultats expérimentaux sont très bien approchés.
- à partir de la discrétisation en 4 éléments ($\frac{\Delta h}{h_t} \leq 0.25$) la charge de ruine semble approchée convenablement. Le rapport entre la charge maximale et celle correspondant à la discrétisation en 16 éléments $\frac{d_{\max 4}}{d_{\max(16)}} = 1.085$.
- concernant les déplacements, on doit utiliser une discrétisation en 16 éléments pour obtenir des résultats avec une bonne précision.

c) Comparaison essai-calculs :

Les courbes de calcul, notamment celle avec une discrétisation en 16 éléments ainsi que la courbe expérimentale sont représentés à la **figure 7-3**. Une comparaison entre les résultats de la simulation et ceux l'expérience est donnée sous forme d'un tableau (voir tableau7-3).

	Charge limite p (KN)	Déplacement correspondant (mm)	$\frac{p_{exp}}{p_{cal}}$	$\frac{dép_{exp}}{dép_{cal}}$
Etude expérimentale de Low-Moehle	24	5.3	1.02	1.04
Calcul (16éléments)	23.5	5.11	2%	4%

Tableau 7-3 : comparaison des résultats calcul-expérience de poteau de Low-Moehle.

En s'appuyant sur la **figure7-3** On peut constater que le comportement expérimental du poteau de Low-Moehle est bien approché par le calcul numérique à l'aide de la version du programme poutre_mince2 (discrétisation en 16 éléments). La simulation montre une bonne estimation de la charge de ruine (erreur 2%) et également de la flèche (erreur de 4%).

7-2-2 .Etude du portique en béton armé du CEBTP [9] :

a) Présentation :

L'exemple que nous avons choisi cette fois ci est le portique testé au CEBTP et qui est représenté sur la figure 7-4.

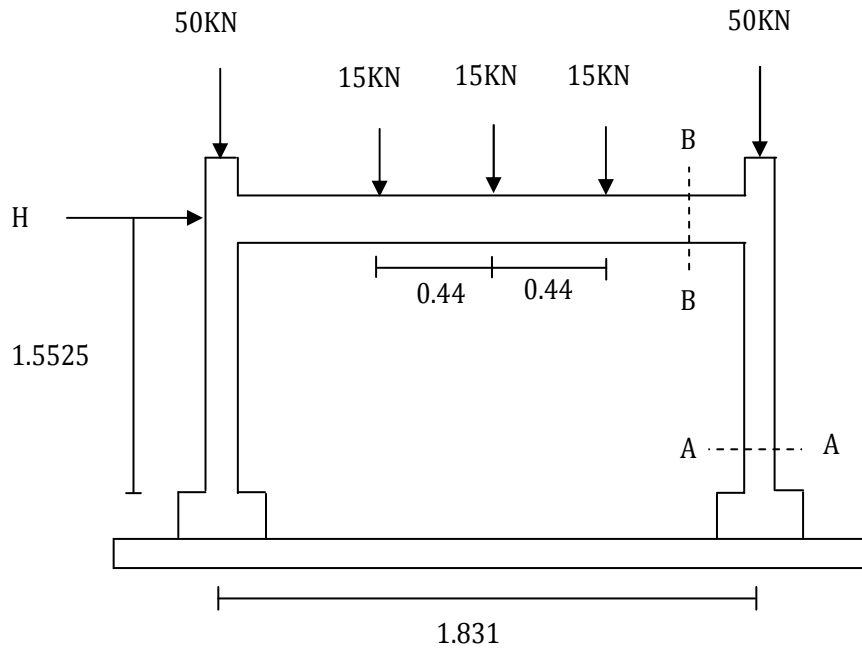


Figure 7-4 : détail de portique CEBTP [9]

Sections des éléments :

A-A : 0.135 x 0.135 (8 T8 + 2 T6)

B-B : 0.235 x 0.135 (8 T8 + 4 T6)

Caractéristiques du béton		Caractéristiques des aciers	
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPa)	475
Module d'élasticité E (MPa)	33×10^3	Module d'élasticité E (MPa)	213×10^3
Résistance en compression f_c (MPa)	42.13	Contrainte de rupture (MPa)	475
Résistance en traction f_t (MPa)	3.05		

Tableau 7-4 : caractéristiques des matériaux pour le portique CEBTP

b) Simulation :

Pour cet exemple, nous avons effectué plusieurs simulations en faisant varier le nombre d'éléments finis de type poutre à 2 nœuds. Les courbes charge-déplacement de calcul ainsi que la courbe expérimentale sont présentées à la figure 7-5.

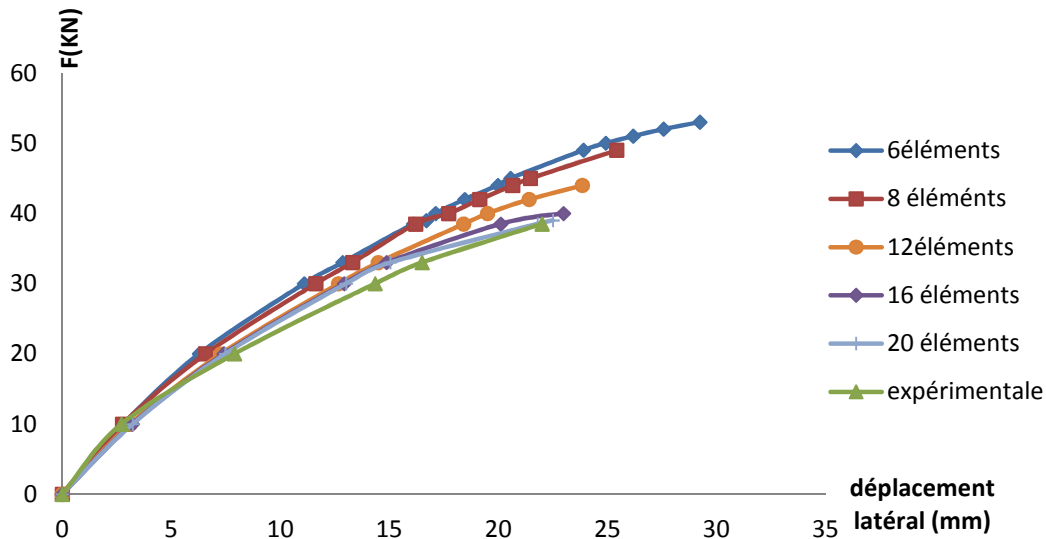


Figure 7-5 : résultats de la simulation donnés par le programme pour le portique CEBTP

	Charge limite p (KN)	Déplacement correspondant (mm)	$\frac{p_{exp}}{p_{cal}}$	$\frac{dép_{exp}}{dép_{cal}}$
Etude expérimentale du portique CEBTP	38.5	22	0.98	0.97
Calcul (20 éléments)	39	22.5	2%	3%

Tableau 7-5 : comparaison des résultats calcul-expérience de portique CEBTP donnés par poutre_mince2.

La figure 7-5 montre que le comportement expérimental du portique est très bien approché par la simulation numérique, en utilisant une discrétisation en 20 éléments finis de type poutre à 2 nœuds.

7-3 étude comparative des trois versions du programme élaborées précédemment :

7-3.1. Etude de l'essai de Low-Moehle :

Dans cette partie, nous présentons les résultats des simulations numériques, sur le poteau de Low-Moehle, en utilisant les 3 modèles d'éléments finis poutres à 2, 3 et à 4 nœuds, formulés dans les chapitres précédents. Pour chaque modèle, nous avons considéré plusieurs discrétisations, ceci en faisant varier le nombre d'éléments finis jusqu'à obtenir une précision suffisante des résultats. (figure7-6 a, b et c)

