الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ⵜⴰⴳⴷⵓⴷⴰ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵖⵔⴼⴰⵏⵜ ⵜⴰⴷⵣⴰⵢⵔⵉⵜ

جامعة مولود معمري تيزي وزو

ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵏ ⵎⵓⵍⵓⴷ ⴰⵜ ⵎⵄⵎⵎⵕ

كلية العلوم الاجتماعية والإنسانية

قسم العلوم الإجتماعية

المنعرج في الرياضيات المعاصرة:
في تخوم الرياضيات، المنطق والحوسبة

أطروحة لنيل درجة دكتوراه الطور الثالث (ل.م. د.) في الفلسفة

تخصص: فلسفة تطبيقية

إعداد الطالب:

كمال هاملي

إشراف الأستاذة:

أ.د. نادية بوجلال

لجنة المناقشة:

الإسم واللقب	الدرجة العلمية	الجامعة الأصلية	الصفــــة
صالح بن لفقي	أستاذ محاضر أ	جامعة تيزي وزو	رئيـــــسا
نادية بوجلال	أستاذة التعليم العالي	جامعة الجزائر2	مشرفا ومقررا
أحمد باجي	أستاذ التعليم العالي	جامعة تيزي وزو	عضوا مناقشا
مسعود قريمس	أستاذ التعليم العالي	جامعة تيزي وزو	عضوا مناقشا
مونية زبيدة بن ميسي	أستاذة التعليم العالي	جامعة باتنـــة	عضوا مناقشا
فريد زيداني	أستاذ التعليم العالي	جامعة الجزائر2	عضوا مناقشا

الموسم الجامعي: 2025/2024

﴿سَنُرِيهِمْ ءَايَٰتِنَا فِى ٱلْءَافَاقِ وَفِىٓ أَنفُسِهِمْ
حَتَّىٰ يَتَبَيَّنَ لَهُمْ أَنَّهُ ٱلْحَقُّ ۗ
أَوَلَمْ يَكْفِ بِرَبِّكَ أَنَّهُۥ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ شَهِيدٌ﴾

صدق الله العظيم

شكر وعرفان

الحمد والشكر لله على عظيم فضله وكرمه
ثم أشكر أستاذتي الفاضلة الدكتورة: نادية بوجلال
التي أشرفت على هذا العمل بصبر وحلم كبيرين.
كما أشكر لجنة المناقشة التي أخذت على
عاتقها مهمة قراءة هذا البحث وتقييمه.

إهداء

إلى أمي ثم أمي ثم أمي، إلى روح أبي

إلى زوجتي وابنتي صبا جلنار وجيفارا نيرفانا

إلى عائلتي من كيبرهم إلى صغيرهم

إلى الأصدقاء: مراد، طارق وموسى

إهداء خاص

إلى روح المجاهد الأستاذ:

السعيد شافعي

إجلالا وتقديرا

مقدمـــــــــة

قد تبدو كلمة منعرج[1] ذات حمولة مفاهيمية كبيرة يتوجب علينا استعمالها بحذر لغوي ومنهجي شديدين، وهي على الأغلب تحمل معنى الإنتقال من حالة إلى أخرى تكون مختلفة عن الأولى بشكل جذري، وأيُّ منعرج يمكن أن يشهده علم كان ولا يزالُ يضرب به المثل في الدقة والصرامة والوثوقية والتماسك، إذ قال آينشتاين ذات مرة: "الرياضيات حقيقة ببعدها عن الواقع وتقريبية بقربها منه"، إذن فعن أي منعرج نتحدث لاسيما وأن الرياضيات لغة العلوم وأي تصدع أو ريبية يصيبانها فبالمحصلة سيتصدع العلم بأكمله، فمنذ أن قالها جاليليو: "الطبيعة كتاب لغته الرياضيات" ومع بزوغ العلم أي بما ينطوي عليه من ترييض للطبيعة (mathématisation de la nature) أصبح هم العلماء تقويض الطبيعة بصيغ رياضية وفهم سلوكها من خلال قوانين ونواميس تصف وتتنبأ بظواهرها.

إننا نقصد هاهنا بالمنعرج الوقوفَ على ما شهدته الرياضيات من تحول في طبيعتها وطريقة البحث فيها من خلال إعادة قراءة تاريخها وأفكارها ونظرياتها ومسلماتها، ومساءلتَها موضوعا ومنهجا عبر تتبع محطات مسارها التاريخي من جهة، ومن جهة أخرى نعرض تاريخها وعلاقته بالمنطق والحوسبة.

بالفعل منذ أن خرج المنطق من قبضة الفلاسفة، وبالضبط منذ لحظة لايبنيتس وصولا إلى الأعمال المهمة للمنطقي جوتلوب فريجه، أصبح المنطق حقيقة أي علما له قوانينه وأدوات البحث فيه، فلقد أبانت أزمة الأسس التي شهدتها الرياضيات خلال نهاية القرن التاسع عشر عن دور رئيس اضطلع به المنطق لبحث اتساق المفاهيم الرياضية

[1] ارتطبت كلمة منعرج أو منعطف tournament باللسان الإنجليزي أو tournant باللسان الفرنسي بالمنعطف اللغوي الذي شهدته اللغة خاصة على يد اللساني السويسري فارديناند دي سوسير، وعلى العموم فهي تشير إما إلى التجاوز أو التـــقاطع.

والخروج من المفارقات والمغالطات التي شهدتها نظرية المجموعة، تلك النظرية التي حاول من خلالها ملهِمُها كانتور وبعده زرملو وفرانكل تأسيس الرياضيات على أساس متين.

ولم يتوقف دور المنطق عند ما ذكرناه، بل تطور بشكل سريع ليجد نفسه أبعد ما يكون عن أن يُعبر عن قوانين فكر أو أن يكون قواعد تحفظ العقل وتحميه من الوقوع في الزَّلل، فمع تطور المكننة أصبح المنطق محط اهتمام الرياضيين والمناطقة وحتى المهندسين من نظرية المجموعات إلى نظرية النماذج وصولا إلى نظرية الإستدلال وختاما بنظرية قابلية الحساب، اختصاصات كلها ضمنت للمنطق مكانته بين العلوم وأصبح ذا فاعلية كبيرة في تطور العلوم خاصة ما نصطلح عليه بالتكنوعلمي، فلم تعد العلوم بتلكم البساطة الحسابية كسالف عهدها إنما دخلنا عصر الحساب الفائق (hypercalcul) فلم تَعْدُ مهمة العالم الحساب وإنما أصبحت مهمة المنطقي البحث عن أدوات وإجراءات فعالة (procédures efficaces) للحساب الفعال (calcul effectif)، فكل المسائل الرياضية والعلمية التي نحن بصدد حلها والقابلة للحساب، في الواقع، لم نعد نراها كسالف عهدها، وإنما نراها باعتبارها قابلة للحساب من وجهة قابليتها للنمذجة بآلة تورينج، كما أن العلم بمنظوره ومنهجه المعاصرين انفتح على نظرية النماذج، وأضحت النظريات مجرد صيغ قابلة للتأويل في لغة معينة، يختار أبجديتها وقواعد استنباطها العالمُ نفسُه، وبالتالي نطرح السؤال بالصيغة التالي: ما هي المسائل القابلة للحساب أو القابلة للحساب بشكل فعال؟

وهذا هو الـــسؤال الجوهـــري لما نصطلح عليـــه بنظرية التعـــقيد الحوسبي (computational complexity theory)، بالفعل لقد دخلنا عصر الحساب الفائق والتعقيد الحوسبي حتى أن الفيزيائي آراسون يؤكد بأنه تفاجأ من كون نظرية التعقيد لم تؤثر في الفكر الفلسفي بالقدر الذي أثرت فيه نظريـــة قابـــلية الحســـــاب. (Aaronson, 2011, p. 4)

إن هذا المشهد الفلسفي/العلمي يحتم علينا التفاعل معه إيجابا من خلال معاودة الرجوع تاريخيا للحظة إنعطاف العلم عامة والرياضيات خاصة، والبحث في أسباب وعوامل تحول الرياضيات بهذا الشكل الراديكالي من الإستدلال نحو الحساب والحساب الفائق وكيف إنتقلت العلوم إلى التكنوعلمي.

وعلى ضوء ما سبق نطرح إشكاليتنا الرئيسية التي سوف تحاول هذه الدراسة الإجابة عليها بعد سبرها وهي:

ما هي ملامح المنعرج الذي شهدته الرياضيات؟ وكيف كان انتقالها من الإستدلال إلى الحساب؟ وكيف انعكس ذلك على تطور الرياضيات منهجا وموضوعا؟

ويمكن أن نطرح أسئلة جزئية على سبيل:

- ✓ متى تشكل المنعرج وما طبيعته وانعكاساته الإبيستمولوجية والفلسفية؟
- ✓ كيف ساهم المنطق من خلال ما تمفصل عليه من مجالات معرفية جديدة في تجاوز أزمة أسس الرياضيات التي شهدتها؟
- ✓ ما هي ملامح المنطق المعاصر وكيف شكل إرهاصا لظهور علوم الحوسبة الآلية؟

وبعد التطرق إلى الإشكالية، تدعوني الضرورة المنهجية إلى الإبانة عن المنهج الذي انتهجته، والأدوات والطرائق التي اتبعتها خلال هذا البحث، ولقد عمدت انتهاج مناهج متقاطعة نظرا لطبيعة الموضوع التي افضت بي إلى تبني أولا المنهج التاريخي للوقوف على المحطات التاريخية المَعْلمية، كما انتهجت منهج التحليل للوقوف على مكامن كل مرحلة واستشفاف خصائصها وابيستميتها، كما انتهجت أيضا المنهج المقارن وذلك للوقوف على الإختلافات في البنية العقلية والمنهجية عند كل محطة، وتبيان هذه الإنتقالات والتطورات في الفكر الإنساني عامة والرياضي والمنطقي خاصة.

لقد أفضى بي البحث إلى الإستواء على خطاطة خمسة فصول:

يبدأ بحثنا بفصل أول موسوم بـ: تاريخ موجز حساب واستدلال، عرضت فيه تاريخ بعض المحطات الهامة في الرياضيات بدءا بحضارة بلاد الرافدين بحضاراتها السومرية والآشورية والبابلية، ثم الحضارة المصرية القديمة، ثم الحضارة اليونانية فالإسلامية فمرحلة العصور الوسطى وصولا إلى المرحلة المعاصرة، ولم أقتصر على عرض تاريخي فحسب إنما حاولت التجرأ على تحليل عقل كل مرحلة محاولا كشف ابيستمية كل حقبة، ولعلي تركت للقارئ بعض الإجتهاد في اكتشاف كنه "الواو"[2] التي ربطت بين مصطلحي الحساب والإستدلال أهي على سبيل الوصل أم الفصل.

أما الفصل الثاني الموسوم بـ: أزمة الأسس والتيارت الفلسفية الرياضية الكُبرى، فتطرقت فيه لأزمة الأسس التي ضربت بنيان الرياضيات في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين، ولما كانت نقطة انطلاق هذه الأزمة هي نظرية المجموعات وما أفرزته من مفارقات، فلقد عمدت إلى عرضها في نسختها البسيطة (naive) بإسهاب بدءا من مؤسسها الأول جورج كانتور ثم النسخة المُأَكْسمة التي اشتغل عليها كل من زرملو وفرانكل، أما في الجزء الثاني فعرضت ثلاث تيارات فلسفية رياضية كبرى شكلت المشهد الرياضي في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين وهي المدرسة الصورانية التي أسسها دافيد هلبرت والمدرسة الحدسانية لمؤسسها بروور وصولا للمدرسة اللوجيستية لمؤسسيها فريجه، راسل ووايتهد.

أما الفصل الثالث الموسوم بـ: المنطق الكلاسيكي مقاربة تاريخية ابيستمولوجية، فتعرضت فيه لتعريف المنطق ولحظة نشوئه على يد لايبنيتس بوصفه الأورجانون الجديد

[2] اعتاد العديد من الكتاب على عناوين كهذه من بينهم مارتن هايدجر في كتابه العمدة الموسوم بـ : الكينونة والزمان، وجورج هانز جادامير في كتابه القيم: الحقيقة والمنهج.

أو اللغة الرمزية الكلية، اشتغل عليها الرياضيون والمناطقة بدل الفلاسفة وكيف تجاوز المنطق في مرحلته الكلاسيكية الأولى –التي حُقب لها من لحظة لايبنيتس إلى جوتلوب فريجه– المنطق الأرسطي كما تعرضت لمحطة كانط بوصفها مرحلة دقيقة في تاريخ نظرية المعرفة وعلاقتها بالمنطق الترنسندنتالي، ثم عرضت التزاوج المهم الذي أحدثه جورج بول في منطقه ثنائي القيمة بين المنطق والجبر فأثْرت عملية جبر المنطق البحث في المنطق ومنحته سهولة ومرونة في التعامل بواسطة العمليات الجبرية، وختمت الفصل بفريجه مؤسس علم المنطق وأحد الذين أعطوا دفعا للمدرسة اللوجيستية.

أما في الفصل الرابع الموسوم بـ: فتوحات القرن العشرين، فقل استهللته بالحديث عن المسائل الثلاث والعشرين التي عرضها هلبرت في مؤتمر الرياضيات، كما عرضت فيه "مسألة البتية" التي شكلت بحق مركز اهتمام الرياضيين الذي رسم بالفعل ملامح رياضيات القرن العشرين كما أشار إلى ذلك هلبرت نفسه، بعدها مباشرة عرضت مبرهنة الكمالية واللاكمالية لجودل هذه الأخيرة التي دحضت مشروع هلبرت، ثم انتقلت إلى إسهام آلان تورينج في محاولته لحلحلة مسألة البتية حينما حولها من مسألة منطقية إلى مسألة حسابية فدشن بذلك عهدا جديدا واكتشف قارة أخرى زاوجت بين الرياضيات والمنطق، إنها نظرية قابلية الحساب، ولم ينته الأمر عند ذلك فلقد صيغ أولُ تعريف للخوارزمية واستقل المنطق عن الرياضيات وتمفصل حول اختصاصات أخرى.

أما في الفصل الخامس الموسوم بـ: المنطق المعاصر الذي يمثل مع الفصل السابق عصارة جهد هذا البحث، فقلد تطرقت فيه إلى المنطق المعاصر باختصاصاته الأربع: نظرية البرهان أو الاستدلال، نظرية النماذج، نظرية المجموعات ونظرية قابلية الحساب، لقد حاولت من خلال هذا الفصل البحث في رؤية شاملة لتفسير وتحليل هذا التحاقل والتجاوز المعرفيين والعلميين (interdisciplinarité, transdisciplinarité) من الرياضيات إلى المـــنطق إلى الحوسبة.

ثم خاتمة للبحث أجملت فيها مجموعة من الإستنتاجات التي توصلت إليها من خلال التعرض من أولى نقاط البحث إلى غاية آخرها، لتكون قائمة المصادر والمراجع هي آخر ما يكتب ويرد في الرسالة.

على هذا الأساس أرى أن للموضوع الذي سأتناوله أهمية بالغة وغاية قصوى، ويمكننا تلمس وجوب طرحه على عدة مستويات، فمن جهة سنعالج مرحلة مهمة من تاريخ العلم بعامة وتاريخ الرياضيات والمنطق بخاصة، مرحلة شهدت فيها الرياضيات أزمة أسس تمخضت عنها تيارات فلسفية رياضية كلها تدعي الصواب، ومن جهة أخرى أرى هذه الإنطلاقة الجديدة للمنطق لا بوصفه كما قال راسل: "المنطق صبا الرياضيات والرياضيات كهولة المنطق"، إنما كعلم قائم بذاته تمخض من محاولات عديد الرياضيين والمناطقة حل "مسألة البتية" التي طرحها هلبرت والتي رسمت بالفعل ملامح عصر الرياضيات الجديد، وعطفا على ما سبق فإن البحث في المنطق والرياضيات أدى إلى بزوغ عهد جديد هو عهد الحوسبة الآلية الذي لم يغير فحسب منهجية البحث في الرياضيات والعلوم الأخرى بل غير نظرتنا للحياة بحوسبة كل شيء كما أن الموضوع متحاقل معرفيا حيث يجمع المنطق والرياضيات وعلم الحساب الآلي، وعليه توجب علينا فحص هذا المنعرج ولا نبقى بمنأى عن هذا التطور.

أما بالنسبة لجملة المراجع التي إعتمدتها في هذا البحث فلم أركز على مرجع واحد بعينه، بل حاولت جاهدا أن أطلع على معظم ما كُتب في هذا الشأن قدر إمكاناتي المادية، وما أتيح لي من مراجع وقدر عدتي المنهجية المتواضعة، وما لاحظته فقر المكتبة العربية تماما من كتب تتناول هذا الموضوع لا سيما ما فصلت فيه في الفصلين الرابع والخامس، على عكس ذلك وجدت بعض الكتب باللسان الفرنسي وأغلبها باللسان الإنجليزي، والتي كانت متاحة على شبكة الإنترنت وبشكل مجاني، غير أني لم أحض ببعضها لجدتها وعدم توفرها في نسختها الورقية.

لكني في المقابل أخص بالذكر مرجعين أساسيين على الرغم من التعرف عليهما صدفة إلا أنهما كانا بالنــــسبة لي المصباح الذي أنار دربي البحثي ورسم ملامح إشكالـــيتي وهما:

كتاب المنطقي والفيلسوف الفرنسي بيار فاجنار Pierre Wagner المعنــــــــون بـ: machine en logique.

وكتاب الرياضي والفيلسوف الفرنسي جيل دويك Gilles Dowek المعنون بـ: Métamorphoses de calcul : une étonnante histoires des mathématiques الحائز على جائزة الدولة في الفلسفة بفرنسا العام 2007.

ولأن كل بحث معرفي لا يخلو من الصعوبات والعوائق، فإني أعترف وأقر بصعوبة الموضوع صعوبة شاقة تمثلت أساسا في الطرح الجديد الذي تبنيته وفي صعوبة الإلمام بالموضوع نظرا لتشعبه ولكونه يشمل ثلاث اختصاصات علمية متقاطعة، وبوصفي في الأساس مهندسا في الإعلام الآلي فلم أجد نفسي إلا أرجع للمقررات الدراسية الجامعية الخاصة بالرياضيات والمنطق الرياضي ونظرية اللغات ونظرية قابلية الحساب لاسترجاع معارفي النظرية، وأربطها وأصقلها وأضعها في إطارها الفلسفي وفق مقاربة بيداغوجية تبسيطية ليتسنى للقارئ الكريم فهم بعض التفاصيل التقنية، كما أني أود الإشارة إلى القلق الكبير الذي انتابني خاصة في تحرير الأطروحة وصعوبة كتابة الرموز المنطقية والرياضية مما اضطرني إلى دراسة برمجية لاتاكس (Latex)، كما أني وفي هذا السياق أقر بأن عنوان البحث لم يستقر على صيغته الحالية إلا بعد أربع سنوات من الصقل والتقليم، كما أني واجهت معضلة من نوع آخر أكثر تقنية وهي كيفية تعريب ونقل المصطلح الإنجليزي والفرنسي، حيث اضطررت لأكثر من مرة إلى استشارة بعض المترجمين الذين تمكنت من الإتصال بهم على سبيل الأستاذ المترجم التونسي محي الدين القلاعي، ولكم صادفت أكثر

من ترجمة لذات المصطلح فرجحت ترجمة على أخرى مبرزا السبب التقني والمنهجي فمثلا مصطلح arithmétisation des mathématiques تُرجمت في مراجع تحسيب وفي أخرى حسبنة غير أني لم أجد أصلا للكلمتين فآثرت ترجمتها بالصياغة الحسابية للرياضيات على سبيل جعل الرياضيات في مجموعة من الصيغ الحسابية، ولقد عكفت في وضع ثبت المصطلحات باللغات الإنجليزية والفرنسية والعربية مع بعض الإجتهاد لترجمة بعض المصطلحات لأول مرة باللغة العربية متمنيا أن تجد القبول في الأوساط الأكاديمية وتكون لبنة ونقطة انطلاق لأبحاث أخرى في ذات المجال.

وتجدر الإشارة إلى نقطة بالغة الأهمية والمتمثلة في كون حين تصفح ورقات هذا البحث، قد يجد القارئ الكريم عديد الأفكار مكررة هنا وهناك بين ثنايا الفصل الواحد وبين الفصول، والسبب في ذلك يعود لرغبتي في مساعدة القارئ ومرافقته في القراءة الواضحة المُيَسَّرة للبحث لصعوبته التقنية ولكون حضور الرياضيين والمناطقة متعددا بتعدد المجالات البحثية، فمثلا نجد حضور دافيد هلبرت مؤسِّسا للتيار الصوراني ونجده أيضا مؤسِّسا لنظرية البرهان، أما الحضور الأول فيندرج ضمن التيارات الفلسفية الرياضية وأما الثاني فهو متمفصل عن نظرية المنطق المعاصر، وكمثال آخر نجد فريجه حاضرا بوصفه مؤسِّسا للمنطق المعاصر ومؤسسا للتيار اللوجيستي مع راسل ووايتهد وأيضا نجد أن أعماله تندرج ضمن ما سنصطلح عليه بنظرية النماذج، ولهذا تناولت فريجه في الفصل الثاني الخاص بالتيارات الفلسفية بوصفه أحد مؤسسيها وفي الثالث المتعلق بالمنطق بوصفه مؤسِّسا للمنطق الرياضي، كما تناولته في الفصل الخامس بوصف أعماله المنطقية (منطق الدرجة الأولى) تمثل الإرهاص الأول لنظرية النماذج التي تُعد إحدى فروع نظرية المنطق المعاصر، كما أن البحث لا يخضع لترتيب زمني محدد، ذلك أننا نجد عديد الأفكار والنظريات قد تزامن اكتشافها، وبالتالي من الصعوبة بمكان جعلها ضمن كرونولوجيا معينة فالترتيب الذي خضع له البحث ترتيب منطقي لا زمني.

الفصل الأول

تاريخ موجز

حساب واستدلال

تمهيد:

قد يختلف تاريخ الرياضيات عن تاريخ الفلسفة، فهاته الأخيرة لا يكتفي تاريخها بتأريخ محطات بعينها، وعرض مختلف الأفكار وتطورها ومراحل نضجها أو صقلها، بل وفي كثير من الأحيان يتجاوز هذه المهمة التي تبدو اعتيادية لحد ما، ليكون جزءا لا يتجزأ من الفلسفة عينها، ويصل لدرجة التماهي معها، أما تاريخ الرياضيات فله شأن آخر مختلف تمام، فهو كما يرى هاوارد إيفاس (Howard Eves) أن تاريخ تطور الرياضيات يتكون من خيطين متشابكين: الخيط الأول يسرد تطور ونضج محتوى الرياضيات في حين يسرد الآخر تغير طبيعة الرياضيات (Eves, 1990).

ارتبطت الرياضيات بالحياة اليومية للإنسان منذ القدم، وتجلى ذلك من خلال العد أو الحساب بالحصى، فعرفت الرياضيات أولى ملامح موضوعاتها وهو العدد، فالتجأ الإنسان إلى البحث عن عديد الطرق للعد والحساب، فتعرف بذلك على الطريقة الحسابية أولا، ثم بعد ذلك دخل في محاولات عديدة لتمثيل ما يراه من خلال رسومات وبيانات على الأحجار فبدأ شيئا فشيئا يميز الأشكال الهندسية، وما هي إلا قرون بسيطة حتى رفع رأسه للسماء محاولا محاكاة حركة النجوم والأجرام السماوية من خلال رسم مساراتها ومنحنى حركتها، فأبانت له الهندسة على أفق واسع وأشكال عددية لم يتعرف عليها من قبل، سنحاول من خلال هذا العرض الموجز الوقوف على بعض محطات تطور الرياضيات، ولقد قمنا باختيار محطات دون غيرها ليس على سبيل اهمال أو تفضيل إنما لضرورة منهجية.

وعلى ضوء ما سبق ذكره سنحاول فيما يلي من الأسطر عرض محطات معلمية في حضارات بعينها لتطور الفكر الرياضي منهجيا وابيستمولوجيا.

1.رياضيات بلاد الرافدين: الإرهاصات الأولى

تضم حضارة بلاد الرافدين أو حضارة ما بين النهرين عدة حضارات من بينها الحضارة السومرية، الآشورية، الأكادية والبابلية، ويُرجِع علماء الآثار إلى أن عصر الكتابة قد بدأ مع هذه الحضارة بعد الكتابة التصويرية، حيث استخدموا الكتابة المسمارية ويرى دويك أن كتابة الأرقام كانت لها السبق على كتابة الأحرف، حيث استخدم الرافديون النظام الستيني (sexagésimale) لكتابة أرقامهم الذي ظهر نحو نهاية الألفية الثالثة قبل الميلاد على ألواح في جنوب إمتدادها الجغرافي، واستخدم في الرياضيات وفيما بعد في الفلك، ويعود استخدام الرافديين للنظام الستيني لكونهم أول من قسم الساعة إلى ستين دقيقة والدقيقة إلى ستين ثانية، كما قسموا أيضا محيط الدائرة إلى 360 درجة تمثل ستة زوايا مثلث متقايس الأضلاع أي °60 ($360°=6x60°$).

ويرجع تطور الرياضيات عند البابليين إلى جزئيتين: أولهما أن العدد 60 عدد مركب بمعنى أن لديه قواسم كثيرة {1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30} مما يسهل تنطيق أي عدد أي كتابته على شكل عدد ناطق،[1] كما أنهم أول من اعتمدوا نظاما للمقارنة بين الأعداد كما عندنا في النظام العشـــــري أي من اليسار إلى اليمين وكمثال: $734=7x100+3x10+4x1$، وتجدر الإشارة إلى أننا في النظام العشري نستخدم عشرة أرقام {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} أما في النظام الستيني فنحن بحاجة إلى 59 رقما أو علامة في حين نعبر عن الصفر بالفراغ. (Hodgkin, 2005, p. 215)

أما في مرحلة الرياضيات السومرية، أي ما بين الألفية الثالثة قبل الميلاد و2300 قبل الميلاد، فقد كان السومريون أول من وضع نظاما للقياس (métrologie)، حوالي 3000 ق. م. وابتداء من 2600 ق. م. قاموا برسم جدول للضرب على لوحات من الطين

[1] فيما يخص العدد الناطق راجع تهميش الصفحة 121.

والرخام كما قاموا أيضا بكتابة مسائل في الهندسة والقسمة، والجدير بالذكر أن خلال هذه المرحلة ظهرت أولى شواهد نظام الترقيم عند البابليين.

أما تأريخ الرياضيات بالفعل فقد بدأ مع هذه الحضارة حين وجد علماء الأركيولوجيا لوحة حسابية تعود لـ 2500 قبل الميلاد، وتتضمن هذه اللوحة حساب عدد الأشخاص الذي يمكن إعطاؤهم 7 قياسات من القمح معتمدين على كمية قمح بها 1152000 حبة، وبدون أدنى عناء كانت النتيجة 164571 شخصا، نتحصل عليها من خلال قسمة 1152000 على 7، وبالتالي تعرف الرافديون على عملية القسمة بواسطة عمليات الطرح المتتالية قبل أن يتعرفوا على "علم الحساب". (Dowek, 2007, p. 16)

إن عملية حسابية بسيطة كهذه لا تعدو أن تكون عملية ساذجة بالنسبة لتلميذ متمدرس في أيامنا هذه، لكنها شكلت آنذاك نقلة نوعية على مستوى التعقيد الحسابي، فإذا كانت عملية الجمع بالحصى قد عهدها الإنسان البدائي فإن عملية القسمة تشكل خطوة أكثر تعقيدا، وعمليات الطرح المتتالية التي مازلنا نستخدمها لشرح عملية القسمة لتلاميذ الإبتدائي شكلت في الحقيقة آداة فعالة للحصول على ناتج عملية القسمة.

أما في بابل القديمة بين الألفية الثانية قبل الميلاد و1600 ق. م. والتي ترجع أغلبية اللوحات التي عثر عليها الأركيولوجيون،[2] فقد أبانت عن قدرة هائلة للبابليين على الحساب، بالنسبة للجمع والطرح كانت العمليتان معهودتين حيث زاولهما البابليون في أبسط تعاملاتهم ولم تشكل بالنسبة لهم أدنى عناء، إلا أن ما يُلاحظ كثرة اللوحات التي تحوي تحويلات قياسية إلى النظام الستيني للتمكن من حسابها ومقارنتها، لكونهم كما أسلفنا يستخدمون في حساباتهم النظام الستيني نظرا لسهولته ومرونته بالنسبة لهم، أما فيما تعلق بعملية الضرب فقد استعان البابليون بكثرة باللوحات الرقمية للحساب وحل المسائل الحسابية، فقد عُثر مثلا

---

[2] ولهذا دأب علماء الرياضيات والمؤرخون على نسب رياضيات بلاد الرافدين إلى الرياضيات البابلية لأن أغلبية اللوحات المنقوشة ترجع لهذه الفترة.

بجانب الفرات على لوحات تضم قوائم لمربعات أعداد طبيعية حتى العدد 59، وأيضا التكعيبات حتى العدد 32 كما احتوت بعض اللوحات أيضا على القوى العشر الأولى لبعض الأعداد الطبيعية، بيد أن الملاحظ وجود النتائج دون أي ذكر للطريقة التي حُسب بها مما يجعل من وجود آلة أو وسيلة للحساب أمرا واردا جدا، أما بالنسبة لعملية القسمة فإن البابليين لم يتعرفوا بشكل مباشر على عملية القسمة، إلا أنهم أدركوا بكيفية ما أن قسمة عدد على آخر ما هي إلا ضرب الأول في مقلوب الثاني $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$، أي أنهم حوَّلوا عملية القسمة إلى ضرب، غير أن مفهوم المقلوب عند البابليين ليس كما هو عندنا الآن، فيكون مقلوب العدد a هو b إذا وفقط إذا كان جداؤهما يعطينا 60 أو 60^2 بعبارة أخرى يكون مقلوب العدد 2 مثلا هو 30 لأن 60=30x2، ويكون مقلوب العدد 6 هو 10 لأن 60=6x10، ويكون مقلوب العدد 6:40 والذي معناه 600=6x60+40 هو 9 لأن $9\times(6\times60+40)=3600=60^2$. (Kline, 1972, p. 228)

أما في حساب الفائدة المركبة في معاملاتهم التجارية، من خلال مضاعفة رأس المال فقد بحثوا عن حلول تقريبية مستخدمين الحسابات الأسية (exponentielles) وفي المعادلات الجبرية أبدع البابليون فعلا في إيجاد خوارزميات لحل معادلات معينة نذكر منها معادلات من الدرجة الثانية ذات الشكل النموذجي (forme canonique): $x^2+bx=c$ حيث المعاملات b وc ليست بالضرورة أعداد طبيعية غير أن c يجب أن يكون عددا موجبا، فيكون حل المعادلة من الشكل: $x = \frac{-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$.

كما تمكن البابليون من إيجاد حلول نموذجية لبعض المعادلات من الدرجة الثالثة ذات شكل معين بمساعدة لوحات تضم مجموع تكعيب وتربيع عدد طبيعي من الشكل n^3+n^2 فيُضرب طرفا المعادلة في العدد a^2 ويُقسم طرفاها على b^3 فنتحصل على: $\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^2}$ وبتعويض القيمة $y = \frac{ax}{b}$ نتحصل على الشكل النموذجي للمعادلة المحسوبة على اللوحة المساعدة: $y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$ وهي معادلة يمكن حلها عن طريق

الإطلاع على الجدول n^3+n^2 لإيجاد القيم المقربة للعدد الثاني، فقد تمكن البابليون مـــن إجراء هذه العمليات الحسابية دون معرفتهم بالعمليات الجبرية، مما يؤكد قدرتهم الفائقة على التركيز غير أنه لم يكن لديهم خوارزمية عامة لحل المعادلات من الدرجة الثالثـــة. (Kline, 1972, p. 229)

أما في الهندسة، فيفترض علماء الأركيولوجيا أن البابليين قد امتلكوا قواعد عامة وطرائق لحساب مساحات وحجوم بعض الأشكال الهندسية، حيث قاموا بحساب محيط الدائرة باحتساب طول القطر ثلاث مرات، ومساحة الدائرة بضرب الجذر التربيعي لمحيط الدائرة مضروبا في العدد 12، مما يجعلنا نفترض أنهم أول من أعطى قيمة تقريبية للعدد π وهي جزؤه الصحيح 3، أما بالنسبة لحجم الأسطوانة فقد قاموا بحسابه من خلال ضرب قاعدته في ارتفاعه في حين أن حسابهم لحجم المخروط والهرم ذي القاعدة المربعة كان خاطئا، فقد ضربوا ارتفاع المخروط في متوسط قاعدته، وتجدر الإشارة إلى أمر نراه غاية في الأهمية إذ إن البابليين قد طبقوا مبرهنة فيتاغورس كصيغة حسابية دون أن يقدموا أي برهان أو استدلال عليها.

كما تعرف الرافديون على تقايس المثلثات غير أن مفهوم الزاوية كان غريبا عنهم، أما علماء الفلك البابليون فقد تمكنوا من حسابات زمنية (chroniques) دقيقة حول ظهور وأفول النجوم وكذلك حركة الكواكب وكسوف الشمس وخسوف القمر، ويُعتبر البابليون أول من تعرف واستخدم على الخطوط المثلثية (lignes trigonométriques).

ما يمكن أن نتفحصه من خلال هذا العرض المقتضب لرياضيات بلاد الرافدين بحضاراتها المختلفة، أنهم برعوا في الحساب رياضيا وفلكيا وتمكنوا من أدوات وطرائق حسابية دقيقة جدا بالرغم من أن ما تركوه من شواهد ولوحات رخامية لا يحمل أي تفصيل على ذلك إنما كان يحمل النتائج فحسب، ولا يمكن بأي حال أن ننكر نتيجة مفادها أن اليونان والمصريين قد أخذوا الكثير من معين هاته الحضارة العريقة، ولا عجب من ذلك فقد

طبَّقُوا حتى مبرهنة فيتاغورس في حساباتهم لكن دون برهنتها أو الإستدلال عليها، بالفعل إن ما يمكن أخذه عليهم عدم تمكنهم من هذا الإنتقال المنهجي والموضوعي، منهجي من حيث انتقالهم من الحساب إلى الإستدلال المجرد على العلاقات والصيغ والمبرهنات الرياضية، وموضوعي من حيث أن موضوعاتهم الرياضية لم ترق لمستوى التجريد أو التنظير، فقد ارتبطت بشكل مباشر بالموضوعات الطبيعية، كما أن استخدامهم للنظام الستيني في ترقيمهم لم يساعدهم كثيرا على الوصول إلى نتائج أكثر تعقيدا في حساباتهم لاسيما المعادلات الجبرية، على الرغم من أن هذا النظام كان عمليا جدا في علومهم الفلكية وهذا عائق آخر يمكن أن نستشفه من عرضنا حال دون أن تتطور الرياضيات عندهم لأكثر على الرغم من ذكائهم الفذ كيف لا وهم أول من تعرف على الصفر واستخدمه في حساباته، وتمكنهم كما أسلفنا من العمليات الحسابية التي كانت في حقبتهم تبدو معقدة للغاية، وهو أن الرياضيات لم تستقل كعلم قائم بذاته له موضوعاته ومنهجية البحث والإستقصاء فيه، فالرياضيات خادمة للفلك من جهة من حيث أنهم اهتموا كثيرا بحركة النجوم والكواكب التي ساعدتهم على بناء تقويمهم الزمني الخاص بهم خاصة وتقسيمهم للساعة لستين دقيقة والدقيقة لستين ثانية، ومن جهة أخرى كانت الرياضيات خادمة للهندسة فقد تعلق الأمر بتشييد البنايات والمنازل والمعابد.

وبالجملة فإن الحساب كان صاحب الشأن الأكبر عند الرافديين، ولم يترك أي مجال لأي استدلال أو برهنة، فحتى المعادلات الجبرية أقاموا لها جداول من حيث أنهم أعادوا صياغتها على أشكال نموذجية تخضع في تقريب حلولها إلى جداول ضرب وحساب حـــرروها وحسبوها من قبـــل.

2.الرياضيات عند المصريين القُدامى: العدد المتسامي π

تعد الحضارة المصرية القديمة إحدى أبرز وأهم الحضارات الإنسانية على الإطلاق التي لا تزال شواهدها بارزة للعيان، وما معجزة تشييد الأهرامات ودقة نظام الري وتسيير مياه النيل إلا دليل على براعتهم في مجال الرياضيات، حيث تمكن المصريون القدامى من حل بعض المعادلات من الدرجة الثانية، ومساحو الأراضي كانوا على خبرة بحساب مساحة المثلثات والمربعات والدوائر إضافة لكون اكتشاف العدد المتسامي π يرجع إليهم[3]، وهناك العديد من الأسباب التي جعلت المصريين القدماء بحاجة لتعلم الرياضيات، كان أحدهما يتعلق بالزراعة والفصول، لأن المزارعين المصريين اعتمدوا على الفيضان المنتظم للنيل كان من المهم معرفة متى سيأتي الفيضان حتى يتمكن المزارعون من الاستعداد لهذا السبب، وعلم المصريون القدماء أنفسهم علم الفلك، واستخدم الكهنة المصريون هذه الحسابات لإنشاء التقويم المصري.

ومن ضمن الأسباب الأخرى، التي جعلت دراسة الرياضيات مهمة لمصر وللحضارات القديمة بشكل عام هي بناء المجتمع، لأن الحكومة المصرية القديمة، احتاجت أن تتبع الضرائب والتجارة واعتمدت على فئة من الكتبة المحترفين، هؤلاء الكتبة تعلم القراءة والكتابة وكان عليهم أيضًا تعلم الرياضيات.

لما كان النظام الستيني هو المعتمد في حسابات الرافدين كان النظام العشري هو المستخدم عند المصريين القُدامى غير أن الصفر لم يكن معروفا عندهم فلم يستخدموه وكانت كل قوة (أس) عشرة تُمثَّل برمز أو علامة هيروغليفية، أما الفاصلة فقد مثلوها بكسر واحدي (fraction unitaire) أي بكسر بسطه مُساو للواحد $(\frac{1}{a})$، ويعود أول معلم مكون من

[3] لأكثر تفصيل حول العدد المثالي π نحيل القارئ على الكتاب القيم: (Delahaye, Le fascinant nombre Pi, 1997)

محوي الفواصل والتراتيب إلى العام 2750 ق. م.، اعتمد المصريون النظام العشري، كل مرتبة في العدد (وحدات، عشرات، مئات، ...) لها رمز معين ويُكرر بحسب عدد المرات.

أما عن وحدات القياس، فقد اهتم بها المصريون كثيرا حيث استخدموا نظامين رئيسين الأول هو نظام القسمة الرقمية وكان ذلك على أساس ما يُصطلح عليه بالذراع الملكي (coudée royale) والتي يصل طولها إلى حوالي نصف متر بقياسنا الحالي، وهي الوحيدة المستخدمة في الهندسة، وأيضا لقياس الإرتفاعات، أما النظام الثاني، فقد أُعتمد فيه الذراع المقدس (coudée sacrée) حيث يمثل أربعة أجزاء من السبعة من الذراع الملكي $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{4}{7}\right)$، ثم بعد الإصلاحات مثل $\frac{2}{3}$ من الذراع الملكي.

أما بالنسبة للمساحات فقد استخدموا وحدة القياس الأرور (Aroure) أي الجذر التربيعي لـ 100 ذراع والتي تمثل 2756,25 مترا مربعا، أما حساب الأحجام فقد استخدموا وحدة اصطلحوا عليها باسم الهيكات (heqat) والتي تكافئ كافئ 4,805 لترات، ولقياس الأوزان استخدموا وحدة تُسمى الدبين (deben) وتزن 13,6 غرام.

كما أن بناء الأهرام أكسب المصريين القدماء مهارات في حساب المساحات والحجوم وخصوصا حجم الهرم الكامل والناقص وتحديد كمية الاحجار اللازمة لبناء الهرم، كما عرفوا كذلك بقاعدة المثلث 3 و4 و5 والتي تعطي مثلثا قائما مضبوطا قبل فيثاغورث بفترة طويلة جدًا، ولذلك استخدم البناؤون المصريون حبالا مربوطة عند 3 و4 و5 وحدات لقياس الزوايا القائمة الدقيقة للقيام بأعمالهم على الصخور (حتى أن المثلث القائم ذو الأضلاع 3 و4 و5 يطلق عليه المثلث المصري). (Hodgkin, 2005, p. 65)

واستطاع المصريون القدماء اجراء العمليات الحسابية الأساسية كالجمع والطرح والضرب والقسمة. وإن كانوا قد أجروا ذلك بطريقة تختلف كلية عن الطريقة التي نجري بها حساباتنا اليوم. فلجمع عددين كرر المصريون القدماء الرموز المشتركة بين هذين العددين بحسب عدد مرات ظهورهما في العددين معا. وإذا زاد عدد التكرارات عن عشرة فيتم استبدال

10 من تلك الرموز برمز ذي قيمة أعلى، أما بالنسبة لعملية الضرب فقد أجروها بطريقة معقدة مقارنة بطريقتنا اليوم، فلضرب عددين في بعضهما قام قدماء المصريين بمضاعفة أحد العددين باستمرار مع تنصيف العدد الاخر باستمرار. وإذا كان النصف يحتوي على كسر فيتم جبر العدد الى الأسفل. وهكذا حتى نصل الى العدد واحد، ثم نقوم باستبعاد الأسطر التي تحتوي على أنصاف زوجية ونبقي فقط الأسطر التي تحتوي على أنصاف فردية ثم نقوم بجمع الارقام التي تمت مضاعفتها فنحصل في النهاية على النتيجة المطلوبة، ولنأخذ مثالا على ذلك: لنحسب حاصل الضرب: 17x14

14	17	
28	8	تُستبعد
56	4	تُستبعد
112	2	تُستبعد
224	1	

فتكون النتيجة: 14+224=238.

واهتم المصريون القدماء بدراسة الفلك ودرسوا بعناية الشمس فهي كانت أهم معبوداتهم، وأقاموا المعابد خصيصا لها، كما أنهم استخدموا الشمس في صناعة تقويم شمسي هو أساس تقويمنا الذي نستخدمه اليوم، فقد كان المصريون القدماء مثلهم مثل سائر شعوب المنطقة يستخدمون تقويما قمريا، ولكن التقويم القمري لم يكن يناسب احتياجاتهم تماما، فالشهر القمري يتكون من 29 أو 30 يوم، ولذلك فإن السنة القمرية المكونة من 12 شهر هي أقصر من مثيلتها الشمسية ب 11 يوم، وينتج عن ذلك أن الشهور القمرية تتحرك عبر الفصول المختلفة على مر السنيين، فيأتي الشهر مرة في الصيف ثم يأتي نفس الشهر بعد مرور عدد من السنوات في الشتاء، وكان المصريون القدماء شعبا زراعيا ولذلك فهُم احتاجوا الى مواقيت ثابتة لكي يحددوا عن طريقها مواعيد زرعهم وحصدهم وحرثهم، وتوصل

المصريون القدماء إلى أن السنة الشمسية تتكون من 365 يوم، فقسموا السنة إلى 12 شهر كل شهر يحتوي على 30 يوم تماما، ثم في نهاية السنة أضافوا 5 ايام مقدسة لإقامة الأعياد والاحتفالات.

ولم يعرف المصريون القدماء أن السنة الشمسية هي أكثر من 365 يوما وتحديدا فهي 365 يوم و6 ساعات تقريبا، لذلك لم يعرف المصريون القدماء السنة الكبيسة التي كان أول من أدخلها يوليوس قيصر ولذلك يطلق على هذا التقويم بالتقويم اليولياني، وكان الشهر عند المصريين القدماء مقسما إلى 3 أسابيع، كل أسبوع مكون من 10 أيام وهذا ما توافق تماما مع النظام العشري الذي استخدموه.

اهتمام المصريين القُدامى بالحساب كان له أسبابه الدينية والعملية، أما الأولى فقد اعتقد المصريون القدماء أن الإله توت (Thoth) هو الذي علمهم الحساب والكتابة، وتجد صوره على الأخص في كتاب الموتى، حيث يُصوروه واقفا عند الميزان يوم الحساب في العالم الآخر بالقلم ولوح الكتابة في يديه، يدون أعمال الموتى، ويقدم الحساب إلى أوزوريس، أما الثانية فتعلقت بأسباب زراعية وفلكية كما أسلفنا إضافة إلى أسباب سياسية وإجتماعية فعندما أصبح المجتمع المصري أكثر تعقيدًا، كانت هناك حاجة لتسجيل الإيصالات الضريبية والمعاملات التجارية وحساب كمية المواد اللازمة لبناء المعبد والمهام الأخرى التي تتطلب حسابات رياضية، ونتيجة لذلك أصبحت الرموز الهيروغليفية تمثل كميات رقمية أيضًا.

وبالمحصلة فإن اهتام المصريين القُدامى بالرياضيات وبالحساب على وجه التخصيص كان لأسباب براجماتية عملية بحتة منها كما أسلفنا الدينية ومنها الزراعية خاصة ومنها فلكية تقويمية وهذا انعكس سلبا على تطور الرياضيات ولم يخلق منها علما قائما بذاته ولم يخرج بلغة توماس كوهن من برادايم رياضيات الرافدين، وبعبارة أخرى ارتبطت الرياضيات بالنشاطات اليومية أي أنها كانت مادية ملموسة متصلة بالواقع ولا تحفز على

اكتشاف كيانات أو موضوعات أو بُنى رياضية أُخرى لأن الواقع محدود ولا يطلق العنان للتفكير والتنظير والتجريد، إذ لا يبدو أن المصريين القدماء قد فكروا بشكل مجرد في الأرقام، وعلى سبيل المثال، إذا ذكرت رقم 7 في الحياة المصرية القديمة، فربما عمليه التفكير في مجموعة مكونة من 7 أشياء بدلاً من مفـــهوم الرقم 7، وبالتالي بقيت تلكم المسافة القصيرة إن لم نقل المطابقة بين الكائنات الرياضية وكائنات الطبيعة.

3.رياضيات اليونان: من الحساب إلى الاستدلال

لا تُعد الحضارة اليونانية لحظة فارقة في تاريخ الفكر أو الفلسفة فحسب إنما في تاريخ الرياضيات أيضا، وليس كما يذهب أغلبية الناس أو حتى متخصصو الحضارة اليونانية إلى مبرهنة فيتاغورس التي تُعد بحق إحدى أعظم المعادلات في تاريخ الإنسانية ويعتبرها العلماء ومؤرخو الأفكار أوَّلها، إنما في المنعطف الذي شهدته الرياضيات في موضوعها ومنهجها.

وقبل الحديث عن المُنجز الرياضي لليونان، من الضرورة المنهجية أن نستهل هذا العنصر بعرض إرهاصات ما قبل اليونان ونقصد بذلك الفترة ما قبل السقراطية حيث يُعتبر الفلاسفة والمفكرون ما قبل السقراطيين المؤسسين الرئيسيين للعديد من أوجه وملامح الفلسفة التصورية التي ورثها سقراط عنهم، والتي خرجت عن أطر التفكير الكلاسيكية الموروثة، بدءا من شبه الجزيرة الأيونية وصولا إلى اليونان القديمة، لاسيما فيما تعلق بوضع الأسس النظرية للإنتقال وبحسب تعبير ماركوز من الميثوس إلى اللوجوس أو من الخرافة والأساطير إلى العقل (raison)، فبدل الأساطير التي كانت تشرح و(تبرر) كيفية نشوء الكون وأصله وفصله وقصص بداية الخليقة، أو الظواهر الطبيعية، ظهرت نظريات مُصاغة من طرف مفكرين، وقد خلصوا إلى أن براديم السلطة (paradigme de l'autorité) أو الخطاب المعرفي للتقليد الشعري عُرف بحجج وبراهين قُدمت مع اتساق منطقي، فالأسئلة التي لطالما وُضعت والمتعلقة أساسا بتكوين الكون (cosmogonie) اضطلعت الكوسمولوجيا بمهمة

الإجابة على أصل الكون وكيفية نظامه وعمله، واضطلعت الإبيستمولوجيا بمهمة الإجابة على إمكانيات وحدود الفكر الإنساني، تفكرهم واشتغالهم العلمي كشف عن جانب كبير مما نسميه بالفلسفة الطبيعية فجاءت كلمة astronomie وتعني أصل وإعادة إنتاج الحياة كما جاءت كلمة phusis وتعني الطبيعة (Cosmology, 2021).

ومن خلال هذا العمل الكبير خطَا الإنسان أولى خطوات طريق عقلنة rationalité الطبيعة واكتشاف قوانينها ونواميسها، وبالتالي تُعد هذه المرحلة نقلة نوعية أو هي طفرة بلغة علم الأحياء انتقل فيها الإنسان من ميثوس القصص الخرافية (التبريري) وميتولوجيا أشعار هوميروس وهيزيود إلى لوجوس أو عقل علمي (تفسيري)...، يبدو إذن بأن عصر العقل قد بزغ.

وتُعد لحظة فيتاغورس ومدرسته بالفعل كما تُسمى بـ "المعجزة اليونانية" حيث شكلت منعطفا في تاريخ الرياضيات من حيث طبيعتها ومنهجها كما قلنا، فأسس فيتاغورس مدرسته باعتبارها مدرسة علمية ودينية، فقد تبنى مريدوه وأتباع هذه المدرسة نمط حياة أخلاقي وغذائي خاص بهم، كما اعتنوا بالبحوث العلمية خاصة في مجال أصل نشأة الكون أو كما يسمونه بالكوسموس (cosmos)،[4] كما اكتشف الفيتاغوريون علم الأرقام وقواعد علم الأصوات ونظرية الموسيقى، كما برعوا أيضا في عناصر الهندسة وحركة النجوم في الفضاء، إضافة إلى تطويرهم لنظريتهم في الحياة والموت وفق ما نصطلح عليه بالنحلة الأورفية فيما تعلق بنظرية تناسخ الأرواح (transmigration des âmes)، حتى أن سقراط نفسه كان يقول: "إني لأسمع صوت صديقي في شهيق هذا الحمار".

إن النظرية الفيتاغورية للعدد هي قبل كل شيء رمزية عددية، بمعنى أن الرقم ليس مجرد قيمة عددية فحسب، تُجرى عليها الحسابات، وبحكم أن الفيتاغورية هي في الأصل نحلة

---

[4] تعنى كلمة كوسموس في اللسان الإغريقي النظام، فقد اعتقد اليونان أن الكون منظم أشد تنظيم، والنجوم والكواكب تسبح في فلكه بنظام معين وقوانين محددة معينة مسبقا أنظر (Cosmology, 2021).

(دينية) فإنهم أعطوا لكل رقم دلالة ثيولوجية فمثلا الرقم واحد يمثل الألوهية وهو والواحد الحكيم الوحيد زيوس، الرقم أثنان يمثل المرأة والرقم ثلاثة الرجل أما الرقم أربعة فيمثل الأم والرقم عشرة يمثل الأُخُوَّة الفيتاغورية، فهم يعتبرون أن الرقم/الصورة هو أصل كل شيء إنه المبدأ الأول (الأرشي) للمعرفة ومبدأ التجريد الرياضي، لأن الرقم لا يقتصر فقط على مجموعة العمليات الحسابية كالجمع والطرح والقسمة، وتجدر الإشارة إلى أن المجموعات الحسابية المعروفة عند الفيتاغوريين تُبنى عن طريق الترابط، وذلك من خلال تمثيل الأعداد بنقاط انطلاقا من صورة بسيطة مثل المثلث متكون من ثلاث نقاط، يمكننا تكبير المجموعة وزيادة عناصرها بالمحافظة على الشكل لكن وبزيادة عدد أجزائها للوصول مثلا إلى مثلث متكون من ستة نقاط، إن هذه العملية مهمة جدا بالنسبة للأقدمين وتُعتبر اكتشافا هاما، لأنها تتعلق أيضا بالحجوم كحجوم الأهرامات ذات القاعدة مثلثة الشكل والمربعات والأسطوانات وغيرها من الأشكال الهندسية، إن هذه المقارنة بين المتتالية التي نتحصل عليها أدت إلى اكتشاف العلاقات البنيوية والعامة بين مجموعات خاصة بالأرقام، حيث شكلت هذه القوانين الطبيعية النواة الصلبة لتصور الفيتاغوريين للرياضيات حيث يمثل العدد الطبيعة بأكملها.

