République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou

Tasdawitn'Tizi-Ouzou

Faculté des sciences

Département Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER

Pour l'obtention du diplôme de master en Recherche Opérationnelle

Thème

Résolution d'un problème linéaire à grand nombre de paramètre avec la méthode adaptée

Réalisé par : **Melle Dahdah Samira**

Dirigé par : **Mr M.AIDENE**

Devant le jury :

Président : **Mr Oukacha Brahim**

Examinatrice : **Mme Rezki Fariza (M.A.A)**.

Soutenue le, 15 Octobre 2020

Remerciement

*Je remercie en premier **le bon dieu qui m'a donnée la santé, courage et** foie pour réaliser ce travail **de fin d'études avec volonté dans les meilleures** conditions.*

Je tiens spécialement à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères au Professeur Mohamed Aidene mon encadreur de mémoire pour ces précieux conseils et son suivi durant la réalisation de ce modeste travail.

*Je suis honoré de la présence de Mr le président et les membres de jury, de **l'intérêt qu'ils ont porté à ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon** profond respect.*

*A mes très chers amis et camarades, et toute personne ayant participé **d'une manière ou d'une autre à** la réalisation de ce travail, trouvent ici mes sincères reconnaissances.*

***Sans oublier d'exprimer** mes reconnaissances et gratitude a tous nos enseignants durant notre cursus au département mathématiques.*

*Je tiens enfin à remercier tout particulièrement ma très chère mère qui a **toujours cru en moi et m'a encouragé à aller toujours de l'avant et de** ne pas baisser les bras.*

Merci beaucoup

Table des matières

Introduction générale :

La recherche opérationnelle (RO), en anglais Operationnal rechearch, prenant son origine du domaine militaire est l'ensemble des techniques rationnelles d'analyse et de résolution de problèmes concernant, notamment, l'activité économique et visant à élaborer les décisions les plus efficaces pour obtenir un meilleur résultat. L'omniprésence de la RO dans des secteurs de plus en plus variés que l'ordonnancement de production, les systèmes de transport (réservation, affectation des personnels..), la gestion des stocks, les télécommunications, les banques, la finance … etc.

Durant la seconde guerre mondiale, des groupes de scientifiques se forment en Angleterre pour résoudre des problèmes opérationnels importants tels que la détermination des emplacements des stations radar pour la détection des avions ennemis. Durant cette période, des équipes et même des services de recherche opérationnelle sont mis en place dans de nombreuses entreprises touchant essentiellement le monde des ingénieurs, les sociétés de conseil et les milieux industriels.
Les ouvrages et les revues de la RO en langue anglaise se diffusent très largement durant cette période. D'autres apparaissent également en langue française.
Après la seconde guerre mondiale, la RO se répond au monde industrielle en Angleterre, aux USA et ailleurs. Les techniques de la RO connaissent alors une évolution stimulée par : de nouveaux outils théoriques et les moyens de calculs informatiques.

En effet, la programmation mathématique sera très utile au praticien de la recherche opérationnelle. Elle traite plusieurs modèles mathématiques et problèmes pratiques importants, qui se proposent pour objet l'étude et la mise en œuvre des algorithmes de résolution. Il s'agit alors de la branche de l'optimisation qui s'occupe de maximiser ou de minimiser un objet sous certaines contraintes. Ceci se traduit mathématiquement de la façon suivante (dans le cas de maximisation)

$$\text{Max } f(x),\ x \in D \subseteq \Re^n$$

Où x est un vecteur de dimension n représentant les variables que l'on cherche à optimiser dans le problème considéré.

F une fonction scalaire traduisant le critère selon lequel on va évaluer les diverses valeurs de x et D le domaine des valeurs admissibles pour x. Plusieurs approches ont été proposées dans ce domaine notamment, la méthode la plus classique est l'algorithme du simplexe mise au point par un jeune mathématicien américain du nom George Bernard Dantzig dans les années 1947.
Cette dernière a connu depuis lors de nombreuses améliorations et est utilisé dans la majorité des logitielles commerciaux.

Cependant, un nouveau type de méthodes de résolution a fait son apparition durant les années 1970-80 par les professeurs R.Gabasov et F.M Kirillova de l'université de Mink, en Biolorussie, qui est une méthode de points intérieur qui fait l'objet de notre travail. La majorité de ces méthodes ont été développées dans le cas de problème de PL et dont le concept est basé sur celui de la méthode de simplexe.

Le présent travail, s'inspirant essentiellement des travaux de Gabassov et Kirillova, est consacré précisément à la construction d'algorithme de maximisation d'une fonctionnelle dans un domaine borné de $\Re^n$ d'un problème linéaire à grand nombre de paramètres.
Après un bref rappel de quelques notions sur la programmation linéaire dans le premier chapitre, nous avons construit dans le deuxième chapitre une itération de l'algorithme de la méthode adaptée pour la résolution d'un problème linéaire donnée sous sa forme standard. Ce dernier est de nature itérative, c'est-à-dire partant d'une solution réalisable et un support initial$\{x, J_B\}$, on construit l'itération $\{x, J_B\} \sim \{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ constituée de deux procédures :

1. Changement de plan $x \rightarrow \ \bar{x} = x + \theta$,
2. Changement de support $J_B \rightarrow \bar{J}_B$.

Ces deux étapes nous conduisent vers la solution optimal x^* en un nombre fini d'itérations.

Le derniers chapitre sera consacré à la résolution du problème à grand nombre de paramètres par la méthode adaptée en utilisant un autre problème auxiliaire dit problème du support, dont le principe est pratiquement le même que celui du chapitre 2.

Chapitre I : Rappel sur la programmation linéaire

Introduction :

Dans ce chapitre introductif, nous allons présenter certaines notions mathématiques et fondement théorique de la programmation linéaire telle que les définitions et les notions de convexité, qui nous permettent de résoudre de nombreux problèmes. On y trouve, entre autres une méthode classique pour la résolution des problèmes de programmation linéaire en nombre réels, qui est la méthode du simplexe.

I. 1. Programmation linéaire :

I.1.1- Introduction : Après la seconde guerre mondiale, une nouvelle méthode permettant de résoudre des problèmes complexe connue sous le nom de « programmation linéaire », était un terme militaire qui faisait référence à plusieurs activités. C'est un outil mathématique très riche qui constitue la technique la plus célèbre de la recherche opérationnelle. Développée par le mathématicien Georg-Bernard Dantzig et Air force qui a développé la méthode d'optimisation simplexe en 1947 afin de fournir un algorithme efficace pour résoudre des problèmes de programmation linéaire.

I.1.2- Définition :

La programmation linéaire constitue le domaine de la programmation mathématique le plus étudié et une des plus importantes techniques d'optimisation utilisées en recherche opérationnelle. Elle permet de résoudre de nombreux problèmes économique et industriel par plusieurs méthodes, elle s'est améliorée grâce aux efforts des économistes, des mathématiciens et des chefs d'entreprise.

En termes d'optimisation, la programmation linéaire consiste à optimiser (minimiser ou maximiser) une fonction cout appelée objectif ou économique, ou la fonction objective et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

Les exemples de problèmes qui relèvent de la programmation linéaire sont fort nombreux, on peut citer :

- Les problèmes de mélanges : Quelle est la composition optimale d'un produit ?
- Les problèmes de planification de production : Quand et à quel moment doit-on planifier la production d'un bien
- Les problèmes de transport
- Les problèmes de découpe industrielle
- Les problèmes de planification d'horaires

I.1.3- Forme générale d'un programme linéaire :

Tout problème de programmation linéaire de n variable et de m contraintes peut se formuler de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots x_n) = c_1x_1 + \cdots c_jx_j + \cdots c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j & (1,1) \\ \textit{Sous les contraintes}: & \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & (1,2) \\ x_j \geq 0 \qquad \forall\, j = 1 \dots n & (1,3) \end{cases}$$

- Avec :

c_j , j ∑1,…, n* représente les couts des différents produits.

a_{ij} (i=1…m, j=1…n) sont supposée être des nombres réels

Avec m $\leq$ n

b_i (i=1…m) sont tous positifs.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ Représentent les variables de décision.

La fonction Z appelée la fonction objective.

Les contraintes (1,2) sont appelées les contraintes principales ou essentielles.

Les contraintes (1,3) sont dites contraintes directes.

I.1.4- Différentes formes d'un programme linéaire : Un programme linéaire peut être représenté sous l'une des formes suivantes :

✓ **La forme canonique :** Un problème linéaire s'écrit sous cette forme lorsque le système des m contraintes est composé uniquement d'inéquation (inégalité) :

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq ou \geq b_i \,, i \epsilon \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 \qquad , j \epsilon \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

- **La forme standard :** Un programme linéaire s'écrit sous cette forme lorsque le système des contraintes est un système d'équations

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , i \in \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 \qquad\qquad , j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

- **La forme mixte :** Un programme linéaire s'écrit sous cette forme lorsque les contraintes sont des égalités, inégalités à la fois :

$$\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ i \in I \subseteq \{1, \dots m\} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_k \ , k \in \mathrm{K} \subseteq \{1, \dots m\} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_r \ , r \in \Re \subseteq \{1, \dots m\} \\ x_j \in \Re \qquad\qquad , j \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

- **Remarque :** Quel que soit la forme sous laquelle se présente le problème, on peut toujours le ramener à la forme qu'on souhaite.

I.1.4.1- Règles de transformation : L'application de ces règles est conçue comme suit :

- Les variables $x \geq 0$
- Maximiser $\leftrightarrow$ minimiser
- Les disponibilités $b \geq 0$
- Max Z (x) = - min Z (x)

Pour minimiser $Z(x) = Cx$, il suffit de maximiser $-Cx$ et de multiplier le résultat par (-1).

- Egalité (=) ↔ inégalité (≤)

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \geq b \\ et \\ Ax \leq b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -Ax \leq -b \\ Ax \leq b \end{cases}$$

Inéquation ⟹ équation : toute inégalité ≥ (resp≤) peut être transformée en égalité, en rajoutant des variables positives aux contraintes appelée « variables d'écart ».

- ✓ Toute contrainte d'inéquation de signe (≤) : $\sum_{j=1}^{n} ajxj \leq b$

  Peut être remplacée par un système de contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j + s_j = b \\ x, s \in \Re^n, s \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

Ou : s appelée variable d'écart.

- ✓ Toute contrainte d'inéquation de signe (≥) : $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ ≥ b

  Peut être remplacée par un système de contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} ajxj - s_j = \mathrm{b} \\ X, s \in \Re^n, s \geq 0, x \geq 0 \end{cases}$$

Ou : s appelée variable d'écart.

- **Remarque :** La méthode du simplexe exige que le programme soit sous la forme standard.
  - **Le passage à la forme standard :** Le passage à la forme standard se fera selon les règles suivantes :
  - **Règle 1 :** Lorsque les contraintes sont de signe (≤) on introduit uniquement des variables d'écart au problème ou la fonctionnelle ne change pas.

Exemple 1 :

Soit le problème donné sous la forme canonique :

$$\begin{cases} Z = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \min \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\begin{cases} Z = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \min \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4} \end{cases}$$

- **Règle 2** : Lorsque les contraintes sont dans le sens (≥) on retranche une variable artificielle pour avoir une matrice identité et la fonctionnelle devient :
  + M (ϕ variables artificielles) si le problème à minimiser
  - M (ϕ variables artificielles) si le problème à maximiser

Exemple 2 :

Soit le problème suivant donnée sous sa forme canonique :

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \\ 15x_1 + 8x_2 \geq 30 \\ 9x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard sera :

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 5x_2 - M(x_4 + x_6) \rightarrow \max \\ 15x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 30 \\ 9x_1 + 5x_2 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0, i = 1 \dots 6 \qquad M \geq 0 \end{cases}$$

Avec X_3, X_5 des variables d'écart

X_4, X_6 des variables artificielles.

- **Règle 3 :** Lorsque les contraintes sont des égalités et si la matrice identité n'apparait pas dans la matrice du système, on doit ajouter des variables artificielles et changer « Z » selon la règle (2).

Exemple 3 :

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} Z = 2x_2 - 3x_2 \rightarrow \max \\ 9x_1 + 6x_2 = 40 \\ 7x_1 + 5x_2 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le passage à la forme standard :

$$\begin{cases} Z = 2x_1 - 3x_2 - M(x_3 + x_4) \rightarrow \max \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 = 40 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \quad M \geq 0 \end{cases}$$

- **Règle 4 :** Si une contrainte est une égalité et que l'une des variables de cette égalité nous donne un vecteur d'une matrice d'identité, cette égalité ne change pas à la forme standard.

Exemple 4 :

Soit le problème de PL suivant

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 6x_1 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_i \geq 0, i = 1 \dots 3 \end{cases}$$

Le passage à la forme standard :

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 6x_2 + M(x_5) \rightarrow \min \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_6 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1 \dots 6 \end{cases}$$

I.1.5- Quelques définitions :

Définition 1 : **“point extrême“**

Soit S un ensemble convexe dans ^{n} et x un élément de S

On dit que x est un point extrême s’il ne peut pas s’écrire en combinaison Convexe stricte de deux points de S

C’est-à- dire : $\forall \alpha$Č]0,1[, $\nexists x_1, x_2$ S

$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2$ avec $x_1 \neq x_2$

Définition 2 : **“Polyèdre, Polytope “**

Soit les ensembles suivants :

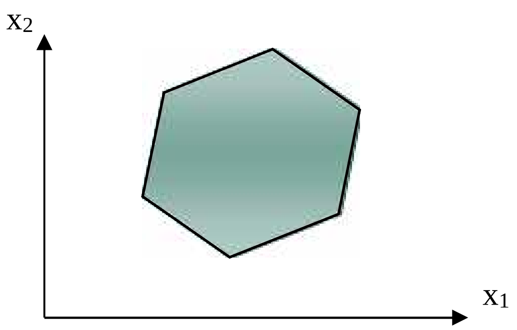
L’ensemble $\sum x$ ^{n}, ax= b∗ représente un hyperplan de ^{n}

L’ensemble $\sum x$, $ax \geq$ b∗ représente un demi-espace fermé de ^{n}

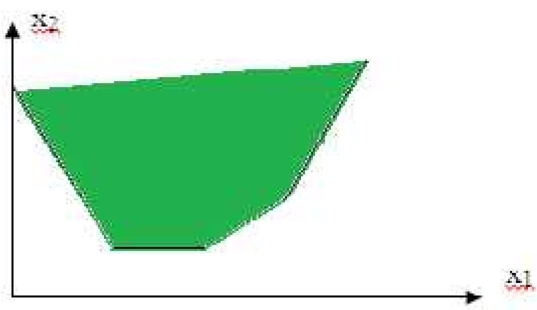
Dont l’hyperplan correspondant constitue la frontière.

