

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématique



Mémoire de Fin D'étude

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Option : Méthodes et Modèles de Décision

Thème :

Sur la Programmation Linéaire Intuitionniste Floue

Réalisé par :

M^{elle} AICHOUCHE Nadia et M^{me} FRADI Sarah

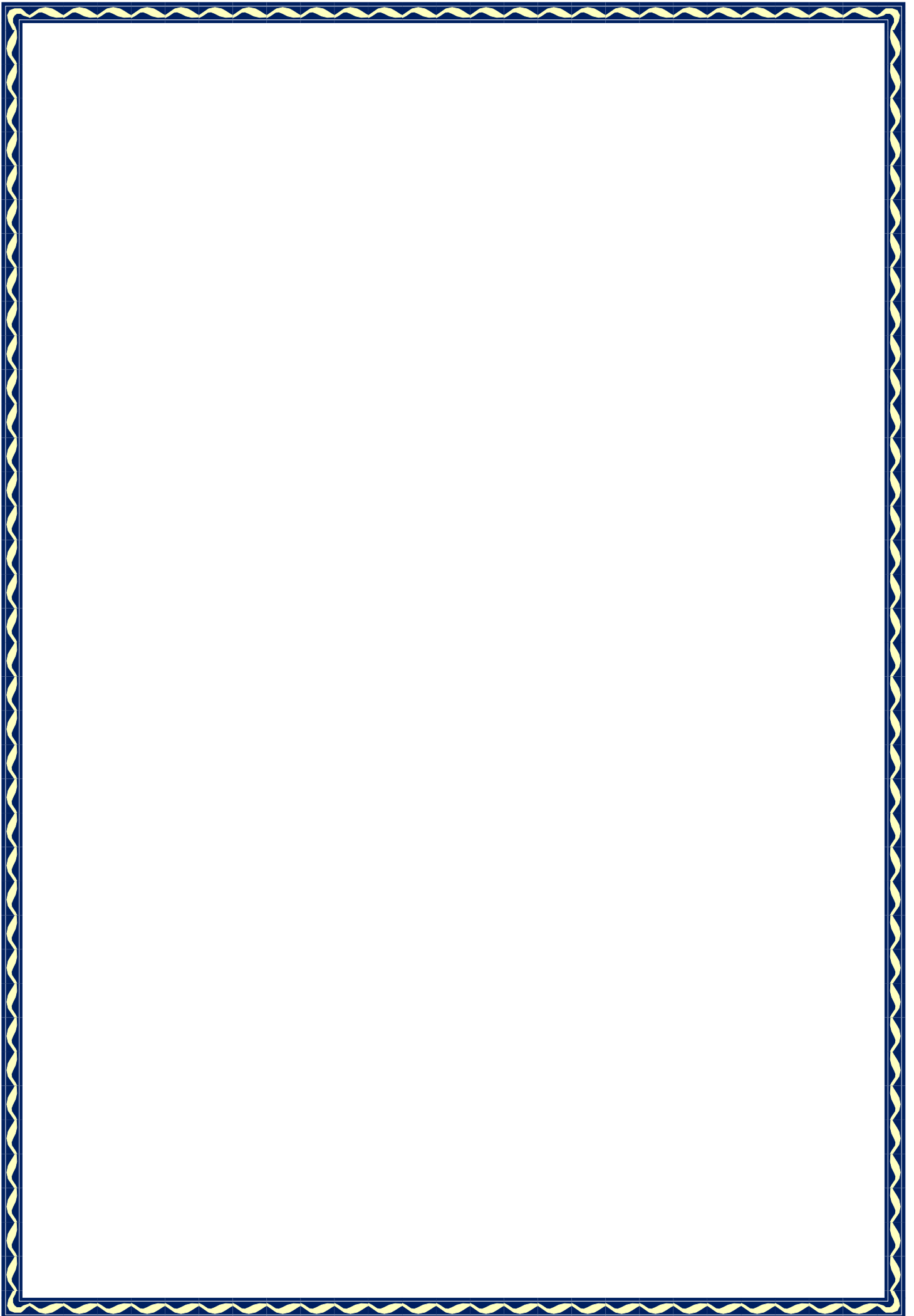
Devant le jury composé de :

M^{me} Achemine Farida MCA Examinatrice

M^{elle} Fahem Krifa MCB Examinatrice

M^{me} Bouarab Ouiza MCA Encadreur

Année universitaire 2020/2021



Dédicaces

Je remercie le Bon Dieu, le tout puissant de m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie cette thèse à :

Mes chers parents qui m'ont toujours comblé de leur amour, leur bonté et leur grande affection,

Mon frère Hamid et son épouse Ahlem,

Ma sœur Sonia et son mari Hocine,

Ma petite sœur Mélissa,

Toute ma grande famille,

Tous mes amis sans citer de noms,

Mes collègues de la promotion 2020-2021 de post-graduation.

Dédicaces

Je remercie le Bon Dieu, le tout puissant de m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie cette thèse à :

Mes chers parents qui m'ont toujours comblé de leur amour, leurs sacrifices, leur soutien
et leur dévouement tout au long de mes études,

Mon frère Amara,

Mes sœurs Karima et Lahna,

Mon époux pour son encouragement et sa famille,

Toute la famille FRADI et HAMRIOUI,

Ma chère Souad et sa famille,

Tous ceux qui aiment Sarah et ceux que Sarah aime ,

Mes collègues de la promotion 2020-2021 de post-graduation.

Remerciements

Nous remercions d'abord notre Bon Dieu qui nous a ouvert les portes du savoir et nous a permis de réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier M^{me} BOUARAB de nous avoir fait l'honneur d'être promotrice de cette thèse.

Nous avons eu un énorme plaisir de travailler avec elle.

Nous remercions les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

Nous souhaitons également remercier nos enseignants qui nous ont tenu et transmis le savoir , l'esprit de recherche et de persévérance dans nos études durant notre cursus.

Un grand merci à toutes les personnes qui nous ont soutenues de près ou de loin au cours de la réalisation de ce modeste travail.

Enfin , nous remercions chaleureusement nos chers parents pour tous leurs efforts. Nous espérons que leur fierté ne sera pas que celle de ce titre obtenu, mais surtout d'avoir fait de nous ce que nous sommes.

Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	4
Introduction générale	
1 Programmation Linéaire	8
1.1 Introduction	9
1.2 Définition d'un programme linéaire [6]	9
1.3 Éléments d'un modèle de (PL) [11]	9
1.4 Forme générale, canonique, standard, mixte et matricielle [11]	10
1.4.1 Forme générale	10
1.4.2 Forme canonique	11
1.4.3 Forme standard	11
1.4.4 Forme mixte	12
1.4.4.1 Propriétés	12
1.4.5 Forme matricielle	13
1.5 Modélisation [6]	13
1.5.1 Exemple de modélisation	13
1.6 Solution de base réalisable [6]	16
1.7 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables [6]	18
1.8 Méthode du simplexe [6]	19
1.8.1 Transformation à la forme standard	20
1.8.2 Algorithme du simplexe	22
1.8.2.1 Détermination d'une première solution	22
1.8.2.2 Amélioration d'une solution de base	23
1.8.2.3 Critère d'optimalité	30
1.8.2.4 Procédure de l'algorithme du simplexe	31
1.8.3 Méthode des tableaux du simplexe [11]	32
1.8.4 Organigramme de l'algorithme du simplexe [4]	36
1.8.5 Complexité de l'algorithme du simplexe [6]	37
1.8.6 Exemple numérique	37

1.9	Conclusion :	40
2	Concepts sur les nombres flous	41
2.1	Introduction	42
2.2	Préliminaires sur les ensembles flous [10]	42
2.2.1	Définitions des caractéristiques d'un ensemble flou [6] [10]	43
2.3	Nombre flou [6]	45
2.3.1	Opérations sur les ensembles flous	45
2.3.2	Nombre flou de type L-R [10]	47
2.3.2.1	Intervalle flou	48
2.3.3	Nombre flou de type triangulaire [6]	49
2.3.3.1	Opérations sur les nombres flous de type triangulaire	50
2.3.3.2	Comparaison de deux nombres flous triangulaires	51
2.3.4	Nombre flou de type trapézoïdal	51
2.3.4.1	Opérations sur les nombres flous de type trapézoïdal	52
2.3.4.2	Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux	53
2.4	Conclusion	53
3	Théorie des nombres flous intuitionnistes	54
3.1	Introduction	55
3.2	Ensemble flou intuitionniste [18]	55
3.2.1	Définitions des caractéristiques d'un IFS	55
3.3	Nombre flou intuitionniste	56
3.3.1	Définition d'un nombre flou intuitionniste	56
3.3.2	Opérations sur les ensembles flous intuitionnistes [3]	57
3.3.3	Nombre flou intuitionniste de type L-R [20]	58
3.3.4	Nombre flou intuitionniste triangulaire [14]	59
3.3.4.1	Opérations sur les nombres flous intuitionnistes triangulaires [8]	60
3.3.5	Nombre flou intuitionniste trapézoïdal [14]	61
3.3.6	Nombre flou intuitionniste trapézoïdal symétrique [1]	62
3.3.6.1	Opérations arithmétiques sur NFITrS [18]	63
3.3.7	Les règles de transformation d'un NFITr à un nombre flou, intervalle et nombre réel [14]	65
3.4	Conclusion	65
4	Programmation Linéaire Floue Intuitionniste (PLNFI)	66
4.1	Introduction	67
4.2	Fonction Ranking \mathfrak{R} [19]	67

4.3	Cas où le vecteur des coûts \tilde{c}^I est un nombre flou intuitionniste trapézoïdal symétrique [13]	68
4.3.1	Solution de base réalisable	69
4.4	Méthode du simplexe flou intuitionniste d'un problème de PLNFITrS	70
4.4.1	Détermination d'une première solution	70
4.4.2	Amélioration d'une solution de base	72
4.4.3	Critère d'optimalité	77
4.4.4	Tableau de simplexe flou intuitionniste d'un problème de (PLNFITrS)	78
4.4.5	Algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS)	79
4.4.6	Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation	81
4.4.7	Exemple numérique	82
4.5	Cas où les coefficients \tilde{c}^I , \tilde{A}^I et \tilde{b}^I sont flous intuitionniste trapézoïdaux symétriques	84
4.5.1	Exemple numérique	86
4.6	Cas où les coefficients \tilde{x}^I et \tilde{b}^I sont flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques [19]	89
4.6.1	Solutions de base réalisables floues intuitionnistes	90
4.7	Méthode du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLVFITrS)	91
4.7.1	Détermination d'une première solution	92
4.7.2	Amélioration d'une solution de base flou intuitionniste	93
4.7.3	Critère d'optimalité	98
4.7.4	Tableau du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLVFITrS)	99
4.7.5	Algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLVFI-TrS)	100
4.7.6	Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation	102
4.7.7	Exemple	103
4.8	Conclusion	105

Conclusion générale

Table des figures

1.1	Organigramme de l'algorithme du simplexe pour un problème de maximisation	36
2.1	Représentation d'un nombre flou de type L-R	48
2.2	Représentation d'un nombre flou plat de type L-R	49
2.3	Représentation d'un nombre flou triangulaire (a, α, β)	50
2.4	Représentation d'un nombre flou trapézoïdal $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$	52
3.1	Nombre flou intuitionniste triangulaire NFIT	60
3.2	Représentation d'un NFITr	62
3.3	Représentation d'un NFITrS	63
3.4	La règle de transformation sur les NFITr	65
4.1	Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste pour un problème (PLNFITrS) à maximisation	81
4.2	Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation	102

Introduction générale

La Programmation Linéaire est un outil très puissant qui est une partie essentielle de la Recherche Opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence différents dans des contextes divers. La programmation linéaire relève des mathématiques de la Recherche Opérationnelle et a des applications en gestion ainsi qu'en économie, en statistique, en physique, etc... Il s'agit d'un outil versatile et puissant, régulièrement cité par les entreprises comme étant l'un des dispositifs les plus utilisés et efficaces en Recherche Opérationnelle.

En mathématiques, le problème de Programmation Linéaire (PL) est un problème qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes. La programmation linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont une série d'équations et/ou d'inéquations linéaires. En effet, une fois qu'un problème est modélisé sous la forme d'équations linéaires, il existe une multitude de méthodes assurant la résolution du problème de manière exacte.

L'une des méthodes les plus connues pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire en nombres réels est la méthode classique du simplexe.

Cette méthode, qui a été conçue en 1963 par George Dantzig [5], reste d'actualité pour résoudre des problèmes de grande taille. Il s'agit d'une méthode algébrique robuste et efficace basée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Les fondements de la méthode du simplexe ont été énoncés en 1949 et publiés en 1959 par G. Dantzig.

Dans le cas où les données sont mal connues ou imprécises de nature floue, on parlera alors d'un programme linéaire flou qui consiste comme le meilleur outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement imprécis.

Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque Zadeh [21], professeur à l'université de Californie à Berkelya introduit la notion de sous-ensemble flou. A partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe, de catégorie aux limites mal définies, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien.

Atanassov (1999) [2] a introduit le concept d'ensemble flou intuitionniste en anglais Intuitionistic Fuzzy Set (IFS), qui est une généralisation du concept d'ensemble flou proposé par Zadeh (1965) [21]. Dans l'IFS, le degré de non-appartenance à un ensemble est également associé au degré d'appartenance à un ensemble. Contrairement à l'ensemble

fou où le degré de non-appartenance est pris comme un moins le degré d'appartenance c'est à dire $1 - \mu_{\bar{A}}(x)$, dans IFS, le degré d'appartenance et de non-appartenance sont plus ou moins dépendants et liés uniquement par le fait que la somme de deux degrés ne doit pas dépasser un c'est à dire $\mu_{\bar{A}}(x) + \nu_{\bar{A}}(x) \leq 1$.

Nehi (2010) [15] a proposé le concept de nombres flous trapézoïdaux (triangulaires) et aussi a proposé une méthode de classement des nombres flous intuitionnistes basée sur les valeurs caractéristiques de l'appartenance et les fonctions de non-appartenance à un nombre fou intuitionniste (IFN), par exemple :

- Logique classique : Soit il fait froid, soit il fait pas froid.
- Logique intuitionniste : On ne peut pas prouver qu'il fasse froid ou qu'il fasse pas froid.
- Logique floue : Soit il fait froid, soit il ne fait pas froid, soit il fait un peu froid.

avec "un peu" entre 0 et 1.

Dubey & Mehra (2011) [7] ont proposé une définition plus générale des nombres flous intuitionnistes triangulaires (TIFN) qui est définie dans (Li 2010) [12]. Parvathi & Malathi (2012 a) [16] ont introduit des nombres flous trapézoïdaux symétriques (STIFN) et a également proposé les opérations arithmétiques des STIFN.

Parvathi & Malathi (2012 b) [17] ont proposé la méthode du simplexe flou intuitionniste en utilisant la fonction de classement pour résoudre des problèmes de programmation linéaire flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques.

Cette thèse est organisée en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous parlerons de la programmation linéaire déterministe, nous donnerons un exemple de modélisation d'un problème réel sous forme d'un programme linéaire. Ainsi, nous exposerons les différentes formes d'un problème de programmation linéaire déterministe et la méthode permettant sa résolution qui est la méthode du simplexe classique de Dantzig.

Dans le deuxième chapitre, nous allons introduire la théorie des ensembles flous avec les définitions et les concepts de base.

Dans le troisième chapitre, nous allons introduire la théorie des ensembles flous intuitionnistes, avec les définitions et les concepts de base facilitant la compréhension du chapitre quatre.

Le quatrième chapitre, abordera la programmation linéaire floue intuitionniste dont le caractère est caractérisé par des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques sous trois cas différents :

- Cas 1 : où les coefficients du vecteur des coûts sont flous intuitionnistes ,
- Cas 2 : où le vecteur des coûts, la matrice de condition et le vecteur des contraintes sont flous intuitionnistes ,
- Cas 3 : où le vecteur des contraintes et le vecteur de décision sont flous intuitionnistes .

Puis nous exposerons la résolution de chacun des cas par la méthode du simplexe flou intuitionniste , basée sur l'utilisation de l'arithmétique des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques et les fonctions Ranking. Chaque cas est illustré par une application numérique détaillée.

Chapitre 1

Programmation Linéaire

1.1 Introduction

La Programmation Linéaire (PL) est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques et industriels par plusieurs méthodes. On se basera dans ce chapitre, sur la méthode la plus souple et la plus universelle qui est la méthode du simplexe qui fut proposée en 1940 par G. B. Dantzig [5], comme méthode de résolution générale des programmes linéaires. La solution optimale est approchée par étapes ou itérations successives. Chaque étape correspond au calcul de la valeur économique d'une solution. Comme il existe une infinité de solutions réalisables, la méthode propose de n'explorer qu'un nombre limité de solutions parmi lesquelles se trouve, à coup sûr, la solution optimale.

1.2 Définition d'un programme linéaire [6]

La programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

1.3 Éléments d'un modèle de (PL) [11]

Tout programme linéaire est formé de trois grandes parties :

1. **Variables de décision** : La première étape dans le processus de modélisation est d'identifier correctement toutes les variables du problème à valeurs non connues.
2. **Contraintes** : Il faut identifier tout genre de restriction (main d'œuvre, espace, budget, ...) qui peut limiter les valeurs que peuvent prendre les variables de décision. Chacune des équations et inéquations (contraintes) étant une combinaison linéaire du premier degré par rapport aux variables.
3. **Fonction objectif (économique)** : A chaque variable de décision qui a été identifiée dans le modèle correspond un coefficient économique indiquant la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif poursuivi. Par la suite, on pourra en déduire la fonction objectif que l'on veut optimiser (soit maximiser ou minimiser).

Exemple de problème linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}Z(x) = 10x_1 + 50x_2 + 90x_3 \\ \text{s.c } x_1 + x_2 + x_3 \leq 2100 \\ x_1 \geq 40 \\ 21x_2 + 35x_3 \geq 35 \\ 30x_1 + 40x_2 + 60x_3 \leq 228 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Avec :

$$\text{Max}Z(x) = 10x_1 + 50x_2 + 90x_3 \leftarrow \text{Fonction objectif}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{s.c } x_1 + x_2 + x_3 \leq 2100 \\ x_1 \geq 40 \\ 21x_2 + 35x_3 \geq 35 \\ 30x_1 + 40x_2 + 60x_3 \leq 228 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{array} \right\} \leftarrow \text{contraintes}$$

$$x_1, x_2, x_3 \leftarrow \text{Variables de décision}$$

En langage mathématique, on décrira de tels modèles en forme générale, canonique, standard ou mixte.

1.4 Forme générale, canonique, standard, mixte et matricielle [11]

1.4.1 Forme générale

Le modèle mathématique de programmation linéaire est présenté habituellement en termes suivants :

$$(PL) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(\text{Min})Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq = \geq) b_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ x_j (\leq = \geq) 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Ces différents éléments du modèle ont la signification suivante :

$Z(x)$: la valeur de la fonction objectif.

x_i : les variables de décision (inconnues) du modèle.

c_j : les coefficients des variables de la fonction objectif.

a_{ij} : les coefficients des variables des contraintes fonctionnelles.

b_i : les seconds membres des contraintes (quantités des ressources disponibles).

La notation ($\leq = \geq$) signifie que chaque contrainte possède l'un des trois signes mentionnés. Il y a m contraintes fonctionnelles, n contraintes des variables de décision et n variables. Optimiser un modèle de programmation linéaire, c'est déterminer les valeurs des diverses variables de décision devant respecter les contraintes fonctionnelles et des variables de décision qui maximisent (ou minimisent) la fonction objectif.

1.4.2 Forme canonique

Un programme canonique est soit de type I ou type II.

- **Type I** est un programme dans lequel les contraintes d'inégalités sont tournées dans le sens « inférieur ou égal \leq » et l'objectif est un maximum (Max).
- **Type II** a des contraintes d'inégalités tournées dans le sens « supérieur ou égal \geq » et l'objectif est un minimum (Min).

Avec la condition de non-négativité des variables de décision.

<i>TYPE I</i>	<i>TYPE II</i>
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min} Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n \end{array} \right.$

1.4.3 Forme standard

La forme standard d'un modèle de programmation linéaire doit respecter trois conditions :

Condition 1 : Les contraintes fonctionnelles sont exprimées sous forme d'équations linéaires(=).

Condition 2 : Le second membre des contraintes fonctionnelles (b_i) doit être non négatif.