إن هذه المقولة الخاصة بالعدد جعلت منه غاية في حد ذاته لتعطيه القوة التفسيرية والتأويلية للعالم، وكما سبق وقلنا فإن المدرسة الفيتاغورية قد تصورت بناء العالم على أساس التناغم الموجود بين الأعداد وكذلك الأصوات فلكل صوت أو نوتة موسيقية رقم يمثلها وهو ما نصطلح عليه اليوم بالسولفاج وكلما كان الإيقاع سليما كان التناغم سليما أيضا، إن هذه الفكرة كان لها الشأن الكبير في معرفة النغم والإيقاع وبنية اللغة الموسيقية.

"أصول" إقليدس:

يتكون كتاب الأصول أو العناصر أو الأستقسات من 13 جزءا، كتبها نحو العام 300 قبل الميلاد، حيث يحتوي مجموعة من التعريفات، المسلمات، المبرهنات، الإستدلالات أو البراهين، متعلقة بالهندسة الإقليدية أو الهندسة المستوية، وأيضا بنظرية الأعداد.

كما يعتبر كتاب العناصر أو الأصول أقدم مؤلف معروف يتناول الأكسيوماتيك ونسق الهندسة ويُعد ذا تأثير كبير على تطور المنطق والعلوم الغربية والأساسية، ويعود السبب على الأرجح لكونه أكثر الكتب طباعة (البندقية 1842) حيث فاق عدد نسخه الألف المطبوعة آنذاك نسخ الإنجيل المقدس، كما أتخذ لقرون مرجعا مهما في جميع الجامعات الأوربية. (Davignon, 2020)

اعتمد اقليدس في تأسيس أعماله على التعريفات، المصادرات، المفاهيم المألوفة وتُسمى مسلمات وقضايا ومسائل محلولة بلغ عددها 470 مسألة في جميع الأجزاء الثلاثة عشر، وكمثال الكتاب الأول يحتوي خمس تعريفات (النقطة، الخط، المساحة، ...) وخمس مصادرات وخمس مسلمات.

لا يزال الأصول من أرقى وأبدع الأعمال المؤثرة في علوم التاريخ البشري ويعتبر حجر الزاوية في تطبيق المنطق على علم الرياضيات. فقد أثبت تأثيره الكبير في العديد من مجالات العلوم الأخرى غير الرياضيات مثل القانون والفلسفة حيث تأثر به كثير من العلماء المعروفين منهم ابن الهيثم، وعمر الخيّام، ونصير الدين الطوسي، نيكولاس كوبرنيكوس، يوهانس كيبلر، غاليليو غاليلي، وإسحاق نيوتن وطبقوا معرفتهم باستخدامه في أعمالهم. كما حاول علماء في الرياضيات والفلاسفة مثل توماس هوبز وباروخ سبينوزا وألفريد نورث وايتهيد وبرتراند راسل إنشاء "أصول" خاصة بهم في تخصصاتهم من خلال تبني الهيكل الاستنتاجي البديهي في كتب إقليدس، ويُعد عمل الرياضي دافيد هلبرت أول أكسمة لهندسة إقليدس في كتابه "أصول الهندسة".

ويتكون كتاب "الأصول" مـــن: (Davignon, 2020)

البديهيات:

1. الأشياء المساوية لغيرها متساوية فيما بينها
2. إذا اضفنا كميات متساوية إلى اخرى متساوية تكون النتيجة متساوية
3. إذا طرحنا كميات متساوية من اخرى متساوية تكون النتيجة متساوية
4. الأشياء المتطابقة متساوية
5. الكل أكبر من الجزء
6. يمكن رسم خط مستقيم من أي نقطة إلى أي نقطة أخرى.
7. يمكن مد الخط مستقيم بشكل مستمر في كلا الاتجاهين.
8. يمكن رسم دائرة بأي مركز معلوم ونصف قطر معلوم.
9. جميع الزوايا القائمة متساوية بعضها البعض.
10. إذا قطع خطان مستقيمان بخط مستقيم ثالث وكان مجموع الزاويتين الداخلتين من جهة التقاطع أصغر من مجموع الزاويتين القائمتين فإن المستقيمين يتقاطعان في نفس الجهة.

لم يكن إذن "الأصول" مجرد كتاب هندسة بل كان هذا الجسر الذي جعلنا ننتقل من كل ما هو تجريبي أو مادي أو ملموس إلى كل ما هو تجريدي، لقد رسم إقليدس هذه المسافة الفاصلة بين طبيعة الموضوعات الرياضية المادية وطبيعتها التجريدية التي أضحت واضحة متجلية للعيان، كما أن هذه المسافة قد ترتب عنها إنتقال آخر إنه الإنتقال المنهجي من الحساب إلى الإستدلال حيث أن طبيعة الموضوعات التجريبية قد فرضت منهجها الجديد في البحث والإستدلال، فلم تعد الرياضيات مجرد حسابات نقوم بها على قيم عددية فقط إنما أصبحت موضوعاتها كيانات رياضية متوالدة فيما بينها، واتضح مفهوم المجموعة ومفهوم البنية الرياضية، وعليه فإن الثورة الكبيرة التي عرفتها الرياضيات خلال القرن 5 ق. م. تمثلت بالأساس في هذه المسافة بين الموضوعات الرياضية وموضوعات الطبيعة

الملموسة، حتى وإن كانت الموضوعات الرياضية بُنيت إنطلاقا من تجريد الموضوعات الملموسة، إن هذا التغيير في الموضوعات الرياضية، والتي أصبحت أشكالا هندسية وأعدادا دون أدنى ضرورة لربطها بالموضوعات الملموسة أحدث أيضا منعرجا هاما في الطريقة المستخدمة لحل المسائل الرياضية وهو ما مهد بالفعل لظهور الإستدلال الرياضي.

ولعل اثارة سؤال طبيعة ومنهج الرياضيات على يد إقليدس يشفع له بأن يكون أعظم رياضيي التاريخ، إلا أن هناك ما يمكن اعتباره أيضا مُنجزا حقيقيا رسم معالم الرياضيات في العهود القادمة، فعندما حاولوا حساب طول وتر المثلث المتساوي الساقين والذي طول كل ضلع من ساقيه مساو لـ 1 اصطدموا بالعدد الأصم $\sqrt{2}$،[5] فيما اعتبروه نكسة بالنسبة لرياضياتهم، كشفت العصور التي بعدهم أنها كانت نقطة التحول بالفعل، يرى دويك (2007) أن الهندسة أبانت عن أعداد لا يمكن الحصول عليها من خلال العمليات الحسابية المعتادة كالجمع والطرح والقسمة والضرب هذا من جهة، ومن جهة أخرى مهد هذا الإكتشاف إلى الرياضيين اللاحقين لبناء مجموعة من الأعـــــداد الجديدة هي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4.رياضيات الحضارة الإسلامية: تأسيس علم الجبر

شهدت رياضيات العصر الذهبي للحضارة الإسلامية تطورا هائلا فيما تعلق بالمسائل الحسابية وعلم الفلك أو ما أسموه بعلم الهيئة، فيرجع الفضل للخوارزمي في ابتكار رموز الأرقام التي نستخدمها في وقتنا الراهن مستعينا بمفهوم الزاوية، كما عرفت الرياضيات عند المسلمين تقدما كبيرا على يد العلماء والرياضيين، ولعل الغاية من الرياضيات قد ساهمت بشكل كبير في الاهتمام بالحساب لاسيما فيما تعلق بحساب المواريث ومقدار الزكاة ومساحة الأراضي وكذلك الأشكال الهندسية التي اهتم بها المسلمون كثيرا إنشاء قصورهم وصوامع مساجدهم، ولا تزال شواهد ذلك موجودة لحد الساعة، أما علم الهيئة أو علم الفلك فقد أولى

---

[5] برهن إقليدس في كتابه العاشر للأصول على أصمية الأعداد من بينها $\sqrt{2}$

له فلكيو ورياضيو الإسلام عناية بالغة خاصة لتحديد مواقيت الصلاة بدقة والأشهر الحرم والأعياد الدينية، وقد شيد الخليفة العباسي المأمون ابن هارون الرشيد بيت الحكمة فكانت منارة علمية وحاضرة الدنيا آنذاك، فاستقطب إليها كل الفلاسفة والعلماء والرياضيين والمترجمين من جميع بقاع الأرض، الذين عكفوا على نقل وترجمة ما تركه اليونان والفرس والهنود والمصريون من كتب وعلوم إلى اللغة العربية من اليونانية والفارسية والسنسكريتية، فامتلأ بيت الحكة بمؤلفات قيمة دأب على قراءتها وتهذيبها العلماء المسلمون فاعتمدوا عليها واجتهدوا في تطوير سائر العلوم فبنوا بذلك جسر عبور إلى اللاتينية فيما بعد التي حملت نواة الحضارة الغربية الحالية.

اعتمد رياضيو الإسلام نظام ترقيم إسلامي أساسه الأرقام {1,2,3,4,5,6,7,8,9} وهو النظام العشري كما كان عند المصريين واليونان فمثلا الرقم 4573 ما هو إلا: 3+70+500+4000، وفي نظام التعداد هذا لا يوجد غير ثمانية أنواع من الكسور: $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$ أما الكسور الأُخرى فنتحصل عليها من خلال ضرب أو جمع الكسور السابقة، أما بالنسبة للكسور التي لا تحوي مقاماتها على إحدى الأرقام السابقة فتُسمى الكسور غير القابلة للضبط بمعنى أن قيمتها تقريبية.

بالنسبة للعمليات الحسابية نجد نظام الحساب الذهني عند المسلمين الذي ورثوه عن البيزنطيين والذي يُستخدم كثيرا في المعاملات التجارية حيث تُستعمل فيه أصابع اليد لتخزين الحسابات أو القيم المؤقتة، ويستخدم أيضا في حساب ما يُصطلح عليه بحساب العقود، فكانت بالتالي عمليات الجمع والطرح بسيطة لكنها معقدة بالنسبة لعملية الضرب.

ولقد ابتكر عمر الخيام طريقة لحل المعادلات من الدرجة الثالثة، أما الخوارزمي فقد أسس علم الجبر (Algebra) وقد انتقل اسمه للاتينية وجميع لغاتها باسم Algorithm، ففي كتابه "الجبر والمقابلة" شرح فيه بالتفصيل مفاهيم وطرائق حسابية أساسية كالجذر التربيعي والمربع وحساب المساحات، وتُعد المساهمة الأبرز للخوارزمي في كونه من جهة حل

معادلات في شكلها العام أي في شكلها الأنموذجي بدل شكلها الخاص عند اليونان ومن جهة أخرى قدم طرق الحل هنـــــدسيا ليمهد بذلك لطرائق إستدلال جـديدة. (Hodgkin, 2005, pp. 111-112)

وقد عرض في كتاب "المختصر في حساب الجبر والمقابلة" أول حل منهجي للمعادلات الخطية والمعادلات التربيعية مستعملا في ذلك الطريقة المعروفة باسم إكمال المربع، ويعتبر مؤسس علم الجبر، (اللقب الذي يتقاسمه مع ديوفانتوس) في القرن الثاني عشر، ولتفصيل ذلك نذكر ما ذكره الفيلسوف والرياضي ومؤرخ العلوم الإسلامية رشدي راشد في مقدمة كتابه "تأسيس علم الجبر عند الخوارزمي": إن الكتاب عمل تأسيسي فلقد أجاز الجبر ما لم يكن بالإمكان تصوره من قبل، وهو توسع تطبيق العلوم الرياضية، بعضها على البعض الآخر، مما أدى إلى فصول علمية جديدة، نقصد هنا، تطبيق الحساب على الجبر، والجبر على الهندسة، والهندسة على الجبر، والجبر على علم المثلثات، ... فبفضل هذا التطبيق، ودون تأخير، ظهرت الهندسة الجبرية الإبتدائية، وبدأ جبر كثيرات الحدود، والتحليل التوافقي، ومن بين نتائج هذا التطبيق ما شهدته فلسفة الرياضيات من تحول كبير، أما لماذا أجاز الجبر مثل هذا التطبيق فلأنه من حيث تكوينه علم يزاوج بين الهندسة والحساب، مطبقا أحدهما على الآخر، أي بين أسلوبين أحدهما ألغورتمي (حسابي) والآخر برهاني استدلالي (هندسي)". (راشد، 2010، صفحة 16)

أدخل الخوارزمي في بداية كتابه ما نصطلح عليه اليوم بالحدود الأولية لهذا العلم، "الجذر" أو "الشيء" (وهو ما يُكتب في أيامنا بـ x إشارة إلى المجهول أو المتغير)، "المال" وهو x^2، العدد المفرد، والأعداد المفردة بالنسبة إليه هي مقادير منطقة موجبة تماما، يمكن تمثيلها باصطلاحات عصرية بـ: $\boldsymbol{a, b, c, \ldots \in Q_{+}^{*}}$، وأدخل كلمتي "الجبر" و"المقابلة" للدلالة على عمليتين جبريتين، والجبر هو العملية التي تتلخص بإزالة أي حد سالب من أحد طرفي المعادلة عند وجوده فيه، عن طريق إضافة الحد الموجب المقابل إلى طرفي

المعادلة، ولنأخذ المثال: $2x^2 + 100 - 20x = 58$ تتحول بواسطة الجبر إلى: $2x^2 + 100 = 58 + 20x$ ثم يقسم طرفيها على العدد 2 لتُصبح: $x^2 + 50 = 29 + 10x$، ثم يردها الخوارزمي بواسطة "المقابلة" إلى: $x^2 + (50 - 29) = 10x$ أي إلـــى: $x^2 + 21 = 10x$ والتي يجد حلولها إنطلاقا من معادلات ست وضعها بوصفها الأشكال قانونية أو النموذجية وهي كالآتي: (راشد، 2010، صفحة 18)

$x^2 = \frac{b}{a}x$	$x^2 = \frac{c}{a}$	$x = \frac{c}{a}$
$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$	$x^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}x$	$x^2 = \frac{c}{a} + \frac{b}{a}x$

أعلن عن الطريقة الحسابية لإيجاد الجذور (أي "خوارزمية" الحل) وهي الطريقة المستخدمة إلى الآن بحساب المميز Δ، $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - c}$ مع إهمال الجور السالبة. وكان هدف الجبر عند الخوارزمي هو: الحلول الجذرية (أي الجذور) للمعادلات كثيرات الحدود وحسابات كثيرات الحدود.

لا تكمن أهمية الخوارزمي في تأسيسه لعلم الجبر فحسب، فقد رجع لمؤلف إقليدس الأصول حيث قام ببرهنة عدد معتبر من المسائل الهندسية بطرق جبرية، كما قدم العديد من الطرائق والأدوات الحسابية لحل المعادلات كثيرات الحدود مع العلم أنه رفض الجذور السالبة على اعتبار أن الأعداد العقدية أو المركبة لم تُكتشف بعد، هذا وما يميز المنهج الخوارزمي أنه أرسى معالم ما سُميت باسمه "الخوارزمية" والتي تتمثل في مجموعة من الخطوات المرتبة والمتسلسلة تسلسلا منطقيا لحل مسألة رياضية أو منطقية ما، مما أتاح له أن يزاوج بين الطريقة الاستدلالية في الهندسة والطريقة الحسابية في الجبر، وتُعتبر هذه الطريقة قفزة نوعية فقد برهن من خلال ذلك بأن لا تعارض بين الإستدلال والحساب ويمكن الاستعاضة عن أحدهما بالآخر.

5.رياضيات العصر الحديث: لايبنيتس ونيوتن والحساب اللانهائي

بعدما اكتشف رونيه ديكارت في القرن 16 م الهندسة التحليلية، حيث أصبحت الهندسة حسابات تحليلية تُجرى على قيم معلومة نسميها إحداثيات (coordonnées) في معلم نسميه المعلم الديكارتي، شهدت الرياضيات منعطفا هاما للغاية ساهم من خلال تطبيقاته في تطور كثير من العلوم لاسيما علم الفلك والفيزياء، إنه الحساب اللانهائي (infinitesimal calculus) وهو مجال رياضي تطبيقي يهتم بدراسة التوابع العددية من حيث الإستمرارية أو الإتصال، النهايات وتعني سلوك دراسة سلوك الدالة في جوار قيم ممنوعة أو عند قيم غاية في الكبر أو غاية في الصغر، إضافة إلى التفاضل والتكامل والسلاسل اللانهائية، على أنه كما ذكرنا آنفا فإن الحساب قد ظهر منذ الحضارات القديمة إلا أنه بدأ بالشكل الفعلي والدقيق وبصيغه المستعملة حاليا خلال القرن السابع عشر على يد السير إسحاق نيوتن وجوتفريد فيلهيلم لايبنيتس بصفة مستقلة كل بطريقته، حيث استمر حساب التفاضل والتكامل واستخداماتهما المتعددة حتى الحاضر.

أعطى جوهانس كيبلر في مؤلفه (steriometrica Doliorum) الذي نشره نحو 1615 بعض أساسيات التكامل حيث طور طريقة لحساب مساحة الشكل البيضوي، وهو الشكل الذي يُمثل به مسار الكواكب في مجموعتنا الشمسية، كما طور إسحاق نيوتن طريقته من خلال الأفكار التي استقاها بشكل مباشر من أعمال فيرما (Fermat) (Kline, 1972, p. 350)[6].

لقد اكتشف نيوتن التفاضل عند اشتغاله في علم الميكانيك حيث أراد حساب معادلة السرعة انطلاقا من معادلة المسافة، ويفترض نيوتن أن السرعة ما هي تغير متناهي الصغر

[6] تجدر الإشارة إلى أن فيرما كان على دراية قبل العام 1636 بالتكامل الذي نرمز له حاليا بالرمز: $\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$

في المسافة بالنسبة لتغير متناهي الصغر في الزمن فنتحصل على تابع آخر، ولنأخذ مثالا على ذلك:

لتكن معادلة الحركة الآتية: $D(t) = t^2 - 3t + 4$، فتكون عبارة السرعة اللحظية عند كل نقطة هي نسبة مسافة بين نقطة موضعها x ونقطة أخرى موضعها x+h مع h عدد حقيقي يؤول إلى الصفر بالنسبة للحظتين متقاربتين فنجد: $V(t) = \lim_{h\to 0} \frac{D(t+h)-D(t)}{h}$،

وفي مثالنا هذا سنتحصل على معادلة السرعة اللحظية الآتية: $V(t) = 2t - 3$

أما لايبنيتس فخلال إشتغاله على حساب مجامع السلاسل اللانهائية إهتدى إلى صيغة الحساب التكاملي الذي يُعتبر أول من أعطى له هذا الترميز والذي مازال ساري المفعول حد الساعة: $\int f(x)dx$.

وتوالت الإكتشافات من نظرية المجموعات للطوبولوجيا وانقسمت الرياضيات لرياضيات بحتة أو صرفه وأخرى تطبيقية تستخدمها العلوم على رأسها الفيزياء منذ أن بدأ جاليليو وتوريتشيلي محاولتهما صياغة القوانين الفيزيائية ضمن قوالب ومعادلات رياضية.

ونختم فصلنا بالقول إن تاريخ الرياضيات هو تاريخ مد وجزر بين طريقتين رئيسيتين هما طريقة الحساب وطريقة الإستدلال، وقد كان ذلك انعكاسا لطريقة التعامل مع الكيانات الرياضيات وطبيعتها، كما تأثر ذلك أيضا بالحاجة للرياضيات وميدان استعمالها، ويمكن القول بأن تاريخ الرياضيات لطالما انتصر للطريقة الإستدلالية التي اعتبرها منزهة عن أي خطأ أو زلل، غير أن تطور العلم والحاجة للحساب دفع الرياضيين إلى البحث عن طرائق وخوارزميات تساعدهم ليس فحسب على حل المسائل الحسابية المستعصية بوصفها قيما لظواهر طبيعية يتم قياسها، وإنما البحث في الحلول الأمثل التي توفر الوقت والجهد، كما أن الطريقة الإستدلالية كما سنرى في الفصول القادمة استعصى عليها الكثير من المسائل فبدل من أن تساهم في تطور التفكير الرياضي وقفت حجر عثرة أمامه، وكمثال على ذلك فطرق كثيرة تسمح لنا بحساب مساحة الحيز المحصور بين منحنى القطع المكافئ وحامل محور الفواصل، الأولى تتمثل بتقسيمه لأجزاء مثلثات متناهية الصغر ثم حساب مساحة كل جزء من هذه الأجزاء، ثم بعد ذلك حساب حاصل جمع المساحات الجزئية، وهذا ما اتبعه أرخميدس حيث برهن أن مساحة هذا الحيز مساوية لـ $\frac{4}{3}$، ومنذ حوالي القرن السابع عشر، أصبح من الممكن الحصول على ذات النتيجة لكن بحساب قيمة التكامل $\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$، ونلاحظ أن هذه الطريقة لا تستلزم استدلالا إنما فقط تطبيقا لخوارزمية.

بناء استدلال أو تطبيق خوارزمية هما النمطان اللذان سادا التفكير الرياضي منذ زمن بعيد، غير أن الطرق الخوارزمية عرفت إنطلاقة جديدة منذ ظهور أجهزة الحاسوب، التي تسمح لنا بتطبيق المنهج على مستوى آخر مختلف تماما عما عهدناه في الماضي.

كما يمكن الإشارة إلى أن كل طريقة عبرت عن مدى تطور المعرفة عامة والمستوى الرياضي، فقدر عبرت الطريقة عن ابيستيمية عقل كل مرحلة بدءا بالحضارات القديمة وصولا إلى يومنا هذا، ولما كان عصرنا هو بداية من جاليليو هو عصر تريبض

الطبيعة من خلال قوانين ونواميس تُصاغ فيها فأثبت الحساب جدارته لاسيما مع تطور أجهزة الحاسوب وتطور خوارزمياتها المعقدة وسنحاول خلال الفصول القادمة إيجاد نقاط التقاطع بين الرياضيات والحوسبة.

إن التواجد المشترك للطريقتين: الاستدلالية والخوارزمية لحل مختلف المسائل الرياضية، يؤدي بنا حتما إلى التساؤل حول علاقتهم وإلى أي حد يمكن تعويض بناء استدلال بتطبيق خوارزمية. (Dowek, 2010, p. 3)

الفصل الثاني

أزمة الأسس والتيارات الفلسفية الرياضية الكبرى

تمهيد:

لطالما دأبت فلسفة الرياضيات على أن تضطلع بمهمة محاولة الإجابة على الأسئلة الكبرى المتعلقة بأسس الرياضيات واستخداماتها، على سبيل: ما هي طبيعة الموضوعات الرياضية؟ لماذا تُعتبر الرياضيات ذات فاعلية لوصف الطبيعة؟ بأي معنى يمكن القول بأن الكيانات الرياضية موجودة موضوعيا ومستقلة تماما عن العقل/الذات؟ ولماذا وكيف يمكن اعتبار القضايا الرياضيات صادقة؟

وحول هذه الأسئلة ومثيلاتها، تأسست مجموعة من المدارس والتيارات الفكرية والفلسفية، كالواقعية الرياضية أو الأفلاطونية، الصورانية لمؤسسها هلبرت، الحدسانية لمؤسسها بروور، اللوجيستيكا لمؤسسيها راسل ووايتهد، لكل منها أفكارها، أسسها ومبررات وجودها وفلسفتها الخاصة حول الأسئلة السالفة الذكر.

والبحث في جينيالوجيا الرياضيات وأسسها يُعتبر السؤال المركزي الذي تدور حوله جميع هذه التساؤلات، والتساؤل حول الطبيعة المجردة للموضوعات الرياضية يشكل تحديا فلسفيا بامتياز، إذ ينهمم بدراسة المفاهيم الرياضية الأساسية كالمجموعات، الدوال، الأشكال الهندسية، العدد...، وكيف يمكن لهذه المفاهيم أن تشكل عددا أكبر من البُنيات المعقدة والمفاهيم، لاسيما البنيات القاعدية المهمة التي تكون لغة الرياضيات كالصيغ، النظريات والنماذج التي تعطي المعنى للصيغ وتأويلها ضمن نموذج معين، التعاريف، البراهين، الخوارزميات والتي نسميها أيضا المفاهيم الميتارياضية[1].

إن المتتبع لمسار تطور الرياضيات عبر العصور، لا ينفك يقف عند أزمة الأسس التي شهدتها الرياضيات خلال نهاية القرن التاسع عشر ومطلع القرن العشرين، خاصة

---

[1] الميتارياضيات: Metamathematics هي دراسة الرياضيات في حد ذاتها بطرق ومناهج رياضية، حيث تقدم لنا هذه الدراسة ما فوق النظريات بخصوص نظريات رياضية، يرجع المصطلح لدافيد هلبرت حينما وضع برنامجا لإنقاذ أسس الرياضيات ومثال ذلك حين القول: '2+2=4' هي قضية رياضية لكن القول: '2+2=4 صحيحة' نصنفها ضمن الميتارياضيات، ترتبط الميتارياضيات بشكل وثيق بالمنطق الرياضي وقد تتداخل مع الرياضيات. أنظر universalis.fr

والمفارقات التي واجهتها نظرية المجموعات لكانتور، حيث كادت تودي بمشروعية الرياضيات وجدواها فالرياضيات لغة العلم، وبها تُكتب وتُصاغ قوانين الطبيعة فإذا ما انهارت وتصدع أسها انهار العلم بكل بنيانه وحل محله الشك واللاأدرية وانتفى كل أمل في العلم ومعرفة الكون إذ يرى كافاييس (Cavaillès) أن مشكلة أسس الرياضيات لم تأخذ حقها من الاهتمام إلا مع أزمة نظرية المجموعات لاسيما مع اكتشاف المفارقات بين 1890 و1904. (Cavaillès, 1938, p. 5)، كما يرى كلين (1971) بأن مجالين خصبين لفلسفة الرياضيات وأسسها وصل ذروتهما مطلع العام 1900 هما نظرية المجموعات والصياغة الحسابية للتحليل[2] (arithmetization of analysis) (Kleene, 1971, p. 3).

ومحاولة الرياضيين الخروج من تلك الأزمة وإنقاذ أسس الرياضيات، تمخض عنه التيارات الفلسفية التي ذكرناها مما انعكس إيجابا على تطور الرياضيات واكتشاف ميادين معرفية جديدة مجاورة أو متحاقلة أو مجاوزة للتفكير الرياضي (الميتارياضيات)، كالمنطق ونظرية النماذج ونظرية البرهان ونظرية قابلية الحساب، نظرية التعقيد الحسابي، مجالات بحث جديدة كلها رسمت معالم النصف الثاني من القرن العشرين من خلال هذا التقاطع المنهجي والموضوعي بين الرياضيات والحوسبة، هذه الأخيرة التي شهدت تطورا هائلا وسريعا لاسيما مع اختراع آلة تورينج التي غيرت نظرتنا ليس فحسب للرياضيات من حيث موضوعاتها ومنهج البحث فيها إنما نظرتنا للعلم والكون بأسره، ولم تنته عند هذا الحد، بل تخطت حتى طبيعة الرياضيات والبراديغمات الكلاسيكية كالأكسوماتيك مثلا التي حدت من تطورها وفتحت آفاقا جديدة للرياضيات الحوسبية (computational mathematics) التي من خلالها تمكن العلماء والرياضيون من تأكيد أو دحض العديد من الحدسيات والمخمنات

---

[2] يقترح الأستاذ الفندي مصطلح تحسيب الرياضيات تعريبا لمصطلح arithmetisation des mathematiques لكن بالتشاور مع المترجم التونسي الأستاذ محي الدين القلاعي أخذت بمصطلح الصياغة الحسابية للرياضيات.

عجزت نظرية البرهان الكلاسيكية عن البرهنة عليها، وتمكنت الآلات من خلال خوارزميات معقدة من ذلك.

1.أزمـــــــــة الأســـــــــس:

لم تكن أزمة الأسس التي ضربت الصرح الرياضي في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين مجرد أزمة عابرة كالتي تصيب بنيان أي علم آخر، لما يكتسيه العلم الرياضي من أهمية و"قدسية" بين العلوم الأخرى، كيف لا وقد اعتبرها كانط أسمى العلوم، ومنذ نشأة "العلم" بالمفهوم الحديث أي بما تعنيه كلمة علم من ترييض للطبيعة "mathematisation de la nature" حيث صرح جاليليو بأن الطبيعة كتاب لغته الرياضيات، أصبح العلم يصيغ قوانينه في معادلات رياضية، ولهذا فكل ما يهدد يقين الرياضيات وصرحها هو بالأساس يهدد كل إمكانية ومشروعية للعلم، أي أنه يهدد كل إمكانية معرفة بالطبيعة وقوانينها، وما قاله رياضيان لامعان ينم عن عمق الأزمة التي شهدتها الرياضيات، إذ قال هيرمان فايل (Hermann weil) العام 1946: "نحن الآن أقل يقينا حول الأسس القصوى للمنطق والرياضيات، مثل كل شخص وكل موضوع، نحن الرياضيين والمناطقة لدينا أزمتنا وقد وقعنا فيها منذ ما يقارب الأربعين سنة، ظاهريا لا تبدو أنها تعيق عملنا اليومي ومع ذلك فأنا أعترف أنه كان لها تأثير عملي كبير على حياتي الرياضية، لقد وجهت اهتماماتي إلى حقل لطالما اعتبرته نسبيا "آمنا"، وكان من الثابت أنه استنزف حماسي وتصميمي اللذين لطالما انتهجتهما في عملي البحثي، من المحتمل أن يكون هناك رياضيون آخرون يشاركونني التجربة ذاتها، ويبالون كثيرا بمساعيهم العلمــية في سيـــاق رعايــة الإنـــسان ومعاناته ووجــوده الإبـــداعي في العالم" (Chaitin, 2007, p. 47)

ويقول من جهة أخرى فان نيومان (Von Newmann): "يعيش الناس الآن ثلاث أزمات خطيرة، اثنتان منهما في الفيزياء: تتعلق الأولى باكتشاف النسبية، والثانية بصعوبة المفاهيم المتعلقة باكتشاف نظرية الكم، أما الأزمة الثالثة فهي في الرياضيات، كانت بالفعل أزمة

مفاهيم خطيرة متعلقة بالتعامل مع صرامة وصحة الكيفية أو الطريقة التي يُنفذ بها البرهان الرياضي بكيفية صحيحة، وفي ضوء المفاهيم السابقة للصرامة المطلقة للرياضيات، من المدهش أن مثل هذا الوضع الذي تصير عليه الرياضيات والأكثر إثارة للدهشة أنه كان يمكن أن يحدث في هذه الأيام الأخيرة التي لا يُفترض أن تحدث فيه المعجزات، ومع ذلك فقد حــدث ذلك". (Chaitin, 2007, p. 48)

يبدو جليا من خلال هذين النصين العميقين خطورة ما آلت إليه الرياضيات في نهاية القرن التاسع عشر ومستهل القرن العشرين، وسنحاول رسم مسار تاريخي منتظم نحاول من خلاله تتبع مسار الأزمة منذ إنطلاقتها أي منذ لحظتها الأولى مع نظرية المجموعات لجورج كانتور مرورا بعرض وجيز لبعض المفارقات التي شكلت بالفعل الأرضية الخصبة والمنهجية لظهور التيارات الفكرية الرياضية وفلسفات الرياضيات الكُبرى.

تُعد نظرية المجموعات مبدأ وأساس كل بحث في الرياضيات إن تاريخيا أو ابيستمولوجيا أو تأسيسيا، لأنها كانت أول محاولة لتأسيس الرياضيات وبناء صرحها، فقد كانت كما عبر عنها هلبرت جنة للرياضيين، حاول من خلالها جورج كانتور (George Kantor) البحث عن اليقين والتماسك، قال كانتور العام 1883: "الرياضيات مستقلة بالكامل في تطورها، ومفاهيمها ليست مرتبطة إلا بضرورة كونها غير متناقضة ومتناســقة مع المفاهــيم المقدمـــة ســالــفا عن طريـــق تعريـــفات محـــــددة" (Bouleau, Girard, & Louveau, 1983, p. 18)، فقد فتحت نظرية المجموعات أفقا واسعا ورحبا للبحث في مجالات الرياضيات بل وتجاوزتها إلى مجالات أخرى كالمنطق ونظرية البرهان، ومع اكتشاف مفارقاتها، فتحت أفقا أوسع إن من جهة بناء نظرية مجموعات أخرى أكثر تماسكا كنظرية المجموعات لزرملو وفرانكل أو من جهة تجاوز إطارها النظري والبحث عن البديل المنهجي والأنطولوجي لذلك.

2.1.كانتور ونظرية المجموعات البسيـــطة[3]:

تُعتبر نظرية المجموعات إحدى فروع الرياضيات، أنشأها الرياضي الألماني جورج كانتور في نهاية القرن التاسع عشر، منذ نشر ورقته البحثية العام 1874 الموسومة بـ : "في خاصية مجموعة كل الأعداد الجبرية الحقيقية"[4]، حيث تُعطى نظرية المجموعات على اعتبار أنها المبدأ الأول والأساس لمفهوم المجموعة و"الإنتماء"، من خلالها تُبنى الموضوعات الرياضية المعهودة مثل: الدوال، العلاقات، الأعداد الطبيعية، الأعداد الصحيحة النسبية، الأعداد الناطقة، الأعداد الحقيقية، الأعداد المركبة أو العقدية، ... ولهذا تُعتبر نظرية المجموعات نظرية "أساسية" حيث اعتبرها هلبرت "جنة" خلقها كانتور للرياضيين.

كما أعطى كانتور من خلال ورقته البحثية هاته أول برهان صارم ودقيق على وجود أكثر من نوع من اللانهاية، فقبله أُعتبرت كل المجموعات ضمنيا متساوية العدد (Equinumerous) أي لها نفس عدد العناصر، كانتور برهن على أن مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد الصحيحة النسبية الموجبة أو ببساطة الأعداد الطبيعية ليس لهما نفس عدد العناصر، بعبارة أخرى فمجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد (uncountable)، حيث ارتكز برهان كانتور على حجة القطر (diagonal argument) التي قدمها العام 1891، حيث قدم حجة القطر كبرهان ثان على عدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد، أبسط من التي قدمها العام 1874، استخدم كانتور حجة القطر في الإطار الأكثر عمومية في مقاله لاسيما في مبرهنته حول عدد أصلي "cardinalité"[5] مجموعة أجزاء مجموعة.

---

[3] La théorie des ensembles naïve

[4] Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen

[5] يعتبر مفهوم "العدد الأصلي" من أهم المفاهيم الرئيسة في نظرية المجموعة، والتي نستخدم فيها مجموعة الأعداد الطبيعية كعداد لعناصر أي مجموعة، والتي من خلالها نحكم على مجموعة إن كانت قابلة للعد أم لا، بعبارة أخرى،=

مقال كانتور احتوى طريقة جديدة لإنشاء الأعداد المتسامية (transcendental numbers)، حيث أسس باستخدام طريقتين للإنشاء تُظهر طريقته الأولى كيف يمكن كتابة عدد جبري حقيقي[6] كسلسلة (متتالية): $a_1, a_2, a_3,...$ بعبارة أخرى الأعداد الحقيقية الجبرية أعداد قابلة للعد، بدأ كانتور إنشائه الثاني أي متسلسلة أو متتالية للأعداد الحقيقية، حيث تمكن من خلال استخدامه هذه المتتالية من إنشاء المجالات المتداخلة (nested intervals) وهي تقاطع يحتوي على أعداد حقيقية غير موجودة في المتتالية الأولى وعليه، من كل سلسلة للأعداد الحقيقية يمكن اعتمادها واستخدامها إنشاء عدد حقيقي غير موجود في السلسلة، وبالتالي فالأعداد الحقيقية لا يمكن كتابتها على هيئة سلسلة، ولهذه السبب فالأعداد الحقيقية غير قابلة للعد، ومن خلال تطبيق إنشائه على سلسلة الأعداد الحقيقية الجبرية، قدم كانتور الأعداد المتسامية حيث أشار إلى أن إنشاءاته تقدم استدلالا جديدا على مبرهنة Louvilles، القائلة بأن كل مجال يحتوي على عدد غير منته من الأعداد المتسامية، وفي مقاله الموالي، ذهب كانتور لأبعد من ذلك، فبرهن على أن مجموعة الأعداد المتسامية لها نفس القوة (set power)[7] مع مجموعة الأعداد الحقيقية.

=تكون مجموعة E قابلة للعد إذا وفقط إذا أمكن عد عناصرها أو وُجد تقابل (bijection) واحد لواحد بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية، وبتعبير رياضي نقول: تكون مجموعة ما قابلة للعد إذا وُجدت دالة اقتران بينها وبين مجموعة الأعداد الطبيعية أي بتعبير أكثر تقنية بافتراض بديهية الإختيار القابل للعد، تكون المجموعة قابلة للعد إذا لم يكن عدد عناصرها أكبر من الأعداد الطبيعية. أنظر (أبوحمدة، 1992)

[6] Algebraic real numbers العدد الجبري هول كل جذر root لكثير حدود بمتغير واحد وعوامل صحيحة نسبية، العدد الذهبي مثلا $(1 + \sqrt{5}) / 2$ هو عدد جبري لأنه جذر لكثر الحدود $x^2 - x - 1$ أي عندما يأخذ x تلك القيمة ينعدم كثير الحدود، كما أن العدد المركب 1+i هو عدد جبري لأنه جذر لـ x^4+1، وبالتالي يمكن أن نعتبر أن كل الأعداد الصحيحة والأعداد الناطقة هي أعداد جبرية، أما الأعداد الحقيقية والمركبة فمنها ما ليس بعدد جبري مثل π وe، التي تُسمى أعدادا متسامية. أنظر (أبوحمدة، 1992)

[7] قوة مجموعة X هي مجموعة أجزاء المجموعة بما فيها المجموعة الخالية والمجموعة نفسها مثال: $X = \{a, b, c\}$، مجموعة أجزائها هي: $\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. أنظر (أبوحمدة، 1992)

وكنتيجة لنظريته، اقترح كانتور تأسيسا للرياضيات حيث قدم مع نظرية المجموعات مفاهيم جديدة بشكل جذري وأصيل لاسيما فكرة وجود عدة أنماط من "اللانهاية" يمكن قياسها ومقارنتها بواسطة أعداد جديدة (العدد الأصلي، العدد الترتيبي)[8]، بسبب جدتها وقت ظهورها، أثارت نظرية المجموعات جدلا واسعا خاصة وأنها "صادرت" وجود مجموعات غير منتهية (لا نهائية) على نقيض بعض مبادئ الرياضيات البنائية أو الحدسانية، وللبرهان على عدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد استخدم زرملو ما يسميه حجة القطر.[9]

1.2.1.حجـــة القطر:

برهان قدمه كانتور العام 1874 لبيان أن مجموعة الاعداد الحقيقية غير قابلة للعد، افترض كانتور أولا عكس ذلك، أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية قابلة للعد ومن ثمة يجد تناقضا في النتيجة، وبذلك يجعل الإفتراض خاطئا، للقيام بذلك سوف يجد عددا حقيقيا لا يتم احتسابه، استخدم كانتور التدوين أو الكتابة العشرية حيث قرر أنه إذا تمكن من إثبات أن هناك عددا لا يمكن إنشاؤه فسيكون هذا كافيا، بين أن هناك عددا لا يمكن إنشاؤه ينحصر بين 0 و1.

كل عدد محصور بين 0 و1 يُمكن كتابته على شكل .0 أي صفر متبوع بفاصلة ومن ثم على يمينه الجزء العشري من العدد، تعامل كانتور مع الأعداد غير المحدودة والتي تعمل بهذا المبدأ لبيان عدد جديد لبنائه بحيث أن يكون هذا العدد غير متضمن في القائمة

---

[8] ننطلق من فكرة مؤداها أنه يمكن استخدام الأعداد الطبيعية لغايتين: وصف طول مجموعة أي عدد عناصرها، وهذا ما اصطلحنا عليه آنفا بالعدد الأصلي، ووصف ترتيب تموضع عناصرها في متتالية مرتبة وهذا ما نصطلح عليه بالعدد الترتيبي cardinal، في حالة المجموعة المنتهية يتعلق المفهومان السابقان بالصفة أو النعت للعدد الأصلي (صفر، واحد، إثنان،...) والعدد الترتيبي بـ (الصفري، الأول، الثاني، الثالث، ...)، غير أن مفهوم "العدد الأصلي" مرتبط بمجموعة غير مقيدة بأي بُنية خاصة، في حين أن العدد الترتيبي مرتبط بشكل كبير بما نسميه بخاصية الترتيب الجيد. ونقول إن مجموعة E مرتبة بشكل جيد إذا وفقط إذا كان من أجل كل عنصرين x وy من E إما أن يكون $x<y$ أو $y<x$ بعبارة أخرى كل عنصرين من E قابلين للمقارنة (comparable) أنظر (Krivine J.-L. , 1969)

[9] Diagonal argument

السابقة، أي بناء مجموعة اختيارية من الأعداد التي توضع بشكل عمودي تحت بعضها البعض بشرط أن لا تكون الخانة الثانية في العدد الثاني مطابقة للخانة الثانية في العدد الأول والخانة الثالثة في العدد الثالث لا تطابق الخانة الثالثة في العدد الثاني والخانة الرابعة في العدد الرابع لا تطابق الخانة الرابعة في العدد الثالث وهكذا ... من ناحية مجردة الحفاظ على هذا الشرط لا يؤثر على النتيجة فإعادة ترتيب الأعداد ليست مشكلة تؤثر على قيم الأعداد، كل ما في الأمر هو إعادة ترتيب السطور في التسلسل وبالتالي نحصل في الأخير على عدد لا ينتمي لأي مجموعة من المجموعات السابقة، وهذا العدد المأخوذ قطريا من الجدول بغض النظر عن التسلسل لن يكون موجودا في السلسلة الأصلية، وهذا ما يثبت أن كل سلسلة يمكن إنشاء عدد منها وفي ذات الوقت لا ينتمي لتلك المجموعة وهذا ما يثبت أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد.

وبطريقة أكثر تقنية انطلق كانتور من فكرة أنه للبرهان على أن مجموعة الأعداد الحقيقية R غير قابلة للعد يكفي البرهان على عدم قابلية العد لمجموعة جزئية منها ولتكن المجال $]0,1[$ من R أي يكفي أن ننشئ، من أجل كل جزء غير قابل للعد D من $]0,1[$ عنصرا من $]0,1[$ لا ينتمي إلى D. ليكن جزءا غير قابل لعد من $]0,1[$ مرقما بالمتتالية $r=(r_1,r_2,r_3,\ldots)$ كل حد من هذه المتتالية له كتابة عشرية بعدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة (غالبا ما تنتهي بأصفار في حالة العدد العشري): $r_i=0,r_{i1}r_{i2}r_{i3}\ldots r_{in}\ldots$

لننشئ عددا حقيقيا x من $]0,1[$ باعتبار الرقم ذي الرتبة n بعد الفاصلة لـ r_n، مثال:(wikipedia, 2022)

$r_1=0,\underline{\mathbf{0}}405440\ldots$

$r_2=0,1\underline{\mathbf{4}}23012\ldots$

$r_3=0,83\underline{\mathbf{1}}5036\ldots$

$r_4=0,322\underline{\mathbf{0}}436...$

$r_5=0,1407\underline{\mathbf{3}}16...$

$r_6=0,99278\underline{\mathbf{4}}8...$

$r_7=0,04051\underline{\mathbf{2}}0...$

لإنشاء العدد x نتخذ من الشرط الآتي قاعدة: إذا كان الرقم العشري ذو الرتبة n لـ r_n يختلف عن 4 إذن الرقم العشري لـ x ذو الرتبة n يأخذ الرقم 4 وإذا كان غير ذلك يأخذ الرقم 3 ليصبح في النهاية x على النحو: x=0,4344434، من الواضح أن العدد x ليس ضمن المتتالية السابقة $(r_1,r_2,r_3,...)$، وبالتالي المجموعة الجزئية D غير قابلة للعد مما يسمح لنا بالتعميم على عدم قابلية مجموعة الأعداد الحقيقية للعد.

2.2.1.بعض مفارقات نظرية المجموعات البسيطة:

أبانت نظرية المجموعة البسيطة أنها لم تكن تتمتع بالصلابة والمتانة اللازمتين لصورنة نظرية المجموعات، وتجلى ذلك من خلال ثلاث مفارقات رئيسة تنتمي في الحقيقة كلها لنمط "مفارقة مجموعة كل المجموعات"، أولها ظهرت عام 1890 وتُسمى بمفارقة كانتور، ثم بعدها العام 1897 وهي مفارقة بورالي–فورتي (Burali-Forti)، وأشهرها والأقرب فهما للعامة مفارقة راسل العام 1901.

مفارقة كانتور:

وتُسمى أيضا مفارقة اللانهائي، أو مفارقة "العدد الأصلي الأكبر" وهي مفارقة نظرية المجموعات البسيطة حيث اكتشف حجتها كانتور العام 1890 وقد ذكرها في رسالة بعثها العام 1897 إلى دافيد هلبرت، وذكرها راسل في كتابه "أسس الرياضيات" العام 1903، وتصرح هذه المفارقة بأن وجود "أكبر عدد أصلي" يؤدي إلى تناقض ففي نظرية المجموعات البسيطة والتي تعتبر أن كل خاصية يمكن لها أن تُعرف مجموعة، تؤدي النظرية إلى وجود

تناقض لأن "العدد الأصلي" لصنف كل المجموعات سيكون "أكبر الأعداد الأصلية" والذي يشكل تناقضا، وبالتالي فإن صنف الأعداد الأصلية لا يمكن أن يكون مجموعة وهذا ما برره راسل فيما بعد.

مفارقة بورالي فورتي:

ظهرت مفارقة بورالي فورتي العام 1897 وهي مفارقة خاصة بنظرية المجموعات البسيطة، من نمط "مجموعة كل المجموعات" خمس سنوات قبل ظهور مفارقة راسل، حيث تعتمد هذه المفارقة مفهوم "العدد الترتيبي"، وكما أسلفنا فإن العدد الترتيبي هو تعميم للأعداد الطبيعية حيث استخدمها للتعبير عن ترتيب عنصر في مجموعة ما، نعلم أن عددين ترتيبيين متمايزين a وb هما دائما قابلان للمقارنة بمعنى إما أن يكون $a<b$ أو $a>b$، ولنفترض وجود مجموعة كل الأعداد الترتيبية، فستكون هي أيضا عددا ترتيبيا لكن هذا "العدد الترتيبي" سيكون أكبر تماما من كل الأعداد الترتيبية لعناصرها أي من نفسها هي أيضا، وهذا ما يشكل مفارقة.

مفارقة راسل:

ومضمونها لو إفترضنا وجود مجموعة X تضم كل المجموعات التي لا تتضمن نفسها أي لا تشكل عنصرا من نفسها، وبالتالي فكل عنصر من المجموعة X معرف بـ 'خاصية مميزة' فهل هذه المجموعة نفسها محتواة في نفسها أم لا؟، إن الإجابة تقتضي خيارين لا ثالث لهما، فإما القول بأنها تنتمي لنفسها وهنا ناقضنا الخاصية المميزة بعدم انتماء المجموعة لنفسها، وإما القول بأنها لا تنتمي لنفسها فنكون قد وافقنا خاصيتها المميزة لكننا وبالتالي فإن المجموعة X تنتمي إلى نفسها وهنا المفارقة. (Kneebone, 1963, p. 112).

كما كشفت هذه المفارقات ضعف وعدم اتساق نظرية المجموعات البسيطة ‘naïve’ ومن نتائجها أن أسس بشكل مستقل كل من فرانكل وسكولم ما أُطلق عليه اسم 'مخطط البديهيات البديل' والذي عادة ما يُشار إليه بـ "ZF" وهو مخطط أكسيوماتي لأوليات زرملو وصحح مسارها ورمم قوتها وتماسكها، غير أن الأهم أن "ZF" قد أعادت بعث مشروع فريجه الخاص بمنطق المحمولات لتشكل فيما يُصطلح عليه فيما بعد بمنطق الدرجة الأولى.

3.1.أكسمة نظرية المجموعات: زرملو وفرانكل:

في بداية القرن العشرين، دفعت عوامل عديدة الرياضيين لتطوير أكسيوماتيك أو منظومة أوليات، خاص بنظرية المجموعات مثل اكتشاف المفارقات على غرار أشهرها مفارقة راسل، لكن بالأخص التساؤل حول "فرضية المتصل أو المستمر"، حيث اقتضت تعريفا دقيقا لمفهوم المجموعة، أدت هذه المقاربة الصورية إلى عدة ظهور عدة منظومات أو أنساق أكسيوماتية كانت أشهرها ZF Axioms لكن أيضا نظرية الأصناف لفان نيومان أو نظرية الأنماط لراسل.

نظرية المجموعات لزرملو وفرانكلن ونرمز لها إختصارا بـ: ZF هي أكسمة في صورة منطق الدرجة لنظرية المجموعات البسيطة مثلما طورها جورج كانتور في الربع الأخير من القرن التاسع عشر، صيغت أو وُضعت الأكسمة في بداية القرن العشرين من طرف عديد الرياضيين مثل إرنست زرملو (Ernst Zermelo) وأبراهام فرانكل (Abraham Fraenkel) وأيضا تورالف سكولم (Toralf Skolem).

وتُعتبر أيضا نظرية المجموعات هي عماد الرياضيات، حيث وضع لها علماء الرياضيات في بداية القرن العشرين العديد من المسلمات أشهرها مسلمة زرميلو فرانكل، وهي ثماني مسلمات.

مسلمات نظرية المجموعات:[10]

1.مسلمة المجموعة الخالية: Axiom of the empty set: المجموعة $\{\}$ أو $\emptyset$ لا تحوي أي عنصر.

$$\forall x \neg(x \in \emptyset)$$

2.مسلمة التمديد: Axiom of extensionality: تنص على أنه إذا كان لمجموعتين نفس العناصر، فإنهما متساويتان، أو بعبارة أخرى تُعرف المجموعة بعناصرها.

$$\forall x \forall y[\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y]$$

3.مسلمة التثاني: Axiom of pairing: كل عنصرين يشكلان مجموعة، وتُصاغ هذه المسلمة رمزيا على النحو التالي:

$$\forall x \forall y \exists z \forall t[t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y)]$$

4.مسلمة الإتحاد: Axiom of the union: إتحاد أيـــة مجموعة مجـــموعات هو مجموعة، ونصها الرمزي هـــو:

$$\forall A \exists B \forall x[\exists C(x \in C \wedge C \in A) \Leftrightarrow x \in B]$$

5.مسلمة مجموعة أجزاء المجموعة: Axiom of the power set: مجموعة أجزاء أي مجموعة موجودة، ونصها الرمزي:

$\exists A \exists B \forall C(C \subset A \Leftrightarrow C \in B)$ حيث $C \subset A$ هي صيغة مختصرة لِـ:

$$\forall x(x \in C \Rightarrow x \in A)$$

6.مسلمة الإنتظام: Axiom of regularity: والتي تُدعى أيضا مسلمة التأسيس (foundation axiom): أية مجموعة غير خالية تشمل مجموعة لا تتقاطع معها، ويُعبر عنها رمزيا كما يلي:

---

[10] أنظر (Krivine J.-L., 1969, pp. 12-13)

$\forall A[A \neq \phi \Rightarrow \exists B(B \in A \wedge A \cap B = \phi)]$ حيث $A \cap B = \phi$ هي كتابة رمزية مختصرة للصيغة: $\forall x(x \notin A \vee x \notin B)$

إن هذه المسلمات الست صحيحة وفق التأويل المعياري (standard interpretation) لنظرية المجموعات في عالم فان نيومان (Von Neumann universe)، لذلك فإنها متسقة أي لا تُحدث تناقضا في نظرية المجموعات وهذه نتيجة جيدة.

7.مسلمة المجموعات غير المنتهية أو أيضا مسلمة اللانهاية: Axiom of infinity: توجد مجموعة غير منتهية، ويُعبر عنها بالصيغة الرمزية التالية:

$$\forall x[\phi \in A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow \{x\} \in A)]$$

8.مسلمة التعويض: Axiom of replacement: أو أيضا مسلمة الحشد أو التجميع (Axiom of collection)، ويُنص عليها رمزيا على النحو التالي:

$$\forall x[x \in A \Rightarrow \exists y\mathcal{P}(x,y)] \Rightarrow \exists B\forall x\big[x \in A \Rightarrow \exists \mathrm{y}\big(y \in B \wedge \mathcal{P}(x,y)\big)\big]$$

حيث $\mathcal{P}$ علاقة رياضية بمتغيرين، ومعنى هذه الكتابة الرمزية هو أنه إذا كانت المجموعة A تحقق الشرط الوارد في بداية الإستلزام (التضمن)، فإنه توجد بالمقابل مجموعة B تحقق الشرط الثاني الوارد في نهاية الإستلزام.

