République Algerienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences
Département des Mathématiques

Mémoire de master en

Mathématiques
Option
Modélisation Mathématique

Thème

Sur quelques théorèmes de point fixe et leurs applications

Présenté par:

Benini Nourredine

Devant le jury d'examen composé de :

Mr. Morsli
Mme. Zidi
Mlle. Smaili

Soutenu le 15/ 10 / 2017

Remerciements

Nous remercions, avant tout, le bon Dieu de nous avoir donné le courage et la volonté, pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre chère promoteur, Mr Morsli qui nous a fait l'honneur de diriger ce travail, sa gentillesse et ses précieux conseils furent d'un apport considérable.

Nos remerciements vont également au président ainsi qu'aux membres de jury pour l'honneur qu'ils nous font de juger ce travail.

Sans oublier de remercier tous les enseignants ayant contribué à notre formation de près ou de loin.

Sans oublier de remercier tous les amis et camarades, qui ont contribué ne serait que par un sourire à notre égard.

Merci infiniment à tous.

Dédicace

C'est avec une pensée pleine de reconnaissance inspirée par la Générosité et la gentillesse que je dédie ce modeste travail:
A mes chères parant pour leurs grand et généreux amour, leurs sacrifice, leur compréhension et leur soutien;
A mon frère azzedine et mes deux sœurs nouria et sabrina;
A mes oncles et mes tantes sans oublier les cousins et les cousines;
A mes meilleures amis qui m'ont soutenu moralement: ALi, Ahcene, Barboh,Belkacem, Yazid, Salim, Badis ;
A tous ceux qui m'ont aide, conseille, et a tous ceux que j'aime et m'aime et que je porte dans mon cœur (même celui qui m'aime pas).

Nourredine

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie du point fixe est un domaine à part entière de l'analyse mathématique. Elle constitue aussi un outil essentiel dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que leurs applications, notamment en analyse non linéaire où elle fournit les méthodes pour les questions d'existence de solutions dans de nombreux problèmes.
Soit X un ensemble et $f : X \to X$, une application. Un point fixe de f est un élement $x \in X$ pour lequel on a $f(x) = x$.
Il existe dans ce sens deux résultats pionniers fondamentaux, le théorème de Banach et celui de Brouwer. Ces deux résultats sont de natures différentes et sont à la base de la classification des méthodes de points fixes en approche métrique et approche topologique.
Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction et contractante peut entraîne de laborieux calculs, d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espaces étudié restreignent les lmites d'application de ce rsultat.
Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algèbrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermée borné dans lui-même. De façon plus générale, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.
Les applications des résultats de points fixes sont nombreuses et variées. Les points fixes de type métrique (Banach et extensions) sont d'un apport très fréquent dans l'étude des équations fonctionnelles (équations différentielles et aux dérivées partielles, équations intégrales, équations algébriques . . .).

Les points fixes de nature topologiques (Brouwer et extensions) sont étendues au cas des fonctions multivoques qui constituent le modèle adéquat à la théorie de la décision (ou de l'équilibre en économie). Une extension célèbre est celle de Kakutani.

Le présent de mémoire se propose de faire une synthèse de résultats essentiels de cette théorème. Nous donnons le même quelques applications illustrant leurs champs d'application.
Le document est compose d'une introduction et de trois chapitres dans le premier chapitre sont présentes les notions et résultats utile en théorie du point fixe Le deuxième chapitre présente les résultats importants de cette théorie et quelques extensions.

Le dernier chapitre est dédit aux quelques applications de ce théorie dans différents domaines

Chapitre 2

Rappel

2.1 Espaces métriques, Espaces topologiques.

Dans ce chapitre, nous présentons toutes les notions et résultats necessaires intervenat dans ce mémoire.

2.1.1 Espaces métriques

1.1.1 Définitions

Définition 1: Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to R$ vérifiant pour tout $x,y,z \in X$:

i) $(d(x,y) = 0) \Rightarrow (x = y)$;

ii) $d(y,x) = d(x,y)$ (symétrie) ;

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

- Le couple (X,d) est appelé espace métrique .

- Il decoule de définition qu'une distance d vérifie l'inégalité importante suivante :

$$\forall x,y,z \in X, \quad |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

1.1.3 Boules

Définition : Soit (X,d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in R_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble

$$B(x,r) = \{y \in X, d(x,y) < r\} \quad \text{resp.} \quad B_f(x,r) = \{y \in X, d(x,y) \leq r\}.$$

Pour $0 < r < r'$ les inclusions $B(x,r) \subset B_f(x,r) \subset B(x,r')$ sont des conséquences directes de la définition.

1.1.4 Parties bornées, fonctions bornées

Définition 1: Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0,r)$ telle que $A \subset B_f(x_0,r)$,

En d'autres termes:

$$\forall x \in A, d(x_0,x) \leq r.$$

Définition 2: Soit X un ensemble et (Y,d) un espace métrique. on dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $F_b(X;Y)$ le sous-ensemble de $F(X;Y) = Y^X$ formé par les fonctions bornées .

1.1.5 Distance entre deux parties

Définition : Soit (X,d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantité

$$d(A,B) = inf\{d(x,y), x \in A, y \in B\}.$$

1.1.6 Normes, espaces normés

Définition 1: On appelle norme sur E, une application de E dans R_+ habituellement notée $\| \,.\, \|$ vérifiant, pour tout $x,y \in E$ et tout $\lambda \in K$

i) $\| \lambda x \| = |\lambda| . \| x \|$ (homogénéité),

ii) ($\| x \| = 0) \Rightarrow (x = 0)$,

iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (inégalité triangulaire).

Propriétés: . Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \, . \, \|)$ où E est un espace vectoriel sur $K = R$ ou C et $\| \, . \, \|$ est une norme sur E.

. Si $(E, \| \, . \, \|)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité $d(x,y) = \| y - x \|$ définit une distance sur E.

2.1.2 Espaces topologiques

1.2.1 Topologie des espaces métriques

Définition : On appelle ouvert de (X,d) toute partie O de X qui est vide ou qui vérifie

$$\forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O.$$

Propriétés :

- Une boule ouverte est un ouvert.