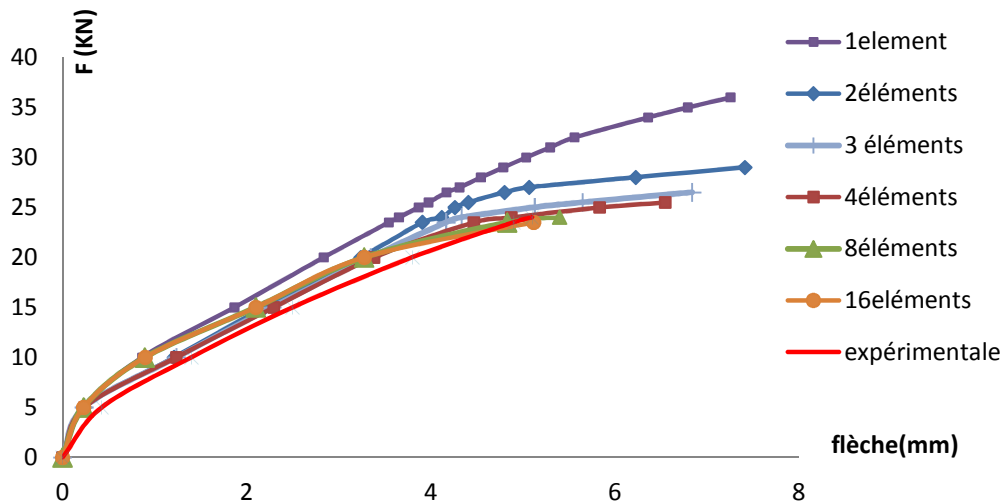


Figure 7- 6-a résultats de la simulation donnés par poutre_mince2

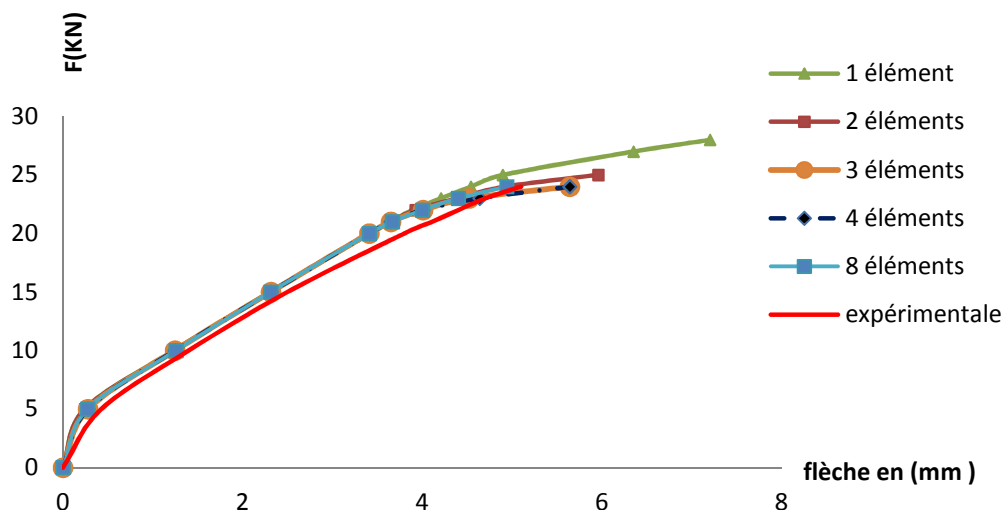


Figure 7- 6-b résultats de la simulation donnés par poutre_mince3

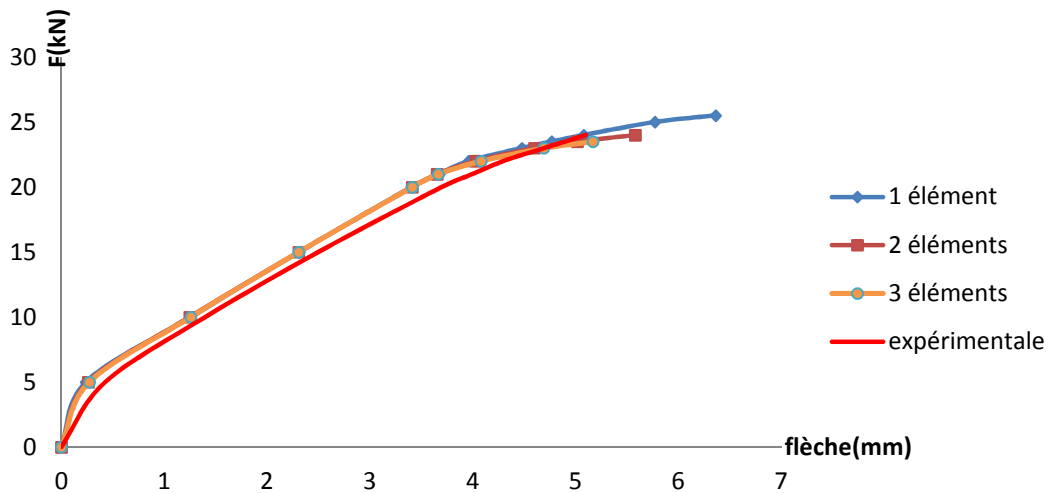


Figure 7- 6-c résultats de la simulation donnés par poutre_mince4

Figure 7- 6 représentation graphique des résultats de la simulation donnés par les différentes versions du programme poutre_mince

A partir des figures précédentes, on peut faire les constatations suivantes :

- avec la discrétisation à un seul élément, seule la version utilisant des éléments à 4 nœuds donne un résultat proche de résultat expérimental, et cela seulement en termes de la charge de ruine.
- Avec une discrétisation en 2 éléments, les deux modèles à trois nœuds et à quatre nœuds semblent approcher convenablement les résultats expérimentaux, surtout en terme de charge de ruine, ceci n'est pas obtenu avec le modèle à 2 nœuds.
- avec seulement 3 éléments finis de type poutre à 4 nœuds, on obtient des résultats qui approchent d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux.
- des discrétisations en 8 éléments à 3 nœuds et en 16 éléments à 2 nœuds sont nécessaires pour obtenir des résultats très proches des résultats expérimentaux.

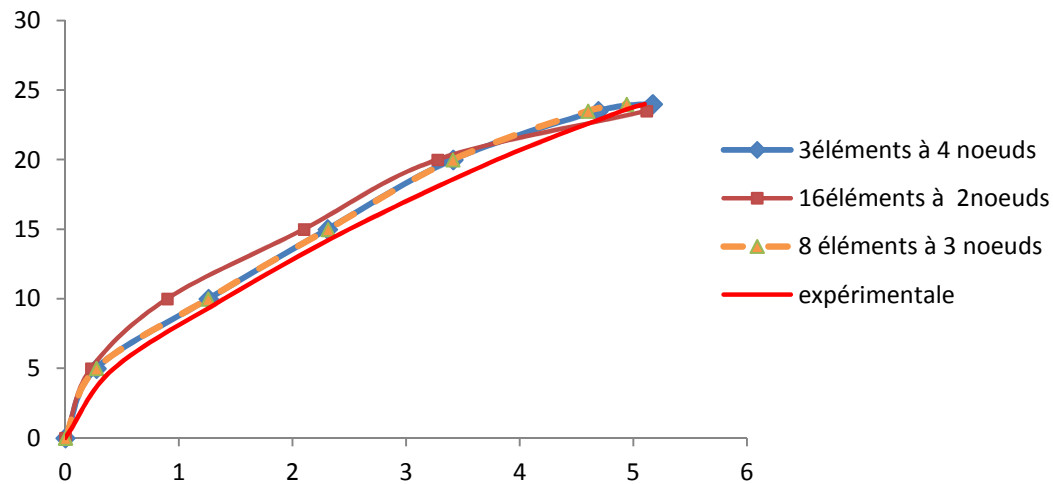


Figure 7-7 : comparaison des courbes forces-déplacements données
par les trois versions du programme

Sur la figure7-7, on a porté les meilleures courbes de calcul présentées sur les figures7-6.a, b et c. on peut faire les constatations suivantes :

- l'équivalence entre les 3 calculs est avec les discrétisations suivantes.
 - 16 éléments à 2 noeuds.
 - 8 éléments à 3 noeuds.
 - 3 éléments à 4 noeuds.

- même avec une discrétisation en 16 éléments, le modèle de poutre à 2 noeuds est légèrement plus rigide pour des valeurs de la charge variant de 5 à 20 KN.

7-4 Etude de la performance des trois modèles d'élément finis type poutre:

7-4-1 poteau de Low-Moehle :

Pour pouvoir comparer la performance des trois versions du programme basées sur les trois modèles d'éléments finis élaborés précédemment, nous avons tracé deux courbes représentatives (erreurs relatives sur les charges et les déplacements à la rupture) et cela en fonction de nombre d'éléments. Le tableau 7-6 présente les principaux résultats obtenus par les 3 modèles d'éléments poutre.

La version du programme	N d'éléments	Forces (KN)	Déplacements (mm)	$\frac{F}{F_{discr\ max}}$	Erreur relative Err F (%)	$\frac{d}{d_{discr\ max}}$	Erreur relative Err d (%)
Poutre_mince2	1élément	36.5	7.6783	1.55	55	1.5	50
	2éléments	29	7.41	1.23	23	1.45	45
	3 éléments	26.5	6.8362	1.127	12.7	1.336	33.6
	4éléments	25.5	6.5453	1.085	8.5	1.28	28
	8éléments	24	5.3991	1.02	2	1.05	5
	16éléments	23.5	5.1163	1	0	1	0
Poutre_mince3	1élément	28	7.2024	1.166	16.6	1.458	45.8
	2éléments	25	5.9596	1.04	4	1.206	20.6
	3 éléments	24	5.6408	1	0	1.142	14.2
	4éléments	24	5.6416	1	0	1.142	14.2
	8éléments	24	4.94	1	0	1	0
Poutre_mince4	1élément	25.5	6.3633	1.085	8.5	1.231	23.1
	2éléments	24	5.5809	1.021	2.1	1.0796	7.96
	3éléments	23.5	5.1692	1	0	1	0

Tableau7-6. Récapitulation des principaux résultats donnés par les différentes versions du programme

F et **d** = force maximale et déplacement maximal selon le nombre d'éléments finis utilisés.

F_{discr max} et **d_{discr max}** = force et déplacement correspondant à la discrétisation maximale et cela selon le modèle d'éléments finis utilisé.

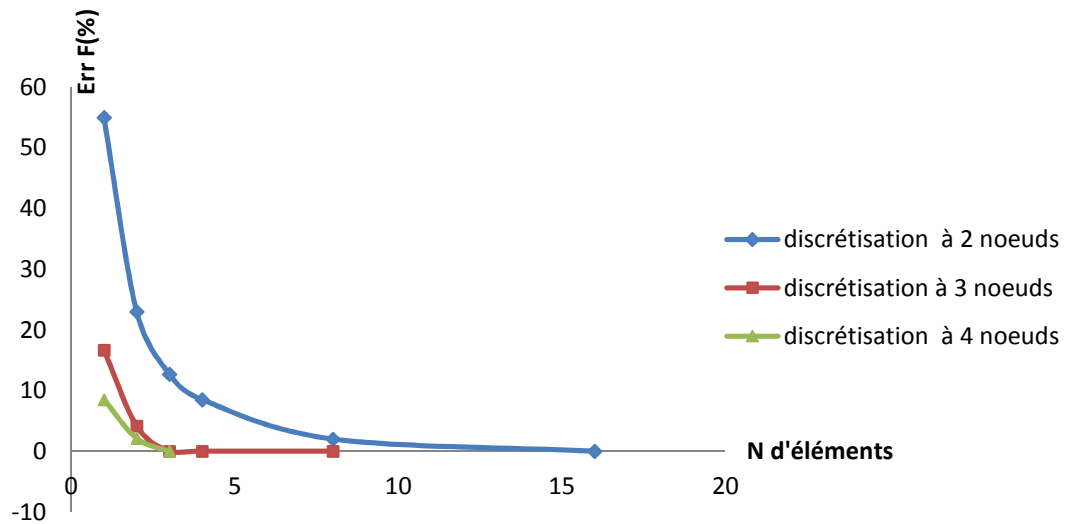


Figure 7-8 : courbes de l'erreur relative (en %) sur la charge –Nombre d'élément pour les 3 versions du programme

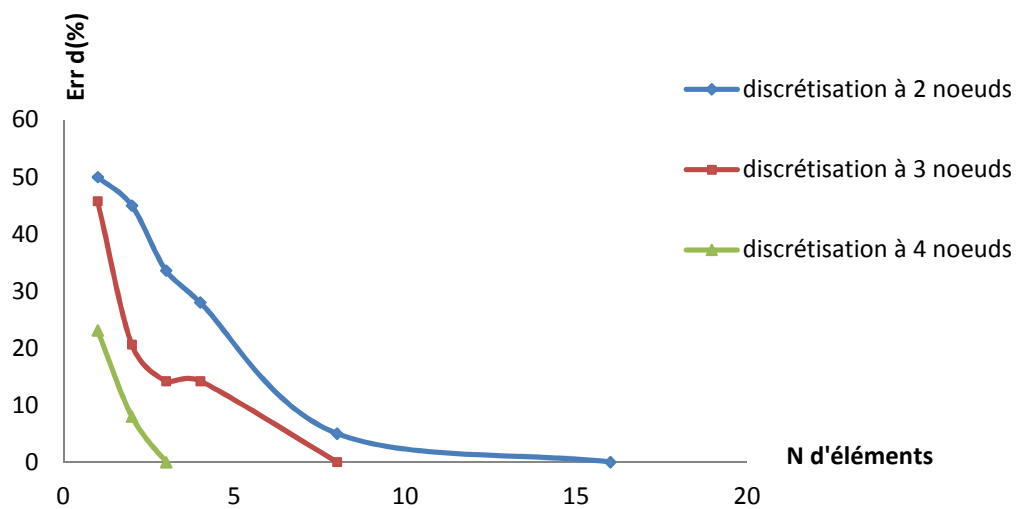


Figure 7-9 : courbes de l'erreur relative (en %) sur le déplacement - Nombre d'élément pour les 3 versions du programme

En s'appuyant sur les figures 7-8 et 7-9 on peut tirer les points suivants :

- la performance des trois modèles apparait clairement en comparant les variations des erreurs relatives de forces et des déplacements en fonction du nombre d'éléments finis utilisés dans la discrétisation.
- il est clair que les erreurs relatives sur la charge et le déplacement à la rupture diminuent, autrement dit la précision s'améliore, lorsque le nombre d'éléments finis augmente.