4.1.مسلمة الإختيار:

صاغ زرملو ما يُسمى بمسلمة الإختيار لأول مارة العام 1904، تقول هذه المسلمة إنه إذا كان لدينا عدد غير منته من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى فإننا نستطيع أخذ عنصر من كل مجموعة من المجموعات المعطاة ونكون بها مجموعة غير منتهية، وبشكل صوري من أجل كل مجموعة X لمجموعات غير خالية، توجد دالة إختيار والتي ترفق بكل مجموعة A تنتمي إلى X، عنصرا من هذه المجموعة A. وتُصاغ بشكل صوري: (أبوحمدة، 1992، صفحة 70)

$$\forall X \left[\emptyset \notin X \Rightarrow \bigcup X \; \forall A \in X (f(A) \in A) \right]$$

إن تطبيق هذه المسلمة ليس ضروريا في حالة إذا كانت المجموعة X منتهية لأنها تُعتبر نتيجة لتعريف المجموعة غير الخالية (بمعنى يوجد عنصر على الأقل ينتمي للمجموعة) وفي هذه الحالة تتم برهنة النتيجة بواسطة البرهان بالتراجع.

تبدو الفكرة بديهية للوهلة الأولى لكنها ذات انعكاسات خطيرة، فعلى سبيل المثال يمكننا تطبيقا لهذه المسلمة أن نقسم غلاف كرة إلى عدد منته من القطع ثم نلصقها فيما بينها بحيث نكون بذلك كرة بحجم ضعف الكرة الأولى، وإذا واصلنا العملية عدة مرات فإننا نتمكن من رد غلاف كرة بحجم حبة قمح إلى كرة بحجم الكرة الأرضية.

ولذلك لم يتقبل الرياضيون المعاصرون مسلمة الإختيار رغم بداهتها، وساد الإعتقاد لديهم بأن لا مسلمة الإختيار ولا مسلمة المستمر يمكن استنتاجها من المسلمات الأخيرة لنظرية المجموعات، وخشوا من أن يؤدي استعمال مثل هذه النظريات ضمن البراهين المتداولة إلى تناقضات يصعب اكتشافها وتحديدها، فأوصوا بتفادي استخدام مسلمة الإختيار وفرضية المستمر بقدر المستطاع حتى تكون معظم النتائج الرياضية ترتكز على مسلمات لا ترتبط بهما، لكن جودل أثبت أن هاتين المسلمتين منسجمتان مع باقي المسلمات ثم جاء بول كوهين (Paul Cohen) فتبين من خلال عمله وعمل جودل أن فرضية المستمر غير قابلة للبت أي أنه لا يمكن الحكم على صحتها أو خطئها وهو ما جعله يتحصل على ميدالية فيلدس العام 1966. (سعدالله، 2004، صفحة 89)

2.التيارات الفلسفية الرياضية الكبرى:

يقتضي البحث في أسس الرياضيات إلغاء التناقضات بالمعنى الفلسفي كما بالمعنى الرياضي، إن هذا البحث في الحقيقة يتجاوز بكثير هذا الهدف أو الإقتضاء، فلسفيا يذهب للبحث في ماهية المعرفة الرياضية: فرضياتها، هدفها أو غايتها النهائية، علاقتها بالمجالات

العلمية الأخرى وعلى وجه التحديد الفيزياء والمنهج.

إن هذا الإنهمام بأسس الرياضيات، ارتسمت ملامحه شيئا فشيئا حوله ثلاث اتجاهات رئيسة تتعلق كل منها بتصور خاص لماهية الرياضيات،(Heyting, 1955, p. 3) والتي أدت كل منها إلى تحقيقات رياضية اتخذت أشكالا مختلفة، وسنحاول فيما يلي عرض التيارات الفلسفية الكبرى بدءا بالتيار الصوراني أو الأكسيوماتي والذي يتزعمه دافيد هلبرت، ثم التيار الحدساني ونخص بالذكر التيار البنائي أو الإنشائي الذي أسسه براوور ثم أكمل صرحه كل من تلميذه هايتينج وكولموجوروف، وصولا إلى التيار اللوجستي الذي أسسه كل من فريجه، برتراند راسل ووايتهد.

1.2.الرياضيات الصوريـــة (الأكسيوماتية):

في كتاب إقليدس Euclide "العناصر" خلال القرن الثالث قبل الميلاد، نصت مسلمة المتوازيات على أنه: "من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم سوى مستقيم واحد يشمل تلك النقطة ويوازي المستقيم الأول"، بعد محاولات عديدة من الرياضيين عبر قرون، لبرهنة هذه المسلمة إنطلاقا من المسلمات الأخرى، في بداية القرن التاسع عشر وصل بعض الرياضيين على غرار بولاي، جوس ولوباتشوفيسكي (Bolyai, Gauss, Lobachevski) إلى قناعة مفادها أن المسلمات الأخرى لا تفصل بين هاته المسلمة ونقيضها وبعبارة أخرى، كانت مسلمة التوازي مستقلة تماما عن المسلمات الأخرى، وصرح جوس بين عامي 1820 و1830 بأنه من خلال المسلمات الأخرى يمكننا تشييد "هندسات غريبة" عن الهندسة التي ألفناها وتكون متسقة بالكامل. (Bouleau, Girard, & Louveau, 1983, p. 17).

نحو العام 1899 درس هلبرت بشكل مفصل في كتابه "أسس الهندسة"[11] كل الهندسات الممكنة وبرهن استقلالية العديد من المسلمات بواسطة التأويلات، تكمن صرامة هذا العمل في القدرة على تعميمه (هندسات غير أرخميدية، غير إقليدية، ...) فقد ألهم من

[11] Grundlagen der geometrie

خلال هذا المجهود العديد من المعاصرين، إذ يُعتبر عراب المدرسة الكلاسيكية في الرياضيات في بداية القرن العشرين.

1.1.2.برنـــــامج هلبــــــرت:

لا ينفصل برنامج هلبرت عن فلسفة الرياضيات، بقدر ما هو تصور خاص لما سيصبح تأسيسا لها (الرياضيات)، بالفعل، إن ما يتعلق بالتفسير الهلبرتي للرياضيات ليس فحسب حلا لما تمناه هلبرت أن يكون جوابا للسؤال المتعلق بأسسها (لاسيما: الأنساق، الكمالية بالمعنى السيميائي والتركيبي)[12].

استلهم هلبرت من فريجه محاولته تأسيس الرياضيات على الأساس المنطقي لوحده، (Lombardi, 2021, p. 2) حيث اعتمدت استراتيجية هلبرت على اعتبار المجموعات الكنتورية كائنات رياضية ذات ثقة ومشروعية مثلها مثل الأعداد الطبيعية.

أراد هلبرت من خلال مشروعه الطموح أن يختزل ليس فحسب الرياضيات الكنتورية ولكن حتى تطبيقاتها إلى حساب أولي بسيط[13] من خلال وضع أسس لنظرية أكسيوماتية مصورنة بشكل بحت، تصف الخواص الرئيسية المنشودة للمجموعات الكنتورية ومن خلال ذلك، يمكن البرهنة بواسطة أدوات الحساب الأولي بأن هذه النظرية لا تؤدي إلى أي تناقض أو مفارقة. (Lombardi, 2021, p. 1).

وبالتالي يمكن اعتبار هذه الخطوة ضربا من الصياغة الحسابية للرياضيات، إن هذه النقلة النوعية في نمط التفكير تجعلنا في وسط منعطف غاية في الأهمية، فمن جهة لم تؤد مفارقات نظرية المجموعات الكنتورية إلى رفضها ودحض براديمها بالمنطلق بل أبقى عليها هلبرت، غير أنه أعاد صياغتها بطريقة حسابية، والعمليات التي كانت تُطبق في حساب

---

12 أنظر الفصل الرابع.

13 Arithmetique elementaire

المجموعات كعلاقات الإحتواء والإنتماء قد انتقلت إلى علاقات وعمليات حسابية مثلها مثل العمليات التي تُطبق على الأعداد الطبيعية، إن الصياغة الحسابية للرياضيات من المنظور الهلبرتي لم تساهم فحسب في برهنة تماسك نظرية المجموعات واتساقها، إنما أعطت مجالا أوسع وخصوبة وسهولة في الإشتغال على المجموعات من خلال العمليات الحسابية مما يضفي مرونة كبيرة في طريقة البرهان التي باتت بذلك سلسلة من العمليات الحسابية.

تضطلع مهمة الرياضي باستنتاج مبرهنات (theorems) انطلاقا من أوليات أو بديهيات أو مسلمات[14]، لا هي بصادقة ولا هي بكاذبة، فصدقها (صلاحيتها) لا تعتمد إلا على بنية ملفوظاتها (Énonces) وليس على طبيعة ما تقوله،[15] ترجع حقيقة الرياضيات إلى تماسكها الداخلي وعدم تناقض قضاياها، أثار الجدل والسجال حول هذا التصور الصوراني للرياضيات مبرهنة اللاكمال لجودل التي أكدت أن كل منظومة صورية أو نسق صوري متماسك أو تراجعي (recursive) يحتوي على علم الحساب، يملك على الأقل قضية غير قابلة للبرهنة أو الدحض، بالإضافة إلى هذه القضية، صحيحة بالمعنى الحدسي للحد وهي تُضفي الطابع الصوري على التأكيد على أن النظرية متسقة.

[14] تُترجم كلمة Axiome في السياق التقليدي بـ "بديهية" لأن اللفظ كان يُطلق في الرياضيات على القضية الواضحة بذاتها والتي تفرض نفسها على العقل دون الحاجة إلى البرهنة، وتتميز بذلك عن "المسلمة"، وهي القضية التي "يطالب"= =العالم الرياضي بقبولها، غير أنها ليس واضحة بذاتها ولا يمكن البرهنة عليها. أما في الرياضيات الحديثة، فنترجم كلمة "Axiome " بـ "أولية"، إذ لم يعد أي داع للتمييز بين "المسلمات" و"البديهيات" كما كان الشأن عند إقليدس فكلها تعتبر مواضعات ينطلق منها عالم الرياضيات على سبيل الإفتراض لبناء نظرية إستنتاجية. أنظر (بلانشي ر.، الأكسيومية أو المنظومات الأولية، 2004، صفحة 12)، ومن جهة أخرى يفضل الأستاذ محمود يعقوبي في ترجمته لكتاب بلانشي "Axiomatique" ترجمة كلمة "أكسيوماتيك" بـ "مصادريات"، ويستدل في ذلك بما قاله بلانشي نفسه: "إن الفصل بين البديهيات والمصادرات قد بقي في الغالب مترددا. وكثيرا ما تُستعمل الكلمتان إحداهما مكان الأخرى بلا فرق: والدليل على ذلك اسم Axiomatique (نظرية البديهيات) التي كان ينبغي سميتها تسمية أصح Postulatique (مصادريات)". أنظر (بلانشي ر.، المصادريات، 2004، الصفحات 15-16).

[15] على عكس النسق الأكسيوماتي الإقليدي الذي يعتمد على الحدس المكاني.

كان طموح هلبرت كبيرا، حيث أراد تأسيس الرياضيات كما فريجه وراسل على أساس المنطق، حيث حاول تأصيل الصورية في المنطق الرياضي، أي أن هدفه كان محاولة إختزال أو رد الإستدلال الرياضي إلى حساب "آلي" مبني على رموز، حلم طالما راود لابنيتس من قبله. (Lombardi, 2021, p. 20)

لم تكن من قبل الضرورة ملحة ومشروعة لقيام نظام استدلالي صوري قائم بذاته، ذلك أن الرياضيين في السابق اتخذوا الموضوعات الموجودة فعليا موضوع دراستهم مثل الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد، ولم تكن الحقائق المتعلقة بهاته الموضوعات الحقيقية موضع نقاش أو جدل، لكن عندما اتضح أن بديهية المتوازيات لم تكن أبدا غير قابلة للنقاش أو فوق المساءلة، طُرح سؤال غاية في الأهمية: ما هو بحق غير القابل للنقاش في الرياضيات؟ كان للمنطق الصوري وصورنة النظريات الرياضية أيضا هدف الوصول أو بلوغ تحديد الجزء غير القابل للنقاش حقيقة في المنطق والرياضيات، فهدف الصورنة كما عرفه هلبرت نفسه هو إذن إيجاد قاعدة أو أساس متين وكلي (Universal) للرياضيات: (Lombardi, 2021, p. 120)

- متين لأنه مبني على آليات وطرائق برهنة معروفة مسبقا تُجرى على ملفوظات محدودة ولا تستند لأي حدس للانهاية.
- عام أو كلي لأننا نأمل أن كل الرياضيات من الماضي إلى المستقبل يمكن أن تدخل في إطار هذه الصورنة.

يعتبر هلبرت المنطق لغة رياضية قائمة بذاتها فهو يراه بوصفه قواعد وعلاقات، إذ يرى هلبرت أن أي نظرية رياضية يمكن صياغتها بطريقة صورية تماما، وأن الرياضيات متحررة تماما من أي افتراضات قبلية فالرياضيات لا تحتاج لأي حدس أولي، فوجد في الطريقة الأكسيوماتية إمكانية إنجاز أسس الرياضيات.

2.1.2.شروط بناء نسق صوراني:

نحو العام 1900، وضع هلبرت ذلك التمييز بين التصورات الإبتدائية المسموح بها بدون أي تعريفات وبين التصورات المشتقة عن طريق التعريفات، أي بين البديهيات والمبرهنات وهي أيضا تؤسس قواعد الإستنباط في نظره ويخضع اختيار البديهيات في نظر هلبرت للإعتبارات التالية: (عبدالقادر، 1988، الصفحات 52-53)

- أن تكون البديهيات مستقلة (independent) أو بمعنى آخر، لا ينبغي أن يكون من الممكن استنباط بديهية من أخرى، لأنه في هذه الحالة سيزداد عدد البديهيات ويتطلب الأمر اختزالها إلى أقل عدد ممكن.
- لا بد أن يكون عدد البديهيات كافيا، بحيث يسمح باستنباط المبرهنات من النظرية التي لدينا.
- يتعين أن تكون البديهيات غير متناقضة، وهذا الشرط يُعد من أهم الشروط على الإطلاق في أي نسق بديهي، وهو أيضا أصعب الشروط.

يمكن اعتبار الشرطين الأول والثاني شرطين اقتصاديين بمعنى أنه نحرص دائما على أن يكون عدد البديهيات أقل ما يمكن إضافة لكونها كافية لاستنباط أي مبرهنة أي بعبارة أخرى يكون كاملا أو تاما يتسم بالكمالية (completeness)، في حين أن الشرط الثالث هو شرط عام كلي يخص كل نسق استنباطي أو نسق أكسيوماتي على الإطلاق، فضرورة تماسك واتساق النسق داخليا لا تأتي إلا من خلال تماسك بديهياته وعدم تناقضها فيما بينها.

لقد أراد هلبرت كذلك إثبات خصائص أخرى لنسق صوري خاص بعلم الحساب، لاسيما كما أسلفنا خاصية الكمالية أي أنه بالنسبة إلى كل صيغة P من نسق صوري (علم الحساب مثلا)، إما أن تكون P مبرهنة أو $\neg \mathbf{P}$ مبرهنة، وهذا ما تطور فيما بعد إلى مسألة البت أو التقرير، (ويقابل ذلك في علم الحساب السائد الفكرة التي ترى أن كل ملفوظ له معنى، إما أن يكون صادقا أو كاذبا). نحن نأمل عموما أن يكون مجموع ملفوظات علم الحساب موافقا بشكل تام لمجموع الصيغ القابلة للبرهنة في علم الحساب السائد.

2.2.الرياضيات اللوجيستية

يعني فيما يعنيه مصطلح اللوجستية[16] (logicisme) أو النزعة المنطقية أحد أهم البرامج التي سعت إلى إختزال أو رد الرياضيات إلى المنطق أو بعبارة أخرى نمذجة الرياضيات بواسطة المنطق، حيث استهل هذا المشروع جوتلوب فريجه في محاولته الأولى لرد علم الحساب إلى المنطق بدل الحدس مناهضا فكرة كانط،[17] فشكل بذلك أولى ارهاصات النزعة المنطقية، وسار على خطاه كل من جيسيبي بيانو صاحب أول أكسيوماتيك حسابي وريتشارد ديديكيند، بعدها أكمل كل من برتراند راسل وألفرد نورث وايتهد المشروع الذي يعتبر كتابهما "أصول الرياضيات"[18] إنجيل المذهب المنطقي.

عرف مسار اللوجستية منعطفا هاما على يد ديديكيند عندما أفلح في بناء "أنموذج مشبع" من البديهيات، مستخدما بعض مجموعات الأعداد الناطقة حيث رسخ هذا المنجز فكرة مؤداها أن علم الحساب، الجبر والتحليل كلها يمكن ردها إلى مجموعة الأعداد الطبيعية[19]، إضافة إلى "منطق الأصناف".

1.2.2.بيانو وتأسيس علم الحساب:

أعلن جيسيبي بيانو (Guiseppe Peano) نحو العام 1889 نسخة من مسلماته الشهيرة، في محاولة منه لإنشاء لغة صورية خاصة بعلم الحساب، إنطلق بيانو من كون

---

[16] يُرجح المؤرخون إلى أن الفيلسوف والمنطقي الفرنسي لويس كوتيرا (Louis Couturat) أول من نحت واستخدم المصطلح في المؤتمر العالمي للفلسفة العام 1904. أنظر universalis.fr

[17] أنظر الفصل القادم

[18] Principia Mathematica

[19] جاء على لسان الرياضي ليوبد كرونكر (Leopdd Kronecker) أن الله قد خلق لنا الأعداد الطبيعية فحسب أما ما دونها فهو من ابتكار العقل.

أن الإستدلالات في علم الحساب تتعلق بالأعداد الصحيحة ومن أجل ذلك افترض بعض المفاهيم[20]:

بعض هذه المفاهيم يخص علم الحساب، مثل الأعداد: 0، 1، 2، ...، علاقة الترتيب (relation d'ordre)، مفهوم التتابع، الجمع، القسمة، الحاصل، القسمة الإقليدية، الأعداد الأولية، ...

ومفاهيم أخرى أكثر عمومية: لا تنتمي إلى علم الحساب، بل إلى المنطق مثل: التساوي، المتغيرات (x,y,z)، التكميم الكلي، التكميم الوجودي، السلب أو النفي، العلاقة الشرطية المتصلة، العلاقة الشرطية المنفصلة، إمكانية الوضع بين الأقواس، (فاقنار، 2011، الصفحات 318-319) ...

ولكي نتمكن من إجراء استدلال حسابي ما بالشكل الصحيح والفعال، نفترض عملية إنشاء لغة صورية خاصة بعلم الحساب وذلك من خلال جرد كل ما نحتاجه في عملية الإستدلال هاته، وذلك من خلال التمييز بين علامات الأفراد وعلامات الدوال والعلاقات، والحدود والصيغ، والعلامات المنطقية، والعلامات الحسابية المحضة المسماة خارجة عن المنطق أو غير المنطقية (Exta-logique).

وعليه، فإننا سنعين لعلم الحساب لغة، على مرحلتين: (Wagner, 2002, p. 55)

1.بواسطة مجموعة من العلامات (signs) التي نجيز لأنفسنا استعمالها، والتي تشكل الأبجدية الصورية (Alphabet formel) مثل: $\mathbf{0}, \mathbf{s}, =, <, \forall, \exists, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, (,), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$

توجد في هذه المجموعة علامات منطقية (خاصة: $=, \forall, \exists, \neg, \wedge, \rightarrow, (,), \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$) وعلامات غير منطقية، أو خارجة عن المنطق، أي إنها خاصة بنظرية رياضية مخصوصة

[20] نقصد بكلمة مفاهيم هنا notions وليس concepts، حيث يترجمها الأستاذ محمد محجوب بمصطلح " معرف" لكننا آثرنا استخدام مصلح مفهوم لشيوع تداوله.

(على سبيل المثال: $0, s, +, <, \ldots$ إذا كنا نريد كتابة استدلالات حسابية فإن "s" توافق هاهنا دالة التوالي fonction successeur)

2.بواسطة مجموعة من القواعد تحدد ما ستكون عليه صيغة حسابية ما، في اللغة الصورية ليست الصيغ، من منظور اللغة الصورية، سوى سلسلة محدودة من رموز الأبجدية الصورية، وهي مجردة من الدلالة، ومن قيمة الحقيقة، ومع ذلك، فإنها توافق الملفوظات الرياضية، مثلما نجدها في الإستعمال المألوف لدى الرياضيين، مثلما تعبر الصيغة مثلا: $\forall x \exists y(y = sx)$ تعبر صوريا عن الملفوظ الجاري استعماله وهو: لكل عدد موال أي لكل عدد صحيح x يوجد عدد صحيح y مساو لمولي x.

بوضعنا لأبجدية صورية وقواعد لإنشاء الحدود والصيغ، ننتقل الآن للمرحلة الأهم وهي البرهنة الصورية على بعض الصيغ حتى نثبت صدقها، ولذلك يجب أن ندمج من جانب الصورية بناء يقابل التطبيق المعتاد للبرهنة، أب مفهوم الدليل أو البرهان الصوري.[21] مثل البرهنة في علم الحساب على وجود لا متناه من الأعداد الأولية، فالصياغة الصورية لهذه البرهنة تكون على النحو: $\forall \mathbf{x}[\mathbf{Pr}(\mathbf{x}) \rightarrow \exists \mathbf{y}(\mathbf{x} < \mathbf{y} \wedge \mathbf{Pr}(\mathbf{y}))]$

يجب أن نعوض هنا هذه الصيغة Pr(x) بصياغة تُعبر عن أن x هو عدد أولي (لأن Pr لا تنتمي إلى الأبجدية المتفق عليها سلفا).

وحتى نتمكن من البرهنة الصورية على هذه الصيغة، نحن في حاجة، لا إلى لغة صورية فحسب، بل نحتاج إضافة إلى ذلك إلى نسق صوري، سنضع بحوزتنا إذن زيادة على الأبجدية الصورية، وقواعد إنشاء أو صياغة الحدود والصيغ، مجموع صيغ نسميها أوليات أو مسلمات وهي المسلمات الخاصة بالنسق الصوري الخاص بعلم الحساب التي وضعها بيانو كالآتي:

1. الصفر ليس له موال، أو الصفر هو أول الأعداد الطبيعية، وصياغتها الرمزية هي:

---

[21] أنظر تهميش الصفحة 135.

$$\forall x \neg (sx = 0)$$

2. كل عدد طبيعي، إما أن يكون مساو للصفر أو موالي العدد طبيعي آخر، أو بعبارة أخرى كل عدد طبيعي مختلف عن الصفر هو موال لعدد طبيعي آخر، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x \left(x = 0 \vee \exists y \big(x = s(y) \big) \right)$$

3. إذا تساوى متواليان لعددين فإن العددين متساويان، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x \forall y (sx = sy \Rightarrow x = y)$$

4. الصفر هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x \; x + 0 = x$$

5. مجموع عدد ومواليه هو موالي مجموع العددين، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x \forall y \big(x + sy = s(x + y) \big)$$

6. الصفر هو العنصر الماص بالنسبة لعملية الضرب، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x (x.0 = 0)$$

7. حاصل ضرب عدد وموالي عدد مساو لضربه في العدد مضافا إليه العدد الأول، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x \forall y (x.sy = (x.y) + x)$$

8. خاصية البرهان أو الإستدلال بالتراجع، وتنص على أنه إذا تحققت خاصية ما متعلقة بالعدد الطبيعي n من أجل حدها الأول n_0، وإذا ما صح الإستلزام: كل قضية صحيحة من أجل k تستلزم صحتها من أجل k+1، فإن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n، وصياغتها الرمزية هي:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \left(\left(\phi(0, x_1, \dots, x_n) \wedge \left(\forall x (\phi(x, x_1, \dots x_n) \Rightarrow \phi(sx, x_1, \dots, x_n)) \right) \right) \Rightarrow \forall x \phi(x, x_1, \dots, x_n) \right)$$

تجدر الإشارة إلى أن صيغ ومبرهنات النسق الصوري لا يمكن الحكم عليها بالصدق أو الكذب بل بإمكانية برهنتها داخل النسق، لأن مفهوم الحقيقة لم يُدرج بعد في اللغة الصورية ولا يمثل قسما من أقسام الصورية ذاتها، فنحن لا يمتلك غير مفهوم البرهنة والمبرهنة، ونقول عن صيغة ما إنها قابلة للبرهنة الصورية أي قابلة للبرهنة ضمن النسق الصوري، متى وُجدت سلسلة من الصيغ لا تحتوي إلا على مسلمات أو صيغ مبرهن عليها برهنة صورية، انطلاقا من الصيغ التي ورد ذكرها في القائمة. ويُعد برهان الصيغة P تلك القائمة التي تنتهي بـ P ويُبرهن على صيغة ما متى عرفنا هذه البرهنة، وتُسمى الصيغ المبرهن عليها بـ "مبرهنات" أو "مبرهنات صورية". (فاقنار، 2011، صفحة 323)

2.2.2.إرهاصات المنطق الرمزي:

أدخل فريجه مفهوم المتغيرات على المكممات الوجودية والعامة[22]، ثم في العام 1903 أصدر راسل ووايتهد كتابهما "أصول الرياضيات" مستخدمين مفارقات وتحسينات مدرسة بيانو الهندسية، وفي هذا الصدد يقول راسل: "وهذا يُفضي بنا إلى تعريف الرياضة، وهو تعريف لا بد من إجراء تعديلات متعددة عليه [...] وقد انتهيت في الأصل إلى تأكيد هذه الصورة من اعتبار الهندسة، وكان من الواضح أن الهندسة الإقليدية وغير الإقليدية على السواء يجب أن تدخلا في الرياضة البحتة ولا يجب اعتبارهما متناقضتين فيما بينهما فعلينا أن نحكم فقط بأن البديهيات يلزم عنها القضايا لا أن البديهيات صادقة فالقضايا صادقة تبعا لذلك" (راسل و وايتهد، 1903، صفحة 9).

يبدو أن راسل أراد تعريف الرياضيات بوصفها يمكن ردها للمنطق مما دعا إلى ضرورة مراجعة تعريف الرياضيات في حد ذاته، كما أنه صحح مفهوما خاطئا متعلقا بصحة

[22] أنظر الفصل القادم

البديهيات المتعارف عليها خاصة في الهندسة الإقليدية، واعتبر أن البديهيات صادقة لا لصدقها في حد ذاتها إنما في صحة البراهين والإستلزامات التي تُستخلص منها، وهو ما نعبر عنه بالإتساق أو الإنسجام بين المقدمات والنتائج، إلا أن راسل يرجع في موقف آخر ليعرف الرياضيات البحتة بأنها "باب جميع القضايا التي صورتها P تلزم عنها Q أي $P \Rightarrow Q$ "، وتجدر الإشارة إلى أن ما عالجه هذا المؤلف من مفاهيم أولية متعلقة بالهندسة ونظرية ساهم بشكل كبير في تطور اللوجيستية.

3.2.الرياضيات الحدسانية (البنائية)

سنتحدث عن الإتجاه الحدساني والإتجاه البنائي (الإنشائي) بوصفهما اتجاها واحدا، لكون البنائية تتخذ من مقولات الحدسانية إطارا نظريا ومرجعا فلسفيا لها.

1.3.2.حدسانية بروور:

الحدسانية هي فلسفة رياضيات أسسها في بداية القرن العشرين عالم الطوبولوجيا بروور (L. E. J. Brouwer)، وهي إمكانية جديدة لمقاربة مختلفة عن سابقتها الكلاسيكية، إذ تعتبر الرياضيات إنشاء أو بناء مستقلا للعقل البشري، وكل المواضيع الرياضية التي نشتغل عليها يجب أن تكون ناتجة عن طريق الحدس، وإنطلاقا من هذه الأفكار التي تبناها التيار الحدساني كان لها تأثير كبير وعميق على الفكر الرياضي عامة: تصورا، موضوعا ومنهجا لاسيما رفضه فكرة "اللانهائي"، بمعنى أنه لا يمكن تمثيل عدد حقيقي بمتتالية غير منتهية من الرتب العشرية (الأرقام بعد الفاصلة) إلا إذا توفرت لنا وسيلة فعالة لحساب كل رتبة عشرية، نتحدث إذن عن عدد حقيقي قابل للإنشاء.[23]

---

[23] كان لهذه الفكرة أثر كبير خاصة عند آلان تورينج (أنظر الفصل الرابع) فمن جهة أعاد تورينج تعريف العدد الحقيقي وهو كل عدد قابل للحساب، ومن جهة أخرى طور من الوسيلة الفعالية لتصبح آلية حساب فعالة أو إجراء حسابي فعال وهو ما أُصطلح عليه فيما بعد بالخوارزمية.

يرى هايتينج (1955) في كتابه "أسس الرياضيات: الحدسانية نظرية الإستدلال" وهو أول كتاب لتلميذ بروور يشرح فيه أسس الحدسانية والبرهاني الإنشائي بأن الرياضيات حسب تصور بروور نتاج للعقل الإنساني أي لفكرنا، (P. 13) وحجة بروور أن الفكر الرياضي يتمظهر في حياتنا اليومية بعفوية وفي الأغلب دون أدنى وعي، وعليه يُعطي هذا أسبقية للرياضيات على العلوم الأُخرى فلا يمكن لأي علم ولا حتى فلسفة أو منطق أن يُعطي أحكاما مسبقة حول الرياضيات.

إن استخدام أطروحات فلسفية أو منطقية في الرياضيات كوسائل وأدوات استدلالية سيقودنا لحلقة مفرغة، لأنه لكي نصوغ هذه الأطروحات يجب افتراض أولا بناء مفاهيم رياضية وعليه توجب على الرياضيات ضمن هذا المعنى أو المنحى أن تكون بلا افتراضات مسبقة، فإنه بالمحصلة لم يبق لنا إلا مصدر واحد وهو "الحدس" الذي يضع أمام أعيننا مفاهيمه ونتائجه بشكل مباشر وفوري وواضح.

على مستوى المنطق الحدساني، لا يُقبل الإستدلال بالخُلف أو مبدأ الثالث المرفوع، لسبب أن هذه المبادئ تسمح بالإستدلال على خصائص معينة بكيفية غير إنشائية (بنائية) ولنأخذ مثالا على ذلك: إذا ما أردنا البرهان على وجود عدد حقيقي معين يحقق خواص معينة يمكن أن نستدل بالإفتراض أنه لا يوجد هكذا عدد حقيقي، ثم نستنتج وجود تناقض ونخلص في النهاية إلى أن هذا العدد الحقيقي موجود فعلا، لكن هذا الإستدلال لا يعطي أي مؤشر أو دليل على كيفية حساب هذا العدد الحقيقي، بالنسبة للحدساني لقد قمنا فقط بالإستدلال على وجود هذا العدد الحقيقي ليس متناقضا، لكن ليس أن هذا العدد موجود.

ولبيان الفرق بين البرهان الكلاسيكي والبرهان البنائي نأخذ المثال التالي: لنفرض وجود عددين A وB فسيكونان إما متساويين أو مختلفين، في منطق الرياضيات الكلاسيكية يمكن الإستناد إلى مبدأ الثالث المرفوع وبالتالي يكون العددان إما متساويين أو مختلفين أي A=B أو $\boldsymbol{A \neq B}$.

بينما في الرياضيات البنائية فالأمر مختلف تماما، ففي هذه الحالة مبدأ الثالث المرفوع مستبعد تماما ولكي نقول إن العددين A وB متساويان علينا ببساطة إيجاد برهان تنطبق عليه شروط المذهب الحدساني بمعنى إيجاد برهان يؤدي إلى تساوي أو إختلاف العدديـن.

نشأ المنطق الحدساني على يد بروور في نص مقتضب العام 1908 حينما صرح بأن "مبادئ المنطق ليس موثوقا بها" (Biren, 2019)، ويقتضي مبدأ عدم التناقض بأنه من غير الممكن اثبات ونفي قضية معينة في الآن ذاته، حسب ما صرح به أرسطو في كتابه "الميتافيزيقا" فإنه لا يمكن اسناد المحمول لموضوع ونقيضه ورمزيا نعبر عن ذلك بالجملة المنطقية: $\neg(\boldsymbol{A} \wedge \neg\boldsymbol{A})$ وبعبارة أخرى: $\forall\boldsymbol{F}\forall\boldsymbol{x}(\boldsymbol{Fx} \wedge \neg\boldsymbol{Fx})$، أما مبدأ الثالث المرفوع فيقتضي أن تكون القضية إما صحيحة وإما خاطئة ولا يمكن أن تتخذ حكما وسطا بينهما، وبعبارة صورية $\boldsymbol{A} \vee \neg\boldsymbol{A}$، ويبدو من خلال الصيغتين السابقتين أن مبدأ عدم التناقض ومبدأ الثالث المرفوع متكافئتان لأن نفي الأولى يعطينا الثانية، وهو ما رفضه بروور فقد أشار إلى أن أساس طريقة البرهان بالخُلف (démonstration par l'absurde) هو مبدأ الثالث المرفوع ويستلزم الإستدلال كما أسلفنا في أكثر من على صحة قضية افتراض صحة نقيضها مما يؤدي إلى تناقض والذي نرمز إليه بالرمز $\perp$.

وبطريقة صورية، للبرهان على صحة قضية A نفرض صحة $\neg A$ ونصل إلى تناقض بمعنى أن $\neg A$ خاطئة مما يستلزم صحة $\neg\neg A$ وبتطبيق خاصية النفي المزدوج نصل إلى أن A صحيحة أي: $\neg\neg A \Rightarrow A$ وهذا ما يكافئ فعلا أن $A \vee \neg A$ صحيحة والعكس أيضا صحيح $A \Rightarrow \neg\neg A$.

وجب الإشارة هنا إلى جزئية غاية في الأهمية تتعلق بمدى فهم نقد بروور لمبدأ الثالث المرفوع ذلك أنه يتطلب مصادرة حقيقة خارجة عن أذهاننا (vérité extra mentale) التي

تُرجع الملفوظات الرياضية إلى صحة أو خطأ بشكل مستقل عن قدراتنا وملكاتنا بمعرفتها إن كانت صادقة أو كاذبة.

2.3.2.المنطق الحدساني:

المنطق الحدساني هو منطق مختلف عن المنطق الكلاسيكي في نقطة جوهرية وهي مفهوم "الحقيقة"، ففي المنطق الحساني يُعوض مفهوم الحقيقة بمفهوم البرهان البنائي أو الإنشائي، فقضية مثل "العدد المتسامي π ناطق أو العدد π غير ناطق" ليست مبرهنة بكيفية إنشائية (حدسانية) في إطار معرفتنا الرياضية الحالية، لأن القضية الكلاسيكية $\boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{A}$ أي قاعدة الثالث المروع كما أسلفنا لا تنتمي للمنطق الحدساني حيث يقيم المنطق الحساني تمايزا بين "أن يكون صحيحا" و"أن يكون غير خاطئ" لأن علاقة الإستلزام أو التضمن $\neg\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{A}$ ليست مبرهنة في المنطق الحدساني، وسُمي بالمنطق الحدساني على يد تلامذة بروور ونخص بالذكر جليفينكو (V. Glivenko) وهايتينج (Heyting) وأيضا كورت جودل و أندراي كولموجوروف (Andreï Kolmogorov)، غير أن المنطق الحدساني تعرض لنقد لاذع من طرف رياضيين مشهورين لاسيما من طرف دافيد هلبرت.

وللإشارة فإنه عندما يريد رياضي حدساني أن يبرهن صحة الإستلزام $\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ هذا يعني أن يقدم آلية أو إجراء أو طريقة لـ "إنشاء" استدلال لـ b عن طريق استدلال لـ a، وبعبارة أُخرى استدلال $\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ هو دالة تحول كل استدلال لـ a إلى استدلال لـ b.[24]

---

[24] إن هذا التأويل الحسابي (interprétation calculatoire) سيجد ذروة تطبيقه في أكثر النتائج أهمية في المعلوماتية النظرية وهي مطابقة كاري هاوارد (correspondance de Curry Howard) فكرتها الأساسية هي "أن تبرهن يعني أن تبرمج" (prouver c’est programmer) أي هناك تشاكل تقابلي أو إيزومورفيزم بين قواعد استنباط المنطق الحدساني وقواعد كتابة الحساب لامبدا (lambda calcul). أنظر الفصل الخامس.

3.3.2.البرهان البنائي (الإنشائي):

يُعتبر تعريف تشورش للبرهان أو الإستدلال تعريفا معروفا وقياسيا في أدبيات المنطق الرياضي، إذ يعرف الإستدلال بوصفه: "سلسلة منتهية من الصيغ المشكلة أو المُصاغة بشكل جيد تبدأ بمسلمة أو مجموعة مسلمات مأخوذة من مجموعة منتهية من المسلمات أو الأوليات، حيث كل خطوة تُعتبر استدلالا مباشرا ناتجا عن استخدام قاعدة، هي الأخرى مأخوذة من مجموعة منتهية من القواعد، وتنتهي هذه العملية بالبرهنة على الصيغة". (Church, 1956, pp. 52-53)، وما يمكن ملاحظته مبدئيا حول هذا التعريف أن أي استدلال رياضي يقتضي وجود مجموعتين الأولى هي مجموعة المسلمات والتي يجب اختيارها بعناية ووفقا لشروط ومعايير قد تكون قريبة لحد ما لما وضعه هلبرت وأسلفنا ذكره، هذا من جهة ومن جهة أخرى وجود قواعد محددة وصارمة، يجب التقيد بها، ولا يمكن الإنتقال من خطوة إلى أخرى إلا بتطبيق إحدى قواعد الإستدلال، ونطلق على الصيغة النهائية اسم المبرهنة (theorem)، والتي تُصبح فيما بعد ضمن نسق البرهان أي يمكن استخدامها هي الأخرى كنتيجة أو مسلمة جديدة، يعتقد ديودوني (Dieudonné) أن ما تم برهنته في الرياضيات لا نعود إليه أبدا بمعنى لا يخضع للشك لأنه اكتسب صحته ويقينيته من البرهان، وبالجملة فإن البرهان يكون صحيحا إذا ما كان غير متناقض داخليا أي يكون صحيحا بشكل صوري وهو ما يضمن اتساق المبرهنة وصحتها. (BAUER, 2017).

وكما أسلفنا فإن الحدسيين أو البنائيين يرفضون البرهان بالخلف وكل برهان أو استدلال مبني على بدأ الثالث المرفوع أو مبدأ عدم التناقض فما السبيل لبناء استدلال بنائي يتجاوز هذا المنظور للبرهان الكلاسيكي؟

ومن أمثلة البراهين غير المقبول في المنطق الحدساني وفقا للمقاربة الكلاسيكية للبرهان مثال دأبت كتب المنطق الرياضي على ذكره والإستشهاد به ونصه:

"لنبرهن أنه يوجد عددان غير ناطقين a و b وعدد ناطق c بحيث $a^b=c$"

البرهان: ليكن العدد $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ فإما أن يكون ناطقا أو يكون غير ناطق.

فإذا كان ناطقا فيكفي أن نأخذ $a = b = \sqrt{2}$

أما إذا كان غير ناطق فيكفي أن نأخذ $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ومن أجل $a^b=c$ يصبح لدينا: $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$ وبالتالي نحصل على النتيجة المرجوة وهي a وb عددان غير ناطقين وc عدد ناطق.

إن هذا الإستدلال يستخدم مبدأ الثالث المرفوع حيث قام بفصل الحالتين عندما يكون $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ عددا غير ناطق والحالة العكس أين يكون عددا ناطقا، إن وجود هاتين الإمكانيتين لا يبرهن إلا على فكرة أنه وجب الإختيار مسبقا بين الحالتين السابقتين لتفادي التناقض، في حين أن هذا الاستدلال لا يخبرنا أبدا ولا يعطينا أي مؤشر من بين الحالتين السالفتين ما هو "الجيد"، لأن البرهان السابق لا يجزم لا على أن العدد $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ناطق أو غير ناطق، وبالتالي لم تتم عملية الإستدلال، هناك إذن شرط أساسي لم يستجب له البرهان وهو "عدم الكفاية" (insuffisance) وبالتالي يمكن نقد البرهان الذي يُستخدم فيه مبدأ الثالث المرفوع بغياب المعلومة.

ومن الأمثلة التي نسوقها أيضا وعادة ما يُستدل بها في كتب المنطق مبرهنة القيم المتوسطة (théorème des valeurs intermédiaires) التي تنص على أنه إذا كانت لدينا دالة لمتغير حقيقي معرفة على مجال $[a, b]$ وكانت رتيبة أي متزايدة أو متناقصة، وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من أجله تنعدم الدالة أي $f(\alpha) = 0$، إن هذه المبرهنة لا تخبرنا شيئا عن α سوى أنه محصور في المجال السابق، مستندة إلى المبدأ القائل: ما دامت الدالة قد انتقلت من القيم الموجبة إلى السالبة أو العكس ومادامت متصلة أي غير منقطعة فإنها لا محالة ستمر من الصفر وتنعدم لكنها لا تحدد

لنا أي قيمة لـ α، إن هذه المبرهنة مرفوضة تماما وفقا للمنطق الحدساني أو البنائي مادام هذا العدد غير قابل للإنشاء، أي يتعذر إجاد رتبه العشرية كاملة.

4.3.2.جريس ومبدأ اللانفي:[25]

عبر الرياضي الألماني جريس (George F. C. Griss) وهو من تلامذة بروور عن شكه حول شرعية استخدام النفي في الرياضيات الحدسانية، فوفقا له لا يمكن بأي حال من الأحول الإستدلال بطرق حدسية على خطأ افتراض أو قضية أو دعوى معينة، لأنه إذا كانت هذه القضية خاطئة لا يمكننا تصورها بشكل واضح وأيضا، لا يمكننا الحصول على فكرة نقية وواضحة عن خاصية معينة إلا بعد إنشاء "كيان" أو موضوع رياضي يمتلك تلك الخاصية.

بدأ جريس بإنشاء رياضيات حدسانية بدون "نفي" ففي نظرية الأعداد الحقيقية العلاقة $\neq$ هي علاقة سلب لا يمكن استخدامها بمعنى آخر لا يوجد إلا علاقة المساواة $=$ أي $a = b$ وعلاقة المسافة أو التماسف[26] والتي نرمز لها بالرمز #، فمبرهنة "إذا كان $a \neq b$ غير ممكنة فإن $a = b$" تُعوض بالآتية: "إذا كان a في مسافة عن كل عدد c وإذا كان c في مسافة عن b فإن $a = b$". (Heyting, 1955, pp. 14-15)

إن ما يمكننا أن نخلص إليه في ختام فصلنا، أن نظرية المجموعات البسيطة التي استهلها ودشنها كانتور لم تكن أبدا مجرد نظرية رياضية بقدر ما كانت محاولة تأسيس العلوم الرياضية برمتها، محاولة تلتها محاولات أخرى لإعادة النظر في الموضوعات الرياضية، ويمكن القول بأنه ولأول مرة في التاريخ تنظر الرياضيات لنفسها وتتخذ من

---

[25] Negationless
[26] Relation de distance

كياناتها موضوعا لها وهو ما أسفر فيما بعد عن الميتارياضيات التي إتخذت من النظرية الرياضية موضوع بحث.

التناقضات التي أبانت عنها نظرية المجموعات لم تكن أبدا دليل ضعف أو عدم اتساق بقدر ما فتحت آفاقا جديدة من جهة أكسمة نظرية مجموعات أخرى على يد زرملو وفرانكل ومن جهة أخرى تجاوز هذه المفارقات من خلال خلق كيانات وموضوعات رياضية أكثر عمومية لا سيما ونظرية الأصناف لراسل التي برهن من خلالها على أن مجموعة كل المجموعات لا يمكن اعتبارها مجموعة، وشكلت بردايم نظرية المجموعات أفقا واسعا للبحث في الرياضيات في السنوات القليلة القادمة لاسيما مع فان نيومان.

تُعد نظرية المجموعات إذن منعطفا حاسما في تاريخ وفلسفة وابيستمولوجية الرياضيات المعاصرة لما فتحته وأثارته من سجال لم يعهده الرياضيون من قبل، فكان أقرب إلى فلسفة الرياضيات منه إلى العلوم الأخرى.

التناقض في الرياضيات لا يعبر أبدا عن عدم اتساق كما لا يُعد عامل هدم للبنية الرياضية بقدر ما يعبر عن تعدد أنساق، وبالتالي شهدت الرياضيات فيما بعد تعدد الأنساق وتعدد الجبور والمناطق.

رأت المدرسة الحدسانية في التيار الصورني وأسسه وطريقة صياغته الحسابية للرياضيات مجرد لعبة بالرموز فارغة من أي دلالة أو معنى،[27] فاستنتاجاته دون جدوى، كما أنها لا تقدم أي استدلال متين مبني على الطرق الرياضية.

إن تعدد التيارات الفكرية الرياضيات لم يكن على سبيل الترف الفكري أو السجالات العقيمة، بقدر ما فتح الأفق الواسع للتفكير الرياضي والبحث في نظرية البرهان الرياضي

[27] Meaningless game with symbols

خاصة مع دافيد هلبرت الذي يُعد المؤسس الأول لليمتارياضيات، كما يُعد البرهان الإنشائي من أنجع البراهين في الرياضيات.

الفصل الثالث:

المنطق الكلاسيكي:

مقاربة تاريخية

إبستمولوجية

تمهيد:

يكتسي علم المنطق أهمية بالغة لما يلعبه من دور في مختلف العلوم على سبيل الإستدلالات والإستنتاجات وبناء البراهين الصورية، وعادة ما نقسم تاريخ المنطق إلى ثلاث حقبات رئيسة: المنطق الصوري[1] أو ما قبل الكلاسيكي الذي دشنه أرسطو وواصل على نهجه تلامذته ومريدوه وتمحور حول نظرية القياس، المنطق الكلاسيكي الذي استهله لايبنيتس وصولا إلى فريجه والذي كان قوامه نظرية الاستدلال واستخدام المكممات والدوال المنطقية، والمنطق المعاصر الذي تمفصل إلى مجالات أربع: نظرية المجموعات، نظرية قابلية الحساب، نظرية البرهان ونظرية النماذج وهي المجالات التي رسمت ملامح النصف الثاني من القرن العشرين إلى وقتنا الراهن.

لقد هيمن المنطق الأرسطي لقرون حتى زمن كانط الذي اعتبره كاملا دون نقصان أو زلل، مما ساهم بشكل مباشر في عدم تطور نظرية منطقية تُجاوز عقم المنطق الأرسطي، وتَحُول دون ركوده إلى أن بزغت نظرية في المنطق على يد لايبنيتس الذي حاول إنشاء لغة رمزية للعلوم، وبذلك كانت أول محاولة جادة لبناء نظرية منطقية، ضف إلى ذلك أن المشتغلين بالمنطق كان جُلُّهُم من الفلاسفة ولم يكونوا رياضيين أو منطقيين بالمعنى الأصيل للكلمة وهذا بالفعل ما أثر بالسلب على تطور المنطق.

وعلى أساس ما سبق، تُعتبر مرحلة المنطق الكلاسيكي التي دشنها لايبنيتس وصولا إلى فريجه منعطفا منهجيا وابيستمولوجيا حاسما في تاريخ المنطق ووضع المنطق كعلم في

[1] لن نتناول منطق أرسطو إلا ببعض الإشارة لكونه غير مرتبط ببحثنا بشكل مباشر، كما أنه لا يشكل حلقة مهمة في تطور المنطق المعاصر، جاء على لسان راسل في كتابه "أصول الرياضيات":

La logique d'Aristote n'est rien d'autre qu'un charlatanisme solennel et quiconque désire de nos jours apprendre la logique perd son temps s'il lit Aristote ou l'un quelconque de ses disciples

إن منطق أرسطو لا يَعْدُو أن يكون نوعا من الشعوذة، ومن يرغب في تعلم المنطق في أيامنا هذه، سيكون في مضيعة من الوقت إذا ما قرأ لأرسطو أو أحد من تلامذته.

سكته الصحيحة لاسيما مع اهتمام الرياضيين به ودخوله مجال اختصاصهم، وقد لا نكون مبالغين إذا ما اعتبرناها الأهم على الإطلاق حتى في تاريخ الرياضيات ذاتها خاصة وأزمة الأسس التي شهدتها في النصف الثاني من القرن العشرين وقد كان للمنطق الدور الكبير في إعادة بناء أسس العلم الرياضي خاصة مع راسل ووايتهد ونزعتهما اللوجستية التي كان ثمارها كتابهما "أصول الرياضيات".

1.في تعرف المنطق:

يبدو أن تعريف المنطق[2] بوصفه "الآلة التي تعصم العقل من الزلل وتوجهه للإستدلال الصحيح" أو "فن التفكير" على غرار: فن التفكير لبور روايال، قواعد لقيادة العقل لديكارت، مقالة الطريقة لحسن قيادة العقل وللبحث عن الحقيقة في العلوم لديكارت، إصلاح العقل لسبينوزا ... وهناك غرض عملي يبدو أنه قد عبر عنه العنوان الذي سُمي به فيما بعد مجموع كتابات أرسطو المنطقية: وهو الأورغانون بمعنى الأداة، ومع ذلك فإن هذه الكتب نظرية أكثر مما هي عملية، فنحن نجد فيها نظرية الإستدلال ونظرية المعرفة بوجه عام، (جوبلو، 1925، صفحة 21) لم تعد ذات جدوى فأول مشكلة تعترضنا لتناول تعريف المنطق هي معنى كلمة "منطق" الذي تغير بشكل كبير خلال تطور المنطق منذ الأقدمين إلى الأزمنة المعاصرة، لذلك كل محاولة لوصف "المنطق" من طرف مؤرخ أو فيلسوف أو منطقي، كانت ستواجهه مشكلة إتخاذ قرار أي واحد يمكن التركيز عليه، ووفقا لمدى فهم الفيلسوف أو المنطقي نفسه لكلمة "منطق" أو ما الذي يمكن بالعقل اعتباره "موضوعا منطقيا" من وجهة نظرنا المعاصرة، فإذا أراد أحد الكتابة حول المنطق الأرسطي فهل سيأخذ في

---

[2] كلمة منطق من الأصل اليوناني: logikê/λογική وهو مصطلح بدوره مشتق من الأصل: lógos/λόγος أي اللوغوس، وتعني العقل، اللغة، الإستدلال، الخطاب، الكلمة، ووفق مقاربة أولية تعني فيما تعنيه دراسة القواعد الصورية التي يجب احترامها ومن أجل كل حجاج صحيح، وأول من استعمل المصطلح هو زينوقراط، حيث كان يشمل المنطق القديم الديالكتيك والخطابة، أما الآن فيتمفصل على عديد المجالات والإختصاصات مثل نظرية النماذج ونظرية البرهان. أنظر universalis.fr

الحسبان "الأورجانون" أم فقط "الأناليتيكا الأولى" أم "الأناليتيكا الثانية" (Gabbay & Woods, 2004, p. 1)

كما يذهب Grize (1972) إلى أن استخدام كلمة "منطق" بشكل مستمر يجعل من المشروع أن نحاول أن نفهم هذا المفهوم، ويتعلق مفهوم المنطق بتصورات ومفاهيم أخـــرى، من بينها كون المنطق طالما ارتبط بالذهن أي أن المنطق له علاقة مباشرة بالإستدلال.[3]

والمنطق عطفا على ما ذكرنا هو علم الإستدلال الصحيح (التفكير الصحيح)، وبعبارة أخرى هو علم القواعد التي وجب على كل استدلال اتباعها ليكون صالحا، ويمكن الجزم بأريحية بأنه ليس للمنطق مهمة واحدة والمتمثلة في مراقبة وتقصي مدى صلاحية الإستدلال فحسب بل بناء (structurer) مجموعة معارفنا، ذلك أن معارفنا وتجاربنا ما هي إل تجريدات يقوم بها العقل البشري تخلص في النهاية إلى إطلاق أحكام جزئية أو كلية على موضوعات الطبيعة، فالعلم في نهاية الأمر هو مجموع أحكامنا المنطقية على العالم وظواهره.[4]

أما بالنسبة لآخرين، فالمنطق يصرح بقوانين الفكر الأكثر عمومية، ليس للمُفَكَّر فيه فقط بل لما يمكن أن يشكل موضوعا للفكر. (Wagner, 2007, p. 4)

يبدو أننا نواجه بعض المشقة في فهم "الإثبات المنطقي" بوصفه ليس على الإطلاق اثباتا تجريبيا، بل هو يتمثل في العلم بنتيجة عملية منطقية، وبدونه لا يعرف العقل نتيجة عمليته نفسها لأن الفعل والمعرفة أمران مختلفان ويكون مثله مثل أولئك العمال في مصنع الزرابي الذين لا يرون إلا ظهر نسيجهم ومن دون الإثبات المنطقي فإن العقل يكون يدى

---

[3] تأتي كلمة الإستدلال في اللسان الفرنسي démonstration وهي تعني أيضا البرهان، غير أن بعض المناطقة غالبا يقيمون تبادلا بين كلمة استدلال واستنباط inférence لكن الثاني يأتي على سبيل استخلاص نتيجة بواسطة استدلال في حين أن الإستدلال قد لا يؤدي إلى نتيجة. أنظر (بلانشي ر.، 1968، صفحة 13).