- Un ouvert de (X,d) est une union quelconque de boules ouvertes.

1.2.3 Fermés

Définition : un ensemble $F \subset X$ sera dit fermé dans (X,d) si son complémentaire est ouvert

Propriétés:

i) Toute intersection de fermés est un fermé,

ii) Une réunion finie de fermés est un fermé,

iii) $\emptyset$ et X sont des fermés.

- Dans un espace métrique (X,d), toute boule fermée est un fermé.

1.2.4 Voisinages

Définition : Soit (X,d) un espace metrique et $x \in X$. On appelle voisinage de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x. On note $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x, nous avons de maniére claire :

$$V(x) = \{V \subset X, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset V\}.$$

De cette définition nous déduirons une caracterisationn simple et utile des ouverts d'un espace métrique (X,d):
- une partie $A \subset X$ est ouvert ssi elle est voisinage de chacun de ses points c.à.d:

$$\forall x \in A, \quad \exists B(x,r) \subset A$$

2.1.3 Adhérence, intérieur, extérieur

Dans ce paragraphe on travaille avec un espace topologique (X,T)

1.3.1 Adhérence

Définition 1: Soit A une partie de X et $x \in X$. On dit que :

i) x est adhérent à A, si tout voisinage V de x dans X contient un point de A.

ii) x est un point d'accumulation de A, si tout voisinage V de x dans X contient un point de A différent de x.

iii) x est un point isolé de A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \bigcap A = x$.

Définition 2: Pour une partie A de X on appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble A.

L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de X est un ensemble fermé, c'est le plus petit fermé de X contenant A.

1.3.2 Intérieur

Définition : Soit A une partie de X. On dit qu'un point x de A est intérieur à A si A est un voisinage de x dans X.

L'ensemble des points interieurs à A est appelé " intérieur de A " on le note $\mathring{A}$.
$\mathring{A}$ est la reunion de tous les ensembles ouverts contenus dans A, c'est donc aussi le plus grand ouvert contenu dans A.

1.3.3 Frontiére

Définition : On appelle frontiére d'une partie A de X l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \bigcap \overline{C_x A}$.

Nous avons $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

2.1.4 Continuité dans les espaces normés

Soient $(E, \| \, . \, \|)$ et $(E', \| \, . \, \|')$ deux espaces normés, et $f : E \to E'$ une application.
f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in E \quad : \quad \| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \| < \varepsilon.$$

C-à-d :

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Elle est dite continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Définition : On dit que f est uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x, y \in E \quad : \quad \| x - y \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon.$$

Définition :(Semi-continuité supérieure)

On dit que ϕ est semi-continue supérieurement en x_0 si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U, \phi(x) \leq \phi(x_0) + \varepsilon;$$

Dans un espace mérique cette proprieté est équivalente à:

$\limsup_{x \to x_0} \phi(x) \leq \phi(x_0)$,où $\limsup$ désigne la limite supérieure d'une fonction en un point.

2.1.5 Compacité

1. Définition générale

Définition 1: Soit (X,T) un espace topologique. Il est dit compact ssi il est séparé et que de toute recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Une partie d'un espace topologique est dite compacte ssi elle est compacte pour la topologie induite.

Proposition 1:

1. Un espace compact est fermé
2. On a identité entre les fermés d'un compact et les compacts d'un compact.
3. Toute suite d'un compact admet une valeur d'adhérence
4. Un espace compact est complet

Théorème 1 : (Tychonov). Tout produit d'espace compact (muni de la topologie produit) est compact.

Définition 2: Une partie d'un espace topologique est relativement compact ssi son adhérence est compacte.

2. Compacité dans un espace métrique

Proposition 2: Dans un espace métrique tout compact est borné.

Proposition 3: Les fermés bornés d'un evn de dim finis sont exactement les compacts.

Théorème 2: (X,d) compact ssi toute suite admet une sous-suite convergente.

Corollaire 1: Une partie A de (X,d) est relativement compacte ssi toute suite de A converge dans X.

Définition 3: Un espace est dit précompact ssi on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de rayon aussi petit que l'on veut.

Proposition 4: précompact + complet $\Leftrightarrow$ compact.

Remarque 1: Dans un espace complet, précompact équivaut à relativement compact.

Définition-proposition 1: Un espace topologique est dit localement compact ssi tout point admet un voisinage compact. Ceci equivaut à dire que tout point admet une base de voisinages compacts.

Théorème 3 (Riesz). Un espace vectoriel normé (ou plus généralement un evt) est localement compact ssi il est de dimension finie.

théorème d'Ascoli-Arzela Soient K un espace compact et (E,d) un espace métrique. L'espace $C(K,E)$ des fonctions continues de K dans E, muni de la distance uniforme, est un espace métrique.
Une partie A de $C(K,E)$ est relativement compacte (c'est-à-dire incluse dans un compact) si et seulement si, pour tout point x de K :

- A est équicontinue en x, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\forall f \in A \quad \forall y \in V \quad d(f(x),f(y)) < \varepsilon \;;\forall f \in A \quad \forall y \in V \quad d(f(x),f(y)) < \varepsilon \;;$$

- l'ensemble $A(x) = \{f(x) | f \in A\}$ est relativement compact.

2.1.6 Convexité

Définition : On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si :

$$\forall t \in [0,1], \forall (a,b) \in C^2, \quad ta + (1-t)b \in C.$$

2.2 Espaces métriques complets

2.2.1 Suites de Cauchy, espaces métriques complets

4.1.1 Suites de Cauchy

Définition : On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in N}$ d'un espace métrique (X,d) est de Cauchy si elle vérifie:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in N, \quad \forall m,n \geq N_\varepsilon, \quad d(x_m,x_n) \leq \varepsilon.$$

Propriété :

- Une suite de Cauchy est toujours bornée.

- Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.

- Toute suite de convergente est de cauchy, l'inverse n'est pas toujours vrai.

4.1.2 Espace métrique complet

Définition : On dit que l'espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy converge.

4.1.3 Union de complets et complétude des compacts

Pour ces deux cas, la complétude s'obtient en montrant la convergence d'une sous-suite d'une suite de Cauchy.

Proposition 1: Soit (X,d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de (X,d) est compléte.