- Un polyèdre S est l’intersection d’un nombre fini de demi-espaces fermé et/ou d’hyperplan.
- Un polyèdre S est borné s’il existe une valeur α fini et positive telle que :

  $|x_i| \geq \alpha, \forall i$ $\{1, \ldots n\}$ et $\forall$ x S
- Un polytope est un polyèdre borné et non vide.



Polytope



Polyèdre convexe

Théorème 1 : Si la fonctionnelle atteint son maximum ou minimum sur un point quelconque de D alors ce point est un point extrême.

Proposition 1 : L'ensemble D_R des solutions réalisables de PL est un polyèdre convexe et fermé.

Définition 3 : Un polyèdre convexe borné est appelé polytope convexe.

Définition 4 : "Ensemble convexe"

On dit que S est un ensemble convexe si et seulement si :

$\forall x, y$ S et $\forall \alpha$ [0,1] alors :

αx + (1-α) y S

Géométriquement : "S" est dit convexe si tout segment de droite dont les extrémités appartiennent à S est inclue dans S.

Considérons les deux ensembles illustrés ci-dessous :

"P" est non convexe, car les points a et a' sont les extrémités d'un segment dont au moins un point n'appartient pas à P.
"V" est convexe.

Définition 5 : "Combinaison linéaire convexe"

Un vecteur y S est en combinaison linéaire convexe des points $\{x_1, \dots x_n\}$
s'il existe des coefficients réels ⇐, i $\{1, \dots, n\}$
Tels que :
$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$=1 $\lambda_i \geq 0$ ∀i $\{1, \dots, n\}$

Proposition 2 :

Un point extrémal d'un polyèdre est appelé un sommet.

Définition 6 :

Soit C un convexe non vide de , un point x C est extrémal (ou sommet de C) s'il l'on a :

y, z C et x= (1-⇐)y + ⇐z $x = y = z$ ou ⇐ [0,1].

Définition 7 :

L’ensemble des solutions de PL est le polyèdre convexe :

$P = \sum x \quad ^{n} / Ax = b , x \geq 0*.$

Proposition : Si un problème linéaire possède une solution finie, alors au moins un sommet du domaine réalisable est une solution optimale.

I.2 Méthodes de résolution d’un programme linéaire :

Soit le problème de programmation linéaire suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \mathbf{(1,1)} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ , i \epsilon I \subseteq \{1, \dots, m\} & \mathbf{(1,2)} \\ x_j \geq 0 & \mathbf{(1,3)} \end{cases}$$

Le problème représenté ci-dessus peut être résolu par plusieurs méthodes. On peut en effet aboutir au même résultat soit par la méthode matricielle, soit par la méthode graphique ou bien la méthode du simplexe.
Cette dernière est préférable dès que le nombre de contrainte ≥ 3.

I.2.1- L’algorithme du simplexe :

I.2.1.1-Introduction : L’algorithme du simplexe est un procédé qui nous permet de nous déplacer d’un point extrême de l’ensemble des points réalisables vers un autre point extrême adjacent au premier de façon que la fonctionnelle soit améliorée soit jusqu’à trouver la solution optimale ou jusqu’au moment où l’on établit que la solution n’existe pas.

I.2.1.2- Définitions 8 :

Solution réalisable : Toute valeur $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in$ ^{n} satisfait les contraintes fonctionnelles et les contraintes de non négativité (1,2) -(1,3) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (1,1) -(1,3).

Solution optimale : est une solution réalisable qui donne à la fonction objective la plus grande (problème de maximisation) ou la plus petite valeur possible (problème de minimisation) sur l'ensemble des solutions réalisables.

Domaine des solutions réalisables : C'est l'ensemble des solutions réalisables du programme linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des solutions qui satisfait simultanément les contraintes fonctionnelles et les contraintes de non négativité.

Valeur maximale : (resp minimale) de la fonction objectif (à ne pas confondre avec la solution optimal) est la plus grande valeur (resp la plus petite) que peut prendre la fonction objective sur l'ensemble des solutions réalisables.

I.2.1.3. L'algorithme de résolution :

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un problème linéaire sous sa forme standard, la matrice A peut s'écrire :

$$A(A_B, A_H)$$

A_B est la matrice correspondant aux variables de base.

A_H est la matrice correspondant aux variables hors base.

On décompose également le vecteur de décision :

$$x = (x_B, x_H)$$

Avec x_B les variables de base et x_H les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base B^* et une solution de base x^* associée telle que :

$Z(x^*) > Z(x)$ (x^* est meilleur que x), dans le cas d'une fonction objectif à maximiser.

La méthode du simplexe consiste alors à faire rentrer une variable hors base dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (variable sortante) de la manière suivante :

1. Soit x une solution de base réalisable :

$$Ax = b \leftrightarrow A_B x_B + A_H x_H = b$$

$$\leftrightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_H x_H$$

Et la valeur :

$$Z = C'x = C'_B x_B + C'_H x_H$$

$$= C'_B \left(A_B^{-1}\mathrm{b} - A_B^{-1} A_H x_H\right) + C'_H x_H$$

$$= C'_B A_B^{-1}\mathrm{b} + \left(C'_H - C'_B A_B^{-1} A_H\right) x_H$$

De façon compact, on associe à chaque base un dictionnaire

$$x_B = A_B^{-1}\mathrm{b} - A_B^{-1} A_H x_H$$

$$\mathrm{Z} = C'_B A_B^{-1}\mathrm{b} + \left(C'_H - C'_B A_B^{-1} A_H\right) x_H$$

On note

Δ_H = $-C'_H$ + $C'_B A_B^{-1} A_H$, le vecteur des couts réduits (des estimations) des Variables hors base et on pose :

y = $A_B^{-1} A_H$ est le vecteur des potentiels, plutôt on peut dire que y solution du système : $A_B y = C'_B$

2. **Changement de base :**

   a. Choix de variable d'entrée :

   Choisir x_{i*} tel que Δ_{i*} = min j $j_H \Sigma \Delta_j \leq 0*$ (problème de max)

   Δ_{i*} = max j $j_H \Sigma \Delta_j \geq 0*$ (problème de min)

La variable correspondante à l'indice i^* est la variable x_{i*} entrant dans la nouvelle base B^*

S'il n'existe pas un tel i^*, la solution trouvée est optimale.

b. Choix de variable de sortie :

On cherche une composante x_{j*} du vecteur de base x_B pour laquelle :

$$\theta_{j*} = min \frac{(A_B^{-1}b)j}{(A_B^{-1}a_{i*})j} \quad \{j\epsilon J_B et\ pour\ (A_B^{-1}a_i)j > 0\}$$

La variable correspondante à l'indice j^* est la variable x_{j*}sortant de la base

S'il n'existe pas un tel j_*, le programme linéaire est non borné.

3. **Le pivotage :**

a. Mettre à jour la base : la variable x_{i*} entre dans la base et la variable x_{j*} sort de la base.

b. Obtenir le nouveau dictionnaire par pivotage, Aller en 2

Critère d'optimalité :

On dit $x = (x_B, x_H)$ est optimal si et seulement si :

Le vecteur des estimations $\Delta_H \geq 0$ est positif (cas de maximisation).

Soit le tableau du simplexe suivant qui permet d'appliquer toutes les étapes de l'algorithme du simplexe représenté par la figure suivante :

B	b	x_1 x_2 ………..... x_n x_{n+1} x_{n+2} …………… x_{n+m}
x_{n+1} x_{n+2} ⋮ x_{n+m}	b_1 b_2 ⋮ b_m	a_{11} a_{12}………......a_{1n} 1 0 ………………. 0 a_{21} a_{22}………..…a_{2n} 0 1………………… 0 ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋱ ⋮ a_{m1} a_{m2}…………a_{mn} 0 0 ……………….. 1
Z	Z^B	C_1 C_2……………C_N 0 0 ………………..0

I.2.1.4- Exemple pratique :

Soit le problème suivant sous sa forme canonique :

$$(P)\begin{cases} Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 3 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard sera donnée par :

$$(P)\begin{cases} Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1 \ldots 5 \end{cases}$$

On a j= ∑1,2,3,4,5∗ et $J_B = \{3,4,5\}$, $J_H = \{1,2\}$

Avec $A_B = \lambda_3$, donc la solution de base réalisable est :

$x = (0,0,4,5,6)$

Dressons le 1er tableau du simplexe :

		C	3	2	0	0	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\forall_j$
0	x_3	2	1	2	1	0	0	2
0	x_4	3	-3	5	0	1	0	/
0	x_5	4	3	-5	0	0	1	4/3 →
		Δ_j	-3	-2	0	0	0	
			↑					

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0$ $\forall j$ J_H n'est pas vérifiée, donc la solution réalisable de base initiale n'est pas optimale, on doit alors changer la base de la manière suivante :

Min j J_H $\Delta_j = \Delta_1 = -3$, donc $J_0 = 1$

De là le vecteur a_1 va rentrer dans la nouvelle base et calculons :

$\forall^0$ = min j J_B $\forall_j$

$\forall_3 = 2, \forall_5 = 4/3$ d'où :

$\forall^0$ = min j J_B $\forall_j = \forall_5 = 4/3$; delà, le vecteur a_5 va sortir de la base.

Dressons le 2éme tableau du simplexe :

		C	3	2	0	0	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\forall_j$
0	x_3	2/3	0	11/3	1	0	-1/3	2/11
0	x_4	7	0	0	0	1	1	/
3	x_1	4/3	1	-5/3	0	0	1/3	/
		Δ_j	0	-7	0	0	1	

La nouvelle solution de base est donc $\bar{x}$ = (4/3, 0, 2/3, 7, 0)

De plus elle n'est pas optimale car $\bar{\Delta}_2$ = -7 < 0

On doit alors changer la base une autre fois :

Min j J_H $\bar{\Delta}_j$= $\bar{\Delta}_2$= -7, donc le vecteur a_2 va rentrer dans la nouvelle base.

Comme $\forall_{j1}$ = $\min_{j\epsilon JB} \theta j$ = 2/11 = $\forall_3$, donc le vecteur a_3 sortira de la base.

D'où on obtient :

$\bar{J}_B$ =∑2,4,1∗

Pour déterminer la nouvelle solution $\bar{\bar{x}}$, dressons le 3[éme] tableau du Simplexe :

		C	3	2	0	0	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\forall_j$
2	x_2	2/11	0	1	3/11	0	-1/11	
0	x_4	7	0	0	0	1	1	
3	x_1	54/33	1	0	5/11	0	6/33	
		Δ_j	0	0	21/ 11	0	12/33	

La nouvelle solution de base est donc :

$\bar{\bar{x}}$= (54/33, 2/11, 0,7,0)

Comme :

$\bar{\bar{\Delta}}_j \geq$, ∀j $\bar{J}_H$

L'algorithme s'arrête et la solution obtenue est optimale $\bar{\bar{Z}}$ = 58/11.

Caractérisation algébrique des solutions réalisable :

- **Théorème :**

x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de D_R

Considérons un système linéaire Ax = b de “m“ équations à “n“ variables avec m ≤ n

$J_B = \{j_1, j_2, j_m\}$ ensemble des indices de base

$J_H = J/J_B$ ensemble des indices hors base

Définition 9 :

- Une solution x =x(J) est dite solution de base si (n-m) de ces composantes sont nulles

  $x_H = (x_{J_H}) = 0$

  Et det (B) = 0 tel que B est la matrice des variables de base.

  La matrice B est appelée matrice de base

  x_j, j J_B variable de base

  x_j, j J_H variable hors base

Définition 10 :

- Une solution de base est dite réalisable si elle satisfait les contraintes de non négativité, $x_B \geq 0$
- Un programme linéaire admet au plus : $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Solution de base.

Remarque : Les solutions de base réalisables sont la caractérisation algébrique des points extrêmes de la région admissible

Définition 11 : “Solution dégénéré et non dégénéré“

- Une solution de base réalisable x est dite non dégénéré si elle contient m variables positive ($x_B \geq 0$).
- Une solution est dite dégénéré si l’une des variables de base est nulle, c’est-à-dire : Il existe $j \in J_B$ tel que $x_j = 0$. On obtient ce type de solution lorsque le nombre de droites (incluent les droites associées aux contraintes de non négativité) passant par un même point extrême est supérieur aux nombres de variables de décision (variable réelles)

I.2.2- La méthode des deux phases :

Nous savons qu'un programme linéaire peut avoir des contraintes "≥" ou "=" et nous devons toujours transformer les inéquations en équations.

Une solution de base réalisable ne sera pas obtenue aussi facilement dans le cas d'un système de contraintes mixtes, il faudra alors avoir recours à l'ajout artificiel pour obtenir une solution de base réalisable puis résoudre le problème par la méthode des deux phases proposées par Dantzing.