[4] إن هذه الفكرة ما كرستها الوضعية المنطقية، للتوسع في هذه الفكرة نحيل القارئ الكريم على كتاب كارناب: البناء المنطقي للعالم

نسيجه المنطقي دون معرفته، وهذا من جهة أخرى أمر مستحيل لأن العقل في حاجة إلى أن يعرف نتيجة العملية التي قام بها ليتخذها قاعدة لعملية لاحقة لأن المعرفة ذات طبيعة بنائية بمعنى آخر هي مبرهنة نستخدمها لبناء براهين أُخرى، والإثبات المنطقي ليس في الجملة سوى الفكر المنعكس (reflexion) فالعقل لا يمكنه أن يعمل دون أن يرى نفسه يعمل، والتفكير الخالي من الإنعكاس على الذات يؤول إلى تجميعات للصور يمكن أن تختلط بها بعض العمليات المنطقية التي لا جدة فيها والتي تُعاد آليا بمقتضى العادة ودون أن يكون بينها رباط وهذا هو الحلم. (جوبلو، 1925، صفحة 19)

ويضطلع المناطقة بمهمة وضع نظرية في الإستدلال، لأن الإستدلال من أهم وظائف (طبيعة) البشرية، وأن يدرسوا (طبيعة) الصواب والخطأ، والعمليات التي بها يميز العقل أحدهما عن الآخر، و(طبيعة) اليقين وأنواعه ودرجاته، دون دعوى تعليم أحد ودون أمره ولا نهيه عن أي طريقة في الإستدلال وفي قيادة استدلالاته، فالعقل المستقيم، ولاسيما إن كان منتبها يمكنه أن يستدل استدلالا جيدا دون التفكير في القواعد التي يلتزمها ودون العلم بها.

فالمنطق إذن علم، وعندما نطبقه، فهو أيضا فن، وهو في هذا يشبه جميع العلوم الأخرى، لكن أفلا يمكن أن يكون معماريا بمعنى آخر؟، فهو على غرار علم الأخلاق وعلم الجمال، يريد أن يقرر ما يجب أن يكون، وليس ما هو كائن والمثل الأعلى وليس الواقع، وهو يفضي إلى أحكام قيمية وليس إلى أحكام وجودية. (جوبلو، 1925، صفحة 24)

ولما كانت غاية العقل القُصوى هي الحقيقة، فإنه لا يمكن أن يغيب عنا أن كل عمل عقلنا يتجه بل وينزع إلى اكتشاف الحقيقة باعتبارها غايته الخاصة أو باعتبارها وسيلة لغاية لاحقة.

المنطق هو علم العمليات العقلية من حيث هي تقود إلى الحقيقة، وعلم شروط المعرفة الصحيحة، لكنه لا يُعتبر إلا صورة عمليات العقل في صلته بالحقيقة عامة، وهكذا

فإن مبرهنة من مبرهنات الميكانيكا، يمكن أن تكون قاعدة لتفسير وقائع فيزيائية، وهذه القاعدة تأمر بإجراء عملية عقلية، ومع هذا فهي تنتمي إلى الفيزياء وليس إلى المنطق، لكن إتباع الفيزياء للميكانيكا والأسباب التي تجعله ضروريا هو من مجال نظرية العلم التي هي فرع من فروع المنطق. (جوبلو، 1925، صفحة 32)

2.لايبنتس: الأب المؤسس:

يؤكد راسل في كتابه حول لايبنيتس الذي نشره العام 1900 بأن جل فلسفة لايبنيتس مشتقة من منطقه،[5] كان للابنيتس تأثير كبير في ظهور المنطق المعاصر، سواء كان المنطق الرياضي، الرمزي أو الجبري، كما أن منطق لايبنتس يعتبر أساس منطق كل من بول وشرودر. (Jordain, 1916, p. 518)

يعتقد لايبنيتس بأنه يمكن اختزال أو رد تفكير الإنسان إلى حسابات، وبالتالي يمكن لهاته الحسابات أن تتجاوز العديد من الإختلافات في الرأي،[6] فالطريقة الوحيدة لتصحيح أفكارنا هي جعلها بمحاذاة فكر الرياضيين، وبالتالي يمكن لنا أن نجد أخطاءنا في لمح البصر، وعند مناقشة الأشخاص نقول لهم: لنقم بحساب ذلك، ونحدد من لديه الحق، كما يُضيف لايبنيتس بأنه من الممكن التفكير من خلال الحساب، فعوض أن نتجادل أو نتناقش يمكننا أن نحسب، إن حساب المنطق عند لايبنيتس يأخذ شكل إجراء عملياتي موجه كما عند البراجماتيين، أي لإعطاء نتائج لكنه في المنطق من النادر جدا أن يكون الحاصل عدديا، بل الأمر يتعلق بوضع حد للخلافات والسجالات من خلال التحديد عن طريق الحساب ما هو قابل للإستنتاج منطقيا انطلاقا من مقدمات موضوعة ومقبولة، أو معارف

---

[5] Leibniz's philosophy was almost entirely derived from his logic أنظـر (Russel, 2005)

[6] وبالتالي فمرد كل خلاف أو اختلاف في وجهات النظر هو اللغة، وهذا ما تحدث عنه فيتجنشتاين فيما بعد بقول إن كل سوء فهم في الفلسفة سببه اللغة، ومحاولة لايبنيتس إنشاء لغة رمزية مشتركة هي بمثابة أرضية كونية مشتركة تلغي كل سبب للخلاف.

محصلة، إن الحساب المنطقي إذن يبرهن أي واحدة من الأطروحتين المتعاكستين صحيحة، ويبين ما هي المعارف التي تنقصنا من أجل الحصول على نتيجة حاسمة. (Jolley, 1994, p. 216)

1.2.اللغة الكلية

عادة ما يُتـــرجم مصطلح characteristica universalis من اللاتينية إلى الإنجليزية بـ Universal characteristic أو Universal character وهي لغة كلية أو كونية صورية، تخيلها لايبنيتس كلغة قادرة على التعبير عن المفاهيم الرياضية، العلمية والميتافيزيقية، طمح من خلالها لايبنيتس إلى إنشاء لغة مألوفة في إطار حساب منطقي كلي، أو ما يصطلح عليه هو بـ "Calculus satiocinator" أي آلة حسابية للحساب، عندما ترجمها لايبنيتس نفسه للغة الفرنسية استخدم المصطلح "Spécieuse generale" بنفس المعنى باللغة اللاتينية، بوصفها لغة أفكار "ideographic language"، لم يكن إذن مشروع لايبنيتس منطقيا صرفا بقدر ما كان سعيا لتمثيل المعرفة، هذا المجال الذي ظل مغيبا حتى أيامنا هذه لاسيما في حقل فلسفة العلوم والإتجاهات المنطقية المعاصرة، يقول كوتيرا (Couturat): "هذا يعني أن الخاصية الحقيقية بالنسبة للايبنيتس بمثابة إيديوغرافيا، معناه نسق أو نظام من العلامات التي تمثل بشكل مباشر الأشياء (أو الأفكار) وليس الكلمات، لتصبح كل أمة قادرة على ترجمتها إلى لغتها الخاصة". (Couturat, 1901, p. 52)

إن ما يمكن أن نلحظه أنه لا يمكن بأي حال من الأحوال فصل هاته الآلة الحسابية عن المشروع المنطقي للايبنيتس الذي قدمه كنوع من العلوم العامة كما أسلفنا والتي تأتي في مقدمة العلوم الموسوعية كلغة كونية أو كلية (langue universelle) تسمح بالتعبير المنطقي عن معارفنا، وبالتالي تحليل للأفكار، الحقائق والبراهين (الاستدلالات) من خلال اختزال الأفكار وردها إلى قضايا أولية بسيطة، إذ يعتبر هذا المشروع الدافع الأقوى لنظرية المعرفة عند لايبنيتس وبالتالي النسق الفلسفي عند بصفة عامة.

إجرائيا، هــذه العمليات الحسابية المنطقية هــي عملية إنــتاج لنتــائج مــن خـــلال معطيات/مدخلات أولية تُطرح على شكل أسئلة في انتظار الإجابة عليها، وتضطلع بمهمة هذه اللغة بتعويض أو استبدال ريبية ولا يقينية الاستدلال الذي نستخدم فيه اللغة العادية المستعملة بأُخرى رمزية حسابية قادرة على الإجابة على الأسئلة المطروحة أو تقييمها بكل يقينية ودقة احتمال تتبنى إجابة معينة أو أخرى. (Wagner, 1998, p. 83)

2.2.الرياضيات والمنطق:

كان لايبنيتس أول من لاحـظ وجــود هـــذه الرياضيات الكــلية (Mathématique universelle) التي ترتكز على مبادئها ومبرهناتها كلُّ العلوم الرياضية الأخرى وتندمج هي الأخرى مع المنطق أو على الأقل تشكل جزءا منه (Couturat, 1901, p. 317)، فليس يوجد فحسب تشابه بين المنطق والرياضيات الكلية إنما شكلُ من أشكال التوازي أو التطابق بينهما، لأن الرياضيات الكلية تشكل علما عاما للعلاقات حيث تتميز كل علاقة بعدد معين من الخصائص الصورية، أعطت مكانا لنظرية خاصة لها مسلماتها الخاصة ومبرهناتها، وتحصلنا في الأخير على "حساب" قواعد وعمليات على المسلمات السابقة بعبارة مختصرة هذه العلاقات والعمليات شكلت لنا جبرا (Algebra).

بجانب الجبر الكلاسيكي، الذي لم يكن غير منطق الأعداد والكميات، مؤسَّسا فقط على علاقة واحدة وهي علاقة التساوي "="، أسس لايبنيتس جبرا آخر مرتكزا على علاقات أُخرى كالتطابق والتشابه، وجبر الهوية والتضمن (الإحتواء)، التي دفعت إلى تطور المنطق الكلاسيكي، وبما أن كل هذه الأنواع من الجبور ترتكز على الخصائص الصورية للصيغ والتركيبات، فإن الرياضيات الكلية أصبحت بالفعل منطقا صوريا أي "علم القوانين والأشكال العامة للفكر".

دفعت هذه الخصائص التي أضافها لايبنيتس البنى الجبرية في تنوعها وخصوبتها لأقصى الحدود، هذا الذي سيساهم بشكل كبير في تطور البُنى الجبرية، وجعلها بالفعل المبدأ الأول لتطور الرياضيات المحضة أو الخالصة والتي تشكل مبدأ كل العلوم بما فيها علم الحساب، لقد كان بالفعل لايبنيتس سباقا لكشف ماهية الرياضيات بوصفها كما يقول كانط فيما بعد ملكة العلوم لما لها من أهمية في صياغة قوانين العلوم الأخرى بطريقة صورية، مما يسمح باستنتاج قوانين من أخرى.

يذهب لايبنيتس لأبعد من ذلك، إذ يعتبر أن المنطق الصوري يمتد ليتقاطع مع الرياضيات، بالفعل يرى كوتيرا (1901) أن الطابع الصوري للإستدلالات هو الذي يضمن القيمة الكلية والصورية للإستنباط. (Couturat, p. 318)

يحتل مبدأ الهوية (identity) A=A درجة كبيرة من الأهمية، إذ يرى لايبنيتس أنه إذا استطعنا (وإذا وجب علينا) برهنة قضية ما، فالمطلوب ليس أبدا أن تكون واضحة بذاتها أو مستنبطة حتى وإن اتضح ذلك فعلا، بل يجب أن تكون هَوَوِيَة أو مطابقة (identic) أي يمكن ردها إلى مبدإ الهوية، هذا ما يبينه لايبنيتس من خلال مثال القضية الحسابية "2+2=4" فهذه القضية تُبرهن من خلال تعريف العدد 2 و4 ومسلمة تعويض التكافؤ، ومنه يجعل من مبدإ الهوية مسلمة غير قابلة للبرهنة (A=A)، في حين يضع تعريفا آخر للترتيب حيث يعطي تعريفا للقضية A أقل من B، إذ يقول يكون A أقل من B إذا شكل A جزءا من B، وهذا ما يتوافق تماما مع التعريف المعاصر في الجملة المنطقية التالية:

$$B < A \Rightarrow (\exists X \quad A = X + B)$$

3.المنطق عند كانـــــط:

يبدو أن إيمانويل كانط هو مبدأ كل فلسفة نقدية سواء كانت في الفلسفة أو الرياضيات أو المنطق، فما نفتأ أن نرجع إليه أو نلتقيه، وبما أن نظرية المعرفة هي نقطة إنطلاق كل فلسفة (زيناتي، 2013، صفحة 178)، وجب الحديث عن نظرية المعرفة وكيف تحصل عند الذات، لمحاولة مقاربة منطقه، والأصل في الفلسفة النقدية عند كانط هو تساؤله حول طبيعة المعرفة البشرية وقيمتها ووجودها وعلاقتها بالوجود، (إبراهيم، 1963، صفحة 46) ولا بد لمن أراد استخدام عقله أن يتفحص ويسائل هذه الأداة، فطرح أسئلته الثلاث: ما الذي يمكنني أن أعرفه؟ وما الذي ينبغي أن أعمله؟ وما الذي أستطيع أن آمله، ثلاثة تساؤلات أفضت بكانط إلى كتابة ثلاثيته النقدية الشهير.[7]

1.3.نظرية المعرفة عند كانط:

ما يميز نظرية المعرفة عند كانط، ما يسميه هو بالثورة الكوبرنيكية التي قام بها في مجال المعرفة الفلسفية الشبيهة بتلك التي قام بها كوبرنيك في مجال الفلك، فمن المعروف أن كوبرنيك قال بدوران الأرض بعدما كان العلم السابق يقول بثباتها، فلم تعد إذن الأرض هي المركز الذي تدور في فلكه الكواكب الأخرى بل هي مجرد كوكب يدور حول الشمس. وهكذا فقد قلبت الآية إذن، وأصبح الدوران معكوسا، وفي هذا الصدد يقول كانط: "كان المفروض من قبل أن كل معرفتنا يجب أن تطابق الأشياء، لكن باءت بالفشل كل المحاولات إنما معرفتنا بالأشياء بإقامة ما هو قبلي فيها عن طريق تصورات، يجب أن نحاول إذن ما إذا كنا نصيب نجاحا في شؤون الميتافيزيقا[8] إذا فرضنا أن الأشياء يجب أن تطابق معرفتنا، ذلك فرض أكثر ملائمة لما نريد، يجب أن يكون ممكنا أن تكون لدينا معرفة قبيلة للأشياء

---

[7] نقد العقل الخالص العام 1781، نقد العقل العملي العام 1788 ونقد ملكة الحكم العام 1790

[8] وحتى في مجال العلوم الطبيعية والرياضة

أي تحديد ما هو سابق على ما نستقبله منها، يجب أن نقتدي إذن بالفرض الأول لكوبرنيك بكل دقة [...] يمكننا محاولة تجربة مماثلة في الميتافيزيقا، بالقياس إلى حدوس الأشياء، إذا كان يجب على الحدس أن يطابق تركيب الأشياء فلا أدري كيف نحصل على أية معرفة قبلية عن هذه الأشياء، ولكن إذا كان يجب على الأشياء (كموضوع للحواس) أن تطابق تركيب ملكتنا الحسية، لا أجد صعوبة في تصور مثل هذا الإمكان". (زيدان، 1979، الصفحات 58–59) والمقصد من قول كانط أن ما انتهجه شبيه بما قام به كوبرنيك حول علاقة الذات (العقل) بالموضوعات؛ فقد كان يُعتقد في السابق أن العقل يدور في فلك الواقع سواء أكان هذا الواقع محسوسا أو مفارقا، إلا أن كانط أكد أن الواقع هو الذي يدور في فلك العقل وليس العكس. بمعنى أن الحقيقة لا توجد جاهزة في الواقع بل إن العقل هو الذي يبنيها انطلاقا من المعطيات الواقعية الحسية، وخلُص كانط إلى أن العقل يحتوي فقط على أفاهيم أو مبادئ قبلية بواسطتها يعمل العقل على تحويل وتنظيم المعطيات التجريبية لإنتاج معرفة كلية وضرورية.

يرى كانط بأن "كل معرفتنا تبدأ بالحواس وتنتقل منها إلى الفاهمة وتنتهي في العقل الذي لا يُصادَف فينا شيء أسمى منه"، (كانط، 1787، صفحة 187)، إذ يؤكد أن التجربة هي نقطة البدء في كل ما لدينا من معارف، لأنه ما ينبه الملكة العارفة الكامنة فينا إنما هو الموضوعات التي تؤثر على حواسنا، فتولد في أذهاننا تمثلات، (إبراهيم، 1963، الصفحات 47–48) فهي بمثابة المنبه أو المحفز لقوانا العاقلة على تحقيق بعض أوجه النشاط، يقول كانط في هذا الصدد: " تبدأ كل معرفتنا مع التجربة، ولا ريب في ذلك البتة، لأن قدرتنا المعرفية لن تستيقظ إلى العمل إن لم يتم ذلك من خلال موضوعات تصدم حواسنا ، فتسبب من جهة، حدوث التصورات تلقائيا، وتحرك من جهة أخرى، نشاط الفهم عندنا إلى مقارنتها، وربطها أو فصلها، وبالتالي إلى تحويل خام الإنطباعات الحسية، إلى معرفة بالموضوعات تُسمى تجربة، إذن لا تتقدم أي معرفة عندنا زمنيا على التجربة، بل

معها تبدأ جميعا" (كانط إ.، 1787، صفحة 45) ولكن على الرغم من أن كل معرفتنا تبدأ من التجربة إلا أنه لا يعني أن تكون بالضرورة كلها مستخلصة منها، ودليل ذلك أن هناك من المعارف ما هو مفارق للطبيعة مستقل تمام عن التجربة، وهو ما يصطلح عليه كانط بالمعارف القبيلة،[9] وهي معارف أولية سابقة عن كل تجربة حسية.

ويميز كانط في الذهن البشري بين ثلاث ملكات[10]: الحساسية أو ملكة تلقي الحدوس الحسية في المكان والزمان، وهذان الأخيران هما الشرطان القبليان ويعتبرهما كانط مقولتين قبليتين لا يمكن لأي معرفة أن تتأسس بدونهما، الفاهمة: أو ملكة تشكيل وربط المُعطى المختلف والمتنوع في الحدس الحسي، ويتم تشكيله بالفاهمة، إذ يعتبر كانط الحدوس عمياء بدون المفاهيم والمفاهيم فارغة بدون حدس، أما الملكة الثالثة فهي ملكة العقل، والفاهمة في الفلسفة الكانطية مجهزة بشكل قبلي بمجموعة من الأفاهيم والصور التي لا يمكن ملاحظتها إلا من خلال العلاقة العميقة بينها وبين الحساسية، وعليه فالمعرفة الحقيقة لا تكون ممكنة أو قابلة للتحقق إلا عن طريق الإتصال بين الفاهمة والحدس، والدور المنوط بالفاهمة هو الربط كما أسلفنا بين موضوعات الحدس، لتضفي عليها الوحدة والإتساق بل وحتى المعنى.

أي معرفة للأشياء عليها أن تتماشى مع ما في حاستنا وفهمنا (العقل كملكة تحاول أن تعرف)، ذلك أن التجربة نفسها هي طريقة للمعرفة تتطلب مساهمة العقل الذي يسير

---

[9] القبلي أو: priori هو كل معرفة سابقة عن الخبرة الحسية، وهو يختلف عن الأفكار الفطرية عند ديكارت، ذلك أن القبلي لا يعطينا أي معارف، يطرح كانط سؤالا في كتابه نقد العقل المحض الصفحة 45 هل يوجد نوع من المعرفة مستقل عن التجربة وحتى عن جميع الإنطباعات الحسية؟ وتُسمى مثل هذه المعارف قبلية، وتُفرق عن التجريبية التي مصدرها بعدي أي في التجربة. أنظر universalis.fr

[10] شكل هذا التقسيم لملكات العقل وشرح كانط لكيفية حصول المعرفة نظرية في علم النفس المعرفي سابقة لأوانها بعد محاولة جون لوك حول الفاهمة البشرية.

حسب قاعدة تملكها الذات العارفة، قبل أية تجربة حسية خارجية. وهذه القاعدة هي سابقة عن كل اتصال بالعالم الخارجي فهي قبلية أو بعبارة ديكارت فطرية.[11]

تتمثل في مجموعة من المفاهيم السابقة زمنيا ومنطقيا عن أي خبرة أو تجارب خارجية. غير أن الملكتين السابقتين لا تمكننا إلا من كشف كنه الطبيعة وظواهرها (الفينومين)، بوصفها تصورات أو تمثلات أو أفهومات داخل فاهمتنا من خلال صبها ضمن مقولتي أو وعائي الزمان والمكان إن صح التعبير، فلا يمكن لا للحساسية ولا للفاهمة الولوج أو الوصول للشيء في ذاته أو (النومين).

أما الملكة الثالثة فهي ملكة العقل، وهي الملكة العليا والأسمى لملكة العقل عند كانط، فهي ملكة تحاول دوما تخطي ما يتبدى لها، وأن تذهب إلى ما وراء حدود الطبيعة، وتتساءل عن النفس ومصيرها، وعن الخالق، وعن معنى الكون، والوجود، أي أنها تحاول أن تتخطى عالم الظواهر إلى عالم الأفكار، (زيناتي، 2013، الصفحات 180-181)، ويجدر بنا ذكر النص التالي العميق لكانط: "إن بعض المعارف تخرج حتى عن حقل جميع التجارب الممكنة [...] وفي هذه المعارف التي تتخطى العالم الحسي وحيث لا يمكن للتجربة أن تعدل أو تصحح، تقع مباحث عقلنا التي نعدها من حيث الهدف النهائي، أفضل أهمية وأسمى بكثير من كل ما قد تفيدنا به الفاهمة في حقل الظواهر، ومشكلات العقل المحض هذه هي: الله، الحرية والخلود". (كانط إ.، 1787، صفحة 47).

وما يمكن أن نستشفه من نص كانط بداية أن ملكات العقل في تراتبية بدءا من أدناها الحساسية ثم الفاهمة أوسطها وصولا إلى أسماها وهي العقل، وهذه التراتبية ليست إعتباطية بل تبعا لمهمة كل ملكة، فالأولى وظيفتها تلقي الإنطباعات والحدوس الحسية

[11] لا نقصد هاهنا مقابلة أو مقاربة القبلي عند كانط بالفطري عند ديكارت ذلك أن هذه المعارف الأولية هي بمثابة شروط ضرورية قائمة في الذهن دون أن تكون عبارة عن معارف جاهزة معدة من ذي قبل، في حين أن الأفكار الفطرية عند ديكارت تتضمن بصورة واضحة بديهيات الرياضيات وقوانين الفكر وقضايا أُخرى يُنظر إليها على أنها واضحة بذاتها.

التي تعمل كمنبه للثانية، التي تضفي على قالبي الزمان والمكان، لتصبح الحدوس كلية ذات معنى، أما ملكة العقل فهي تتجه إلى ما وراء الطبيعة، إلى الأسئلة التي ما فتئت تشكل كل إنسان منذ أن وطأت قدما الإنسان الأرض وهي الأسئلة الميتافيزيقية الكبرى[12]: الله، النفس والكون.

وتجدر الإشارة إلى أن التفريق الذي وضعه كانط بين ملكة الحساسية وملكة الفاهمة ليطابق تمام الطريقة التي عالج بها الأحكام التركيبية والأحكام القبيلة،[13] المتمثلة أساسا في الخط الذي تبناه فيما تعلق بنظريته الخاصة في الحكم، فقد فصل منذ البداية بين عمليتي الإدراك الحسي والفهم، على اعتبار أن الأولى هي من اختصاص ملكة الحساسية، والثانية تدخل في مجال ملكة الفهم، وفي هذا الإطار يقول كانط: "إن الموضوعات معطاة لنا عن طريق الحس، والحس وحده هو الذي يعطينا الإدراكات الحسية، وأما عن طريق الفهم، فإن الموضوعات تصبح متعقَّلة وتتولد عنها المفاهيم". (إبراهيم، 1963، الصفحات 51-52)

يخلص كانط إلى أن مهمة نقد المعرفة ليست سوى العمل على تبين ما يرد إلينا من الخارج، وما نضفيه نحن على المعطيات الحسية، عن طريق ما لدينا من صور أولية قبلية سابقة عن التجربة.

2.3.الأحكام التحليلية والأحكام التركيبية:

يرى كانط أنه لو عمدنا إلى تحليل المعرفة العلمية الحقة، لوجدنا أن قوامها مجموعة من الأحكام التي تحتمل الصحة أو الخطأ، ومن هنا اهتم كانط بتصنيف وإقامة التمييز بين

[12] وهي ذات الأسئلة التي بدأ بها كانط مشروعة الفلسفي في محاولة منه لتأسيس الميتافيزيقا كعلم، غير أنه وفي إجابة عن سؤال طرحه: هل الميتافيزيقا ممكن؟، يجيب كانط: إن الفرصة لم تتح للعقل الإنساني في حالة الميتافيزيقا هذه أنظر (كانط إ.، 1991، صفحة 13)

[13] أنظر العنصر القادم

الأحكام (لا القضايا)[14] حتى يتبين خاصية كل منها، وطريقة تكونه ومجال استخدامه (إبراهيم، 1963، صفحة 47)[15]، ونقصد هاهنا خاصية كل منها أي هل هي على سبيل الأحكام التحليلية أم الأحكام التركيبية، أما مجال الإستخدام فنتبين أيها أصلح للميتافيزيقا منها إلى الرياضة البحتة منها إلى العلوم بصفة عامة، حيث يقول كانط: "في جميع الأحكام التي يُفكَرُ فيها علاقة موضوع بمحمول، تكون العلاقة ممكنة على نحوين: فإما أن ينتمي المحمول (ب) إلى الموضوع (أ)، بوصفه شيئا متضمنا في المفهوم (أ) أي بطريقة ضمنية، وإما أن يكون (ب) خارجا عن المفهوم (أ) خروجا تاما على الرغم من ارتباطه به. في الحالة الأولى أسمي الحكم تحليليا، وفي الأخرى أسميه تركيبيا، فالأحكام التحليلية هي التي يُفكَرُ فيها الاقتران بين الموضوع والمحمول. من خلال الهوية أو التعريف، والتركيبية دون ذلك، ويمكن أن نسمي الأولى تفسيرية والثانية توسعية". (كانط إ.، 1787، صفحة 49)

وبعبارة أخرى فإن في القضية التحليلية يكون المحمول[16] عنصرا من عناصر الموضوع، بمعنى أنه يكون محتوى فيه، وعليه فالعلاقة بين المحمول والموضع علاقة إحتواء، أو علاقة تضمن، وهي ضمنيا تشير إلى علاقة هوية، وهي في الحقيقة قضايا طوطولوجية أي أنها قضايا تحصيل حاصل لا تزيد المعرفة شيئا، ولهذا كما أسلفنا يسميها كانط بأنها تفسيرية توضيحية، تقول ذات المعنى بصيغة أخرى، ويسوق كانط مثالا على ذلك فيقول: "عندما أقول كل الأجسام (هي) ممتدة يكون ذلك حكما تحليليا لأنه، ليس علي

---

[14] يستخدم كانط مصطلح "حكم" jugement بدل مصطلح "قضية" proposition وذلك لأنه مهتم بالقضية لا من حيث هي معان موضوعية بصرف النظر عن قائلها، وإنما بحيث يدل بها أو يقررها شخص ما، ليضمن كانط الدور الإيجابي الذي يقوم به العقل الإنساني في معرفة الأشياء. أنظر (زيدان، 1979، صفحة 61)

[15] العلم والرياضيات العقلي أم البعدي

[16] تتكون القضية الحملية في منطق المحمولات Logique des prédicats من موضوع أو تصور ومحمول كقولنا سقراط (هو) ميت، سقراط محمول وميت موضوع ووضعنا ضمير الغائب بين قوسين ليحل محل فعل الكينـــــونة الذي لا يظهر في اللسان العــــربي، وباللـــسان الفرنـــسي نقول: Socrate est mort: mort: prédicat/attribut Socrate: sujet, est. أنظر محمود فهمي زيدان: المنطق المعاصر نشأته وتطوره.

أن أتخطى المفهوم الذي أعطيه للجسم كي أجد الإمتداد مرتبطا به، بل على أن أحلل هذا المفهوم أي أن أعي فقط المتنوع الذي أفكره فيه دائما كي أعثر فيه على هذا المحمول، إنه إذن حكم تحليلي. وعلى العكس عندما أقول: كل الأجسام (هي) ثقيلة، فإن المحمول هنا مختلف تماما عما أفكر في مجرد مفهوم الجسم بعامة، فإضافة مثل هذا المفهوم تعطي إذن حكما تركيبيا". (كانط إ.، 1787، صفحة 49)

من الواضح إذن، ومن خلال المثال الذي يسوقه كانط عن الحكم التحليلي، أنه لا يمكن تصور جسم دون أن أتصور فكرة امتداده، فلا يوجد جسم غير ممتد في مكان، وبالتالي فما الإمتداد إلا مجرد تحليل لتصور الجسم، ولسنا بحاجة لمُعطى أو خبرة تجريبية لندرك أن الجسم حاصل على الإمتداد، بعبارة أخرى، فكرة الإمتداد داخلة في هوية الجسم في حد ذاته سلفا، أي أن كل تصور عن الجسم يتضمن كل فكرة عن الإمتداد وما القول بالإمتداد إلا تحليل أو شرح لمفهوم الجسم، أما المثال الثاني الذي يعرضه كانط عن الحكم التركيبي فإن الحكم عن الجسم بالثقل ليس متضمَنا في مفهوم أو تصور الجسم، ومثل هكذا حكم لا نصل إليه إلا إذا إلتجأنا للخبرة الحسية فمحمول هذه القضية متميز كل التمايز عن الجسم، كما أن المحمول هنا أي الثقل لا يضيف شيئا جديدا للموضوع أي معرفتي عن الجسم[17].

وبالجملة فإنه في الأحكام التركيبية، لا يمكن استخراج هذا المحمول من مجرد تحليل فكرة الجسم مثل الحكم التحليلي الذي تضمَّن سلفا فكرة الإمتداد، بل لا بد للعودة إلى التجربة من أجل توسيع المعرفة بالجسم والتحقق من أنه لا يتسم بصفات الإمتداد والشكل واستحالة

[17] يأخذ بعض النقاد على كانط تعريفه هذا للأحكام التركيبية بوصفها تزيد معرفتنا، وحجتهم أن ما قد يبدو تركيبيا لشخص ما قد يبدو تحليليا لشخص آخر، فحين يقرأ الطفل الناشئ أن الجسم ممتد يكون معنى القضية جديدا عليه، ذلك أن الطفل لن يحتاج لخبرات حسية لاختبار القضية وإنما مزيدا لفهم معاني الكلمات الواردة، وحين أقرأ أن الحديد يمتد بالحرارة، سوف لا تضيف القضية إلي معرفة جديدة، على معارفي السابقة، لكنها مع ذلك قضية تركيبية من حيث أن المحمول ليس مجرد تحليل تصور لموضوع، وإنما استلزم خبرات حسية معينة. أنظر (زيدان، 1979، الصفحات 55-56)

النفاذ فحسب، بل يتصف أيضا بصفة الثقل، ومن هنا فإن الأحكام التركيبية ليست تحصيل حاصل، بل هي أحكام مفيدة من شأنها أن تكسبنا معلومات جديدة، وإذا كان الفلاسفة التجريبيون قد أرجعوا كل الأحكام العلمية إلى الأحكام التركيبية، فذلك لأنهم قد لاحظوا أن الفكر لا يستطيع أن يوحد بين مدركين، اللهم إلا أن يكون قد لاحظ في التجربة إرتباطهما، وبهذا المعنى يكون الحكم هو بمثابة تقريب بين فكرتين[18]، بقيتا حتى هذه اللحظة منفصلتين، بحيث نوحد بينهما، كما وحدت بينهما التجربة. (إبراهيم، 1963، الصفحات 49-50)

غير أن كانط إعتمد في تقسيمه هذا على شكل واحد من القضايا وهو القضايا الحملية على سبيل كل (أ) هو (ب)، وهي قضايا على شكل القياس الأرسطي، على اعتبار أن المنطق الأرسطي هو أكمل وأتم المناطق، متجاهلا تماما القضايا الشرطية على سبيل إذا كان (أ) فإن (ب) ، فقد اعتقد كانط بالصدق المطلق للمنطق الأرسطي، كقولنا مثلا: إذا كان الجسم ممتدا فإنه يشغل حيزا في الزمان والمكان وهي قضية شرطية تحليلية، وقولنا أيضا إذا كان الجسم ثقيلا فيصعب على طفل حمله وهي قضية شرطية تركيبية ... (زيدان، 1979، صفحة 64)

3.3.الأحكام التركيبية القبلية:

إن أول من أدرك حقيقة أن الرياضيات تعلمنا أشياء عن الطبيعة، والتي ستشكل لنا مشكلة إذا ما أخضعناها لصرامة الإستدلال الرياضي هو بلا منازع كانط، إن الحل الذي اقترحه لحل هذه المعضلة هو تقديمه للمقولة (catégorie) المشهورة الأحكام التركيبية القبلية، والتي

[18] ولهذا يُرجع كانط الأحكام التركيبية لملكة الحساسية، التي تضطلع بمهمة تلقي الحدوس الحسية والمدركات والمعطيات الحسية، في حين تقوم ملكة الفاهمة بعملية الربط والجمع بين تلكم المعطيات وتموضعها ضمن وعائي الزمان والمكان القبليين. أنظر جورج زيناتي: الفلسفة في مسارها.

تبدو راهنا غير معقولة، لكنه لا يمكن بأي حال من الأحوال تصور تلك الحقبة رياضيات غير طبيعية. (Bouleau, Girard, & Louveau, 1983, p. 16)

إن القضية "المثلث له ثلاث زوايا" والقضية "الأرض لها قمر" صحيحتان الإثنتين، لكن ليس لذات الأسباب، إن القول بمثلث له ثلاث زوايا تشكل جزءا من تعريف كلمة "مثلث"، لكن بالمقابل، لا تحتوي كلمة "أرض" ما نجزم من خلاله بامتلاكها قمرا يدور حولها، وبعبارة أخرى، لا يمكننا أن نتخيل مثلثا بأربع زوايا، لكن يمكننا أن نتخيل الأرض كما عطارد أو الزهرة ليس لها أقمار، الحكم على قضية بصحتها ضرورة يسميه كانط "بالحكم التحليلي"، وعلى العكس من ذلك، يسميه "تركيبي أو تأليفي" أي الحكم على صحة قضية دون أن يكون جزءا من تعريفها، وهكذا فالحكم على القضية "المثلث له ثلاث زوايا" صحيح وتحليلي كما أن الحكم على القضية "الأرض لها قمر" صحيح وتركيبي (Dowek, 2007, p. 50).

هناك فرق آخر يستخدمه كانط يعاكس الأحكام القبلية والأحكام البعدية، الحكم القبلي يتأسس أو يتقوم داخل عقولنا، في حين أن الحكم البعدي يتطلب التفاعل مع الطبيعة أي أنه يتأسس خارجنا، لنأخذ مثالا على ذلك: إن تقوم فكرة أن المثلث له ثلاثة زوايا يتطلب ببساطة التفكير في هذا السؤال: الحكم يجري داخل ذواتنا، بالمقابل، حتى وإن فكرنا وأمعنا النظر لن نتوصل للإقتناع بأن للأرض قمرا، لغاية لحظة أو أخرى سيستلزم الأمر النظر إلى السماء.

إن هذين المثالين، يجعلاننا نفكر بل ونعتقد بأن الأحكام التحليلية هي دائما أحكام قبلية والأحكام التركيبية هي دائما أحكام بعدية، غير أنه ليس بالضرورة دائما أن يتطلب الأمر تجارب لمعرفة الطبيعة. المثال الأشهر للحكم التركيبي القبلي هو الحكم "أنا كائن"[19]

[19] Je suis, I am, Ich bin

فالطبيعة موجودة بدوني منذ زمن وستوجد من بعدي، ويمكن أن تكون موجودة أيضا لو لم أكن قد وُجدت أصلا، لا يمكنني القول بأني موجود بالتعريف، إن حكم وجودي بالتالي تركيبي، وبالمقابل وعلى عكس ما يمكنني فعله إذا ما سُئلت حول وجود حيوان الكنغر، فلن يحتاج الأمر الذهاب للحياة البرية لأقتنع بوجودي الخاص، لأنه أنا أفكر إذن أنا موجود. حقيقة أن الزمن موجود هو أيضا حكم تركيبي قبلي، فالزمن ليس موجودا بالتعريف، ولا توجد أي ضرورة للقول بأن الأشياء تتحرك أو تتغير، وبالرغم من ذلك، لسنا بحاجة للمشاهدة خارج أنفسنا نحن لمعرفة ما إذا كان الوقت موجودا. إن وعينا يتطور في الزمن، وهذا يكفينا ليكون لدينا وعي بوجود الزمن. (Dowek, 2007, pp. 50-51)

يصرح كانط جازما: "كل الأحكام الرياضية تركيبية" (كانط إ.، 1787، صفحة 50)، إذ يقر في ذات الفقرة بأن هذه القضية قد أفلتت من محللي العقل البشري، إذ لطالما ظنوا بأن جميع الإستدلالات الرياضية تُحصَّل بمبدأ عدم التناقض،[20] ذلك أن القضايا الرياضية هي دائما أحكام قبلية وليست تجريبية، لأنها مصحوبة بضرورة لا يمكن أن نستمدها من التجربة. (كانط إ.، 1787، صفحة 50)

وبعبارة أخرى، فإنه لا خلاف على أن القضية الرياضية قبلية بمعنى أنها ليست مشتقة من التجربة، وأنها ضرورية ضرورة منطقية، غير أنه ينكر كما أسلفنا أن القضية الرياضية تحليلية بالمعنى الذي يسوقه كانط في تعريف القضية التحليلية بوصف المحمول متضَمَّنا في الموضوع، أو محمولها ليس سوى تحليل للموضوع، إذ يرى أنها تركيبية، يسوق

[20] مبدأ عدم التناقض: Non contradiction: هو أحد قوانين الفكر التي وضعها أرسطو، ومضمونه أن الشيء لا يمكن أن يتصف بصفة ونقيضها، استخدمه كانط للتفريق بين القضايا التحليلية والقضايا التركيبية، أما منطقيا فيمكن التعبير عنه بالصيغة المنطقية: $\neg(P \wedge \neg P)$، لا تظهر هذه القضية ضمن البديهيات، لكن بصفة عامة هي إحدى المبرهنات الأولى التي تم البرهنة عليها في الصورنة المنطقية أو صورية هلبرت، وملفوظها أن كل قضية P ونقيضها لا يمكن أن يكونا صحيحين معا أو خاطئين معا، أما في المنطق المعاصر ووفقا لقوانين المنطق لدى مورغان يمكن توزيع النقيض على القضيتين فنحصل على مبدأ الثالث المرفوع $(\neg P \vee P)$

لنا كانط المثال الآتي: إن القضية 5+7=12، إذ يقول بأن 12 ليست متضمنة في 7 أو 5، وإنما ينطوي فقط على ربط العددين في عدد واحد، دون أن يحدد هذا الرابط النتيجة، فلكي نحدد هذا العدد يجب أن نخرج من مجال الأفكار أو التصورات إلى مجال الحدس، كأن نقول خمس أصابع أضفنا إليهم سبعة أصابع، أو خمس حصوات أضنا إليهم سبع حصوات.[21]

كما يضرب كانط مثالا آخر في الهندسة[22]، بالحكم القائل: "الخط المستقيم هو أقرب مسافة بين نقطتين"[23]، فيقول إننا هنا بإزاء حكم تركيبي، لأن تصورنا للمستقيم تصور كيفي صرف، لا أثر فيه لمعنى الكم المتضمن في محمول "أقرب مسافة" فنحن هنا بإزاء قضية تركيبية لا يمكن اعتبار محمولها متضمَنا في موضوعها، ما دام من المستحيل استخلاص فكرة "المسافة القصيرة" من فكرة "الخط المستقيم" عن التحليل العقلي الصرف، ولكن هذه القضية في نفس الوقت قبلية لأن العلاقة بين موضوعا ومحمولها علاقة ضرورية كلـــــية،

21 يلاحظ كانط أيضا أن الجمع والإضافة عملية عملية تتم في زمن، ففكرة العد وفكرة الزمن يؤلفان العنصر التركيبي في قضايا الحساب، كما يبدو أن كانط يرجع كل عملية حسابية للحس، وهذا ما يؤكده من خلال فكرة الزمن أي أن كل عملية حسابية تتم فيما يطلق عليه كانط باسم الحدس الخالص، إن هذه النقطة هي التي ينطلق منها جوتلوب فريجه في معارضته الشديدة لكانط، ذلك أنه يرجع علم الحساب للمنطق وليس للحدس أي أن قضاياه قبلية تحليلية وليس كما زعم كانط، مستخدما أكسيوماتيك خاص مختلف عما استخدمه لايبنيتس في البرهنة على أن 2+2=4.

22 لطالما شكلت الهندسة منذ الحارات القديمة الشعبية الأكثر أهمية من بين إختصاصات الرياضيات الأخرى، ففي مجال الهندسة بالضبط، تطورت الرياضيات وظهرت أفكار جديدة كان لها عظيم التأثير الراديكالي على مفاهيم الرياضيات الطبيعية. أنظر (Bouleau, Girard, & Louveau, 1983, p. 16)

23 تجدر الإشارة هنا إلى أكثر من نقطة نراها غاية في الأهمية، أولها أن كانط لم يطلع على الهندسات غير الإقليدية مثل هندسة ريمان وهندسة لوباتشوفسكي، وبالتالي فالقضية سالفة الذكر مبنية على حدود معارفه بالهندسة ومستوى تطورها آنذاك، ومن جهة أخرى بينت الهندسات المعاصرة لاسيما في مجال الطوبولوجيا ونظرية القياس أن قصر المسافة بين نقطتين مرتبط بالخط المستقيم فقط في الهندسة الإقليدية، ولنأخذ مثالا على ذلك: إن المسار المنحني المحدب مثلا الذي تسلكه الطائرة في مجال الكرة الأرضية الجوي، أقصر من الخط المستقيم، كما أن الزمن والمكان والمسافات بين الكواكب والمجرات أي في الفضاء الخارجي لا تُقاس أبدا كما عهدناه في الهندسة المستوية، ناهيك عن أن الزمان والمكان نسبيان في الفضاء، فكانط بنى منظومته القبلية على اعتبار الزمان والمكان مطلقين مثلما سلم ذلك إسحاق نيوتن.

فلا يمكن إنكار صحتها دون الوقوع في التناقض، وإذن فلا بد من التسليم بوجود أحكام تركيبية قبلية في الحساب. (إبراهيم، 1963، الصفحات 50-51)

4.3.كانط والرياضيات المجردة:

تكتسي الرياضيات أهمية بالغة عند كانط على اعتبار أنها يقينية كما بحث فيها ديكارت من قبل، وهي تنبني على موقف كانط من ثلاث نقاط رئيسة: مصدر اليقين في القضية الرياضية البحتة، التركيب القبلي وصلة الرياضيات البحتة بالعالم المحسوس، (زيدان، 1979، صفحة 93) إذ يقول: "ها نحن الآن أمام معرفة عظيمة الشأن محققة، بلغ نطاقها الآن حجما يستحق الإعتبار ويبشر مستقبلها بنمو لا حد له، وهي تستوجب اليقين الضروري التام أي الضرورة المطلقة ولا ترتكز إذن على أي أساس تجريبي، وبالتالي فهي إنتاج خالص للعقل، وفضلا عن ذلك معرفة كلها تركيبية"، (كانط إ.، 1991، صفحة 31) لكن كيف يمكن للأحكام الرياضية أن تكون قبلية وتركيبية في ذات الوقت؟ أوليس التركيبي بالمفهوم الكانطي هو كل ما يتصل بالتجربة أي أنه يمكن أن نسأل حول الأحكام الرياضية، وبعبارة مقتضبة: كيف تصبح الأحكام التركيبية القبلية ممكنة؟ لاسيما وأنه بالنسبة لكانط الأحكام القبلية تشكل الميتافيزيقا والرياضيات، فكيف يمكن لهذه الأحكام إذن أن تكون مشروعة للرياضيات دون الميتافيزيقا؟

يؤكد كانط أن المنهج وليس الموضوع هو الذي يحدد الفرق بين الرياضيات والميتافيزيقا، (Couturat, 1905) إذ لا يمكن تطبيق المنهج الرياضي إلا على ما يمكن تكميمه أي قياسه، ولهذا ربط كانط بين علم الحساب والزمن، وعلم الهندسة والمكان، وعليه يمكن القول بأن الأحكام الرياضية يمكن أن تكون في ذات الوقت أحكاما تركيبية مثل الأحكام التجريبية وقبلية مثل الأحكام التحليلية فهي أحكام تركيبية لأنها أحكام تُؤلف داخل الحدس وهي قبلية لأنها قبلية في حد ذاتها، فالرياضيات فقط هي من تمتلك بديهيات أي

مبادئ تركيبية قبلية لأنها الوحيدة القادرة دون الفلسفة و العلوم الأخرى على بناء مفاهيم وتصورات وربط المواضيع بشكل قبلي وفوري في حدس الموضوع، يقول كانط في هذا الصدد: "لكننا نجد أن كل معرفة رياضية تحمل طابعا خاصا، فأولا يجب أن تكون تصوراتها حاضرة في العيان[24]، وبصورة قبلية أي حاضرة في العيان المجرد لا في العيان التجريبي، وهي لا تستطيع أن تتقدم خطوة بغير هذه الوسيلة، لذلك فأحكامها تقوم دائما على العيان [...] فبالعيان المجرد يتم بناء تصوراتها" (كانط إ.، 1991، صفحة 32)

من الواضح إذن أن كانط يعتبر الرياضيات أكثر العلوم وثوقية ويقينية، لكون مفاهيمها ومعارفها كلها قبلية تركيبية، فهي تستمد صحة قضاياها من الضرورة القبلية دون اللجوء لأي تجربة أو اتصال بالخارج، فهي كما يقول من إنتاج العقل الخاص، أما كونها تركيبية فلأن مصدرها الحدس الخالص، إذ يعتبر كانط المكان والزمان الحدسين الذين تقيم عليهما الرياضيات المحضة كل معارفها وأحكامها، وهو طرح متوافق تماما مع ما اعتبره كانط مصدر الرياضيات ألا وهو الحدس الخالص، وعلى حين تستند الهندسة إلى دعامة الحدس الخالص الضروري القبلي: الحدس المكاني، نجد الحساب والميكانيكا يستندان إلى حدس خالص ضروري قبلي هو حدس الزمان، فالهندسة هي علم المكان، في حين أن الحساب هو حدس الزمان، ما دام مفهوم العدد إنما يتكون من الإضافات المتعاقبة للوحدات في الزمان أي تسلسل الآنات، وكذلك الميكانيكا بصفة خاصة هي علم الزمان لأن كل حركة إنما هي تغير مواضع ضمن مجال زمني معين. (إبراهيم، 1963، صفحة 57)

---

[24] العيان كما يعرفه كانط: هو عبارة عن تمثل يتبع مباشرة حضور الموضوع، وهو بشكل أوضح تمثل موضوع لكن بشكل جزئي، وبعبارة أخرى العيان أسبق من التصور، لأنه مباشر يتصل بمجموعة مباشرة من عن طريق الحس، بينما التصور يتكون بواسطة العيانات ولذا فهو ليس على صلة مباشرة بالموضوعات، وبالمحصلة فإن لعيان تمثل جزئي أما التصور فهو تمثل للصفات المشتركة بين عدة موضوعات. أنظر كانط: مقدمة لكل ميتافيزيقا مقبلة يمكن أن تصبح علما.

ويضيف كانط حول التفريق بين العيان التجريدي للرياضيات والعيان التجريبي لسائر العلوم، وهو في الحقيقة من خلال هذا النص يبرهن وجهة نظره في إمكانية وشرعية الأحكام القبلية التركيبية في الرياضيات: "وإذا كان العيان التجريبي فعلا يسمح لنا أن نضيف في التجربة بطريقة تجريبية، وبلا عناء محمولات جديدة ينقلها العيان نفسه إلى التصور الذي نكونه عن موضوع العيان، فإن هذا يتحقق أيضا في العيان المجرد مع هذا الفارق وهو أنه في حالة العيان المجرد يكون الحكم التركيبي يقينيا بصفة قبلية وضرورية بينما في حالة العيان التجريبي لا يكون الحكم التركيبي يقينيا إلا بصفة بعدية وتجريبية. وهو لا يحتوي فعلا إلا على ما نجده في العيان التجريبي العرضي بينما لا يحتوي الحكم الآخر إلا على ما ينبغي أن يوجد بالضرورة في العيان المجرد، لأنه بوصفه عيانا قبليا، يرتبط لزاما بالتصور قبل كل تجربة أو قبل كل إدراك حسي خاص". (كانط إ.، 1991، الصفحات 32-33)

5.3.المنطق الترنسندنتالي:

بالنسبة لكانط، المنطق العام (الأرسطي) هو علم قواعد الفاهمة، علم صوري بما هو كذلك، لا يزودنا بأية معارف حول مجال الموضوعات، لأنه ووفقا لكانط فالرياضيات على النقيض من ذلك، تبني مجالا معرفيا وتفترض مفاهيم مبنية، بمعنى آخر، تتمثل قبليا في الحدس، إذ يقول كانط: "لو تأملنا مبادئ الفاهمة في ذاتها بحسب أصلها، لوجدنا أنها ليست بأي حال معارف مبنية على أفاهيم، لأنها لن تكون ممكنة قبليا البتة إن لم ندخل فيها الحدس المحض كما في الرياضة أو شروط تجربة ممكنة بعامة" (كانط، 1787، صفحة 188)، وعليه، فلا يمكن بأي حال من الأحوال أن يكون الإستدلال الرياضي مستنبطا من القواعد المنطقية للفاهمة، فقواعد منطقية كهذه لا تسمح لوحدها ببناء المفاهيم ولا ببرهنة نظريات علم الحساب، وبالتالي لا يمكن ردها للمنطق.

كما يعطي كانط معان مختلفة لكلمة منطق: منطق عام محض، منطق ترنسندنتالي، منطق خاص، منطق محض أو منطق عملي، يحتوي المنطق العام المحض على القواعد الضرورية للفكر، فهي تحدد معايير أو مقاييس استعمال الفاهمة والعقل من وجهة نظر صورية مستقلة تماما عن أي إشارة لموضوعات خاصة.

المنطق الترنسندنتالي يُعطي أيضا قوانين العقل والفاهمة، ما دامت تحصل على موضوعاتها قبليا، وبالتالي فهي لا تقوم دائما بعملية تجريد كل محتوى معرفة، غير أنها لا تملك أدنى قوة لمعرفة أي موضوع، لأن استعمالها يفترض موضوعات أُعطيت سلفا في الحدس، ومن خلال التعريفين السابقين نُدرك لِمَا كان كانط يصر على أنه لا يمكن استنتاج علم الحساب من المبادئ المنطقية، من جهة أخرى لأن مبادئ المنطق العام المحض، صورية بالكامل ولا تعبر عن أي محتوى للمعرفة، وبالتالي فمبادئ المنطق الترنسندنتالي ليس لها أي استعمال خارج الحدس.

بالنسبة لكانط، ذهنيا، لا يمكن استقبال أو تلقي أي تصورات أو تمثلات عن طريق ملكة الحساسية، وأفكارنا لا تملك أي محتوى من دون أن تكون مرتبطة بالحدس الحسي وبالتالي، كل إمكانية لاستنتاج أحكام وقضايا علم الحساب التي تعبر عن محتوى معرفي انطلاقا من الأحكام المنطقية مستبعدة بشكل كلي.

4.بــــول وجبـــــر المنطق:

تُعتبر اسهامات المنطقي والرياضي جورج بول (George Boole) ذات أهمية كبيرة لما قدمته من تسهيلات ومرونة في الحسابات المنطقية، بالإضافة لكونها فتحت آفاق البحث في الصياغة الحسابية للمنطق مثل أعمال دي مورجان، فقد كان لها العديد من التطبيقات في شتى المجالات خاصة منها ما تعلق فيما بعد بصناعة الدارات المغلقة والدارات المتكاملة.