Proposition 2: Tout espace métrique compact est complet.

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (X,d). On peut en extraire une sous-suite qui converge dans (X,d) et on conclut que la suite $(x_n)_{n\in N}$ sera aussi convergente .

2.2.2 Espaces de Banach

Définition Un espace normé $(X, \|\ .\ \|)$ est dit de Banach,s'il est complet pour la distance induite.

Proposition : Si $(X, \|\ .\ \|)$ est un Banach et $Y \subset X$. Alors $(Y, \|\ .\ \|)$ l'est aussi ssi Y est fermé dans X.

Démonstration : Supposons que $(Y, \|\ .\ \|)$ est complet, et soit $l \in \overline{Y}$. Il existe donc (y_n) suite de Y telle que $y_n \to l$ pour $n \to \infty$. Comme la suite (y_n) est convergente dans X, c'est une suite de Cauchy ; comme (Y,d) est complet, (y_n) converge dans Y : ainsi $l \in Y$, d'où Y est fermé.
Réciproquement, supposons Y fermé dans X et soit (y_n) suite de Cauchy dans Y; comme c'est une suite de Cauchy dans (X,d) complet, elle converge vers une limite $l \in X$. Comme $y_n \in Y$ et Y est fermé, $l \in Y$.

Compacité dans les espaces de Banach :
Dans les espaces de Banach $(X, \|\ .\ \|)$ de démenssion finies , les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.
Si $\dim x = +\infty$, cette proprieté trés pratique ,n'est plus vraie.
Dans un tel espace les boules unités ne sont jamais compactes. En fait, on montre que dans ce dernier cas ,les parties compactes ont un intérieur vide.

2.2.3 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition : Soit $p \in R$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to R, \quad ,f \quad mesurable \quad et \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$L^1(\Omega) = \{f$ définie sur $\Omega à un ensemble négligeable près, \int_\Omega |f(x)|dx < +\infty\}$ et $\Omega est une mesure.$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\| f \|_p = (\int_\Omega | f(x) |^p \, d\mu(x))^{\frac{1}{p}}.$$

2.2.4 Espace de Hilbert

Définition 1 : On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinèaire, symétrique non dégénérée, définie positive autrement dit, toute application φ de $E \times E$ dans R vérifiant :

- $\forall x \in E$, $\varphi_x : y \to \varphi(x,y)$ est linéaire ,

- $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$,

- $\forall x \in E \ \{0\}, \varphi(x,x) > 0$.

Définition 2 : Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $< u,v >$ et qui est complet pour la norme $< u,u >^{\frac{1}{2}}$.

2.2.5 Espaces uniformément convexes

Définition : On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$(x,y \in B_E \quad et \quad \| y - x \| > \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad (\| \frac{x+y}{2} \| < 1 - \delta).$$

Remarque : On vérifie aisément que si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad (x,y \in E, \quad \| x \| = \| y \| = 1 \quad et \quad \| x - y \| > \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad (\| \frac{x+y}{2} \| < 1 - \delta).$$

alors E est uniformément convexe.

Théorème (de représentation de Riesz-Fréchet). Soit H un espace de Hilbert. Alors $H' = H$. Plus précisément, étant donné $f \in H'$, il existe $u \in H$ tel que

$$< f,v >= (u,v) \quad \forall v \in H.$$

De plus, $\| f \| = |u|$.

Théorème (Milman-Pettis). Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

2.3 Espaces de Sobolev

2.3.1 Dérivation au sens faible et espaces de Sobolev

Définition : (Dérivée faible et espace de Sobolev). Soit Ω un ouvert de R^n. On dit qu'une fonction $u \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée au sens faible dans $L^2(\Omega)$ par rapport à la variable x_j si il existe $v \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega v\phi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

On note $v = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ ou simplement $\partial_j u$.

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u appartenant à $L^2(\Omega)$ et qui admettent des dérivées au sens faible $\partial_j u$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Proposition : L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $< .,. >$ défini par

$$< u,v >= \sum_{1\leq i\leq n} \int_\Omega (\partial_i u)(\overline{\partial_i v})dx + \int_\Omega u\overline{v}dx.$$

On a donc $< u,v >= (\nabla u,\nabla v) + (u,v)$ où, par abus de notations, on note de la même façon $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $L^2(R^n)$ et sur $L^2(R^n)^n$.

Nous allons définir la notion de solution faible de l'équation

$$-\triangle u = f$$

Définition : (Solution faible). Soit Ω un ouvert de R^n et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Une solution faible de l'équation $-\triangle u = f$ est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall \phi \in C_0^1(\Omega), \qquad \sum_{1\leq i\leq n} \int_\Omega (\partial_i u)(\partial_i \phi) dx = \int_\Omega f\phi dx.$$

Définition : (Espaces de Sobolev d'ordres supérieurs). On dit qu'une fonction **a** appartient à l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ si **a** appartient à $H^1(\Omega)$ et si les dérivées au sens faible L^2 de a appartiennent à $H^1(\Omega)$.

Plus généralement, on peut définir par récurrence des espaces $H^k(\Omega)$ pour tout entier $k \in N^*$: on dit que **a** appartient à $H^k(\Omega)$ si $a \in H^{k-1}(\Omega)$ et si les dérivées (au sens faible) de **a** appartiennent à $H^{k-1}(\Omega)$. L'espace $H^\infty(\Omega)$ est l'intersection de tous ces espaces.

Remarque : Cette définition est similaire à celle de l'espace des fonctions C^k: une fonction C^k est une fonction C^1 dont les dérivées sont aussi des fonctions C^{k-1}.

Chapitre 3

Quelques résultats de la théorie du point fixe

Soit X un ensemble de $f : X \to X$ une application, un point fixe de f est un element $x \in X$ pour lequel $f(x) = x$. la notion de point fixe est d'une importance triviale dans présque tous les domaines des mathématiques. En fait des questions nombreuses et de nature différentes peuvent se ramener a l'étude de l'existance de points fixes .
La théorie de ponts fixe s'est développée autour de deux résultats fondamentaux, le théorème de Banach et le théorème de Brouwer. Le théorème de Banach (ou de l'application contractante) est un résultat de nature métrique ,c.à.d. utilise la structure géométrique de l'espace.
Le théorème de Brouwer est de nature topologique , il est en particulier stable par passage à une topologie équivalente.
Dans ce chapitre, nous présentons ces deux résultats aussi que leurs extensions et généralisations respectives.