Soit le problème de PL suivant :

$$\begin{cases} Z = Cx \rightarrow max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

La résolution d'un programme linéaire par cette méthode est traditionnellement divisée en deux phases :

- **La phase 1 :** Est l'étape d'initialisation, elle consiste à chercher un premier sommet réalisable.
- Pour cela construisant le problème suivant :

$$\begin{cases} Z = \sum_{i=1}^{m} x_j + n \rightarrow \max \\ SC \\ [\mathrm{Ax}]\mathrm{i} + x_{i+n} = b_i, \quad i = \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0, x_{i+n} \geq 0, \ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m}, \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n} \end{cases}$$

Si le critère d'optimalité est satisfait et que Z < 0 qui veut dire au moins une des variables artificielles est dans la base avec une valeur strictement positive, alors le problème n'a pas de solution.

Si Z = 0, le programme linéaire admet une solution réalisable, on passe à la phase 2.

- **La phase 2 :** Le but de la phase 2 est de déterminer la solution optimale du problème original. Cette phase consiste à optimiser la fonctionnelle comportant uniquement les variables réelles et les variables d'écart. Si d'autre part, on a terminé la phase λavec Z = 0 et qu'il reste une variable artificielle dans la base, on débute la 2éme phase en optimisant la fonction objective originale et en associant un coefficient économique nul pour la variable artificielle restée dans la base.

I.2.2.1- Exemple pratique :

Soit le problème de PL donnée par :

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 6x_2 = 24 \\ 11x_1 - 2x_2 \le 40 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Le passage à la forme standard :

$$\begin{cases} Z = -x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 11x_1 - 2x_2 + x_4 = 40 \\ x_i \ge 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

La 1ére phase :

		C	0	0	-1	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	$\forall_j$
-1	x_3	24	3	6	1	0	4
0	x_4	40	11	-2	0	1	/
		Δ_j	-3	-6	0	0	

On remarque que les $\Delta_j \le 0$, alors le critère d'optimalité n'est pas vérifié.

Min $\Delta_j = \Delta_2 = -6$,

Donc on doit faire entrer X_2 dans la base et sortir x_3 ($\forall^0$ = min $\forall_j$ = $\forall_3$), la nouvelle base sera : $\bar{x}$ = (x_2, x_4)

		C	0	0	-1	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_3	a_4	$\forall_j$
-1	x_2	4	1/2	1	1/6	0	
0	x_4	48	12	0	1/3	1	
		Δ_j	0	0	1	0	

On remarque que les $\Delta_j \geq 0$, d'où le critère d'optimalité est vérifié.

Alors la solution optimale :

x = (0, 4, 0, 48)

avec Z = 0.

Passant à la 2 éme phase :

		C	3	2	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_4	$\forall_j$
2	x_2	4	1/2	1	0	8
0	x_4	48	12	0	1	4
		Δ_j	-2	0	0	

$\Delta_j \leq 0$, le critère d'optimalité n'est pas vérifié.

Min $\Delta_j = \Delta_1 = -2$;

Min $\forall_j = \forall_4 = 4$;

Donc on doit faire rentrer x_1 dans la base et faire sortir x_4.

La nouvelle base sera alors : $\bar{\bar{x}} = (x_1, x_2)$

		C	3	2	0	
C_B	Base	b	a_1	a_2	a_4	$\forall_j$
2	x_2	2	0	1	-1/24	8
3	x_1	4	0	0	1/12	4
		Δ_j	0	0	1/6	

On a bien $\Delta_j \geq 0$, le critère d'optimalité est vérifié,

La nouvelle solution de base est $x^0 = (x_1, x_2) = (4, 2)$

D'où la solution optimale de problème de départ est :

$x^* = (4, 2)$, $Z^* = 16$.

I.3 - Dualité :

I.3.1 - Définition : La théorie de la programmation linéaire nous apprend qu'il est possible d'associer à tout programme linéaire (P) un autre programme (D) appelé dual.

Par définition, le problème initial est appelé problème primal. Il existe en effet une série de règles simples transformant les variables de (P) en contraintes dans (D), ainsi que les contraintes de (P) en variable dans (D).

I.3.2 - Relation entre le dual et le primal

- Lorsque le primal consiste à minimiser la fonction objective, le dual est un problème de maximisation.
- Les coefficients c_j de la fonctionnelle deviennent les b_i du dual et inversement.

- Le nombre de contraintes dans le primal sera le nombre de variables dans le dual et inversement
- A chaque contrainte de type ≤ dans le primal correspond à une variable de décision de type ≥ dans le dual.
- A chaque variable de type ≥ dans le primal correspond à une contrainte de type ≥ dans le dual.

- **Remarque :** la dualité est une notion symétrique, si l'un est un primal l'autre sera un dual**.**

On dit qu'un programme linéaire est dans sa forme symétrique si :

$$(P)\begin{cases} Z = CX \rightarrow \max \\ Ax \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow (D)\begin{cases} W = by \rightarrow \min \\ YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

I.3.3 - Formulation du dual :

Il existe deux formes importantes du dual qui sont :

- **Forme canonique de la dualité :**

  Considérons un problème de maximisation sous sa forme canonique suivante

$$(P)\begin{cases} \text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i \in \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 \quad , \quad j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Le problème dual est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } W = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq Cj \quad , \quad j \in \{1, \dots, n\} \\ u_i \geq 0 \quad , \quad i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

Avec : X_j sont appelées variables primales ;

U_iSont appelées variables duales ;

- **Forme standard de la dualité** :

Considérons un problème de maximisation sous sa forme standard :

$$(P)\begin{cases} \text{Min Z} = \sum_{i=1}^{m} c_j x_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \quad , \ i \in \{1, \dots, m\} \\ x_j \geq 0 \quad , \ j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

Le problème dual est le suivant :

$$(D)\begin{cases} \text{Min W} = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geq \text{Cj} \quad , \ j \in \{1, \dots, n\} \\ u_i \in \Re \quad , \ i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

On note que les variables de dual sont en bijection avec les contraintes du primal, tandis que les contraintes du dual sont en bijection avec les variables du primal.

Exemple 5 :

Soit le problème primal suivant :

$$(P)\begin{cases} Z = 4x_1 + 7x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème dual s'écrit sous la forme :

$$(D)\begin{cases} W = 8y_1 + 5y_2 \to \min \\ y_1 + y_2 \geq 4 \\ 2y_1 + y_2 \geq 7 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

I.3.4 - Théorème de dualité :

- Si l'un ou l'autre des problèmes (P) et (D) admet une solution optimale finie, il est de même pour l'autre et les valeurs correspondantes des objectifs sont égales.
- Si l'objectif d'un problème n'est pas borné, l'autre n'admet pas de solution réalisable.

Théorème 1 : Si x est une solution admissible du problème primal (max) et y est une solution admissible du problème dual (min), alors

$$Cx \leq yb$$

Preuve :

Soit x une solution réalisable du primal :

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow yAx = yb$$

y est une solution réalisable du dual

Donc : $yA \geq C \quad \Longleftrightarrow yAx \geq Cx$

D'où : $yb \geq Cx$

Théorème 2 :

Soient x^* et y^* deux solutions réalisables du primal et du dual respectivement.

Si $Cx^* = y^*b$ alors x^* et y^* sont deux solutions optimales du primal et du dual respectivement.

Preuve :

x solution réalisable du primal, alors du théorème 1 on a :

$Cx \leq yb$,$\forall x$, $\forall y$

Et pour $x = x^*$ on a :

$Cx^* \leq by \ \forall y \quad \Longleftrightarrow \quad by^* \leq by \ \forall y$

y^* est solution réalisable du duale.

$C\,x \leq yb$, $\forall\, x$, $\forall\, y$

Pour $y = y^*$ on a :

$Cx \leq y^*b$, $\forall\, x \quad \Longleftrightarrow \quad Cx \leq Cx^*$, $\forall\, x$

x^* est une solution optimale.

I.3.5 - Règles de dualisation : Le tableau suivant donne un ensemble de règles formelles permettant de passer d'un problème de programmation linéaire générale à son problème dual :

PL Primal		PL Dual
Max Z	$\Longleftrightarrow$	Min Z
Variable $x_j \geq 0$	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une inégalité « ≥ »
Variable $x_j \leq 0$	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une inégalité « ≤ »
Variable x_j sans signe(x)	$\Longleftrightarrow$	contrainte j est une égalité « = »
Contrainte i est une inégalité « ≤ »	$\Longleftrightarrow$	variable $u_i \geq 0$
Contrainte i est une inégalité «≥»	$\Longleftrightarrow$	variable $u_i \leq 0$
Contrainte i est une égalité « = »	$\Longleftrightarrow$	variable u_i sans signe (u_i)

I.4 Conclusion :

Nous avons abordé dans ce chapitre l'une des méthodes les plus efficaces utilisée pour résoudre les problèmes linéaires qui est l'algorithme du simplexe. Elle peut s'appliquer pour un grand nombre de variables et elle converge vers un nombre fini d'itérations.

II. 1- Introduction :

Ce chapitre est consacré à présenter la méthode adaptée qui résout des problèmes de programmation linéaire à variable bornées, développée par les professeurs R-Gabassov et F-M-Kirillova dans les années 1970. La méthode adaptée est habituellement utilisée pour résoudre des programmes linéaires avec des variables bornées. Elle est dite adaptée car elle garde certaines métriques de la méthode du simplexe qui est basée sur les plans.

En outre, la méthode adaptée intègre un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision souhaitée pour trouver des solutions approchées. Les itérations de cet algorithme se font en deux étapes, le changement du plan et le changement de support, sachant que ces deux changements sont indépendants.

Le principe de cette méthode est le suivant : partant d'un support plan initial formée d'une solution réalisable x et d'une matrice non dégénérée dite matrice du support. Le but de l'itération consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objective.

II. 2- Position du problème et définitions essentielles :

II. 2-1-Position du problème :

Considérons le problème linéaire (P_2) suivant

$$(P_2)\begin{cases} \text{Max } Z(x) = C'x & (2,1)\\ Ax = b & (2,2)\\ d_1 \leq x \leq d_2 & (2,3)\end{cases}$$

On définit les indices des contraintes et des variables de décision par :

$C = (c_j, j\epsilon J)$, $X = (x_j, j\epsilon J)$, $d_1 = (d_{1j}, j\epsilon J)$, $d_2 = (d_{2j}, j\epsilon J)$ sont des vecteurs de R^n ;

$b = (b_i, i\epsilon I)$ un vecteur de R^m ;

$A = A(I, J)$ une m x n matrice, tel que rang A = m < n ;

$I = \{1, \dots, m\}$: l'ensemble des indices des lignes

$J = \{1, \dots, n\}$: l'ensemble des indices des colonnes

La contrainte (2, 2) est appelée contrainte essentielle et
(2,3) est appelée contrainte directe.

Soit J_B un sous ensemble de J et J_H un autre sous ensemble de J tel que

$J = J_B u J_H$, avec $J_B n J_H = \emptyset$ et $|J_B| = |I| = m$

En vertu de la partition de J, on peut fractionner les vecteurs c et x ainsi que la matrice A de la manière suivante :

- $x = x(J) = (x_j, j \epsilon J)$;

  $x = (x_B, x_H)$, $x_B = x(J_B) = (x_j, j \epsilon J_B)$, $x_H = x(J_H) = (x_j, j \epsilon J_H)$
- $C = c(J) = (c_j, j \epsilon J)$;

  $C = (c_B, c_H)$, $c_B = c(J_B) = (c_j, j \epsilon J_B)$, $c_H = c(J_H) = (c_j, j \epsilon J_H)$
- $A = A(I, J) = \left(a_{ij}, i \epsilon I, j \epsilon J\right)$;

  $A = (A_B \backslash A_H)$,$A_B = A(I, J_B)$, $A_H = A(I, J_H)$;
- $d_1 = d_1(J) = (d_{1j}, j \epsilon J)$
- $d_2 = d_2(J) = (d_{2j}, j \epsilon J)$

II. 2-2- Définitions

Définition 1 : " Solution réalisable "

Tout vecteur x^0 vérifiant les contraintes (2, 2) et (2, 3) est dit plan où Solution réalisable du problème (P_2)

Ainsi l'ensemble des solutions réalisables est définit par :

S = { $x \in \Re^n$; $Ax = b$, $d_1 \leq x \leq d_2$}

Définition 2 : " Solution optimale "

Un plan x^0 est dit optimal dans le problème (P_2)si

Z(x^0) = C' x^0 = $\max_{x \in S} C'x$

Définition 3 : " Solution suboptimale "

Un plan x^ε est dit (solution approchée à ε prés) ε-optimal ou

Suboptimal dans le problème (P_2)si :

Z(x^0) – Z(x^ε) = c' x^0 – c' $x^\varepsilon \leq$ ε,

Ou x^0 est une solution optimale du problème (P_2)

ε est un nombre positif ou nul donné à l'avance.

Définition 4 : " Support des contraintes "

Soit $J_B \subset J$,| J_B| = m, un sous ensemble d'indice J, l'ensemble J_B est appelée support (base) du problème (P_2) si det $A(I, J_B) \neq 0$,

Où $A(I, J_B) = A_B$: matrice du support.