1.4.قوانـــــين الفـــكر:

في منتصف القرن التاسع عشر، قام جورج بول بتوضيح شكل آخر من الحساب المنطقي، كان المرجع بالنسبة له "الجبر"، لكن إذا كان الحساب الجبري يعطي لنا أنموذجا هو بشكل ما مختلف كثيرا عن بعض الرؤى الطموحة، لأن المنطق عند "بــول" لا يمثل سوى "علم عام" له هدف واحد وهو التنظيم الموسوعي للمعارف، وليس لتحليل الأفكار والمفاهيم التي تسمح بملاحظة "التركيب" من خلال توافق بين أفكار أكثر بساطة (أبجدية للفكر الإنساني وفقا لتعبير لايبنيتس).

والحساب البولي أو جبر بول هو مقاربة جبرية للمنطق من حيث المتغيرات، العمليات ودوال لمتغيرات منطقية، مما يسمح بتطبيق تقنيات جبرية لمعالجة عبارات ثنائية القيمة (ذات قيم ثنائية لا غير) لحساب القضايا، يجد اليوم جبر بول تطبيقات عديدة لاسيما في المعلوماتية وتصميم الدارات الإلكترونية، حيث استخدم لأول مرة في دارات الاتصالات الهاتفية عن طريق المهندس والرياضي الأميركي كلود شانون (Claude Shannon) الأب الروحي لنظرية المعلومات.

يتعلق الأمر إذن بدراسة خصائص العمليات التي يمكن تطبيقها على موضوعات معينة لأجل غاية استخراج القوانين، مما يؤدي وفقا لـ "بول" إلى تحقيق في قوانين الفكر"، ففي كتابه الصادر العام 1854 "تحقيق في قوانين الفكر"[25] قصد "بول" من خلاله دراسة القوانين الأساسية لعمليات الفكر التي من خلالها تتم عملية الإستـــــدلال. (Wagner, 1998, p. 91)

بالنسبة لـ "بول" البحث عن طريقة عامة في المنطق هو المضي جنبا إلى جنب مع قوانين الفكر، لأن غاية المنطق ليست فحسب متعلقة بحساب الإستدلالات والإستنتاجات

[25] An investigation of the laws of thought

الصحيحة، فغايته أيضا تأسيس "نظرية في الإحتمالات" أي إماطة اللثام عما يحجب عنا ملكات العقل، بقي لنا أن نفهم أن ما يحمله الجبر لـ "بول" يتمفصل على عنصرين: أولهما البحث عن طريقة منطقية وثانيهما قوانين الفكر، في حين وفقا لـ "بول" قوانين الحساب الجبري هي بالضبط مكافئة لتلك الخاصة بالفكر في عملية استدلاله وتفكيره، يقول "بـول": "لا يوجد فحسب تشابه كبير بين عمليات الذهن في استـــــدلاله بعامة وتلك التي يؤدي إليها هذا العلم الخاص وهو الجبر، لكن في مجال أوسع، هناك تكافؤ دقيـــق من حيــــث القوانين التي يخـــضع لها الصنفان الاثنان من العمليات". (Boole, 1854, p. 35)

بالنسبة لـ "بــول" إذن، فإن الطريقة المنطقية أو المنهجية المنطقية ليست سوى تطبيق للحساب الجبري على مسائل وأسئلة لا تتعلق بشكل مباشر بالموضوعات الرياضية المعهودة (المستعملة)، فإذا كان المنطق يستخدم الطرق الرياضية ذلك لحل مسائل ليس بالضرورة أن تكون متعلقة أو خاصة بالعدد أو الكمية ولكن، بصفة أكثر عمومية العلاقات بين الأشياء (كما مثلا في ملفوظ "كل الناس فان" أو العلاقات بين القضايا مثل "إذا كان هناك كسوف للشمس فيمكننا رؤية النجوم"). (Boole, 1854, p. 31)

من المقبول جدا أن للعلم كما للمنطق العديد من التطبيقات لكن، من الأكيد أيضا أن أشكالهما وإجراءاتهما رياضية بامتياز، فليس من ماهية الرياضيات أن تهتم بفكرة العدد والكمية.

لكن السؤال الإجرائي الذي نطرحه: كيف لرموز وعمليات الجبر[26] أن تعطينا حلولا لمسائل وأجوبة على أسئلة متعلقة بالمنطق؟، نطرح هذا السؤال وننوه إلى أن عصر "بـول"

[26] نقصد بعمليات الجبر وأدواته الحسابية خواص البُنى الجبرية كالزمرة، الحلقة، الحقل، الفضاءات وخواص العمليات عليها كالتبديل، التجميع، العنصر الحيادي، العنصر الماص، توزيعية عملية على عملية أخرى، ...

لم يسبق وأن فكر أحد في تطبيق طرائق رياضية على مجال بحث اهتم به الفلاسفة أكثر من الرياضيين أنفسهم.

ففي مقدمته المطولة لكتابه "التحليل الرياضي للمنطق"[27] الذي حمل عنوانا فرعيا: مقالة في حساب الإستدلال الإستنتاجي، يصرح "بول": "سنستخدم نظرية الجبر الرمزي وندرك أن صلاحية عملية التحليل لا تتعلق بتأويل الرموز المستخدمة ولكن تتعلق بقوانين تركيبها (combination) والجمع بينها، (Boole, 1847, p. 2)، يتعلق الأمر إذن في الحساب الجبري للمنطق عند "بول" بصلاحية الإستنتاجات دون تأويل المحتوى، فمفهوم الحقيقة غير وارد في جملة القضايا، بقدر ما يهمنا سلامة الإستدلال وصلاحيته فالأمر منوط بقوانين استدلال ذهنية، يضيف "بول": إن ما يجعل المنطق ممكنا هو وجود المفاهيم العامة في أذهاننا وهو أيضا قابليتنا لاستقبال مفهوم الصنف أو "الفئة" وتحديد عناصر أفرادها من خلال اسم مشترك وخاصية مشتركة، وبالمحصلة فكل نظرية في المنطق متعلقة باللغة. إن أية محاولة ناجحة للتعبير عن القضايا المنطقية باستعمال الرموز يجب إيجاد قوانين هذه التركيبات، من خلال قوانين العمليات الذهنية التي تمثلها أي بشكل ما بحث في فلسفة اللغة. (Boole, 1847, p. 5)

3.4.جبـــــــر المنطــــــــق:

جبريا، نعتبر المجموعة $E = \{0,1\}$ ويُرمز لها أيضا بالرمز $E = \{\top, \bot\}$، حيث عرف "بول" عمليتين: عملية الضرب ونرمز لها بالرمز "." أو "$\wedge$" وعملية الجمع ونرمز لها بالرمز "+" أو "$\vee$".

طابق "بول" بين عملية الضرب في الجبر وعملية الوصل في المنطق، كما طابق أيضا بين عملية الجمع في الجبر وعملية الفصل في المنطق، ولنذكر أن المجموعة E

[27] The mathematical analysis of logic: Being an essay towards a calculus of deductive reasoning

تحوي عنصرا أعظميا نرمز له بالرمز: $sup(E) = 1$ وعنصرا أصغريا نرمز له بالرمز $inf(E) = 0$.

وبتطبيق الخواص الجبرية نحصل على الخواص الآتية: (Nahin, 2013, pp. 45-50)

- قانون المتمم: $\bar{1} = 0$، $\bar{0} = 1$
- قانون المتمم المضاعف: $\bar{\bar{a}} = a$
- قانون التجميع: $(a + b) + c = a + (b + c)$، $a.(b.c) = (a.b).c$
- قانون التبديل: $a + b = b + a$، $a.b = b.a$
- قانون التوزيع: $a.(b + c) = a.b + a.c$، $a + (b.c) = (a + b).(a + c)$
- قانون تساوي القوى: $a + a = a$، $a.a = a$
- قانون الحيادي: $a + 0 = 0 + a = a$، $a.1 = 1.a = a$
- قوانين الإمتصاص: $a + a.b = a$، $a.(a + b) = a$
- الخاصية الواحدية: $a + \bar{a} = 1$
- الخاصية الصفرية: $a.\bar{a} = 0$
- قانون دي مورجان: $\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$، $\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$

استعمل بول جداول الحقيقة لبرهنة بعض الخصائص كما استعملها أيضا لبرهنة خواص أخرى.

يمكن القول إذن بأن أعمال المنطقي جورج بول لم تتسم بالجدة والأصالة فحسب إنما ساهمت كثيرا في تطور المنطق من خلال العمليات الحسابية الجبرية على الملفوظات المنطقية التي سهلت كثيرا الإشتغال على القضايا المنطقية والتي كان لها تطبيقات كثيرة في عصرنا الحالي خاصة في الأنظمة الكهربائية والأنظمة المعلوماتية.

5.المنطق عند فريجه:

إن فريجه هو أرسطو جديد، قد كان في مستهل القرن العشرين رائدا لتجديد الدراسات المنطقية (فرنان، 1986، صفحة 7) على الرغم من أن المنطق الحالي بعيد كل البعد من حيث روحه أو من حيث محتواه عن منطق فريجه، إلا أن ما قدمه فريجه شكل الإرهاصات الأولى لظهور المنطق المعاصر، ويعتبر الكثيرون فريجه الأب المؤسس للمنطق الحديث على الرغم من أن منطقه يختلف كل الإختلاف عن المنطق المعاصر، وتكمن أهميته في شقين أولهما: تمزيق السياج الدوغمائي الذي طالما أُحيط بمنطق أرسطو والذي كرسه كانط باعتباره منطقا كاملا، وثانيهما رد الاعتبار للايبنيتس واستئناف منجزه المنطقي وطموحه في إنشاء لغة علمية دقيقة، غير أنه كان لأعمال فريجه المنطقية هدف واتجاه مخالف للسالفين حيث كان مشروعه "تأسيس علم الحساب" الذي من شأنه أن يغنينا عن الرجوع للحدس. (Wagner, 2007, p. 6) ويعتبر كتابه الإيديوغرافيا مؤلفه العمدة الذي لخص جل جهده المنطقي وبسط فيه معالم المنطق الجديد ترميزا، صياغة وقواعد استنباط.

في نصوص فريجه التي يقارن فيها بين الإيديوغرافيا والحساب البولي[28]، يرى بأن البنيتين لم يكن لهما الهدف نفسه، (Wagner, 1998, p. 96) فـ "بول" استخدم تقنيات الجبر لحل مسائل منطقية تحمل فقط "صور" القضايا والإستدلالات، وإذا كان المنطق يُطبَّق على مجالات بعينها دون احتوائها على العدد أو الكمية، ليس فقط لأننا في منطق بول نشتغل على علامات مجردة مهملين مؤقتا أثناء الحساب ماذا تمثل، فبالنسبة لفريجه لأننا نرفض كل تحليل "للمحتوى" التصوري للصيغ لإستخراج العلاقات المنطقية التي بينها لا غير.

يبدو أن هدف فريجه كان مختلفا، فقد أراد بناء لغة من خلالها يمكن التعبير عن "محتوى" الفكر، وبالتالي فقد أراد إنشاء لغة بمحتوى وليس مجرد حساب على الرموز أي

[28] Calcul booléen

أراد صياغة تمثيل منطقي للفكر، وعليه اتضح جليا أن غاية فريجه كانت ابتكار "لغة مميزة" أي لغة نموذجية للفكر الخالص مؤسسة على أنموذج علم الحساب، لكن يجب أن تكون متممة بصورنة قادرة على ملئ الفجوات المنطقية، كما يقول جوفا Goffa: "إذا أردنا تعريف اللوجيستيك كبرنامج إختزال علم الحساب أو كما أراد راسل إختزال الرياضيات ككل للمنطق، يجب أن نعي جيدا أن خلال هذه الفترة عندما كانت الرياضيات حقيقة كان المنطق مجرد مشروع"[29].

1.5.الإيديوغرافيا وتأسيس علم الحساب:

كتاب الإيديوغرافيا[30] هو أول عمل كتبه فريجه في مجال المنطق، وهو –على الأرجح– أهم كتاب فردي كُتب في المنطق على الإطلاق، (Frege, 1879, p. 1) ويبدو أن مرجعية فريجه الرياضية قد ساعدته كثيرا وأضفت المشروعية لمشروعه، وعلى الرغم مما تعرض له فريجه فيما بعد من نقد لاسيما من شرودر (Schröder) العام 1880، إلا أنه كما يقول: "لم يكن مقصدي من هذا العمل تقديم منطق مجرد من خلال صيغ، لكن التعبير عن محتوى من خلال كتابة علامات ورموز بطريقة أكثر دقة وأكثر وضوح أقصى ما يمكن، في الحقيقة لقد أردت إنشاء لغة خاصة بالمعنى الذي أراده لايبنيتس". (Frege, 1879, p. 2)

لم يكن يهدف فريجه إلى إصلاح المنطق، بل إلى بناء أسس علم الحساب (Arithmetic)، وبالتالي كانت الأطروحة الأساس لفريجه هي تبيان أنه لا يوجد فرق جوهري بين المنطق والحساب، من هنا جاءت أحد معاني اللوجيستيكا (Logicisme) هي استنباط علم الحساب من داخل المنطق، وهو ما نطلق عليه باختزال أو رد (reduction) علم

[29] The semantic Tradition from Kant to Carnap, Cambridge, 1991, p 113 مرجع مذكور في: (Wagner, 2007, p. 24)

[30] Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens

الحساب للمنطق فقد لاحظ فريجه غياب الوضوح في مبادئ علم الحساب من جهة، وخاصية اللاكفاية/اللاتشبع (insuffisabilité) لتعريف العدد، وبالتالي فلم تتعلق المسألة بتوطيد علم أو تأسيسه بقدر ما كانت مسألة توضيح وإبانة. (Wagner, 2007, p. 15)

في كتابه "القوانين الأساسية لعلم الحساب"[31] افترض فريجه أن اللغة الطبيعية غير لائقة ولا تتسم بالوضوح، فاقترح الإيديوغرافيا وهي لغة مساعدة للتعبير بشكل واضح عن محتوى الفكر من خلال لغة تصورية،[32] فصمم الإيديوغرافيا كلغة فكر محضة، تستخدم العلامات (signes) والصيغ (formules) الخاصة، خلافا لما هو مستخدم في اللغات الطبيعية، فهي لا تترك مجالا للغموض، وبالمحصلة فقد كان على فريجه إيجاد طريقة تحليل منهجية لتقرير القضايا ذات الصيغ التي تستجيب للقواعد النحوية للمنطق.[33]

ويرى Wagner (2007) أن الإصلاحات التي قدمها فريجه هي الأكثر أصالة في التاريخ، فقد قام فريجه بالتمييز بين صنفين منطقيين: الموضوعات مثل: سقراط، والدوال: مثل (هو)[34] موسيقي والدوال قضايا تصريحية كقولنا: سقراط (هو) موسيقي فنطبق الدالة (هو) موسيقي على سقراط (argument).

كان الهدف من مشروع فريجه هو برهنة عدم جدوى رد الإستدلال الحسابي إلى الحدس، ولا يمكن بناء الإستدلالات الرياضية بالرجوع إلى الحدس، والفكر الخالص قادر بنفسه بمنأى عن أي حدس حسي على تعريف الموضوعات وإنتاج المعرفة الحسابية. (Wagner, 2007, pp. 16-17)

[31] Die Grundgesetze der Arithmetik
[32] L'idéographie à la langue courante ce que le microscope est à l'œil.
[33] Les règles grammaticales
[34] نستخدم ضمير الغائب (هو) ليحل محل فعل الكينونة في اللغات اللاتينية كفعل etre أو to be أو sein

إن ما وصل إليه فريجه يعبر عن ثورة آنذاك، فقد أعاد بناء الصرح الرياضي والصرح المنطقي على السواء، وبين أن كل خطوة استدلال حسابي لا تقتضي ولا تتطلب أي رجوع للحدس كما قال كانط، وإنما تقتضي فحسب وسائل وأدوات منطقية بحتة.

2.5.حساب القضـايا:

أعطت الطريقة الجديدة لفريجه مرونة وقوة تعبيرية في صياغة القضايا مقارنة بالطريقة التي كان ينتهجها أرسطو، فقد بدت متكيفة تماما مع نمذجة الإستدلالات الرياضية لاسيما واستخدام المُكمِّمات: المكمم الكلي والمكمم الوجودي $\forall, \exists$، فإذا رمزنا كما يلي:

x: متغير يمثل فردا معينا

H: رمز علاقة أحادية وHs تُقرأ x (هو) إنسان

M: رمز علاقة أحادية وMx تُقرأ x (هو) فان

→ رابطة قضوية والتي يمكن قراءتها في هذا السياق: إذا كان ... فإن

∀ مكمم كلي ويمكن قراءته: من أجل كل فرد

وعليه يمكن تحليل وإعادة صياغة القضية: "كل إنسان فان" بالقول: إذا كان x إنسانا، فإن x فان، ونعبر عنها بالصيغة: $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$

استحضر فريجه عددا من المفاهيم الرواقية وبالأخص، في منطق فريجه كل قضية متكونة من قضايا أولية (ذرية) مرتبطة فيما بينها من خلال روابط: الوصل "و"، الفصل "أو"، النفي "¬"، إذا كان ... فإن "→" فعكس الرواقيين، قام فريجه بتقسيم القضية الذرية إلى عنصرين: محمول مطبق على موضوع ولكن من خلال محمول علائقي

ففي القضية مثلا: 4 أقل من 5 رآها الرواقيون قضية غير قابلة للتقسيم، في حين رأى مناطقة العصور الوسطى محمولا (أقل من 5) مطبقا على موضوع "4"، محمول علائقي، أما فريجه فرآها محمولا علائقيا "أقل من" يربط بين متممين 4 و5 (compléments)، ومثل المنطق الأرسطي، افترض فريجه العام 1879 منطقا يسمح بالتعبير عن كل محمول لا يُطبق على موضوع معين فحسب لكن، على كل الموضوعات الممكنة، أو يعطي الموضوعات دون تحديد مسبق لها، ذلك أن القواعد الكلاسيكية لمنطق أرسطو تعوض الموضوع بضمير غير معرف "كل" أو "بعض"، وهكذا فالقضية "كل إنسان فان" بُنيت بذات الطريقة للصيغة "سقراط فان" بتعويض سقراط بـ "كل"، إن هذه الآلية هي مصدر القلق والمأزق الإبيستمولوجي في اللغات الطبيعية.

ولنأخذ هنا مثالا على ذلك، إن القضية "الكل يحب شخصا معينا" يمكن أن تعني بأن هناك شخصا محبوبا من طرف الجميع، أو بمعنى آخر، الكل يحب شخصا معينا دون الجزم بأن ذات الشخص هو بالذات الذي يحبه الجميع، وبالمحصلة هنا يكمن غموض اللغات العادية، ولرفع الغموض واللبس ولإيضاح قواعد الإستنباط كان من الضروري إعطاء أشكال مختلفة عن القضايا التي تعبر عن أشياء مختلفة.

من أجل ذلك استعمل فريجه وبيرس ابتكارا يعود لجبريي القرن السادس عشر، مثل فرنسوا فييت ألا وهو مفهوم المتغير، فبدل أن نطبق محمولا علائقيا "أصغر من" لأسماء "4" و"5" أو على ضمائر غير معرفة، نطبقه كمرحلة أولى على متغيرات x وy والتي تعطينا القضية: "x أصغر من y"، وفي مرحلة ثانية نحدد إن كانت المتغيرات عامة أو وجودية من خلال عبارات "من أجل كل x" أو "يوجد x" والتي تُسمى مكممات.

وهكذا، قضية منطق أرسطو مثل "كل الناس فانون" تنقسم في منطق فريجه إلى "من أجل كل x، إذا كان x إنسان، فإن x فان"

إن بفضل غنى القواعد النحوية لهذه القضايا بواسطة رموز المحمولات، المتغيرات والمكممات، صياغة قضايا تحوي على سبيل المثال: "من أجل كل"، "يوجد"، لم يعد من الصعب التصريح بقواعد الإستنباط، ولهذه النتيجة أهمية بالغة، لأنه أصبح مع منطق فريجه من إعطاء تعريف لمفهوم العدد الطبيعي، ومن ثم العددين 2 و4، ثم عملية الجمع والبرهان أو الإستدلال على أن "4=2+2" وهذا ما يدل على أن هذه القضايا تكون صحيحة بوصفها نتيجة لتعريف الأعداد الطبيعية وعملية الجمع، وبالتالي يكون الحكم في هذه الحالة حكما تحليليا وليس تركيبيا كما خمن كانط. (Dowek, 2007, p. 57)

3.5.منطق الدرجة الأولى: حساب المحمولات[35]

يعتبر المنطق القضوي أساس منطق الدرجة الأولى أو منطق المحمولات، حيث يستخدم منطق المحمولات المكممات والعلاقات، وسنتناول عناصر لغة الدرجة الأولى[36]، وتجدر الإشارة إلى أن محمولات الدرجة الأولى نظرية منطقية من خلالها نستخدم المكممين الكلي والوجودي: ∀،∃ بتطبيقهما على متغيرات أفراد فحسب، وليس على متغيرات محمولات بمعنى خصائص.

- ✓ لغة الدرجة الأولى: (Bouleau, Girard, & Louveau, 1983, p. 20)
  - رموز المتغيرات: x, y ,z ,x’, y’, z’, x’’ ,y’’, z’’
  - رموز الدوال:

    دالة صفرية بمعنى ليس لها مدخلات أو ثابتة

    دالة واحدية أي بمتغير واحد: f(k), g(k)

---

[35] Logique du premier ordre يترجمها البعض بمنطق الطراز الأول كترجمة الأستاذ محي الدين الكلاعي لكننا فاضلنا نقل مصطلح ordre إلى اللسان العربي بمصطلح الدرجة بدلا من الطراز، رياضيا نعبر عن رتبة كثير حدود بمصطلح درجة كثير الحدود وهذا ما يجعل مصطلح الدرجة أكثر دقة ووجاهة، أنظر (فاقنار، 2011)

[36] أنظر الفصل الرابع

دالة ثنائية أي بمتغيرين: $h(k_1 , k_2)$

دالة بـ n متغير $h(k_1,k_2,...,k_n)$

- رمز المحمولات:

محمول واحدي أو أحادي $Q(\ ), P(\ )$

محمول بـ n عنصر $F(\ ,\ ,\ )$

الرموز: النفي: $\neg$، الوصل: $\wedge$، الفصل: $\vee$، المكمم الوجودي: $\exists$، المكمم الكلي: $\forall$

نقوم بتجميع الرموز لنحصل مرة على الحدود ومرة على الصيغ.

✓ الحدود:

كل متغير هو حد

إذا كان $U_1,U_2,....,U_n$ حدودا، وكانت f دالة بـ n مدخل، فإن $f(U_1,U_2,....,U_n)$ هي أيضا حـد

✓ الصيغ:

كل صيغة ذرية (atomique) هي تجميع من الشكل $P(a_1,a_2,...,a_n)$ حيث a_i عبارة عن حدود وP مكمم ذو n مدخل.

كل صيغة ذرية عبارة عن صيغة

- إذا كان φ صيغة، فإن $\neg\varphi$ هو صيغة أيضا
- إذا كانت φ وΨ صيغتين، فإن $\varphi \vee \Psi$ هي أيضا صيغة
- إذا كان φ صيغة، فإن $\exists x\varphi$ هي أيضا صيغة، حتى باستبدال x بمتغير آخر

ويمكن أن نخلص إليه هو أن كثرة النتائج تستدعي الإنتباه، فهناك كثرة من المناطق ويمكن أن تُفهم هذه الكثرة بمعنيين:

الأول معنى التعارض بين مناطق تبني أنساقا من البديهيات متمانعة، فإذا جعلنا معيارنا كمنطق نموذجي أو تقليدي النسق الأكسيوماتي للحسابين القضوي والدالي، والذي

اقترحه كتاب "أصول الرياضيات" سنة 1910، فإن المنطق الحدساني والمنطق متعدد القيم، الذين ابتدعا بعد ذلك ظهرا بوجه المنطقين المنحرفين من حيث تشكيكهما في عمل الروابط وفي ازدواج القيمة في النسق النموذجي.

والثاني هو معنى تنويع الميادين للمناطق المختلفة، ففي مرحلة أولى تكون المنطق النموذجي ابتداء من تعريف ضيق لموضوعه، الذي هو القضية، ثم ظهرت أنساق صورية هدفها توسيع الحساب ليشمل ضروبا من القضايا استبعدت في بادئ الأمر من ميدان المنطق النموذجي، وهكذا تولدت المناطق الموجهة عندما أُضيف للنسق النموذجي عامل الضرورة والبديهيات المتعلقة به، ثم على ذاك ابتدعت مناطق زمنية ومعرفية وطلبية. (بلانشي ر.، 1968، الصفحات 7-8)

عندما أبرز فيتجنشتاين حوالي 1920 طابع تحصيل الحاصل في القوانين المنطقية، بدأت تظهر أنساق غير كلاسيكية تكاثرت منذ ذلك حين، وكان وجود مثل هذه الأنساق التي ترفض هذا "القانون" أو ذاك من قوانين المنطق الرمزي الكلاسيكي، يهدم المطلقية المنطقية (absolutisme logique) فكشف عن الطابع الإصطلاحي لهذه القوانين التي كان النسق الكلاسيكي يعتبرها ضرورية ضرورة مطلقة، وأوضحت حرية الإبداع التي يتمتع بها المنطقي، وهذا ما عبر عنه "مبدأ التسامح" الذي صاغه "كارناب" فليس في المنطق أخلاق، ويحق لكل واحد أن يضع قواعد تركيبية (syntaxiques) كما يريد، وعندئذ فإن النسق المنطقي كما قال "كارناب" أيضا "ليست النظرية أي نسقا من التقارير حول موضوعات معينة، بل هو (لغة) أي نسق من الرموز مع قواعد استعمالها. (بلانشي ر.، 1968، صفحة 28)

وفي ختام هذا فصل، يمكننا أن نخلص إلى مجموعة من النتائج نوجزها في النقاط التاليـــــة:

بقي المنطق حبيس الرؤية الأرسطية الضيقة للمنطق باعتباره نظرية في القياس، حيث ساهمت بشكل كبير في خمول المنطق وعدم تطوره.

حمل فكر لايبنيتس الإرهاصات الأولى لنظرية في النطق الرمزي من خلال محاولته إنشاء لغة علمية عامة أو رمزية بها يُصاغ العلم ونظرياته.

شهد المنطق تطورا كبيرا ومتسارعا منذ لحظة لا يبنيتس من خلال توالي الإكتشافات والخروج من النسق الأرسطي

شكلت لحظة جورج بول لحظة حاسمة في تاريخ المنطق خاصة مع جبر المنطق مما ساهم في تطبيق مختلف العمليات الجبرية على الحسابات المنطقية الأمر الذي جعل حساب القضايا المنطقية عملية مرنة وسهلة ومبسطة.

يعتبر فريجه أرسطو المنطق المعاصر حيث قدم عملا جبارا من خلال انشائه منطق المحمولات أو منطق الدرجة الأولى الذي ساهم بشكل مباشر في ظهور نظرية النماذج، كما أن عمله على المكممات وادخاله لمفهوم المتغير في الحساب القضوي أخرج المنطق من تبعية القياس الأرسطي.

برهن فريجه من خلال أعماله ومناهضته لكانط بأنه يمكن رد الحسابات الرياضية إلى المنطق دون الإلتجاء إلى الحدس، وبالتالي فكل ما هو رياضي يمكن اختزاله للمنطق، فالمنطق صِبا الرياضيات.

تُعتبر أعمال المنطقي فريجه الإرهاص الأول لراسل ووايتهد في تأسيس التيار اللوجيستي كما يُعتبر كتابه الإيديوغرافيا لبنة أساس لمؤلفهما "مبادئ الرياضيات".

الفصل الرابع:

فتوحات القرن العشرين

تمهيد:

يمكن أن نبدأ فصلنا بفرش تحليلي بسيط يضعنا في وسط المشهد الرياضي للنصف الأول من القرن العشرين، حيث الأحداث المتسارعة والمتضاربة،[1] فبعد أن أصبح المنطق الرياضي "حقيقة" ومجالا معرفيا مستقلا تماما عن الرياضيات والفلسفة، كان من الأهمية بمكان أن نتفحص بعناية المنعطف الذي ستشهده الرياضيات لاسيما بعد لحظة هلبرت، ونقصد بها مجموع المسائل التي طرحها في المؤتمر الدولي للرياضيات وأكد أنها سترسم ملمح رياضيات القرن العشرين، فمن أرسطو إلى هلبرت أُعتبر المنطق طريقة أو أداة للإستدلال على الصحيح، والسؤال: هل يمكن أن تكون هناك طريقة للبت أو التقرير مسبقا ما إذا كانت قضية معينة لها استدلال أم لا وبالتالي هل يمكن الحكم عليـــها بالصـــحة أو الخطأ؟

وفي العام 1920، بحث المناطقة على خوارزميات لحل مسألة هلبرت الثالثة والعشرين، وخلال العشرية القادمة أدت هذه الأبحاث إلى اكتشاف "عدم امكانية" خوارزمية كهذه، ولقد كانت لحظة هلبرت هي أصل كل هذه الأبحاث، فقط طلب إجراء أو آلية خوارزمية عامة لحلحلة المسائل الرياضية أو الإجابة على السؤال المتعلق أصلا بوجود هكذا آلية أم لا، وتُعد "مسألة البتية" التي سنتناولها –والتي آثرنا وسم العنصر بمصطلحها بالألمانية كما دأبت جميع الكتب المتخصصة في المنطق والرياضيات– حجر الأساس إذ لا يمكن أبدا تجاهل تفحص معنى "مسألة البتية"، لأن حلها (أو الحلول المقترحة) هو النتيجة الرئيسية التي نحوها اتجهت الحركات المتقاربة نحو الرياضيات والمنطق والحوسبة (computation).

[1] نقصد بالمتضاربة جملة المخمنات ودحضها التي ظهرت متلاحقة خلال النصف الأول من القرن العشرين كما سنرى.

غير أن مسألة البتية استعصى على الرياضيين حلها، فلقد كانت تبدو وكأنها مسألة غير رياضية، ففي بداية الثلاثينات لو تسأل أي رياضي عن دور الآلة الميكانيكية في الرياضيات لكانت الإجابة البديهية بـ "لا" وما دخل الآلات الحسابية في الرياضيات المحضة، حيث رأى معظم الرياضيين أن مسألة "البتية" يجب مقاربتها كبرهان رياضي كلاسيكي باستعمال رموز وعلامات المنطق الرمزي. (Henderson, 2011, pp. 30-31)

بالفعل، لقد أدت محاولات الإجابة على سؤال هلبرت إلى أفق جديد من البحث في مجالات متقاطعة ومتقاربة نحو نقطة واحدة وهي ما نسميه بالنماذج الحسابية (computational models) التي قدمها ألونزو شورش (Alonzo Church) العام 1935 مع مفهوم قابلية الحساب الفعالة (effective calculability) التي كـــان أساسها النـــموذج الحســـابي لامـــبدا ($\lambda - calculus$)، عام بعدها قدم لنا ألان تورينج (Alan Turing) مفهوم آلة تورينج وسرعان ما بُرهن بأن جل هذه المقاربات ماهي إلى نماذج حسابية متكافئة.

إن هذه المقاربات السالفة الذكر سواء كانت مقاربة تشورش أو مقاربة تورينج أو مقاربات أخرى، قد نجحت بشكل كبير في "تحويل مسألة البتية من مسألة منطقية إلى مسألة حسابية" وأدت فيما بعد إلى ظهور الحوسبة كبراديم معرفي جديد يمكن رؤيته باعتباره "تفسيرا وتأويلا من الحساب نحو الآلة".

1.مسألة البتـــــية:

منذ القدم تُطرح في الرياضيات الأسئلة التالية: إذا كانت لدينا مجموعة منتهية أو غير منتهية من القضايا الرياضية، فهل لدينا طريقة ما لمعرفة إن كانت كل واحدة من هذه القضايا هي إما صحيحة وإما خاطئة، تُسمى أي طريقة من هذا النوع بآلية أخذ الـــقرار (A decision procedure) بينما تُسمى مسألة البحث عن هذه الطرق بمسألة البت أو البتية مثلا هل توجد آلية إتخاذ القرار بشأن السؤال التالي: هل العدد الطبيعي غير المعدوم A يقسم العدد الطبيعي B؟ الجواب نعم وهي القسمة الإقليدية المعتادة.

طرح هلبرت أثناء المؤتمر العالمي للرياضيات العام 1900 بباريس ثلاثا وعشرين مسألة حيث أكد أنها ستكون موضوع اهتـــمام الرياضيين خلال القرن العـــشرين، أي بعبارة أخرى سترسم ملامح رياضيات القرن الجديد وسُميت باســـمه أي مسائل هلبـــرت (Hilbert problems).

ويعود أصل "مسألة البتية" (Entscheidungsproblem) إلى لايبنيتس في القرن السابع عشر، فبعد أن نجح في تصميم آلة ميكانيكية للحساب، حلم ببناء آلة يمكن لها أن تعالج رموزا إضافة إلى تحديد "قيمة الحقيقة" لأي جملة أو قضية رياضية، حيث توصل لايبنيتس كأول خطوة إلى وجوب كون هذه الآلة ذات لغة، وهكذا اهتم علماء الرياضيات بمسائل القرار العام منذ العام 1895 حين تعرض شرودر (Schröder) بالنقاش إلى واحدة من هذه المسائل، لكن ربما كانت بداية الاهتمام الأشهر في عام 1900 عندما اقترح هيلبرت المسألة التالية، وهي المسألة العاشرة من بين مسائله المستقبلية الثلاث والعشرين الشهيرة: هل توجد آلية ما لمعرفة إن كانت كل معادلة جبرية متعددة المتغيرات بمعاملات صحيحة تقبل حلولا صحيحة أم لا؟

نصت مسألة هلبرت العاشرة على: هل توجد آلية أو خوارزمية يمكنها أن تقرر أو تبت بصفة ميكانيكية إذا كانت قضية أو تصريح رياضي ما صحيحا؟، هل يوجد أم لا خوارزمية خطية (polynomial) لحل المعادلات الديوفانتية؟، وللعلم، فالمعادلات الديوفانتية هي المعادلات الجبرية بمعاملات طبيعية والحلول المقصودة هي الحلول الناطقة أو الطبيعية. والمشكلة التي طرحت في البداية حول هذه المسألة تتعلق تحديدا بالمعنى الرياضي الدقيق لكلمة خوارزمية لأن المعنى الذي قصده هيلبرت في عام 1900 كان ضبابيا ومتعلقا أساسا بالحدس.[2]

في العام 1928 طرح كل من دافيد هلبرت وفيلهلم أكرمان (Wilhelem Ackermann) هذه المسألة، وفي عقد الثلاثينيات من القرن العشرين بدأ علماء المنطق الرياضي يربطون بين مسائل البت وآليات الحساب. يعرض الأستاذ ناجي هرمس فكرة بسيطة عن عملية الربط هذه من خلال هذه المقاربة: (هرماس، 2022، صفحة 205)

لنتصور أنه لدينا مجموعة منتهية أو قابلة للعد من القضايا الرياضية P_n حيث n عدد طبيعي. نعرف الدالة f كما يلي: القيمة $f(n)=1$ إذا كانت P_n صحيحة، وتساوي 0 إذا كانت P_n خاطئة. بهذه الطريقة نكون قد تحصلنا على دالة معرفة في مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية بقيم في المجموعة الثنائية المكونة من {0,1}

ويمكن أن نرى هنا أنه إذا وجدت آلية ما لحساب قيم هذه الدالة فهذا يعني مباشرة أنه بمقدورنا التقرير أو البت في صحة كل القضايا الرياضية P_n إذا وجدنا بعد الحساب أن

[2] لم يُصغ التعريف الرياضي الرصين للخوارزميات في ثلاثينيات القرن العشرين الذي عرف تطورا هائلا في أساسيات الرياضيات والمنطق الرياضي. لقد أعطى علماء المنطق والمختصون في أساسيات الرياضيات عدة تعاريف لماهية الخوارزمية، وهي متكافئة في أغلبها. ولعل أكثرها وضوحا وحدسية التعريف المبني على آلة تورينج. أنظر (هرماس، 2022، صفحة 57)

$f(n) = 1$ فالقضية P_n صحيحة، وإذا وجدنا $f(n) = 0$ فالقضية المعتبرة خاطئة. إذن نحن حصلنا فعلا على آلية قرار بشأن القضايا P_n.

والعكس أيضا صحيح، فإذا توفرت لدينا آلية قرار بشأن القضايا P_n نكون أيضا قد حصلنا على آلية لحساب قيم الدالة f، إن هذا التكافؤ بين آليات القرار وآليات الحساب هو الذي دفع علماء المنطق إلى التركيز على هذه الأخيرة، وذلك بطرح السؤالين التاليين: ما هي آليات الحساب؟ وما هي الدوال القابلة للحساب بواسطة هذه الآليات؟

وما يمكن أن نقدمه كتحليل لما سبق ينطلق من فكرة مؤداها أن ما وصل إليه المناطقة والرياضيون غاية في الأهمية وهو أن مفهومي قابلية البت وقابلية الحساب مفهوم واحد، فإذا كان لدينا مسألة P وكانت عندنا حالة (instance) P(a) من أجل القيمة a تكون صحيحة أو خاطئة {vrai, faux} أي: $P: a \to P(a) \in \{vrai, faux\}$، إذا كانت المسألة P قابلة للبت إذن فإنه توجد خوارزمية يمكنها حلها، وبالتالي فالمسألة P قابلة للحساب، وبالمقابل إذا كانت الدالة P قابلة للحساب، فإنه توجد خوارزمية يمكن من خلالها حساب أي صورة بواسطة P، وبالتالي من أجل قيمة a هناك خوارزمية تسمح لنا بمعرفة إذا كانت P(a) صحيحة أو خاطئة وبالتالي P قابلة للبت.

نعرف جيدا في "مسألة البت" إحدى المهام التي اضطلع بها المناطقة عن طريق "برنامج هلبرت" في الحلول السالبة (تحمل إجابة بالسلب على سؤال هلبرت) التي أعطاها تشورتش وتورينج والضربات القوية التي تعرض لها "برنامج هلبرت" بعد أن أطاحت به من قبل مبرهنات جودل 1936.

إن مختلف هذه النكسات لا تهمنا إلا من حيث التطور اللاحق للحوسبة وعلى الآلات التي اعتبرت "كوصف للمنطق" لكن من حيث هذه المنظورية اعتبرت أيضا حاسمة، حيث مراحل عديدة من هذا التاريخ تتخللها أسئلة ونتائج نظرية، يمكن أن نذكر بأن ذلك

ما شكل بطريقة ما تأويلا للآلات المعلوماتية: أولا في دلالتها المنطقية المحضة، وما سيظهر لاحقا فيما ارتبط بالعلاقات الموجودة بين الأصول المنطقية ونظرية قابلية الحساب ونتائجها التأسيسية للحوسبة النظرية.

يُعتبر مفهوم "الإجراء الفعال" واحدا من أهم المفاهيم التي شكلت الحدود الضيقة جدا بين المنطق والآلات، والذي تعلق بالمسألة الأصلية والمركزية لنظرية قابلية الحساب، بالرغم من أن مسألة معرفة كيف نميز "صوريا" فكرة "الإجراء الفعال" قد ظهرت في محتوى أو ضمن نظرية البرهان كما وضعها هلبرت.(Krivine J., 2012, p. 135)

2.جـــــــــودل: مع هلبرت ضد هلبرت

1.2.مبرهنة الكمالية:

حصل جودل من خلال مبرهنة الكمالية على درجة الدكتوراه العام 1929 حيث برهن أنه ضمن أي نسق أكسيوماتي كل قضية صحيحة فهي قابلة للبرهان، وتُعتبر "مبرهنة الكمالية" مبرهنة خاصة بحساب المحمولات من الدرجة الأولى أو منطق الدرجة الأولى تضع تطابقا بين سيميائية أو دلالية (sémantique) وبراهين نسق استنباطي في منطق الدرجة الأولى، وبالتالي تدل "مبرهنة الكمالية" بشكل إجمالي على أنه يمكننا إيجاد مبادئ استدلال جديدة منطقية محضة مختلفة عما كان متعارفا عليها، وكانت هاته الفكرة تسير بشكل أساسي في اتجاه هلبرت وتدعم أطروحته، فخلال نفس الأعوام توصل هلبرت وأكرمان إلى نتائج أخرى تسير في ذات الإتجاه أيضا، مما يؤكد أن "مبرهنة الكمالية" كانت وبشكل كبير تسير في فلك برنامج هلبرت.

وبعبارة بسيطة تُنشئ "مبرهنة الكمالية" جسرا بين "الحقيقة الصورية" و"قابلية البرهنة الصورية"، فكل قضية صحيحة قابلة للبرهنة وبعبارة أدق، فإن مبرهنة الكمالية تؤكد بأنه إذا كانت قضية هي نتيجة سيميائية لنظرية يمكن توصيفها أو التعبير عنها في "صورية" حساب

محمولات من الدرجة الأولى أي تُعتبر صحيحة في كل نماذج[3] هذه النظرية إذن، فهي نتيجة تركيبية (syntaxique)، وبعبارة أخرى نقول:

لتكن $\mathfrak{T}$ نظرية[4] في منطق الدرجة الأولى، ولتكن φ نتيجة سيميائية (دلالية) من منطق الدرجة الأولى، إذا كانت φ نتيجة سيميائية لـ $\mathfrak{T}$ فإن φ نتيجة تركيبية لـ $\mathfrak{T}$.

وتُعتبر "مبرهنة الكمالية" ميتامبرهنة بالتعبير الهلبرتي، تربط بين مفهومين أساسيين: مفهوم متعلق بالنتيجة السيميائية ومفـهوم متعـلق بالنتيجة التركيـبية في نسـق استنباطي منطقي.

إن المفهوم الأول الذي وجب تعريفه متعلق بالإستنباط المنطقي، حيث يؤكد جودل بأنه يمكننا إعطاء عدد منته من مسلمات، مخطط مسلمات أو قواعد استدلال توصف أو تصورن الجزء المنطقي المحض للإستنباط، بعبارة أُخرى كل البراهين التي نكتبها أو نقوم بها وفقا لخطوات أولية للإستدلال يمكن الحصول عليها من خلال هاته المبادئ.

إن الصلاحية (validité) المنطقية لمسلمة، مخطط مسلمات أو قواعد استدلال يمكن ضمانها عن طريق "النماذج"[5]، وهكذا فكل قاعدة استنباط هي صالحة عندما تكون نماذج مقدماته هي أيضا نموذج لنتيجته، ومنه تكون المسلمة المنطقية صالحة عندما تكون صحيحة في كل النماذج، ويكون مخطط مسلمات مبدئا منطقيا صالحا عندما تكون لكل مسلماته الناتجة عن هذا المخطط عبارة عن مخططات منطقية صالحة.

كما يكون نسق مبادئ منطقية صالحا وصحيحا عندما تكون مسلماته، مخططات مسلماته وقواعد استنباطه صالحة، وبالمحصلة نقول: يكون البرهان صالحا منطقيا عنـدما

---

[3] أنظر الفصل القادم

[4] راجع تعريف النظرية في الفصل السابق

[5] راجع الفصل القادم: نظرية النماذج

يمكن صورنته في إطار نسق منطقي صالح.

ما يمكن أن نخلص إليه هو أن "مبرهنة الكمالية" تُعنى بكل الأنساق الإستنباطية بمعنى أن كل نسق إستنباطي يجب أن يكون كاملا بشكل كاف وبكيفية يمكن من خلالها برهنة كل القوانين المنطقية، بمعنى أن كل صيغة صحيحة في كل نموذج. كما أنه يمكن التعبير عن "مبرهنة الكمالية" بالصيغة التالية: يوجد أنساق إستنباطية منطقية صالحة $\mathcal{L}$ التي تستجيب للشروط المتكافئة الآتية:(Théorème de complétude, 2022)

من أجل كل صيغتين p وq من منطق محمولات الدرجة الأولى، إذا كانت q نتيجة منطقية لـ p فإن q قابلة للبرهان إنطلاقا من p في $\mathcal{L}$ ونكتب إذا كان $p \vDash q$ فــإن $p \vdash q$، كما أنه من أجل كل صيغة p، إذا كانت p تمثل قانونا منطقيا فإن p قابلة للبرهنة ونكتب صوريا: إذا كان $\vDash p$ فإنه $\vdash p$.

من أجل كل صيغة p، إذا كانت p تمثل تنافضا منطقيا فإن (non p) قابلة للبرهنة ونكتب صوريا: إذا كان $\vDash \neg p$ فإنه $\vdash \neg p$.

من أجل كل صيغة p، إذا كانت p تمثل تنافضا منطقيا فإن p غير متماسكة (غير متسقة) في $\mathcal{L}$، ونكتب صوريا: إذا كان $\vDash \neg p$ فإنه $p \vdash \perp$.

من أجل كل صيغة p، إذا كانت p متسقة فإن في $\mathcal{L}$ فإن p متشبعة (satisfaisable) ونكتب صوريا: إذا كان $not(p \vdash \perp)$ فإن $not(\vDash \neg p)$.

2.2.مبرهنة اللاكمالية:

أثارت عند اكتشافها مبرهنة اللاكمالية لكورت جودل حالة كبيرة من اليأس والشك لدى الرياضيين والعلماء والفلاسفة على حد سواء، ذلك أنها سحبت البساط من تحت يقينية وموضوعية وصرامة الرياضيات، (Chaitin G., 2007, p. 48)

كما أن براهين جودل بدت غاية في الصعوبة آنذاك، على عكس أيامنا هذه التي أضحت فيها براهينه بسيطة، واضحة ومفهومة.

في العام 1931، برهن كورت جودل عدم إمكانية برنامج هلبرت من خلال البرهان على أن كل نظرية متسقة أو منسجمة، تتضمن قواعد الحساب تحتوي على الأقل على قضية غير قابلة للبت، كما عاد وبرهن العام 1932 على قضية "عدم تناقض" نظرية معينة هي في حد ذاتها قضية غير قابلة للبت.

ذهب جودل لأبعد من ذلك عندما برهن عدم بتية لا تناقض الحساب بأدوات حسابية وأكد أن الأدوات الحسابية ضعيفة جدا لتضمن اتساق نظريته، وبالتالي خلص إلى أن الرياضيات لا يمكن اختزالها أو ردها لعلم الحساب.

إنطلق جودل من مسلمة مؤداها أنه يمكن القول بأن قابلية البرهنة تكون مرتبطة دائما بنسق أكسيوماتي معين، معنى هذا أن بعض القضايا الرياضية الصحيحة تكون قابلة للبرهنة بشكل جيد في نسق ولكن ليس بالضرورة أن تكون كذلك في نسق آخر، وهذا بالضبط ما أراده هلبرت ومريدوه بداية القرن العشرين ضمانه وتأكيده أي أن يكون من الممكن بناء نسق أكسيوماتي بحيث تكون فيه كل القضايا الرياضية الصحيحة قابلة للبرهنة، ونسق كهذا نسميه نسقا تاما أو كاملا.

وهذا ما قضى عليه جودل حين برهن أنه أثناء الإشتغال على نسق حسابي معين خاص بالأعداد الطبيعية (نسق بيانو الحسابي مثلا) مهما يكن النسق الأكسيوماتي الذي نستخدمه سيكون هناك دائما قضايا صحيحة لكنها غير قابلة للبرهنة، حينئذ نسمي هذه القضية بقضية غير قابلة للبت أو التقرير، وهذا يعني أنه لا يوجد نسق أكسيوماتي كامل ولهذا سُميت مبرهنة جودل بمبرهنة اللاكمالية.

جودل ومن خلال مبرهنته كان قد حطم برنامج هلبرت، بالفعل كان شيء من الغموض يعتري برنامج هلبرت لاسيما عند قول: "نبرهن من خلال وسائل وأدوات علم الحساب أن هذه النظرية لا تؤدي إلى أي شكل من أشكال التناقض"، (Lombardi, 2021, p. 1) فقد كان يجب معرفة ماهي هذه الحجج المقبولة في علم الحساب الأولي، ففي فكر هلبرت الحجج المقبولة كانت من طبيعة بسيطة والأكيد أنها كانت قابلة للصورنة في النسق الأكسيوماتي البسيط بالنسبة للأعداد الطبيعية. من خلال هذه الصيغة المحددة بالضبط، قتل جودل برنامج هلبرت، ليس فحسب نظرية أكسيوماتية صورية للمجموعات، ولكن الأنساق الأكسيوماتية الأكثر بساطة بالنسبة للأعداد الطبيعية لا يمكن برهنة خلوها وسلامتها من التناقضات بواسطة وسائل وأدوات علم الحساب الأولي.

رأى معظم الرياضيين مسألة البت التي وضعها هلبرت بأنه يجب مقاربتها كبرهان رياضي تقليدي باستعمال رموز المنطق الرمزي، قام جودل بتطوير طريقة ذكية لممارسة الرياضيات بالرياضيات، بإنشاء أرقام وحيدة للحصول على تصريحات أو قضايا صورية بمتغيرات والتي يمكن صورنتها في نسق رياضي، ثم أكد فيما بعد أنه اكتشف مبرهنة الكمال، حيث لا يمكن أن يكون متسقا أو متماسكا، أي بعبارة أخرى لكل نظرية مستقلة لا يمكن أن تكون كاملة أو تامة.

حيث بنى جودل برهانه الأول على أطروحة صحيحة لكنها غير قابلة للبرهنة في إطار وأدوات الصورنة المألوفة لنظرية الأعداد، والآن لنعرض كيف برهن جودل "مبرهنة اللاكمالية" إنطلاقا من قواعد علم الحساب، فعند القول بأن "2+2=4" فهاته قضية حسابية، لكن إذا قلنا "2+2=4 هي قضية قابلة للبرهنة إنطلاقا من مسلمات بيانو" فإن هذا القضية ستصبح قضية ميتاحسابية (méta arithmétique)، إن الفكرة العبقرية لجودل هي وصوله لكيفية ربط من خلالها القضيتين السالفتين، وبالجملة فإنه برهن على أنه:

من أجل كل قضية E يوجد قضية أخرى S(E) بحيث تكون E تكون قابلة للبرهنة إذا وفقط إذا كانت S(E) صحيحة، إذ يقوم هذه العمل على طريقة "تشفير" تسمح بتحويل كل قضية إلى عدد طبيعي، وكل برهنة إلى سلسلة أعداد طبيعية، فأصبحت قابلية برهنة E بالتالي وكأنها خاصية حساب على سلسلة من الأعداد هي القضية S(E). (Louapre, 2023)

ثم قام بالحيلة الفذة وهي إيجاد "قضية خاصة" سماها G بحيث "S(E)=nonG" بتطبيق النتيجة السابقة على هاته القضية الخاصة فنتحصل على التأكيد:

G قابلة للبرهنة إذا وفقط إذا كانت G خاطئة، وبالتالي أن تكون G صحيحة وبالتالي غير قابلة للبرهنة (نحصل على اللاكمالية) أو أنها خاطئة وقابلة للبرهنة (وليست متسقة).

سنفترض أن القضية A هي نفي للقضية B والتي نرمز لها بالرمز $\neg B$، وحسب قواعد المنطق الكلاسيكي فإن القول بأن القضية المنطقية B خاطئة إذا كانت القضية $\neg B$ صحيحة، وهكذا فإن مفهوم الخطأ يعتمد على مفهوم الصحة، وبالإعتماد على المسلمات المنطقية الأولية في المنطق الكلاسيكي أو منطق الدرجة الأولى سنستنتج بسهولة الحقيقة التالية من أجل كل قضية A فإن القضية $A \vee \neg A$ دائما صحيحة، وكما أسلفنا فإن هذه القضية تُعرف بمبدأ الثالث المرفوع.