3.1 Théoréme du point fixe de Banach

Dans ce paragraphe, nous présentons le théorème de Banach sur le point fixe et son extension qui atteste de sa nature géométrique.

3.1.1 Théorème de l'application contractante :

Définition:

Soit (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application. On dit que T est une application lipschitzienne, s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x,y de E, l'inégalité

$$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y)$$

- Si $k = 1$, T est appelée non expansive
- Si $k < 1$, T est appelée contraction

3.1.2 Théorème : (Théoréme du point fixe de Banach(1922))

Soit(E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un unique point fixe $x \in E$. De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :

$x_1 = Tx_0$ et pour $n \geq 1$, $x_n = Tx_{n-1}$, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$d(x_n,x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1,x_0),n \geq 1$

x étant le point fixe de T.

Preuve :

L'existence :

Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E. Considérons la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y & ; \\ x_n = Tx_{n-1},n \geq 1 & . \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E.

Pour $m \leq n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m,x_n) \leq d(x_m,x_{m+1}) + d(x_{m+1},x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1},x_n)$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p,x_{p+1}) = d(Tx_{p-1},Tx_p) \leq kd(x_{p-1},x_p) \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1})d(x_0,x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + ... + k^{n-m-1})d(x_0,x_1) \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_0,x_1). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E.

Par ailleurs puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n-1} = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (i.e. $Tx = x$).

L'unicité :

supposons $Tx = x$ et $Ty = y$ alors :

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

ce qui implique que $d(x,y) = 0$ i.e $x = y$ (puisque $k < 1$).

Remarque : L'intérêt de ce résultat vient aussi de sa nature constructive : Il assure l'existance d'un point fixe unique et donne son schéma de construction.

3.1.3 Théorème de point fixe pour application non expansive

Une application non expansive entre espaces normés est une application k-lipschitzienne de module $k \leq 1$. Il s'agit donc du cas limite des applications contractantes, pour lesquelles $k < 1$.

Définition : Soient E un espace normé, dont la norme est notée $\| \,.\, \|$, et P une partie fermée de E. On dit qu'une application $T : P \to E$ est non expansive si

$$\forall (x,y) \in P \times P : \| Tx - Ty \| \leq \| x - y \|$$

Théorème (Browder-Kirk)
Soit H un espace de Hilbert, C un convexe non vide fermé et borné de H. On suppose que $f : C \to C$ est une application 1-lipschitzienne. Alors, f admet un point fixe.

Démonstration : Désignons par $\delta(C) = sup_{x,y \in C} \| x - y \|$ le diamètre de C. La preuve se construit en 4 étapes.

1. On montre que pour tout $x,y \in C$, si $a = \frac{x+y}{2}$ et $\alpha = max(\| x - f(x) \| , \| y - f(y) \|)$, alors

$$\| a - f(a) \| \leq 2\sqrt{\alpha \delta(C)}$$

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\| x - y \| = \| x - \frac{a + f(a)}{2} \| + \| y - \frac{a + f(a)}{2} \|$$

Donc, on peut supposer que

$$\| x - \frac{a + f(a)}{2} \| \geq \frac{\| x - y \|}{2}$$

Pour majorer la quantité $\| a - f(a) \|$, on va utiliser l'identité du parallélogramme (c'est ici que l'on utilise le fait que l'on est que la norme soit issue d'un produit scalaire). On a :

$$\| a - f(a) \|^2 = \| (x - f(a)) - (x - a) \|^2$$

$$= 2(\| x - f(a) \|^2 + \| x - a \|^2) - \| 2x - (a + f(a)) \|^2$$

Or,

$$\| x - f(a) \| \leq \| x - f(x) \| + \| f(x) - f(a) \|$$

$$\leq \alpha + \| x - a \| \text{ car } f \text{ est 1-lipschtzienne}$$

$$\leq \alpha + \frac{\|x-y\|}{2}$$

Ainsi,

$$\| a - f(a) \|^2 \leq 2((\alpha + \frac{\|x-y\|^2}{2} + \frac{\|x-y\|^2}{4}) - 4 \| x - \frac{a+f(a)}{2} \|^2)$$

$$\leq 2((\alpha + \frac{\|x-y\|^2}{2} + \frac{\|x-y\|^2}{4}) - 4\frac{\|x-y\|^2}{4})$$

$$\leq 2\alpha^2 + 2\alpha \| x - y \|$$

Or, $a = \max(\| x - f(x) \| , \| y - f(y) \|) = \delta(C)$. D'où,

$$\| a - f(a) \|^2 \leq 4\alpha\delta(C)$$

i.e

$$\| a - f(a) \| \leq 2\sqrt{\alpha\delta(C)}$$

2. Intéressons nous maintenant à la famille (C_n). Commençons par montrer qu'elle est non vide. Pour cela, on fixe $c^0 \in C$, et on pose pour tout $n \in N^*$,

$$f_n : C \to C$$

$$x \mapsto \tfrac{1}{n}c_0 + (1 - \tfrac{1}{n})f(x).$$

$f_n(x)$ est une combinaison convexe de points de C, qui est un ensemble convexe, donc f_n est bien à valeurs dans C. De plus, pour tout $x,y \in C$,

$$\| f_n(x) - f_n(y) \| = (1 - \tfrac{1}{n}) \| f(x) - f(y) \|$$

$$\leq \underbrace{(1 - \frac{1}{n})}_{<1} \| x - y \| .$$

Donc, f_n est contractante. De plus, C est fermé dans H complet, donc C est complet. Donc, le théorème de point fixe de Banach s'applique et il existe un unique point fixe $x_n \in C$ de f_n.