Définition 5 : " Support-plan "

La paire $\{x, J_B\}$formée d'une solution réalisable x et du support J_B est appelée support plan du problème (P_2)

Définition 6 : " Support-plan non dégénéré :

Le support plan $\{x, J_B\}$ est dit non dégénéré si :

$$d_{1j} < x < d_{2j}, \forall j \epsilon J_B$$

II. 3- Formule d'accroissement de la fonction objectif :

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ non dégénéré,

Considérons un autre plan quelconque $x^* = x + \Delta x$

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

ΔZ = Z(x^*) – Z(x) =$c'x^* - c'x = c'\Delta x$

$= c'(J_B)\Delta x(J_B) + c'(J_H)\Delta x(J_H)$

$= c'_B\Delta x_B + c'_H\Delta x_H$ **(2, 4)**

Comme $Ax = b$ et $Ax^* = b \rightarrow Ax = Ax^* = b$ alors $A\Delta x = 0$

Posons $\Delta x = (\Delta x_B, \Delta x_H)$, où $\Delta x_B = (\Delta x_j, j \in J_B)$, $\Delta x_H = (\Delta x_H, j \in J_H)$

L'égalité $A\Delta x = 0$ peut alors s'écrire :

$A\Delta x = A(I, J_B)\Delta x_B + A(I, J_H)\Delta x_H = 0$

C'est-à-dire : $A\Delta x = A_B\Delta x_B + A_H\Delta x_H = 0$

D'où

$\Delta x_B = -A_B^{-1}A_H\Delta x_H$ **(2, 5)**

ainsi l'accroissement (2, 4) devient :

$\Delta Z = C'\Delta x = -C'_B A_B^{-1}A_H\Delta x_H + C'_H\Delta x_H$

Donc : $\Delta Z = -(C'_B A_B^{-1}A_H - C'_H)\Delta x_H$ **(2, 6)**

On définit le vecteur des potentiels y et le vecteur des estimations E Comme suite

$Y' = C'_B A_B^{-1}$

$E' = Y'A - C' \leftrightarrow E_j = ya_j - c_j, j \in J$

Ou $E' = (E'_B, E'_H)$, avec :

$E'_B = Y'A_B - C'_B$

$= C'_B A_B^{-1}A_B - C'_B$

$= C'_B I - C'_B$

$= 0$

$E'_H = Y'A_H - C'_H = C'_B A_B^{-1}A_H - C'_H$

Finalement, la formule d'accroissement (2, 6) prend la formule finale

Suivante :

$\Delta Z = -\sum_{j \in J_H} E_j(\bar{x}_j - x_j)$ **(2, 7)**

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible, alors l'accroissementΔZ vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j \qquad \textbf{(2, 8)}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (2, 7) sous les

Contraintes (2, 8) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j, & si\ \Delta_j > 0 \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j, & si\ \Delta_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & si\ \Delta_j = 0, j \epsilon J_H \end{cases}$$

Est égal à :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in J_H}} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in J_H}} E_j(x_j - d_{2j})$$

appelée valeur de suboptimalité ;

Où :

$J_{1H} = \{j\epsilon J_H / \Delta_j \geq 0\}$, $J_{2H} = \{j\epsilon J_H / \Delta_j \leq 0\}$,

De là il en résulte que :

$\Delta Z(x) = Z(x^*) - Z(x) \leq \beta(x, J_B)$, $et\ pour\ x^* = x^0$ on aura :

$$Z(x^0) - Z(x) = C'x^0 - C'x \leq \beta(x, J_B).$$

De cette dernière inégalité, on déduit les critères suivants :

II. 3.1 - Critère d'optimalité :

- **Théorème 1 : " critère d'optimalité "**

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan du problème (P)

Alors les relations :

$$\begin{cases} E_j \geq 0\ pour\ x_j = d_{1j} \\ E_j \leq 0\ pour\ x_j = d_{2j} \\ E_j = 0\ \ pour\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j}, j\epsilon J_H \end{cases} \qquad \textbf{(2, 9)}$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x.

si le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré, alors ces mêmes relations sont aussi nécessaire pour que x soit optimal.

C'est-à-dire on aura l'équivalence

Démonstration :

- **Condition suffisante :**

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan réalisable du problème (P_1) vérifiant les relations (2, 9)

Pour tout support plan $\bar{x}$ du problème (P_1), la formule d'accroissement (2, 7) donne :

$$\Delta Z = Z(\bar{x}) - Z(x) = -\sum_{\substack{Ej>0\\ j\in JH}} Ej(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in JH}} Ej(\bar{x}_j - d_{2j})$$

Comme :

$d_{1j} \leq \bar{x}_j \leq d_{2j} \Rightarrow \bar{x}_j - d_{1j} \geq 0$ et $\bar{x}_j - d_{2j} \leq 0$

On déduit alors :

$$Z(\bar{x}) \leq Z(x)$$

Pour tout $\bar{x}$ solution réalisable.

Par conséquent, le vecteur x est solution optimal du problème (2, 1)- (2, 3) .

- **Condition nécessaire :**

Soit { x, J_B }un support plan optimal non dégénéré du problème (P_2) et supposons que les relations (2, 9) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_H$ tel que :

$E_{j0} > 0$ et $x_{j0} > d_{1j0}$ ou bien $E_{j0} < 0$ et $x_{j0} < d_{2j0}$

Alors construisant un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \Delta x = \theta^0 \ell$, ou θun nombre réel positif non nul et

ℓ = $\{\ell_j, j \in J\}$ est un vecteur de direction que l'on construit :

il faut trouver ℓ et θ tel que $A\bar{x} = b$, $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, pour cela :

sur J_H, posons :

$$\Delta x = \begin{cases} 0, & si\ j \in J_H \backslash j_0 \\ \theta, & si\ j = j_0\ \ \theta > 0 \end{cases}$$

Et on a :

$$\begin{cases} \ell_{j0} = -signe\ E_{j0} \\ \ell_j = 0\ j \neq j_0, j\epsilon J_H \end{cases}$$

D'autre part : on doit avoir :

$$A\bar{x} = A(x + \theta^0 \ell) = \mathrm{b} \leftrightarrow \mathrm{A}\ell = A_B \ell_B + A_H \ell_H = 0$$

Donc :

$$A_B \ell_B + A_H \ell_H = 0$$

D'où :

$$\ell_B = -A_B^{-1} A_H \ell_H = -A_B^{-1} a_{j0} signeE_{j0}$$

On aura alors :

$$\begin{cases} \ell_{j0} = -signe\ E_{j0} \\ \ell_j = 0\ j \neq j_0, j\epsilon J_H \\ \ell_B = A_B^{-1} a_{j0} signeE_{j0} \end{cases}$$

Le vecteur $\bar{x}$ vérifie la contrainte principale $A\bar{x} = b$,

Pour que $\bar{x}$ soit un plan du probléme (P_2), il doit en plus vérifie

L'inégalité :

$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2 \Leftrightarrow d_1 \leq x\ +\ \theta^0 \ell \leq d_2 \Leftrightarrow d_1 - x \leq \theta^0 \ell \leq d_2 - x$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} d_{1j} - x_j \leq \theta^0 \ell_j \leq d_{2j} - x_j, j\epsilon J_B \\ d_{1j0} - x_{j0} \leq -\theta^0 signeE_{j0} \leq d_{2j0} - x_{j0} \end{cases} \qquad \textbf{(2, 10)}$$

Puisque le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré, on a alors :

$$d_{1j} - x_j \leq 0 \leq d_{2j} - x_j,\ j\epsilon J_B$$

et :

$$\begin{cases} d_{1j0} - x_{j0} < 0,\ \ si\ E_{j0} > 0 \\ d_{2j0} - x_{j0} < 0,\ \ si\ E_{j0} < 0 \end{cases}$$

Pour un nombre $\theta^0 > 0$ assez petit, les relations (2, 10) seront alors

vérifiées et le vecteur $\bar{x}$ sera un plan du problème (P_1).

Avec ce nouveau plan $\bar{x}$ en conclue :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = -\sum_{j\in JH} E_j\,(\bar{x}_j - x_j)$$

$$= -\theta^0 E_{j0} \sum_{j\in J_H} E_j \ell_j$$

$$= -\theta^0 E_{j0} \ell_{j0}$$

$$= \theta^0 E_{j0}\; signe E_{j0}$$

$$= \theta^0 |E_{j0}|$$

Alors on a trouvé un plan $x \neq \bar{x}$ tel que $Z(\bar{x}) > Z(x)$, ce qui contredit le Fait que x

soit un plan optimal du problème (P_2)

Par conséquent, les relations (2, 9) sont forcément vérifiées si le Support plan est non dégénéré.

II. 3.2 -Estimation de suboptimalité :

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimal $Z(x^0)$ et une autre valeur $Z(x)$

d'un support plan quelconque$\{x, J_B\}$, on remplace dans la formule d'accroissement

(2, 7) le vecteur$\bar{x}$ par x^0 et on aura :

$$Z(x^0) - Z(x) = -\sum_{j\in JH} E_j\,(x_j^0 - x_j)$$

$$= \sum_{\substack{E_j>0\\ j\in J_H}} E_j\,(x_j - x_j^0) + \sum_{\substack{E_j<0\\ j\in J_H}} E_j\left(x_j - x_j^0\right) \tag{2, 11}$$

Puisque le plan optimal x^0 vérifie : $d_{1j} \leq x_j^0 \leq d_{2j}$, $j\in J$

Alors il en résulte que

$$x_j - d_{2j} \leq x_j - x_j^0 \leq x_j - d_{1j}, j\in J$$

Donc :

$$\begin{cases} E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_{1j}), & si\ E_j > 0 \\ E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j(x_j - d_{2j}), & si\ E_j < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient une majoration du nombre inconnu de gauche de l'égalité (2, 11) :

$$Z(x^0) - Z(x) \leq \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} E_j\left(x_j - d_{1j}\right) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} E_j\left(x_j - d_{2j}\right) \qquad \textbf{(2, 12)}$$

le nombre :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} E_j\left(x_j - d_{1j}\right) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} E_j\left(x_j - d_{2j}\right) \qquad \textbf{(2, 13)}$$

est appelée estimation de suboptimalité.

Théorème 2 : " Critère de suboptimalité "

Soit { x, J_B } un support plan du problème (P_2) et ε est un nombre positif non nul donné,

alors :

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$ alors x est ε-optimal.

Pour l'ε- optimalité du plan x, il suffit alors de trouver un tel support J_B pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$.

Démonstration :

- **Condition suffisante :**

Supposons qu'on a $\beta(x^\varepsilon, J_B) \leq \varepsilon$, soit x^0une solution optimale du problème (P_2), alors en vertu des relations (2, 12) et (2, 13) on peut écrire :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) \leq \beta(x^\varepsilon, J_B) \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Par conséquent, x^ε est ε-optimal

- **Condition nécessaire :**

Soit x ε-optimal, faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

Pour cela construisons le problème dual de (P) tel que(P) est

$$(P)\begin{cases} maxZ(x) = C'x \\ Ax = b, \\ -x \leq -d_1, \\ x \leq d_2, \\ x \in \Re^n \end{cases}$$

Son problème dual est :

$$(D)\begin{cases} \varphi(\lambda) = b'y - d'_1 v + d'_2 w \rightarrow min \\ A'y - v + w = C \\ v \geq 0, w \geq 0 \\ y \in \Re \end{cases}$$

Soit λ = (y, v, w) vecteur dual

Construction d'un vecteur admissible de (D) :

On connaît J_B (A_B)

$$y' = C'_B A_B^{-1}$$

$$E' = y'A - C'$$

Construisons le vecteur λ = (y, v,w) de la manière suivante :

$$\begin{cases} y = C'_B A_B^{-1} \\ v = E, w = 0, \ si\ E > 0 \\ v = 0, w = -E \quad si\ E < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2, 14)}$$

Si : E > 0 ⇒ $E' = y'A' - C'$

E < 0 ⇒ $E' = y'A - C'$

Le vecteur λ construit par (2, 14) est admissible de (D)

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} E_j\left(x_j - d_{1j}\right) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} E_j(x_j - d_{2j})$$

$$= \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} E_j x_j + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} E_j x_j - \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} E_j d_{1j} - \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} E_j d_{2j}\ .$$

En construisant le plan dual définit ci-dessus, on obtient :

$$\beta(x,J_B) = E'x - v'd_1 + w'd_2$$
$$= (y'A - C')x - v'd_1 + w'd_2$$
$$= -C'x + y'Ab - v'd_1 + w'd_2$$
$$= C'x^0 - C'x - C'x^0 + \varphi(\lambda)$$

On aura alors :

$$\beta(x,J_B) = C'x^0 - C'x + \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda^0)$$

$$\beta(x,J_B) = \beta x + \beta(J_B)$$

Où :

$\beta x = (C'x^0 - C'x)$ est appelée l'écart de la non optimalité de plan x.

$\beta(J_B) = (\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda^0))$ est appelée l'écart de la non optimalité du support J_B

Si $J_B = J_B^0 \Rightarrow \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda^0) = 0$

On aura alors : $\beta(x,J_B) = C'x^0 - C'x \leq \varepsilon$

Par conséquent, x est ε-optimal

- Si $\beta(x,J_B)$ = ε = 0, alors x est optimal.
- Si $\beta(x,J_B)$> 0, le critère d'optimalité ou de suboptimalité n'est pas vérifier, alors il faut améliorer le plan x.

- ✓ **Remarque :** A Partir de l'expression $\beta(x,J_B) = \beta x + \beta(J_B)$, on conclut que l'amélioration du support plan $\{x,J_B\}$ peut se faire indépendamment les uns des autres.

Si $\beta(x,J_B)$ > ε, alors on passe au changement du support plan $\{x,J_B\}$.

II. 4- Itération de la méthode

La méthode de résolution est constituée de deux procédures : changement de plan qui consiste à augmenter $Z(x)$ et un changement du support pour diminuer $\psi(\lambda)$

$\varphi(\lambda)$ étant la fonction duale de $Z(x)$.

II. 4-1- Changement de plan :

Etant donné un nombre réel positif non nul quelconque ε et un support plan initial $\{x, J_B\}$non dégénéré

Et qu'on a : $\beta(x, J_B) > 0$.

Le but de l'algorithme est de construire un plan ε-optimal (plan optimal $\bar{x}$). L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_B\}$ a

$\{\bar{x}, J_B\}$. Pour cela, construisant le nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \theta\ell$

Ou ℓ est la direction d'amélioration,

θ le pas le long de cette direction.

II. 4-1-1- Construction d'une direction d'amélioration adaptée :

Soit :

- ℓ (J_B) : direction correspondante aux indices appartenant à J_B ;
- ℓ (J_H) : direction correspondante aux indices appartenant à J_H .

Dans cet algorithme, on choisira la métrique suivante pour les composantes non basique de la direction admissible "ℓ" tel que :

$$d_{1j} - x_j \leq \ell_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J_H \setminus J_B \qquad \textbf{(2, 15)}$$

Cette métrique dépond du plan x et de ce fait elle est dite adaptée.