Condition 3 : Toutes les variables doivent être non négatives.

Cette la forme standard est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max(Min)}Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sc} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \text{ pour } b_i \geq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Les contraintes fonctionnelles du modèle sont exprimées sous forme d'équations linéaires au lieu d'inéquations ; cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelles variables appelées variables d'écart.

On transforme une inéquation linéaire ayant un signe « \leq » en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite « variable d'écart ».

Dans le cas d'une inéquation de signe « \geq », on doit, pour la transformer en équation, soustraire une variable d'écart, également appelée dans ce cas « variable d'excédent ».

Donc tout programme linéaire général peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard .

1.4.4 Forme mixte

Parfois, les contraintes sont tournées les unes dans un sens, les autres dans le sens opposé, l'objectif pouvant être soit un minimum, soit un maximum. Mais on peut également avoir un mélange d'égalité (=) ou inégalité (\leq ou \geq) . Un tel programme est un programme mixte. Avec la condition de non-négativité des variables de décision.

1.4.4.1 Propriétés

On peut ramener les formes générales et mixtes à la forme standard ou à la forme canonique par les opérations élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} \text{Min}Z(x) &= -\text{Max} - Z(x) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i &\Leftrightarrow \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \text{ et } \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \right\} \\ x_j \leq 0 &\Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow \text{changement de variable } x'_j = -x_j \text{ dans le (PL)}. \end{aligned}$$

Si certaines variables n'ont pas de condition de signe, On pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

1.4.5 Forme matricielle

L'écriture matricielle d'un modèle de programmation linéaire est sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max (Min) } Z(x) = c^T x \\ \text{s.c } Ax (\leq = \geq) b \\ x (\leq = \geq) 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

$$\text{Avec : } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

1.5 Modélisation [6]

Un modèle mathématique est une traduction d'une observation dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel.

En Recherche Opérationnelle, modéliser un problème consiste à identifier :

Les variables intrinsèques.

Les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables.

L'objectif visé (optimisation).

1.5.1 Exemple de modélisation

Un agriculteur veut allouer 12 hectares de surface distribué entre cultures de tomates et celles de piments. Il dispose de 12 heures de main d'œuvre et de 16 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 4 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 6 dinars.

Le bureau du périmètre veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 6 hectares de tomates.

Question : Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Réponse : Le problème sera représenté par un modèle de Programme Linéaire (PL) . La formulation demande généralement une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir relever facilement les différentes composantes du problème et ainsi donner un programme qui modélise au mieux la situation réelle. Les composantes du problème sont représentées dans le tableau suivant par chaque hectare :

	Main d'œuvre (h)	Eau (m^3)	Bénéfice (DA)
Tomates	1	4	4
Piments	4	2	6

On sait que les éléments essentiels d'un (PL) sont : les variables de décision, les contraintes (fonctionnelles et de non-négativité) et la fonction objectif, pour cela nous suivons la démarche suivante pour construire le modèle, en cherchant, tout d'abord, les inconnues de cette situation (problème de maximisation du revenu de l'agriculteur) qui représentent les variables de décision, ensuite on cherche à déterminer l'ensemble de contraintes liées au processus qui sont écrites sous forme d'équations ou inéquations (d'ordre 1) en fonction des variables de décision. La dernière quantité à déterminer est celle de la fonction objectif.

a. Détermination des variables de décision (inconnues)

– Quelles sont les inconnues du problème de cet agriculteur ?

Les inconnues de cet agriculteur sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments.

– Combien de variables de décision doit-on définir ?

Le nombre de variables de décision est égal au nombre des inconnues de l'agriculteur. Bien que le nombre des inconnues soient égal à 2, donc le nombre de variables de décision est 2. Maintenant, on peut définir les variables de décision de la façon suivante :

x_1 : Représente la surface allouée à la culture des tomates.

x_2 : Représente la surface allouée à la culture des piments.

b. Détermination des contraintes

Quelles sont les restrictions (contraintes) associées au processus de l'agriculteur ?

Pour répondre à cette question, il faut identifier les restrictions de l'agriculteur :

- **Terrain** : L'agriculteur dispose de 12 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est : $x_1 + x_2 \leq 12$.
- **Eau** : La culture d'un hectare de tomates demande 4 m^3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2 m^3 mais l'agriculteur ne dispose que de 16 m^3 . La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est : $4x_1 + 2x_2 \leq 16$.
- **Main d'œuvre** : Les 12 heures de main d'œuvre seront départagées entre la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est : $x_1 + 4x_2 \leq 12$.
- **Bureau du périmètre** : Exige que l'agriculteur ne cultive pas plus de 6 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est : $x_1 \leq 6$.

Il y a donc 4 contraintes plus les contraintes de non-négativité qui exigent que les variables de décision doivent prendre des valeurs positives.

Ces contraintes se formulent de la façon suivante : $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

c. Détermination de la fonction objectif

- Que cherche l'agriculteur ? Quel type d'optimisation doit-on envisager ?

L'agriculteur cherche à maximiser ses bénéfices apportés par la culture de tomates et de piments. Le type d'optimisation est : *Maximisation*.

- Combien de coefficients économiques apparaîtront dans la fonction objectif ?

Deux coefficients, un pour chaque variable de décision.

Pour déterminer les valeurs des coefficients économiques, il faut tenir de l'information économique concernant les coûts standards, les frais variables et le prix de vente de chaque modèle.

La fonction objectif a la forme suivante : $MaxZ(x) = c_1x_1 + c_2x_2$

D'où

c_1 : représente le bénéfice de la tomate = 4.

c_2 : représente le bénéfice de piment = 6.

La fonction objectif est donc : $MaxZ(x) = 4x_1 + 6x_2$.

Alors le nombre optimal d'hectares à culture en tomates et piments peut être exprimé comme un programme linéaire suivant :

$$(PL) \left\{ \begin{array}{l} MaxZ(x) = 4x_1 + 6x_2 \\ s.c \ x_1 + x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

1.6 Solution de base réalisable [6]

Soit un problème de programmation linéaire sous la forme standard défini comme suit :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} maxZ(x) = c^T x \\ s.c \ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où

$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Définition 1.1 Solution réalisable

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution réalisable du problème (P) si et seulement si x satisfait les contraintes du problème c'est à dire $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Hypothèse

On suppose que la matrice A est de taille $m \times n$ avec $\text{rang}(A) = m \leq n$.

On rappelle que le rang de A est le nombre maximal de lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendantes.

On rappelle aussi qu'un ensemble de m vecteurs a_i sont linéairement indépendants si les seules valeurs k_i qui permettent de satisfaire l'expression

$$\sum_{i=1}^m a_i k_i = 0 \text{ sont } k_i = 0, i = 1, \dots, m.$$

Définition 1.2 *Ensemble des indices de base*

Soit $R \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\text{card}(R) = m$ tel que les colonnes a_j pour ($j \in R$) de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes a_j pour ($j \in R$) est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base.

- Les variables $x_B = (x_j, j \in R)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $x_E = (x_j, j \notin R)$ sont appelées variables hors-base.

Remarque 1.1

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, E)$ où B est appelée matrice de base et E matrice hors base et

$x = (x_B, x_E)^T$ où x_B les variables de base et x_E les variables hors base.

Définition 1.3 *Solution de base réalisable*

On dit que $x = (x_B, x_E)^T$ est une solution de base associée à la base R si elle vérifie $Ax = b$ avec $x_B = B^{-1}b$ et $x_E = 0$.

Si en plus, $x_B \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

Remarque 1.2

Un programme linéaire admet au plus C_n^m solutions de base.

Définition 1.4 *Solution dégénérée et non dégénérée*

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B > 0$.

Si au moins, une composante $x_B = 0$ alors x est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

1.7 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables [6]

On note

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} \quad (1.6)$$

l'ensemble des solutions réalisables du problème (P) sous forme standard.

Définition 1.5 *Ensemble convexe*

On dit que l'ensemble S est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in S \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

Définition 1.6 *Combinaison linéaire convexe*

Un vecteur $y \in S$ est une combinaison linéaire convexe des points $\{x_1, \dots, x_n\}$ s'il existe des coefficients réels $\lambda_i, i \in [1, \dots, n]$, tels que :

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \text{ avec } \lambda_i \geq 0, \forall i \in [1, \dots, n] \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Définition 1.7 *Polyèdre et Polytope*

Soient les ensembles suivants :

— L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}$ représente un hyperplan de \mathbb{R}^n ;

— L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$ représente un demi-espace fermé de \mathbb{R}^n dont l'hyperplan correspondant constitue la frontière.

1. Un polyèdre S est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans. Un polyèdre est un ensemble convexe fermé.
2. Un polyèdre S est borné s'il existe une valeur α finie et positive telle que :

$$|x_j| \leq \alpha \quad \forall j \in [1, \dots, n] \text{ et } \forall x \in S.$$

3. Un polytope est un polyèdre borné et non vide.

Définition 1.8 *Point extrême*

Soit S un convexe non vide de \mathbb{R}^n , x est dit point extrême ou sommet de S si pour $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $\forall x_1, x_2 \in S$ et $\lambda \in]0, 1[$ alors $x = x_1 = x_2$.

Proposition 1.1.

L'ensemble D_R des solutions réalisables de (P) est un polyèdre convexe et fermé.

Théorème 1.1.

x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de D_R .

Théorème 1.2.

L'optimum de la fonction objectif $Z(x)$ sur D_R , s'il existe, est atteint en au moins un sommet de D_R .

1.8 Méthode du simplexe [6]

La méthode du simplexe est une méthode efficace pour résoudre les problèmes linéaires. Elle peut s'appliquer peu importe le nombre de variables dans le modèle. Le principe de résolution nécessite un certain nombre d'étapes contenu au travers de l'algorithme du simplexe dont la démarche est la suivante :

1. Déterminer une première solution de base réalisable, cette solution initiale sert de départ au changement vers la solution optimale (si elle existe).

2. Si la solution obtenue en 1 n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

1.8.1 Transformation à la forme standard

La méthode de résolution que nous employons nécessite que les contraintes fonctionnelles du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires (forme standard) au lieu d'inéquations. Cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelle variable appelée variable d'écart.

Transformation d'une inéquation de signe plus petit ou égal (\leq) :

Toute contrainte de la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (1.7)$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j x_j + s = b \\ s \geq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $s = b - \sum_{j=1}^n a_j x_j$ est appelée variable d'écart

Transformation d'une inéquation de signe plus grand ou égal (\geq)

Toute contrainte de la forme :

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \quad (1.9)$$

peut être remplacée par un système de contraintes suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_j x_j - s = b \\ s \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où $s = \sum_{j=1}^n a_j x_j - b$ est appelée variable d'écart.

Coefficient des variables d'écart :

Les variables d'écart représentent des activités fictives et pour assurer qu'elles ne perturbent pas la fonction objectif, nous supposons nuls les coûts ou bénéfices associés à ces variables.

Forme standard d'un modèle de programmation linéaire :

La résolution d'un programme linéaire par la méthode du simplexe est basée sur la représentation du problème en forme standard.

Considérons le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(\text{Min})Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Sa forme standard est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(\text{Min})Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s = b_i, \quad 1 \leq i \leq m \\ x_j \geq 0; s \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (1.12)$$

1.8.2 Algorithme du simplexe

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un (PL) sous forme standard, la matrice A peut s'écrire

$$A = (B, E)$$

avec B une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible, correspondant aux variables de base et E une matrice de taille $m \times (n - m)$, correspondant aux variables hors-base. On décompose également le vecteur de décision :

$$x = (x_B, x_E)$$

avec x_B les variables de bases et x_E les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base R^* et une solution de base x^* associée telles que :

$$Z(x^*) > Z(x) \text{ (} x^* \text{ est meilleur que } x \text{)}.$$

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (variable sortante).

1.8.2.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire sous forme standard suivante :

$$\begin{cases} \max Z(x) = cx \\ \text{s.c } Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

où A est une matrice de dimension $m \times n$, b un vecteur colonne comportant m lignes.

On peut construire à partir de la matrice A , deux sous matrices, $A = (B, E)$.

De même le vecteur x (vecteur de décision) est décomposé comme suit :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix} \text{ où } x_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} \text{ et } x_E \text{ pour les } (n - m) \text{ variables restantes.}$$

L'expression $Ax = b$ peut alors s'écrire : $Ax = (B, E) \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix} = b$

$$\Rightarrow Ax = Bx_B + Ex_E = b \quad (1.14)$$

Multiplions l'expression par B^{-1} , l'inverse de B .

On obtient :

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

avec $B^{-1}B = I$ (identité d'ordre m) d'où

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

En annulant x_E , la solution de base est alors

$$x_B = B^{-1}b \quad (1.15)$$

On obtient une solution de base réalisable de départ si $x_B \geq 0$ (la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

1.8.2.2 Amélioration d'une solution de base

A partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable (hors-base) en variable de base (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

1- Détermination de la variable entrante

.Calcul des coûts réduits

Formalisons l'expression de $Z(x)$ pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base. Nous savons que :

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b \quad (1.16)$$

alors

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E \quad (1.17)$$

$$Z = c_Bx_B + c_Ex_E$$

$$\Rightarrow Z(x) = c_B(B^{-1}b - B^{-1}Ex_E) + c_Ex_E$$

$$\Rightarrow Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_E - c_BB^{-1}E)x_E$$

E constitué de vecteurs hors base (notons ces vecteurs par a_j) dont les indices de ces vecteurs sont autres que ceux des vecteurs dans la base. Identifions cet ensemble d'indices par N et par x_j , les variables correspondant aux vecteurs a_j .

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire alors

$$B^{-1}E = \sum_{j \in N} B^{-1}a_j \quad (1.18)$$

on a donc

$$Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_E - c_BB^{-1}E)x_E$$

$$Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_Ex_E - c_BB^{-1}Ex_E)$$

Notons $Z_0(x) = c_BB^{-1}b$, cette dernière expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
Z(x) &= Z_0(x) + \sum_{j \in N} c_j x_j - \sum_{j \in N} c_B B^{-1} a_j x_j \\
\Rightarrow Z(x) &= Z_0(x) + \sum_{j \in N} (c_j - c_B B^{-1} a_j) x_j \\
\Rightarrow Z(x) &= Z_0(x) + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) x_j \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Le vecteur

$$Y_E = c_E - c_B B^{-1} E$$

qui se compose de

$$Y_J = c_j - z_j \tag{1.20}$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$z_j = c_B B^{-1} a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base.

Notons par $u_j = B^{-1} a_j$ (ces vecteurs u_j seront les nouveaux éléments sous les variables x_j dans le tableau du simplexe, dans le tableau de départ les u_j sont les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

- Si les coûts réduits sont tous négatifs c'est-à-dire $Y_J = c_j - z_j \leq 0$ (pour toutes les variables hors base), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $Z(x)$: l'algorithme se termine, est on a trouvé la solution de base réalisable *optimale*.
- Dans le cas contraire s'il existe $j \in N$ avec N l'ensemble des indices des variables hors base telle que $Y_J = c_j - z_j > 0$, dans ce cas on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable qui a le coût réduit positif le plus grand possible.

Pour introduire une variable dans la base, que l'optimisation en soit une maximisation ou minimisation, on suit le critère suivant :

Critère d'entrée d'une variable dans la base

A partir d'une solution de base réalisable, calculer pour toutes les variables hors base, la quantité $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B u_j$, puis les $c_j - z_j$.

- **Maximisation**

La variable x_r est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $c_j - z_j$ c'est à dire :

$$c_r - z_r = \max_{j \in N} \{c_j - z_j / c_j - z_j > 0\}. \quad (1.21)$$

- **Minimisation**

Dans ce cas, la variable x_r est introduite d'après :

$$c_r - z_r = \min_{j \in N} \{c_j - z_j / c_j - z_j < 0\}. \quad (1.22)$$

Remarque :

a) Les $c_j - z_j = 0$ pour toutes les variables de base.

En effet, $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B u_j = c_j$, le vecteur u_j étant alors un vecteur identité.

b) La valeur de x_r est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de la base que nous traitons ci-après.

2-Détermination de la variable sortante

Une fois que la variable x_r est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_r jusqu'à annuler une variable de base. Cette variable sera alors la variable sortante.

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Ex_E = b$$

La solution de base x_B sera modifiée selon l'expression

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_r x_r$$

$$\Rightarrow x_B = \bar{b} - u_r x_r \tag{1.23}$$

$\bar{b} = B^{-1}b$ et $u_r = B^{-1}a_r$ où (les éléments du tableau sous le vecteur a_r).

Il faut que , $x_B \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ pour que la nouvelle solution de base soit réalisable c-à-d

$$x_{B1} = \bar{b}_1 - u_{1r} x_r \geq 0$$

$$x_{B2} = \bar{b}_2 - u_{2r} x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{Bk} = \bar{b}_k - u_{kr} x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{Bm} = \bar{b}_m - u_{mr} x_r \geq 0$$

Discutons sur le signe de $u_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $u_{ir} \leq 0$, la quantité $u_{ir} x_r$ sera négative et x_{Bi} augmentera à mesure que x_r augmentera. Donc on peut augmenter x_r autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base x_{Bi} . Dans ce cas la solution est non bornée : en faisant tendre x_r vers l'infini, $Z(x)$ tend vers l'infini. Dans ce cas l'algorithme s'arrête.

- Si $u_{ir} > 0$, alors $u_{ir}x_r$ sera une quantité positive et x_{Bi} réduira à mesure que x_r augmentera. Pour s'assurer de maintenir une solution réalisable (et de rendre nulle une variable qui est actuellement dans la base) . x_r s'arrêtera d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de x_{Bi} pour tout i , on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\frac{\bar{b}_i}{u_{kr}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

Critère de sortie d'une variable de la base

Sachant que la variable entrante dans la base est x_r , la variable x_k sort de la base d'après :

$$\frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}, u_{ir} > 0 \right\} \quad (1.24)$$

La nouvelle valeur de la variable de base est $x_r = \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme u_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution réalisable de base.

Soit R^* la nouvelle base obtenue et x^* sa solution de base associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif sera donnée par :

$$\begin{aligned} Z(x) &= Z_0(x) + x_r(c_r - z_r) \\ \Rightarrow Z(x) &= Z_0(x) + \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}(c_r - z_r) \end{aligned} \quad (1.25)$$

et comme la solution n'est pas dégénérée ($\bar{b}_k > 0$) et puisque $c_r - z_r > 0$ (problème de maximisation)

par conséquent, la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée c'est-à-dire :

$$Z(x) > Z_0(x).$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable améliorant $Z(x)$. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

3- Détermination des nouvelles valeurs des variables de base

Pour déterminer les nouvelles valeurs des variables de base, on procède comme suit :

- On remplace $x_r = \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}$ par sa valeur dans la relation

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - u_{ir}x_r, \quad i = 1 \dots m \quad (1.26)$$

- On obtient alors les nouvelles valeurs pour les variables de base

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - \frac{u_{ir}}{u_{kr}}\bar{b}_k, \quad i = 1 \dots m \quad (1.27)$$

et toutes les autres variables x_j sont nulles ($j \in N$).

On notera que $x_{Bk} = \bar{b}_k - u_{kr}x_r = \bar{b}_k - \frac{u_{kr}}{u_{kr}}\bar{b}_k = 0$ (variable sortante x_k).

Remarque :

On peut maintenant exprimer la nouvelle valeur de la fonction objectif ainsi que tous les $c_j - z_j$ en fonction de la nouvelle quantité pour la variable qui entre dans la base comme suit :

En considérant que la variable entrante est x_r , la variable sortante est x_k et que le pivot est u_{kr} , on a :

Nouvelle valeur de $Z(x) = \text{Ancienne valeur de } Z(x) + \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}(c_r - z_r)$

$$\hat{Z}(x) = Z + \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}(c_r - z_r) \quad (1.28)$$

De la même façon, les z_j sont ajustés comme suit, à partir de la ligne pivot :

Nouvelle valeur de $z_j = \text{Ancienne valeur de } z_j + \frac{u_{kj}}{u_{kr}}(c_r - z_r)$

$$\hat{z}_j = z_j + \frac{u_{kj}}{u_{kr}}(c_r - z_r) \quad (1.29)$$

l'amélioration de la fonction objectif s'écrit alors :

$$c_j - \hat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{u_{kj}}{u_{kr}}(c_r - z_r) \quad (1.30)$$

Ces relations seront particulièrement utiles dans la systématisation de l'algorithme à l'aide des tableaux du simplexe.