- concernant la précision dans l'évaluation de la charge maximale, les modèles de poutre à 3 et 4 nœuds sont largement plus performants que le modèle de poutre à 2 nœuds.
- concernant la précision dans l'évaluation du déplacement sous charges maximale, les modèles de poutre à 2 et 3 nœuds sont largement moins performants que le modèle de poutre à 4 nœuds.
- En conclusion le modèle de poutre à 4 nœuds est plus performant que les deux autres modèles.

7-4-2. exemple d'un portique théorique :

Après le test de la performance des trois versions du programme poutre_mince sur le poteau de Low-Moehle, on s'intéresse cette fois-ci à l'étude de portique théorique présenté à figure 7-10. Ce dernier est composé d'une discrétisation à 19 nœuds, formant 18, 9 et 6 éléments à deux, à trois et à quatre nœuds respectivement. Les résultats de la simulation sont donnés à la figure 7-12.

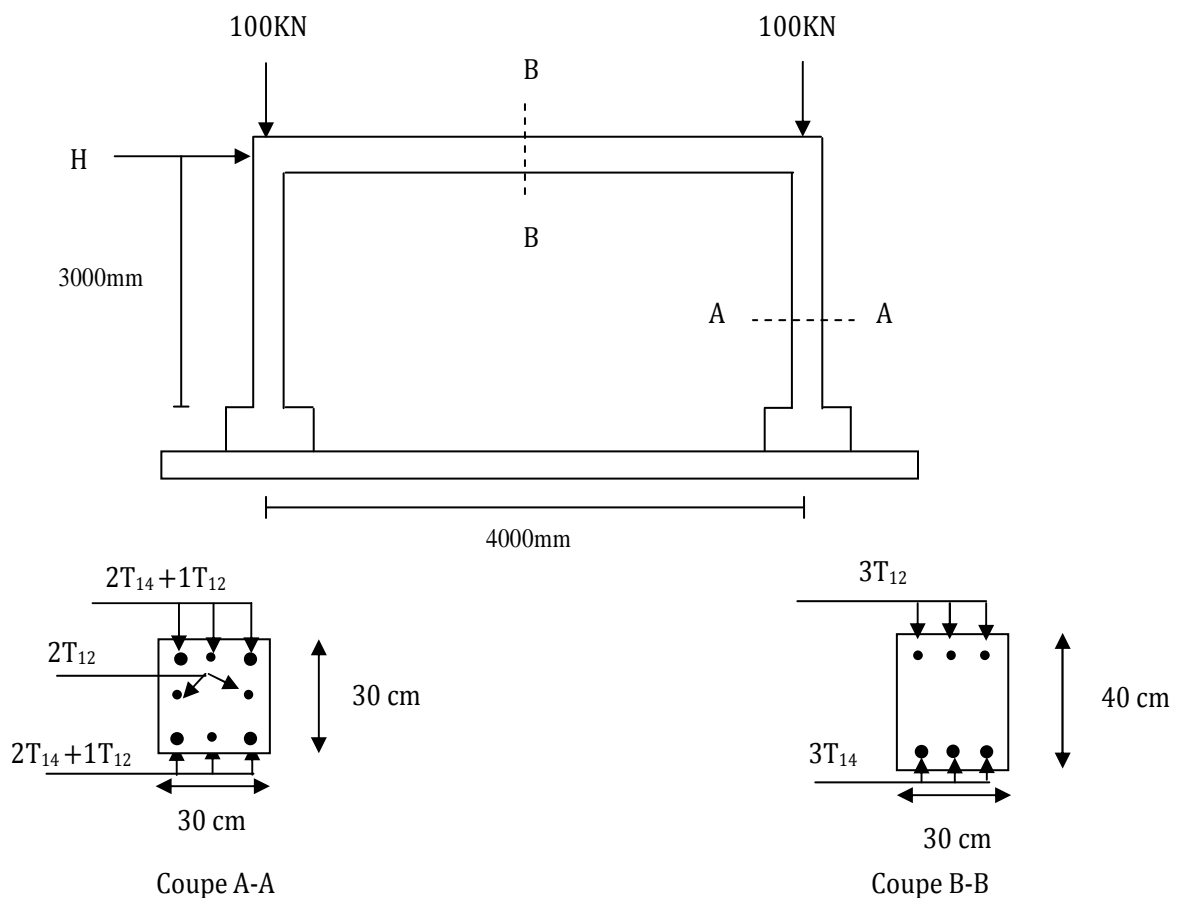


Figure 7-10 : Détail du portique étudié

Caractéristiques du béton		Caractéristiques des aciers	
Coefficient de poisson	0.2	Limite d'élasticité (MPa)	420
Module d'élasticité E (MPa)	36×10^3	Module d'élasticité E (MPa)	210×10^3
Résistance en compression f_c (MPa)	30	Contrainte de rupture (MPa)	450
Résistance en traction f_t (MPa)	2.4		

Tableau 7-7: propriété des matériaux qui forment le portique étudié

Les discrétisations sont données à la figure7-11.

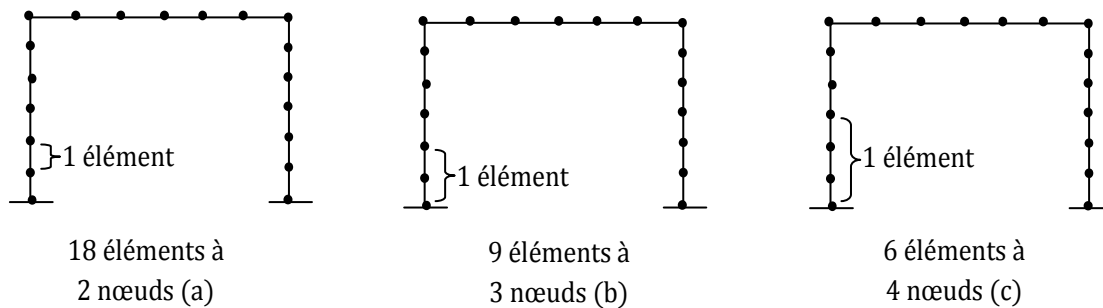


Figure 7-11. Détail de discrétisation pour le portique étudié

Les résultats de la simulation sont représentés à la figure 7-12.

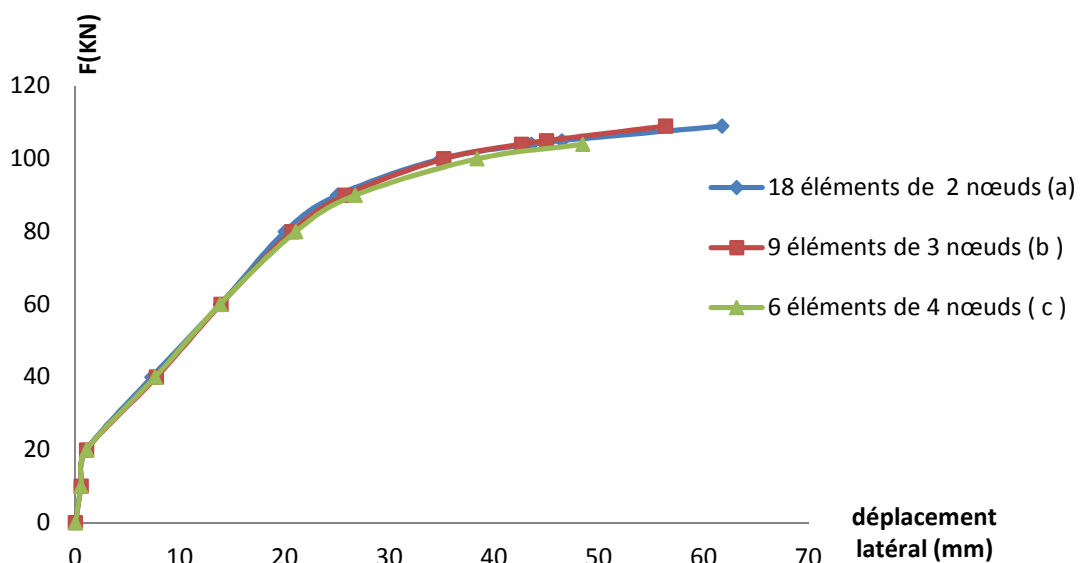


Figure 7-12. Résultats de la simulation numérique pour une discrétisation à 19 nœuds réalisée par les trois versions du programme

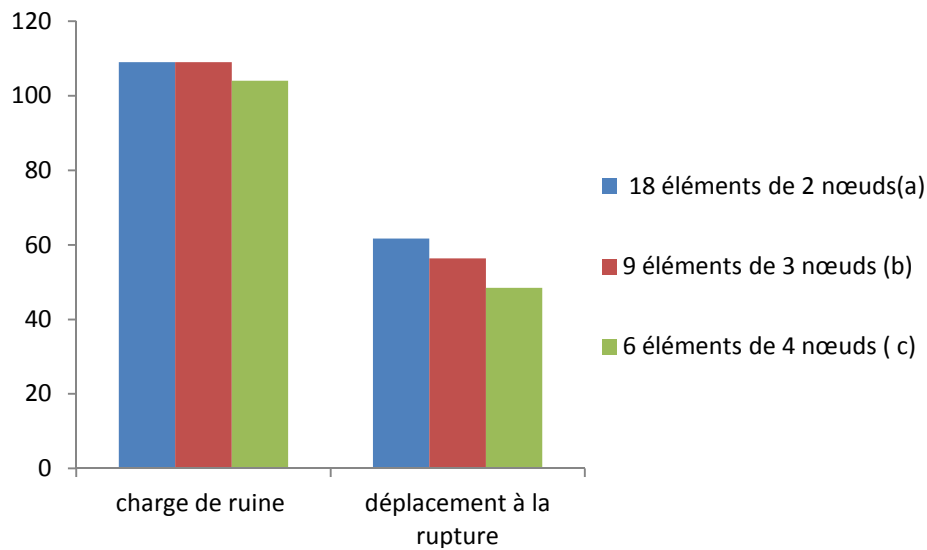


Figure 7-13. Histogramme donnant les charges de ruine et les déplacements à la rupture en fonction de type de discrétisation.