En tenant compte de la métrique (2, 15), ΔZ atteint son maximum pour les valeurs des composantes non basiques de "ℓ" suivantes :

Posons θ =1

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, \ si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j, \ si\ E_j < 0 \\ 0, \ si\ E_j = 0, j \epsilon j_H \end{cases} \quad \textbf{(2, 16)}$$

Comme "$\bar{x}$" doit être admissible, alors :

$A\bar{x} = b$, avec : $d_{1j} \le \bar{x}_j \le d_{2j}, j\epsilon J = J_B u J_H$

$A(x + \theta^0 \ell) = \mathrm{b}$?

$Ax + A\theta^0 \ell = \mathrm{b} \rightarrow A\theta^0 \ell = 0$, avec $\theta^0 \neq 0$

$\rightarrow A\ell = 0 \ \leftrightarrow \mathrm{A(I, J)}\ell(\mathrm{J}) = 0$

$\leftrightarrow A(\mathrm{I}, J_B)\ell(J_B) + A(\mathrm{I}, J_H)\ell(J_H) = 0$

D'où :

$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H \ell_H$ **(2, 17)**

II. 4-1-2 Calcul du pas $^{-0}$:

On construit alors un nouveau plan $\bar{x}$ sous la forme :

$\bar{x} = x + \theta\ell$

Ou ℓ est la direction d'amélioration définit par (2, 15) -(2, 16) et le nombre θ^0 qui est le pas le long de cette direction.

Avec θ^0 = min $\{\theta_{j1}, \theta_{j2}, \dots \theta_{js}, 1\}$

Les nombres $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \dots \theta_{js}$se calculent de façon à ce que les contraintes direction sur le vecteur$\bar{x}$ soient vérifiées,

C'est-à-dire :

$d_1 \le x + \theta\ell \le \mathrm{d}_2 \ \leftrightarrow \ \mathrm{d}_1 - \mathrm{x}_\mathrm{j} \le \theta\ell_\mathrm{j} \le \mathrm{d}_2 - \mathrm{x}_\mathrm{j}, \mathrm{j}\epsilon \mathrm{J}_\mathrm{B}$

Par conséquent, on a :

$$\theta_j = \begin{cases} d_{2j} - x_j \backslash \ell_j, \ si\ \ell_j > 0 \\ d_{1j} - x_j \backslash \ell_j, \ si\ \ell_j < 0 \\ \infty, \ si\ \ell_j = 0, j\epsilon J_B \end{cases} \quad \textbf{(2, 18)}$$

Et calculons les différentes valeurs maximales que peut prendre les pas θ dans ces relations, on aura :

$$\theta_{j0} = \min_{j\epsilon J_B} \{\theta_j \text{ , } j{\in}J_B\}$$

le pas maximale sera alors : $\theta^0 = \min\limits_{j\epsilon J_B} \{1, \theta_{j0}\}$

Donc le nouveau plan $\bar{x}$ s'écrit : $\bar{x} = x + \theta^0\ell$

II. 4-1-3 Estimation de suboptimalité :

L'estimation de suboptimalité du nouveau support plan $\{\bar{x}, J_B\}$ s'écrit :

$$\beta\,(\bar{x}, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$= \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j + \theta\ell_j - d_{1j}\big) + \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j + \theta\ell_j - d_{2j}\big)$$

$$\beta\,(\bar{x}, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j - d_{1j}\big) + \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j - d_{2j}\big) + \theta^0 \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j\ell_j +$$

$$\theta^0 \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j\ell_j$$

En remplaçant les ℓ_j par leurs valeurs, on obtient :

$$\beta\,(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j\big(d_{1j} - x_j\big) + \theta^0 \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j\big(d_{2j} - x_j\big)$$

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \sum_{\substack{Ej>0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j - d_{1j}\big) - \theta^0 \sum_{\substack{Ej<0\\ j\in J_H}} E_j\big(x_j - d_{2j}\big)$$

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B)$$

Finalement on aura la formule suivante :

$$\beta\,(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\ \beta(x, J_B) \qquad \textbf{(2, 19)}$$

De cette dernière expression on conclut :

- Si $\theta^0 = 1$, alors $\bar{x}$ est optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \le \varepsilon$, on peut arrêter l'algorithme avec $\bar{x}$ est ε-optimal pour le problème (P_2).

- Si β($\bar{x}$,J_B) > ε, on commencera une nouvelle itération avec le nouveau plan de support {$\bar{x}$, $\bar{J}_B$ }

II. 4-2- Changement de support

Soit le problème dual suivant :

$$(D)\begin{cases}\varphi(\lambda) = b'y - d'_1 v + d'_2 w \rightarrow min \\ A'y - v + w = C \\ v \geq 0, w \geq 0 \\ y \in \Re \end{cases}$$

Grace aux relations (2, 14) précédentes en aura

$\beta(x, J_B) = \beta_x + \beta(J_B)$,

Et grâce au changement du plan x par $\bar{x}$, on a amélioré l'estimation de

Suboptimalité en diminuant βx :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(\bar{x}) + \beta(J_B) = \beta(x) - (C'\bar{x} - C'x) + \beta(J_B) \leq \beta(x, J_B)$$

On fera de même en diminuant β(J_B)

β($\bar{J}_B$) = $\beta(J_B)$ − (φ(λ) - φ($\bar{\lambda}$))

Pour ce faire, on effectue une itération de la méthode duale du support en passant du support plan {$\bar{x}$, J_B} au support plan{$\bar{x}$, $\bar{J}_B$} pour lequel $\beta(\bar{x}, J_B)$ ≤ β($\bar{x}$, $\bar{J}_B$)

Pour cela on pose :

$\bar{E}_j = E_j + \delta_0 t_j$

$\bar{y}_j = y + \delta_0 t_j$

Ou t est la direction de diminution de la fonction duale

δ est le pas maximal de long de cette direction.

II. 4-2-1 Calcul de la direction t et du pas δ_0:

En utilisant la définition de E et y on obtient :

$$\bar{E} = \bar{y}'A - C' = \left(y' + \delta_0 t'(I)\right)A - C' = E' + \delta_0 t'(I)A$$

De la :

$t'(J) = t'(I)A(I, J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(I)A(I, J_B)$

$t'(I)=t'(J_B)\, A_B^{-1}$ **(2, 21)**

Ce qui donne :

$t'(J_H) =t'(J_B)\, A_B^{-1}\, A(I, J_H)$

Après calcul du plan $x = \bar{x}+ \theta^0\ell$, le pas θ^0 est donnée par :

$\theta^0 = \min \{1, \theta_{j0}\} = \theta_{j0}$, $j_0 \in J_B$

On cherchera un indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de j_0, pour cela :

Posons :

$$K_j = \begin{cases} d_{1j} = x_j + \ell_j,\ si\ E_j > 0 \\ d_{2j} = x_j + \ell_j,\ si\ E_j < 0 \\ x_j = x_j + \ell_j,\ si\ E_j = 0, j \epsilon J_H \end{cases}$$

Avec :

$$K_B = A_B^{-1}(b - A_H K_H) = A_B^{-1}(b - A_H x_H) - A_B^{-1} A_H \ell_H$$

$$= x_B + \ell_B$$

Il s'ensuit que :

$$K = x + \ell \qquad \textbf{(2, 22)}$$

Puisque la composante :

$$\bar{x}_{j1} = d_{1j}\ ou\ \bar{x}_{j1} = d_{2j}\ et\ \theta^0 = \theta_{j1} < 0$$

On aura alors :

$K_{j1} = x_{j1} + \ell_{j1} < x_{j1} + \theta^0 \ell_{j1} = \bar{x}_{j1} = d_{1j},\ si\ \ell_j < 0$,

$K_{j1} = x_{j1} + \ell_{j1} > x_{j1} + \theta^0 \ell_{j1} = \bar{x}_{j1} = d_{2j},\ si\ \ell_j > 0$

Dans tous les cas, on voit bien que l'indice j_1 ne vérifie pas le critère d'optimalité pour le dual (2, 20), on posera donc :

$$\alpha_0 = \begin{cases} K_j - d_{1j},\ \ si\ \bar{x}_j = d_{1j} \\ K_j - d_{2j},\ \ si\ \bar{x}_j = d_{2j} \end{cases}$$

Et soit :

$$t_j = \begin{cases} -signe\ (\alpha_0), & si\ j = j_0 \\ 0 & si\ j \epsilon J_B \backslash j_0 \end{cases}$$

Avec :

t'(J_H) =t'(J_H) $A_B^{-1} A$(I, J_H)

Et calculons δ_0 tel que :

$\bar{\delta}$= δ+ γ^0t, $\gamma^0 \geq 0$

$\gamma^0 = \gamma_{j0} = \min_{j \epsilon JH} \gamma j$

$$\gamma_j = \begin{cases} \dfrac{-\delta_j}{t_j}, & \text{si}\ \delta_j t_j < 0 \\ 0\ , & si\ \delta_j = 0, t_j < 0 \\ \infty, & si\ non \end{cases}$$

Avec un tel indice j_0 ainsi choisi, on construit un nouveau support

$\bar{J}_B = (J_B \backslash j_0) \cup j_1$

II.4.2.2. Estimation de suboptimalité du nouveau support plan :

Le passage d'un support plan { $\bar{x}$, J_B} au support plan {$\bar{x}$, $\bar{J}_B$}

Fera diminuer la fonction duale d'une valeur $\gamma_0|\alpha_0|$. On aura alors :

$\beta(\bar{J}_B)$ = L ($\bar{\lambda}$)– L (λ^0) = L (λ) – γ_0 $|\alpha_0|$ - $\varphi(\lambda^0)$

= $\beta(J_B) - \gamma_0|\alpha_0| \leq \beta(J_B)$

Donc l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ vaut :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$= (1 - θ^0) $\beta(x, J_B)$– $\gamma_0|\alpha_0|$ **(2, 23)**

II. 2.5- Algorithme de résolution :

Soit un nombre réel positif non nul quelconque ε et un support plan initial $\{x, J_B\}$

I-

1) Calculer :

Le vecteur des estimations : $E' = (E'_B, E'_H) = C'_B A_B^{-1} A - C$

Le vecteur des potentiels : $Y' = C'_B A_B^{-1}$

La valeur de suboptimalité : $\beta(x, J_B)$

2) Tester l'optimalité de la solution du support réalisable :

Si $\beta(x, J_B)$= 0 alors arrêté l'algorithme, $\{x, J_B\}$ optimal

Si $\beta(x, J_B)$ ≤ ε, arrêté l'algorithme, $\{x, J_B\}$ ε-optimal

Si $\beta(x, J_B)$ > ε, aller en II

II-

1) Changement de plan x par $\bar{x}$ = x + $\theta^0 \ell$

Déterminer le vecteur $\ell(J)$

Déterminer le pas maximal θ^0

Déterminer le nouveau point $\bar{x}$

2) Tester l'optimalité de la nouvelle solution réalisable $\bar{x}$

Calculer β ($\bar{x}$,J_B)= (1 - θ^0) $\beta(x, J_B)$

Si θ^0 = 1, alors arrêté l'algorithme avec{ x, J_B} optimal

Siβ ($\bar{x}$,J_B) ≤ ε, alors on peut arrêter l'algorithme avec $\{x, J_B\}$ ε-optimal

Si β ($\bar{x}$,J_B) > ε, aller en III

III-

1) Changement de support J_B par $\bar{J}_B$

K = x + ℓ

Déterminer la direction de diminution de la fonction dual t

Calculer γ_0 tel que γ_0 = γ_{j0} = $\min_{j \in J_H} \gamma_j$

Déterminer l'indice j_1 correspond à l'indice $j \in J_H$ (γ_j)

Déterminer le nouveau support $\bar{J}_B = (J_B \backslash j_0) \cup j_1$

Déterminer l'estimation de suboptimalité correspondante

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0)\, \beta(x, J_B) - \gamma_0 |\alpha_0|$

2) Tester l'optimalité du nouveau support plan

Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors arrêté l'algorithme avec $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal

Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$, alors arrêté l'algorithme avec $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$est ε- optimal

Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, aller en I. On passe à une nouvelle itération avec le nouveau support plan$\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$.

II.2.6- Exemple d'application :

Résoudre le problème suivant avec la méthode adaptée :

$$\begin{cases} Z(x) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_3 \leq 6, 0 \leq x_4 \leq 8 \end{cases}$$

On démarre à partir du support plan $\{x, J_B\}$

$X^T = (0, 0, 5, 4)$ et $J_B = \{4, 3\}$

La matrice de support est égale à :

$A_B = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Avec $|A_B| = -1 \neq 0 \Rightarrow A_B$ inversible $\Rightarrow J_B$ est un support

Alors : $\{x, J_B\}$ est un support plan non dégénéré.

Le vecteur des estimations vaut :

$$E_H^T = (E_1, E_2) = y^T A_H - C_H$$

Avec :

$$y^T = C_B' A_B^{-1} = (c_3, c_4) A_B^{-1} = (0, 2)$$

D'où :

E_H^T= (0, 2)$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - (3, -2) = (-5, 6)

Avec $E_3 = E_4 = 0$

On a alors $E_1 = -5 < 0$

$E_2 = 6 > 0$

Soit l'estimation de suboptimalité définit par :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in J_H}} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in J_H}} E_j(x_j - d_{2j})$$

$$= E_1(x_1 - d_{21}) + E_2(x_2 - d_{12}) = 10$$

Donc : $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, le critère d'optimalité n'est pas vérifié.