1.8.2.3 Critère d'optimalité

• Cas d'une maximisation :

Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base.

On a

$$c_j - z_j \leq 0 \quad (1.31)$$

• **Cas d'une minimisation :**

Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base .

On a

$$c_j - z_j \geq 0 \quad (1.32)$$

Remarque :

• **Cas d'absence de solution optimale finie :**

Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour $Z(x)$ si :

- Pour une maximisation , s'il existe $c_j - z_j > 0$ pour une variable hors base x_j et tous les $u_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $Z(x) \rightarrow +\infty$

- Pour une minimisation , s'il existe $c_j - z_j < 0$ pour une variable hors base x_j et tous les $u_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $Z(x) \rightarrow -\infty$

• **Solution optimale unique :**

Une solution de base réalisable est optimale et unique si, pour les variables hors base :

– Dans le cas d'une maximisation tous les $c_j - z_j < 0, \forall j \in N$,

– Dans le cas d'une minimisation tous les $c_j - z_j > 0, \forall j \in N$.

• **Solution optimale multiple :**

Il existe une infinité de solutions optimales.

– Si pour une variable hors base $c_j - z_j = 0$.

En effet, s'il y a un terme $u_{ij} > 0$ sous le vecteur a_j on peut introduire a_j dans la base et obtenir une autre solution de base optimale.

1.8.2.4 Procédure de l'algorithme du simplexe

Dans le cas d'une fonction objectif à maximiser

Étape initiale

Poser $x_E = 0$ et déterminer la solution de base réalisable initiale $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$ et l'objectif $z = c_B B^{-1}b = c_B \bar{b}$.

Étape principale

1. Calculer $c_j - z_j$ avec $z_j = c_B u_j = c_B B^{-1}a_j$, pour toutes les variables hors base. si tous les $c_j - z_j \leq 0$, alors stop ; la solution actuelle est la solution optimale. sinon, choisir la variable entrante selon le critère

$$\max_{j \in N} \{c_j - z_j / c_j - z_j > 0\} = c_r - z_r \quad (\text{variable entrante } x_r) \quad (1.33)$$

2. Calculer $u_{ij} = B^{-1}a_j$

si $u_{ij} < 0$ alors stop ; le problème a une solution infinie.

sinon, choisir la variable qui doit quitter la base selon le critère

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}, u_{ir} > 0 \right\} = \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} \quad (\text{variable sortante } x_r). \quad (1.34)$$

3. A partir de la nouvelle base, déterminer B^{-1} ; $x_B = B^{-1}b$ et $Z(x) = c_B B^{-1}b$ et on passe à l'étape 1.

1.8.3 Méthode des tableaux du simplexe [11]

On peut structurer toutes les informations de la méthode algébrique dans un tableau du simplexe où les expressions matricielles peuvent être représentées comme suit :

c_B	c_j	c_1	c_2	$\dots\dots\dots$	c_n	Solution de base $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$
	Variable de base	x_1	x_2	$\dots\dots\dots$	x_n	
c_{B1}	x_{B1}	u_{11}	u_{12}	$\dots\dots\dots$	u_{1n}	Valeur de x_{B1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
c_{Bm}	x_{Bm}	u_{m1}	u_{m2}	$\dots\dots\dots$	u_{mn}	Valeur de x_{Bm}
	$c_j - z_j$	$c_1 - z_1$	$c_2 - z_2$	$\dots\dots\dots$	$c_n - z_n$	valeur de $Z(x)$

Où

$c_{B1}, c_{B2}, \dots, c_{Bm}$: sont les coefficients économiques de variables de base.

$x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm}$: sont les variables de base.

Les lignes de 1 à m sont les éléments du tableau.

u_{ij} éléments du tableau obtenu après chaque opération de pivotage.

La ligne $m + 1$ est la ligne du tableau $c_j - z_j$ dont celles associées au variable de base sont nulles.

Pour déterminer, à chaque itération, la solution de base et les différents éléments du tableau (les ij , $Z(x)$ et les $c_j - z_j$, nous nous servons les différentes expressions algébriques qui ont été obtenues par la méthode matricielle. Cette procédure de calcul s'appelle opération de pivotage.

Supposons que x_r devient une variable de base (variable entrante) et que devient une variable hors base (variable sortante), l'opération de pivotage consiste à :

1- Diviser les éléments de la ligne k par le pivot u_{kr} :

$$\hat{x}_{Bk} = \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} \hat{x}_{Bk} : \text{Est la valeur de la variable entrante } x_r$$

$$\hat{u}_{kj} = \frac{u_{kj}}{u_{kr}}, j = 1, 2, \dots, n$$

2- Pour les lignes $i = 1, 2, \dots, m, i \neq k$ du tableau, ajuster les valeurs de la ligne i en additionnant à cette ligne, $-u_{ir}$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne k .

$$\hat{u}_{ij} = u_{ij} - u_{ir}\hat{u}_{kj} = u_{ij} - u_{ir}\frac{u_{kj}}{u_{kr}},$$

avec $\hat{u}_{kr} = 1$ \hat{u}_{ij} : Nouvelles valeurs de la ligne i du tableau.

à $j = r, \hat{u}_{ir} = 0$, pour $i = 1, 2, \dots, m, i \neq k$ et $\hat{u}_{kr} = 1$

a_r : devient un vecteur de la base.

$$\hat{x}_{Bi} = x_{Bi} - u_{ir}\frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} = \bar{b}_i - u_{ir}\frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}$$

\hat{x}_{Bi} : Nouvelles valeurs de variable de base (de la solution).

3- Effectuer une mise à jour de la ligne $c_j - z_j$ en additionnant à cette ligne $-(c_r - z_r)$ multipliée par les éléments de la nouvelle ligne $k, \frac{u_{kj}}{u_{kr}}$

$$c_j - \hat{z}_j = (c_j - z_j) - \frac{u_{kj}}{u_{kr}}(c_r - z_r)$$

On notera que pour les variables de base $c_j - z_j = 0, j \in E_B$.

4- la mise à jour de $Z(x)$ s'obtient de :

$$\hat{Z}(x) = Z(x) + \frac{\bar{b}_k}{u_{kr}}(c_r - z_r)$$

Les calculs des éléments \bar{b}_i, u_{ij} , $Z(x)$ et $c_j - z_j$ s'obtiennent rapidement selon la règle du rectangle avec la formule :

**Nouvelle valeur = Ancienne valeur - (produit des éléments dans
les coins opposés / le pivot)**

1.8.4 Organigramme de l'algorithme du simplexe [4]

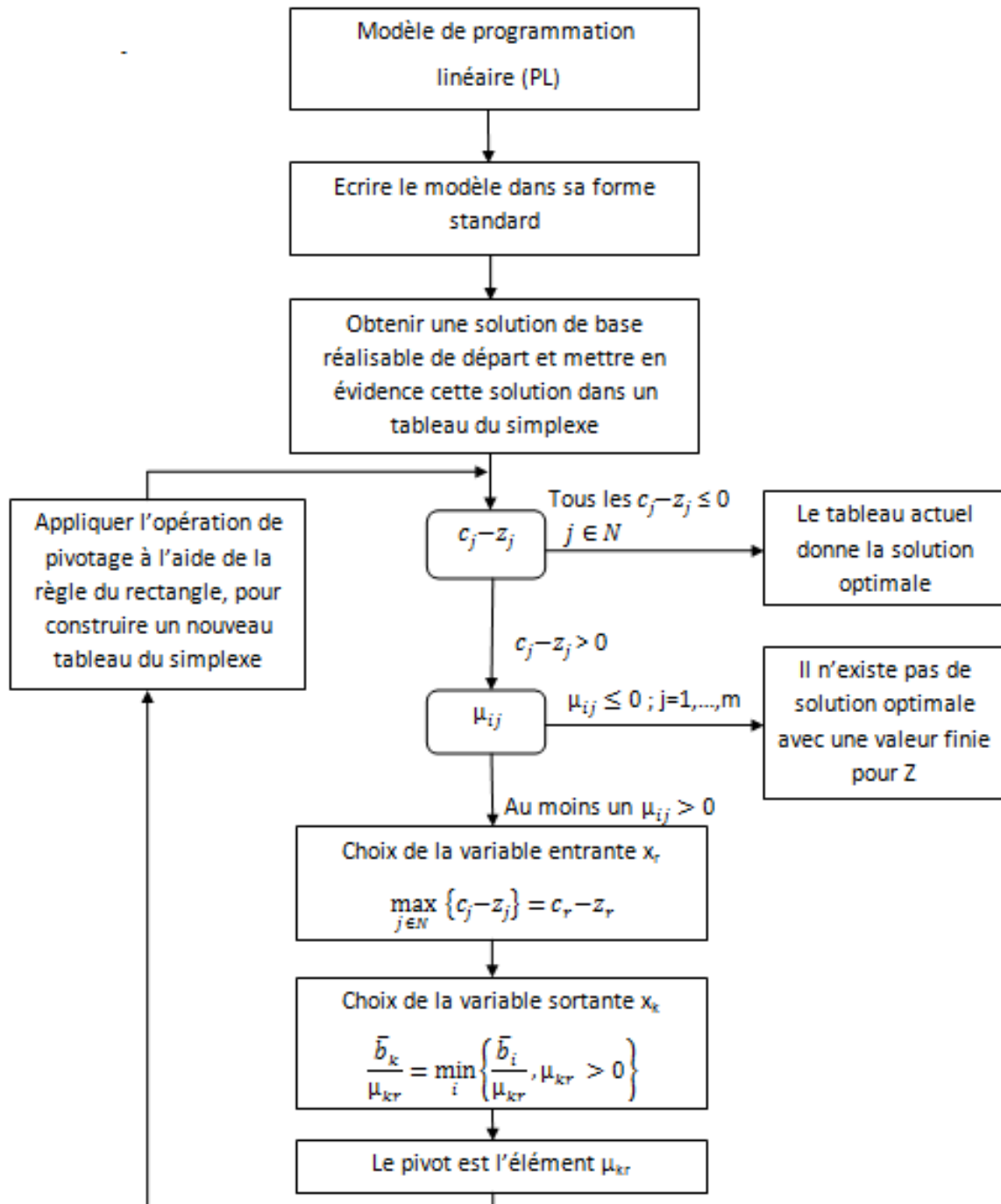


FIGURE 1.1 – Organigramme de l'algorithme du simplexe pour un problème de maximisation

1.8.5 Complexité de l'algorithme du simplexe [6]

La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires qu'il doit effectuer pour mener à bien un calcul en fonction de la taille des données d'entrée. L'efficacité d'un algorithme est mesurée par l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre des données.

Nous avons donc deux éléments à prendre en compte :

- La taille des données.
- Le temps de calcul.

L'évaluation de la complexité d'un algorithme est l'étude du nombre maximal d'opérations élémentaires qu'il nécessite dans le pire des cas. Kelle et Miny (1972) ont construit des problèmes nécessitant l'examen d'un nombre de sommets croissants exponentiellement en fonction de la taille du problème (contraintes et variables). Il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel, en particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes. Alors la complexité de la méthode du simplexe est donc exponentielle.

1.8.6 Exemple numérique

Énoncé

Un ébéniste fabrique des bureaux sous forme standard ou luxe. Des études de marché ont montré que pour l'année à venir, les possibilités de vente s'élèvent à 200 unités pour le modèle luxe et à 300 unités pour le modèle standard. L'approvisionnement en bois est suffisant pour fabriquer annuellement 600 bureaux quel que soit le type. Par ailleurs, le temps de fabrication d'un modèle luxe est le double de celui d'un bureau de modèle standard. La capacité annuelle de fabrication est telle que, si tous les bureaux fabriqués étaient de type standard, on pourrait en fabriquer 800 au maximum. La vente d'un bureau sous le modèle luxe conduit à une marge unitaire sur un coût variable égale à 8, celle d'un bureau de type standard égale à 4. On se propose de rechercher le programme annuel de fabrication conduisant au profit global maximum.

Mise en équations

Soit x_1 le nombre de bureaux de type luxe, x_2 le nombre de bureaux de type standard. Le programme linéaire est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z(x) = 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c } x_1 \leq 200 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 600 \\ 2x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.35)$$

Écrivons le modèle dans sa forme standard en ajoutant les variables d'écart x_3, x_4, x_5, x_6 .

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z(x) = 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c } x_1 + x_3 = 200 \\ x_2 + x_4 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 600 \\ 2x_1 + x_2 + x_6 = 800 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6 \end{array} \right. \quad (1.36)$$

On obtient alors un système d'équations comportant $n = 6$ inconnues et $m = 4$ contraintes.

On obtient une solution de base en annulant $(6 - 4) = 2$ variables.

On s'assure d'une solution de base réalisable en annulant les variables x_1, x_2 :

$$x_3 = 200, x_4 = 300, x_5 = 600, x_6 = 800.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le premier tableau du simplexe.

Tableau 1 : Solution de départ

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.R
1	x_3	1	0	1	0	0	0	200
2	x_4	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	1	1	0	0	1	0	600
4	x_6	2	1	0	0	0	1	800
0	$c_j - z_j$	8	4	0	0	0	0	0

Les variables hors base sont x_1, x_2 .

Appliquer le critère d'entrée et de sortie d'une variable.

$$\max \{c_j - z_j\} = \max \{c_1 - z_1, c_2 - z_2\}$$

$$= \max \{8, 4\} = 8 \rightarrow \text{variable entrante } x_1$$

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}, u_{ir} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{i1}}, u_{i1} \right\}$$

$$= \min \left\{ 200, 600, \frac{800}{2} \right\} = 200 = \frac{\bar{b}_1}{u_{11}} \rightarrow \text{variable sortante } x_3$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur sera 200, la variable sortante x_3 est ($k = 1$) et le pivot $u_{11} = 1$.

Ce calcul s'indique habituellement sur le tableau 2 suivant :

Tableau 2

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.R
1	x_1	1	0	1	0	0	0	200
2	x_4	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	0	1	-1	0	1	0	400
4	x_6	0	1	-2	0	0	1	400
0	$c_j - z_j$	0	4	-8	0	0	0	1600

Le tableau 2 n'est pas optimal puisque $c_2 - z_2 = 4 > 0$

On applique les mêmes critères d'entrée et de sortie d'une variable on obtient :

la variable entrante : x_2 , la variable sortante : x_4 , le pivot : $u_{22} = 1$

En pivotant sur $u_{22} = 1$,

on obtient le tableau 3 suivant :

Tableau 3

Ligne	Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	S.B.R
1	x_1	1	0	1	0	0	0	200
2	x_2	0	1	0	1	0	0	300
3	x_5	0	0	-1	-1	1	0	100
4	x_6	0	0	-2	-1	0	1	100
0	$c_j - z_j$	0	0	-8	-4	0	0	2800

Le tableau 3 est optimal puisque tous les $c_j - z_j$ pour les variables hors base sont négatifs

$$c_3 - z_3 = -8 < 0 \text{ et } c_4 - z_4 = -4 < 0.$$

La solution optimale est :

$$x_{B1} = x_1 = 200$$

$$x_{B2} = x_2 = 300$$

$$x_{B3} = x_3 = 100$$

$$x_{B4} = x_4 = 100$$

$$Z(x) \text{ est maximum pour } x_1 = 200, x_2 = 300 \text{ et vaut } 2800$$

1.9 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté une méthode de résolution des problèmes de Programmation Linéaire qui est la méthode du simplexe. Dans un premier temps nous avons parlé brièvement sur la programmation linéaire. Puis, nous avons montré la manière de résoudre les problèmes de programmation linéaire par cette méthode .

Chapitre 2

Concepts sur les nombres flous

2.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est une théorie mathématique du domaine de l'algèbre abstraite, elle a été développée par Lotfi Zadeh (1965) [21]. Pour représenter l'incertitude due à l'imprécision dans l'information ne pouvant pas être modélisée par la théorie probabiliste. Aujourd'hui, les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, économie, la recherche scientifique...etc.

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble.

2.2 Préliminaires sur les ensembles flous [10]

La notion d'ensemble flou n'étant pas classique, il convient avant tout d'introduire quelques définitions, principes d'utilisation et propriétés élémentaires. C'est ce que nous ferons dans ce paragraphe, en nous limitant strictement aux notions de base.

Définition 2.1 Ensemble classique

Soit X un ensemble, appelé univers, dont les éléments sont notés x .

Un sous-ensemble classique A de X peut être caractérisé à l'aide d'une fonction d'appartenance réelle μ_A définie sur X et prenant ses valeurs dans l'ensemble binaire $\{0, 1\}$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

Définition 2.2 Ensemble flou

Un sous-ensemble flou \tilde{A} de X est la notation classique pour désigner le caractère flou. Il est défini à l'aide d'une fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ définie sur X et prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

\tilde{A} est donc caractérisé par :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}. \quad (2.2)$$

La fonction d'appartenance peut, selon les situations, représenter un degré de possibilité ou un degré de préférence ou le degré d'appartenance.

Remarque 2.1

- Un ensemble classique ("crisp" par opposition à "fuzzy") constitue donc un cas particulier d'ensemble flou.
- L'ensemble vide est caractérisé par : $\mu_{\emptyset}(x) = 0 \quad \forall x \in X$.

Définition 2.3 *Ensemble flou convexe*

L'ensemble flou \tilde{A} est convexe si sa fonction d'appartenance vérifie :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X; \forall \lambda \in [0, 1] \quad (2.3)$$

Définition 2.4 *Ensemble flou normalisé*

L'ensemble flou \tilde{A} est normalisé s'il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$\sup_{x_0 \in X} \mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1 \quad (2.4)$$

2.2.1 Définitions des caractéristiques d'un ensemble flou [6] [10]

Un sous ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de sous ensemble flou peuvent être étudiées.

► Support d'un ensemble flou \tilde{A}

Le support d'un ensemble flou \tilde{A} noté $\text{sup}(\tilde{A})$ est l'ensemble ordinaire de X qui comprend les éléments x de X dont la fonction d'appartenance est strictement positive.

Il est défini par :

$$\text{sup}(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (2.5)$$

► **Coupe de niveau α**

Une coupe de niveau α d'un ensemble flou \tilde{A} noté \tilde{A}_α , $\alpha \in [0, 1]$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à \tilde{A} avec un degré au moins égal à α .

Elle est définie par :

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (2.6)$$

► **Hauteur d'un ensemble flou \tilde{A}**

La hauteur d'un ensemble flou est notée $Haut(\tilde{A})$ est le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à \tilde{A} .

Elle est définie par :

$$Haut(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} (\mu_{\tilde{A}}(x)) \quad (2.7)$$

► **Noyau d'un ensemble flou \tilde{A}**

Le noyau d'un ensemble flou \tilde{A} de X notée $Noy(\tilde{A})$ est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1).

Il est défini par :

$$Noy(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \quad (2.8)$$

2.3 Nombre flou [6]

Définition

Un nombre flou est un ensemble flou \tilde{A} convexe et normalisé, de l'ensemble des nombres réels ($X = \mathbb{R}$).

Remarque

Si le $noy(\tilde{A})$ est un intervalle de \mathbb{R} , on parle alors d'intervalle flou.

2.3.1 Opérations sur les ensembles flous

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux ensembles flous dans X .

► **Inclusion**

Un ensemble flou \tilde{A} est inclus dans un autre ensemble flou \tilde{B} si :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X \quad (2.9)$$

► **Égalité**

Deux ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} sont égaux si :

$$\tilde{A} = \tilde{B} \iff \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X \quad (2.10)$$

► **Complémentaire**

Le complément $\bar{\tilde{A}}$ d'un ensemble flou \tilde{A} est défini par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X \quad (2.11)$$

► **L'intersection**

L'intersection de deux ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} est définie par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X \quad (2.12)$$

► **L'union**

L'union de deux ensembles flous \tilde{A} et \tilde{B} est définie par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X \quad (2.13)$$

Exemple [6]

Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

$$\tilde{A} = \{(x_1; 0.3), (x_2; 0.5), (x_3; 1), (x_4; 0.2), (x_5; 0)\}$$

$$\tilde{B} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 0.2), (x_3; 0.5), (x_4; 0.6), (x_5; 0.3)\}$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 0.5), (x_3; 0), (x_4; 0.8), (x_5; 1)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 0.5), (x_3; 1), (x_4; 0.6), (x_5; 0.3)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1; 0.3), (x_2; 0.2), (x_3; 0.5), (x_4; 0.2), (x_5; 0)\}$$

2.3.2 Nombre flou de type L-R [10]

Un nombre flou \tilde{A} est de représentation L-R si et seulement si

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\alpha^L}\right) & \text{pour } x \leq a, \text{ avec } \alpha^L > 0 \\ R\left(\frac{x-a}{\alpha^R}\right) & \text{pour } x \geq a, \text{ avec } \alpha^R > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Où L et R sont des fonctions dites de référence du nombre flou vérifiant les propriétés :

- L et R fonctions non croissantes sur $[0, +\infty[$,
- L et R fonctions symétriques : $L(x) = L(-x)$; $R(x) = R(-x)$,
- $L(0) = R(0) = 1$.