إننا الآن أمام الموقف المحير التالي: من ناحية، يخبرنا مبدأ الثالث المرفوع أن القضية A إما صحيحة وإما خاطئة، ومن ناحية ثانية، لا توجد براهين رياضية تثبت ذلك. وهنا من حق المرء أن يتساءل: إن البراهين الرياضية هي وسيلتنا الوحيدة لتمييز القضايا الرياضية الصحيحة عن تلك الخاطئة، فإذا لم تكن توجد بالمرة هذه البراهين، فكيف يحق لنا القول إن القضية المعتبرة إما صحيحة وإما خاطئة؟

3.آلـــــة تورينج:

1.3.في البحث عن الأسس:

يعتبر مقال ألان تورينج الموسوم بـ: 'في الأعداد القابلة للحساب وتطبيقها على مسألة البتية،[6] الذي نشره العام 1936 نصا مؤسسا لما نصطلح عليه اليوم بقابلية الحساب وهي إحدى فروع المنطق المعاصر، حيث قدم تورينج عمله في سياق البحث عن أسس الرياضيات وحل أزمة الأسس التي شهدتها رياضيات القرن العشرين، ولا يقتصر عمله على مجرد آلة إفتراضية للحساب كما سنفصل فيما بعد، إنما تتمفصل طريقة تورينج في تعامله مع مسائل هلبرت على جملة من المنعطفات على مستوى طريقة تناوله لمسألة البت التي طرحها هلبرت، ولقد أثارت طريقة فيتجنشتاين في تناوله لمفارقة الكذاب حفيظة وإلهام تورينج في الآن نفسه، فمن جهة عارض تورينج أشد المعارضة فيتجنشتاين في اعتبار أنه على الرياضيين والفلاسفة أن يسمحوا بوجود المفارقات في النسق الرياضي بحجة أنه يجب التمييز بين مسألة المفارقة أو التناقضات داخل الرياضيات وخارج الرياضيات، كما أن الرياضيات بالنسبة لفيتجنشتاين إبتكار وليست إكتشافا ويكون بذلك مناهضا للأفلاطونية، فيؤكد مثلا أن البرهان على نظرية فيرما إبتكار وليس إكتشافا، أما عن مسألة الكذاب فيقول فيتجنشتاين: "أن يقول أحدهم أنا كذاب أن نصدقه أو لا نصدقه فما الفائدة من ذلك إنها مجرد لعبة لغة عديمة الفائدة" (Murphy, 2022)، لكن ما استخلصه تورينج بالفعل من منطق فيتجنشتاين قوله: ما يمكن قوله يمكن قوله بوضوح، وهو مبدأ التبسيط الذي اعتمده تورينج في التعامل مع مسألة البتية.

بالفعل، فقد طبق تورينج واحدة من أقوى وأنجع الأدوات المتاحة لحل أي مسألة، إنها التبسيط simplification، (Henderson, 2011, p. 32) وترتكز هذه الأداة على

[6] On the computable numbers with an application to the entscheidungsproblem

إيجاد ماهية المسألة من خلال التخلص من أي شيء خارج عنها أي بتعبير فينومينولوجي، نضع المسألة بين قوسين، وهكذا اشتغل على بناء نسخة مجردة من آلته: آلة العقل، فقلص من التعقيدات مختزلا إياها في ماهية مطلقة للآلة التي أرادها، حيث أنه وجب أن تكون بسيطة لتتمكن من الإجابة على سؤال هلبرت.

فلسفيا، لا تقتصر أهمية فكر تورينج عند حد مسألة معالجة أسس الرياضيات أو الإنتقال إلى فكر جديد ومستحدث آنذاك والمتمثل في رد القضايا والبراهين الرياضية إلى حسابات ممكننة فحسب، فقد ذهب بعض مؤرخي العلم والأفكار إلى أن هذه الصورة لعملية التفكير لدى تورينج قد بنت جسرا (Bridge Building) بين الملموس أي العالم الفيزيائي وبين علم العقل أو الذهن، وهو ما يُعتبر أعظم ما قدمه تورينج للرياضيات والمفتاح الذي فتح بالفعل عالم الحاسبات. (Henderson, 2011, p. 33)

يشبه الحدس الفيزيائي لتورينج كثيرا ما اشتهر به عالم الفيزياء الفذ الأميركي ريتشارد فاينمان (1918-1988) حيث أنهما لم يلتقيا أبدا، لكنه مثل تورينج كان لدى فاينمان مسألة معقدة للغاية وهي مسألة الديناميكا الكمية.[7] فقد استطاع فاينمان أن يدرك المسألة من خلال رؤيتها في أبسط حدودها (terms) وكمحصلة لذلك توصل فاينمان إلى أنه ما يمكن أن يبدو مسألة صعبة للغاية ومعقدة يمكن من خلال سلسلة من الحسابات (computations) التي يمكن التحكم فيها وحسابها، تمكن في الأخير فاينمان من تقسيم نظام المخططات والرسوم البيانية للمساعدة في كل خطوة من خطوات السلسلة، وهكذا أصبحت الميكانيكا الكمية أكثر وضوحا وقابلية للفهم للأجيال اللاحقة من الطلبة.

[7] أرسى ريتشارد فاينمان نظرية الديناميكا الكهربائية الكمية للربط بين النظرية النسبية الخاصة وميكانيكا الكم وتعد هذه النظرية الصورة الكمومية من الكهرومغناطيسية التقليدية أو بتعبير علمي أدق فإنها تعد نظرية الحقل الكمومي للقوة الكهرومغناطيسية. وتشرح النظرية التآثر بين الضوء والمادة المشحونة كهربائيا. أنظر universalis.fr

كما تكمن أصالة تورينج وابتكاره في تناوله لمسألة البت لهلبرت في كونه بدل أن يشتغل على المستوى الرمزي، فقد انتهج مقاربة جديدة، أولا: بيَّن بأن مسألة البتية تكافئ مسألة أخرى وهي تحديد ما إذا كان يمكن الجزم بالقدرة على حساب دالة رياضية مُعطاة (معينة) أي بعبارة تورينج: ما إذا كانت الدالة قابلة للحساب. (Henderson, 2011, p. 30)، إن هذه الخطوة كانت خطوة جريئة وخلاقة، بالفعل لأنه ببساطة حول تورينج مسألة البتية المنطقية–الإستدلالية إلى مسألة حسابية مما جعله يخرج من صندوق التفكير الرياضي السابق، أو بلغة كوهن خرج من براديم البرهان الكلاسيكي إلى براديم الحساب ومن ثم المكننة.

بعدها قدم تورينج تعريفا بسيطا للدالة الرياضية،[8] فالدالة الرياضية هي كل علاقة تربط بين مدخلات (input) ومخرجات (output) ولنأخذ مثالا على ذلك: الدالة $f(x) = 2x$ من أجل كل قيمة x فإن $f(x)$ تأخذ ضعف قيمة x وبالتالي فإذا اتخذنا القيمة 4 لـ x مثلا كمدخل للدالة فإن مخرجها هو $f(x)=8$، ثم حدد تورينج مفهوم قابلية الحساب من حيث هو القدرة على تطبيق سلسلة من الخطوات المحددة (أول تعريف صريح للخوارزمية)، فإذا تمكنا من اثبات أن الخوارزمية توفر دائما نتيجة محددة لأي قيمة تتخذها كمدخل (سابقة) للدالة فإن هذه الدالة قابلة للحساب. (Henderson, 2011, p. 30)

[8] رياضيا، يحتل مفهوم الدالة fonction باللسان الفرنسي أو function بالإنجليزي مفهوما محوريا في مجال الرياضيات لاسيما حقل التحليل العددي، وله تطبيقات لا حصر لها في شتى العلوم خاصة الفيزياء، وصوريا يمكن تعريف الدالة بوصفها علاقة بين مجموعة بدء تُسمى مجموعة السوابق مثلا مجموعة الأعداد الحقيقية R أو جزء منها ومجموعة وصول تُسمى مجموعة اللواحق أو مجموعة الصور في حالة التابع العددي تكون أيضا R أو جزءا منها، كما يوجد هناك توابع أو دوال عقدية، إضافة إلى دوال لأكثر من متغير. أنظر عبد الواحد أبو حمدة: الجبر.

2.3.الأعداد القابلة للحساب:

في مقاله سالف الذكر، طرح تورينج سؤالا: "ما هو العدد الحقيقي؟"، وقدم تعـــريفا جديدا أصيلا متعلقا بالحساب الميكانيكي أو الحساب القابل للمكننة، حيث يعيب تورينج على التعريفات والحجج التي قدمها الرياضيون لا سيما منها التي تستدعي حضور الحدس كتعريف كوشي[9]، ولهذا السبب بالذات فهي رياضيا غير صالحة لأنها لا تقدم لنا تعريفا رياضيا واضحا للعدد الحقيقي،[10] وتجدر الإشارة إلى أنه وفقا للمنطق الحدساني الذي يختلف عن المنطق الكلاسيكي، يُعوض مفهوم الحقيقة بمفهوم "البرهان البنائي" فقضية مثل "ثابت Euler-Mascheroni [11] ناطق أو ثابت Euler-Mascheroni حقيقي" ليست مبرهنة بكيفية بنائية (حدسية) في إطار معرفتنا الرياضية الحالــية، لأن القضية الطــوطولوجية (قضية تحصــيل الحاصل) "$P \vee \neg P$" لا تنتمي للمنطق الحدساني، لأن المنطق الحدساني قائم على مقولة أساسها التمييز بين "أن يكون صحيحا" و"كونه ليس خاطئا"، لأن القضية "$\neg\neg P \rightarrow P$" ليست مبرهنة بالمطلق في المنطق الحدساني.

يكون العدد الحقيقي x قابلا للحساب بالمعنى الحدسي معناه أنه يمكننا من أجل كل عدد طبيعي n حساب تقريب للعدد الأصم x بدقة أو تقريب بدرجة 10^{-n}، هذا يعني أنه

---

[9] $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \aleph, \forall p, q \geq N, |U_p - U_q| < \varepsilon$

[10] الأعداد الحقيقية ما هي إلا متتاليات متقاربة أو بمعنى أدق متتالية لكوشي، لأن مفهوم التقارب لا معنى له إن لم تكن لدينا نهاية معرفة في مجموع، وعلى هذا إذا أخذنا سلسلة مجموع متقارب فنحن نلاحظ أنه عند حسابها أن الأرقام بعد الفاصلة تستقر، نعم تزيد فهي غير منتهية لكن نراها تستقر رويدا رويدا فكأنها تقترب من عدد وبالتالي تصبح هنا المتتالية نفسها عدد، صناعة مجموعة الأعداد الحقيقية أعطت أكثر من ثمارها فقد أظهرت مفهوم الإستمرار إذ كل متتالية محدودة يمكن استخراج منها متتالية متقاربة وكل مجموعة محدودة يمكن إيجاد حدها الأعلى والأدنى فأنتجت بذلك مبرهنة القيم المتوسطة ومبرهنة رول والدوال المستمرة بل برهن كانتور على أنها أغنى من الأعداد الطبيعية إذ هي غير قابلة للعد، وقد قام العلماء بتعميم بنيتها فأدى ذلك إلى اختراع الطوبولوجيا والفضاءات الشعاعية وفضاء باناخ وغيرها.

[11] هو الفارق بين السلسلة الهارمونية واللوغاريتم الطبيعي له تطبيقات عديدة في مجال التكامل وحساب التفاضل، كما أن له علاقة بدوال أخرى مثل دالة جاما يُعطى بالعلاقة: $\gamma = \lim_{n\to\infty}(-\log n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}) = \int_1^{\infty}(\frac{-1}{x} + \frac{1}{[x]})dx$ أنظر (Everest & Thomas, 2000)

عندما يكون عدد حقيقي قريبا جدا من عدد عشري يجب مسبقا معرفته بدقة لا متناهية لتعيينه على محور الأعداد الحقيقية على يمين أو يسار العدد العشري أي بتقرب بقيم أكبر أو تقريب بقيم أصغر، وعليه يمكن القول بأن العدد الحقيقي القابل للحساب وفقا لمنظور تورينج هو عدد حقيقي من أجله، توجد خوارزمية أو آلة تورينج تسمح لنا بعد سلسلة أو متتالية أرقامه والتي في الغالب غير منتهية، وبعبارة أخرى، يكون العدد الحقيقي عددا قابلا للحساب إذا أمكن حساب "تقريب" له بالدقة التي نريدها أي بدقة معلومة، كما ننوه إلى أن أول تعريف واضح وصريح لما نسميه الخوارزمية يعود لآلان تورينج عندما تصور جهازه النظري للحوسبة وهو الآن التفسير الأكثر بداهة والأقرب لحدوسنا لمفهوم الخـــــــوارزمية. (Chaitin, Da Costa, & Antonio Doria, 2011, p. 21)

تطور مفهوم الأعداد القابلة للحساب وتعدى إلى فروع كثيرة من الرياضيات البنائية، الأعداد الجبرية الحقيقية، فبعض الأعداد المتسامية مثل العدد π قابلة للحسبة، ولقد استخدمت صيغ كثيرة عبر التاريخ لحساب أكبر عدد ممكن من الرتب العشرية للعدد π، نذكر منها مثلا عبارة رمانوجان، وكذا صيغة الأخوين شودنوسكي (Chudnosky) التي تُعتبر امتدادا لصيغة رمانوجان:

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

حيث تمكنت عالمة الحاسوب ومهندسة جوجل إيما هاروكا (Emma Haruka Iwao) في التاسع من جوان 2022 من تحقيق رقم قياسي عالمي جديد من خلال حسابها مئة ألف مليار رتبة عشرية أي 10^{14} على حاسوب قوي اشتغل لمدة 157 يوم متواصلة،[12] وقد

[12] للإطلاع أكثر على تاريخ العدد π وحساب رتبه العشرية، نحيلكم على كتاب جان بول ديلاهاي: (Delahaye, Le fascinant nombre pi, 1997)

سبقت هاتين الصيغتين صيغ حسابية كثيرة نذكر منها الصيغة التربيعية للايبنيتس:

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

تأتي صعوبة عملية تحديد الأعداد الحقيقية القابلة للحساب من صعوبة كيفية تعريفنا لها، يؤكد تورينج، بالفعل إذا كان على الأعداد القابلة للحساب أن تحقق الشروط الحدسية الآتية: (Lombardi, 2021, p. 12).

لتكن (a_n) و(b_n) متتاليتين ناطقتين[13] قابلتين للحساب، وإذا كان لكل عدد طبيعي n:

$$b_n - a_n \leq 2^{-n} \text{ و } a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

إذن يوجد عدد حقيقي قابل للحساب α بحيث يحقق المتباينة من أجل كل عدد طبيعي n:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n$$

يؤكد تورينج بأنه يمكننا برهنة هذه العلاقة باستعمال أدوات البرهان الكلاسيكية المعمول بها في الوسط الرياضي، لكن باستخدام مبدأ الثالث المرفوع. في حين أن الافتراض الآتي خاطئ:

"بنفس الفرضيات، توجد عملية إجرائية تسمح لنا بصناعة برنامج آلة تحسب الرتب العشرية لعدد حقيقي α من خلال برامج آلات تحسب متتاليات ناطقة (a_n) و(b_n)"

نستطيع تفادي هذه الحالة غير المرغوب فيها من خلال تعديل الكيفية التي نعرف بها الأعداد الحقيقية القابلة للحساب حيث بالإمكان تبني تعريف صحيح حدسيا للأعداد

---

[13] المتتالية العددية هي كل دالة تتخذ من مجموعة الأعداد الطبيعية $\aleph$ أو جزء منها مجموعة بدء أو إنطلاق، وتُسمى بالمتتالية لأن حدودها مرتبة وفقا لدليل طبيعي يحقق خاصية الترتيب المنتظم كما في أكسيوماتيك بيانو مثلا، والمتتالية الناطقة حدودها كلها تنتمي لمجموعة الأعداد الناطقة، ونرمز لها بالرمز Q، يُكتب كل عدد ناطق على شكل كسر $\frac{P}{Q}$ حيث P وQ عددان صحيحان ينتميان إلى Z مع $Q \neq 0$، ونشير هنا إلى أن كل عدد ناطق يمكن كتابته على شكل عدد عشري أي ينتمي إلى D لكن بفاصلة مكررة بمعنى دورية غير منتهية.

الحقيقية القابلة للحساب بقولنا: "العدد الحقيقي α قابل للحساب إذا وفقط وإذا كان محصورا بين حدي متتاليتين ناطقتين قابلتين للحساب (a_n) و(b_n) والذي يستجيب للفرضيات المذكورة في القضية الخاطئة السابقة.

يحذرنا تورينج في هذا السياق من جهتين، الأولى متعلقة بكوننا إذا ما قبلنا القوانين المعمول بها في الوسط الرياضي، يمكننا البرهنة باستخدام "مبدأ الثالث المرفوع" بأن التعريف الأول متوافق تماما مع الحدس، أما الثانية، هذا التعريف ليس مقبولا لأنه يستلزم قضية مضادة أو على نقيض الحدس، وبالتالي وجب تعويضها بتعريف أحسن.

لكن أي الطريق نسلك طريق الحدس أو الطرق المتعارف عليها رياضيا؟ يتساءل تورينج، يبدو أننا سنميل لكفة الحدس للوهلة الأولى، لكن لنأخذ المثال الآتي: تقول المبرهنة الرياضية بأن كل كثير حدود ذا عوامل حقيقية قابلة للحساب يقبل جذورا حقيقية قابلة للحساب، لكن لنأخذ الحالة هاته: $X^2 - \epsilon$ من أجل كل ϵ عدد لا على التعيين حقيقي قابل للحساب، في الحقيقة لا توجد أي خوارزمية تسمح لنا بتأكيد ما إذا كان هذا الكثير حدود يقبل جذورا حقيقية أم لا، وبالتالي ما معنى أو جدوى المبرهنة إذا كانت حقا لا تخبرنا شيئا؟ إنها تقول لنا الآتي: نقبل مبدأ الثالث المرفوع، ونتمكن بالتالي من البرهنة من خلال نظرية المجموعات الصورية المؤكسمة ZF على أن توجد خوارزمية تحسب لنا الجذور الحقيقية لهذا الكثير الحدود، ما ذا يمكن يكون هذا البرهان وهذه الخوارزمية؟ لنتتبع بالتفصيل ما سيبدو:

إذا كان $\epsilon < 0$ تعطينا الإجابة في سطر واحد: لا توجد جذور حقيقية

إذا كان $\epsilon = 0$ تعطينا الإجابة في سطر واحد: يوجد جذر وحيد هو 0

إذا كان $\epsilon > 0$ ستقوم الخوارزمية بحساب تقريب لعدد ناطق r_n للعدد $\sqrt{\epsilon}$ وستعطينا النتيجة: يوجد جذران، بدقة 10^{-n} وتُعطى النتيجة r_n وr_n -. (Lombardi, 2021, p. 5).

هذا ما أخذتنا إليه القوانين المعمول بها رياضيا، البرهان على وجود خوارزمية تجيب على سؤال مُصاغ بشكل جيد دون القدرة على كتابة خوارزمية بسيطة تجيب على السؤال، لأنه يوجد ثلاث خوارزميات بدلا من واحدة، ولا توجد عملية إجرائية للبت أو لتقرير ما هي أحسن خوارزمية، وبتعبير آخر لا توجد خوارزمية عامة تحقق بشكل صحيح المبرهنة السابقة وهذا بالمحصلة ما يجعل المبرهنة السابقة ذات صياغة خاطئة، لأن نقص المعلومات وعدم اكتمالها يجعلها مفتوحة على أكثر من إحتمال أو إمكانية مما يجعل قضية البت فيها شبه مستحيلة، أما إذا صغناها بالشكل: "إذا كانت معاملات كثير الحدود أعدادا حقيقية قابلة للحساب، وإذا كان مميزها موجبا تماما أو سالبا تماما فإن جذورها أعداد قابلة للحساب"، تُصبح ها هنا المسألة قابلة للبت.

3.3.آلـــــــة تورينج:

أصبح مفهوم آلة تورينج مفهوما مركزيا في المنطق الرياضي المعاصر، الذي شهد ثورة فكرية كاملة خلال الثلاثينيات، وفي الرياضيات الحوسبية المخترعة بالتوازي مع ذلك، ويعود أصل أجهزة الحاسوب الحالية إلى آلة تورينج أو Turing Machine [14] ونرمز لها بالرمز TM حيث صممها الرياضي الإنجليزي آلان تورينج العام 1936، وهي أنموذج مجرد للآلات الحسابية الميكانيكية[15] مثل أجهزة الحاسوب ونعني بذلك الآلات التي صُممت لهدف الحساب أي لتبسيط وتسهيل العمليات الحسابية والتي يكون آداؤها بشكل ميكانيكي بمعنى متكونة من أجزاء وقطع متصلة فيما بينها، تصور تورينج هذا الأنموذج من خلال إعطائه تعريفا دقيقا للخوارزمية أو `العملية الميكانيكية` ليبقى هذا الأنموذج دائم الإستعمال لا سيما في المعلوماتية النظرية في مجالي التعقيد الخوارزمي وقابلية الحساب.

[14] سنرمز فيما يلي لآلة تورينج إختصارا بـ TM

[15] يرجع اسم آلة الحساب (Machine a calculer) إلى الرياضي والفيلسوف الفرنسي Blaise Pascal العام 1642

حاول توريتج من خلال مقاله الإجابة على سؤال طُرح قبل ثماني سنوات من طرف الرياضي الألماني دافيد هلبرت، تعلق السؤال "بمسألة البت": هل توجد خوارزمية تقرر ما إذا كانت قضية ما مُصاغة في نسق منطقي معين صحيحة أم خاطئة؟ والسؤال المطروح هنا لماذا أصبح الأنموذج الحسابي الذي عرضه تورينج أداة ضرورية في المعلوماتية الأساسية والرياضيات؟

تتميز آلة تورينج بكونها واسعة الإنتشار في مجالات عدة: قابلية الحساب، نظرية التعقيد ونظرية التقريب، حيث يكمن السبب في بساطتها المطلقة التي تسمح بإعطائنا بدون ريب نتائج من الصعب جدا برهنتها والإستدلال عليها في نماذج أولية، وتعتبر هذه الآلة بالفعل الأنموذج الأكثر بساطة الذي يمكن تصوره والذي يستجيب لمعايير غير صورية لكنها أكثر عمومية التي تميز خوارزمية ما (التحديد، النهاية، العمومية، التسلسل)

يجب التنويه إلى أن هذه الأنموذج بزغ في حقبة زمنية لم تكن أجهزة الحاسوب التي نعرفها بشكلها الحالي قد ظهرت، وبالتالي يتعلق الأمر بأداة مجردة، إن تعميم أجهزة الحاسوب في فترات الخمسينات والستينات قد أعطت ميلادا للأنموذج RAM [16] وهو أنموذج قريب جدا من التصميم الفيزيائي والمنطقي للأجهزة الحالية، وما هو ملاحظ أن العلماء آنذاك تمكنوا من البرهنة على أن كل هذه النماذج متكافئة بمعنى آخر ما يمكن حسابه بأنموذج A مثلا يمكن حسابه بأنموذج B.

تجدر الإشارة إلى أن TM عبارة عن أنموذج عام للحساب أي بإمكانها أن تقوم بأي حساب يقوم به أي حاسوب فيزيائي (وبأي قدرة حسابية)، بل نذهب لأبعد من ذلك بقولنا ما يمكن حسابه بـ TM لا يمكن لأي حاسوب على الإطلاق القيام به، وبالتالي فهي تختصر

---

[16] Register Addressable Memory

مفهوم الحاسوب أو آلة الحساب بكيفية مذهلة، كما أنها تشكل دعامة مثالية للتفكير حول مفهوم خوارزمية الحساب أو البرهان.

هناك عدة صيغ لـ TM، أما الأنموذج الأصلي فلم يكن غير نسخة بسيطة ومصغرة آلة الكتابة الكلاسيكية والتي يمكننا التحكم بها عن طريق برنامج. إن آلة الكتابة يمكنها كتابة أو محو رمز على ورقة أو التقدم أو التراجع بحرف، تحتوي TM على شريط غير منته من جهة اليمين ومن جهة اليسار، ومقسم إلى خلايا يمكن لكل واحدة منها أن تحتوي على رمز حيث تتحرك رأس القراءة والكتابة يمينا ويسارا لتمحو محتوى خلية أو تغير محتواها، وتتدخل هذه الرأس على الشريط وفقا لقواعد برنامج محددة، عادة ما نؤشر لخلايا الشريط بأعداد صحيحة نسبية أي تنتمي إلى Z.

يلعب الشريط دورين في الآن ذاته، فمن جهة هو وحدة إدخال تستقبل الآلة من خلاله الرموز ومن جهة أخرى هو وحدة إخراج نعرض به مختلف الرموز، في الحالة الإبتدائية يكون فارغا، نقوم بإدخال المعطيات التي نحن بصدد معالجتها عن طريق البرنامج (المعطيات أو البيانات) وتتمثل أساسا في مجموعة رموز من أبجدية عشوائية أو اعتباطية، لكن محدودة أي متكونة من مجموعة رموز منتهية، وإصطلاحا نفصل بين الخلايا بالخلية الفارغة، والرمز الأول للكلمة الأولى نضعه في الخلية ذات المؤشر 0، أين تقع تحت رأس القراءة والكتابة والتي كما قلنا تتحرك يمينا ويسارا، تقرأ محتوى الخلية التي تكون تحت مؤشرها تمحو أو تكتب أو تُبقي على الرمز المكتوب في الخلية من رموز الأبجدية $\sum$ وفي نهاية تنفيذ البرنامج تشكل لنا الكلمات الموجودة على الشريط ناتج الحساب (المخرجات).

في البدء، تم ابتكار تصميم آلة توريتج قبل أجهزة الحاسوب، كما كان من المفترض تمثيل شخص إفتراضي يقوم بتنفيذ عملية أو إجراء محدد من خلال تغيير محتوى خانات أو خلايا شريط غير منته، ونختار هذا المحتوى من بين عناصر مجموعة منتهية من

الرموز ومن جهة أخرى، في كل مرحلة من مراحل العملية يجب على الشخص أن يتحرك في وضع حالة محددة من مجموعة منتهية من الحالات

تُصاغ العملية أو الإجراء في شكل خطوات أولية أو بسيطة من نوع: إذا كنت في وضع الحالة 42 مثلا، وكانت الخانة التي على مرأى من الشخص تحمل الرمز 0 إذن نعوض هذا الرمز بالرمز 1، انتقل إلى الحالة 17، وشاهد الخانة المجاورة على اليمين.

ووفقا لشكلها النموذجي البسيط تتكون TM من ثلاث مكونات رئيسية:

- ✓ شريط متكون من عدد غير منته من الخانات، بحيث تكون هذه الخانات سلسلة متتالية لا نهائية من الخلايا التي يمكن أن تحمل إحدى الرموز
- ✓ رأس قراءة أو كتابة، حيث يكون في لحظة معينة تكون فيه الإبرة متموضعة بالضبط على خلية واحدة، كما أن الإبرة هي نفسها تحمل رمزا أ حرفا معينا
- ✓ جدول الإنتقال: يحتوي على جميع الحالات الممكنة والإنتقالات المتاحة من خلية إلى خلية

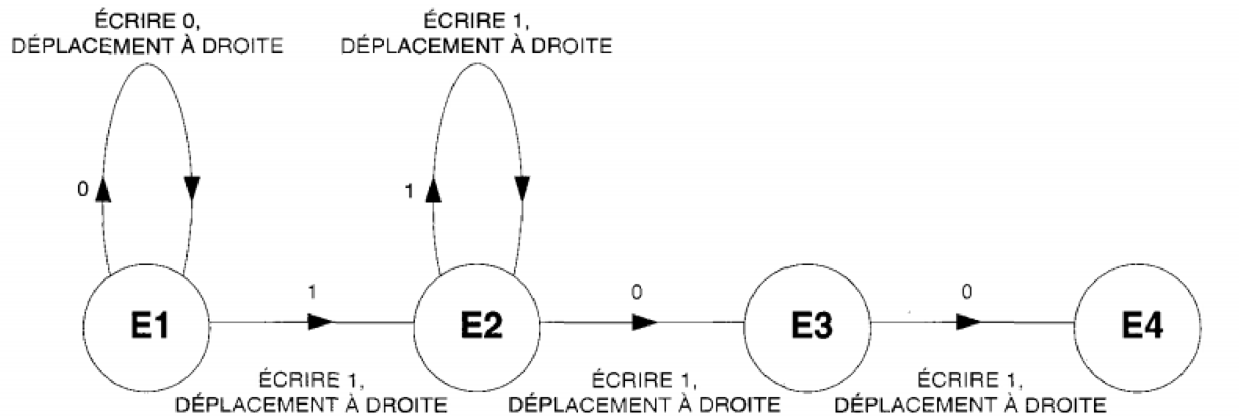
نسمي مخطط الإنتقالات كل مخطط يمثل بكيفية بيانية (رسومية) دالة الإنتقالات، يتعلق الأمر إذن بِ "بيـان" قممه "حالات الآلة" وخطوطه الإنسيابية تمثل الإنتقال بين حالتين "S_a" و"S_b"، وتكون الخطوط الإنسيابية موسومة[17] بالرمز المقروء والعملية المنجزة، وعليه كل TM تكون مرفوقة ببيان أو مخطط انتقال.

ولنأخذ المثال الآتي: (Delahaye, 1995, p. 11)[18]

---

[17] Étiquetées

[18] مثال عن دالة تقوم بإضافة 2 لعدد طبيعي: $f(n)=n+2$، العدد مكتوب في النظام الثنائي binary system



0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

S1

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

S1

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

S2

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

S2

0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

S2

0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

S3

0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

S4

تتكون رياضيا آلة تورينج من سباعية:

$$M = (Q, \sum, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$$

تمثل Q مجموعة محدودة من الحالات

تمثل $\sum$ أبجدية الإدخال

تمثل Γ أبجدية الشريط، كما تحتوي هذه المجموعة على الرموز التي يمكن أن تظـــهر على الشريـط، خـاصة وأن $\sum \subset \Gamma$ لأن الرمز المُدخل مبدئيا مكتوب على الشريط مع

افتـــراض أن $Q \cap \Gamma = \emptyset$ لكي لا يـــكون هناك غموض بين مجموعة الحالات ومجموعة رموز الشريط.

تمثل δ دالة الإنتقال (من حالة إلى أخرى)

تمثل $q_0 \in Q$ الحالة الإبتدائية

تمثل $B \in \Gamma / \sum$ رمز البياض أو الخانة الفــارغة وهو لا يشكل عنصرا من أبجـــــدية الإدخال

تمثل $q_F \in Q$ الحالة النهائية

دالة الإنتقال δ هي تطبيق (جزئي) من المجموعة $(Q \setminus \{q_F\}) \times \Gamma$ في المجموعة $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

بمعنى أنه يمكن أن تكون الدالة غير معرفة لبعض السوابق أي العناصر، وفي هذه الحالة لا يكون للآلة حركة قادمة وتتوقف، بالأخص لا يوجد انتقال إنطلاقا من الحالة النهائية q_F.

الإنتقال $\delta(q, a) = (p, b, L)$ مثلا معناه: أنه في الحالة q، ويقرأ رمز الشريط a تنتقل الآلة إلى الحالة p وتقوم بتعويض a بـ b على الشريط ويتحرك رأس القراءة/الكتابة بخلية واحدة إلى اليسار.[19]

إن آلة تورينج بهذا الشكل مهدت بشكل صريح وواضح لظهور مترجمات لغات البرمجة (compilateurs)، حيث أن لكل لغة برمجة قواعدها التركيبية (syntaxique) التي من خلالها نحدد إن كانت كلمة ما تنتمي لمجموع كلمات هاته اللغة أم لا (Vocabulaire)، بالفعل يمكن لألة تورينج التعرف على أي كلمة تعتبرها كمدخل (input) في الشريط، ومن

[19] L: left, R: right أي التحرك إلى اليمين واليسار فحسب لأن الشريط أحادي البعد له اتجاهان فقط.

خلال سلسلة من الإنتقالات والعمل على أبجدية الشريط تحدد ما إذا كانت هذه الكلمة تنتمي لمجموعة الكلمات التي يمكن توليده (engender).

4.أطروحة تشورش تورينج[20]

إن محاولات حل "مسألة البتية" لهلبرت والجواب بالسلب كانت النتيجة التي وصلت إليها كل المحاولات، دفعت "مبرهنة تشورش" الرياضيين خلال فترة الثلاثينيات إلى التدقيق حول ماهية "الخوارزمية" واقتراح العديد من التعريفات: معادلات هيربراند جودل، الأنموذج الحسابي لامبدا لتشورش، آلات تورينج، الدوال التراجعية لِكلين، حيث يرى دويك أن كل هذه التعريفات يقترح كل واحد منها لغة معينة من خلالها يعبر عن الخوارزمية وهذا ما سيُعتبر فيما بعد لغات البرمجة، (Dowek, 2007, p. 83) فكل لغة من اللغات السابقة لم تعبر في الحقيقة إلا على لغة برمجة لها قواعدها التركيبية الخاصة بها غير أنها كلها تصب في مصب واحد.

تتعلق أطروحة تشورش تورينج في الأساس بتعريف مفهوم قابلية الحساب الذي سنتناوله في الفصل القادم بإسهاب، وتنضوي الأطروحة على شكلين أحدهما فيزيائي أو حقيقي والآخر نصطلح عليه بالنفساني، أما في شكلها الفيزيائي، فيؤكد المفهوم الفيزيائي لقابلية الحساب مُعرف بوصفه كل معالجة نسقية قابلة للتحقيق بواسطة معالج فيزيائي أو ميكانيكي، يمكن التعبير عنها بواسطة مجموعة من قواعد الحساب، تكون معرفة بواسطة طرق عديدة، والتي يمكن البرهنة عليها رياضيا بأنها كلها متكافئة، أما في شكلها المسمى "نفسانيا" فتؤكد أطروحة تشورش تورينج "المفهوم الحدسي لقابلية الحساب" المرتبطة بالإنسان

[20] أطروحة تشورش تورينج أو تُسمى أيضا حدسية conjecture هي أطروحة غير صورية بمعنى أنها ليس ملفوظا (énoncé) لا رياضيا ولا منطقيا وإنما صيغت في جملة عادية غير رسمية ولهذا لا يمكن البرهنة عليها بتأكيدها أو دحضها، وتُعتر الأطروحة صادقة حتى اللحظة، بالرغم من عدم وجود برهان يؤكده صحتها. أنظر (Copeland, 2022)

في تحديد وبشكل فعلي كل ما هو قابل للحساب أم لا، ويمكن أيضا التعبير عنها بواسطة نفس قواعد الحساب الصورية السابقة.

صيغت الأطروحة على أساس القواعد الصورية للحساب (آلات تورينج، نموذج لامبدا الحسابي، الدوال التراجعية ...) حيث تشكل بكيفية صحيحة مفهوم آلية حساب فعالة أو قابلية الحساب.

بين عامي 1932 و1936 عرّف ألونزو تشورش صنفا من الدوال الحسابية التي تبدو أنها تتطابق مع الدوال القابلة للحساب، في حين آلان تورينج في العام 1936 عرف نموذجا مجردا لآلته الميكانيكية التي تسمح بإجراء حسابات إذ تعلق الأمر كما أسلفنا بالتصور الأول لما نسميه اليوم بأجهزة الحاسوب.

عام بعدها برهن تورينج أنه يوجد تكافؤ بين مجموعة الدوال القابلة للبرمجة على آلة تورينج ومجموعة الدوال القابلة للحساب، فكل دالة إذن قابلة للبرمجة هي أيضا قابلة للحساب والعكس صحيح، ولهذا السبب سُميت آلة تورينج بالآلة الكلية (machine universelle) لأنها تستطيع تشغيل كل الخوارزميات.

وفي النهاية خلص تشورش وتورينج إلى التأسيس النظري للحوسبة (computation) وهو التكافؤ بين مجموعة الدوال القابلة للحساب، الدوال الحسابية ومجموعة الدوال القابلة للبرمجة على آلة تورينج وهو ما نصطلح عليه بأطروحة تشورش تورينج.

نرجع الآن إلى مفهوم مركزي وجب إيضاحه أجلنا تفصيله لاعتبارات منهجية، وهو مفهوم "الطريقة الفعالة"، فهذا الأخير ليس مفهوما صوريا إنما هو محاولة فحسب لتوصيف ونعت "الفعالية" (efficacité) كصرامة وقدرة طريقة على الحساب دون ذكـاء أي دون تدخل انسان أو حدس.

تتعلق أطروحة تشورتش تورينج بمفهوم "الطريقة الفعالة" أو النسقية أو الميكانيكية[21] في المنطق والرياضيات وعلوم الحاسوب،(Copeland, 2022) إن كلمة فعالة ومرادفتها "نسقية" أو "ميكانيكية" تعبر عن مصطلحات تقنية في هذا الاختصاص.

ونعتبر بصفة عامة المفهوم الحدسي لآلية الحساب الفعالة التي تتعلق بالخصائص التالية: (Wolper, 2006, p. 109)

- تقتضي الخوارزمية مجموعة محدودة ومنتهية من التعليمات البسيطة والدقيقة التي يتم توصيفها بواسطة عدد محدود من الرموز
- يجب على الخوارزمية دائما أن تعطينا نتيجة بعد عدد معين من الخطوات
- يمكن لإنسان متابعة خطوات تنفيذ خوارزمية بواسطة ورقة وقلم
- لا يستدعي تنفيذ خوارزمية أي شكل من أشكال الذكاء البشري باستثناء ما هو ضروري لفهم وتنفيذ التعليمات

[21] قد تبدو كلمة "فعال" أي efficace كلمة "نسقي" أي systématique وكلمة "ميكانيكي" mécanique كلمات متباعدة المعنى والدلالة في اللسان العربي وحتى اللسان الفرنسي أو الإنجليزي لكننا والحالة هاته بصدد إعطاء مفاهيم تنتمي لنفس الحقل الدلالي العلمي وهو المعلوماتية champs lexical informatique

وفي ختام هذا الفصل نؤكد على ما حققه كل من الرياضيات والمنطق خاصة مع جملة الإكتشافات والإنجازات التي توصل إليه الرياضيون والمناطقة من جهة والمهندسون من جهة أخرى، فالتقت كل هذه المقاربات في نقطة التقاء واحدة قد رسمت عصر الآلة، ويمكن أن ندرج ضمن خاتمنا النتائج الآتية:

كانت مسألة البتية التي طرحها هلبرت نقطة انطلاق كل البحوث الرياضية والمنطقية على حد سواء، فلم تكن سؤالا رياضيا أو منطقيا أو كما يصطلح هو عليه ميتارياضيا فحسب إنما كان سؤالا رسم بالفعل مشهد رياضيات القرن العشرين.

لقد باءت جميع محاولات الرياضيين بالفشل في مقاربة مسألة البتية مقاربة منطقية أو رياضية، إلى أن تمت مقاربتها حسابيا، فتحول المنطقي إلى حسابي، بدءا بمبرهنة جودل الثانية التي قارب فيها مسألة البتية بقواعد علم الحساب ووصل لكون كل نسق حسابي متسق يحتوي قضايا غير قابلة للبت.

قابلية البت أثبتت بالفعل أن مبدأ الثالث المرفوع لا يصلح في جميع الحالات، أي يملك الصلاحية بمعنى أنه يوجب قضايا لا يمكن الحكم لا بصحتها ولا بخطئها.

يعتبر مُنجز تورينج الأهم على الإطلاق بعد مساءل هلبرت في تاريخ الرياضيات المعاصر، فمن جهة يُعتبر أول أعطى تعريفا صريحا وواضحا للخوارزمية بوصفها آلية حساب قابلة للمكننة أي برنامج حاسوب مصاغ بشكل جيد له مدخلاته وله مخرجاته، كما أنه من أول من حاول حل مسألة البتية بمقاربة حسابية من خلال مفهوم آلة تورينج، إضافة لكونه أول من وضع هذا الجسر الرباط بين الرياضيات المجردة والواقع.

إلتقت جميع مقاربات حل مسألة البتية في نقطة واحدة وهي النماذج الحسابية حيث برهن تشورش تكافئ جميع النماذج الحسابية، الأمر أدى إلى بزوغ علم تفرع عن المنطق المعاصر وهو نظرية قابلية الحساب.

وهكذا اتضحت ملامح القرن العشرين ممهدة لظهور المنطق المعاصر وما يضطلع عليه من نظريات فاتحة الأفق لمجالات معرفية جديدة جاعلة من علم الحوسبة علما جديدا قائما بذاته راسمة بذلك رياضيات جديدة وعلما جديدا ولما لا إنسانا جديدا ورؤية جديدة للإنسان والعالم.

الفصل الخامس

المنطق المعاصر والحوسبـــــــة

تمهيـد:

لقد لاحظنا كيف ساهمت مختلف المقاربات لحل مسألة البتية إلى تقارب كبير بينها، كما أدت جميعها إلى نقطة إلتقاء واحدة تمثلت في قابلية الحساب، وبالتالي لم تعد المسألة متعلقة بالمنطق بشكل مباشر بحكم أن مختلف المقاربات المنطقية لم تفض إلى نتيجة، وإنما استلزم الإجابة عنها (بالإيجاب أو السلب) تبني طرائق وإجراءات وآليات حسابية.

ساهمت المفارقات والخلافات التي ظهرت في القرن العشرين في إخراج المنطق الرياضي كفرع من فروع الرياضيات مثله مثل التحليل الدالي مثلا، وانقسم المنطق بدوره لعدة فروع، (David, Nour, & Christophe, 2003, p. 1) وتندرج ضمن مباحث المنطق أربع نظريات رئيسة هي: نظرية البرهان وهي التي أسس لها دافيد هلبرت من خلال نسقه الأكسيوماتي وبالضبط من خلال الميتارياضيات التي أدت بالفعل إلى مساءلة أنماط البرهان الرياضي من حيث مشروعيتها وجدواها كما أثرت البحث في الرياضيات من خلال مفهوم البرهان الصوري[1] والصياغة الحسابية للرياضيات، فأصبحت الإستدلالات الرياضية لا تعدو أن تكون لعبة صورية كما صرح بروور، ونظرية المجموعات التي تعددت محاولات صورنتها وإعادة تشكيل مخططات مسلماتها بحثا عن اتساقها وعدم تناقضها من زرملو إلى فان نيومان، نظرية النماذج التي أسس لها دون قصد جوتلوب فريجه من خلال منطق محمولاته أو منطق الدرجة الأولى ونظرية قابلية الحساب التي تُعد بحق أهم فروه المنطق المعاصر إذ تمثل الحدود الضيقة الفاصلة بين الرياضيات والحوسبة والآلـــة.

---

[1] نقصد هاهنا البرهان الصوري formal proof، ففي المنطق الرياضي البرهان الصوري أو الإشتقاق هو سلسلة منتهية من الجمل مُصاغة بشكل جيد بما يتوافق والقواعد التركيبية النحوية للنسق الصوري كاللغة الصورية مثلا، تكون هذه الجملة إما مسلمة أو إفتراضا مؤقتا أي ضمن سلسلة البرهان، أو صيغة تابعة لجمل سابقة في السلسلة من خلال قواعد الإستدلال تختلف عن اللغة الطبيعية من حيث صرامتها ووضوحها (عدم غموضها بمعنى غير قابلة للتأويل) وقابلة للتحقيق والتأكد من صحتها، إذا كانت مجموعة الإفتراضات خالية فإن الجملة الأخيرة في البرهان الصوري نسميها مبرهنة للنسق الصوري. أنظر (Takeuti, Proof theory, 1987)

ولم تقف نظرية قابلية الحساب عند هذا الحد فقد تمفصلت بدورها على عديد المجالات العلمية ولعل أبرزها نظرية التعقيد الحوسبي التي عكست حقا ما آل إليه العلم وطبيعة البحث فيه والحسابات الفائقة لقوانينه ونتائجه إلى ظهور إختصاص آخر أُصطلح عليه بنظرية التعقيد الحوسبي، هذا الأخير الذي يتخذ من الخوارزميات من حيث طول معطياتها ودرجة تعقيدها موضوعا له.

1.نظـــــرية البــــرهان

تُعتبر الرياضيات مجموعة من البراهين، وهي على هذه الهيئة تمثل الحقيقة التي تتفق عليها جميع التيارات الرياضية كالأفلاطونية والحدسانية والصورانية والإسمية، ولذلك فإن الطريقة الأكثر نجاعة للتحقيق (investigation) في الرياضيات هي في المساءلة والتحقيق في بنية هذه البراهين، وهذا بالضبط ما تضطلع به وتتخذه موضوعا لها نظرية البرهان. (Takeuti, 1987, p. 1)

وقد صاغ نظرية البرهان لأول مرة دافيد هلبرت كما أسلفنا في محاولته لبرهنة إتساق الرياضيات، في حين تم تطوير مقاربة هلبرت على يد الرياضي والمنطقي اللامع جنتسين (G. Gentzen)، كما يمكن القول بأن الغاية من نظرية البرهان هي دراسة أنساق البرهنة الصورية كما تهدف أيضا لفهم مفاهيم الإستدلال والحساب، حيث تعرف اليوم نظرية البرهان إنطلاقا معتبرا بسبب ارتباطها الوثيق بعلوم الحوسبة وبالضبط بتطوير البرمجيات الآمنة. (David, Nour, & Christophe, 2003, p. 7)

إن ما أسسه هلبرت يُعد بالفعل دراسة للرياضيات في حد ذاتها وبطرق ومناهج رياضية، حيث قدم لنا مجموعة مما سماها بالميتانظريات وهي نظرية رياضية تخص نظريات أخرى انضوت كلها تحت اختصاص الميتارياضيات، وهكذا فإن هذه الأخيرة تقدم تقنيات رياضية جد صارمة للتحقق من أسس كثيرة ومتنوعة للرياضيات والمنطق،

(Kleene, 1971, p. 5) ويُعتبر هلبرت أول من أطلق مصطلح الميتارياضيات في بداية القرن العشرين وهو ما احتوى ضمنيا وشكل الإرهاص الأول لنظرية البرهان.

من أجل ذلك اقترح هلبرت نسقا حسابيا سُمي باسمه نسق هلبرت (Hilbert system)، كما اقترح جنتسين نسقا آخر سُمي بالاستنباط الطبيعي (natural deduction) الذي قاده فيما بعد لإكتشاف حساب المتسلسلات[2] (calcul des séquents).

اختصارا، نرمز $A \Rightarrow B$ من أجل $\neg A \lor B$ و $A \land B$ من أجل $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ و $\forall x A$ من أجل $\neg\exists x \neg A$

2.1.نسق هلبرت:

ويمكن أن نلخص مسلمات نسق هلبرت أو منطق الدرجة الأولى كالآتي:

1. $\vdash A \to (B \to A)$
2. $\vdash [A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$
3. $\vdash [D \to (B \to A)] \to [B \to (D \to A)]$
4. $\vdash (B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$
5. $\vdash \neg\neg A \to A$
6. $\vdash A \to \neg\neg A$
7. $\vdash (c = d) \to (f(c) = f(d))$
8. $\vdash c = c$
9. $\vdash \forall a f(a) \to f(c)$

[2] من الأصل الألماني Sequenzenkalkül

ليست هذه المسلمات هي المسلمات المنطقية الوحيدة الممكن اعتمدها في حساب القضايا، بل توجد في الحقيقة ما لا نهاية من مجموعات المسلمات، والتي يمكن أن تؤدي الدور ذاته في هذا الحساب، والشرط الذي يُوضع على أية واحدة من هذه المجموعات هو أن تكون متسقة أو متماسكة، أي ألا تُحدث تناقضا في الرياضيات، تجدر الإشارة إلى أن المسلمة السادسة تُعرف باسم "النفي المضاعف" (principle of double negation) وهو مبدأ منطقي شهير ومميز للمنطق الكلاسيكي.

كل القضايا الواردة في المسلمات السابقة وكل الناتجة عنها بواسطة عمليات التعويض والإستبدال تُعتبر صحيحة، ثم تُستخدم قاعدة الإستدلال (inference) المعروفة في أدبيات المنطق الرياضي بواحد من الإسمين قاعدة التفريز (The rule of detachment) و"Modus ponens" (قاعدة الإستلزام أو اللزوم) لاستخلاص قضايا صحيحة جديدة، ونرمز لها اختصارا بـ MP، وهذا نصها: $A, A \Rightarrow B \vdash B$، أي إذا كان الإستلزام $A \Rightarrow B$ صحيحا وكانت A صحيحة فإن B صحيحة.

ويُعرف البرهان الرياضي في حساب القضايا الكلاسيكي للقضية P كل قائمة منتهية من القضايا: $P_n = P_1, P_2, \ldots, P_n$ بحيث كل قضية P_k حيث $1 \leq k \leq n$، هي إحدى مسلمات حساب القضايا، أو ناتجة بواسطة عمليات تعويض واستبدال عن واحدة من القضايا: $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$، أو ناتجة بواسطة القاعدة MP عن قضيتين من ذات القضايا: $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$.

إن القائمة الواردة أعلاه في التعريف ليست بالضرورة الوحيدة، لذلك لا يوجد برهان واحد لـ P فإذا عُلم وجود أحدها، حتى ولو لم يُعط صراحة، فإننا نقول بأن القضية P قابلة للبرهان (provable) في حساب القضايا وتُكتب رمزيا $\vdash P$.

من الواضح إذن، بأن القضايا الواردة في المسلمات السابقة وكل تلك الناتجة عنها بواسطة عمليات التعويض أو الإستبدال قابلة للبرهان في حساب القضايا. كذلك من الواضح بأن كل قضية قابلة للبرهان هي صحيحة، وفي حساب القضايا الكلاسيكي بوصفه نظاما استنباطيا أكسيوماتيا (Axiomatic deductive system) لا يمكن تصور وجود قضية صحيحة خارج مجموعة القضايا القابلة للبرهان، فالحقيقة هنا قرينة للبرهان، والقضايا الصحيحة هي بالضبط القضايا القابلة للبرهان، وعليه فإن الكتابة $\vdash P$ تعني بالضبط أن P صحيحة.

ولنأخذ مثالا على ذلك: لنفرض الفروض الآتية: $A \rightarrow B$، $B \rightarrow C$، A، ولنبرهن C:

نتبع الخطوات لآتية:

1. A (فرض)
2. $A \rightarrow B$ (فرض)
3. B (بتطبيق قاعدة اللزوم بين 1 و2)
4. $B \rightarrow C$ (فرض)
5. C (بتطبيق قاعدة اللزوم بين 3 و4)

ومن الملاحظ أن طريقة الصياغة والتعبير على خطوات البرهان تبدو مملة وطويلة مما يجعلها غير عملية في الأغلب كما أنه خلال كل مرحلة أو خطوة من مراحل البرهان، نعبر فقط عن قضية أو فرض، مما صعب من مهمة الرياضيين والمناطقة في استدلالاتهم، كما أنها وهذا الأهم لم تكن قابلة للمكننة بعبارة أخرى لم تصلح لإنشاء براهين بواسطة الآلة لاسيما بعد مكننة الحساب بآلات تورينج، إضافة لكون هناك فرق جوهري بين نسق هلبرت ونسق جنتسين، والمتمثل في كوننا غير قادرين على تطبيق قاعدة التقطيع مما يجعل البراهين طويلة نسبيا ولا يمكن اختصارها.

2.2.الإستنباط الطبيعي وحساب المتسلسلات:

اقترح جنتسين العام 1934 الإستدلال الطبيعي وهو صورنة لتوصيف والتعبير عن استدلالات حساب المحمولات والتي كانت فكرتها الرئيسة التمسك بأكبر قدر ممكن بالكيفية التي يفكر بها الرياضيون، ثم حاول بعد ذلك باستخدام الإستنباط الطبيعي صياغة برهنة تركيبية على اتساق أو تماسك علم الحساب، غير أن صعوبات تقنية حالت دون ذلك وقادته إلى إعادة صياغة الصورنة بنسخة تناظرية وهي حساب المتسلسلات، وخلافا للإستنباط الطبيعي حيث كل فرضية تتبعها نتيجة، في حساب المتسلسلات كل حكم يمكن أن يضم نتائج عديدة وهذا ما سيعطينا فيما بعد أحد أهم المبرهنات الرئيسة في نظرية البرهان وهي مبرهنة إلغاء التقطيعات.

والمتسلسل هو ثنائية مكونة من قائمتين من الصيغ ونرمز بالرمز: $H_1, H_2, \dots, H_k \vdash C_1, C_2, , \dots, C_n$، حيث تمثل القائمة: $H_1, H_2, \dots, H_k$ قائمة الفروض أو الفرضيات، فيما تمثل القائمة: $C_1, C_2, , \dots, C_n$ قائمة النتائج، وكمثال حدسي: $X\ animal, X\ parle \vdash X\ Homme$، وعادة ما نرمز لمجموعة من الصيغ بالحروف اليونانية $\Delta, \Gamma, \Sigma, \Psi$، ونرمز للصيغ بالحروف اللاتينية الكبيرة A,B,C، وتتكون قاعدة استنباط من مقدمة والمتمثلة في مجموعة من المتسلسلات ونتيجة نمثلها بمتسلسل، كما أن لكل قاعدة اسما: $\frac{presmisse}{conclusion}(nom)$ ويفصل بينها الرمز $\vdash$، يمثل المتسلسل خطوة أو إحدى مراحل البرهان، فحساب المتسلسلات يصرح بالعمليات الممكن تطبيقها على هذا المتسلسل للحصول على برهان كامل وصحيح.