Montrons que $x_n \subset C_n$. On a :

$$\| x_n - f(x_n) \| = \| f_n(x_n) - f(x_n) \|$$

$$= \| \tfrac{1}{n}c_0 + (1 - \tfrac{1}{n})f_n(x_n) - f(x_n) \|$$

$$= \tfrac{1}{n} \| c_0 - f(x_n) \|$$

$$\leq \tfrac{\delta(C)}{n}.$$

Donc, C_n est non vide. De plus, (C_n) est décroissante. En effet, si $x \in C_{n+1}$, alors

$$\| x - f(x) \| \leq \frac{\delta(C)}{n+1} \leq \frac{\delta(C)}{n}$$

donc $x \in C_n$. D'où, $C_{n+1} \subset C_n$.

Enfin, C_n est fermé puisque $C_n = \Phi^{-1}([0,\frac{\delta(C)}{n}])$ avec

$$\Phi : C \to R$$

$$x \mapsto \| x - f(x) \|.$$

et Φ est continue comme composée d'applications continues ($\| \, . \, \|$ est continue et f est continue car lipschitzienne). On a évidemment envie d'appliquer le fait qu'une intersection décroissante de fermés non vide dans un espace complet, dont le diamètre tend vers 0, est réduite à un point. Le problème est que la diamètre de C_n n'a aucune raison de tendre vers 0. Pour palier à ce problème, on introduit des nouveaux ensembles B_n fermés non vides, décroissants, dont la diamètre tend cette fois vers 0, et qui sont contenus dans les C_n. L'idée pour construire les B_n est d'intersecter C_n avec une boule fermée judicieusement choisi.

3. Posons pour tout $n \in N^*$, $m_n = \inf\{\| x - c_0 \| \quad x \in C_n$. Puisque $C_{n+1} \in C_n$, on a (m_n) qui est croissante. De plus, $(m_n) \leq \delta(C)$. Donc, (m_n) est une suite croissante majorée, donc convergente. Notons m sa limite. On pose alors

$$B_n = C_{4n^2} \bigcap \overline{B}(c_0, m + \frac{1}{n})$$

(le choix de prendre C_{4n^2} et non C_n se justifiera au moment de calculer le diamètre des B_n). Pour tout $n \in N^*$, B_n est l'intersection de 2 fermés de C donc c'est un fermé de C. De plus, (B_n) est décroissante puisque les C_n décroissent et que le rayon des boules décroit. Montrons que B_n est non vide. Par définition de l'inf, pour tout $n \in N^*$, il existe $x \in C_{4n^2}$ tel que

$$\| x - c_0 \| = m_{4n^2} + \frac{1}{n} \leq m + \frac{1}{n}$$

Donc, B_n est non vide.

Il nous reste à montrer que le diamètre de B_n tend vers 0. Soient $x,y \in B_n$. Par l'identité du parallélogramme,

$$\begin{aligned} \| x - y \|^2 &= \| (c_0 - y) - (c_0 - x) \|^2 \\ &= 2(\| c_0 - x \|^2 + \| c_0 - y \|^2) - \| 2c_0 - (x + y) \|^2 \\ &\leq 4((m + \tfrac{1}{n})^2 - \| c_0 - \tfrac{x+y}{2} \|^2). \end{aligned}$$

Pour majorer $\|c_0 - \frac{x+y}{2} \|$, il nous suffit de montrer que $a = \frac{x+y}{2} \in C_n$.

D'après le 1), on a ‖a - f(a)‖$\leq 2\sqrt{\alpha\delta(C)}$.

Or, $\alpha = \max(\| x - f(x) \| , \| y - f(y) \|) \leq \frac{\delta(C)}{4n^2} car x,y \in C_{4n^2}$.

Donc, $\| a - f(a) \| \leq \frac{\delta(C)}{n}$, $i.e$ $a \in C_n$.

Ainsi,

$$\| x - y \|^2 \leq 4((m + \frac{1}{n})^2 - m_n^2)$$

Donc,

$$\delta(B_n) \leq 2\sqrt{((m + \frac{1}{n})^2 - m_n^2)}$$

Et donc, $\delta(B_n)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

4. Ainsi, il existe $x_0 \in C$ tel que $\bigcap_{n \in N} B_n = x_0$. Comme $B_n \subset C_n$ pour tout $n \in N^*$, on a $x_0 \in \bigcap_{n \in N} C_n, i.e x_0 = f(x_0)$.

Ainsi, f admet un point fixe.

Remarque 1

On n'a pas forcément unicité du point fixe de f, et cela vient justement du fait que le diamètre des C_n n'a aucune raison de tendre vers 0. En effet, l'intersection des C_n correspond exactement à l'ensemble des points fixes de f.

Remarque 2

Le théorème de Browder-Kirk reste vrai dans un espace de Banach uniformément convexe (ce sont des espaces pour lesquels la boule unité est suffisamment "ronde", les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, les espaces L^p sont un autre exemple moin trivial).

3.1.4 Extension du principe de l'application contractante

Dans un premier temps on va voir une extension qui consiste à prendre un autre type de contraction aboutissant au même résultat.

a. Extension de Boyd et Wong

Elle consiste a remplacer la contraction de constante $k \in [0,1]$ par une ϕ-contraction définie comme suit :

Théorème:[9] soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application . Supposons qu'il existe une fonction $\phi : R_+ \to R_+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et vérifiant :

$$d(Tx,Ty) \leq \phi(d(x,y))$$

pour tout $x,y \in X$.

Alors T admet un point fixe unique x^*, en outre, pour tout $x \in M$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Dans ce cas, T est dite ϕ-contractive ou contraction non linéaire .

b. Extension d'Edelstein

Théorème :[10] Soit (M,d) un espace metrique complet et $T : M \to M$ une application telle que

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y) \qquad \forall x,y \in M, x \neq y.$$

Supposons qu'il existe $y \in M$ tel que les itérations de x_n données par

$$\begin{cases} x_0 = y & ; \\ x_n = Tx_{n-1}, n \geq 1 & . \end{cases}$$

possedent une sous suite x_n avec $\lim_{j\to\infty} x_{nj} = x \in M$ ¸ Alors x est un point fixe unique de T .