Un nombre flou de type L-R est représenté par : $\tilde{A} = (a, \alpha^L, \alpha^R)_{L-R}$

Remarque :

Si l'on ajoute à cette définition que $L(1) = R(1) = 0$, le support du nombre flou est fini.
(voir figure 2.1)

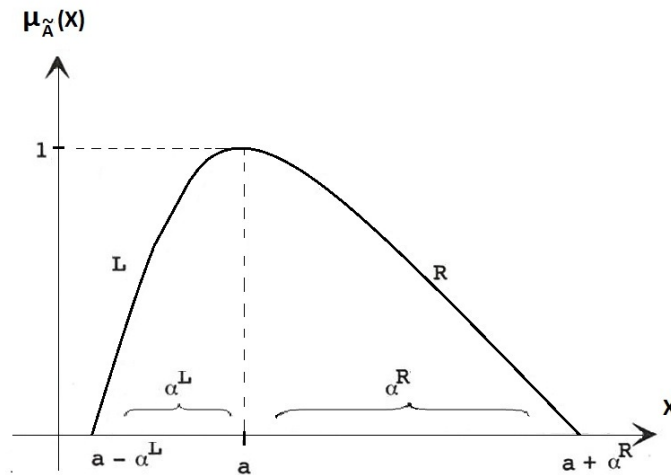


FIGURE 2.1 – Représentation d'un nombre flou de type L-R

2.3.2.1 Intervalle flou

Un nombre flou plat de type L-R, ou intervalle flou de type L-R, est tel qu'il existe $a^L, a^R \in \mathbb{R}_+$, avec $a^L < a^R$ de sorte que $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, \forall x \in [a^L, a^R]$.

Sa présentation de type L-R est alors :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a^L - x}{\alpha^L}\right) & \text{si } x < a^L, \text{ avec } \alpha^L > 0 \\ 1 & \text{si } a^L \leq x \leq a^R \\ R\left(\frac{x - a^R}{\alpha^R}\right) & \text{si } x > a^R, \text{ avec } \alpha^R > 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Nous désignerons un tel nombre flou par $\tilde{A} = (a^L, a^R, \alpha^L, \alpha^R)_{LR}$. (Voir figure 2.2).

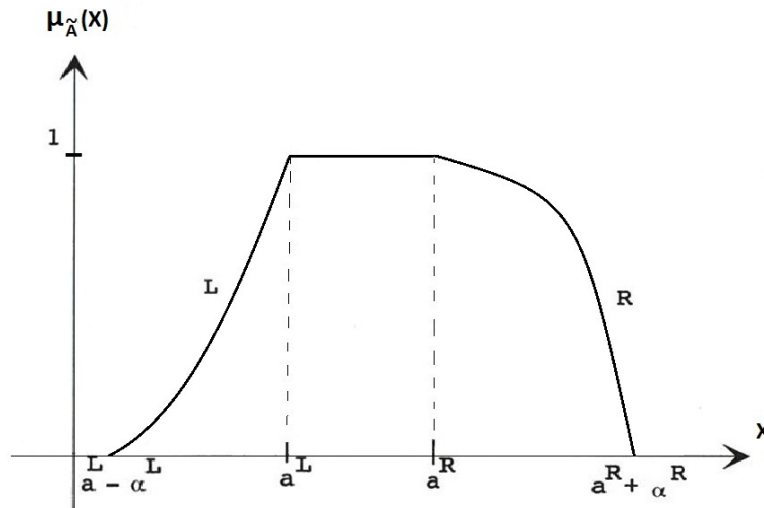


FIGURE 2.2 – Représentation d'un nombre flou plat de type L-R

Remarque

Il existe plusieurs types de nombres flous de type L-R, lorsque les fonctions de référence L et R sont linéaires, on parle alors de nombres flous de type triangulaire et de type trapézoïdal.

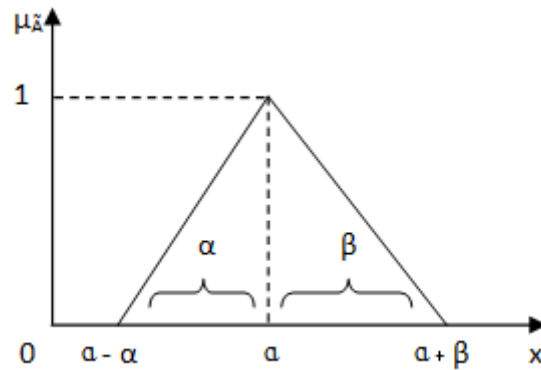
Dans notre travail, nous nous intéresserons principalement à ce type particulier de nombres flous.

2.3.3 Nombre flou de type triangulaire [6]

Un nombre flou \tilde{A} est dit de type triangulaire noté (a, α, β) si sa fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+\alpha}{\alpha} & \text{si } a - \alpha \leq x \leq a, \\ 1 & \text{si } x = a \\ \frac{\alpha+\beta-x}{\beta} & \text{si } a \leq x \leq a + \beta \end{cases} \quad (2.16)$$

La représentation géométrique est donnée par la figure (2.3) suivante :

FIGURE 2.3 – Représentation d'un nombre flou triangulaire (a, α, β)

2.3.3.1 Opérations sur les nombres flous de type triangulaire

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux nombres flous de type triangulaire.

► Addition

Soient deux nombres flous triangulaires $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.

Il vient :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

► Soustraction

Étant donné $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$ deux nombres flous triangulaires.

Le symétrique de \tilde{B} est donné par :

$$-\tilde{B} = -(b, \alpha_2, \beta_2) = (-b, \beta_2, \alpha_2)$$

et la différence de \tilde{A} et \tilde{B} par :

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$$

► Multiplication scalaire

Soit le nombre flou triangulaire $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$.

Il vient :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \otimes \tilde{A} = (\lambda a, \lambda \alpha, \lambda \beta), \\ \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \otimes \tilde{A} = (\lambda a, -\lambda \beta, -\lambda \alpha). \end{cases}$$

2.3.3.2 Comparaison de deux nombres flous triangulaires

Soient deux nombres flous triangulaires $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.

- $\tilde{A} = \tilde{B} \iff a = b, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2.$
- $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a \leq b, a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2, a + \beta_1 \leq b + \beta_2.$

2.3.4 Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou \tilde{A} est dit de type trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a^L + \alpha}{\alpha} & \text{si } a^L - \alpha \leq x \leq a^L \\ 1 & \text{si } a^L \leq x \leq a^U \\ \frac{a^L + \beta - x}{\beta} & \text{si } a^U \leq x \leq a^U + \beta \end{cases} \quad (2.17)$$

La représentation graphique est donnée par la figure (2.4) suivante :

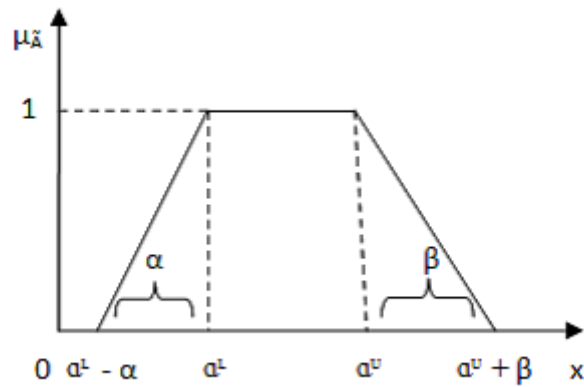


FIGURE 2.4 – Représentation d'un nombre flou trapézoïdal $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$

2.3.4.1 Opérations sur les nombres flous de type trapézoïdal

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux nombres flous trapézoïdaux.

► Addition

Soient deux nombres flous $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$ de type trapézoïdal.

Il vient :

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

► Soustraction

Étant donné deux nombres flous trapézoïdaux $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$

Il vient :

$$-\tilde{B} = -(b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2) = (-b^U, -b^L, \beta_2, \alpha_2)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2)$$

► Multiplication scalaire

Soit le nombre flou $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ de nombre flou trapézoïdal

Il vient :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \otimes \tilde{A} = (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda \alpha, \lambda \beta) \\ \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \otimes \tilde{A} = (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda \beta, -\lambda \alpha) \end{cases}$$

2.3.4.2 Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous trapézoïdaux $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$.

- $\tilde{A} = \tilde{B} \iff a^L = b^L, a^U = b^U, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$.
- $\tilde{A} \leq \tilde{B} \iff a^L \leq b^L, a^U \leq b^U, a - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2$.
- Un nombre flou trapézoïdal \tilde{A} est positif si et seulement si $a^L - \alpha_1 \geq 0$.
- Un nombre flou trapézoïdal \tilde{A} est négatif si et seulement si $a^U + \beta_1 \leq 0$.

Remarque

On note par $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des nombres flous de type trapézoïdal.

2.4 Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté les différentes approches de la notion de nombre flou, tel que le nombre flou de type L-R, le nombre flou de type triangulaire et le nombre flou de type trapézoïdal. Quelques propriétés de base pour chaque approche et des opérations arithmétiques sur les nombres flous de type L-R ont été définies.

Chapitre 3

Théorie des nombres flous intuitionnistes

3.1 Introduction

Dans la théorie des ensembles flous, l'appartenance d'un élément à un ensemble flou est une valeur unique dans l'intervalle $[0,1]$ Zadeh (1975). Néanmoins, en réalité il n'est peut-être pas toujours vrai que le degré de non-appartenance d'un élément dans un ensemble flou est égal à 1 moins le degré d'appartenance. Et ce, car il peut y avoir un degré d'incertitude. Par conséquent, Atanassov (1986, 1999) a proposé une généralisation d'ensembles flous. par exemple :

- Logique classique : Soit il fait froid, soit il fait pas froid.
- Logique intuitionniste : On ne peut pas prouver qu'il fasse froid ou qu'il fasse pas froid.
- Logique floue : Soit il fait froid, soit il ne fait pas froid soit il fait un peut froid.

avec "un peu" entre 0 et 1.

3.2 Ensemble flou intuitionniste [18]

Définition 3.1 d'un IFS

Un ensemble flou intuitionniste \tilde{A}^I (IFS : *I*ntuitionistic *F*uzzy *S*et) de X est défini comme suit :

$$\tilde{A}^I = \{(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x)) : x \in X\} \quad (3.1)$$

où les fonctions $\mu_{\tilde{A}^I} : X \rightarrow [0, 1]$ et $\nu_{\tilde{A}^I} : X \rightarrow [0, 1]$ définissant le degré d'appartenance et le degré de non-appartenance de l'élément $x \in X$ respectivement telles que :

$$\text{Pour chaque } x \in \tilde{A}^I \subset X, \quad 0 \leq \mu_{\tilde{A}^I}(x) + \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq 1.$$

Définition 3.2 d'un IFS normal

Un ensemble flou intuitionniste \tilde{A}^I est dit normal dans X s'il existe un point $x_0 \in X$ tel que $\mu_{\tilde{A}^I}(x_0) = 1$ et $\nu_{\tilde{A}^I}(x_0) = 0$

3.2.1 Définitions des caractéristiques d'un IFS

► Support d'un IFS

Le support d'un IFS \tilde{A}^I est l'ensemble ordinaire défini par :

$$Sup(\tilde{A}^I) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}^I}(x) > 0, \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq 1, x \in X\} \quad (3.2)$$

► Coupe (α, β) d'un IFS

Un ensemble de coupe (α, β) , générée par un IFS \tilde{A}^I , (où $\alpha, \beta \in [0, 1]$ sont des nombres fixes tels que $\alpha + \beta \leq 1$) est défini comme suit :

$$\tilde{A}_{\alpha, \beta}^I = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}^I}(x) \geq \alpha, \nu_{\tilde{A}^I}(x) \leq \beta \text{ avec } \alpha + \beta \leq 1 \text{ et } \alpha, \beta \in]0, 1]\} \quad (3.3)$$

3.3 Nombre flou intuitionniste

3.3.1 Définition d'un nombre flou intuitionniste

Un Nombre Flou Intuitionniste (NFI) \tilde{A}^I est un sous-ensemble flou intuitionniste de la droite réelle ($X = \mathbb{R}$), qui vérifie :

1- \tilde{A}^I est normal dans \mathbb{R} .

2- \tilde{A}^I est convexe c'est à dire :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x_1), \mu_{\tilde{A}^I}(x_2)) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1] \quad (3.4)$$

3- \tilde{A}^I est concave c'est à dire :

$$\nu_{\tilde{A}^I}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x_1), \nu_{\tilde{A}^I}(x_2)) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1] \quad (3.5)$$

3.3.2 Opérations sur les ensembles flous intuitionnistes [3]

Soient \tilde{A}^I, \tilde{B}^I deux ensembles flous intuitionnistes dans X

► **Inclusion**

$$\tilde{A}^I \subset \tilde{B}^I \iff \mu_{\tilde{A}^I}(x) \leq \mu_{\tilde{B}^I}(x) \text{ et } \nu_{\tilde{A}^I}(x) \geq \nu_{\tilde{B}^I}(x) \quad \forall x \in X$$

► **Égalité**

$$\tilde{A}^I = \tilde{B}^I \iff \tilde{A}^I \subset \tilde{B}^I \text{ et } \tilde{B}^I \subset \tilde{A}^I$$

► **Complémentaire**

$$\bar{\tilde{A}}^I = \{(x, \nu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{A}^I}(x)) \mid x \in X\}$$

► **L'intersection**

$$\begin{aligned} \tilde{A}^I \cap \tilde{B}^I &= \{(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x) \vee \nu_{\tilde{B}^I}(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, \min(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \max(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))) : x \in X\} \end{aligned}$$

► **L'union**

$$\begin{aligned} \tilde{A}^I \cup \tilde{B}^I &= \{(x, \mu_{\tilde{A}^I}(x) \vee \mu_{\tilde{B}^I}(x), \nu_{\tilde{A}^I}(x) \wedge \nu_{\tilde{B}^I}(x)) : x \in X\} \\ &= \{(x, \max(\mu_{\tilde{A}^I}(x), \mu_{\tilde{B}^I}(x)), \min(\nu_{\tilde{A}^I}(x), \nu_{\tilde{B}^I}(x))) : x \in X\} \end{aligned}$$

3.3.3 Nombre flou intuitionniste de type L-R [20]

Définition 3.3 *d'un NFI de type L-R*

Un nombre flou intuitionniste \tilde{A}^I est de type L-R s'il existe deux fonctions L et R et des scalaires tels que $l \leq l'$, $r \leq r'$ avec les fonctions d'appartenance et non-appartenance suivantes :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l}\right) & \text{si } m-l \leq x < m \\ 1 & \text{si } x = m \\ R\left(\frac{x-m}{r}\right) & \text{si } m < x < m+r \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$1 - \nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l'}\right) & \text{si } m-l' \leq x < m \\ 1 & \text{si } x = m \\ R\left(\frac{x-m}{r'}\right) & \text{si } m < x < m+r' \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.7)$$

Où

- Le nombre réel m est la valeur modale de \tilde{A}^I ,
- $(l, l'; r, r' > 0)$ sont les écarts à gauche et à droite des fonctions d'appartenance et non-appartenance respectivement,
- $L(\cdot)$ et $R(\cdot)$ sont des fonctions strictement décroissantes de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1]$,
- $L(0) = R(0) = 1$.
- Symboliquement \tilde{A}^I est noté $(m; l, r; l', r')_{LR}$.

Exemple

Si :

$L(x) = 1 - x$, et $R(x) = e^{-x}$ où $m = 4, l = 2, r = 3$, et $l' = 3, r' = 4$ Alors $(4; 2, 3; 3, 4)_{LR}$ désigne un IFN de type LR avec les fonctions d'appartenance et non-appartenance suivantes :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \\ e^{(4-x)/3} & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$1 - \nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{(x-1)}{3} & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \\ e^{(4-x)/4} & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad (3.9)$$

Remarque

Lorsque les fonctions d'appartenance et de non-appartenance sont linéaires de types $L(x) = R(x) = 1 - x$ pour $\forall 0 \leq x \leq 1$, on parle alors de NFI du type triangulaire et de type trapézoïdal.

3.3.4 Nombre flou intuitionniste triangulaire [14]

Soit un nombre flou intuitionniste de type triangulaire (NFIT) noté $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3) (a'_1, a_2, a'_3)$ où $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a'_3$ si sa fonction d'appartenance et sa fonction de non-appartenance, respectivement, sont données comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a'_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ \frac{x-a_2}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a'_3 \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.11)$$

La présentation géométrique d'un NFIT est donnée par la (figure 3.1) suivante :

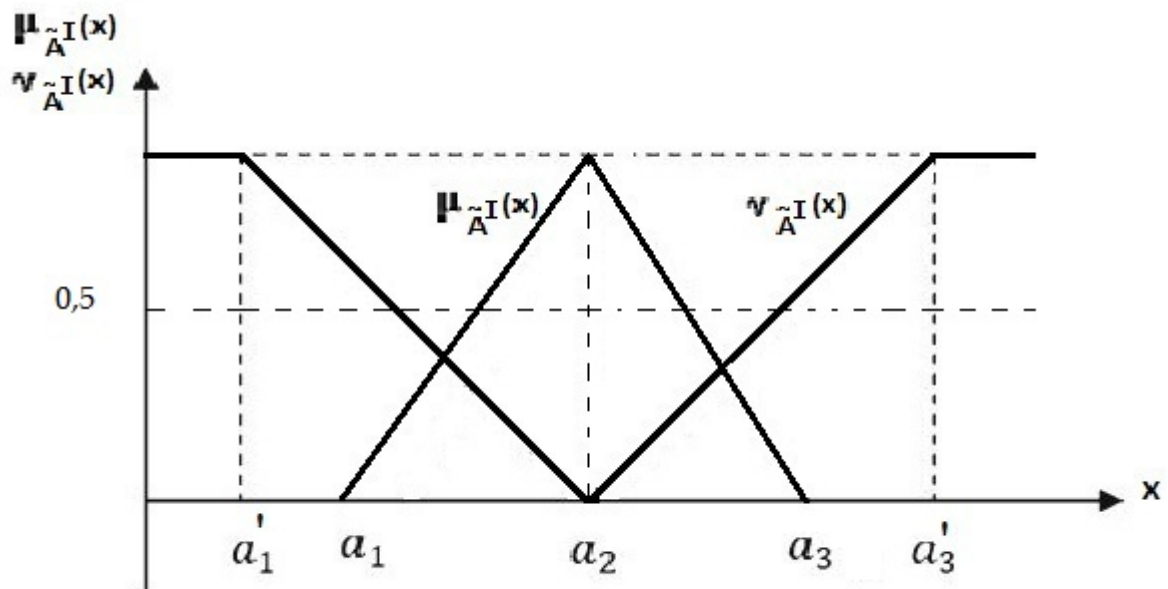


FIGURE 3.1 – Nombre flou intuitionniste triangulaire NFIT

3.3.4.1 Opérations sur les nombres flous intuitionnistes triangulaires [8]

Soient $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, a_3) (a'_1, a_2, a'_3)$ et $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, b_3) (b'_1, b_2, b'_3)$ deux nombres flous intuitionnistes triangulaires

► **Addition :**

$$\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) (a'_1 + b'_1, a_2 + b_2, a'_3 + b'_3)$$

► **Soustraction :**

$$-\tilde{B}^I = (-b_3, -b_2, -b_1) (-b'_3, -b_2, -b'_1)$$

$$\tilde{A}^I \ominus \tilde{B}^I = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1) (a'_1 - b'_3, a_2 - b_2, a'_3 - b'_1)$$

► **Multiplication scalaire :**

$$k\tilde{A}^I = \begin{cases} (ka_1, ka_2, ka_3) (ka'_1, ka_2, ka'_3) & \text{si } k \geq 0 \\ (ka_3, ka_2, ka_1) (ka'_3, ka_2, ka'_1) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