وإذا ما اعتبرنا أن $\Gamma = H_1, H_2, \dots, H_k$ و $\Delta = C_1, C_2, , \dots, C_n$، ونكتب: $\Gamma \vdash \Delta$ ونقول إن Δ نتيجة منطقية لـ Γ إذا وفقط إذا كان انطلاقا من $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_k$ يمكن

استنتاج $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$، ونقول حينئذ إن الصيغة $\Gamma \vdash \Delta$ صحيحة إذا كان الإستلزام: $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \Rightarrow C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ صحيحا.

ويمكن تقسيم قواعد الإستدلال المنطقية في نسق جنتسين إلى ثلاث مجموعات:

1. القواعد المنطقية:

$$(\vee_D)\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B} \qquad (\vee_G)\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

$$(\wedge_D)\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \qquad (\wedge_G)\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

$$(\Rightarrow_D)\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta} \qquad (\Rightarrow_G)\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$$

$$(\neg_D)\frac{\Gamma, \mathrm{A} \vdash \Delta}{\Gamma, \Delta \vdash \neg A} \qquad (\neg_G)\frac{\Gamma \vdash \Delta, \mathrm{A}}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$$

2. المسلمة:

$$(Ax)\frac{}{\Gamma, A \vdash \Delta, A}$$

3. قاعدة التقطيع:

يكمن فرق جوهري بين نسق هلبرت بواسطة حساب القضايا في منطق المحمولات ونسق جنتسين أو الإستنباط الطبيعي بواسطة حساب المتسلسلات وهو قاعدة التقطيع وهي قاعدة استدلالية في حساب المتسلسلات، التي تُعتبر تعميما لقاعدة اللزوم، ومعناها أنه إذا كان لدينا صيغة A تظهر كنتيجة منطقية في متسلسل وتظهر كفرضية في متسلسل آخر، فإنه يمكن الإستدلال على متسلسل بحيث لا تظهر فيها الصيغة A، ونصيغ ذلك صوريا بـ:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Sigma, A \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}$$

ولنأخذ مثالا على ذلك: لنبرهن أن: $\neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{p,q \vdash p \qquad p,q \vdash q}(Ax)}{p,q \vdash p \wedge q}(\wedge_D)}{p,q,\neg(p \wedge q) \vdash}(\neg G)}{q,\neg(p \wedge q) \vdash \neg p}(\neg D)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p, \neg q}(\neg D)}{\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q}(V_D)}{\vdash \neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q}(\Rightarrow_D)
$$

ويمكن بصفة عامة القول بأن P هي نتيجة منطقية (logical sequence) لـ Γ، أو أيضا إنها قابلة للإستنباط (deducible) من Γ، إذا وُجدت قائمة منتهية من القضايا: A_n=P, A_1, A_2, … بحيث كل قضية A_j حيث $1 \leq j \leq n$ هي إما إحدى مسلمات حساب القضايا، أو تنتمي إلى Γ، أو ناتجة بواسطة عمليات تعويض واستبدال عن واحدة من قائمة القضايا $A_1, A_2, \ldots, A_{j-1}$.

فإذا كانت P هي فعلا نتيجة منطقية لـ Γ، فإننا نكتب رمزيا $\Gamma \vdash P$، ونقول إن P هي النتيجة المنطقية، وΓ هي مجموعة الفرضيات المنطقية، وفي حالة كون هذه المجموعة منتهية ومعطاة بقائمة عناصرها $P_1, P_2, \ldots, P_m$، فيمكن أيضا كتابة $P_1, \ldots, P_m \vdash P$، وعليه فمن الواضح إذن أن الكتابة $\emptyset \vdash P$ لها بالضبط نفس معنى كتابة $\vdash P$ كذلك من الواضح بأن $\Gamma \vdash P$ من أجل كل: $P \in \Gamma$.

وكنتيجة غاية في الأهمية، يمكننا القول بأنه إذا ما سلمنا ببرهنة قضية أو جملة قضايا P فإن هاته القضايا تُصبح إحدى فرضيات أو مسلمات النسق الأكسيوماتي، بمعنى أنه يمكننا استخدامها في براهين قادمة بوصفها مقدمات أو افتراضات صحيحة، أي بعبارة أخرى تصبح $P \subset \Gamma$.

كما أنه إذا كانت $\Gamma \vdash \mathrm{P} \Rightarrow Q$ فإن $\Gamma \cup \{P\} \vdash \mathrm{Q}$ والتي تُكتب أيضا كما يلي: $\Gamma, P \vdash \mathrm{Q}$ وكحالة خاصة إذا كانت $\vdash \mathrm{P} \Rightarrow Q$، فإن $\mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}$.

وهكذا أصبح البرهان في الطريقة الأكسيومية برهانا صوريا يهتم فحسب بالناحية التركيبية دونما الاهتمام بالصيغة الدلالية أو السيميائية، فحدثت تلك القطيعة بين الصيغتين التركيبية والسيميائية، كما أن الطريقة الأكسيوماتية قد حدت كثيرا من تطور الرياضيات كما يرى جيل دويك ويعود السبب لكون الرياضيين أصبحوا يجرون براهينهم دون أدنى علم إلى ماذا ستوصلهم هاته البراهين.

2.نظرية النماذج

يُعرِّف كل من كيسلر (Kiesler) وشانج (Chang) في كتابهما المرجع "نظرية النماذج" (Model theory) نظريةَ النماذج بوصفها قسما من أقسام المنطق الرياضي يتناول العلاقات بين لغة صورية ما وتأويلاتها أو نماذجها ويضيفان بأن النماذج الكلاسيكية هي نظرية نماذج منطق الدرجة الأولى، (Chang & Kiesler, 1992, p. 1) وبالتالي فنظرية النماذج هي دراسة العلاقات بين صيغ لغة صورية وتأويلات اللغة، بين لغة ما والبُنيات[3] التي تسمح بتأويل هذه اللغة (تلك البنيات التي تُعطي معنى) أو كذلك بين لغة ما والمجالات التي تنجر عن هذه اللغة.

تُعالج نظرية النماذج بناء وتصنيف البُنى، وهي تعرف على وجه الخصوص نماذج النظريات الأكسيوماتية والهدف منها تأويل البُنى التركيبية (الحدود، الصيغ، البراهين ...) إلى بُنى رياضية (مجموعة الأعداد الطبيعية، الزمر، الحلقات، الفضاءات ...) من خلال

[3] البُنية (structure) هي مجموعة مزودة بدوال وعلاقات معرَّفة على هاته المجموعة، ومن أمثلة ذلك البُنى الجبرية، ونعبر عنها صوريا من خلال الثلاثية $(\mathcal{A}, \sigma, I)$ حيث يمثل $\mathcal{A}$ المجال، σ تحمل رموز الدوال ورمز العلاقات و I هو تأويل البنية. أنظر Wikipedia.com

إضفاء مفاهيم من طبيعة سيميائية بمعنى منح المعنى على البُنى التركيبية أي إضفاء المعنى على المبنى (مثل معنى الحقيقة).

إن ظهور فكرة تأويل النظريات الرياضية إلى بُنى لها جذورها التاريخية، فمثلا أسس رونيه ديكارت ما سماه بالهندسة التحليلية (la géométrie analytique) فبدلا من أن نرسم مستقيما ونوصِّفه لغويا، يمكن أن ننسب المستوي إلى معلم ونعبر عن المستقيم بمعادلة ديكارتية من الشكل $y = ax + b$ وبالتالي، فالشكل الثاني يُعتبر تأويلا للشكل الأول، وكمثال آخر يمكن التعبير عن عدد مركب أو عقدي (complexe) بثلاث كيفيات مختلفة بواسطة شكله الجبري والشكل المثلثي والشكل الأسي، ولعل أبرز ما نستشهد به في هذا المجال ما قام به دافيد هلبرت خلال محاضرة باريس حين قام بإعطاء دِلالات عددية لكل حدود (termes) الهندسة الإقليدية بهدف البرهنة على استقلال مسلمات الهندسة الإقليدية عن المسلمات الأخرى.

ولكن بدون شك، يُعتبر ظهور الهندسات اللاإقليدية لحظة وعي حاسمة بفكر النموذج، في البداية بناء على متغيرات من مسلمة التوازي لإقليدس فظهرت كلعبة صورية (jeu formel) ولم يكن لها إلا النصيب الضئيل من الاهتمام لاسيما أمام وضعية "الحقيقة المطلقة" للهندسة الإقليدية، غير أنه وبصفة تدريجية لاقت القبول منذ اللحظة التي تمكن فيها الرياضيون من إعطاء نماذج مع تأويلات خاصة لمفاهيم صورية للنقاط، المستقيمات ... فقد سمحت النماذج بتأويل الهندسات اللاإقليدية في الهندسة الإقليدية، كما أن بوانكاري قدم نموذجا للمستوي المقعر إنطلاقا من نصف المستوي المركب.

غير أن نظرية النماذج قد عرفت إنطلاقتها الفعلية على يد رائدين هما ليوبولد لوفنهايم (Leopold Löwenheim) وتورالف سكولم (Thoralf Skolem) من خلال برهنتهما لنظرية قوية خاصة بوجود نماذج لجميع الأطوال "العدد الأصلي"، كما خطت أيضا خطوة

هامة العام 1933 على يد ألفرد تارسكي في مقال موسوم بـ: "مفهوم الحقيقة في اللغات المصورنة". (Chang & Kiesler, 1992, p. 17)

بالفعل لقد انتشرت نظرية النماذج بعد أن صاغ فريجه أول لغة صورية،[4] وبعد أن صاغ كانتور نظريته البسيطة للمجموعات، هذه النظرية التي تحددت فيها في الواقع، النماذج التي نحن بصدد بنائها، بما أن النماذج هي مجموعات مبنية (بُنى جبرية) وبالرغم من ذلك، فإن هذين الشرطين لم يكونا كافيين، ولم تنشأ نظرية النماذج إلا في مرحلة متأخرة جدا، لكن نظرية النماذج لم تتأكد بوصفها نظرية متميزة ومستقلة بذاتها داخل المنطق قبل بداية الخمسينات، وتعود تسمية "نظرية النماذج" إلى تارسكي الذي أعلنها العام 1954.

نعتبر لغة[5] $\mathscr{L}$ مكونة من مجموعة من الثـــوابت، الدوال، المحمولات والمتـــــغيرات، وموضوع البحث في نظرية النماذج هو النظريات، أي أن نظرية النماذج تتخذ من النظريات موضوعا لها، كما أسلفنا فإنها على شكل ميتانظرية تبحث في النظرية، وبوصف النظرية صيغة أو مجموعة من الصيغ فبالتالي تبحث في مجموعة الصيغ، وعليه يمكن القول بأن النموذج هو بنية في لغة $\mathscr{L}$ تحقق أو تستجيب لمسلمات النظرية المعنـــية، ونمـــيز نوعين من المـــقاربات للبحث في البحـــث الأساسي في نظرية النماذج: (Chang & Kiesler, 1992, p. 15)

- فهم بُنية بعينها بشكل منفرد، والتي يمكن اعتبارها كمانِحة للمعنى وكمثال على ذلك نعتبر البُنية $(N,+,*)$ أو $(R,+,*)$.

---

[4] على الرغم من أن مُنجَز فريجه في الصورنة بإنشائه لأول نسق صوري للمنطق المعاصر، إلا أن الكيفية التي أنجزها بها في كتابه الإيديوغرافيا مختلفة تماما عن الكيفية المعتمدة في المنطق المعاصر.

[5] نميز في اللسان اللاتيني الفرنسي الفرنسي مثلا بين مصطلحين نرجمهما الإثنين بكلمة لغة وهما: langue وتأتي هنا بمعنى اللسان أو اللغة الطبيعية أي ما بها يتم التواصل بين البشر، وكلمة langage التي نقصدها في هذا السياق وتعبر عما نتواصل به مع الآلة أو الحيوانات أو الآلات فيما بينهما وقد تُترجم إلى اللسان العربي بكلمة محادثة لكن دأبت المراجع على استخدام كلمة لغة للتعبير عن كلمة langage.

- أما المقاربة الثانية فهي من خلال البحث والتقصي لإيجاد الخصائص المشتركة لعدد من البُنى وكمثال على ذلك البُنى الجبرية كالزمرة والحلقة والحقل...

وكمحصلة لما قلناه سابقا، يمكن أن نعتبر الآن أنه من منظور النسق الصوري، فإن النظرية ماهي إلا بكل بساطة مجموعة من الصيغ، وبإمكان كل أحد أن يفترض مجموع الصيغ الذي يراه مناسبا، ولكن إذا وضعنا علم الحساب تحديدا نصب أعيننا، فإننا سنفترض اللغة التي يمكن من خلالها أن تُكتب بها الصيغ الحسابية والنظرية التي تكون محل اهتمامنا هي الصيغ التي تعبر عن مسلمات علم الحساب.[6]

وبالجملة فإن نماذج صيغة ما هي التأويلات التي تجعلها صحيحة، ويتجلى ذلك بصورة أوضح، على النحو التالي: لنفترض أن $\mathscr{L}$ هي لغة صورية، وأن $\mathscr{F}$ هي صيغة لـ $\mathscr{L}$، وI تأويل للغة $\mathscr{L}$، فنقول بأن I هو نموذج للصيغة $\mathscr{F}$ إذا كانت هذه الصيغة صحيحة بالنسبة إلى التأويل I. وعليه يمكننا الآن القول بأن التأويل في نظرية النماذج هو تأويل بنية $\mathscr{M}$ إلى بنية أخرى $\mathscr{H}$ وهو مفهوم تقني يقترب من فكرة تمثيل $\mathscr{M}$ داخل $\mathscr{H}$. (Chang & Kiesler, 1992, p. 16)

إن نظرية النماذج لها تأثير فلسفي كبير لكونها تقوم بتحديد مفهوم الحقيقة بالنسبة للغة صورية ما، كما تتيح لنا ما يقبل التعريف بواسطة لغة صورية، لقد كان مشروع هلبرت في الصورنة البحث عن تحديد صوري للمفاهيم المستعملة بكيفية غير صورية في الرياضيات، إذ نتساءل مثلا عما إذا كان بإمكاننا أن نخص المفهوم الحدسي للعدد الطبيعي بنظرية صورية.

[6] أنظر الفصل السابق أكسيوماتيك بيانو

3.نظرية المجموعات:

إن ما نسميه نظرية المجموعات هو في الحقيقة نظرية صورية، وبالأحرى فإن نظرية المجموعات التي صاغها لأول مرة في نسختها البسيطة جورج كانتور أي غير المصورنة يمكن صورنتها، وتوجد عديد الصيغ من هذه النظرية،[7] كصياغة زرملو وزرملو وفرانكل (ZF)، حيث تطور من خلالها مفهوم البرهان الصوري بوصفه برهانا يتأسس على الإنطلاق من مسلمات محددة ومن خلال مجموعة من قواعد الإستنباط الذي ذكرنا في الفصل الأول، وتتضمن نظرية المجموعات عددا لا متناهيا من المسلمات، وهي تتميز بقدرة برهانية فائقة (تفوق بكثير ما كنا نحتاجه لكتابة كل العلوم الرياضية السائدة).

ثم جاء الدور على كل من فان نيومان، جودل وفرنايس لتأسيس نظرية مجموعات[8] تأخذ بعين الإعتبار مسلمة الإختيار[9] يُعبر عنها في لغة حساب المحمولات من الدرجة الأولى من خلال رمز واحد وهو رمز الإنتماء ∈ (appartenance)، إذ يؤكد فاقنر أنه مع ذلك فقد صيغت بلغة صورية حيث أن الرمز الوحيد الذي لا ينتمي إلى المنطق هو رمز الانتماء، (فاقنار، 2011، صفحة 328) وإذا اعتبرنا أن اللغة التي صيغت بها هي L فنعبر عن ذلك صوريا بـ $\neg(L = \{\in\})$.

وبعبارة أُخرى فإن الملفوظات لا تستخدم سوى متغيرات تمثل مجموعات إضافة إلى المساواة والاحتواء وهما رابطتان منطقيتان بين المجموعات، تجمعان علاقات مع الرموز المنطقية، روابط ومكممات وبالأخص الأساسية الوحيدة لنظرية المجموعات هي

[7] عندما انتشرت الهندسات اللاإقليدية في نهاية القرن التاسع عشر، أدرك الرياضيون بوضوح أنه بإمكان النظرية الواحدة أن يكون لها نماذج مختلفة عن بعضها أشد ما يكون الاختلاف.

[8] لن نتعرض لمسلمات نموذج فان نيومان لنظرية المجموعات إنما سنكتفي فقط بكيفية نمذجتها.

[9] أنظر الفصل الأول

"المجموعات"، وتجدر الإشارة إلى نظرية المجموعات لا تمتلك متغيرات لأصناف.[10]

كان من بين الحلول التي قدمها نموذج نظرية (NBG) هو إضافة متغيرات لِـ "الأصناف" وبالتالي أصبح الحديث عن نوعين أو نمطين من الموضوعات (الكيانات) الأساسية: المجموعات والأصناف، ومن الممكن تماما صورنة مثل هذه النظرية بكيفية حتى لا يتم تعديل العبارات القابلة للبرهان لنظرية المجموعات الأصلية لاسيما بالنسبة للذين لا يستخدمون المتغيرات الجديدة للصنف. (Lombardi, 2021, p. 35)

وفي نظرية (NBG) نستخدم العديد من المتغيرات كما بالنسبة لنظرية المجموعات في صيغتها الأصلية أي التي صيغت في لغتها الأصلية، وفقا للمسلمات التي سنختار إضافتها أو استبعادها، وبعد أن تم إضافة متغيرات الأصناف أصبح من السهل جدا صورنة (NBG) انطلاقا من (ZFC) يكفي فقط إضافة مخطط مسلمات[11]، ومخطط فهم بالنسبة للأصناف، الذي يرفق بكل صنف محمولا (متغيرا) لنظرية المجموعات، أما المحمولات ذات متغيرات متعددة يمكن تمثيلها بواسطة ثنائيات، وبالتالي لم يتبق سوى إعادة صياغة كل مسلمات (ZFC) عن طريق تقييد المتغيرات بالمجموعات ، يمكن بعد ذلك تمثيل مخططات

---

[10] يُعتبر مفهوم "الصنف" تعميما لمفهوم المجموعة فقد يُستعمل المصطلحان بوصفهما مترادفين، غير أن نظرية المجموعات تقيم ذلك التمييز بين المفهومين، فالمجموعة يمكن رؤيتها بوصفها تجميعا لموضوعات ولكنها أيضا بوصفها موضوعا رياضيا لاسيما وأنه يمكنها أن تنتمي لمجموعة أُخرى، لكن ذلك لا ينطبق على "الصنف"، ذلك أن الصنف يمكن أن يُعبر عن تجميع لموضوعات يمكن تعريفها، وفي هذه الحالة لا تمثل بالضرورة مجموعة. عندما لا يكون الصنف مجموعة نصطلح عليه بـ "الصنف المطلق" وبالتالي فلا يمكن أن يكون صنف عنصرا من صنف آخر. وتجدر الإشارة إلى أن راسل استخدم لأول مرة مفهوم الصنف عندما تعرَّض لمفارقات نظرية المجموعات وبالضبط مجموعة كل المجموعات، حيث أكد على ضرورة التمييز بين الصنف والمجموعة خاصة خاصية "لا تنتمي لنفسه" ($x \notin x$) فهي تُعرف صنفا ولكن ليس مجموعة، فوجود مجموعة كهذه سيؤدي حتما إلى تناقض. أنظرً (Eves, 1990)

[11] مخطط المسلمات (schéma des axiomes) هو صيغة معبر عنها فيما وراء اللغة (métalangage) في نسق أكسيوماتي معين خلاله يظهر ما وراء متغير أو أكثر (métavariables) حيث تُعتبر هذه المتغيرات بُنى ما وراء لسانية (métalinguistiques) تمثل أي حد من الحدود أو صيغة جزئية لنسق منطقي، ومن الأمثلة التي تسوقها مراجع المنطق والرياضيات النسق الاستنباطي الذي يمثل جزئا من مسلمات بيانو بالنسبة للأعداد الطبيعية. أنظر (Everest & Thomas, 2000)

المسلمات التي تستخدم محمول نظرية المجموعات بواسطة مسلمة واحدة بفضل مفهوم "الصنف".

يعتمد أكسيوماتيك (NBG) على نوعين من الموضوعات: المجموعات والأصناف، حدسيا يمكن اعتبار كل مجموعة عبارة عن صنف، لكن بعض الأصناف أو ما نصطلح عليه بالصنف المطلق ليست مجموعات، ومن الواضح أنه لدينا إمكانيتين لتمثيل هذه الوضعية، استخدم برنايس حساب محمولات من الدرجة الأولى لكن من خلال نوعين من الموضوعات الأساسية: المجموعات والأصناف، في حين استخدم جودل حساب المحمولات من الدرجة الأولى ولكن بموضوع واحد وهو الأصناف، حيث عرف المجموعة بموضوع واحد وهو الأصناف، فقد عرف مفهوم المجموعة بتطبيق محمول على الأصناف، حيث يمكن تعريف هذا المحمول انطلاقا من "الانتماء" فالمجموعات إذن هي أصناف تنتمي على الأقل إلى صنف وبالنسبة له لم يكن بحاجة لتقديم رمز جديد للمحمول.

إن بيان الفرق بين المقاربتين مهم للغاية، ففي الحالة الأولى لا يمكن كتابة إلا صنف واحد ينتمي لصنف، إن هكذا قضية ليس لها أي معنى ولكن عندما يكون العنصر الأيسر عبارة عن صنف يعرف مجموعة ما، يمكننا مطابقة القضية الصحيحة، أما في المقاربة الثانية يمكن كتابة قضية ولكن تبقى دائما خاطئة بالتعريف إذا كان العنصر الأيسر ليس مجموعة، وبالمحصلة، يمكن لمقاربة برنايس أن تقدم حلولا فورية ومباشرة ولكنها تقدم بعض التكرارات أيضا على سبيل تقديم مجموعة بتمثيلين أحدهما بوصفها مجموعة والآخر بوصفها صنفا.

وما تم تبنيه فيما بعد هو المقاربة الثانية لجودل حيث أن الموضوعات الأولية الوحيدة المستخدمة هي "الأصناف" ومتغيرات اللغة الوحيدة هي متغيرات الأصناف، وهناك مفهوم آخر للنظرية (نظرية المجموعات) كما نظرية (ZFC) فإن نظرية (NBG) هي أيضا نظرية

منطقية من منطق الدرجة الأولى مع رمز الإنتماء $\in$ بوصفه رمزا غير منطقي أولي وبالتالي، فنظرية (NBG) مثلها مثل (ZFC) يتم التعبير عنها بواسطة حساب المحمولات في منطق الدرجة الأولى، من أجل ذلك نقول لكي تكون E مجموعة وجب أن تنتمي إلى صنف C، ونكتب صوريا: X مجموعة معناه: $(\exists C\ X \in C) \Leftrightarrow \left(X \text{مجموعة}\right)$، أما الأصناف التي لا نعتبرها مجموعة هي الأصناف المطلقة ونعبر عن ذلك صوريا: X صنف مطلق إذا وفقط إذا كان $\forall C\ X \notin C$، وبالتالي فكل صنف إما أن يكون مجموعة أو أن يكون صنفا مطلقا ولا يوجد صنف يكون الإثنين على اعتبار على الأقل أن النظرية متسقة (متماسكة).

إن ما يمكن أن نخلص إليه من خلال هذا العرض المقتضب لنظرية (NBG) أنها امتداد لنظرية (ZFC) بالإضافة إلى تبني الثانية لمفهوم الصنف الذي حل مفارقة مجموعة كل المجموعة بوصفها صنفا مطلقا، والصنف المطلق لا يمكن اعتباره مجموعة، كما أن هذه الصورنة أثبتت أن جميع الصورنات لنظرية المجموعات لا تعدو أن تكون نماذج مختلفة لذات النظرية رغم الإختلافات بين مختلف النماذج إلا أنها تُعبِّر عن نفس النظرية.

4.نظرية قابلية الحساب:

إن كل بحث في العلاقات الموجودة بين الآلات الحسابية بعامة أي الآلات الحوسبية والمنطق يُضفي بنا حتما لنظرية قابلية الحساب كالمجال الأكثر معنى.

وتبدو جليا إرهاصاتها في الإلتقاء التاريخي العام 1936 في المناهج والطرائق والحلول المتعلقة بالمشاكل الرئيسية التي وضعها المنطق الرياضي في بداية القرن العشرين (مسألة البتية) ومن جهة أخرى، فهي تعرف وتوضح وتحل عددا كبيرا من المفاهيم الرئيسية من أجل الدراسة النظرية للآلات الحوسبة.

إنها تعالج بصفة دقيقة ما هو مشترك بين الحساب المنطقي والحاسبات المبرمجة المتمثلة في أجهزة الحاسوب، بالرغم من أن تحليلا بسيطا للمعاني المتعددة (polysémie) لكلمة "حساب" لا تكفي للإقتناع بأن الأمر هنا أو هناك متعلق بالمعنى ذاته، ولا توضح بكيفية أو بأخرى أهمية هذه التقاربات في المعنى.

يرى آراسون بأن نظرية قابلية الحساب لم تكن فقط ردة فعل لكل من جودل، تشورش وتورينج كما أنها لم تساهم في تغير الحضارة الإنسانية فحسب بل كان لها الأثر الكبير على التفكير الفلسفي، فقد كان من العسير الحديث عن فلسفة عقل، أو أسس للرياضيات أو إمكانات آلات الذكاء دون دراية بالثورة في المعرفة البشرية. (Aaronson, 2011, p. 2)

ولفهم آلية وكيفية معالجة المنطق للآلات، يجب تبيان كيف للأبحاث المنطقية لثلاثينيات القرن المنصرم قد سمحت بالتقاء واتحاد حُزم من الطرائق والمناهج التي تتقارب أولا نحو حل "مسألة البتية"، ومن جهة أخرى تزدهر نحو إنشاء نظرية لقابلية الحساب، قبل أن تكون ضمن تطوير الحوسبة النظرية، كل بطريقة تأويلات وتفسيرات من حيث الآلات (Wagner, 1998, p. 65)، الخوارزميات أو البرامج، إن مساءلة هذا المسار التاريخي الحديث، الذي من خلاله يكمن المنطق في صلبه، يرافق تأسيس نظرية الآلات الحوسبية وجب أن يسمح بالإجابة بشكل دقيق على السؤال التالي: أيُ ضوء يسلطه "الحساب" على الآلة بوصفها موضوعا لعلم المنطق أو نظرية المنطق، هو سؤال سابق لمساءلة أخرى تتعلق هذه المرة بتاريخ أكثر قدما: ما المكانة التي يشغلها "الحساب" في المنطق؟ وفي تاريخ المنطق؟ هل بالضرورة يجب على المنطق أن يتخذ شكل "حساب"[12]؟ وبالتالي يمكن طرح الفكرة التي تتحدث عن وحدة المنطق بما هو كذلك.

[12] يأتي مصطلح "حساب" في سياق اللغة الجارية على ثلاثة أوجه: إجراء عملية ميكانيكية أو خوارزمية تكرارية (كالحساب الذهني مثلا)، إجراء قياس مشترك (كحساب قيمة بضاعة مثلا) وإجراء تقييم إستباقي لإتخاذ قرار (كحساب الإيجابيات والسلبيات). أنظر Christian Houzel: Philosophie et calcul de l'infini, 1976, Edition la decouverte

1.4.الدوال التراجعية:

في الثلاثينيات من القرن المنصرم، قام المناطقة والرياضيون بصياغة مفهوم "المسألة" و"الطريقة الحسابية"، حيث كان السؤال يتمحور حول: هل يمكن حساب كل شيء؟ هل يمكن رد أو اختزال كل حساب إلى سلسلة متتابعة ومحدودة من العمليات الحسابية الأولية؟ ومن خلال هذه التساؤلات وغيرها ظهر مفهوم الدوال القابلة للحساب.

نقول عن دالة إنها قابلة للحساب أو إنها دالة تراجعية إذا أمكننا إيجاد خوارزمية تسمح بتعيين قيم صورها من خلال إدخال قيم سوابقها، بعبارة أخرى: تكون الدالة قابلة للحساب إذا استطعنا إيجاد آلية حساب فعالة تحسب لنا $f(x)$ من أجل كل قيمة لـ x، (Wagner, 2011, pp. 86-87) في نظرية قابلية الحساب، الدالة التراجعية هي دالة لها وسيط أو مجموعة وسائط (paramètres) طبيعية، والتي يمكن حسابها في كل نقطة، عن طريق إجراء أو آلية ميكانيكية. وعادة ما نعبر عن الدوال التراجعية بالدوال القابلية للحساب وهو المصطلح التاريخي الذي تبناه، وهناك الكثير من التعريفات المتكافئة للدوال القابلة للحساب من بينها هي الدوال قابلة للحساب بواسطة آلة تورينج.

إن الطريقة التي عرفنا بها "مفهوم الخوارزمية" التي نشير إليها "بالدوال التراجعية"، والتي استقت تعريفها في الأصل من هربراند (Herband) وجودل وλ-calcul الذي ابتكره تشرورش ثم دُرس وبُدل من طرف كلين (Kleene) ولوسر (Losser) وTM، من خلال الطرق الثلاث وهي الأكثر شهرة وانتشارا[13]، وهي كلها أنساق تنتمي لما نصطلح عليه بـ "الدوال القابلة للحساب"، وما يهمنا فيما سنتفحصه هو التقارب التاريخي لهذه الطرق أكثر من العلاقات التي ساهموا بها في بنائها بأشكال مختلفة بين المنطق والآلات المعلوماتية.

---

[13] نضيف إلى ما ذكرنا الأنظمة النموذجية les systemes canoniques لـ Post وخوارزميات Markov والأنساق الصورية لـ Smullyan

إن هذا الإنتقال في تعريف الدوال القابلة للحساب أدى بشكل مباشر إلى البحث في تحديد تعريف صوري ودقيق للخوارزمية، ذلك أن تعريف الخوارزمية كان يُقدم بطريقة غير رسمية (غير صورية) أي بشكل حدسي كالقول بأن الخوارزمية هي طريقة عامة لوصف وبشكل دقيق ومفصل كل العمليات الأولية المتسلسلة التي وجب تنفيذها لحساب $f(x)$ من أجل كل x كيفي.

في البداية كانت مختلف الطرق المقترحة لتحديد خصائص مجموعة الدوال القابلة للحساب تبدو متكافئة، بالفعل إن مجموعة الدوال القابلة للحساب بواسطة آلة تورينج هي بالضبط مجموعة الدوال القابلة للتعريف بواسطة حــد نمــوذج لامبـدا الحسابي (terme lambda calcul) وهي بالضبط الدوال التراجعية.

إن هذا التقارب هو واحد من أهم الحجج التي تأسست لصالح أطروحة تشورش التي ظهرت العام 1936 والتي تُعرف الدوال القابلة للحساب بوصفها دوالا تراجعية، كما أنه في نفس العام ظهرت أطروحة تورينج التي تعرف الدوال القابلة للحساب على أنها الدوال القابلة للحساب بواسطة آلة تورين، وبالتالي أبانت هذه النتائج الهامة والحاسمة عن تكافئ الأطروحتين أطروحة تشورش وأطروحة تورينج.

وما نخلص إليه مما سبق أن محاولة حل مسألة البتية لهلبرت أضفت إلى استعمال المناطقة لطرائق ومناهج تقاربت جميعها والتقت في نقطة واحدة وهي الدوال التراجعية أو الدوال القابلة للحساب، إن هذه النماذج الحسابية التي تأوّلت فيما بعد لتصبح آلات حسابية إفتراضية، لقد سمحت الأبحاث المنطقية جميعها بتدفق سيل من الطرائق نحو حل مسألة البتية التي تحقق في إنشاء نظرية قابلية الحساب قبل إيجادها في مجال تطور المعلوماتية النظرية كل بطريقته وكيفيته، حيث عُرضت تأويلات (interprétations) كثيرة من حيث الآلات، الخوارزميات أو البرامج.

إن تفحص هذا المسار التاريخي الجديد الذي عن طريقه يضم المنطق من خلال المسائل التي يطرحها العناصر التي تؤدي إلى تأسيس نظرية الآلات المعلوماتية، فأصبحت الآلة موضوعا للدراسات المنطقية.

أضفت جميع هذه التيارات والمقاربات المتقاربة إلى الإجابة على سؤال هلبرت، فقد أجاب تشورش بالسلب أي "لا توجد خوارزمية أو آلية حساب فعالة تبت في وجود حلول وتحديد مراحل حل مسألة رياضية معينة"، بالفعل كما يقول آراسون لقد ذهب حلم هلبرت إلى غير رجعة على يد تشورش، جودل وتورينج.

2.4.الخوارزميات:

قد لا نكون مبالغين إذا ما صرحنا بأن تحديد تعريف للخوارزمية[14] يُعد من أصعب المهام التي قد يضطلع بها أي رياضي أو منطقي، على الرغم من أن أي هكذا اختلافات تعريفية أو مفاهيمية قد تكتنف العلوم الاجتماعية والإنسانية أكثر من علمين يُعدان دقيقين، فلم يظهر مصطلح "خوارزمية" في القاموس العالمي الجديد (New World Dictionary) حتى العام 1957. (Knuth, 1997, p. 1)

نسمي طريقة فعالة أو إجراء فعالا أو آلية فعالة أو طريقة ميكانيكية كل إجراء يهدف لحل مسألة تنتمي لصنف معين من المسائل، وبشكل صوري كل طريقة فعالة تتكون من سلسلة منتهية من التعليمات كما تُطبق على صنف معين من المسائل، وبالمحصلة فهي تنتهي بعد تنفيذ عدد معين من الخطوات كما أنها تقدم لنا أجوبة صحيحة. (Chaitin G., 2007) ويضع كنوث خمس خصائص للخوارزمية: (Knuth, 1997, p. 15)

- المحدودية (finitude): إذ يجب أن تنتهي خوارزمية ما بعد عدد معين من الخطوات.

---

[14] يعود أصل كلمة خوارزمية للعالم المسلم أي موسى الخوارزمي، وقد نُقل للاتينية ولغاتها محافظا على طريقة نطقه.

- التعريف الدقيق (définition précise): يجب تعريف كل خطوة من خطوات الخوارزمية بشكل دقيق حيث يجب تخصيص كل أفعال وحركات التبديل أو التغيير بشكل صارم وبدون غموض في كل حالة.
- المدخلات (entrées): القيم التي يتم إدخالها قبل تنفيذ الخوارزمية، كما يجب تحديد نوع المدخلات تبعا لما تم التصريح به في الخوارزمية
- المخرجات(soties): قيم يُتحصل عليها بعد تنفيذ الخوارزمية تكون فيها متعلقة بشكل مباشر بقيم المدخلات
- المردودية (rendement): كل العمليات التي يجب على الخوارزمية القيام بها وتنفيذها وإتمامها أن تكون قاعدية بشكل كاف لتصبح قابلة للتحقيق في مدة زمنية محددة بواسطة انسان يستخدم قلما وورقا.

في حين يفترض الرياضي والفيلسوف جورج بولوس (George Boolos) تعريفا آخر للخوارزمية بقوله: "إن الخوارزمية هي مجموع تعليمات صريحة لتحديد العنصر رقم n لمجموعة ما، من أجل كل عدد طبيعي n كبير يؤُخذ اعتباطيا، هكذا تعليمات تُعطى بكيفية صريحة، بشكل يمكّن آلة حسابية من حسابها أو عن طريق انسان قادر على تحويل عمليات أولية وبسيطة جدا إلى رموز". (Boolos & Jeffrey, 2007, p. 26)

أما الباحث في علوم الحوسبة جيرارد بيري (Gérard Berry) فيقترح تعريفا أكثر بساطة وأكثر فهما من طرف العامة إذ يرى أن الخوارزمية هي ببساطة طريقة لوصف –في عدد أقل ما يمكن من التفاصيل– كيف يتم إجراء شيء معين، حيث يوجد الكثير من الحركات الميكانيكية والهدف هو إجلاء الفكر الحسابي من أجل جعله قابلا للتنفيذ عن طريق آلة رقمية (كالحاسوب مثلا)، وبالتالي نحن لا نعمل إلا بانعكاس رقمي لنظام حقيقي مع خوارزمية تتفاعل مع ذلك". (Knuth, 1997, p. 20)

ما يبدو واضحا أن تعريف كنوث أكثر تقنية وتفصيلا ورسمية (صورية) بحكم كونه من أوائل المبرمجين في العالم فيُعتبر كتابه "The art of the computer programming " بعديد أجزائه مرجعا للأساتذة والطلبة في العالم، فاحتوى تعريفه على تفصيلات مرتبطة بشرط وجدوى بناء خوارزمية آخذا بعين الإعتبار الموارد التي وجب توفيرها وشروط تنفيذ خوارزمية، في حين أن التعريفين الآخرين كانا أكثر بساطة وبلغة مفهومة وفي متناول غير المتخصصين وهو التعريف الأكثر شعبية، وعلى العموم يسوق لنا دويك تعريفا شاملا آخذا في الحسبان موارد الآلة فيفترض أن الخوارزمية هي طريقة عامة لحل نوع معين من المسائل،[15] فنقول عن خوارزمية إنها "صحيحة" إذا كان من أجل كل مرحلة من مراحل حل المسألة تنتهي بإعطاء النتيجة الصحيحة، بمعنى تقوم بحل المسألة المطلوبة.

وما يمكن تقصيه أيضا من خلال تعريف كنوث للخوارزمية أن يتقارب ويتقاطع كثيرا مع تعريف الدوال القابلة للحساب من حيث مفهوم الحساب الفعال ومكننة الحساب وهو ما يؤكد أن أول تعريف للخوارزمية بالفعل قد صاغه جيل شورش وتورينج وكلين وغيرهم.

وتُقاس فعالية خوارزمية من خلال:[16] (Dowek, 2009, p. 15)

- طول مدة الحساب
- استهلاك الذاكرة (ذاكرة الحاسوب) على افتراض أن كل تعليمة لها وقت تنفيذ محدد
- دقة النتائج المتحصل عليها مثلا عند استخدام الطرقة الإحتمالية
- قابلية التوسع أو التمديد (scalabilité)
- قابلية الموازاة (parallélisation)

[15] ولهذ تختلف لغات البرمجة من حيث نوع المسائل التي تحلها، فنجد لغات برمجة خاصة بالأمن الشبكي مثلا وأخرى خاصة بقواعد البيانات (database) وأخرى تتعلق ببرمجة الويب (web) كما نجد أخرى متعلقة بمختلف الحسابات الرياضية مثل MATLAB.

[16] فيما يخص العنصر الأول والثاني هذا بالضبط ما تضطلع به نظرية التعقيد الحوسبي.

3.4.متطابقة كوري هوارد:

متطابقة كوري هاوارد أو إيزومورفيزم كوري هاوارد (تشاكل تقابلي) هي متطابقة من الشكل استدلال/برنامج أو نوع صيغة/نمط وهي سلسلة من النتائج التي تقع على حدود المنطق الرياضي، المعلوماتية النظرية ونظرية قابلية الحساب، حيث تضع علاقات بين البراهين الصورية لا لنسق منطقي معين وبرامج نموذج حسابي، حيث لاحظ هاسكل كوري (Haskell Curry) هذا التشابه والتطابق بين براهين أنظمة هلبرت والمنطق التوافقي، ثم في العام 1969 لاحظ هاوارد أن البراهين في الإستنباط الطبيعي يمكن صياغتها صوريا كحدود لنموذج لامبدا الحسابي المُنَمَّط.

إنطلاقا من هذا التمييز بين الحسابات المنطقية والحسابات الدالية، أصبح من الممكن وضع هذه المطابقة بين البراهين والخوارزميات (البرامج)، الصيغ وأنماط المعطيات ومعايرة (normalisation) البراهين وتنفيذ البرامج عن طريق إختزال لامبدا. (Wagner, 1998, p. 159)

وتضع هذه المطابقة الرابط الضيق والعميق جدا الموجود بين المنطق والمعلوماتية لأنه من خلالها، تصبح البراهين الصورية في شكلها البنائي قابلة لتحديد البرامج أي لآلات مجردة، ولنأخذ مثالا على ذلك: لتكن الصيغة التالي: $\forall x \exists y R[x,y]$، إن استدلالا بنائيا لهذه الصيغة يعطينا وسيلة لبناء عنصر y_0 يحقق $R[x_0,y_0]$ من أجل كل مُعطى x_0، لنفرض x_0 هي تشفير لقائمة من الأعداد الطبيعية، والصيغة $R[x,y]$ تعبر عن كون y قائمة مرتبة للأعداد x، وفقا لعلاقة ترتيب معينة، وبالتالي، الإستدلال البنائي للصيغة $\forall x \exists y R[x,y]$ يعطينا خوارزمية ترتيب تأخذ قوائك كيفية لمدخلات وتعطينا نفس القوائم مرتبة كمخرجات.

ومن خلال استبعاد المحتوى الدالي لبرهان معين، تسمح لنا المتطابقة باستخراج خوارزمية تبدو إذن الآلة مرتبطة بالمسألة المنطقية بمعنى جديد. فلم يعد يتعلق الأمر بتقديم مجرد للآلة مكافئ لأجهزة الحاسوب ولغات البرمجة لتحديد خصائص مفهوم "الفعالية" وأيضا تعميم فكرة الأنساق الصورية فحسب، بل أصبح الآن مسألة تسليط الضوء على المحتوى الخوارزمي للبراهين وتحديد الإستدلالات والبرامج، فعن طريق متطابقة كوري هاوارد نجد أن نظرية البرهان قد ارتبطت مباشرة بدراسة الآلات المجردة وبشكل غير مباشر بالآلات الحقيقية.

5.4.نظرية التعقـــيد:

تدرس نظرية التعقيد بكيفية صورية "زمن الحساب" و"مساحة الذاكرة" التي تستغلها الخوارزميات لتنفيذ جميع تعليماتها لحل مسألة خوارزمية، وبالتالي يتعلق الأمر بالصعوبة الجوهرية للمسائل من حيث تصنيفها وترتيبها إلى "أصناف تعقيد"، كما تدرس العلاقات الموجودة بين مختلف أصناف التعقيد، ونعرف "صنف تعقيد خوارزمية" بوصفه مجموعة المسائل الخوارزمية التي يستلزم حلها نفس عدد الموارد المستغلَّة من معالجات وذاكرة وزمن. (Knuth, 1997, p. 325)

وبعبارة أخُرى فإن نظرية التعقيد هي دراسة كمية الموارد (مساحة الذاكرة، الزمن ...) الضرورية لتنفيذ خوارزمية، ويُحسب التعقيد الزمني الحوسبي أي الضروري لتنفيذ خوارزمية بدلالة طول المعطيات، أما الغاية من حساب درجة التعقيد الحوسبي لبرنامج معين فهي كون لكل برنامج الكثير من الخوارزميات التي يمكنها حل نفس المسألة، وبالتالي وجبت المقارنة والتحليل بين مجموع أداءات (performances) هاته الخوارزميات، وعليه يمكن أن نستنتج بوضوح أن درجة التعقيد الحوسبي ما هي رياضيا إلا دالة عددية تتخذ من عدد التعليمات وعدد معطيات خوارزمية معينة كمجموعة انطلاق لحساب صورها.

نرمز في الرياضيات للحد الأعلى (borne supérieure) لنسبة تـــزايد دالـــة بـ O (big O)، وبالتالي سنرمز لدالة التعقيد الحوسبي بالرمز $O(n)$، وكما أن لكل علم وحدات قياس وطرائق قياسها وحسابها، فيمكننا اعتبار مفهوم (O) كوحدة قياسية تسمح لنا بقياس زمن تنفيذ الخوارزمية معينة. (Delahaye, 2006, p. 35)

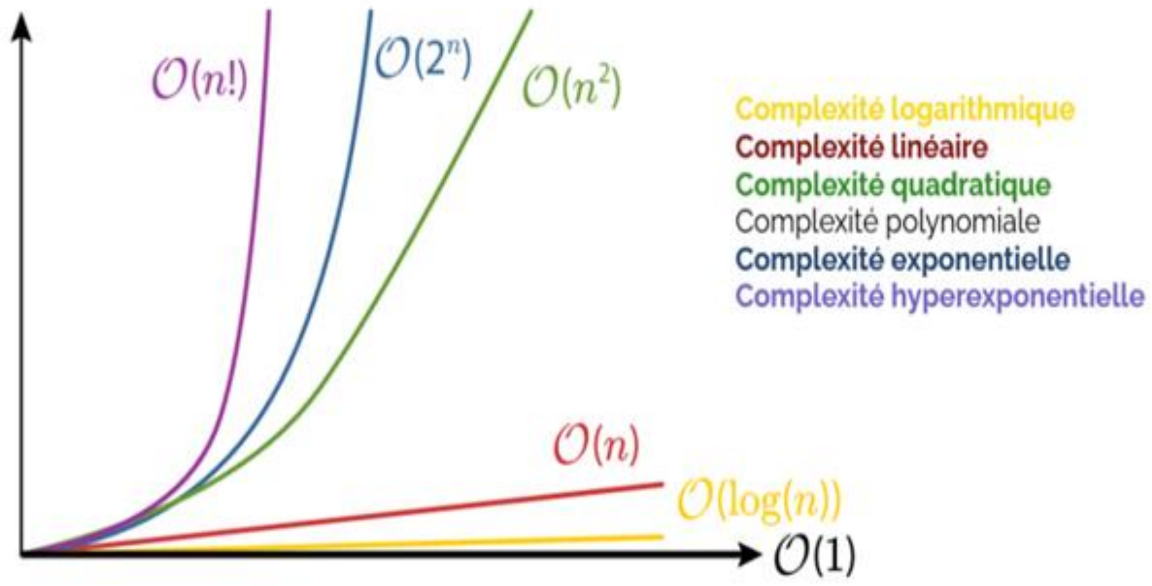
إن التعقيد الزمني لخوارزمية ما يُعطى بدلالة طول معطياته باستخدام الترميز (O)، وعلى هذا الأساس سنستخدم هذا المفهوم لتصنيف الخوارزميات بدلالة زمن تنفيذها تبعا لزيادة أو نقصان طول مدخلاتها، وتجدر الإشارة إلى نقطة غاية في الأهمية وهي أن دالة

التعقيد الحوسبي تقوم بحساب الزمن اللازم لتنفيذ الخوارزمية في أسوء الحالات بمعنى أنها تفترض أسوء حالة يمكن توقعها والعمل بها.

ويمكن أن نلخص أصناف درجة تعقيد الخوارزميات كما يلي:

الترميز	الاسم
$O(1)$	ثابتة (constante)
$O(\log n)$	لوغارتمية (logaritmique)
$O(n)$	خطية (lineaire)
$O(n\log n)$	شبه خطية (quazilineaire)
$O(n^2)$	تربيعية (quadratique)
$O(2^n)$	أسية (exponentielle)
$O(n!)$	عاملية (factorielle)

كما يمكن تمثيل هذه الحالات من خلال المنحنى التالي: (Python Complexité algorithmique, 2023)



على محور الفواصل نعتبر طول المعطيات n، وعلى محور التراتيب فنعتبر الزمن بالدقائق.

1.5.4. نظرية التعقيد عند كولموجوروف:

وتُسمى أيضا نظرية التعقيد العشوائي أو نظرية التعقيد الخوارزمي، وهي سلسلة رقمية S [17] مُعرفة كطول K(S) لأقصر برنامج P يمكن برمجته على آلة كلية (كأجهزة الحاسوب مثلا) يمكننا من خلاله إنتاج السلسلة S. (Delahaye, 2006, p. 116)

صوريا: نعتبر آلة معلوماتية M التي يمكنها تنفيذ البرامج، إن القول عن أن هذه الآلة هي آلة كلية (machine universelle) معناه أنها قادرة على محاكاة أي آلة أُخرى من خلال تنفيذ أي برنامج، ونرمز بـ P_M لمجموعة البرامج المكتوبة على الآلة M، ومن أجل كل برنامج $p \in P_M$ نرمز بـ $l(p)$ لطول البرنامج بدلالة عدد التعليمات للآلة M وبالرمز s(p) لمخرجاته.

إن نظرية تعقيد كولموجوروف والتي نرمز لها بالرمز: $K_M(x)$ أو التعقيد الخوارزمي لسلسلة x منتهية من الأحرف للآلة M بالعلاقة التالية:

$$K_M(x) = min\{l(p), s(p) = x, p \in P_M\}$$

وبالتالي يتعلق الأمر بطول أقصر برنامج مكتوب على آلة M والذي يُنتج السلسلة x، ومن الواضح إذن أن كل سلسلة ثابت أي تحتوي على حروف مكررة بصفة منتظمة كالسلسلة مثلا (aabbaabbaabbaabbaabb) لها ترتيب معين للحروف فنلاحظ أنها تتكون من حرفين رئيسين يتكرران بصفة دورية ومنتظمة وهي سلسلة معممة للسلسلة البسيطة (aabb) وبالتالي يكون تعقيدها ضعيفا أو بسيطا لأنه من السهل كتابة برنامج قصير لإنتاج هاته السلسلة، كما تجدر الإشارة أيضا إلى أن تعقيد كولموجوروف من المسائل غير القابلة للبت لكون لا يمكننا التنبؤ أبدا بأطوال البرامج.

[17] نقصد بسلسلة رقمية كل موضوع (objet) يُمكن إنشاؤه أو إنتاجه من خلال برنامج حاسوبي كصورة، مقطع موسيقي أو تحليل صورة فضائية، ...

2.5.4.قواعد حساب درجة التعقيد:

لحساب درجة تعقيد خوارزمية، يجب حساب عدد العمليات الأساسية (الأولية البسيطة) التي نقوم بتنفيذها:

- العمليات الحسابية أو المنطقية (+،*،"و"،"أو") تأخذ القيمة 1
- عمليات الإسناد ($x \leftarrow 10$) تأخذ القيمة 1
- التحقق من شرط معين ($x \geq 8$) تأخذ القيمة 1
- عمليات الإدخال والإخراج (input, output) تأخذ القيمة 1
- درجة تعقيد حلقة تكرارية (Boucle) هي درجة تعقيد الهيكل الداخلي للحلقة مضروب في عدد مرات تنفيذ الحلقة

لنأخذ المثال التالي:

If n<5 then O(1) التحقق من الشرط

Write (“Hello World”) O(1) تعليمة كتابة

Else

For i=1 to n do O(1) تعليمة إسناد

Begin

Write (“Hello World”) O(1) تعليمة كتابة

End.

O(2n)

حيث n يمثل عدد مرات تكرار الحلقة.

وبالتلي تُبح النتيجة كالآتي:

$$O(1)+Max(O(1),O(2n))=O(1)+O(2n)=O(2n+1)$$

وهي قيمة خطية بمعنى أن هذه الخوارزمية تُنفذ في زمن خطي وفقا للجدول السابق.

إن ما يمكن أن نختم به فصلنا الأخير هذا هو القول بأن نظرية المنطق المعاصر لم تشكل فحسب ملمح القرن العشرين ولكنها لحد اللحظة ما زالت تصقل رؤيتنا للرياضيات والعلم والعالم، ومما يمكن أن نسوقه ما يلي:

بعد أن انفصل المنطق عن الفلسفة ها هو ينفصل عن الرياضيات ويتمفصل على اختصاصات أربع نظرية البرهان، نظرية النماذج، نظرية المجموعات ونظرية قابلية الحساب.

تأويل المنطق أدى إلى ظهور نظرية قابلية الحساب، والتي بدورها أدى البحث فيها إلى تطوير الآلات الحسابية والمعلوماتية النظرية.

لقد كان لنظرية النماذج الأثر الكبير على الفكر الفلسفي لاسيما في إعادة إعطاء مفهوم الحقيقة الذي ظل مفهوما ميتافيزيقيا عطَّل كل بحث فيه، وتأكد أن كل نموذج ما هو تأويل لصيغ نظـرية.

ساهم عصر الحوسبة الآلية في ظهور الرياضيات الحوسبية التي لم تعرف منعرجا في منهجها فحسب، إنما تأسست الرياضيات التطبيقية أو الرياضيات التجريبية، فمن جهة خففت من تجريد الرياضيات كعلم يلقى دارسوه صعوبة في تلقي مفاهيمه ومبادئه، ومن جهة أخرى أُستغلت البرامج الحسابية أيما استغلال في مصادقة عديد براهين الحدسيات والنظريات.

ظهور نظرية التعقيد الحوسبي كرؤية علمية وفلسفية تنظر في تعقيد الحياة والظواهر الطبيعية والإنسانية.

انفتاح الرياضيات على العلوم الأخرى بفضل الحساب فأصبحت حجر الأساس في الكثير من العلوم لاسيما الفيزياء والبيولوجيا والفلك.