Ce résultat a une importante conséquence qu'est :

Théorème : Soit (M,d) un espace metrique complet et $T : M \to M$ telle que :

$$d(T(x),T(y)) < d(x,y), \forall x,y \in M, x \neq y$$

Si de plus on a $T(M) \subset K$, avec K compacte, alors T possède un point fixe unique dans K .

c. Extension de Meir Keeler

Elle consiste en une extension du résultat à des contractions dites faiblement stricte de maniére précise :

Théorème :[11] Soit T une application d'un espace métrique M dans lui-même. On dit que T est une contraction uniformément faiblement stricte si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \varepsilon < d(x,y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(T(x),T(y)) < \varepsilon \ .$$

- Si T est une contraction uniformément faiblement stricte alors T admet un point fixe unique x. De plus $x = \lim_{n\to\infty} T^n(y)$, $\forall y \in M$.

d. contraction de Geraghty

Definition : Soit (M,d) un espace metrique complet. Une application $T : M \to M$ est dite de Geraghty si et seulement si il existe une fonction $\beta : R_+ \to [0,1[$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1 \Rightarrow t_n \to 0$ et pour tout $x,y \in M$ on a :

$$d(Tx,Ty) = \beta(d(x,y))d(x,y)$$

Théorème :[12] toutes contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.

- **Contraction de Matkowski**

Définition : une application $T : M \to M$ d'un espace métrique (M,d) est dite contraction de Matkowski (ou $\phi - contraction$) si et seulement si il existe une fonction $\phi : R_+ \to R_+$, strictement croissante vérifiant :

$$\lim_{n\to\infty} \phi(t) = 0 \forall t \in R_+$$

et

$$d(Tx,Ty) \leq \phi(d(x,y))$$

Théorème :[13] toutes ϕ-contraction T d'un espace métrique complet (M,d) dans lui même admet un point fixe unique x^*. de plus, pour tout $x_0 \in M$, on a $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

d. contraction de Caristi

Théorème:[14] Soient (M,d) un espace métrique complet et $T : M \to M$ une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction $\phi : M \to R_+$ semi-continue inférieurement telle que:

$$d(x,Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx)$$

pour tout $x \in M$. Alors T admet un point fixe .

Remarque : Dans le cas òu T est une contraction de constante $0 \leq k \leq 1$, on peut prendre $\phi(x) = \frac{1}{1-k} d(x,T(x))$. De manière claire ϕ est continue, de plus

$\phi(x) - \phi(T(x)) = \frac{1}{1-k}[d(x,T(x)) - d(T(x),T^2(x))] > \frac{1}{1-k}[d(x,T(x)) - kd(x,T(x))] > d(x,T(x))$.

On voit donc que le point fixe de Caristi est bien une généralisation de celui de Banach.

e. Contraction de Branciari

Théorème: [15] Soit T une application d'un espace métrique (M,d) dans lui même, satisfaisant :

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt.$$

pour tout $x,y \in M$, où $0 \leq k < 1$ et $\varphi : R_+ \to R_+$ est une fonction intégrable au sens de lebesgue vérifiant :

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Alors T admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in M$ on a $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

3.1.5 Le théorème de Browder

Si $T : X \to X$ est non expansive, on ne peut affirmer ni existance , ni unicité d'un point fixe. Un exemple triviale est l'application $T : R \to R$, $T(x) = x + k$, il est clair que pour $k = 0$, tous les points sont des points fixes , alors que pour $k \neq 0$ il n'y a aucun point fixe pour T.
Les même remarques sont observées si on considere T non expansive stricte , il suffit pour le voir de prendre $T : [0,1] \to [0,1], T(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$, $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$. pour $k = 0$, T possède un unique point fixe unique $x = 0$, si $k \neq 0$ alor, il n'y a aucun point fixe de T.

La question naturelle dans ce sens est de voir si en renforçant les conditions sur X, on peut obtenir une propriété du point fixe pour l'application non expansive $T : X \to X$.
Le résultat majeur dans ce sens est le théorème de Browder suivant:

Théorème de Browder : Si X est un espace de Hilbert et B un sous ensemble convexe, fermée, bornée de X, alors: une application $T : B \to B$ non expansive posséde toujours au moins un point fixe.

Ce résultat reste vrai dans le cadre plus général òu X est un espace de Banach uniformement convexe.
Ce théorème affirme l'existence d'un ou plusieurs points fixes, il ne donne pas de schéma numérique ou méthode permettant d'expliciter ces points. Une réponse partielle à ces questions est donner par Krasnoselskii:

Théorème de Krasnoselskii : Si B est un convexe fermée bornée d'un espace de Banach X et $T : B \to B$ est une application non expansive avec $T(B)$ compacte, on a :

- T posséde un point fixe.

- La suite des itérées $(T_{\frac{1}{2}})^n(x)$ converge vers un point fixe de T.

($T_{\frac{1}{2}}$ est défine par $T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}x$)

On notera aussi que les points fixes de T et de $T_{\frac{1}{2}}$ sont les mêmes.

3.2 Le théorème du point fixe de type Brouwer et Schauder

3.2.1 Théorème de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation. La plus simple est parfois donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Il peut encore être un peu plus général .

Convexe compact : Toute application continue T d'un convexe compact k d'un espace euclidien à valeur dans k admet un point fixe.

Démonstration :

Dimension un

En dimension un, le résultat est à la fois intuitif et aisé à démontrer. On note $[a,b]$ le domaine de définition de f. La fonction f est continue et à valeurs dans le même segment. Dire que cette fonction f admet un point fixe, revient à dire que son graphe croise celui de la fonction identité définie sur $[a,b]$.

Une démonstration n'est pas difficile à établir. Considérons la fonction continue g définie par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Elle est positive en a, négative en b. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction g possède un zéro dans $[a,b]$. Ce zéro de g est un point fixe de f.

Dimension deux

En dimension deux, un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vrai. La démonstration est néanmoins plus délicate. Si K, le domaine de définition de f est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblable à une boule unité fermée. Le terme semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K. L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire, si h est égal à $fo\phi$, $h(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact K, l'ensemble $[-1,1] \times [-1,1]$, sans perte de généralité.

Si l'on définit la fonction g comme celle qui à x associe $h(x) - x$, cela revient à montrer que la fonction g atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$. Si g_k, pour k égal à 1 ou 2, sont les deux fonctions coordonnées de g, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, tel que g_1 et g_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.