3.3.5 Nombre flou intuitionniste trapézoïdal [14]

Un Nombre Flou Intuitionniste Trapézoïdal (NFITr) \tilde{A}^I est un ensemble flou intuitionniste sur \mathbb{R} avec comme fonction d'appartenance et non-appartenance définies comme suit :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{a_2-x}{a_2-a_1} & \text{si } a'_1 \leq x \leq a_2 \\ 0 & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{x-a_3}{a'_4-a_3} & \text{si } a_3 \leq x \leq a'_4 \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.13)$$

Où $a'_1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a'_4$

La présentation géométrique d'un NFITr est donnée par la (figure 3.2) suivante :

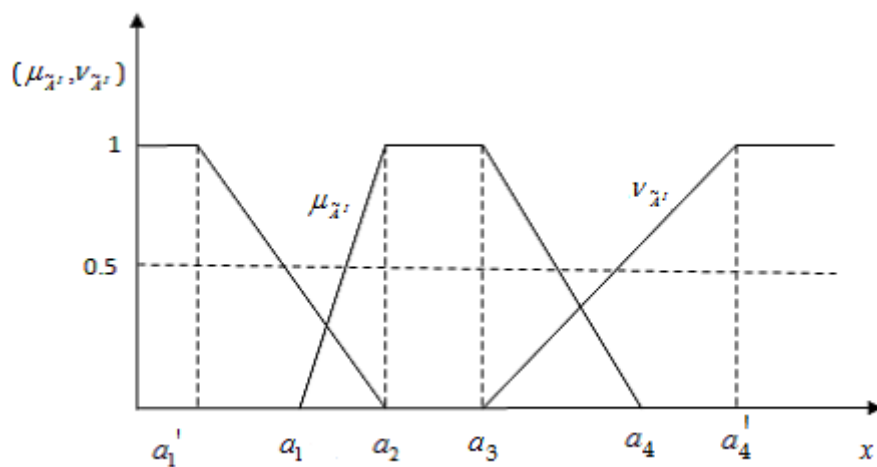


FIGURE 3.2 – Représentation d'un NFITr

3.3.6 Nombre flou intuitionniste trapézoïdal symétrique [1]

Un NFIT est dit Nombre Flou Intuitionniste Trapézoïdal Symétrique (NFITrS) si

$\alpha = \beta = h$ et $\alpha' = \beta' = h'$ par conséquent, un NFITrS est défini par une fonction

d'appartenance et non-appartenance suivantes :

$$\mu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{x-(a_1-h)}{h} & \text{si } a_1 - h \leq x \leq a_1 \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq a_2 \\ \frac{a_2+h-x}{h} & \text{si } a \leq x \leq a_2 + h \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\nu_{\tilde{A}^I}(x) = \begin{cases} \frac{a_1-x}{h'} & \text{si } a_1 - h' \leq x \leq a_1 \\ 0 & \text{si } a \leq x \leq a_2 \\ \frac{x-a_2}{h'} & \text{si } a \leq x \leq a_2 + h' \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.15)$$

Un NFITs est noté $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, h, h) (a_1, a_2, h', h')$ (voir figure 3.3)

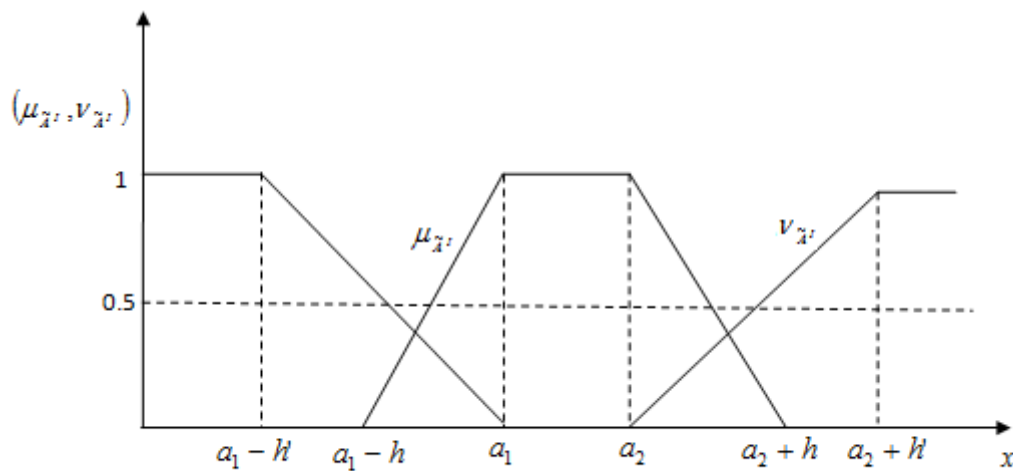


FIGURE 3.3 – Représentation d'un NFITrS

3.3.6.1 Opérations arithmétiques sur NFITrS [18]

► **Addition**

Soit $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, h, h) (a_1, a_2, h', h')$ et $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, k, k) (b_1, b_2, k', k')$ sont deux NFITrS.

Il vient :

$$\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, h + k, h + k) (a_1 + b_1, a_2 + b_2, h' + k', h' + k')$$

► **Soustraction**

Soit $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, h, h) (a_1, a_2, h', h')$ et $\tilde{B}^I = (b_1, b_2, k, k) (b_1, b_2, k', k')$ deux NFITrS.

Il vient :

$$-\tilde{B}^I = (-b_2, -b_1, k, k) (-b_2, -b_1, k', k')$$

et

$$\tilde{A}^I \ominus \tilde{B}^I = (a_1 - b_2, a_2 - b_1, h + k, h + k) (a_1 - b_2, a_2 - b_1, h' + k', h' + k')$$

► **Multiplication scalaire**

Soit $\tilde{A}^I = (a_1, a_2, h, h) (a_1, a_2, h', h')$ un NFITrS.

Il vient :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \tilde{A}^I = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda h, \lambda h) (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda h', \lambda h') \\ \text{si } \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R} : & \lambda \tilde{A}^I = (\lambda a_2, \lambda a_1, -\lambda h, -\lambda h) (\lambda a_2, \lambda a_1, -\lambda h', -\lambda h') \end{cases}$$

Exemple

Considérons deux NFITrS :

$$\tilde{A}^I = (7, 10, 1, 1) (7, 10, 3, 3) , \tilde{B}^I = (4, 6, 2, 2) (4, 6, 5, 5)$$

- $\tilde{A}^I \oplus \tilde{B}^I = (7 + 4, 10 + 6, 1 + 2, 1 + 2) (7 + 4, 10 + 6, 3 + 5, 3 + 5) = (11, 16, 3, 3) (11, 16, 8, 8)$
- $-\tilde{B}^I = (-6, -4, 2, 2) (-6, -4, 5, 5)$
- $\tilde{A}^I \ominus \tilde{B}^I = (7 - 6, 10 - 4, 1 + 2, 1 + 2) (7 - 6, 10 - 4, 3 + 5, 3 + 5) = (1, 6, 3, 3) (1, 6, 8, 8)$

- $\lambda = 2$ $\lambda \tilde{A}^I = (2.7, 2.10, 2.1, 2.1) (2.7, 2.10, 2.3, 2.3) = (14, 20, 2, 2) (14, 20, 6, 6)$
- $\lambda = -2$ $\lambda \tilde{A}^I = ((-2).10, (-2).7, -(-2).1, -(-2).1) ((-2).10, (-2).7, -(-2).3, -(-2).3)$
 $= (-20, -14, 2, 2) (-20, -14, 6, 6)$

3.3.7 Les règles de transformation d'un NFITr à un nombre flou, intervalle et nombre réel [14]

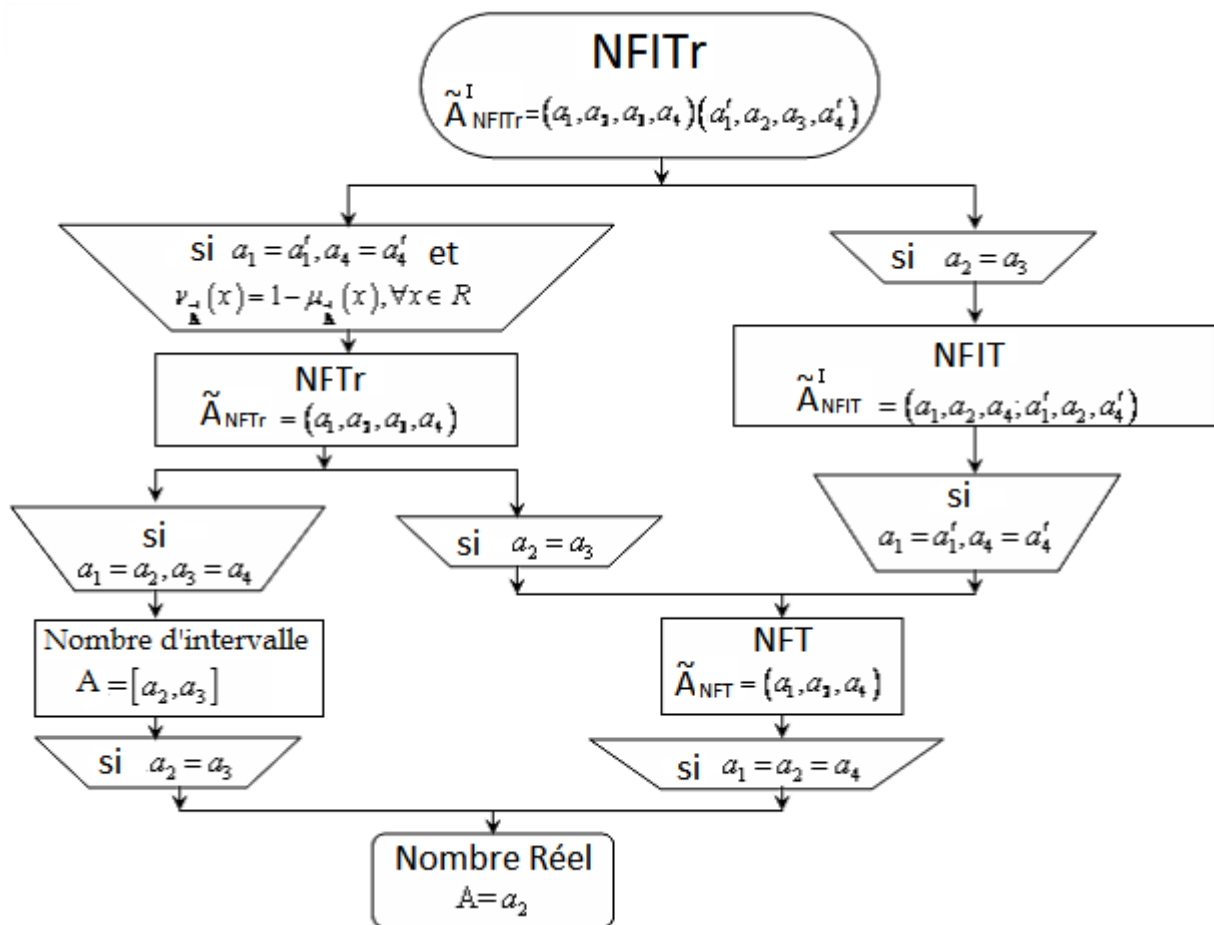


FIGURE 3.4 – La règle de transformation sur les NFITr

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté, quelques notions de base sur la logique floue intuitionniste en introduisant les concepts de base des ensembles et des nombres flous intuitionnistes. Dans notre travail, nous nous limiterons exclusivement aux nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques du type NFTrS.

Chapitre 4

Programmation Linéaire Floue Intuitionniste (PLNFI)

4.1 Introduction

En programmation linéaire, les données sont supposées être connues avec précision. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue intuitionniste, nous avons un programme linéaire flou intuitionniste. Dans ce chapitre, nous allons résoudre un problème de programmation linéaire flou intuitionniste trapézoïdal symétrique par la méthode du simplexe flou intuitionniste que nous présenterons en détail.

4.2 Fonction Ranking \mathfrak{R} [19]

Une approche efficace pour comparer les nombres flous intuitionnistes est l'utilisation des fonctions Ranking ou fonctions de classement. Une fonction Ranking \mathfrak{R} est définie de l'ensemble des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques $F_s(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} ($\mathfrak{R} : F_s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$). De différents types de fonctions Ranking ont été introduits et certains ont été utilisés pour résoudre des problèmes de programmation linéaire avec des paramètres flous intuitionnistes.

Proposition

Soient \tilde{A}^I et \tilde{B}^I deux nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques, on définit un ordre sur $F_s(\mathbb{R})$ comme suit :

- $\tilde{A}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{B}^I$ si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{A}^I) \geq \mathfrak{R}(\tilde{B}^I)$
- $\tilde{A}^I \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{B}^I$ si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{A}^I) > \mathfrak{R}(\tilde{B}^I)$
- $\tilde{A}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{B}^I$ si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{A}^I) = \mathfrak{R}(\tilde{B}^I)$

Lemme

Soient \tilde{A}^I et \tilde{B}^I deux nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques dans $F_s(\mathbb{R})$ et soit \mathfrak{R} une fonction Ranking linéaire, donc :

- $\tilde{A}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{B}^I \iff \tilde{A}^I - \tilde{B}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{0}^I \iff -\tilde{B}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} -\tilde{A}^I$
- $\tilde{A}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{B}^I$ et $\tilde{C}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{D}^I$ donc $\tilde{A}^I + \tilde{C}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{B}^I + \tilde{D}^I$
- $\mathfrak{R}(k\tilde{A}^I + \tilde{B}^I) = k\mathfrak{R}(\tilde{A}^I) + \mathfrak{R}(\tilde{B}^I)$

Définition 4.2 *Solution optimale*

On dit qu'un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale du problème $(P_{\tilde{c}^I})$ si pour toute solution réalisable x , on a $\tilde{c}^I x^* \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{c}^I x$.

4.3.1 **Solution de base réalisable**

Nous introduisons la définition d'une solution de base réalisable pour un problème de programmation linéaire en nombres flous intuitionnistes $(P_{\tilde{c}^I})$.

Considérons le système des contraintes suivant :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Supposons que $\text{rang}(A) = m$

Définition 4.3 *Ensemble des indices de base*

Soit $R \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\text{card}(R) = m$ telles que les colonnes a_j , ($j \in R$), de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes a_j , ($j \in R$), est inversible.

- Les variables $x_B = (x_j, j \in R)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $x_E = (x_j, j \notin R)$ sont appelées variables hors-base.

Définition 4.4 *Solution de base réalisable*

On dit que $x = (x_B, x_E)^T$ est une solution de base associée à la base R si elle vérifie : $Ax = b$ avec $x_B = B^{-1}b$ et $x_E = 0$.

Si, en plus, $x_B \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

Définition 4.5 *Solution dégénérée et non dégénérée*

- Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B > 0$.
- Si, au moins, une composante $x_B = 0$ alors x est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

4.4 Méthode du simplexe flou intuitionniste d'un problème de PLNFITrS

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un programme linéaire flou intuitionniste sous forme standard. La matrice A peut s'écrire :

$$A = (B, E)$$

où B est une matrice carrée de taille $m \times m$ inversible, correspondante aux variables de base et E est une matrice de taille $m \times (n - m)$; correspondante aux variables hors-base. On décompose également le vecteur de décision :

$$x = (x_B, x_E)$$

avec x_B les variables de base et x_E les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base R^* et une solution de base x^* associée telles que

$$\tilde{Z}^I(x^*) \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{Z}^I(x) \quad (x^* \text{ est meilleure que } x).$$

La méthode du simplexe flou intuitionniste consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base appelée variable entrante et faire sortir à la place une variable de base appelée variable sortante.

4.4.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire flou intuitionniste sous forme standard suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathfrak{R}} \tilde{Z}^I(x) = \tilde{c}^I x \\ s.c \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où

A est une matrice de dimension $m \times n$, b un vecteur colonne comportant m lignes.

On peut construire à partir de la matrice A deux sous matrices, $A = (B, E)$

De même le vecteur x (vecteur de décision) est décomposé comme suit : $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix}$

où

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} \text{ et } x_E \text{ pour les } (n - m) \text{ variables restantes.}$$

L'expression $Ax = b$ peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} Ax &= (B, E) \cdot \begin{bmatrix} x_B \\ x_E \end{bmatrix} = b \\ \Rightarrow Ax &= Bx_B + Ex_E = b \end{aligned} \quad (4.5)$$

Multiplions l'expression par B^{-1} , l'inverse de B ;

On obtient

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

avec $B^{-1}B = I$ (l'identité d'ordre m).

d'où

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b$$

En annulant x_E , la solution de base est alors

$$x_B = B^{-1}b \quad (4.6)$$

On obtient une solution de base réalisable de départ $x_B \geq 0$ (B est toujours constituée à partir des colonnes de A).

4.4.2 Amélioration d'une solution de base

À partir d'une solution de base réalisable, on obtient une nouvelle solution de base réalisable adjacente en transformant une variable (hors-base) en variable de base (variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base actuelle en variable hors-base (variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable.

- **Détermination de la variable entrante**

- **Calcul des coûts réduits**

Formalisons l'expression de $\tilde{Z}^I(x)$ pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base floue intuitionniste, nous savons que

$$Ax = Bx_B + Ex_E = b$$

avec B qui est inversible, donc

$$x_B + B^{-1}Ex_E = B^{-1}b \quad (4.7)$$

alors

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E \quad (4.8)$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^I(x) &\underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}^I x \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I x_B + \tilde{c}_E^I x_E \\ &\Rightarrow \tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I (B^{-1}b - B^{-1}Ex_E) + \tilde{c}_E^I x_E \\ &\Rightarrow \tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I B^{-1}b + (\tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E) x_E \end{aligned}$$

Or $x_0 = (x_B, x_E)$ où $x_B = B^{-1}b$ (car $x_E = 0$) alors

$$\tilde{Z}_0^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I x_B \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I B^{-1}b$$

Donc

$$\tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{Z}_0^I(x) + (\tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E) x_E \quad (4.9)$$

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire

$$B^{-1}E = \sum_{j \in N} B^{-1}a_j$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{Z}_0^I(x) + \sum_{j \in N} \tilde{c}_j^I x_j - \sum_{j \in N} \tilde{c}_B^I B^{-1}a_j x_j$$

$$\Rightarrow \tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{Z}_0^I(x) + \sum_{j \in N} (\tilde{c}_j^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}a_j) x_j$$

$$\Rightarrow \tilde{Z}^I(x) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{Z}_0^I(x) + \sum_{j \in N} (\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) x_j$$

Le vecteur

$$\tilde{Y}_E^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E$$

qui se compose de

$$\tilde{Y}_j^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I \quad (4.10)$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$\tilde{z}_j^I = c_B B^{-1}a_j$ et \tilde{c}_j^I sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base.

Notons par $\mu_j = B^{-1}a_j$ (ces vecteurs μ_j seront les nouveaux éléments sous les variables x_j dans le tableau du simplexe, dans le tableau de départ les μ_j sont les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

- Si les coûts réduits sont tous négatifs, c'est-à-dire $\tilde{Y}_j^I = \tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I \leq \tilde{0}^I$, (pour toutes les variables hors base), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $\tilde{Z}^I(x)$. Dans ce cas, l'algorithme se termine, et la solution de base réalisable obtenue est optimale.
- Dans le cas contraire, s'il existe $j \in N$ tel que $\tilde{Y}_j^I = \tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I > \tilde{0}^I$, on a intérêt à faire entrer dans la base, la variable qui a le coût réduit positif le plus grand possible.

Pour introduire une variable dans la base, quelque soit l'optimisation (maximisation ou minimisation), on applique le critère suivant :

► **Critère d'entrée d'une variable dans la base**

À partir d'une solution de base réalisable, calculer pour toutes les variables hors base, la quantité $\tilde{z}_j^I = \tilde{c}_B^I B^{-1}a_j = \tilde{c}_B^I \mu_j$, puis les $\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$

• **Maximisation** : La variable x_r est introduite dans la base si $\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I)$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$, c'est à dire :

$$\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) = \max_{j \in N} \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) / \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) > 0 \} \quad (4.11)$$

• **Minimisation** : La variable x_r est introduite dans la base si $\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I)$ correspond à la valeur algébrique la moins élevée parmi tous les $\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$, c'est à dire :

$$\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) = \min_{j \in N} \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) / \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) < 0 \} \quad (4.12)$$

Remarque

1. $\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{0}^I$ pour toutes les variables de base.