En s'appuyant sur **les figures 7- 12 et 7-13** on peut faire les remarques suivantes :

- l'estimation de la charge de ruine, semble pas influencée par le modèle d'éléments finis utilisé. Sauf pour le modèle utilisant 4 nœuds par élément (discrétisation type (c)), ce dernier donne une valeur légèrement faible par rapport aux deux autres modèles (discrétisations de type (b) et de type (c)).
- l'estimation de déplacement à la rupture est influencée considérablement par le modèle d'éléments finis utilisé. la figure 7-13 montre que la valeur de déplacement à la rupture estimée diminue avec des simulations utilisant les discrétisations (b) et (c).
- En conclusion, les modèles d'éléments qu'on utilise influencent sur les résultats finaux.

7- 5. Influence du type de discrétisation :

Dans les calculs précédents, nous avons effectué les simulations en utilisant une discrétisation dans laquelle les éléments finis poutre sont équidistants. Les résultats des calculs peuvent être améliorés en affinant le maillage c'est-à-dire en " serrant" les éléments dans les zones correspondants aux valeurs maximales du moment fléchissant. En effet dans ces zones, la courbure varie d'une manière fortement non linéaire.

7-5-1.Etude du poteau de Low-Moehle :

Une étude comparative est effectuée sur le poteau de Low-Moehle en utilisant 3 discrétisation :

- discrétisation en quatre éléments à 2 nœuds et de longueurs égales. } 1^{er} type
- discrétisation en seize éléments à 2 nœuds et de longueurs égales. } 1^{er} type
- discrétisation en quatre éléments, en affinant le maillage au voisinage de l'encastrement } 2^{ème} type

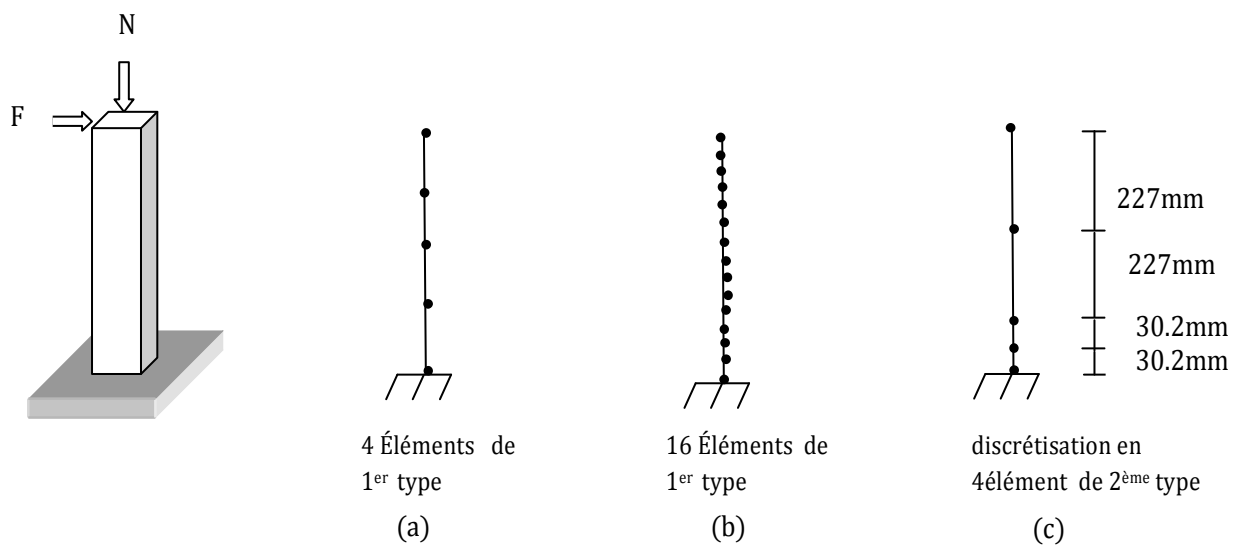


Figure7-14 Détail du maillage pour les différents modèles à deux nœuds utilisés

La représentation graphique des différents résultats est donnée à la **figure7-15** :

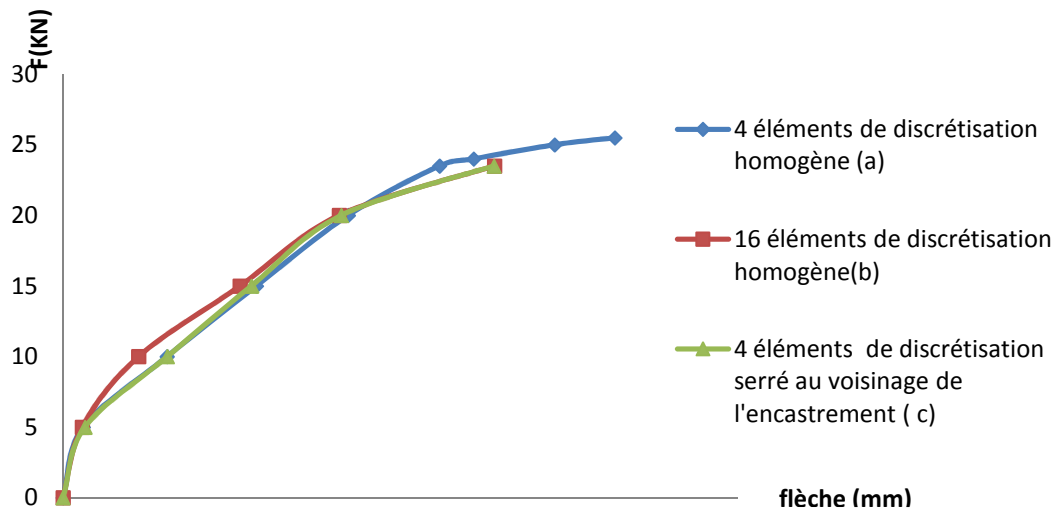


Figure7-15 : Influence du type de discrétisation sur les résultats de calcul pour le poteau de Low-Moehle

On constate clairement que la discrétisation (c) utilisant seulement 4 éléments permet d'obtenir de bons résultats équivalents à ceux obtenus avec 16 éléments dans la discrétisation (b).

Ceci est dû au fait que les non linéarités sont concentrées dans la zone près de l'encastrement correspondant à la section soumise au moment fléchissant maximal. En effet à l'approche de la charge de rupture, la courbure dans cette zone devient fortement non linéaire.

7-5-2. Etude de l'exemple du portique théorique :

On considère l'exemple de portique en béton armé, dont la géométrie et le ferrailage sont présentés à la figure 7-10 pour cet exemple, on utilise 3 discrétisations différentes (figure 7-16). En utilisant des éléments poutres à 2 nœuds.

- discrétisation en 20 éléments à deux nœuds répartis uniformément (a).
- discrétisation en 9 éléments répartis uniformément (b).
- discrétisation en 9 éléments mais avec serrage du maillage au niveau des encastres et au niveau des jonctions (c).

Les courbes charges-déplacements obtenues en utilisant les trois discrétisations sont portées sur la figure 7-17.

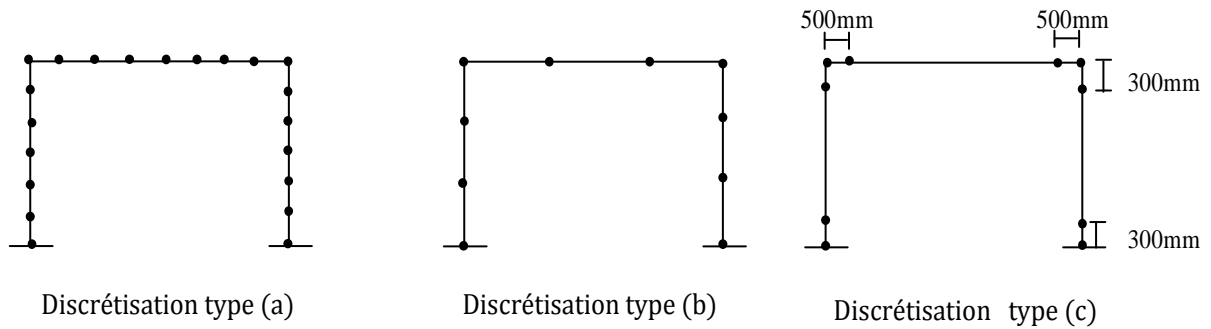


Figure 7-16. Détail de discrétisation pour le portique étudié

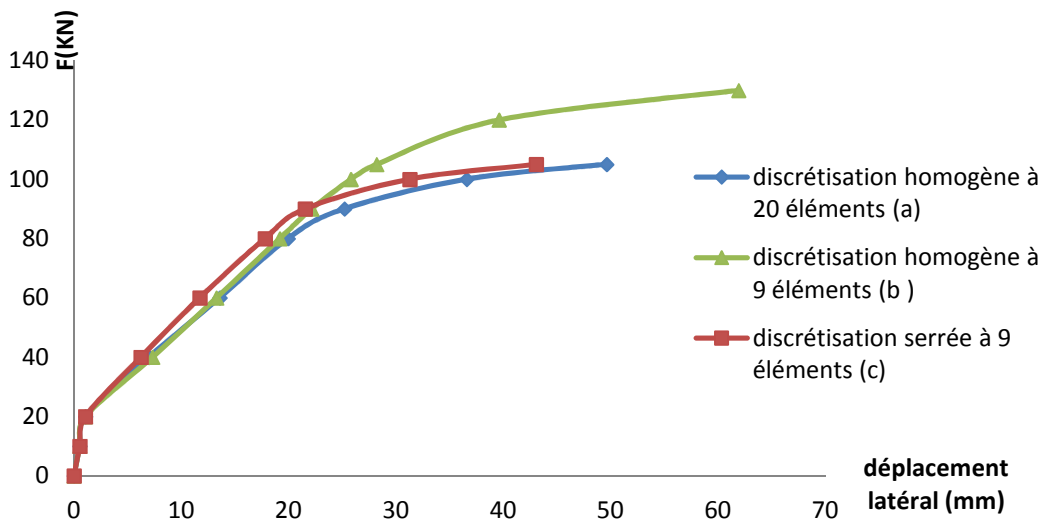


Figure 7-17 Courbes forces- déplacements pour les différents types de discrétisations de portique.

- la discrétisation (c) utilisant seulement 9 éléments, mais en serrant les éléments au niveau des encastremets et des nœuds, permet d’obtenir un résultat équivalent à celui obtenu avec 20 éléments équidistants.
- en conclusion, on peut obtenir un résultat satisfaisant avec un nombre global réduit d’éléments, en serrant le maillage au niveau des zones de forte non linéarité.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

La formulation des éléments finis poutres à 2 nœuds est très simple et est largement présentée en littérature. Le programme `poutre_mince2`, existant et utilisant ce type d'éléments permet de simuler correctement le comportement non linéaire jusqu'à la rupture des ossatures planes en béton armé. Cependant, on doit affiner suffisamment le maillage, surtout au voisinage de fortes non linéarités afin d'aboutir à des résultats satisfaisants.