La fonction g_1 est une fonction de $[-1,1] \times [-1,1]$ dans $[-1,1]$. Elle peut s'interpréter comme une carte d'une région, qui en chaque point donne l'altitude. Sur la zone $\{-1\} \times [-1,1]$, cette altitude est positive, en revanche sur $\{1\} \times [-1,1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $[-1,1] \times \{1\}$ pour finir sur un point de $[-1,1] \times \{-1\}$. Le même raisonnement appliquée à g_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point de $\{-1\} \times [-1,1]$ pour terminer sur un point de $\{1\} \times [-1,1]$.

Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $fo\phi$.

Dimension finie

L'approche intuitive du paragraphe précédent se généralise à toute dimension finie. Pour s'en persuader, étudions le cas de la dimension 3. L'objectif est toujours de montrer l'existence d'un zéro de la fonction g, qui maintenant possède trois coordonnées. La première coordonnée est positive sur la face gauche du cube et négative sur la face droite. Il y a tout lieu de penser que la zone des zéros contient une nappe. Cette nappe coupe le cube en au moins deux composantes connexes, l'une contenant une portion de la face de droite l'autre celle de gauche. Si l'axe des y décrit la direction devant-derrière le même raisonnement laisse penser à l'existence d'une nappe, qui coupe encore en au moins deux composantes connexes le cube. L'intersection des deux nappes contient probablement une ligne, partant de la face du haut pour rejoindre celle du bas. La troisième composante de g décrit cette fois-ci une nappe . Cette nappe semble croiser nécessairement la ligne. Ce point d'intersection est un point fixe recherché.

Corollaire : Toute application continue $f : C \to C$, où C est un convexe compact de R^n, admet un point fixe.

Démonstration : Il existe $R > 0$ tel que $C \subset B_f(0,R)$. Puisque C est un convexe compact, il existe une projection $\pi : B_f(0,R) \to C$. On note i l' injection de C dans $B_f(0,R)$, alors l'application $i \circ f \circ \pi$: $\overline{B}(0,R) \to B_f(0,R)$ est continue, donc il existe $x \in B_f(0,R)$ tel que $(i \circ f \circ \pi)(x) = x$ i.e. $f(\pi(x)) = x$. Comme f est à valeurs dans C, on a donc $x \in C$ i.e. $x = \pi(x)$ et f admet donc bien un point fixe.

Théorème[17] (Théorème Kakutani)Soit E un $e.v.n$, K un compact convexe de E et $T_i : K \to K$ une famille quelconque d'applications affines continues qui commutent deux à deux. Alors il existe un point fixe commun à tous les Ti.

Théorème [18] (Ky Fan)
Soit K un convexe métrique compact, et $F : K \to K$ une multi-application fermée à valeurs convexes non-vides, c'est à dire que, pour tout $x \in K$, $F(x)$ est une partie convexe et non vide (et, par la fermeture de F, compacte) de K. Alors F admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe un point $x \in K$ tel que $x \in F(x)$.

3.2.2 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du Point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème :(Schauder) Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve :

Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout x,$y \in K$, on ait $\| T(x) - T(y) \| \leq \varepsilon$ dès que $\| x - y \| \leq \delta$.

De plus, il existe un ensemble fini des points x_1,x_2,...,$x_p \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K , i.e. $k = \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j,\delta)$.

. Si on désigne $l := vect(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \bigcap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue : $\psi_j : E \to R$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 1- \| x - x_j \|_{\overline{\delta}} & si \| x - x_j \| \leq \delta \quad ; \\ 0 \quad sinon & . \end{cases}$$

Et on voit que ψ_j, est strictement positive sur $B(x_j,\delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$,$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives ϕ_j, par :

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \phi_k(x)}$$

Pour lesquelles on a $\sum_{k=1}^{p} \phi_k(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K,g(x) := \sum_{j=1}^{p} \phi_j(x)T(x_j)$, g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un convexe compact des $T(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{|k} : k^* \to k^*$, g possède un point fixe $y \in k^*$.

De plus :

$$T(y) - y = T(y) - T(y);$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)T(x_j);$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \phi_j(y)(T(y) - T(x_j)).$$

Or si $\phi_j(y) \neq 0$, alors $\| y - x_j \| \leq \delta$, et donc $\| T(y) - T(xj) \| \leq \varepsilon$. Donc :

$$\| T(y) - y \| \leq \sum_{j=1}^{p} \| \phi_j(y)(T(y) - T(x_j)) \|;$$

$\leq \sum_{j=1}^{p\varepsilon\phi_j(y)=\varepsilon.}$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\| T(y_m) - y_m) \| < 2 - m$. Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in Z}$, on peut extraire une sous-suite (y_{mk}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors f étant continue, la suite $(T(y_{mk}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i.e. y^* est un point fixe de T sur K .

Théorème [19] (Théorème de Rothe)
Soit X un espace normé, K une partie convexe fermée de X . Alors toute application compacte et continue de K dans K telle que $T\ (\partial K) \subset K$ admet un point fixe.
Le résultat suivant est une autre conséquence du théorème de Schauder qui donne lieu à de nombreuses applications dans les équations aux dérivées partielles :

Théorème: Soit T un opérateur compact de l'espace de Banach X dans lui-même. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que l'égalité $u = \sigma T u$ implique $\| u \| < r$, où $u \in X$, $\sigma \in [0,1]$, alors T admet un point fixe dans $B(0,r)$.

- Le théorème de Schauder reste vrai dans le cas des espaces localement convexes ($e.l.c$), nous allons le confirmer par les théorèmes suivants:

Théorème [16] (Théorème de Tychonoff et Singball)
Soit E un $e.l.c$, et K un compact convexe de E, alors toute application T continue de K dans K admet un point fixe.

Théorème (Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)
Soit X un espace de Banach, Ω un sous ensemble ouvert borné de X, avec $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compact. alors

1) T a un point fixe sur $\overline{\Omega}$ ou bien

2) il existe $\lambda \in (0,1)$ et $u \in \partial\Omega$ tel que : $x = \lambda T(x)$.

3.2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme $T = U + C$.