En effet, $\tilde{z}_j^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I B^{-1} a_j \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_B^I \mu_j \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{c}_j^I$, le vecteur μ_j étant alors un vecteur identité.

2. La valeur de x_r est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de base, que nous traitons ci-après.

• Détermination la variable sortante

Une fois que la variable x_r est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_r jusqu'à annuler une variable de base. Cette variable sera alors la variable sortante :

$$Ax = b \iff Bx_B + Ex_E = b$$

La solution de base x_B sera modifiée selon l'expression

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Ex_E$$

$$\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}a_r x_r$$

$$\Rightarrow x_B = \bar{b} - \mu_r x_r \tag{4.13}$$

où $\bar{b} = B^{-1}b$ et $\mu_r = B^{-1}a_r$ (les éléments du tableau sous le vecteur a_r).

Il faut que $x_B \geq 0$, ($i = 1, \dots, m$) pour que la nouvelle solution de base soit réalisable c-à-d.

$$x_{B_1} = \bar{b}_1 - \mu_{1r} x_r \geq 0$$

$$x_{B_2} = \bar{b}_2 - \mu_{2r} x_r \geq 0$$

⋮

$$x_{B_k} = \bar{b}_k - \mu_{kr} x_r \geq 0$$

$$\vdots$$

$$x_{B_m} = \bar{b}_m - \mu_{mr}x_r \geq 0$$

Discutons sur le signe de $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $\mu_{ir} \leq 0$, la quantité $\mu_{ir}x_r$ sera négative et x_{B_i} augmentera à mesure que x_r augmentera. Donc on peut augmenter x_r autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base x_{B_i} : Dans ce cas, la solution est non bornée ; en effet, en faisant tendre x_r vers l'infini, $\tilde{Z}^I(x)$ tend vers l'infini. Donc, l'algorithme s'arrête.
- Si $\mu_{ir} \geq 0$, alors $\mu_{ir}x_r$ sera une quantité positive et x_{B_i} réduira à mesure que x_r augmentera. Pour s'assurer de maintenir une solution réalisable (et de rendre nulle une variable qui est actuellement dans la base), x_r s'arrêtera d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de x_{B_i} pour tout i , on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

► Critère de sortie d'une variable dans la base

Sachant que la variable entrante dans la base est x_r ; la variable x_k sort de la base d'après :

$$\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} \quad (4.14)$$

La nouvelle valeur de la variable de base est $x_r = \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme μ_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution de base réalisable.

Soit R^* la nouvelle base obtenue et x^* sa solution de base associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif sera donnée par :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^I(x) &= \tilde{Z}_0^I(x) + x_r (\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) \\ \implies \tilde{Z}^I(x) &= \tilde{Z}_0^I(x) + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} (\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I)\end{aligned}\quad (4.15)$$

et en considérant que la solution n'est pas dégénérée ($\bar{b}_k > 0$) et puisque $\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I > \tilde{0}^I$ (problème de maximisation), la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée ; c'est-à-dire

$$\tilde{Z}^I(x) > \tilde{Z}_0^I(x)$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable améliorant $\tilde{Z}^I(x)$: La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire floue intuitionniste.

Remarque Absence de solutions optimales finies

Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour $\tilde{Z}^I(x)$ si :

- Pour une maximisation, s'il existe $\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I > \tilde{0}^I$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas, $\tilde{Z}^I(x) \rightarrow +\infty$.
- Pour une minimisation, s'il existe $\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I < \tilde{0}^I$ pour une variable hors base x_j et tous les $\mu_{ij} \leq 0$. Dans ce cas, $\tilde{Z}^I(x) \rightarrow -\infty$.

4.4.3 Critère d'optimalité

. Cas d'une maximisation : Une solution de base réalisable est optimale si pour toutes les variables hors base

on a

$$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I \leq \tilde{0}^I \quad (4.16)$$

Tableau 1

Base	x_B	x_E	S.B.R
x_B	I	$\mu_E = B^{-1}E$	$\bar{b} = B^{-1}b$
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{c}_E^I - \tilde{z}_E^I = \tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E$	$\tilde{Z}^I(x) = \tilde{c}_B^I B^{-1}b$
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	0	$\mathfrak{R}(\tilde{c}_E^I - \tilde{z}_E^I) = \mathfrak{R}(\tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E)$	$\mathfrak{R}(\tilde{Z}^I(x)) = \mathfrak{R}(\tilde{c}_B^I B^{-1}b)$

La ligne des coûts flous intuitionnistes dans le tableau, ci-dessus, est $\tilde{Y}^I = \frac{\tilde{c}_E^I - \tilde{c}_B^I B^{-1}E}{\mathfrak{R}}$ qui se compose de $\tilde{Y}_j^I = \frac{\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I}{\mathfrak{R}}$ pour les variables hors base.

En fonction de la condition d'optimalité, on arrive à la solution optimale si

$$\tilde{Y}_j^I = \frac{\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I}{\mathfrak{R}} \leq \tilde{0}^I \text{ pour tout } j \in N.$$

4.4.5 Algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS)

La méthode du simplexe flou intuitionniste pour un problème de maximisation est composé des deux étapes suivantes :

Étape initiale :

La solution de base réalisable de départ est donnée par $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$, $x_E = 0$ et l'objectif flou intuitionniste $\tilde{Z}^I(x) = \frac{\tilde{c}_B^I B^{-1}b}{\mathfrak{R}} = \frac{\tilde{c}_B^I \bar{b}}{\mathfrak{R}}$.

Étape principale :

1. Calculer $\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$ pour toutes les variables hors base.

Soit $\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) = \max_{j \in N} \{\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I), j \in N\}$ dans lequel N est l'ensemble des indices hors base actuels.

- Si $\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) \leq 0$, alors Stop; la solution actuelle est optimale.
- Si non, on passe à l'étape (2).

2. Soit $\mu_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $\mu_{ir} \leq 0$, alors Stop ; le problème a une solution infinie.

- Sinon, déterminer la variable x_k qui va quitter la base de la manière suivante :

$$\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\}$$

3. Mettre à jour le tableau en pivotant sur μ_{kr} ;

mettre à jour \bar{b}_i en le remplaçant par $\left(\bar{b}_i - \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} \mu_{ir} \right)$ pour $i \neq k$ et par $\frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}}$ pour $i = k$;

mettre à jour $\tilde{Z}^I(x)$ en le remplaçant par $\left(\tilde{Z}^I(x) + \frac{\bar{b}_k}{\mu_{kr}} (\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) \right)$.

Puis, mettre à jour la matrice de base B en remplaçant a_r et passer à l'étape (1).

4.4.6 Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation

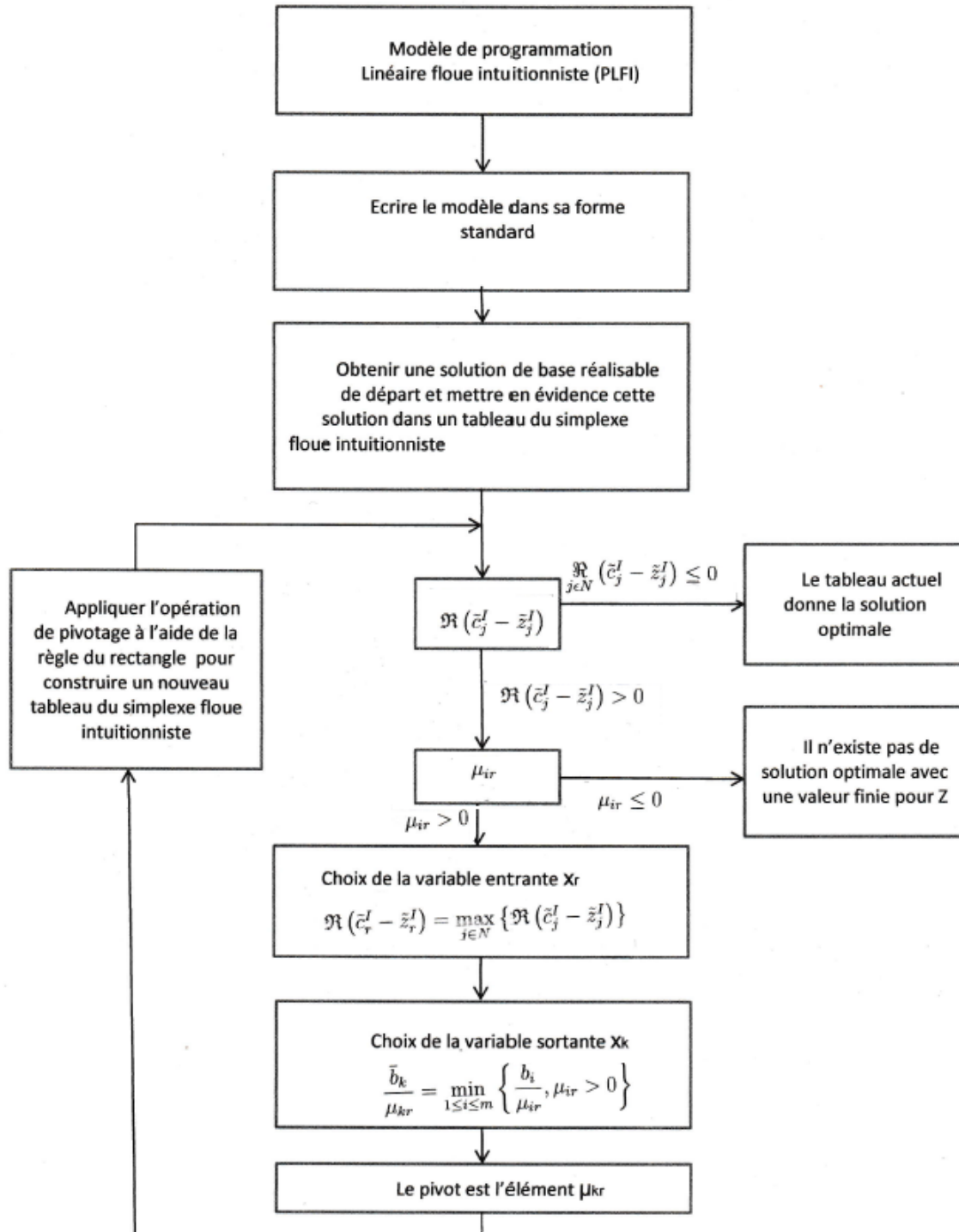


FIGURE 4.1 – Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste pour un problème (PLNFITrS) à maximisation

Tableau 2

base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
x_3	5	3	1	0	30
x_4	1	2	0	1	18
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	(4, 5, 1, 1; 4, 5, 3, 3)	(2, 7, 1, 1; 2, 7, 2, 2)	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	10	$\frac{19}{2}$	0	0	0

Les variables hors base sont x_1 et x_2 .

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned} \max_{j \in N} \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I), j \in N \} &= \max \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_1^I - \tilde{z}_1^I) / \mathfrak{R}(\tilde{c}_2^I - \tilde{z}_2^I) \} \\ &= \max \left\{ 10, \frac{19}{2} \right\} = 10 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} &= \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}}, \mu_{i1} > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{30}{5}, \frac{18}{1} \right\} = 6 = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{11}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_3. \end{aligned}$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur sera 6, la variable sortante est x_3 ($k = 1$).

En pivotant sur $\mu_{11} = 5$, on obtient le tableau suivant :

Tableau 3

base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
x_1	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
x_4	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	1	12
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	$\tilde{0}^I$	$(-1, \frac{23}{5}, \frac{8}{5}, \frac{8}{5}; -1, \frac{23}{5}, \frac{19}{5}, \frac{19}{5})$	$(-1, \frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}; -1, \frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$	$\tilde{0}^I$	(24, 30, 6, 6; 24, 30, 18, 18)
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	0	$\frac{47}{10}$	$\frac{-8}{5}$	0	60

Le tableau 3 n'est pas optimale puisque $\mathfrak{R}(\tilde{c}_1^I - \tilde{z}_1^I) = \frac{47}{10} > 0$

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\mathfrak{R}(\tilde{c}_r^I - \tilde{z}_r^I) = \max \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I), j \in N \} = \frac{47}{10} \rightarrow \text{la variable entrante est } x_2.$$

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = \min \left\{ 10, \frac{60}{7} \right\} = \frac{60}{7} = \frac{\bar{b}_2}{\mu_{22}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_4.$$

La variable x_2 entre dans la base et sa valeur sera $\frac{60}{7}$, la variable sortante est x_4 ($k = 2$)

et le pivot est μ_{22} .

En pivotant sur $\mu_{22} = \frac{7}{5}$, on obtient le tableau suivant :

Tableau 4

base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
x_1	1	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{6}{7}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{60}{7}$
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	$\tilde{0}^I$	$\tilde{0}^I$	$(\frac{-8}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}; \frac{-8}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7})$	$(\frac{-23}{7}, \frac{5}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7}; \frac{-23}{7}, \frac{5}{7}, \frac{19}{7}, \frac{19}{7})$	$(\frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{66}{7}, \frac{66}{7}, \frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{183}{7}, \frac{183}{7})$
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	0	0	$\frac{-13}{14}$	$\frac{-25}{14}$	90

$$\tilde{Z}^I(x) = \tilde{c}_B B^{-1} b = \left(\frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{66}{7}, \frac{66}{7}, \frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{183}{7}, \frac{183}{7} \right)$$

$$\mathfrak{R}(\tilde{Z}^I(x)) = \frac{144}{7} + \frac{450}{7} + \frac{1}{2} \left(\frac{183}{7} - \frac{66}{7} \right) = 90$$

$$\left(\tilde{Y}_3^I, \tilde{Y}_4^I \right) = \left(\tilde{c}_E^I - \tilde{z}_E^I \right) = \left(\left(\frac{-8}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{3}{7}; \frac{-8}{7}, \frac{-1}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7} \right), \left(\frac{-23}{7}, \frac{5}{7}, \frac{8}{7}, \frac{8}{7}; \frac{-23}{7}, \frac{5}{7}, \frac{19}{7}, \frac{19}{7} \right) \right)$$

$$(Y_3, Y_4) = \left(\mathfrak{R}(\tilde{Y}_3^I), \mathfrak{R}(\tilde{Y}_4^I) \right) = \left(\frac{-13}{14}, \frac{-25}{14} \right) < 0, \tilde{Y}_1^I = \tilde{0}^I, \tilde{Y}_2^I = \tilde{0}^I.$$

Comme $\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) < 0$ pour toutes les variables hors base alors la solution

$$x = \left(\frac{6}{7}, \frac{60}{7} \right) \in \mathbb{R}^2 \text{ est optimale et } \tilde{Z}^I(x) = \left(\frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{66}{7}, \frac{66}{7}, \frac{144}{7}, \frac{450}{7}, \frac{183}{7}, \frac{183}{7} \right) \in F_s(R)$$

$$\text{avec } \mathfrak{R}(\tilde{Z}^I(x)) = 90 \in \mathbb{R}.$$

Cas 2 :

4.5 Cas où les coefficients \tilde{c}^I , \tilde{A}^I et \tilde{b}^I sont flous intuitionniste trapézoïdaux symétriques

Un problème de programmation linéaire en nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques dans le cas où le vecteur des coûts \tilde{c}^I , la matrice des conditions \tilde{A}^I et le vecteur des contraintes \tilde{b}^I sont des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques est défini comme suit :

$$(P_{\tilde{c}^I, \tilde{A}^I, \tilde{b}^I}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathfrak{R}} \tilde{Z}^I(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^I x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^I x_j \leq_{\mathfrak{R}} \tilde{b}_i^I \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.21)$$

où

$$\tilde{a}_{ij}^I = \left((a_1)_{ij}, (a_2)_{ij}, h_{ij}, h_{ij}; (a_1)_{ij}, (a_2)_{ij}, h'_{ij}, h'_{ij} \right) \in F_s(R),$$

$$\tilde{b}_i = \left((b_1)_i, (b_2)_i, k_i, k_i; (b_1)_i, (b_2)_i, k'_i, k'_i \right) \in F_s(R)$$

$$(\tilde{c}^I)_j = \left((c_1)_j, (c_2)_j, l_j, l_j; (c_1)_j, (c_2)_j, l'_j, l'_j \right) \in F_s(R) \text{ et pour } i = 1, \dots, m$$

et $j = 1, \dots, n$ $x \in \mathbb{R}^n$. avec \mathfrak{R} une fonction ranking linéaire

Théorème

Le problème $(P_{\tilde{c}^I, \tilde{A}^I, \tilde{b}^I})$ est équivalent au problème suivant :

$$(P_{\tilde{c}^I}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathfrak{R}} \tilde{Z}^I(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j^I x_j \\ \text{s.c} \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Preuve

Soient Q_1 et Q_2 les ensembles de solutions réalisables des problèmes $(P_{\tilde{c}^I, \tilde{A}^I, \tilde{b}^I})$ et $(P_{\tilde{c}^I})$ respectivement. En utilisant l'arithmétique des nombres flous intuitionnistes et les propriétés des fonctions ranking.

Montrons que $Q_1 = Q_2$.

$$\text{Soit } x \in Q_1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}^I x_j \leq_{\mathfrak{R}} \tilde{b}_i^I \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \left((a_1)_{ij}, (a_2)_{ij}, h_{ij}, h_{ij}; (a_1)_{ij}, (a_2)_{ij}, h'_{ij}, h'_{ij} \right) x_j \leq_{\mathfrak{R}} \left((b_1)_i, (b_2)_i, k_i, k_i; (b_1)_i, (b_2)_i, k'_i, k'_i \right) \\
&\qquad i = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \left\{ \sum_{j=1}^n x_j (a_1)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_2)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_1)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_2)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h'_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h'_{ij} \right\} \leq_{\mathfrak{R}} \\
&\qquad \left((b_1)_i, (b_2)_i, k_i, k_i; (b_1)_i, (b_2)_i, k'_i, k'_i \right) \quad i = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{R} \left\{ \sum_{j=1}^n x_j (a_1)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_2)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_1)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j (a_2)_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h'_{ij}, \sum_{j=1}^n x_j h'_{ij} \right\} \leq \\
&\qquad \mathfrak{R} \left((b_1)_i, (b_2)_i, k_i, k_i; (b_1)_i, (b_2)_i, k'_i, k'_i \right) \quad i = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \left\{ (a_1)_{ij} + (a_2)_{ij} + \frac{1}{2} (h' - h) \right\} x_j \leq (b_1)_{ij} + (b_2)_{ij} + \frac{1}{2} (k' - k) \quad i = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
&\Leftrightarrow x \in Q_2 \text{ donc } Q_1 = Q_2.
\end{aligned}$$

Comme $Q_1 = Q_2$ et que toute solution réalisable optimale de $(P_{\tilde{c}^I, \tilde{A}^I, \tilde{b}^I})$ est solution réalisable optimale de $(P_{\tilde{c}^I})$ donc on conclut que les deux problèmes sont équivalents.

Remarque

La réalisation du problème obtenu $(P_{\tilde{c}^I})$ se fera par le simplexe flou intuitionniste

(voir cas 1).

4.5.1 Exemple numérique

Résoudre le problème de programmation linéaire floue intuitionniste trapézoïdal symétrique suivant :

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau 1 du simplexe suivant :

Tableau 1-Solution de départ

base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
x_3	3	4	1	0	3
x_4	3	2	0	1	2
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	(3, 1, 2, 2; 3, 1, 0, 0)	(0, 1, 1, 1; 0, 1, 3, 3)	$\tilde{\theta}^I$	$\tilde{\theta}^I$	$\tilde{\theta}^I$
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	3	2	0	0	0

Les variables hors base sont x_1 et x_2 .

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\begin{aligned} \max_{j \in N} \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) / \mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) > 0 \} &= \max \{ \mathfrak{R}(\tilde{c}_1^I - \tilde{z}_1^I), \mathfrak{R}(\tilde{c}_2^I - \tilde{z}_2^I) \} \\ &= \max \{ 3, 2 \} = 3 \rightarrow \text{la variable entrante est } x_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} &= \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}}, \mu_{i1} > 0 \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3} = \frac{\bar{b}_2}{\mu_{12}} \rightarrow \text{la variable sortante est } x_4. \end{aligned}$$

La variable x_1 entre dans la base et sa valeur sera 2, la variable sortante est x_4 ($k = 2$).