Passant au changement de plan :

$x \sim \bar{x} = x + \theta^0 \ell$

Calculons la direction d'amélioration ℓ :

On a la métrique des composantes non basique suivante :

$$d_{1j} - x_j \leq \ell_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J_H \backslash J_B$$

Pour : $E_1 = -5 \Rightarrow \ell_1 = d_{21} - x_1 = 2$

Pour : $E_2 = 6 \Rightarrow \ell_2 = d_{12} - x_2 = 0$

$\ell(J_B) = \begin{pmatrix} \ell 3 \\ \ell 4 \end{pmatrix} = - A_B^{-1} A_H \ell(J_H) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Calculons le pas optimal ¯⁰ :

Avec $\theta^0 = \min \{\theta j_1, 1\}$, $\theta_{j1} = \min_{j\in J_B} \theta_j$

$$\begin{cases} \theta_3 = \frac{d_{23} - x_3}{\ell_3} = \frac{1}{2}, \ (\ell 3 > 0) \\ \theta 4 = \frac{d_{14} - x_4}{\ell_4} = 1 \qquad (\ell 4 < 0) \end{cases}$$

Alors $\theta^0 = \theta_{j1} = \frac{1}{2} \Rightarrow j_0 = 3$

Donc le nouveau plan $\bar{x}$ s'écrit :

$\bar{x} = x + \theta^0\ell$ = (0, 0, 5, 4) + $\frac{1}{2}$(2, 0, 2, -4) = (1, 0, 6, 2)

L'estimation de suboptimalité pour le nouveau plan est :

$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\,\beta(x, J_B) = 5$

Le critère de suboptimalité n'est pas vérifié.

Passant au changement de support : $J_B \sim \bar{J}_B$

Afin de choisir l'indice $j_1 \in J_H = \{1, 2\}$ par lequel il faudra remplacer l'indice sortant j_0,

Faisons alors une itération, pour cela posons :

$\alpha_0 = K_{j1} - d_{2j} = K_3 - d_{23} = x_3 + \ell_3 - d_{23} = 1(\ell_3)$

${t_B}^1 = (t_4, t_3) = (0, -1)$

${t_H}^1 = (t_1, t_2) = (1, -2)$

$t^T = (1, -2, -1, 0)$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{-E_1}{t_1} = 5 \\ \gamma_2 = \dfrac{-E_2}{t_2} = 3 \end{cases}$$

$\gamma^0 = \gamma_{j0} = \min \gamma_j = \min \{\gamma_1, \gamma_2\} = \min \{5, 3\} = 3 = \gamma_2$

$\Rightarrow j_1 = 2$

On aura donc :

$\bar{J}_B = J_B \backslash \{j_0\} \cup \{j_1\} = \{4, 3\} \backslash \{3\} \cup \{2\} = \{4, 2\}$

D'où l'estimation vaut :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \gamma_0 |\alpha_0| = 2$

Ce qui montre que $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ n'est pas optimal.

On recommence une nouvelle itération avec le plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$

Où :

$\bar{x}^T = (1, 0, 6, 2)$, $\bar{J}_B = \{4, 2\}$

Le vecteur des estimations E_H' tel que :

$y' = C'_B A_B^{-1}$= (c_4, c_2) A_B^{-1} = (0, -1)

E_H' =$y' A_H - C_H{}'$ = (-2, -3)

Alors :

$E_1 = -2 < 0$

$E_3 = -3 < 0$

L'estimation de suboptimalité :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = E_1(\bar{x}_1 - d_{21}) + E_2(\bar{x}_3 - d_{23}) = 2$

Le vecteur de direction d'amélioration vaut :

Pour : $E_1 = -2 < 0 \Rightarrow \ell_1 = d_{21} - x_1 = 1$

$E_3 = - 3 < 0 \Rightarrow \ell_3 = d_{23} - x_3 = 0$

$\ell_H = \binom{\ell 1}{\ell 3} = \binom{1}{0}$

$\ell(J_B) = \binom{\ell 2}{\ell 4} = -A_B^{-1} A_H \ell_H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

Le pas θ^0 est calculé comme suit :

$\theta^0 = \min\{\theta_{j1}, 1\}$, $\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j$

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{d_{22} - x_2}{\ell_2} = 8 & (\ell_2 > 0) \\ \theta_4 = \frac{d_{14} - x_4}{\ell_4} = \frac{4}{3} & (\ell_4 < 0) \end{cases}$$

On aura alors :

$\theta^0 = \min\{1, \frac{4}{3}\} = 1 \Rightarrow \theta^0 = 1$

Le nouveau plan est égal à :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = x + \ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1\backslash 2 \\ 0 \\ -3\backslash 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1\backslash 2 \\ 6 \\ 1\backslash 2 \end{pmatrix}$$

Puisque $\theta^0 = 1$, le vecteur $\bar{x}$ est alors une solution optimale du problème considéré.

Avec Z ($\bar{x}$) = 17.

II.2.7- Conclusion :

Ce chapitre est consacré à la résolution d'un problème linéaire avec une méthode des points intérieurs dite la méthode adaptée, pour la construction d'un algorithme de résolution d'un problème de programmation linéaire donnée sous sa forme standard. Basé sur la métrique du simplexe, ainsi qu'un exemple d'application.

De plus cet algorithme est doté d'un critère d'arrêt qui peut donnée une solution approchée avec une précision donnée à l'avance.

Cette méthode a l'avantage que celle du simplexe qui réside dans la complexité algorithmique, c'est-à-dire le nombre d'itération réduite ainsi que la rapidité de convergence.

Il serait probablement plus intéressant d'insister plus sur la méthode adaptée pour résoudre n'importe qu'elle programme linéaire à grande taille

En effet, dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la résolution d'un problème linéaire à grand nombre de variables. Nous proposons une nouvelle méthode pour améliorer la complexité algorithmique, c'est le but de notre prochain chapitre

III. 1- Introduction :

Ce chapitre porte sur la résolution d'un problème de programmation linéaire à grand nombre de paramètres c'est-à-dire le nombre de variables est suffisamment grand par rapport au nombre d'équations.

Le but est dans la recherche du pas et de la direction qui se fait en utilisant un autre problème auxiliaire dit problème du support avec un nombre très réduit de paramètres : m+1 variables et m équations.

III. 2- Position du problème

Considérons le problème de maximisation suivant :

$$(P_3)\begin{cases} Z = C'x \to max \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases} \qquad \textbf{(3, 1)}$$

où x, C, d_1, d_2 sont des n vecteurs réels,

b est un m- vecteur réel,

A = A (I, J) est une matrice d'ordre m × n, tel que rang A = m << n (le nombre de variable est suffisamment grand devant le nombre d'équation n>>m) ;

$I = \{1, 2, \dots, m\}$ L'ensemble des indices des lignes de A.

$J = \{1, 2, \dots, n\}$ L'ensemble des indices colonnes de A.

C' est le transposé de C.

Ici on utilise les mêmes définitions que dans le chapitre précédent.

III. 3- Itération de l'algorithme :

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ non dégénéré. Après avoir fait l'accroissement de la fonctionnelle, supposons que le critère d'optimalité et de suboptimalité c'est-à-dire $\beta(x, J_B) > \varepsilon$.

Dans ce cas on fait une itération $\{x, J_B\} \to \{\bar{x}, J_B\}$, où $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$.

Où ℓ est un n-vecteur appelé direction d'amélioration et

θ (Réel positif) est le pas admissible maximal le long de la direction ℓ.

La direction ℓ et le pas θ seront trouvés en résolvant le problème suivant :

$$(P_3')\begin{cases}\Delta Z = C'\bar{x} - C'x \to max_{\theta,\ell} \\ A\bar{x} - Ax = \theta A\ell = 0 \\ d_{1j} - x \le \theta\ell \le d_{2j} - x\end{cases} \qquad \mathbf{(3, 2)}$$

On aura alors :

$$(P_3')\begin{cases}\max_{\theta,\ell} \Delta Z = C'\Delta x = C'\theta\ell \\ A\theta\ell = 0 \\ d_{1j} - x_j \le \theta\ell j \le d_{2j} - x_j\end{cases}$$

En utilisant le support J_B ,θAℓ prend la forme

$\theta A(I, J)\, \ell(J) = \theta A(I, J_B)\, \ell(J_B) + \theta A(I, J_H)\, \ell(J_H)$

$= \theta A_B\, \ell_B + \theta A_H\, \ell_H = 0$ **(3, 3)**

De cette décomposition le problème (P_3') devient :

$$\begin{cases}\max_{\theta,\ell} \Delta Z = \theta C'(J_B)\ell(J_B) + \theta C'(J_H)\ell(J_H) \\ \theta A_B\ell_B + \theta A_H\ell_H = 0 \\ d_{1j} - x_j \le \theta\ell_j \le d_{2j} - x_j ,\mathrm{j}\end{cases} \qquad \mathbf{(3, 4)}$$

jϵJ

Sur J_H , on pose θ=1 et les composantes ℓ_j du vecteur ℓ sur J_H vérifient les inégalités :

$$d_{1j} - x_j \le \ell_j \le d_{2j} - x_j, j \epsilon J_H \qquad \mathbf{(3, 5)}$$

De là l'accroissement de la fonctionnelle, ΔZ atteint son maximum pour les valeurs des composantes de ℓ suivantes :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, \ si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j, \ si\ E_j < 0 \\ 0, \ si\ E_j = 0, j \in j_H \end{cases} \quad (3, 6)$$

Comme ℓ doit être admissible, les composantes basiques de ℓ seront déduites de la formule :

$A\ell = 0 \ \leftrightarrow A(\mathrm{I}, \mathrm{J})\ell(\mathrm{J}) = 0$?

$A(\mathrm{I}, J_B)\ell(J_B) + A(\mathrm{I}, J_H)\ell(J_H) = 0$

D'où :

$$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H \ell_H \quad (3, 7)$$

Comme C'(J_H) $\ell(J_H)$ est connu, on va le nommer par :

C_{m+1}= C'(J_H)ℓ(J_H)

et désignons par $A_{m+1} = A_H \ell_H$ un vecteur connu. En remplaçant ces quantités dans le problème (P_3') , on obtient le problème suivant à m+1 variables ℓ_B = (ℓ_1, …., ℓ_m) et θ :

$$\begin{cases} \max_{\theta,\ell} \Delta Z = \theta C'(J_B)\ell(J_B) + \theta C_{m+1} \\ \theta A_B \ell_B + \theta A_{m+1} = 0 \\ d_{1j} - x_j \le \ell_j \le d_{2j} - x_j \ \mathrm{j} \in J_B \\ 0 \le \theta \le 1 \end{cases} \quad (3, 8)$$

Ce problème est appelé problème du support.

Faisons un changement de variables :

Posons :

$$\begin{cases} Sj = \theta \ell_j, \mathrm{j} = 1, \mathrm{m} \\ S_{m+1} = \theta \end{cases}$$

De là le problème **(3, 8)** devient:

$$(P_4)\begin{cases} C'\Delta x = C'(J_B)S(J_B) + S_{m+1}\ C_{m+1} \\ \quad = \sum_{j=1}^{m+1} C_j S_j \ \to max_{S j, j=\overline{1,m+1}} \\ \quad A_j S_j \ = \ 0 \qquad j = \overline{1,m} \\ d_{1j} - x_j \le S_j \le d_{2j} - x_j \ \ j = \overline{1,m} \\ \quad 0 \le S_{m+1} \le 1 \end{cases} \qquad \textbf{(3, 9)}$$

Ce problème peut être résolu soit par la méthode graphique, ou simplexe, ou par la méthode adapté.

On résout le problème (P_4) par la méthode adaptée en prenant la paire {S=(S_j,j=1,…m+1),J_B} comme support plan de départ, avec S =0.

Au bout d'un certain nombre d'itérations on obtient la solution optimale

$\{S^0, J_B^0\}$ ou $S_{m+1}^0 = \theta^0, S_j^0 = \theta^0 \ell_j$, j=1, …, m

En utilisant cette solution, on construit le support-plan du probléme initial :

$X_j^* = x_j + S_j^0$ j=1, …, m

$X_j^* = x_j + \theta^0 \ell_j, j \in J_H$

Ici deux cas peuvent surgir :

1. L'indice $m+1$ n'appartient pas à J_B^0
2. L'indice $m+1$ appartient à J_B^0

Dans le premier cas, en revenant au problème initial, on utilise le support J_B^0 qu'on pose égal à J_B^*comme support de départ.

Dans le deuxième cas, par la méthode duale on exclue l'indice $m+1$ du support pour avoir un nouveau support J_B^*.

La nouvelle itération démarrera avec le nouveau support-plan { X*, J_B^*}.

III. 4- Exemple d'application :

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Z(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 10 \\ 0 \leq x_j \leq 10 \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Soit le support plan $\{x, J_B\}$de départ :

$|J_B|= 2$, $|J_H| = 4$

$J_B = \{1,3\}, x_B = \{x_1, x_3\}$

$X^T = (1, 2, 7, 0, 0, 0)$

La matrice de support est égale a :

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Avec $|A_B|=2 \neq 0$

A_B Inversible $\to J_B$ est un support

$\{ x, J_B\}$ support plan non dégénéré.

La valeur des estimations vaut :

$E_H^T = (E_2, E_4, E_5, E_6) = Y^T A_H - C_H$

Avec :

$Y^T = C_B' A_B^{-1}$

$A_B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$Y^T = (2,1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

D'où :

$$E_H^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - (-1,1,1,1)$$

$$= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, 1\right)$$

Avec : $E_1 = E_3 = 0$

On a alors :

$E_2 = \frac{3}{2} > 0$, $E_4 = \frac{5}{2} > 0$, $E_5 = \frac{-3}{2} < 0$, $E_6 = 1 > 0$

Soit l'estimation de suboptimalité définit par

$$\beta\,(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j \in JH}} Ej(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j \in JH}} Ej(x_j - d_{2j})$$

$$= E_2(x_2 - d_{12}) + E_4(x_4 - d_{14}) + E_5(x_5 - d_{25}) + E_6(x_6 - d_{16})$$

$$\beta\,(x, J_B) = 18 > \varepsilon$$

Donc $\beta\,(x, J_B) > \varepsilon$, le critère d'optimalité n'est pas vérifié passant au changement de plan.