Dans le cadre de ce travail, nous avons formulé et élaboré deux nouveaux éléments finis poutres à 3 et à 4 nœuds. Ces modèles ont été implantés dans le programme existant. Ils ont été validés à l'aide de plusieurs calculs de vérification.

Ensuite, une étude comparative a été réalisée entre les 3 types d'éléments poutres (à 2, 3 et à 4 nœuds).

Il ressort de l'étude que les éléments poutres à 4 nœuds sont largement plus performants. En effet, on peut obtenir des résultats satisfaisants précis en utilisant un nombre plus réduit d'éléments. Ceci nous permettra d'aborder plus facilement le calcul d'ossatures planes à plusieurs niveaux et travées.

Perspectives

- modification du programme d'une manière à réduire le nombre de nœuds nécessaires.
- prise en compte des non linéarités géométriques.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Grelat A. (1978)**, « Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé », Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI.
- [2] **SAAD M, (2011)** « Influence du pourcentage d'acier sur le comportement post-Fissuration du béton armé en traction » Thèse de docteur d'état, Université MOULOU MAMMERI de Tizi Ouzou.
- [3] **GAGLIARDINI O, (2004)**, << cours de béton armé >> IUP GCI3 option OS Année 2004/05.UJF-Grenoble I.
- [4] **KAOUANE T, (2011)**, << modélisation du comportement en cisaillement jusqu'à rupture des sections de poutres en béton armé et précontraint >>, Thèse de MAGISTER Université MOULOU MAMMERI De Tizi Ouzou
- [5] **OUBRAHAM C, (2012)** « simulation du comportement instantané et différé d'une zone Fléchie en béton armé » ; Thèse de MAGISTER, Université MOULOU MAMMERI De Tizi Ouzou
- [6] **Florent ROBERT (1999)**, << contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en Génie civil (application aux ouvrages d'Arts)>>, thèse de doctorat, institut national des sciences appliquées de LYON.
- [7] **KAOUANE.M (2011)**, << Analyse des contraintes mécaniques et de la fissuration des éléments en béton armé sous l'effet thermomécanique >>; Thèse de MAGISTER, Université MOULOU MAMMERI De Tizi Ouzou
- [8] **SI Salem .A, (2012)** << Modélisation du béton tendu fissuré dans le calcul en flexion d'une zone en béton armé >>, Thèse de Master recherche, Université MOULOU MAMMERI De Tizi Ouzou.
- [9] **Belhocine .M, (2009)**, << Ductilité des éléments structuraux de bâtiments en béton armé>>, Thèse de MAGISTER, Université MOULOU MAMMERI De Tizi Ouzou
- [10] **GHANNOUM.W (1998)**, «Size effect on shear strength of reinforced concrete beam» Mémoire de Master, école normale supérieur de Cachan

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[11] **NGUYEN.X.H, (2006)**, << Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs>>, Thèse de doctorat, institut nationale polytechnique de Grenoble.

[12] **Meziane R, (2008)** << modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton armé et béton de fibres, par des éléments finis poutres. >> Mémoire de magister, département de génie civil, université de mouloud Mammeri de Tizi ousou.

[13] **BAEL** Règles et techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en Béton armé aux états limite, fascicule 62 du CCTG, règlement français.

[14] **NGUYEN. X. H. (2006)**, <<Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles Porteurs: expérimentation et modélisation>>, thèse de doctorat, institut nationale polytechnique de Grenoble.

[15] **Drizi. S, S. Kaci, C.Oubraham, F.Amiar, M.Belhocine**, << Simulation du comportement instantané et différé d'une zone en béton armé>>, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

[16] **O.NAIT RABAH (1990)**; << Simulation Numérique du comportement non linéaire des ossatures spatiales ; application aux structures en béton armé, en béton précontraint et mixtes >> ; Thèse de doctorat-Ecole centrale de PARIS.

[17] **HAMMOUM. H, (1998)** << simulation numérique du comportement non-linéaire des structures planes, >>. Mémoire de magister, département de génie civil, université de mouloud Mammeri de Tizi ousou.

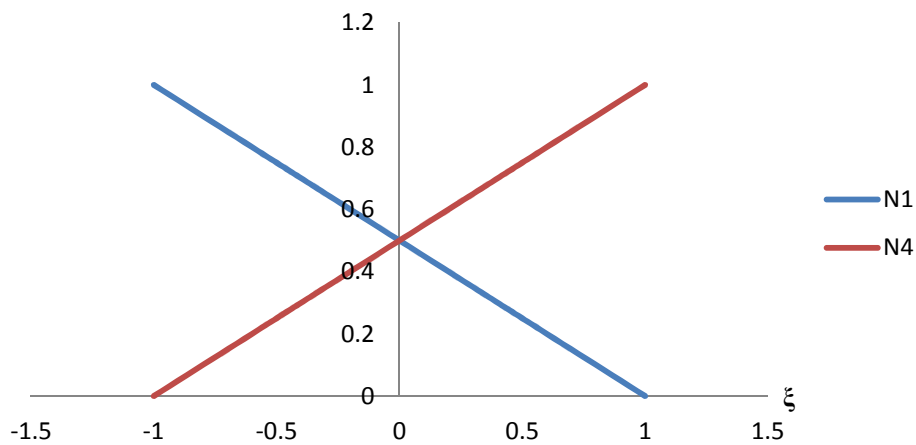
[18] **GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT, (1984)**, << une présentation de la méthode des éléments finis >>, DEUXIEME EDITION.

[19] **Charles E. Augarde , (1998)**, << generation of shape functions for straight beam elements >> Department of Engineering Science, University of Oxford, Parks Road, Oxford, U.

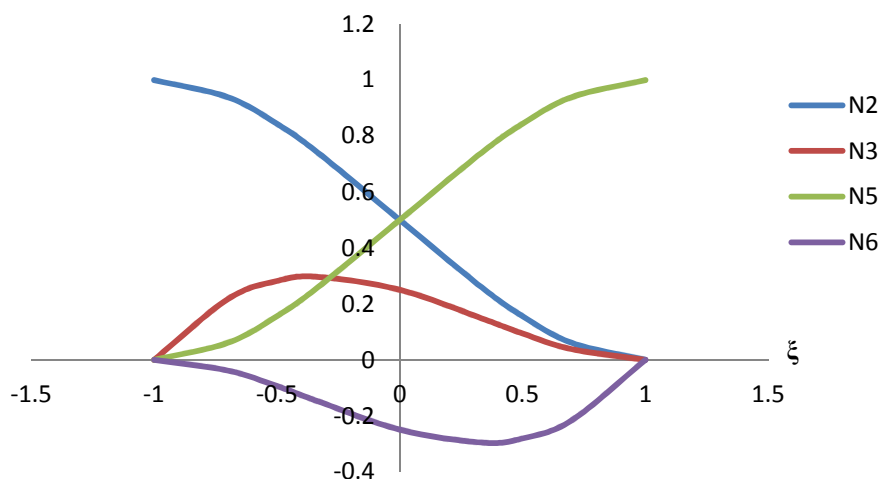
ANNEXES

Annexe A : Représentation graphique des différentes fonctions de forme.**A-1) les fonctions de forme pour l'élément à deux nœuds.**

A-1-1) les fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal :

**Figure A.1** : graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à 2 nœuds

A-1-2) les fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal et la rotation :

**Figure A.2** : graphe des fonctions d'interpolation pour les déplacements transversaux et les rotations des éléments à 2 nœuds

A-2) les fonctions de forme pour l'élément à trois nœuds.

A-2-1) les fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal :

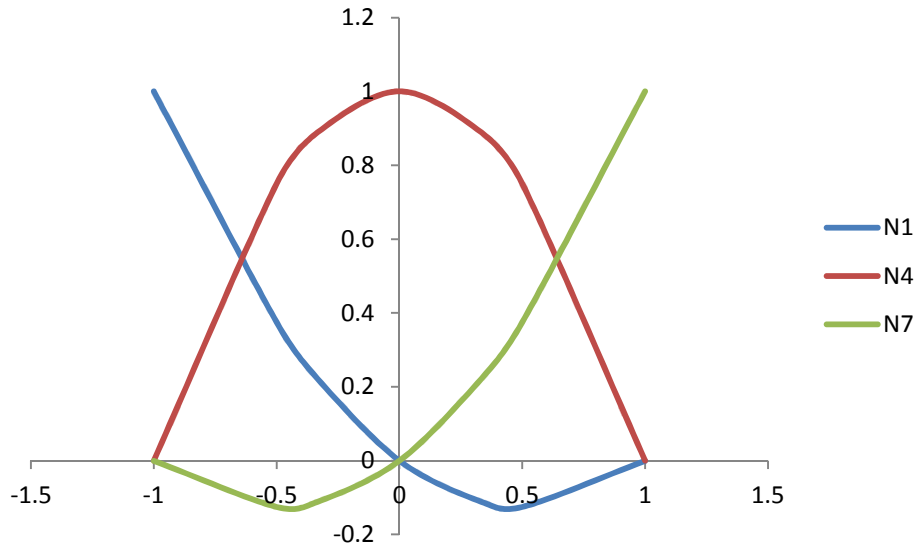


Figure A.3 : graphe des fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal des éléments à 3 nœuds

A-1-2) les fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal et la rotation :