En pivotant sur $\mu_{21} = 5$, on obtient le tableau 2 suivant :

Tableau 2

base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
x_3	0	2	1	-1	1
x_1	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	$\tilde{\theta}^I$	$(-\frac{2}{3}, -1, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}; -\frac{2}{3}, -1, 3, 3)$	$\tilde{\theta}^I$	$(-\frac{1}{3}, -1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}, -1, 0, 0)$	$(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; 2, \frac{2}{3}, 0, 0)$
$\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I)$	0	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	2

$$\tilde{Z}^I(x) = \tilde{c}_B B^{-1} b = \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; 2, \frac{2}{3}, 0, 0 \right)$$

$$\mathfrak{R}(\tilde{Z}^I) = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(0 - \frac{4}{3} \right) = 2$$

$$\left(\tilde{Y}_2^I, \tilde{Y}_4^I \right) = \left(\tilde{c}_E^I - \tilde{z}_E^I \right) = \left(\left(-\frac{2}{3}, -1, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}; -\frac{2}{3}, -1, 3, 3 \right), \left(-\frac{1}{3}, -1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}, -1, 0, 0 \right) \right)$$

$$\left(Y_3, Y_4 \right) = \left(\mathfrak{R}(\tilde{Y}_3^I), \mathfrak{R}(\tilde{Y}_4^I) \right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \right) < 0, \tilde{Y}_1^I = \tilde{\theta}^I, \tilde{Y}_3^I = \tilde{\theta}^I.$$

Comme $\mathfrak{R}(\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I) < 0$ pour toutes les variables hors base alors la solution $x = (\frac{2}{3}, 0) \in \mathbb{R}^2$ et la valeur de la fonction objectif optimale floue intuitionniste est $\tilde{Z}^I = (2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; 2, \frac{2}{3}, 0, 0) \in F_s(\mathbb{R})$ avec $\mathfrak{R}(\tilde{Z}(x)^I) = 2 \in \mathbb{R}$.

Cas 3 :

4.6 Cas où les coefficients \tilde{x}^I et \tilde{b}^I sont flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques [19]

Un problème de programmation linéaire à variables flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques (PLVFITrS), dans le cas où le vecteur des contraintes \tilde{b}^I et le vecteur de décision \tilde{x}^I sont des (NFITrS), est défini comme suit :

$$(P_{\tilde{b}^I, \tilde{x}^I}) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathfrak{R}} \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) = c\tilde{x}^I \\ s.c \\ A\tilde{x}^I =_{\mathfrak{R}} \tilde{b}^I \\ \tilde{x}^I \geq_{\mathfrak{R}} \tilde{0}^I \end{array} \right. \quad (4.26)$$

où

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{b}^I \in (F_s(\mathbb{R}))^m$, $c^T \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{x}^I \in (F_s(\mathbb{R}))^n$ et \mathfrak{R} une fonction ranking linéaire.

Définition 4.6 Solution réalisable floue intuitionniste

On dit qu'un vecteur flou intuitionniste $\tilde{x}^I \in F(\mathbb{R})$ est une solution réalisable floue intuitionniste pour $(P_{\tilde{b}^I, \tilde{x}^I})$ si et seulement si \tilde{x}^I satisfait les contraintes du problème c'est à dire $A\tilde{x}^I =_{\mathfrak{R}} \tilde{b}^I$ et $\tilde{x}^I \geq_{\mathfrak{R}} \tilde{0}^I$.

Définition 4.7 Solution optimale floue intuitionniste

Une solution réalisable floue intuitionniste \tilde{x}^{I*} est une solution optimale floue intuitionniste pour $(P_{\tilde{b}^I, \tilde{x}^I})$ si pour toute solution réalisable floue intuitionniste \tilde{x}^I , on a $c\tilde{x}^{I*} \geq_{\mathfrak{R}} c\tilde{x}^I$.

4.6.1 Solutions de base réalisables floues intuitionnistes

Nous introduisons la définition d'une solution de base réalisable floue intuitionniste pour un problème de programmation linéaire à variables floues intuitionnistes $(P_{\tilde{b}^I, \tilde{x}^I})$. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} A\tilde{x}^I \stackrel{\Re}{=} \tilde{b}^I \\ \tilde{x}^I \stackrel{\Re}{\geq} \tilde{0}^I \end{cases} \quad (4.27)$$

Hypothèse :

On suppose que le $\text{rang}(A) = m$.

Définition 4.8 *Ensemble des indices de base*

Soit $R \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $\text{card}(R) = m$ tel que les colonnes a_j ($j \in R$) de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée B formée des colonnes a_j ($j \in R$) est inversible. On dit alors que l'ensemble R des indices est une base.

- Les variables $\tilde{x}_B^I = (\tilde{x}_j^I, j \in R)$ sont appelées variables de base floue intuitionniste.
- Les variables $\tilde{x}_E^I = (\tilde{x}_j^I, j \notin R)$ sont appelées variables hors-base floue intuitionniste.

Remarque

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, E)$ où B est appelée matrice de base et E matrice hors base et

$\tilde{x}^I \stackrel{\Re}{=} (\tilde{x}_B^I, \tilde{x}_E^I)^T$ où \tilde{x}_B^I les variables de bases floues intuitionnistes et \tilde{x}_E^I les variables hors base floues intuitionnistes.

Définition 4.9 *Solution de base réalisable floue intuitionniste*

On dit que $\tilde{x}^I = (\tilde{x}_B^I, \tilde{x}_E^I)^T$ est une solution de base floue intuitionniste associée à la base R si elle vérifie

$$A\tilde{x}_B^I = \tilde{b}^I \text{ avec } \tilde{x}_B^I = (\tilde{x}_{B_1}^I, \dots, \tilde{x}_{B_m}^I) = B^{-1}\tilde{b}^I \text{ et } \tilde{x}_E^I = \tilde{0}^I$$

Si, en plus, $\tilde{x}_B^I \geq_{\mathbb{R}} \tilde{0}^I$, alors \tilde{x}^I est une solution de base réalisable floue intuitionniste.

Définition 4.10 *Solution floue intuitionniste dégénérée et floue intuitionniste non dégénérée*

Une solution de base réalisable floue intuitionniste \tilde{x}^I est dite non dégénérée si $\tilde{x}_B^I >_{\mathbb{R}} \tilde{0}^I$.

Si, au moins, une composante $\tilde{x}_B^I =_{\mathbb{R}} \tilde{0}^I$ alors \tilde{x}^I est appelée une solution de base réalisable floue intuitionniste dégénérée.

4.7 Méthode du simplexe floue intuitionniste d'un problème (PLVFITrS)

On dispose d'une solution de base réalisable flou intuitionniste (FI) \tilde{x}^I d'un programme linéaire sous forme standard.

La matrice A peut s'écrire

$$A = (B, E)$$

avec B est une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible, correspondante aux variables de base (FI) et E une matrice de taille $m \times (n-m)$, correspondante aux variables hors-base (FI). On décompose également le vecteur de décision

$$\tilde{x}^I =_{\mathbb{R}} (\tilde{x}_B^I, \tilde{x}_E^I)$$

avec \tilde{x}_B^I les variables de base (FI) et \tilde{x}_E^I les variables hors base (FI).

Le but est de trouver une autre base R^* et une solution de base (FI) \tilde{x}^{I^*} associée telles que :

$$\tilde{Z}^I(\tilde{x}^{I*}) \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) \quad (\tilde{x}^{I*} \text{ est meilleur que } \tilde{x}^I).$$

La méthode du simplexe floue intuitionniste consiste à faire rentrer une variable hors-base (FI) dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (FI) (variable sortante).

4.7.1 Détermination d'une première solution

Considérons le problème de programmation linéaire floue intuitionniste sous forme standard suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) \underset{\mathfrak{R}}{=} c\tilde{x}^I \\ s.c \\ A\tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}^I \\ \tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{0}^I \end{array} \right. \quad (4.28)$$

où

A est une matrice de dimension $m \times n$, $\tilde{b}^I \in (F(\mathbb{R}))^m$.

On peut construire à partir de la matrice A , deux sous matrices, $A = (B, E)$.

De même le vecteur \tilde{x}^I (vecteur de décision) est décomposé comme suit : $\tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \begin{bmatrix} \tilde{x}_B^I \\ \tilde{x}_E^I \end{bmatrix}$

où $\tilde{x}_B^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{B1}^I \\ \tilde{x}_{B2}^I \\ \vdots \\ \tilde{x}_{Bm}^I \end{bmatrix}$ et \tilde{x}_E^I pour les $(n - m)$ variables restantes.

L'expression $A\tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}^I$ peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} A\tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} (B, E) \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_B^I \\ \tilde{x}_E^I \end{bmatrix} \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}^I \\ \Rightarrow A\tilde{x}^I \underset{\mathfrak{R}}{=} B\tilde{x}_B^I + E\tilde{x}_E^I \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}^I \end{aligned} \quad (4.29)$$

Multiplions l'expression par B^{-1} , l'inverse de B ;

On obtient

$$B^{-1}B\tilde{x}_B^I + B^{-1}E\tilde{x}_E^I = B^{-1}\tilde{b}^I$$

avec $B^{-1}B = I$ (identité d'ordre m) d'où

$$\tilde{x}_B^I + B^{-1}E\tilde{x}_E^I = B^{-1}\tilde{b}^I$$

En annulant \tilde{x}_E^I , la solution de base est alors

$$\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I \quad (4.30)$$

On obtient une solution de base réalisable floue intuitionniste de départ si $\tilde{x}_B^I \geq_{\mathfrak{R}} \tilde{0}^I$ (la matrice B est toujours constituée à partir des colonnes de la matrice A).

4.7.2 Amélioration d'une solution de base floue intuitionniste

À partir d'une solution de base réalisable floue intuitionniste, on obtient une nouvelle solution de base réalisable floue intuitionniste adjacente (meilleure ou aussi bonne) en transformant une variable hors-base floue intuitionniste en variable de base floue intuitionniste (dite variable entrante) et en même temps, rendre une variable de base floue intuitionniste actuelle en variable hors-base floue intuitionniste (dite variable sortante). Cette opération algébrique permet d'obtenir une nouvelle solution réalisable floue intuitionniste.

- **Détermination de la variable entrante**

- **Calcul des coûts réduits**

Formalisons l'expression de $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I)$ pour mieux définir le critère requis pour sélectionner la variable qui deviendra une variable de base (FI). Nous savons que

$$A\tilde{x}^I = B\tilde{x}_B^I + E\tilde{x}_E^I = \tilde{b}^I$$

avec B qui est inversible donc

$$\tilde{x}_B^I + B^{-1}E\tilde{x}_E^I = B^{-1}\tilde{b}^I \quad (4.31)$$

Alors

$$\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I - B^{-1}E\tilde{x}_E^I \quad (4.32)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= c\tilde{x}^I = c_B\tilde{x}_B^I + c_E\tilde{x}_E^I \\ \Rightarrow \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= c_B(B^{-1}\tilde{b}^I - B^{-1}E\tilde{x}_E^I) + c_E\tilde{x}_E^I \\ \Rightarrow \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= c_BB^{-1}\tilde{b}^I + (c_E - c_BB^{-1}E)\tilde{x}_E^I\end{aligned}$$

Or $\tilde{x}_0^I = (\tilde{x}_B^I + \tilde{x}_E^I)$ où $\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ (car $\tilde{x}_E^I = \tilde{0}^I$)

$$\tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) = c_B\tilde{x}_B^I = c_BB^{-1}\tilde{b}^I$$

Donc

$$\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) = \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + (c_E - c_BB^{-1}E)\tilde{x}_E^I \quad (4.33)$$

L'expression matricielle $B^{-1}E$ peut s'écrire alors

$$B^{-1}E = \sum_{j \in N} B^{-1}a_j \quad (4.34)$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + \sum_{j \in N} c_j \tilde{x}_j^I - \sum_{j \in N} c_BB^{-1}a_j \tilde{x}_j^I \\ \Rightarrow \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + \sum_{j \in N} (c_j - c_BB^{-1}a_j) \tilde{x}_j^I \\ \Rightarrow \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + \sum_{j \in N} (c_j - z_j) \tilde{x}_j^I\end{aligned} \quad (4.35)$$

Le vecteur

$$Y_E = c_E - c_BB^{-1}E$$

qui se compose de

$$Y_j = c_j - z_j \quad (4.36)$$

s'appelle vecteur des coûts réduits.

$z_j = c_BB^{-1}a_j$ et c_j sont les coefficients de la fonction objectif des variables hors base floues intuitionnistes.

Notons par $u_j = B^{-1}a_j$ (ces vecteurs u_j , qui seront les nouveaux éléments sous les variables \tilde{x}_j^I dans le tableau du simplexe floue intuitionniste, étaient dans le tableau de départ les a_j associés aux contraintes originales du modèle).

- Si les coûts réduits sont tous négatifs, c'est-à-dire $Y_j = c_j - z_j \leq 0$ (pour toutes les variables hors base floues intuitionnistes), il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I)$. Dans ce cas, l'algorithme se termine et la solution de base réalisable floue intuitionniste obtenue est optimale.
- Dans le cas contraire s'il existe $j \in N$ telle que $Y_j = c_j - z_j > 0$, dans ce cas on a intérêt à faire entrer dans la base la variable qui a le coût réduit positif le plus grand possible.

Pour introduire une variable dans la base, que l'optimisation en soit une maximisation ou minimisation, on suit le critère suivant :

► **Critère d'entrée d'une variable dans la base**

À partir d'une solution de base réalisable floue intuitionniste, calculer pour toutes les variables hors base floue intuitionniste, la quantité $z_j = c_B B^{-1}a_j = c_B u_j$, puis les $c_j - z_j$.

• **Maximisation** : La variable \tilde{x}_r^I est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la plus élevée parmi tous les $c_j - z_j$ c'est à dire :

$$c_r - z_r = \max_{j \in N} \{c_j - z_j / c_j - z_j > 0\}. \quad (4.37)$$

• **Minimisation** : Dans ce cas, la variable \tilde{x}_r^I est introduite dans la base si $c_r - z_r$ correspond à la valeur algébrique la moins élevée parmi tous les $c_j - z_j$ c'est à dire :

$$c_r - z_r = \min_{j \in N} \{c_j - z_j / c_j - z_j < 0\} \quad (4.38)$$

Remarque :

1. Les $c_j - z_j = 0$ pour toutes les variables de base. En effet, $z_j = c_B B^{-1} a_j = c_B u_j = c_j$, le vecteur u_j étant alors un vecteur identité.
2. La valeur de \tilde{x}_r^I est déterminée selon la règle de sortie d'une variable de la base floue intuitionniste que nous traitons ci-après.

• Détermination de la variable sortante

Une fois que la variable \tilde{x}_r^I est choisie, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $A\tilde{x}_E^I = \tilde{b}^I$, on augmente \tilde{x}_r^I jusqu'à annuler une variable de base floue intuitionniste. Cette variable sera alors la variable sortante.

$$A\tilde{x}^I = \tilde{b}^I \Leftrightarrow B\tilde{x}_B^I + E\tilde{x}_E^I = \tilde{b}^I$$

La solution de base floue intuitionniste \tilde{x}_B^I sera modifiée selon l'expression

$$\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I - B^{-1}E\tilde{x}_E^I$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I - B^{-1}a_r\tilde{x}_r^I$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_B^I = \bar{\tilde{b}}^I - u_r\tilde{x}_r^I \quad (4.39)$$

où $\bar{\tilde{b}}^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ et $u_r = B^{-1}a_r$ (les éléments du tableau sous le vecteur a_r).

Il faut que, $\tilde{x}_{B_i}^I \geq \bar{\tilde{0}}^I$, ($i = 1, \dots, m$) pour que la nouvelle solution de base floue intuitionniste soit réalisable ,c-à-d

$$\tilde{x}_{B1}^I = \bar{\tilde{b}}_1^I - u_{1r}\tilde{x}_r^I \geq \bar{\tilde{0}}^I$$

$$\tilde{x}_{B2}^I = \bar{\tilde{b}}_2^I - u_{2r}\tilde{x}_r^I \geq \bar{\tilde{0}}^I$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 & \tilde{x}_{Bk}^I = \frac{\bar{b}_k^I}{\Re} - u_{kr} \tilde{x}_r^I \geq \tilde{0}^I \\
 & \vdots \\
 & \tilde{x}_{Bm}^I = \frac{\bar{b}_m^I}{\Re} - u_{mr} \tilde{x}_r^I \geq \tilde{0}^I
 \end{aligned}$$

Discutons sur le signe de $u_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $u_{ir} \leq 0$, la quantité $u_{ir}\tilde{x}_r^I$ sera négative et \tilde{x}_{Bi}^I augmentera à mesure que \tilde{x}_r^I augmentera. Donc on peut augmenter \tilde{x}_r^I autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base floue intuitionniste \tilde{x}_{Bi}^I . Dans ce cas la solution est non bornée : en faisant tendre \tilde{x}_r^I vers l'infini, $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I)$ tend vers l'infini. Dans ce cas l'algorithme s'arrête.
- Si $u_{ir} > 0$, alors $u_{ir}\tilde{x}_r^I$ sera une quantité positive et \tilde{x}_{Bi}^I réduira à mesure que \tilde{x}_r^I augmentera. Pour assurer de maintenir une solution réalisable floue intuitionniste, \tilde{x}_r^I s'arrêtera d'augmenter aussitôt qu'une variable dans la base actuelle devient nulle.

Pour avoir la positivité de \tilde{x}_{Bi}^I pour tout i ($i = 1, \dots, m$), on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport $\frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}$ est le plus petit possible, supposons que ce minimum s'obtient à $i = k$. Le critère de sortie d'une variable de la base s'énonce alors comme suit :

► Critère de sortie d'une variable de la base

Sachant que $\bar{b}_i = \Re\left(\frac{\tilde{b}_i^I}{\tilde{b}_i^I}\right)$ la variable entrante dans la base est \tilde{x}_r^I , la variable \tilde{x}_k^I , sort de la base d'après :

$$\frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}, u_{ir} > 0 \right\} \tag{4.40}$$

La nouvelle valeur de la variable de base floue intuitionniste est $\tilde{x}_r^I = \frac{\tilde{b}_k^I}{u_{kr}}$ pour $i = k$.

Le terme u_{kr} est appelé le pivot et sert à effectuer l'opération de pivotage pour déterminer la nouvelle solution réalisable de base floue intuitionniste.

Soit R^* la nouvelle base obtenue et \tilde{x}^{I*} sa solution de base floue intuitionniste associée alors la nouvelle valeur de la fonction objectif floue intuitionniste sera donnée par :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + \tilde{x}_r^I(c_r - z_r) \\ \Rightarrow \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) &= \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I) + \frac{\tilde{b}_k^I}{u_{kr}}(c_r - z_r)\end{aligned}\quad (4.41)$$

et comme la solution n'est pas dégénérée $\left(\frac{\tilde{b}_k^I}{u_{kr}} \geq \tilde{0}^I\right)$ et puisque $c_r - z_r > 0$ (problème de maximisation)

par conséquent, la valeur numérique de la fonction objectif s'est améliorée c'est-à-dire

$$\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) > \tilde{Z}_0^I(\tilde{x}^I)$$

On poursuit ces étapes ainsi jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir de solution de base réalisable floue intuitionniste améliorant $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I)$. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale floue intuitionniste au programme linéaire (FI).

4.7.3 Critère d'optimalité

.Cas d'une maximisation :

Une solution de base réalisable floue intuitionniste est optimale si pour toutes les variables hors base floue intuitionniste,

on a

$$c_j - z_j \leq 0 \quad (4.42)$$

.Cas d'une minimisation :

Une solution de base réalisable floue intuitionniste est optimale si pour toutes les variables hors base floue intuitionniste ,

on a

$$c_j - z_j \geq 0 \quad (4.43)$$

Remarque :**Absence de solution optimale finie :**

Il n'existe pas de solution optimale avec une valeur finie pour $\tilde{Z}^I(x)$ si :

- Pour une maximisation , s'il existe $c_j - z_j > 0$ pour une variable hors base floue intuitionniste \tilde{x}_j^I et tous les $u_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) \rightarrow +\infty$

- Pour une minimisation , s'il existe $c_j - z_j < 0$ pour une variable hors base floue intuitionniste \tilde{x}_j^I et tous les $u_{ij} \leq 0$. Dans ce cas $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) \rightarrow -\infty$

4.7.4 Tableau du simplexe floue intuitionniste d'un problème (PLVFITrS)

La méthode de simplexe floue intuitionniste sous la forme du tableau.