لم يعد الرياضيون يكترثون بتفاصيل البرهان الرياضي بقدر ما يهتمون بقدرة الحاسبات على محــاكاة براهينـــهم وإمكانـــية إجــراء حسابــاتهم بالأخذ في الحسبان موارد الآلات الحسابية المتوفرة

تُعتبر الأنساق الصورية الأساس في برمجة آلات الذكاء الاصطناعي بحكم أنها تعتمد على النسق الاستنباطي لمحاكاة سلوك البشر.

أضحت الرياضيات التجريبية بوصفها العلم الأكثر خصوبة ومن تطبيقاته في مجال تعليمية الرياضيات خاصة مع دمج تكنولوجيا الإعلام والإتصال.[18]

[18] للاطلاع أكثر راجع: (هاملي، 2022).

خاتمــــــــة

وفي ختام بحثنا المتواضع، خلصنا إلى جملة من النتائج، تمثلناها أن تسد بعضا مما رأيناه فجوة معرفية سواء من حيث ما قدمناه من نقل وترجمة للمصطلح اللاتيني إلى اللسان العربي، أو تغطية لبعض الإكتشافات الرياضية من جهة حضور النقد والتحليل الفلسفيين فيها، ويجدر بالذكر أننا تناولنا الموضوع بعناية وحذر شديدين ذلك أننا أعدنا مساءلة مقولات ومجالات ظنناها لعقود محل يقين بنظرة دوغمائية، فلطالما تعودنا على الرياضيات موضوعا ومنهجا بوصفها علما يقينيا يستقي صحة مفاهيمه من اتساق قضاياه وعدم تناقضها داخليا، يقين لا يشوبه الشك أو الارتياب من قريب ولا من بعيد.

إن مساءلة الرياضيات موضوعا ومنهجا، تحيلنا ضمنا أو تصريحا إلى مساءلة كل ما يرتبط بها مصطلحا ومفهوما على سبيل القبلي، المنطق، البرهان، الحساب ...، ولقد ارتأينا أن نقدم نتائجنا من خلال أبعادها المختلفة مصنفة مرتبة، ويمكن حصر ذلك فيما يلي:

فمن حيث البعد التاريخي: فكل تفكير فلسفي هو بالأساس انعكاس للتفكير العلمي ودرجة الوعي فيه، وعديد الأمثلة يسوقها التاريخ، ففلسفة كانط إن لم تكن نتاجا فهي انعكاس للوعي العلمي بالطبيعة وقوانينها الذي أحدثه إسحاق نيوتن من خلال قوانين الميكانيكا الأرضية وحركة الكواكب، فكل أرضية أنطولوجية هي إنعكاس للأرضية الإيبستمولوجية، وبالتالي فالعرض التاريخي وتتبع مسار رحلة العقل في البحث عن الحقيقة لا يدخلان فحسب في إطار الترف الفكري أو سرد قصصي للأفكار بقدر ما هما مرافقة للعقل العلمي والفلسفي والرياضي في تطوره وصفا وتحليلا وكشفا لمكامن التطور والنجاح والإخفاق، فالعلم تراكمي، وحتى أخطاء العلم يُبنى عليها العلم فهو كالبنيان كل جزء وكل لحظة وعي تشد بنيانه.

أما البعد الإبيستمولوجي: فقد أفضى هذا التزاوج بين الرياضيات والمنطق والحوسبة إلى ظهور اختصاص معرفي جديد متعلق بـ "الحساب" باعتباره جزءا مهما وأساسيا من براكسيس الرياضيات المحضة والعلوم الرياضية، من وجهة نظر نظرية، مثله مثل العلوم المعلوماتية، وقد تدعَّمت الغاية الفلسفية في العُشريات الأخيرة من تصميم هذه اللغات من خلال ظهور برادايم مشترك بين المعلوماتية ونظرية البرهان وهو ما نسميه ببرادايم استدلال–برنامج.

فتحت مسألة البتية التي وضعها دافيد هلبرت أفقا واسعا للبحث في الرياضيات والمنطق على السواء، وعلى الرغم من الضربات الصادمة التي تعرضت لها من قبل جودل وتورينج وتشورش والإجابة بالنفي خاصة مع مبرهنة اللاكمالية، إلا أن البحث فيها على اختلاف مناهجه وخلفياته وطرائقه أدى إلى تلاقي مقارباته عند نقطة واحدة وهي النماذج الحسابية المتكافئة التي أرست معالم العلم الجديد: نظرية قابلية الحساب والتي تُعد بحق نواة الحاسبات الآلية وعلوم المعلوماتية بصفة عامة.

كما تطور حقل جديد تمثل في الرياضيات الحوسبية والتي اتخذت كمجال بحث تطوير خوارزميات لحل مسائل رياضية حسابيا أي باستخدام مدخلات الحاسوب، لاسيما وأن قسما كبيرا من الرياضيات التطبيقية يُستخدم في الحسابات العلمية كحساب الإحتمالات والإحصاء، التشفير، الرياضيات التجريبية، وبالتالي لم تعد القدرة على الحساب مرهونة بالبحث عن طرائق أو خوارزميات بل باتت مرتبطة بالأساس بقدرة أجهزة الحاسوب على القيام بالحساب الفائق من خلال تطوير مواردها كالأجهزة الكمية (machines quantiques) مثلا، وتطوير خوارزميات أقـــل استهـــلاكا للموارد وهذا ما اضطلـــعت بـــه نظرية التعقيد الحوسبي.

بزغ علم المعلوماتية الحيوية (bio-informatique) كإختصاص متحاقل ومتقاطع معرفيا بين الرياضيات واللسانيات (نظرية اللغات) وعلم الأحياء، حيث يختص هذا العلم بدراسة المعلومات الخاصة بالكائن الحي كمعطيات (data) مخزنة في الجينوم، بصيغة أخرى تصبح تراتبية الأحماض الأمينية المشكلة للحمض النووي للكائن الحي بوصفها جملا مكونة من أبجدية يتم تحليلها رياضيا وحوسبيا من خلال دراسة الصبغيات ككلمات مكونة من أحرف، وعلى هذا الأساس يوضع تقابل (bijection) بين كل كلمة والصفة الوراثية.

لم تعد النظرية تتسم بذات كيفية الصحة، فقد أضفت نظرية النماذج مفهوما آخر لصحة نظرية ما، فأصبحت النظرية مضوعا لنظرية النماذج حيث تُعتبر النظرية صيغة أو مجموعة من الصيغ، كما أن النموذج هو بنية في لغـــة معينة تحـــقق أو تستجيب لمسلمات النظرية.

أما البعد الميتودولوجي: ففيه نخص بالذكر جزئيتين أساسيتين: الأولى تتعلق بالمنطق من حيث كونه لم يعد يندرج ضمن مبحث الميتودولوجيا الذي بدوره يندرج ضمن مبحث الابيستمولوجيا، فلم يعد التقسيم الثلاثي لمباحث الفلسفة ذا قيمة معرفية، وهذه نتيجة منطقية لتطور البنية المعرفية للعقل البشري فالفلسفة بما هي ممارسة عقلية، فما يطرأ على العقل من تقدم وعبور فبالمحصلة يطرأ عليها، أما الثانية فتتعلق بطبيعة الرياضيات في حد ذاتها موضوع ومنهجا، فتطور الآلات كما أسفلنا بوصفها تأويلا للمنطق المعاصر لاسيما والنماذج الحسابية التي أبانت كلها عن نقطة التقاء واحدة وهي نظرية القابلية للحساب، أرجعت الريادة في المنهج الرياضي للحساب بعد أن كان لقرون عديدة لصالح الإستدلال، وهنا نشير إلى أن كل موضعة (objectivation) للواقع هي في الحقيقة "حساب" فالواقع إذن هو كل ما يمكن حسابه، إذ قالها ذات مرة مارتن هايدجر: "إن العلم الحديث يُخضع الواقع للحساب"، كما أن البراهين الرياضية لم تعد كسالف عهدها لاسيما مع تطور الذكاء

الصناعي ومجال البرهنة الآلية حيث أصبحت المنظمات العلمية والأكاديمية تتأكد من صحة البراهين من خلال الآلات الذكية.

قدمت الطريقة الأكسيوماتية بدون شك رؤية محدودة للرياضيات لاسيما وكونها ضمنت اتساق نظرياتها ومبرهناتها فقط ضمن منطق المحمولات أو منطق الدرجة الأولى الذي اقتصر على وجود المكممين الوجودي والكلي والمتغيرات دون احتوائه الدوال، فشكل النسق الأكسيوماتي إطارا مغلقا وجد محدود وقف حجر عثرة في طريق تطور الرياضيات وانفتاحها على عديد الاختصاصات المعرفية الأخرى التي تتقاطع معها اليوم وساهمت بشكل كبير وفعال في تطورها هي الأخرى.

كما لاحظنا ومن خلال بحثنا هذا التجاذب والتنافر بين المنهجين الاستدلالي والحسابي، تنتصر الرياضيات مرة لهذا ومرة لذاك وكان ذلك وفقا لتطور الرياضيات في حد ذاتها من جهة، ومن جهة أُخرى وفقا لإبيستمية كل عصر خاصة وأن تطور الرياضيات لطالما ارتبط كل الإرتباط بحاجات الإنسان اليومية الإقتصادية والإجتماعية والزراعية والتجارية، وحاجاته المعرفية التي تمثلت أساسا في علم الفلك قديما، غير أن تطور العلم بوصفه تريبضا للطبيعة وصياغة حسابية لقوانينها، انتصر للطريقة الحسابية التي تطورت كثيرا خاصة مع تطور أجهزة الحاسوب التي تستطيع تنفيذ خوارزميات قادرة على القيام بعمليات حسابية فائقة، وبالتالي كان ارتباط الطريقة الحسابية بالخوارزميات والآلات النتيجة المنطقية لهذا التطور.

أما البعد الجينيالوجي: فلقد شهدنا من خلال عرض المحطات المعلمية للمنطق مختلف أطوار نموه منذ لحظة لايبنيس التي مثلت الطور الثاني بعد لحظة أرسطو وما تبعه من مدارس يونانية وهلينيستية وإسلامية،... مرورا بلحظة بول أين تحاقل المنطق والجبر فأدى إلى مرونة وتحكم في الحسابات المنطقية، أما فريجه فيعتبر أبا المنطق المعاصر

كما رأينا وملهم مؤسسي المنطق الرياضي راسل وولايتهد، وختامها مع المنطق المعاصر الذي انفصل عن الفلسفة والرياضيات ليضطلع بمهام ومجالات أخرى تمثلت في نظرية المجموعات، نظرية البرهان، نظرية النماذج ونظرية قابلية الحسبة.

ولا يجب أن نقف عند هذا العرض الموجز بل وجب علينا الإشارة إلى أن تعدد المناطق خلق لنا براديمات جديدة ومتعددة ساهمت في تجاوز النظرة القاصرة والمقدسة للمنطق، القاصرة من حيث جعلته رهينا للتعريف الأرسطي بوصفه أورجانون العقل والآلة التي تعصم العقل من الزلل والوقوع في الخطأ، والمقدسة بأن جُعل المنطق الأرسطي هو الوحيد وقوانينه هي الوحيدة التي تمثل ملكات العقل البشري، فحُصرت ملكات العقل لقرن في قياس عقيم مبني على مقدمات ونتائج لم تُعط الإضافة لتطور المنطق أو الرياضيات أو العلم على السواء.

ويمكن أن نضيف بعدا آخر متعلق بالبعد النفسي المعرفي (psych–cognitive) وهو ما نصطلح عليه بالميتامعرفة (metaknowledge) أو ما وراء المعرفة، بالفعل إن مفهوما محوريا في علوم المعرفة كمفهوم القبلي (a priori) ظل لقرن رهن التعريف الكانطي له باعتباره قوالب جاهزة في العقل تختص به ملكة العقل دون الحساسية أو الفاهمة، لكن يبدو أن تعدد المناطق الذي سبق وتحدثنا عنه ينفي تماما كل قوالب جاهزة أو معرفة مسبقا، فكل علم مبني على مواضعات يضعها العقل وفقا لبنيته المعرفية المتوفرة والمُتوصَّل إليها في تلكم المرحلة، وأكثر من ذلك أدى تبني المنطق الكمومي (logique quantique) أو الأمبريقي إلى مساءلة الموقف الفلسفي من المنطق القبلي إذ أدى هذا المشروع إلى الدفع بالفلسفة إلى مشروع فلسفي بما هو فلسفة عامة للمعرفة.

كما يمكننا أن نضيف بعدا آخر من حيث ما حاولنا تغطيته من فجوة علمية ومعرفية على سبيل التصحيح والتجاوز، فقد بقي المنطق في المكتبات العربية حبيس النظرة

الكلاسيكية الأرسطية وانحصر معنى كلمة المنطق المعاصر في المنطق الرياضي واقتصر التأليف على منطق المحمولات وحساب القضايا، كما أن المشتغلين في الحقل الفلسفي بقوا بمنأى عن الفلسفة الرياضية وعلاقتها بفلسفة الحساب والتعقيد، مصطلح استعملناه بكل أرحية بعد هذا البحث الذي نعتمده كأرضية معرفية بسيطة لبحوث أخرى.

ونضيف بعدا آخر وهو البعد الميتافيزيقي: كمقولة الحقيقة لم تعد مقولة الحقيقة ميتافيزيقية، فالحقيقة أصبحت تُقاس بصلاحيتها في نسق إستنباطي معين في لغة صورية معينة، فحتى العلوم التجريبية كالفيزياء مثلا أصبحت تستند لاستدلالات منطقية مصونة في لغات صورية معينة، ففي نموذج معين تكون قضية ما حقيقة إذا ما أمكن تحصيلها انطلاقا من عدد من المسلمات ووفق قواعد صورية معينة.

وفي ختام هذه الرسالة، يمكننا أن نطرح جملة من الإستفهامات العلمية والفلسفية، عسى أن تكون إرهاصات ومقـــدمات لدراســـــات ومنظوريات قادمـــــة يتم إلقـــاء الضوء عليـــها بالنقد والتحليل والدراسة:

إلى أي حد يمكن للإنسان أن يستعيض بالآلة عن الإستدلال الرياضي، لاسيما وأن الآلة لها حدودها الأمبريقية المتعلقة بقدرة المعالجات وسعة الذاكرة؟

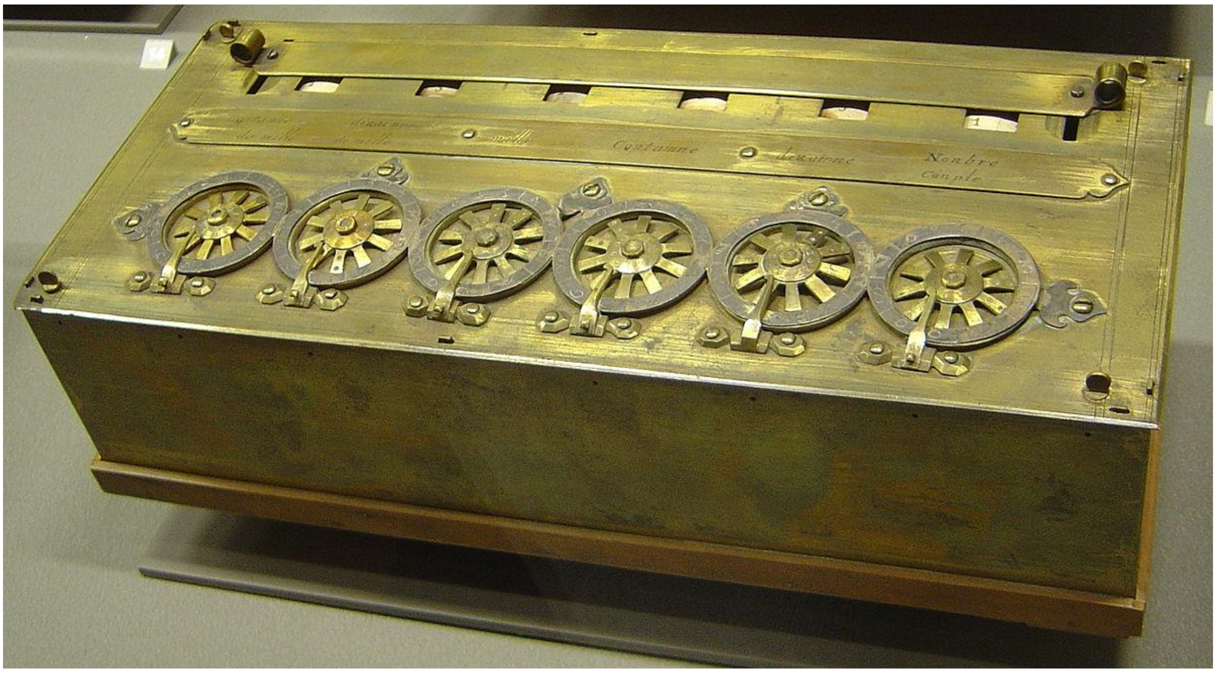
يحيلنا التطور الهائل إلى طرح سؤال يرتكز على حمولتين واحدة ميتافيزيقية وأخرى تطبيقية إجرائية: هــل يمكن للحساب أن يفكر؟

فمن وجهة النظر الميتافيزيقية يمكننا أن نتمفصل بالسؤال التالي: كيف يمكن تحويل الوعي/الشعور للحاسوب؟

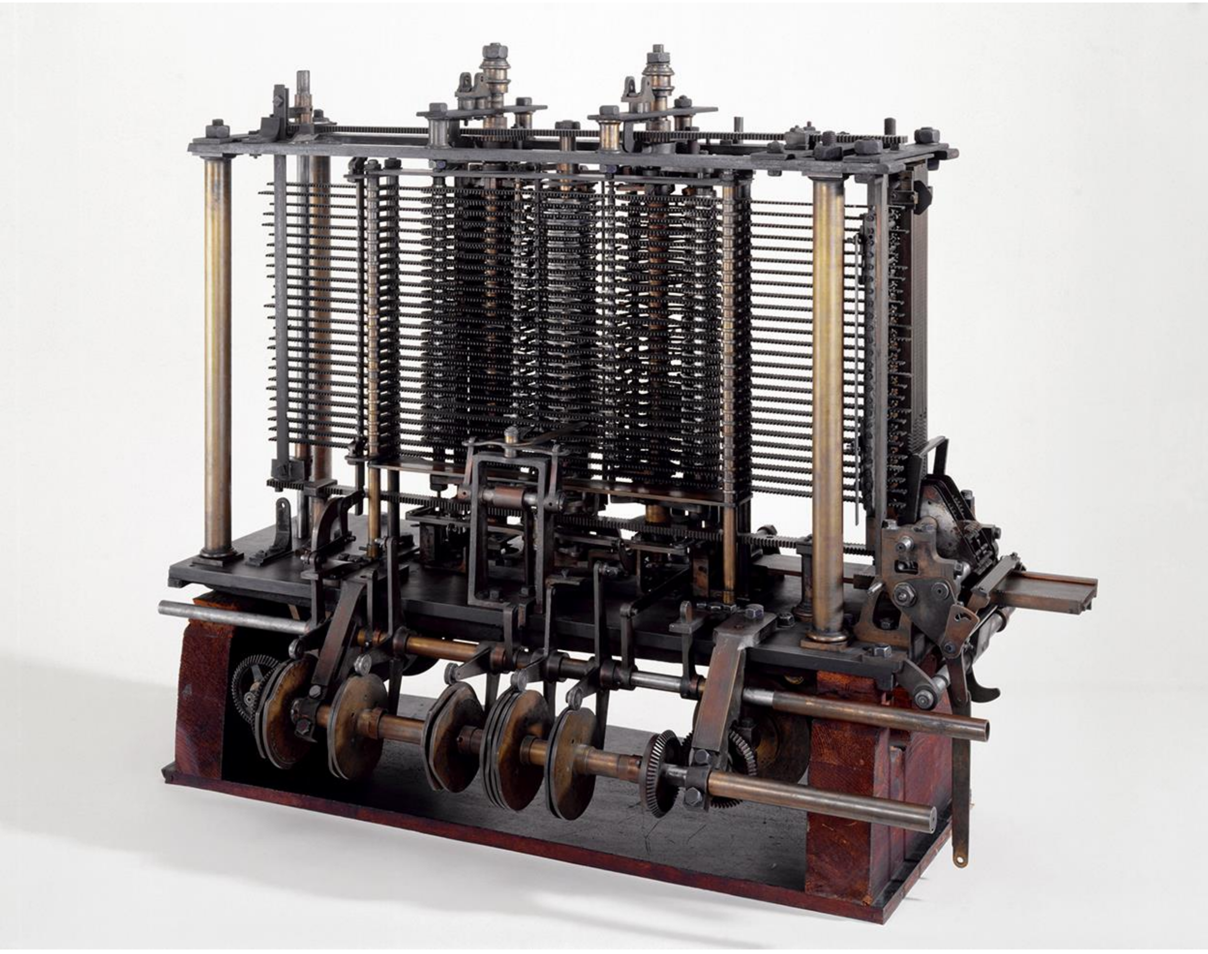
أما من الناحية التطبيقية: فهل يمكن لبرنامج حاسوب أيا كانت لغة البرمجة التي حُرر بها أن يحاكي الشعور الإنساني ويمتلك ناصية التفكر الإنساني وهو ميزة ميزه بها الخالق عن سائر مخلوقاته وهو القائل ﴿وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا﴾؟

بأي كيفية يمكن رسم ملمح العلم ونظرتنا للكون وحتى انطولوجيتنا في ظل الحساب الفائق والتطور الهائل للأجهزة الحاسبة وزيادة التعقيد الحوسبي؟ أي طبيعة تتجلى أمامنا من خلال حسابات معقدة وموضعة غاية في التعقيد...؟

الملاحق

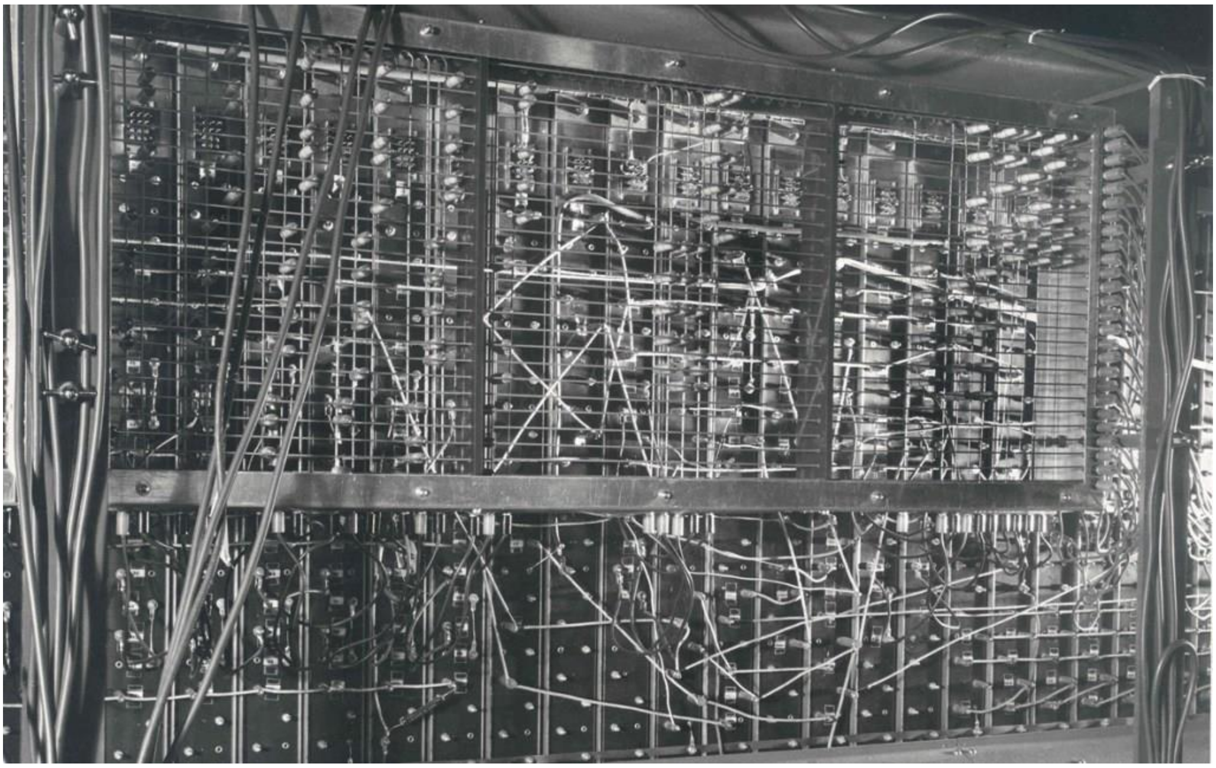


آلة باسكال

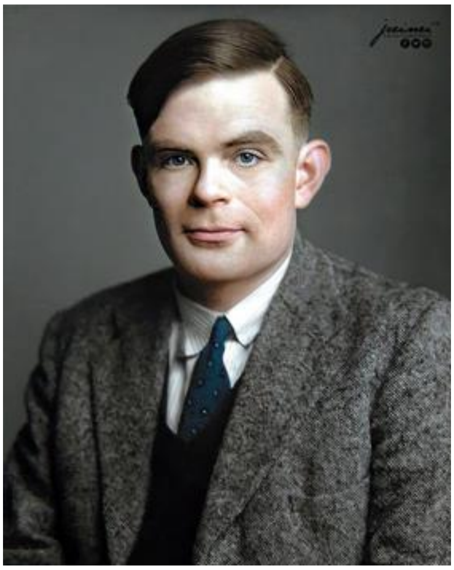


آلة باباج

آلة إنيجما



آلـــــة تورينج



آلان تورينج

ألونزو تشورش

كورت جودل

ثبت

المصطلحات

ثبت المصطلحات:

الفرنسي	الإنجليزي	المصطلح
Epistémologie	epistemology	ابيستمولوجيا
Probabiliste	Probabilistic	احتمالي
Réduction	Reduction	اختزال، رد
Raisonnement	Reasoning	استدلال
Déduction	Deduction	استنتاج
Incomplétude	Incompleteness	اللاكمالية
Axiomatique	Axiomatic	الأوليات
Informatique	Informatic	المعلوماتية
Logicisme	Logicism	النزعة المنطقية
Négation	Negation	النفي
Double négation	Double negation	النفي المضاعف
Procédure effective	Effective procedure	إجراء فعال
Perception	Perception	إدراك
Raisonnement, Inférence	Reasoning, inference	إستدلال
Alphabet des symboles	Alphabet of symbols	أبجدية رموز
fondements des mathématiques	Fundament of mathematics	أسس الرياضيات
Assertion	Assertion	أطروحة
Paradigme	Paradigm	أنموذج
Machine quantique	Quantic machine	آلة كمية
Structures algébriques	Algebraic structures	بُنى جبرية

Démonstration, Raisonnement	Proof, reasoning	برهان
Structure	Structure	بناء
Interprétation	Interpretation	تأويل
interprétation d'une machine informatique	Computation machine interpretation	تأويل آلة حوسبية
Abstraction	Abstraction	تجريد
Suffisance	Sufficiency	تشبع، كفاية
Concept	Concept	تصور
Implication	Implication	تضمن
Expression logique	Logic expression	تعبير منطقي
Pluralisme logique	Logical pluralism	تعددية منطقية
Réflexion	Reflexing	تفكر
Constitution	Constitution	تقوم، تأسيس
Consistance d'une théorie	Theory consistency	تماسك نظرية
Algèbre	Algebra	جبر
Algébrisation de la logique	Algebraization of logic	جبر المنطق
Etat initial	Initial state	حالة ابتدائية
Etat final	Final state	حالة نهائية
Argument du diagonal	Diagonal argument	حجة القطر
Terme	Term	حد
Intuition	Intuition	حدس
Intuitionnisme	Intuitionism	حدسانية

Termes primitifs	Primitive terms	حدود أولية
Calcul	Calculus	حساب
Calcul des prédicats	Predicate calculus	حساب المحمولات
Arithmétique elementaire	Elementary arithmetic	حساب أولي
Hypercalcul	Hypercalcul	حساب فائق
Computations	Computation s	حسابات
Jugement	judgment	حكم
Jugement a posteriori	A posteriori judgment	حكم بعدي
Jugement a priori	A priori judgement	حكم قبلي
Computation	Computation	حوسبة
caracteristique universelle	Universal characteristic	خاصية عامة
Algorithme	Algorithm	خوارزمية
Fonction	Function	دالة
fonction calculable	Calculable function	دالة قابلة للحساب
fonctions récursives	Recursive functions	دوال تراجعية، تكرارية
Esprit	Spirit	ذهن
Tète de lecture/écriture	Reading writing head	رأس كتابة وقراءة
Mathématiques	Mathematics	رياضيات
Mathématiques computationnelles	Computational mathematics	رياضيات حوسبية
Mathématiques abstraites	Abstract mathematics	رياضيات مجردة
Ruban	Ribbon	شريط

Forme canonique	Canonic form	شكل نموذجي
Classe	Class	صنف
Formel	Formal	صوري، رسمي
Arithmétisation de l'analyse	Analyze arithmetization	صياغة حسابية للتحليل
Arithmétisation des mathématiques	Mathematics arithmetization	صياغة حسابية للرياضيات، تحسيب
Formule	formula	صيغة
Nécessité	Necessity	ضرورة
Méthode effective	Effective method	طريقة فعالة
Méthode mécanique	Mechanical method	طريقة ميكانيكية
Méthode	Method	طريقة، منهج
Nombre	Number	عدد
Nombre irrationnel	Irrational number	عدد جذري
Nombre réel	Real number	عدد حقيقي
Réel calculable	Calculable number	عدد حقيقي قابل للحساب
Nombre mystérieux	Mystery number	عدد غريب
Nombre transcendant	Transcendent number	عدد متسامي
Nombre rationnel	Rational number	عدد ناطق
Raison	Reason	عقل

Signe	Sign	علامة
arithmetique	Arithmetic	علم الحساب
Sémantique logique	Logic semantic	علم الدلالة (دلالة المنطقي
Sémantique formelle	Formal semantic	علم الدلالة (دلالة المنطقي
Disjonction	Disjunction	فصل
Idée	Idea	فكرة
Décidable	Decidable	قابل للبت، للتقرير
Décidabilité Entscheidungsproblem	Decidability Entscheidungsproblem	قابلية البت
Scalabilité	Scalability	قابلية التمديد أو التوسع
Calculabilité effective	Effective calculability	قابلية الحسبة الفعالة
Dénombrable	Uncountable	قبل للعد (مجموعة)
Tautologie	Tautology	قضايا تحصيل حاصل
Proposition	Proposition	قضية
Proposition analytique	Analytic proposition	قضية تحليلية
Proposition synthétique	Synthetic proposition	قضية تركيبية، تأليفية
Proposition atomique	Atomic proposition	قضية ذرية

Règles d'inférence	Inference rules	قواعد استدلال
Règles grammaticales	Grammatical rules	قواعد نحوية
lois de l'esprit	Spirit laws	قوانين الفكر
Syllogisme	Syllogism	قياس
Complétude	Completeness	كمالية
Insuffisance	Insufficiency	لا تشبع، لا كفاية
Langage	Language	لغة
Langage universel	Universal language	لغة كلية
Langage objet	Object language	لغة موضوع
Métacognition	Metacognition	ما وراء المعرفي
Principe de tier exclu	Excluded Meddle principle	مبدأ الثالث المرفوع
principe d'identité	Identity principle	مبدأ الهوية
Principe de non contradiction	Non contraction principle	مبدأ عدم التناقض
Correspondance	Correspondence	متابقة
Suite numérique	Numeric suite	متتالية عددية
Transdisciplinaire	Transdisciplinary	متجاوز معرفيا
Interdisciplinaire	Interdisciplinary	متحاقل، متقاطع معرفيا
variable	Variable	متغير
Variable libre	Free variable	متغير حر، مستقل
Equipotence	Equinumerous	مجموعات متساوية الأصلي

Sujet	Subject	محمول
Sorties	Outputs	مخرجات
Schéma des transitions	Transitions schema	مخطط إنتقالات
Schéma des axiomes	Axioms schema	مخطط مسلمات
Entrées	Inputs	مدخلات
Problèmes de Hilbert	Hilbert problems	مسائل هلبرت
Problème exponentiel	Exponential problem	مسألة أسية
Problème linéaire	Linear problem	مسألة خطية
Equation algébrique	Algebraic equation	معادلة جبرية
Connaissance	Knowledge	معرفة
Données	Data	معطيات، بيانات
Bio-informatique	Bio informatic	معلوماتية حيوية
Catégorie	Category	مقولة
Quantificateur	Quantifier	مكمم
Quantificateur universel	Universal quantifier	مكمم كلي
Quantificateur existentiel	Existential quantifier	مكمم وجودي
Mécanisation	Meccanization	مكننة
Enoncé logique	Statement	ملفوظ منطقي
Faculté	Faculty	ملكة
Faculté de sentiment	Sensation faculty	ملكة الحساسية
Faculté de l'entendement	Understanding faculty	ملكة الفهم

Mécanisable	Mechanizable	ممكنن، قابل للممكنة
logique de prmier ordre	First order logic	منطق الدرجة الأولى
Logique transcendantale	Transcendental logic	منطق ترنسندنتالي
Logique symbolique	Symbolic logic	منطق رمزي
Logique classique	Classical logic	منطق كلاسيكي
Logique pure	Pure logic	منطق محض
Logique contemporaine	Contemporary logic	منطق معاصر
Logique	Logic	منطقي
Objectivation	Objectivation	موضعة
Objet	Object	موضوع
Métaphysique	Metaphysic	ميافيزيقا
Méta arithmétique	Meta arithmetic	ميتاحسابي
metamethématiques	metamathematics	ميتارياضيات
Séquence logique	Logic sequence	نتيجة منطقية
Théorie	Theory	نظرية
Théorie des classes	Classes theory	نظرية الأصناف
Théorie des types	Types theory	نظرية الأنماط
Théorie des modèles	Model theory	نظرية النماذج
Type	Type	نمط
Géométrie	Geometry	هندسة

ثبت المصطلحات:

وصف الأفكار	Ideography	Idéographie
وصل	Conjunction	Conjonction

ثبت الأعلام

أبراهام فرانكل 1861–1965 رياضي ألماني اشتهر بأكسمة نظرية المجموعات	Abraham Fraenkel
محمد بن موسى الخوارزمي 780–847 رياضي وفيلسوف مسلم مؤسس علم الجبر	Al Khawarizmi
آلان تورينج 1912–1954 رياضي إنجليزي منطقي ومفكك شفرات وفيلسوف وعلم أحياء نظري من رواد علوم الحاسوب	Alan Turing
ألفرد نورث وايتهد 1861–1947 رياضي وفيلسوف ومنطقي إنجلزي من مؤسسي اللوجيستيكا	Alfred North Whitehead
ألونزو تشورش 1903–1995 رياضي منطقي عالم حاسبات من رواد علوم الحاسوب وأحد أهم مؤسسيه	Alonzo Church
أندراي كولموجوروف 1903–1987 رياضي سوفياتي لها إسهامات كثير في حساب الإحتمالات والطوبولوجيا والمنطق الحدسي يُعرف بنظرية التعقيد الحوسبي	Andrey Kolmogorov
أرانتد هايتينج 1898–1980 رياضي ومنطقي دانماركي من مؤسسي الرياضيات الحدسانية	Arend Heyting
سيزار بورالي فورتي 1861–1931 رياضي إيطالي	Cesare Burali-Forti
دافيد هلبرت 1862–1943 رياضي ألمانمي أحد أكبر المؤثرين في رياضيات القرن العشرين وشع ثلاثا وعشرين مسألة عُرفت باسمه	David Hilbert
إقليدس عام خلال القرن الثالث قبل الميلاد يُعتبر أول من أكسم علم الهندسة في مؤلفه الشهير الأصول	Euclide
جورج كانتور 1845–1918 رياضي ألماني أحدث ثورة في الأوساط الرياضية من خلال نظريته في المجموعات	Georg Cantor

George Boole	جورج بول 1815-1864 رياضي إنجليزي اشتهر بجبر المنطق والمنطق ثنائي القيمة
Gilles Dowek	جيل دويك 1966- مختص في المعلوماتية رياضي ومنطقي وفيلسوف فرنسي
Giuseppe Peano	جيسيبو بيانو 1858-1932 رياضي إيسطالي أول من حاول صورنة علم الحساب
Gottfried Wilhelm Leibniz	جوتفريد فيلهلم لايبنيتس 1646-1716 رياضي فيلسوف عام وديبلوماسي ألماني يعتبر أول من فكر في المنطق بوصفة لغة رمزية كليا اكتشف حساب التفاضل والتكامل
Gottlob Frege	جوتلوب فريجه 1848-1925 فيلسوف ومنطقي ورياضي ألماني يعتبر أب المنطق المعاصر
gregory chaitin	جريجوري شايتن 1947- رياضي وعالم معلوماتيات أرجنتيني أميركي له اسهامات عديدة في الميتارياضيات والخوارزميات
Imannuel Kant	إيمانويل كانط 1724-1804 فيلسوف ألماني وأحد أهم منظري فلسفة الأنوار
Jean Paul Delahaye	جان بول ديلاهاي 1952- مختص في المعلوماتية رياضي ومنطقي وفيلسوف رياضي يشتغل على فلسفة الحساب والتعقيد
John Von Newmann	جون فان نيومان 1903-1957 رياضي وعام حواسيب ومهندس وفيزيائي مجري أميركي يعتبر أب أجهزة الحاسوب ومن منظري نظرية المجموعات
Pierre Wagner	بيار فاجنار 1963- فيلسوف ومنطقي فرنسي متأثر بكارناب يشتغل على اللغات الطبيعية واللغات الصورية
Stephen Cole Kleene	ستيفن كول كلين 1909-1994 رياضي أمريكي من تلامذة ألونزو تشورش من مؤسسي نظرية الدوال التراجعية في المنطق الرياضي

Thoralf Skolem	تورالف سكولم 1887–1963 رياضي نرويجي اشتغل على المنطق المعاصر
Wilhelm Ackermann	فيلهلم أكرمان 1896–19962 رياضي ومنطقي ألماني اشتهر باسهاماته في المنطق ودالة أكرمان

قائمة المصادر

والمراجع

1. باللغة العربية:

1. إدمون جوبلو. (1925). علم المنطق. (ترجمة: محمود اليعقوبي) باريس: مكتبة أرماند كولين.
2. إمانويل كانط. (1787). نقد العقل المحض. (ترجمة: موسى وهبه) بيروت: دار الإنماء القومي.
3. إمانويل كانط. (1787). نقد العقل المحض. (ترجمة: موسى وهبه) بيروت: دار الإنماء القومي.
4. أبو بكر خالد سعدالله. (2004). عمالقة الرياضيات. بوزريعة: دار هومه.
5. برتراند راسل، و ألفرد نورث وايتهد. (1903). أصول الرياضيات. (ترجمة: محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأعواني) مصر: دار المعارف.
6. روبير بلانشي. (بلا تاريخ). المنطق وتاريخه من أرسطو حتى راسل. (ترجمة: خليل أحمد خليل) الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
7. بيار فاقنار. (2011). ما هي نظرية النمذجة؟ تأليف بيار بيريي، و باسكال نوفال، مقالات في النمذجة وفلسفة العلوم (ترجمة: محي الدين الكلاعي، و عمران البخاري، الصفحات 315-337). تونس: المركز الوطني للترجمة.
8. جورج زيناتي. (2013). الفلسفة في مسارها. بيروت: دار الكتاب الجديد.
9. جيل دويك. (2018). المنطق. (ترجمة: عزالدين الخطابي) أبوظبي: دائرة الثقافة والسياحة.
10. دوني فرنان. (1986). مدخل إلى فلسفة المنطق. (ترجمة: محمود اليعقوبي) بروكسيل.
11. رشدي راشد. (2010). رياضيات الخوارزمي: تأسيس علم الجبر (المجلد 1). (ترجمة: نقولا فارس) بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية.

12. روبار بلانشي. (2004). الأكسيومية أو المنظومات الأولية. (ترجمة: محمود بن جماعة) صفاقس: محمد علي.

13. روبار بلانشي. (2004). المصادريات. (ترجمة: محمود اليعقوبي) الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

14. روبير بلانشي. (1968). المدخل إلى المنطق المعاصر. (ترجمة: محمود اليعقوبي) باريس: ديوان المطبوعات الجامعية.

15. زبيدة مونية بن ميسي. (2017). الرياضيات بنظرة فلسفية: على خطى كفاييس. قسنطينة.AlphaDoc

16. زكريا إبراهيم. (1963). كانط أو الفلسفة النقدية. القاهرة: مكتبة مصر.

17. عبدالواحد أبوحمدة. (1992). الجبــر. الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.

18. كانط, إ. (1991). مقدمة لكل ميتافيزيقا مقبلة يمكن أن تصير علما.(ترجمة ن إسماعيل).درار موفم للنشر

19. ماهر عبدالقادر. (1988). التطور المعاصر لنظرية المنطق. بيروت: دار النهضة العربية.

20. محمود زيدان. (1979). كانط وفلسفته النظرية. القاهرة: دار المعارف.

21. محمود فهمي زيدان. (1979). المنطق الرمزي نشأته وتطوره. بيروت: دار النهضة العربية.

22. ناجي هرماس. (2022). مقالات الأستاذ ناجي هرماس.

2.باللغات الأجنبية:

1. BAUER, A. (2017, July). FIVE STAGES OF ACCEPTING. Bulltein of the American Mathematical Society, 54(3), 481-498. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1090/bull/1556

2. Belna, J.-P. (2012, 05 01). Cantor et les nombres transfinis. Retrieved 05 05, 2022 from Bibnum: http://journals.openedition.org/bibnum/647

3. Biren, S. (2019, Mars). Preuve et logique intuitionniste : Les origines de la sémantique BHK. Montreal, Quebec, Canada.

4. Boole, G. (1847). The mathematical analysis of logic. Cambridge: Cambridge University Press.

5. Boole, G. (1854). An Investigation of the laws of thought. Cambridge: Macmillan and co.

6. Boolos, G., & Jeffrey, R. (2007). Computability and Logic. Cambridge: Cambridge University.

7. Bouleau, N., Girard, J.-Y., & Louveau, A. (1983). Cinq conférences sur l'indécidabilité. Paris: Presses Ponts et Caussées.

8. Cabbay, D. M., & Woods, J. (2009). Handbook of history of logic: From Russel to Church (Vol. 5). Amesterdam, Holland: Elsevier.

9. Cavaillès, J. (1938). Méthode axiomatique et formalisme. Paris: Hermann .

10. Chaitin, G. J. (2007). Thinking about Gödel and Turing Essays on Complexity, 1970-2007. Singapore: World Scientific.

11. Chaitin, G., Da Costa, N., & Antonio Doria, F. (2011). Gödel's Way: Exploits into an undecidable world. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group.

12. Church, A. (1956). Introduction to mathematical logic (Vol. 1). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

13. Couturat, L. (1901). La logique de Leibniz. Paris: Felix Alcan.
14. Couturat, L. (1905). Les principes des mathématiques. Paris: Librairie scientifique et technique.
15. Dalen, A. S. (1988). Constructivism in mathematics: An introduction (Elsevier Science ed., Vol. 2).
16. David, R., Nour, K., & Christophe, R. (2003). Introduction à la logique. Paris: Dunod.
17. Davignon, E. (2020, 02 06). Aux origines des mathématiques: Les elements. Paris, Mathématiques.
18. Delahaye, J.-P. (1995). Logique, informatique et paradoxes. Paris: Pour la science diffusion Berlin.
19. Delahaye, J. P. (2006). Complexités: Au limites des mathématiques et de l'informatique. Paris: BELIN Pour la science.
20. Delahaye, J.-P. (2012). La logique: un aiguillon pour la pensée. Paris: Berlin: pour la science.
21. Delessert, A. (1988). Introduction à la logique. Lausanne: Presse Polytechnique Romandes.
22. Dowek, G. (2007). Les métamorphoses du calcul: Une étonnante histoire de mathématiques. France: le pommier.
23. Dowek, G. (2009). Principles of programming languages. London: Springer.
24. Dowek, G. (2010). Les démonstrations et les algorithmes. Palaiseau: Ecole polytechnique.
25. Everest, G., & Thomas, W. (2000). An introduction to number theory. London: Springer.

26. Eves, H. (1990). Fundations and Fundamental Concepts of Mathematics (3 ed.). New York: Dover publications.
27. Feferman, S. (1998). In the light of logic. Oxford: Oxford University Press.
28. Frege, G. (1879). Begriffsschrift. Lubrecht & Cramer.
29. Gabbay, D. M., & Woods, J. H. (2004). Rise of modern logic: from Leibniz to Frege (Vol. 3). Holland: North Holland Publushing Co.
30. Grize, J.-B. (1972). Logique moderne. Paris: Mouton Gauthier-Villars.
31. Henderson, H. (2011). Alan Turing: Computing Genius and Wartime Code Breaker. Chelsea: Chelsea House Publishers.
32. Heyting, A. (1955). Fondement des mathématiques: intuitionnisme, téorie de la démonstration (Vol. 9). Paris, Louvain: Geuthier-Villars, E. Nauwelaerts.
33. Heyting, A. (1955). Fondement des mathématiques: intuitionnisme, théorie de la démonstration (Vol. 9). Paris, Louvain: Geuthier-Villars, E. Nauwelaerts.
34. Hodgkin, L. (2005). A history of mathematics from Mesopotamia to modernity. Oxford: Oxforde University Press.
35. Jolley, N. (1994). The Cambridge Companion to Leibniz. Cambridge: Cambridge University Press.
36. Kant, E. (1845). Critique de la raison pure (Vol. 1). (J. Tissot, Trad.) Paris: Librairie philosophique de Ladrange.

37. Kleene, S. C. (1971). introduction to metamathematics. Amsterdam: North Holland Publishing Company.

38. Kline, M. (1972). Mathematical thought from ancient to moderne times (Vol. I II III). Oxford: Oxford University Press.

39. Kneebone, G. T. (1963). Mathematical logic and foundation of mathematics an introductory survey . London: D. Van Nostrand Company Limited.

40. Knuth, D. E. (1997). The art of the computer programming. California: Addinson Wesley.

41. Krivine, J.-L. (1969). théorie axiomatique des ensembles. Paris: Presse Universitaires de France.

42. Largeault, J. (1998). La logique. Paris: PUF.

43. Mezghiche, M. (2016). Logique mathematique et calculabikite. Alger: Pages Bleues.

44. Murawski, R. (2010). Essays in the philosophy and history of logic and mathematics (Vol. 98). (P. s. humanities, Ed.) Amesterdam-Newyork: Rodopy.

45. Nagel, E., & James, R. (2001). Godel's proof. New York: New York university press.

46. Nahin, P. J. (2013). The logician and the engineer. New Jersey: Princeton University Press.

47. Pégny, M. (2022). Les deux formes de la thèse de Church-Turing et. Philosophia Scientiæ, 39-67.

48. Russel, B. (2005). A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz. London and New York: Routledge Taylor an Francis Group.

49. Smith, P. (2003). An introduction to Godel`s theorems. Cambridge: Cambridge university press.

50. Takeuti, G. (1987). Proof theory (Vol. 81). Oxford: Elsevier science publisher B. V.

51. Wagner, P. (1998). Machine en logique. Paris: PUF.

52. Wagner, P. (2002). Les philosophe et la science. Paris: Galimard.

53. Wagner, P. (2007). La logique. Paris: PUF.

54. Wang, H. (1996). A Logical Journey_ From Gödel to Philosophy. Cambridge: MIT press.

55. Wolper, P. (2006). Introduction à la calculabilité. Paris: Dunod.

3.القواميس والموسوعات:

1. Audi, R., & Audi, P. (2015). The Cambridge dictionary of philosophy (3 ed.). New York: Cambridge University Press.

2. Copeland, B. J. (2022, 12 15). The Church-Turing Thesis. Retrieved from The Stanford Encyclopedia of Philosophy: https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/church-turing/

3. Universalis.fr (2021, 08 17)

4.المجلات والدوريات:

باللغة العربية:

1. كمال هاملي. (2022). دور تكنولوجيا الإعلام والاتصال في ديداكتيكية الرياضيات ودمجها ضمن منهج سنغافورة: الطور الثانوي أنموذجا. (المحرر: جامعة بشار) الساورة للدراسات الانسانية والاجتماعية، 8(2)، 296-315.

باللغات الأجنبية:

1. Aaronson, S. (2011, 08 08). Why philosophers should care about computational complexity. Retrieved 11 02, 2021, from Semantic Scholar: http://www.Semanticscholar.org
2. Jordain, P. E. (1916). The logical work of Leibniz. In The monist (Vol. 26, pp. 504-523). Oxford: Oxford University Press. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27900607
3. Krivine, J. L. (2012, Janvier 19). Du programme de Hilbert aux programmes informatiques. Bordeaux, Universite Paris Diderot C. N. R. S.
4. Lombardi, H. (2021, 05 11). Epistemologie mathematique. Besancon, Franche comte, France. From Henry lombardi: http://hlombardi.free.fr/
5. Lombardi, H. (2021, 05 12). Nombres réels calculables selon Alan Turing. From Henri Lombardi: http://hlombardi.free.fr
6. 06, 2022, sur Université de Nante: http://www.caphi.univ-nantes.fr/IMG/pdf/nb_concept_Frege.pdf

5.الرسائل والأطاريح

1. Pégny, M. (2013). Sur les limites empiriques du calcul: calculabilité, complexité et physique.

6.المواقع الإلكترونية

1. Louapre, D. (2023, 01 15). Le théorème d'incomplétude de Gödel. Récupéré sur science étonnante: https://scienceetonnante.com/2013/01/14/le-theoreme-de-godel/
2. Coquery, E. (2023, 01 22). Cours logique - M´emo n˚3. Paris.
3. Murphy, P. A. (2022, 11 26). When Alan Turing and Ludwig Wittgenstein Discussed the Liar Paradox. From https://www.cantorsparadise.com/when-alan-turing-and-ludwig-wittgenstein-discussed-the-liar-paradox-3c2de0ff09d1
4. Ollivier, Y. (2023, 01 05). Le théorème de Gödel et ses non-interprétations. Récupéré sur Page Web de Yann Ollivier: http://www.yann-ollivier.org/goedel/goedel.php#tig
5. Python Complexité algorithmique. (2023, 03 15). Récupéré sur https://www.mathweb.fr: https://www.mathweb.fr/euclide/complexite-algorithmique/
6. Schmitz, F. (2000). Frege: du nombre au concept. Consulté le 04.12.2021
4. Théorème de complétude. (2022, 01 08). Récupéré sur Wikipedia:

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del

5. wikipedia. (2022, 10 03). Retrieved from Cantor's diagonal argument: https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument

فهرس الموضوعات

الملخص:

في محاولته لتأسيس الرياضيات، قدم كانتور نظرية المجموعات البسيطة التي أبانت عن مفارقات أدت إلى تشكل مدارس رياضية وفلسفية زادت من قوة الاستدلال الرياضي، كم أن عدم اتساق الهندسات أدى إلى ظهور أنساق رياضية جدية.

من جهة أخرى، لم تكن "مسألة البتية" التي طرحها هلبرت ضمن مسائلة الثلاث والعشرين مطلع القرن العشرين مسألة هامة وحاسمة فحسب، بل إنها كما صرح هلبرت نفسه قد رسمت بالفعل ملمح رياضيات القرن العشرين مؤسِّسَة بذلك منعرجا راديكاليا في تاريخها منهجا وموضوعا، ويمكن تقصي ذلك في الالتقاء التاريخي العام 1936 لمختلف المقاربات التي تبناها المناطقة والرياضيون لمحاولة حل "مسألة البتية" فأعادوا بذلك مساءلة أنماط البرهان الرياضي وانتهجوا طرائق حسابية جديدة أبانت في النهاية عن تكافئها، ودشن كل من تشورش، جودل وتورينج العصر الجديد للحساب إنه نظرية قابلية الحساب التي مهدت لظهور علم الحوسبة الذي غيرت نظرتنا للرياضيات، العلم، وعينا بذاتنا والعالم.

Abstract:

In his attempt to establish mathematics, Cantor presented simple set theory, which revealed paradoxes that led to the formation of mathematical and philosophical schools that increased the power of mathematical reasoning, and the inconsistency of geometries led to the emergence of new mathematical systems.

On the other hand, Hilbert's entscheidungsproblem was not only an important and decisive issue at the beginning of the twentieth century, but, as Hilbert himself stated, it had already drawn the feature of 20th-century mathematics, thereby drawing a radical, methodological and objectual tournament in its history, which could be explored in the 1936 general historical convergence of various approaches adopted by the logicians and mathematicians to try to resolve the entscheidungsproblem thus requesting for mathematical proof types and adopting new computational methods that ultimately demonstrated their equivalence Church, Godel and Turing launched the new age of computation, a theory of computability that paved the way for the emergence of computing science that changed our vision of mathematics, science, our autoconscience and the world.