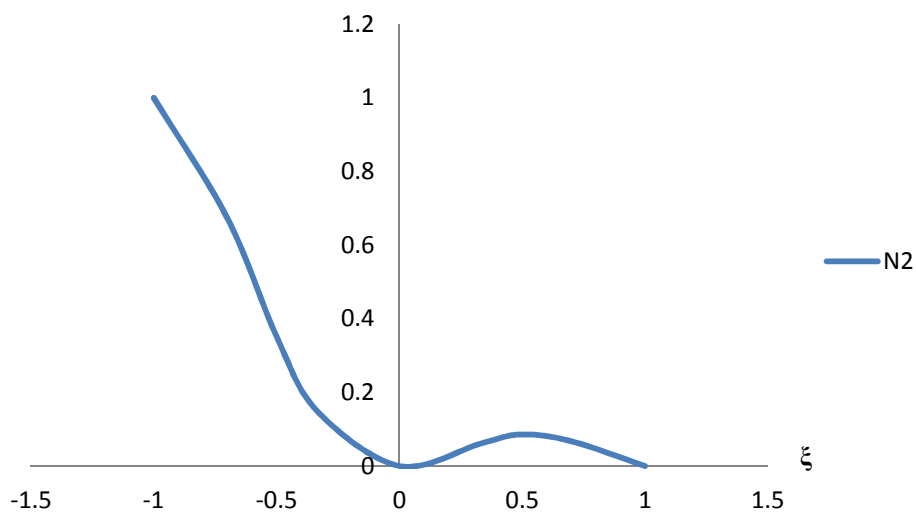


Figure A.4 : graphe de la fonction d'interpolation N_2 de w_1

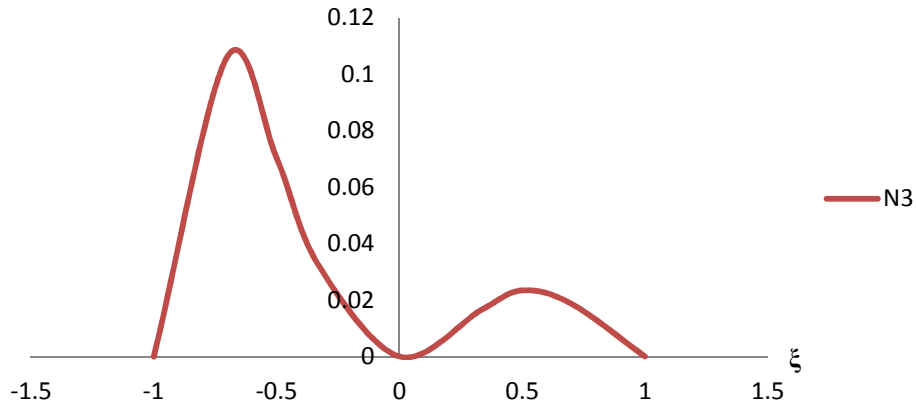


Figure A.5 : graphe de la fonction d'interpolation N_3 de θ_1

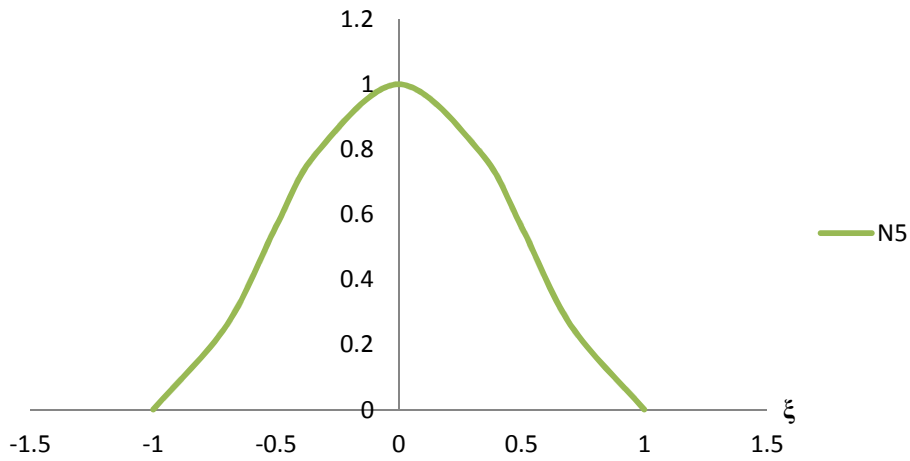


Figure A.6 : graphe de la fonction d'interpolation N_5 de w_2

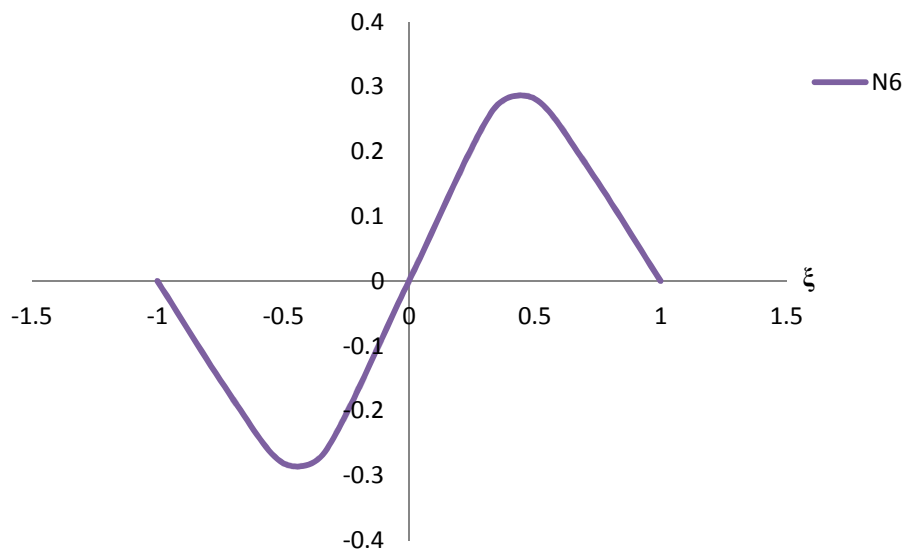


Figure A.7 : graphe de la fonction d'interpolation N_6 de θ_2

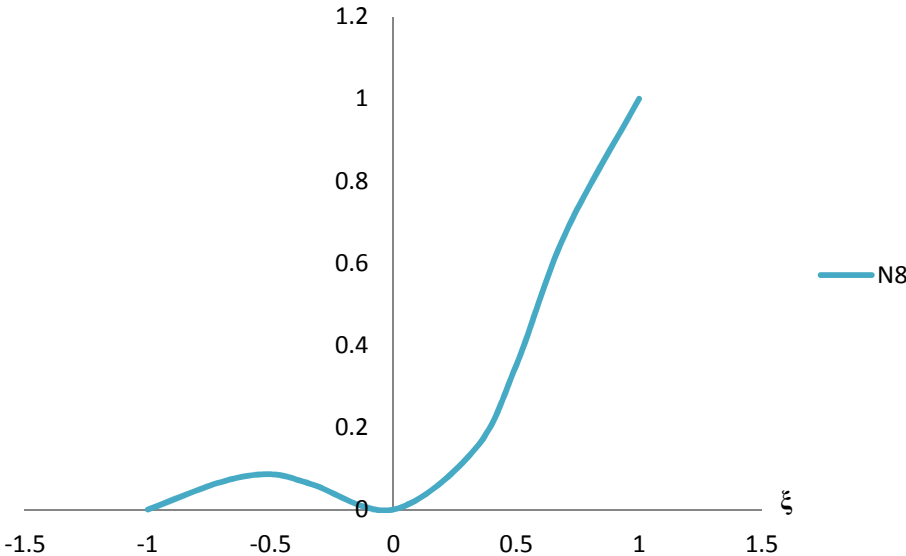


Figure A.8 : graphe de la fonction d'interpolation N_8 de w_3

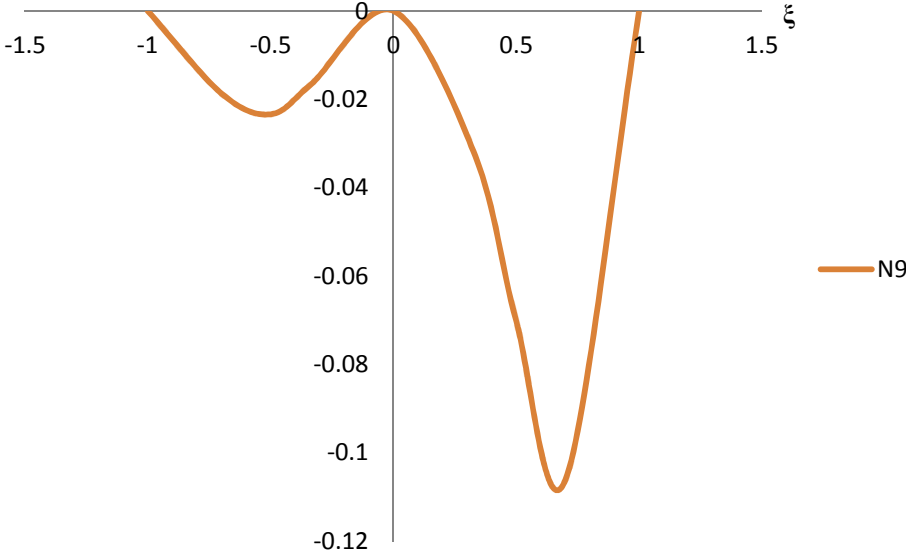
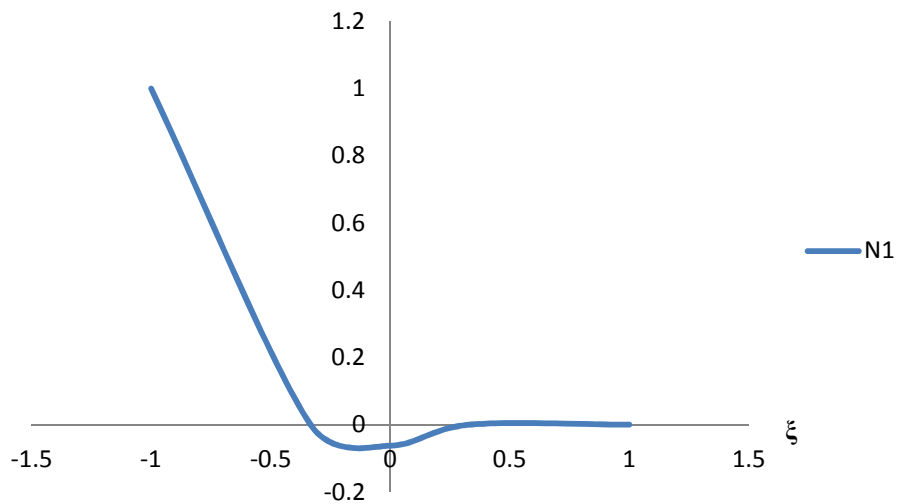
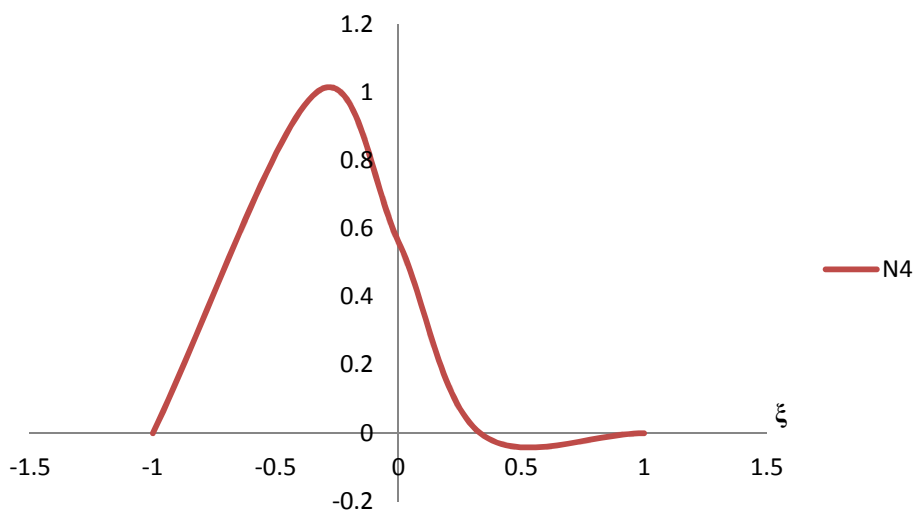


Figure A.9 : graphe de la fonction d'interpolation N de θ_9

A-3) les fonctions de forme pour l'élément à quatre nœuds.