On considère le problème (PLVFITrS) défini comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{\mathfrak{R}} \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) = c_B \tilde{x}_B^I + c_E \tilde{x}_E^I \\ \text{s.c} \\ B \tilde{x}_B^I + E \tilde{x}_E^I = \tilde{b}^I \\ \tilde{x}_B^I, \tilde{x}_E^I \geq \tilde{0}^I \end{array} \right. \quad (4.44)$$

Alors, il est possible d'écrire

$$\tilde{x}_B^I = B^{-1} \tilde{b}^I - B^{-1} E \tilde{x}_E^I$$

où

$$\tilde{x}_B^I + B^{-1} E \tilde{x}_E^I = B^{-1} \tilde{b}^I$$

D'où la fonction objectif floue intuitionniste

$$\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) - (c_E - c_B B^{-1}E)\tilde{x}_E^I = c_B B^{-1}\tilde{b}^I$$

Actuellement, $\tilde{x}_E^I = \tilde{0}^I$ puis alors $\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I$ donc $\tilde{Z}^I(x) = c_B B^{-1}\tilde{b}^I$

Alors, on peut écrire le problème (PLVFITrS), ci-dessus, sous la forme d'un tableau comme suit :

Base	\tilde{x}_B^I	\tilde{x}_E^I	S.B.R	$\Re(S.B.R)$
\tilde{x}_B^I	I	$B^{-1}E$	$B^{-1}\bar{b}$	$\Re(B^{-1}\bar{b})$
$c_j - z_j$	0	$c_E - c_B B^{-1}E$	$c_B B^{-1}\bar{b}$	$\Re(c_B B^{-1}\bar{b})$

Le tableau, ci-dessus, nous donne toutes les informations dont on a besoin pour appliquer la méthode du simplexe floue intuitionniste.

La ligne des coûts flous intuitionnistes dans le tableau ci-dessus est

$$(Y)_j = (c_j - c_B B^{-1}a_j) = c_j - z_j \text{ pour les variables hors base.}$$

En fonction de la condition d'optimalité pour ces problèmes, on arrive à la solution optimale si :

$$Y_j = c_j - z_j \leq 0, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}$$

4.7.5 Algorithme du simplexe floue intuitionniste d'un problème (PLVFITrS)

Pour le cas d'une fonction objectif à maximiser

1. La solution de base réalisable floue intuitionniste initiale est donnée par

$$\tilde{x}_B^I = B^{-1}\tilde{b}^I = \tilde{b}^I, \tilde{x}_E^I = \tilde{0}^I \text{ et l'objectif floue intuitionniste } \tilde{Z}_j^I(\tilde{x}^I) = c_B B^{-1}\tilde{b}^I = c_B \tilde{b}^I.$$

2. Calculer $\bar{b} = \Re(\tilde{b}^I)$ et $Y_j = c_j - z_j = c_j - c_B B^{-1}a_j$ pour les variables hors base.

$$\text{Soit } Y_r = c_r - z_r = \max \{c_j - z_j, j \in \mathbb{N}\}$$

_ Si $c_r - z_r < 0$ alors stop; la solution actuelle est optimale.

_ Sinon, on passe à l'étape 3.

3. Calculer $u_{ir} = B^{-1}a_{ir}$.

- Si $u_{ir} \leq 0$, alors stop ; le problème a une solution infinie.
- Sinon , déterminer la variable \tilde{x}_k^I qui va quitter la base de la manière suivante :

$$\frac{\bar{b}_k}{u_{kr}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{u_{ir}}, u_{ir} > 0 \right\}$$

Mettre à jour \tilde{b}_i^I en le remplaçant par $\left(\tilde{b}^I - \frac{\tilde{b}_k^I}{\mu_{kr}} \right)$, et par $\frac{\tilde{b}_k^I}{u_{kr}}$, pour $i \neq k$.

Mettre à jour $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I)$ en le remplaçant par $\tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) + \frac{\tilde{b}_k^I}{u_{kr}}(c_r - z_r)$.

Puis, mettre à jour B en remplaçant a_r par a_k et passer à l'étape 2.

4.7.6 Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation

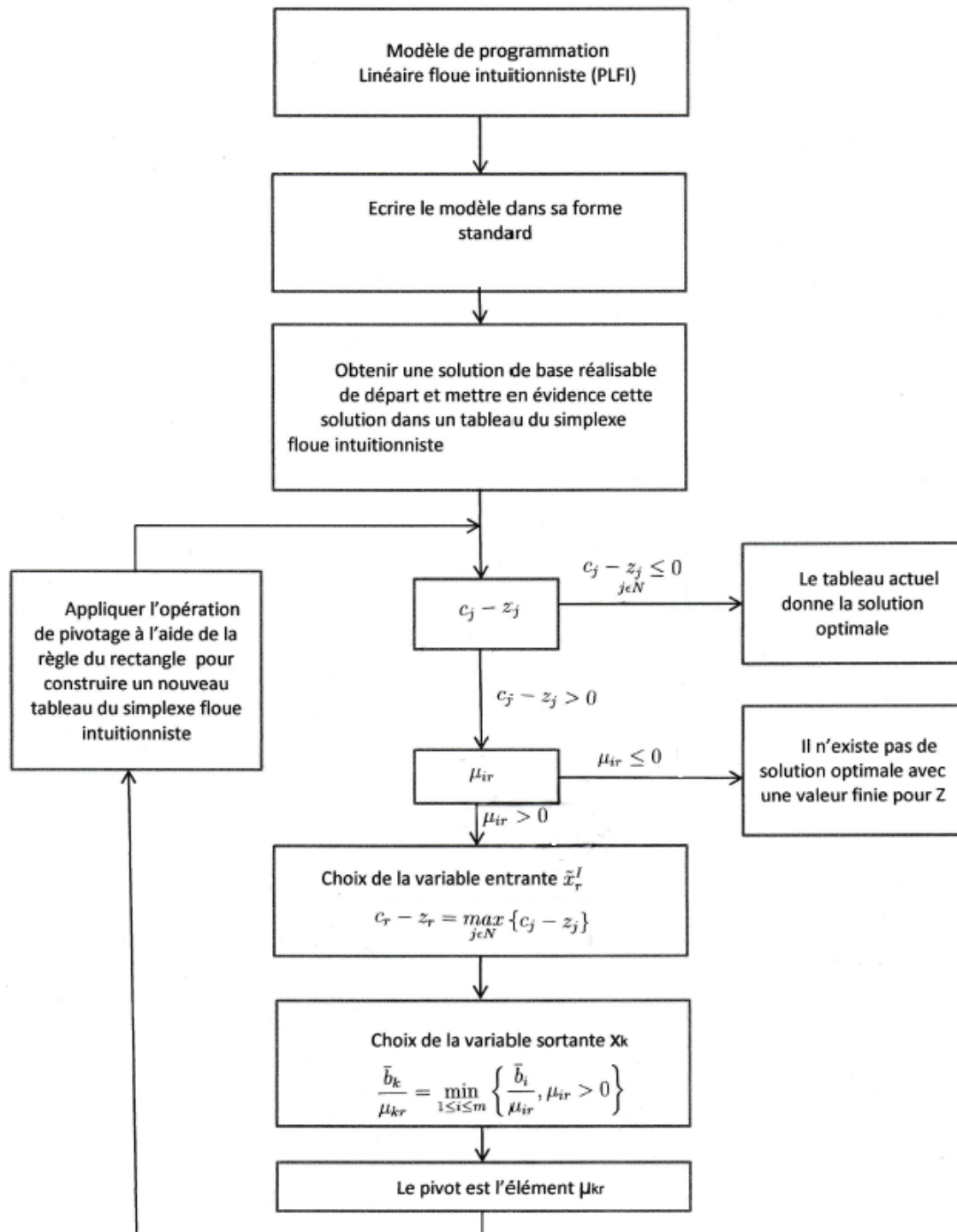


FIGURE 4.2 – Organigramme de l'algorithme du simplexe flou intuitionniste d'un problème (PLNFITrS) à maximisation

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau du simplexe suivant :

Tableau 1-Solution de départ

Base (\tilde{x}_B^I)	\tilde{x}_1^I	\tilde{x}_2^I	\tilde{x}_3^I	\tilde{x}_4^I	\tilde{x}_5^I	\tilde{x}_6^I	S.B.R	$\mathfrak{R}(SBR)$
\tilde{x}_3^I	6	4	1	0	0	0	(23, 25, 1, 1; 23, 25, 3, 3)	49
\tilde{x}_4^I	4	2	0	1	0	0	(5, 7, 2, 2; 5, 7, 4, 4)	13
\tilde{x}_5^I	-1	1	0	0	1	0	(3, 5, 4, 4; 3, 5, 6, 6)	9
\tilde{x}_6^I	0	1	0	0	0	1	(1, 3, 2, 2; 1, 3, 4, 4)	5
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	5	4	0	0	0	0	$\tilde{0}$	0

Les variables hors base sont $\tilde{x}_1^I, \tilde{x}_2^I$.

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$\max \{c_j - z_j\} = \max \{c_1 - z_1, c_2 - z_2\} = \max \{5, 4\} = 5 \leftarrow$ **la variable entrante est \tilde{x}_1^I .**

$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{i1}}, \mu_{i1} \right\} = \min \left\{ \frac{49}{6}, \frac{13}{6} \right\} = \frac{49}{6} = \frac{\bar{b}_1}{\mu_{11}} \leftarrow$ **la variable sortante \tilde{x}_3^I .**

avec $\bar{b}_i = \mathfrak{R}(\tilde{b}_i)$.

La variable \tilde{x}_1^I entre dans la base et sa valeur est $\mathfrak{R}(23, 25, 1, 1; 23, 25, 3, 3) = 49$, la variable sortante est \tilde{x}_3^I ($k = 1$) et le pivot $\mu_{11} = 6$.

En pivotant sur $\mu_{11} = 6$; on obtient le tableau suivant :

Tableau 2

Base (\tilde{x}_B^I)	\tilde{x}_1^I	\tilde{x}_2^I	\tilde{x}_3^I	\tilde{x}_4^I	\tilde{x}_5^I	\tilde{x}_6^I	S.B.R	$\mathfrak{R}(SBR)$
\tilde{x}_1^I	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$(\frac{23}{6}, \frac{25}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{23}{6}, \frac{25}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6})$	$\frac{49}{6}$
\tilde{x}_4^I	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	$(\frac{5}{6}, \frac{19}{6}, \frac{13}{6}, \frac{13}{6}, \frac{5}{6}, \frac{19}{6}, \frac{27}{6}, \frac{27}{6})$	$\frac{31}{6}$
\tilde{x}_5^I	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	$(\frac{41}{6}, \frac{55}{6}, \frac{25}{6}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6}, \frac{55}{6}, \frac{39}{6}, \frac{39}{6})$	$\frac{103}{6}$
\tilde{x}_6^I	0	1	0	0	0	1	(1, 3, 2, 2; 1, 3, 4, 4)	5
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{-5}{6}$	0	0	0	$(\frac{115}{6}, \frac{125}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{115}{6}, \frac{125}{6}, \frac{15}{6}, \frac{15}{6})$	$\frac{245}{6}$

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$\max \{c_j - z_j\} = \frac{2}{3} \leftarrow$ **la variable entrante est \tilde{x}_2^I .**

$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{ir}}, \mu_{ir} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\mu_{i2}}, \mu_{i2} \right\} = \min \left\{ \frac{49}{4}, \frac{62}{9} \right\} = \frac{62}{9} = \frac{\bar{b}_2}{\mu_{22}} \leftarrow$ la variable sortante \tilde{x}_4^I .

avec $\bar{b}_i = \mathfrak{R}(\tilde{b}_i)$.

La variable \tilde{x}_2^I entre dans la base et sa valeur est $\mathfrak{R}\left(\frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{13}{8}, \frac{13}{8}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{27}{8}, \frac{27}{8}\right) = \frac{31}{8}$, la variable sortante est \tilde{x}_4^I ($k = 2$) et le pivot $\mu_{22} = \frac{3}{4}$.

En pivotant sur $\mu_{22} = \frac{3}{4}$; on obtient le tableau suivant :

Tableau 3

Base (\tilde{x}_B^I)	\tilde{x}_1^I	\tilde{x}_2^I	\tilde{x}_3^I	\tilde{x}_4^I	\tilde{x}_5^I	\tilde{x}_6^I	S.B.R	$\mathfrak{R}(SBR)$
\tilde{x}_1^I	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\left(\frac{9}{4}, \frac{15}{12}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{15}{4}, \frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$	$\frac{27}{4}$
\tilde{x}_2^I	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\left(\frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{13}{8}, \frac{13}{8}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{27}{8}, \frac{27}{8}\right)$	$\frac{31}{8}$
\tilde{x}_5^I	0	0	$\frac{9}{24}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\left(\frac{23}{8}, \frac{65}{8}, \frac{55}{8}, \frac{55}{8}, \frac{23}{8}, \frac{65}{8}, \frac{97}{8}, \frac{97}{8}\right)$	$\frac{109}{8}$
\tilde{x}_6^I	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\left(\frac{-11}{8}, \frac{19}{8}, \frac{29}{8}, \frac{29}{8}, \frac{-11}{8}, \frac{19}{8}, \frac{59}{8}, \frac{59}{8}\right)$	$\frac{23}{8}$
$\tilde{c}_j^I - \tilde{z}_j^I$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\left(\frac{55}{4}, \frac{113}{4}, \frac{51}{4}, \frac{51}{4}, \frac{55}{4}, \frac{113}{4}, \frac{109}{4}, \frac{109}{4}\right)$	$\frac{197}{4}$

Le tableau 4 est optimal puisque tous les $c_j - z_j$ pour les variables hors base sont négatif $c_3 - z_3 = \frac{-3}{4} < 0$ et $c_4 - z_4 = \frac{-1}{2} < 0$ donc la condition d'optimalité pour le (PLVFIT) est vérifiée.

La solution optimale floue intuitionniste est :

$$\tilde{x}_1^I = \left(\frac{9}{4}, \frac{15}{12}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{15}{4}, \frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right) \in F_s(R),$$

$$\tilde{x}_2^I = \left(\frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{13}{8}, \frac{13}{8}, \frac{5}{8}, \frac{19}{8}, \frac{27}{8}, \frac{27}{8}\right) \in F_s(R),$$

$$\text{et } \tilde{Z}^I(\tilde{x}^I) = c_B B^{-1} \tilde{b}^I = \left(\frac{55}{4}, \frac{113}{4}, \frac{51}{4}, \frac{51}{4}, \frac{55}{4}, \frac{113}{4}, \frac{109}{4}, \frac{109}{4}\right) \in F_s(R)$$

$$\text{avec } \mathfrak{R}(\tilde{z}^I(\tilde{x}^I)) = \frac{197}{4} \in \mathbb{R}.$$

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité un problème de programmation linéaire avec des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques sous trois cas différents. La résolution a été faite en utilisant l'algorithme du simplexe flou intuitionniste qu'on a détaillé et approfondi au chapitre 3.

Conclusion générale

L'ensemble flou intuitionniste (IFS) est l'une des généralisations de la théorie des ensembles flous qui apparaît comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague. La conception de l'IFS peut être considérée comme une approche appropriée / alternative dans le cas où les informations disponibles ne sont pas suffisantes pour définir l'imprécision par l'ensemble flou classique. Dans les ensembles flous, le degré d'appartenance est pris en compte uniquement, mais IFS est caractérisé par une fonction d'appartenance et une fonction de non-appartenance de sorte que la somme des deux valeurs est inférieure à un.

Dans notre travail nous avons abordé, en premier lieu, la programmation linéaire dont les données sont supposées être connues avec précision qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation déterministes dont la résolution s'est faite par la méthode du simplexe classique de Dantzig.

Ensuite nous avons traité des programmes linéaires, dont les données sont approximatives ou vagues, qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation flous intuitionnistes. Dans notre cas, le flou intuitionniste est caractérisé par des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques. En utilisant les fonctions Ranking et l'arithmétique des nombres flous intuitionnistes de type trapézoïdal symétrique, nous avons résolu les problèmes linéaires flous intuitionnistes par la méthode du simplexe flou intuitionniste qui n'est rien d'autre qu'une extension du simplexe classique étudié au premier cas.

Bibliographie

- [1] : Ambika.P. , Muruganandam.S. ,Intuitionistic Fuzzy Linear Fractional Programming Problem ,Global Journal of Pure and Applied Mathematics. ISSN 0973-1768 Volume 13, Number 2 , pp. 203-214, (2017).
- [2] : Atanassov, K.T. , Intuitionistic Fuzzy Sets : Theory and Applications, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, (1999).
- [3] : Atanassov K. T. , Review and New Results on Intuitionistic Fuzzy Sets, Mathematical Foundations of Artificial Intelligence Seminar, Sofia, 1988, Preprint IM-MFAIS-1-88. Reprinted : Int. J. Bioautomation, , 20(S1), S7-S16, (2016).
- [4] : Baillargeon G., Programmation linéaire appliquée. Les éditions SMG , Québec, (1996).
- [5] : Dantzig G.B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, (1963).
- [6] : DROUCHE H. Application du Simplexe Classique de Dantzig à un problème Linéaire Flou. Thèse de Master, UMMTO, (2016).
- [7] : Dubey, D. & Mehra, A., “Linear Programming with Triangular Intuitionistic Fuzzy Number”, Advances in Intelligent Systems Research 1, 563-569, (2011).
- [8] : Ebrahimnejad.A., Roy .S.K. , Verdegay.J.L. ,Das .S., New approach for solving intuitionistic fuzzy multi-objective transportation problem , Sādhanā 43 :3 ,Indian Academy of Sciences, (2018).
- [9] : Hacour.S , Kebbal.S . Programmation mathématique flou et applications. Thèse de Master, UMMTO, (2017_2018).
- [10] : Jacques.T. , Programmation linéaire . Deuxième édition revue augmentée. 2003 Editons de l’université de Bruxelles, (1996).
- [11] : Kalla .S. , Programmation linéaire ,UnivBatna2, (2020_2021).
- [12] : Li, D.F. “A Ratio Ranking Method of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers and its Application to madm Problems”, Computer and Mathematics with Applications 60, 1557-1570, (2010).

- [13] : Malathi .C. , Umadevi .P.A new procedure for solving linear programming problems in an intuitionistic fuzzy environment.Journal of Physics : Conference Series. J. Phys. : Conf. Ser. 1139 012079, (2018) .
- [14] : Mahapatra G.S., Roy T.K. , Intuitionistic Fuzzy Number and Its Arithmetic Operation with Application on System Failure.Journal of Uncertain Systems Vol.7, No.2, pp.92-107, (2013).
- [15] : Nehi, H.M. “A New Ranking Method for Intuitionistic Fuzzy Numbers”, International Journal of Fuzzy Systems 12, 80-86, (2010).
- [16] : Parvathi, R. & Malathi, C. “Arithmetic Operations on Symmetric Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers”, International Journal of Soft Computing and Engineering 2, 268-273, (2012 a).
- [17] : Parvathi, R. & Malathi, C. “Intuitionistic Fuzzy Simplex Method”, International Journal of Computer Applications 48, 39-48, (2012 b).
- [18] : Parvathi, R. & Malathi, C., Arithmetic Operations on Symmetric Trapezoidal Intuitionistic Fuzzy Numbers ,International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE) ISSN : 2231-2307, Volume-2 Issue-2, (May 2012).
- [19] : Parvathi.R., Malathi.C , Intuitionistic Fuzzy Simplex Method. International Journal of Computer Applications (0975 – 888) Volume 48– No.6, (June 2012).
- [20] : Tanuj .K., Rakesh .K.B. et Rajeev K.,Expected value based ranking of intuitionistic fuzzy variables , Cite as : AIP Conference Proceedings 1860, 020030, (2017).
- [21] : Zadeh, L.A. Fuzzy Sets, Information and Control 8, 338-353, (1965).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé la méthode de résolution des problèmes de programmation linéaire "la méthode du simplexe" , puis on a traité les différentes approches de la notion de nombre flou ; On a étudié les nombres flous intuitionnistes qui font partie des ensembles flous intuitionnistes, on a vu le coté théorique et ses propriétés de base puis nous avons étudié certains de leur types, et aussi ses opération arithmétique sur eux.

Ensuite nous avons présenté un problème de programmation linéaire avec des nombres flous intuitionnistes trapézoïdaux symétriques sous trois cas différents, la résolution a été faite en utilisant les fonctions Ranking et l'algorithme du simplexe flou intuitionniste.