$x \sim \bar{x} = x + \theta^0 \ell$

$$\begin{cases} \Delta Z = C'\bar{x} - C'x = \theta C'\ell \rightarrow max_{\theta,\ell} \\ \theta A\ell = 0 \\ d_1 - x \leq \theta\ell \leq d_2 - x \end{cases}$$

Faisons une décomposition de

$$\theta A\ell = \theta A(I, J)\,\ell(J) = \theta A(I, J_B)\,\ell(J_B) + \theta A(I, J_H)\,\ell(J_H)$$

On aura donc :

$$\begin{cases} \max_{\theta,\ell} \Delta Z = \theta C'(J_B)\ell(J_B) + \theta C'(J_H)\ell(J_H) \\ \theta A_B \ell_B + \theta A_H \ell_H = 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \theta\ell_j \leq d_{2j} - x_j \end{cases}$$

Posons :

$$C'(J_H)\ell(J_H) = C_{m+1}$$

$$A_H \ell_H = A_{m+1}$$

Et avec le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} Sj = \theta \ell_j, j = 1, m \\ S_{m+1} = \theta \end{cases}$$

On aura problème suivant a m+1 variable :

$$(P)\begin{cases} C'\Delta x = \sum_{j=1}^{m+1} C_j S_j \rightarrow max_{S_j, j=\overline{1,m+1}} \\ A_j S_j = 0 \qquad j = \overline{1,m} \\ d_{1j} - x_j \leq S_j \leq d_{2j} - x_j \;\; j = \overline{1,m} \\ 0 \leq S_{m+1} \leq 1 \end{cases}$$

Ce problème sera alors :

$$\Delta Z = \sum_{j=1}^{m} C_j S_j + C_{m+1} S_{m+1} \rightarrow max$$

$= C_1S_1 + C_3S_3 + C_2S_2 + C_4S_4 + C_5S_5 + C_6S_6$

Avec

$S_1 = \theta\, \ell_1$, $S_3 = \theta\, \ell_3$, $S_2 = \theta\, \ell_2$, $S_4 = \theta\, \ell_4$, $S_5 = \theta\, \ell_5$, $S_6 = \theta\, \ell_6$

Calculons la direction d’amélioration ℓ :

$J_H = \{2, 4, 5, 6\}$

Pour $\theta = 1$:

$d_{1j} - x_j \leq \ell_j \leq d_{2j} - x_j$, $j \in J_H \backslash J_B$

$\ell_2 = d_{12} - x_2 = -2$, $(E_2 > 0)$

$\ell_4 = d_{14} - x_4 = 0$, $(E_4 > 0)$

$\ell_5 = d_{25} - x_5 = 10$ $(E_5 < 0)$

$\ell_6 = d_{16} - x_6 = 0$ $(E_6 > 0)$

On remplace les valeurs de ℓ et C dans ΔZ on aura :

ΔZ= $2S_1$+ S_3+ θ($C_2S_2 + C_4S_4 + C_5S_5 + C_6S_6$)

= $2S_1$+ S_3 + θ(2+10)

ΔZ= $2S_1$+ S_3 + 12θ

ΔZ= $2\theta\, \ell_1 + \theta\ell_3 + 12\theta \rightarrow max_{\theta,\ell_1,\ell_3}$

On pose : $S_1 = \theta\, \ell_1$

$S_2 = \theta\, \ell_3$

$S_3 = \theta$

On aura donc :

ΔZ= $2S_1 + S_2 + 12\, S_3 \rightarrow$ max

On fera la décomposition de $\theta\, A\ell = 0$

$\theta\, A\ell = \theta\, A(I,J)\ell(J)$

$= \theta\, A(I,J_B)\ell(J_B) + \theta\, A(I,J_H)\ell(J_H)$

$$\theta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_3 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2S_1 + S_2 + 12S_3 \rightarrow max \\ \theta\ell_1 + \theta\ell_3 - 12\theta = 0 \\ -\theta\ell_1 + \theta\ell_3 + 16\theta = 0 \\ -1 \leq \theta\ell_1 \leq 9 \\ -7 \leq \theta\ell_3 \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

Avec : $d_{1j} - x_j \leq \theta\, \ell_j \leq d_{2j} - x_j$

Le problème aura sa forme finale suivante à 3 variables :

$$\begin{cases} 2S_1 + S_2 + 12S_3 \to max \\ S_1 + S_2 - 12S_3 = 0 \\ -S_1 + S_2 + 16S_3 = 0 \\ -1 \le S_1 \le 9 \\ -7 \le S_2 \le 3 \\ 0 \le S_3 \le 1 \end{cases}$$

Grafiquement en aura :

$$2S_2 + 4S_3 = 0 \to 2S_2 = -4S_3$$

$$\to S_2 = -2S_3$$

$$S_1 - 2S_3 - 12S_3 = 0 \to S_1 = 14S_3$$

En remplacant dans la fonctinnelle :

$$38S_3 \to max_{\theta,\ell}$$

$$\begin{cases} -1 \le S_1 \le 9 \\ -7 \le S_2 \le 3 \\ 0 \le S_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le 14S_3 \le 9 \\ -7 \le -2S_3 \le 3 \\ 0 \le S_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{14} \le S_3 \le \frac{9}{14} \\ \frac{-3}{2} \le S_3 \le \frac{7}{2} \\ 0 \le S_3 \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 \le S_3 \le \frac{9}{14}$$

Max ΔZ est atteint pour $S_3 = \frac{9}{14}$

On a : $S_3 = \theta = \frac{9}{14}$

$S_1 = \theta\, \ell_1 = \frac{9}{14}\, \ell_1 = 9 \to \ell_1 = 14$

$\theta\, \ell_2 = \frac{9}{14}\, \ell_3 \to \ell_2 = \ell_3$

D'où le plan :

$$\bar{x} = (x_1 + \theta\ell_1, x_2 + \theta\ell_2, x_3 + \theta\ell_3, x_4 + \theta\ell_4, x_5 + \theta\ell_5, x_6 + \theta\ell_6)$$

$$\bar{x} = (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)$$

Calculons l'estimation de suboptimalité pour le nouveau plan $\bar{x}$

$$\beta(\bar{x}, J_B) = E_2(\bar{x}_2 - d_{12}) + E_4(\bar{x}_4 - d_{14}) + E_5(\bar{x}_5 - d_{25})$$
$$+ E_6(\bar{x}_6 - d_{16})$$
$$= \frac{255}{28} > \varepsilon$$

On passe au changement de support : $J_B \sim \bar{J}_B$

$$\theta^0 = \frac{9}{14}$$

$$E \sim \bar{E} = E + \delta t = 0$$

$$\alpha_0 = K_{j1} - d_{2j} = \bar{x}_1 + \ell_1 - d_{21}$$
$$= 10 + 14 - 10 = 14$$

$$t'_B = (t_1, t_3) = (-14, 0)$$

$$t'_H = (-14, 0)\begin{pmatrix} 1\backslash 2 & -1\backslash 2 \\ 1\backslash 2 & 1\backslash 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (7, -21, 21, -14)$$

$$\gamma_4 = \frac{-E_4}{t_4} = \frac{105}{2}$$

$$\gamma_5 = \frac{-E_5}{t_5} = \frac{63}{2}$$

$$\gamma_6 = \frac{-E_6}{t_6} = \frac{1}{14} \quad \rightarrow j_1 = 6$$

D'où

$$\bar{J}_B = J_B \backslash \{j_1\} \cup \{j_0\} = \{1,3\} \cup \{6\} = \{6,3\}$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \gamma_0|\alpha_0| = \frac{227}{28}$$

On a donc $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, On recommence une nouvelle itération avec :

$\bar{x} = (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)$

$\bar{J}_B = \{6,3\}$

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A_B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_H^T = (E_1, E_2, E_4, E_5) = Y^T A_H - C_H$

Avec :

$Y^T = C_B' A_B^{-1}$

$Y^T = -\frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0)$

D'où :

$E_H^T = (1,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - (2,-1,1,1)$

$= (-1,2,1,-2)$

Avec : $E_3 = E_6 = 0$

Soit l'estimation de suboptimalité définit par :

$\beta\,(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} Ej(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} Ej(x_j - d_{2j})$

$= \frac{60}{7} > \varepsilon$

Changement de plan

$\bar{x} \sim \bar{\bar{x}} = x + \theta^0 \ell$

$\Delta Z = \sum_{j=1}^{m} C_j S_j + C_{m+1} S_{m+1} \rightarrow max$

$= C_3S_3 + C_6S_6 + C_1S_1 + C_2S_2 + C_4S_4 + C_5S_4$

Avec

$S_3 = \theta\,\ell_3$, $S_6 = \theta\,\ell_6$, $S_1 = \theta\,\ell_1$, $S_2 = \theta\,\ell_2$, $S_4 = \theta\,\ell_4$, $S_5 = \theta\,\ell_5$

$\ell(J_B) \rightarrow J_H = \{1,2,4,5\}$

$\ell_1 = d_{21} - \bar{x}_1 = 0,$

$\ell_2 = d_{12} - \bar{x}_2 = \frac{-5}{7},$

$\ell_4 = d_{14} - \bar{x}_4 = 0$

$\ell_5 = d_{25} - \bar{x}_5 = \frac{25}{7}$

$\Delta Z = S_3 + S_6 + \theta(C_1\ell_1 + C_2\ell_2 + C_4\ell_4 + C_5\ell_5)$

$= S_3 + S_6 + \theta(\frac{5}{7} + \frac{25}{7})$

$\Delta Z = S_3 + S_6 + \frac{30}{7}\,\theta$

$\Delta Z = S_3 + S_6 + \frac{30}{7}\,\theta \rightarrow max_{\theta,\ell_3,\ell_6}$

$\theta\, A\ell = \theta\, A(I,J)\ell(J)$

$= \theta\, A(I,J_B)\ell(J_B) + \theta\, A(I,J_H)\ell(J_H)$

$$\theta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_3 \\ \ell_6 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-5}{7} \\ 0 \\ \frac{25}{7} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} S_3 + S_6 + \frac{30}{7}\,\theta \rightarrow max_{\theta,\ell_3,\ell_6} \\ \theta\ell_3 + \theta\ell_6 - \frac{30}{7}\theta = 0 \\ \theta\ell_3 - \theta\ell_6 + \frac{40}{7}\theta = 0 \\ \frac{40}{7} \leq \theta\ell_3 \leq \frac{30}{7} \\ 0 \leq \theta\ell_6 \leq 10 \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 + S_6 + \frac{30}{7}\,\theta \rightarrow max_{\theta,\ell_3,\ell_6} \\ S_3 + S_6 - \frac{30}{7}\theta = 0 \\ S_3 - S_6 + \frac{40}{7}\theta = 0 \\ \frac{40}{7} \le S_3 \le \frac{30}{7} \\ 0 \le S_6 \le 10 \\ 0 \le \theta \le 1 \end{cases}$$

Graphiquement en aura :

$$2S_3 + \frac{10}{7}\theta = 0 \rightarrow 2S_3 = -\frac{10}{7}S_3$$

$$\rightarrow S_3 = -\frac{20}{7}\theta$$

$$-\frac{20}{7}\theta + S_6 - \frac{30}{7}\theta = 0$$

$$S_6 = \frac{50}{7}\theta$$

$$60\,\theta \rightarrow max$$

$$\begin{cases} \frac{40}{7} \le -\frac{20}{7}\theta \le \frac{30}{7} \\ 0 \le \frac{50}{7}\theta \le 10 \\ 0 \le \theta \le 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{2} \le \theta \le -2 \\ 0 \le \theta \le \frac{7}{5} \\ 0 \le \theta \le 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 0 \le \theta \le 1$$

Max ΔZ est atteind pour $\theta = 1$

$S_3 = -\frac{20}{7}$ $S_3 = \theta\,\ell_3 \rightarrow \ell_3 = -\frac{20}{7}$

$S_6 = \frac{50}{9}$ $\qquad$ $S_6 = \theta\, \ell_6 \rightarrow \ell_6 = \frac{50}{9}$

$\theta = 1$

$$\bar{\bar{x}} = (x_1 + \theta\ell_1, x_2 + \theta\ell_2, x_3 + \theta\ell_3, x_4 + \theta\ell_4, x_5 + \theta\ell_5, x_6 + \theta\ell_6)$$

$$\bar{\bar{x}} = (10, 0, \frac{20}{9}, 0, \frac{70}{9}, \frac{50}{9})$$

Calculons l’estimation de suboptimalité pour le nouveau plan $\bar{\bar{x}}$

$$\beta\,(\bar{\bar{x}}, \bar{J}_B) = E_1(\bar{\bar{x}}_1 - d_{21}) + E_2(\bar{\bar{x}}_2 - d_{12}) + E_4(\bar{\bar{x}}_4 - d_{14})$$
$$+ E_5(\bar{\bar{x}}_5 - d_{25}) = 0$$

D’où la solution est optimale

$$x^* = (10, 0, \frac{20}{9}, 0, \frac{70}{9}, \frac{50}{9})$$

Avec : $Z(x^*) = 40.$

III. 5- Comparaison :

Pour comparer cette méthode avec celle du chapitre II on va résoudre le même problème avec la méthode adaptée.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Z(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow max \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 10 \\ 0 \le x_j \le 10 \quad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Soit le support plan $\{x, J_B\}$ de départ :

$|J_B| = 2$, $|J_H| = 4$

$$J_B = \{1, 3\}, x_B = \{x_1, x_3\} x^T = (1, 2, 7, 0, 0, 0)$$

La matrice de support est égale à :

$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Avec $|A_B|=2 \neq 0$

$A_B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

La valeur des estimations vaut :

$E_H^T = (E_2, E_4, E_5, E_6)$ = $Y^T A_H - C_H$

Avec :

$Y^T = C_B' A_B^{-1}$

$Y^T = (2,1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}\right)$

D'où :

$$E_H^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2-1 & & 2 & -1 \end{pmatrix} - (-1, 1, 1, 1)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-8}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Avec : $E_1 = E_3 = 0$

On a alors :