A-3-1) les fonctions d'interpolation pour le déplacement longitudinal :

Figure A.10 : graphe de la fonction d'interpolation N_1 de u_1 Figure A.11 : graphe de la fonction d'interpolation N_4 de u_2

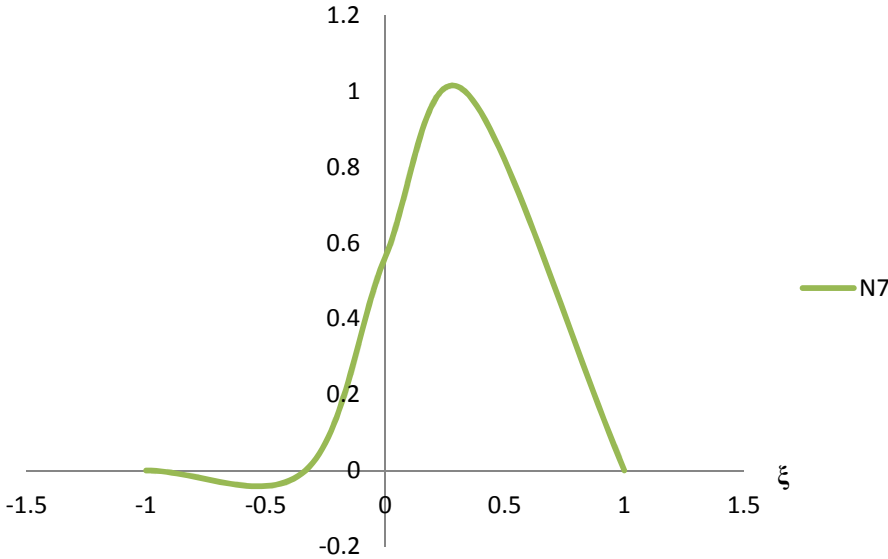


Figure A.12 : graphe de la fonction d'interpolation N_7 de u_3

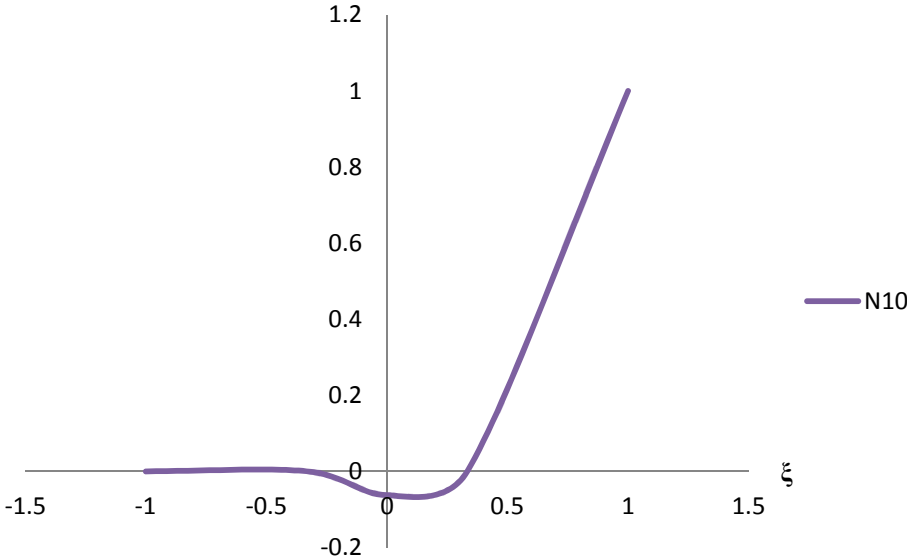


Figure A.13 : graphe de la fonction d'interpolation N_{10} de u_4

A-3-2) les fonctions d'interpolation pour le déplacement transversal et la rotation :