$E_2 = \frac{2}{3} > 0$, $E_4 = \frac{5}{6} > 0$, $E_5 = \frac{-8}{3} < 0$, $E_6 = \frac{1}{6} > 0$

Soit l'estimation de suboptimalité définit par

$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{Ej>0 \\ j\in JH}} Ej(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{Ej<0 \\ j\in JH}} Ej(x_j - d_{2j})$

$$= E_2(x_2 - d_{12}) + E_4(x_4 - d_{14}) + E_5(x_5 - d_{25}) + E_6(x_6 - d_{16})$$

$$= \frac{84}{3} > \varepsilon$$

Donc : $\beta(x, J_B) > 0$, le critère d'optimalité n'est pas vérifié,

Passant au changement de plan

$x \sim \bar{x} = x + \theta^0 \ell$

* Construction de la direction d'amélioration ℓ :

$\ell_2 = d_{12} - x_2 = -2 \qquad (E_2 > 0)$

$\ell_4 = d_{14} - x_4 = 0 \qquad (E_4 > 0)$

$\ell_5 = d_{25} - x_5 = 10 \qquad (E_5 > 0)$

$\ell_6 = d_{16} - x_6 = 0 \qquad (E_6 > 0)$

$$\ell(J_B) = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = -A_B^{-1} A_H \ell(J_H) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

*Calculons le pas optimal θ^0:

Avec $\theta^0 = min\{\theta_{j1}, 1\}$, $\theta_{j1} = \min_{j\epsilon J_B} \theta_j$

$\theta_1 = \frac{d_{21} - x_1}{\ell_1} = \frac{9}{14} \qquad (\ell_1 > 0)$

$\theta_3 = \frac{d_{13} - x_3}{\ell_3} = \frac{7}{2} \qquad (\ell_3 < 0)$

Alors $\theta^0 = \theta_{j1} = \frac{9}{14} \to j_1 = 1$

Donc le nouveau plan $\bar{x}$ s'écrit :

$$x \sim \bar{x} = x + \theta^0 \ell = (1, 2, 7, 0, 0, 0) + \frac{9}{14}(14, -2, -2, 0, 10, 0)$$

$$= (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)$$

L'estimation de suboptimalité pour le nouveau support plan :

$$\beta(\bar{x}, J_B) \;= (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) = \left(1 - \frac{9}{14}\right)\frac{84}{3} = 10 > \varepsilon$$

Le critère de suboptimalité n'est pas vérifiée

Passant au changement de support $J_B \sim \bar{J}_B$

On pose :

$\alpha_0 = K_{j1} - d_{2j} = K_1 - d_{21} = x_1 + \ell_1 - d_{21} = 1 + 14 - 10 = 5$

$t'_B = (t_1, t_3) = (-5, 0)$

$$t'_H = \frac{1}{2}(-5,0)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$= (\frac{5}{2}, \frac{-15}{2}, \frac{15}{2}, -5)$$

$$t' = (-5, \frac{5}{2}, 0, \frac{-15}{2}, \frac{15}{2}, -5)$$

Calculons γ_0 tel que : $\gamma_0 = \gamma_{j0} = \min_{j\epsilon J_H} \gamma_j$

$$\gamma_4 = \frac{-E_4}{t_4} = \frac{1}{9}$$

$$\gamma_5 = \frac{-E_5}{t_5} = \frac{16}{45}$$

$$\gamma_6 = \frac{-E_6}{t_6} = \frac{5}{6}$$

D'où $\min_{j\epsilon J_H} \gamma_j = \frac{1}{9} = \gamma_4 \rightarrow j_0 = 4$

On aura alors :

$$\bar{J}_B = J_B \backslash \{j_1\} \cup \{j_0\} = \{1,3\} \backslash \{1\} \cup \{4\} = \{4,3\}$$

D'où L'estimation :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) - \gamma_0 |\alpha_0| = \frac{35}{4} > \varepsilon$

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ n'est pas optimale.

On recommence une nouvelle itération avec le support plan $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$

$$\bar{x} = (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)\ \bar{J}_B = \{4,3\}$$

$$y' = C'_B A_B^{-1} A_B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Avec $|A_B|$ = -3 $\neq 0$

$$A_B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$y' = -\frac{1}{3}(1,1)\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$E'_H = (\frac{-5}{3}, \frac{7}{3}, -1, \frac{-2}{3})$$

On aura donc :

$E_1 = -\frac{5}{3} < 0,\ \ E_2 = \frac{7}{3} > 0,\ \ E_5 = -1 < 0,\ \ E_6 = -\frac{2}{3} < 0$

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = E_1(\bar{x}_1 - d_{21}) + E_2(\bar{x}_2 - d_{12}) + E_5(\bar{x}_5 - d_{25}) +$

$E_6(\bar{x}_6 - d_{16}) = \frac{250}{21} > \varepsilon$

* Changement de plan :

$\ell_1 = d_{21} - \bar{x}_1 = 0 \qquad (E_1 < 0)$

$\ell_2 = d_{12} - \bar{x}_2 = \frac{-5}{7} \qquad (E_2 > 0)$

$\ell_5 = d_{25} - \bar{x}_5 = \frac{25}{7} \qquad (E_5 < 0)$

$\ell_6 = d_{26} - \bar{x}_6 = 10 \qquad (E_6 < 0)$

$$\ell(J_B) = \begin{pmatrix} \ell_3 \\ \ell_4 \end{pmatrix} = -A_B^{-1} A_H \ell(J_H) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -5\backslash 7 \\ 25\backslash 7 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 70\backslash 21 \\ -10\backslash 3 \end{pmatrix}$$

*Calculons θ^0 :

$\theta_3 = \frac{d_{23} - \bar{x}_3}{\ell_3} = \frac{9}{7} \qquad (\ell_3 > 0)$

$\theta_4 = \frac{d_{14} - \bar{x}_4}{\ell_4} = 0 \qquad (\ell_4 < 0)$

$\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = 0 = \theta_4 \rightarrow j_4$

$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \theta^0 \ell = (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)$

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \ = (1 - \theta^0)\beta(\bar{x}, J_B) = 10 > \varepsilon$

Changement de support : $\bar{J}_B \sim \bar{\bar{J}}_B$

On pose :

$$\alpha_0 = K_{j1} - d_{1j} = K_4 - d_{14} = \bar{x}_4 + \ell_4 - d_{14} = -\frac{10}{3}$$

$$t'_B = (t_3, t_4) = (0, \frac{10}{3})$$

$$t'_H = -\frac{1}{3}(0, \frac{10}{3})\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\frac{20}{9}, \frac{-10}{9}, \frac{-30}{9}, \frac{20}{9})$$

$$t' = (\frac{20}{9}, \frac{-10}{9}, 0, \frac{10}{3}, \frac{-30}{9}, \frac{20}{9})$$

Calculons γ_0 tel que : $\gamma_0 = \gamma_{j0} = \min_{j\epsilon J_H} \gamma_j$

$$\gamma_1 = \frac{-E_1}{t_1} = \frac{45}{60}$$

$$\gamma_2 = \frac{-E_2}{t_2} = \frac{21}{10}$$

$$\gamma_6 = \frac{-E_6}{t_6} = \frac{9}{30}$$

D'où $\min_{j\epsilon J_H} \gamma_j = \frac{9}{30} = \gamma_6 \rightarrow j_0 = 6$

On aura alors :

$$\bar{\bar{J}}_B = \bar{J}_B \backslash \{j_1\} \cup \{j_0\} = \{4, 3\} \backslash \{4\} \cup \{6\} = \{6, 3\}$$

D'où L'estimation :

$\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B) = \beta(\bar{x}, \bar{J}_B) - \gamma_0|\alpha_0| = 9 > \varepsilon$

$\{\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B\}$ n'est pas optimale.

On recommence une nouvelle itération avec le support plan $\{\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B\}$

Avec : $\bar{\bar{x}} = (10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0)$

$$\bar{\bar{J}}_B = \{6, 3\}$$

$$y' = C'_B A_B^{-1} A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec $|A_B| = -2 \neq 0$

$A_B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$y' = -\frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (1,0)$

$E'_H = (-1, 2, 1, -2\ )$

On aura donc :

$E_1 = -1 < 0, \qquad E_2 = 2 > 0, \qquad E_4 = 1 > 0, \quad E_5 = -2 < 0$

L'estimation de suboptimalité :

$\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B) = E_1(\bar{\bar{x}}_1 - d_{21}) + E_2(\bar{\bar{x}}_2 - d_{12}) + E_4(\bar{\bar{x}}_4 - d_{14}) +$

$E_5(\bar{\bar{x}}_5 - d_{25}) = \frac{60}{7} > \varepsilon$

* Changement de plan

$\ell_1 = d_{21} - \bar{\bar{x}}_1 = 0 \qquad (E_1 < 0)$

$\ell_2 = d_{12} - \bar{\bar{x}}_2 = \frac{-5}{7} \qquad (E_2 > 0)$

$\ell_4 = d_{14} - \bar{\bar{x}}_4 = \qquad (E_4 > 0)$

$\ell_5 = d_{25} - \bar{\bar{x}}_5 = \frac{25}{7} \qquad (E_5 < 0)$

$$\ell(J_B) = \begin{pmatrix} \ell_3 \\ \ell_6 \end{pmatrix} = -A_B^{-1} A_H \ell(J_H) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -5\backslash 7 \\ 0 \\ 25\backslash 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10\backslash 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

*Calculons θ^0 :

$\theta_3 = \frac{d_{13} - \bar{\bar{x}}_3}{\ell_3} = 8 \qquad (\ell_3 < 0)$

$\theta_6 = \frac{d_{26} - \bar{\bar{x}}_6}{\ell_6} = 2 \qquad (\ell_4 < 0)$

$\min_{j \in J_B}\{1, \theta_j\} = 1$

$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \theta^0 \ell = (10, 0, \frac{70}{14}, 0, 10, 5)$

$\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B) = (1-\theta^0)\beta(\bar{\bar{x}}, \bar{J}_B) = 0$

$\{\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{J}}_B\}$Est optimale.

Donc l'algorithme s'arrête, avec la solution réalisable optimale et l'optimum sont donnés par : $x^* = \left(10, \frac{5}{7}, \frac{40}{7}, 0, \frac{45}{7}, 0\right)$

La valeur optimale du problème : $Z(x^*) = 40$, après 3 itérations.

III. 6- Conclusion :

Nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle méthode de résolution des problèmes à grand nombre de paramètres à variables bornées, permettant de converger une solution plus rapidement vers l'optimale.

A travers ces deux exemples effectués, on constate l'efficacité pratique de cet algorithme en termes d'infériorité du nombre d'itérations qui est très réduit, en comparant avec cel du chapitre II.

En effet, l'introduction de la nouvelle méthode à impliqué une amélioration de taux de convergence de l'algorithme, ce qui montre la robustesse de notre algorithme.

Conclusion générale :

Les méthodes des points intérieurs sont connues par leur efficacité, rapidité de convergence en traitant des problèmes de grande taille.

Notre travail a consisté en la résolution d'un problème de programmation linéaire à grand nombre de paramètres en utilisant un autre problème auxiliaire dit problème de support.

Pour cela nous avons commencé à rappelé certaines notions classiques importantes sur la programmation linéaire. Nous nous somme intéressé ensuite dans le deuxième chapitre à présenter la méthode adaptée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire à variables bornées ainsi qu'un exemple d'application. Cette méthode possède un critère d'arrêt si une certaine précision obtenue est satisfaisante. En effet, le calcul d'un nombre appelé estimation de suboptimalité permet d'estimer l'écart entre la valeur de la fonction objectif à une itération donnée et sa valeur optimale.

Nous nous somme ensuite intéressé dans le dernier chapitre à la résolution d'un problème à grand nombre de paramètre en utilisant la méthode de support.

Bibliographie

[1] Adaptive Method of Solving Linear Programming Problems by R. Gabasov, University of Belarus, Minsk (polycopié). 1992

[2] Constructive Optimization Methods.P.1. R.Gabasov, F.M. Kirillova, A.I. Tyatushkin.University Press, Minsk, 1984.

[3] Problème Min-Max de programmation linéaire. Mémoire de Magister. Mme Hamdous Saliha UMMTO/07/11/2001.

[4] Optimisation fonctionnelle non différentiable. Mémoire de magister. Melle Ticherfatine Samira UMMTO/10/06/2009.

[5] Resolution et implementation d'un probleme Min-Max en contrôle optimal. Mémoire de magister. Mr Chebbah Mohammed UMMTO 2006.

[6] Methodes de resolution de problémes de commande optimale. Mémoire de magister.Mr Abdoune Abdennour 18/03/1999.

Résumé

Au cours de ce travail nous avons proposé une nouvelle méthode de résolution des problèmes à grand nombre de paramètres à variables bornées c'est-à-dire le nombre de variables est suffisamment grand par rapport au nombre d'équations, permettant de converger une solution plus rapidement vers l'optimale, appelée problème de support.

Pour cela nous avons commencé à rappeler certaines notions classiques importantes sur la programmation linéaire. Nous nous somme intéressé ensuite dans le deuxième chapitre à présenter la méthode adaptée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire à variables bornées développée par les professeurs R-Gabassov et F-M-Kirillova dans les années 1970. Cette méthode possède un critère d'arrêt si une certaine précision obtenue est satisfaisante. Les itérations de cet algorithme se font en deux étapes, le changement du plan et le changement de support, sachant que ces deux changements sont indépendants. En effet, le calcul d'un nombre appelé estimation de suboptimalité permet d'estimer l'écart entre la valeur de la fonction objective à une itération donnée et sa valeur optimale. Le but de dernier chapitre est dans la recherche du pas et de la direction qui se fait en utilisant un autre problème auxiliaire dit problème du support avec un nombre très réduit de paramètres : m+1 variables et m équations, puis résoudre le problème avec la méthode adaptée étudié en deuxième chapitre.

Mots clés : méthode adaptée, support plan, support, méthode de support, estimation de suboptimalité, probléme de support.