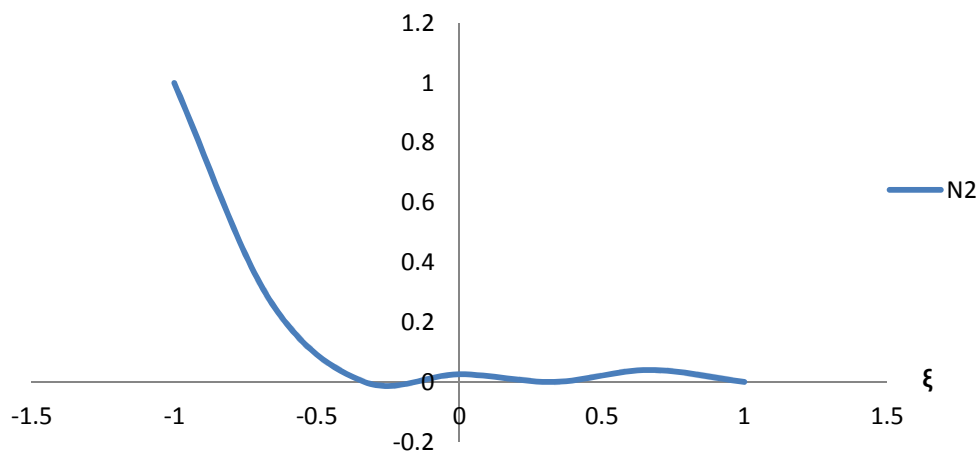


Figure A.14 : graphe de la fonction d'interpolation N_2 de w_1

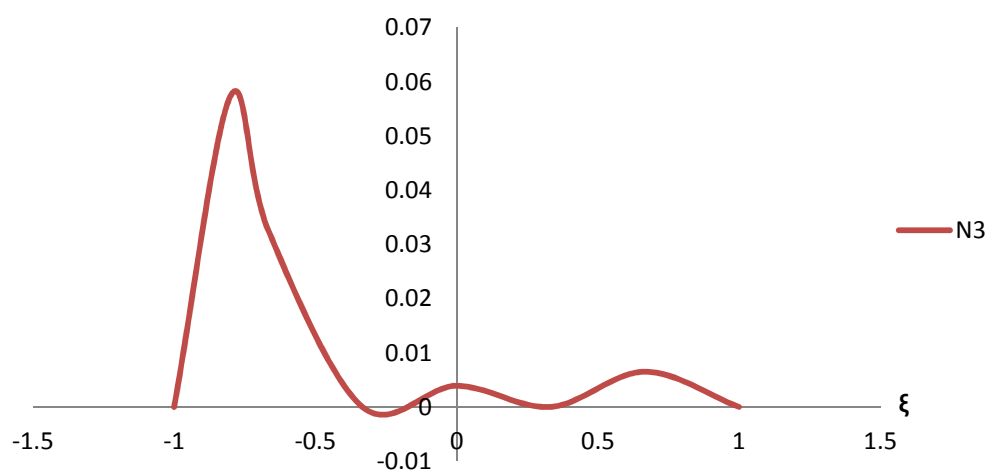


Figure A.15 : graphe de la fonction d'interpolation N_3 de θ_1

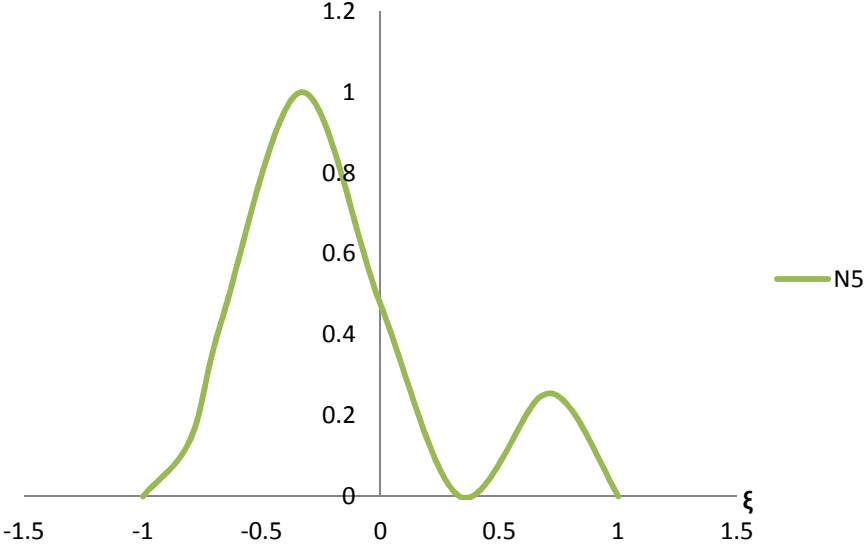


Figure A.16 : graphe de la fonction d'interpolation N_5 de w_2

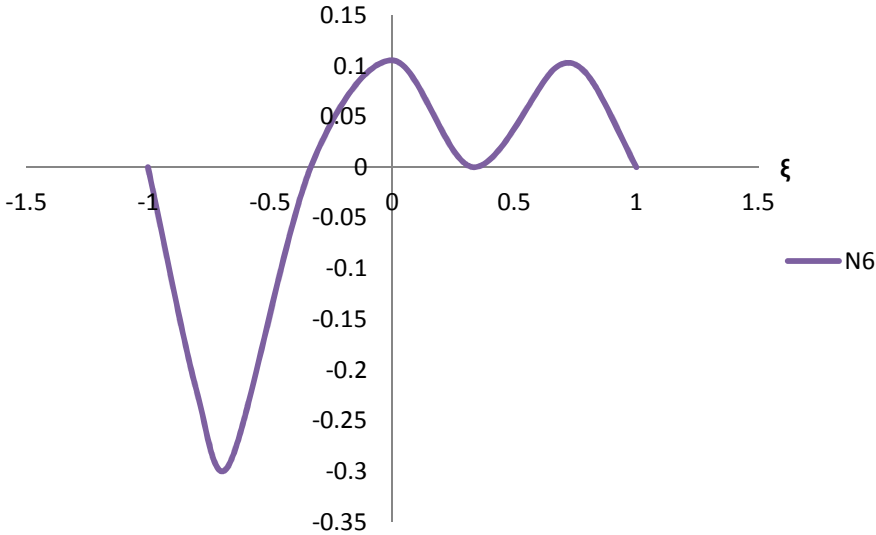


Figure A.17 : graphe de la fonction d'interpolation N_6 de θ_2

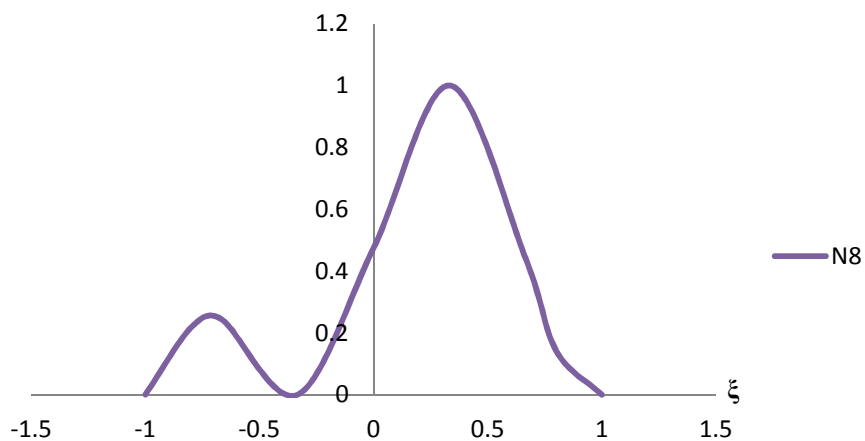


Figure A.18 : graphe de la fonction d'interpolation N_8 de w_3

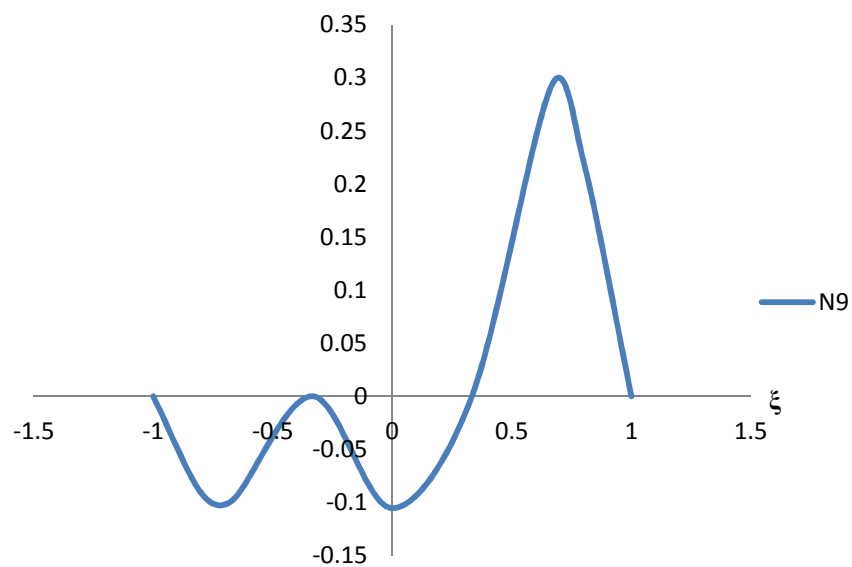


Figure A.19 : graphe de la fonction d'interpolation N_9 de θ_3

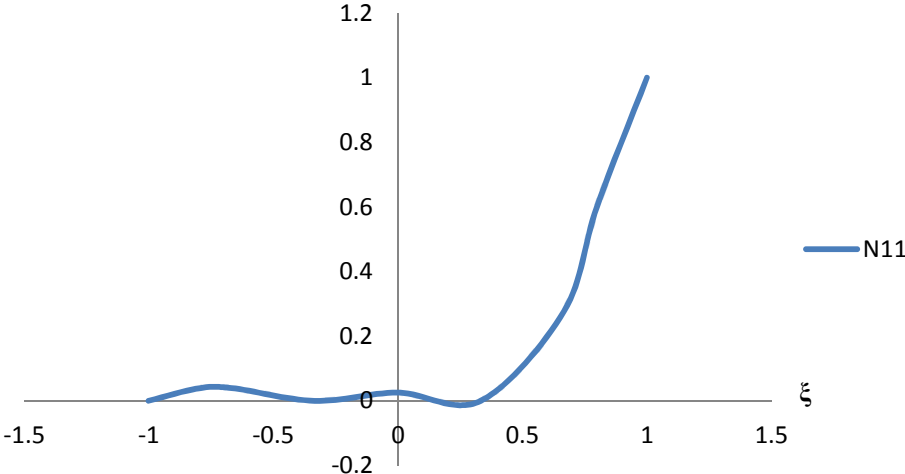


Figure A.20 : graphe de la fonction d'interpolation N_{11} de w_4

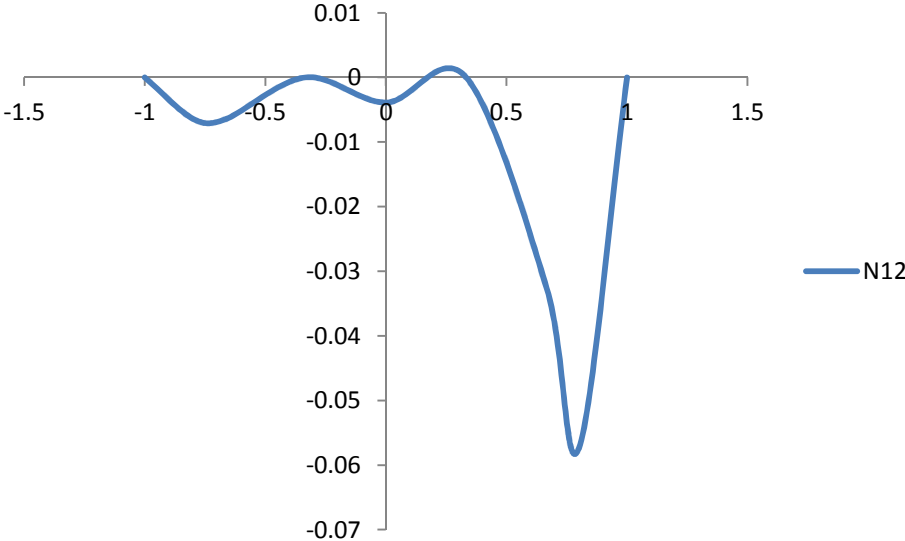


Figure A.21 : graphe de la fonction d'interpolation N_{12} de θ_4

ANNEXE B : EXEMPLE DE FICHIERS DE DONNEES

B1 : fichier de données de poteau de Low_Moehle traité avec **poutre_mince2** :

```

début_titre
$
$      Essai de Low et Moehle 1987 étudié par Limakatanyu
$      console en beton arme, soumise a la flexion composée
$      Discrétisation en 4 éléments à 2 nouds. unités (N,mm)
fin_titre

donnees_globales
5 4 1 1 3 1 3 10 10 2 2
elements
1 1 1 1 2
2 1 1 2 3
3 1 1 3 4
4 1 1 4 5
coordonnees
1 0. 0.
2 128.6 0.
3 257.2 0.
4 385.8 0.
5 514.4 0.
section
1 127. 1 3
165. 165. 0. 127. 1
35. 206.1 2
63.5 64.30 3
92. 206.1 2
conditions_limites
1 111 0. 0. 0.
matériaux
1 2 33000. 0.2 42.13 44. 0.002 0.0035 3.05 0.001 1 1
2 3 200000. 0.3 465.1 500. 0.010 0. 0. 0. 0.
3 3 200000. 0.3 444.0 500. 0.010 0. 0. 0. 0.
charges
1 0
charges_nodales
1
5 -44500. 0. 0.
increment
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
charges
1 0
charges_nodales
1
5 0. -10000. 0.

```

ANNEXE B :**EXEMPLES DE FICHIERS DE DONNEES**

```
increment
0.5      0.05  100      2
0.5      0.05  100      2
0.5      0.05  100      2
0.5      0.05  100      2
0.35     0.05  100      2
0.05     0.05  100      2
0.05     0.05  100      2
0.05     0.05  100      2
0.05     0.05  100      2
0.05     0.05  100      2
```

B2 : fichier de données de poteau de Low_Moehle traité avec **poutre_mince3** :

```

début_titre
$
$      Essai de Low et Moehle 1987 étudié par Limakatanyu
$      console en béton arme, soumise a la flexion composée
$      Discrétisation en 4 éléments à 3 nœuds. unités (N,mm)
fin_titre

donnees_globales
9  4  1  1      3  1  3      10  10  2  2
elements
1   1  1  1  2  3
2   1  1  3  4  5
3   1  1  5  6  7
4   1  1  7  8  9
coordonnees
1  0.      0.
2   64.3  0.
3   128.6  0.
4   192.9  0.
5   257.2  0.
6   321.5  0.
7   385.8  0.
8   450.1  0.
9   514.4  0.
section
1  127.  1  3
165.  165.  0.  127.  1
35.  206.1  2
63.5  64.30  3
92.  206.1  2
conditions_limites
1  111      0.  0.  0.
matériaux
1  2  33000.  0.2  42.13  44.  0.002  0.0035  3.05  0.001  1  1
2  3  200000.  0.3  465.1  500.  0.010  0.  0.  0.  0.  0.
3  3  200000.  0.3  444.0  500.  0.010  0.  0.  0.  0.  0.
charges
1  0
charges_nodales
1
9  -44500.  0.  0.
increment
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2
0.1  0.05  100  2

```

ANNEXE B :**EXEMPLES DE FICHIERS DE DONNEES**

```
charges
1 0
charges_nodales
1
9      0.      -10000.  0.
increment
0.5    0.05  100      2
0.5    0.05  100      2
0.5    0.05  100      2
0.5    0.05  100      2
0.3    0.05  100      2
0.05   0.05  100      2
0.05   0.05  100      2
0.05   0.05  100      2
0.05   0.05  100      2
0.05   0.05  100      2
```

B3 : fichier de données de poteau de Low_Moehle traité avec **poutre_mince4** :

```

début_titre
$
$      Essai de Low et Moehle 1987 étudié par Limakatanyu
$      console en beton arme, soumise a la flexion composée
$      Discrétisation en 3 éléments à 4 nœuds unités (N,mm)
fin_titre

donnees_globales
10 3 1 1 3 1 3 10 10 2 2
elements
1 1 1 1 2 3 4
2 1 1 4 5 6 7
3 1 1 7 8 9 10
coordonnees
1      0.      0.
2      57.155  0.
3      114.311 0.
4      171.466 0.
5      228.622 0.
6      285.777 0.
7      342.933 0.
8      400.088 0.
9      457.244 0.
10     514.4 0.
section
1 127. 1 3
165. 165. 0. 127. 1
35. 206.1 2
63.5 64.30 3
92. 206.1 2
conditions_limites
1 111 0. 0. 0.
matériaux
1 2 33000. 0.2 42.13 44. 0.002 0.0035 3.05 0.001 1 1
2 3 200000. 0.3 465.1 500. 0.010 0. 0. 0. 0. 0.
3 3 200000. 0.3 444.0 500. 0.010 0. 0. 0. 0. 0.
charges
1 0
charges_nodales
1
10 -44500. 0. 0.
increment
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2
0.1 0.05 100 2

```

```
charges
1 0
charges_nodales
1
10      0.      -10000.  0.
increment
0.5     0.05  100      2
0.5     0.05  100      2
0.5     0.05  100      2
0.5     0.05  100      2
0.1     0.05  100      2
0.1     0.05  120      2
0.1     0.05  120      2
0.05    0.05  120      2
0.05    0.05  100      2
0.05    0.05  100      2
```