Théorème (de Krasnoselskii):
Soit X un espace de Banach et D un ensemble non vide de X fermé borné et convexe. U,C deux applications de D dans X telles que : U est une contraction (de constante k) C est compact et continue.

$$Ux + Cy \in D, \forall x, y \in D,$$

Alors il existe $x \in D$ tel que $Ux + Cx = x$.

Démonstration :

Soit y fixé dans D, comme U est une contraction, l'équation $x = Ux + Cy$ admet une solution unique x dans D.

On définit l'application:

$$L : D \to D$$

$$\begin{aligned} &Ly = ULy + Cy \qquad (y \in D) \qquad\qquad (1) \\ &Ly = x \end{aligned}$$

On montre que L est compacte et continue et d'après le théorème de Schauder, on pourra conclure qu'il existe $y \in D$ tel que $Ly = y$, d'où $Uy + Cy = y$.

Soit y_n un point arbitraire de D, alors de (1) :

$$Ly_n + = ULy_n + Cy_n,$$

$$Ly - Ly_n = ULy - ULy_n + Cy - Cy_n,$$

$$\| Ly - Ly_n \| = \| ULy - ULy_n \| + \| Cy - Cy_n \|.$$

Et puisque U est une contraction on a :

$$\| Ly - Ly_n \| = k \| Ly - Ly_n \| + \| Cy - Cy_n \|$$

$$\leq \frac{1}{1-k} \| Cy - Cy_n \| \qquad (2)$$

d'où la continuité de L .

Il reste à montrer que LD est relativement compact.
En effet, comme CD est relativement compact,

$\forall \varepsilon > 0, \exists (1-k)-$réseau $C_{y1},...,C_{yn}$ c'est-à-dire les boules $B(C_{yk},(1-k)-\varepsilon)(1 \leq k \leq n)$ telles que $CD \subset \bigcup_{k=1}^{n} 1B(C_{yk},(1-k)-\varepsilon)$.

Alors de (2), $L_{y1},...,L_{yn}$ est un $\varepsilon-$réseau de LD.

Chapitre 4

Application

dans ce chapitre nous allons présenter quelques unes des noubreuses applications de tous ces théorème en commençant par :

4.1 Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et de Cauchy-Peano

4.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

le théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf pour les anglophones) concerne les solutions d'une équation différentielle. Sous certaines hypothèses de régularité de la fonction définissant l'équation, le théorème garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale dite de Cauchy et l'unicité d'une solution maximale.

Théorème :[20] Soit I un intervalle ouvert de R, Ω un ouvert de R^m et $f : I \times \Omega \to R^m$ une application continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.
Alors, si $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème de Cauchy suivant admet une unique solution maximale.

$$(p)\left\{\begin{array}{ll} y'(t) = f(t,y(t)) & ; \\ y(t_0) = y_0 & . \end{array}\right.$$

Démonstration:

• Cylindre de sécurité: Comme I et Ω sont ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B_f(y_0, r_0)$, un cylindre inclus dans $I \times \Omega$. Comme f est localement lipschitzienne en la

seconde variable, on peut choisir r_0 assez petit pour que f soit k-lipschitzienne sur C_0.
De plus, sur C_0, f est bornée par une constante M.
Soit $T \leq T_0$, et y une solution du probleme de Cauchy definie au moins sur $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$. Supposons qu'elle sorte du cylindre $C = [t_0 - T_0,\, t_0 + T_0] \times B_f(y_0, \tau_0)$ au temps $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ alors, par continuité,

$$r_0 = \parallel y(\tau) - y_0 \parallel = \parallel \int_{t_0}^{\tau} y'(u)du \parallel \leq TM.$$

Donc si $T \leq min(T_0, \frac{r_0}{M})$, alors toute solution definie sur $I_0 \in [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $B_f(y_0, r_0)$.

On nommera cylindre de sécurité l'ensemble $C = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B_f(y_0, r_0)$.

• Existence locale de la solution : On note $\digamma = C([t_0 - T_0, t_0 + T_0], B_f(y_0, r_0))$, et pour $y \in \digamma$, on appelle $\phi(y)$ la fonction définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ comme suit :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$$

Comme $\digamma$ muni de la norme uniforme est une partie complète, et comme $\phi : \digamma \to \digamma$, on va appliquer un théorème de point fixe.
Soient $y_1, y_2 \in \digamma$,

$$\begin{aligned} \mid \phi(y_2) - \phi(y_1) \mid (t) &= \mid \textstyle\int_{t_0}^{t} (f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u)))du \mid \\ &\leq k \textstyle\int_{t_0}^{t} \mid y_1 - y_2 \mid du \\ &\leq kT \parallel y_1 - y_2 \parallel . \end{aligned}$$

Donc $\parallel \phi(y_1) - \phi(y_2) \parallel \leq kT \parallel y_1 - y_2 \parallel$. Et en particulier, si on choisit $T < \frac{1}{k}$, alors ϕ est contractante. On a donc existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

• Unicité locale: Soient y_1 et y_2 deux solutions définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2 contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $J = t \in I_1 \bigcap I_2, y_1(t) = y_2(t)$, on va montrer que $J = I_1 \bigcap I_2$ par connexité.
On sait deja que $[t_0 - T, t_0 + T] \subset J$ par l'unicite vue precedemment, donc J est non vide.
Comme $J = (\widetilde{y_1} - \widetilde{y_2})^{-1}(0)$ (en notant $\widetilde{y_i}$ la restriction de y_i à $I_1 \bigcap I_2$), J est fermé.
Soit $t_1 \in J$, alors y_1 et y_2 sont solutions du nouveau problème de Cauchy

$$(p') : \begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & ; \\ y(t_1) = y_1(t_1) & . \end{cases}$$

En adaptant le début de la preuve, on voit qu'on a égalité de y_1 et y_2 sur un voisinage $[t_1 - T',t_1 + T']$ de t_1. Donc J est ouvert.

Comme $I_1 \bigcap I_2$ est connexe, on a $J = I_1 \bigcap I_2$, ce qui donne l'unicité locale.

- Construction de la solution maximale: On considère $J = \bigcup_{(\widetilde{I},y)\in S} \widetilde{I}$ avec S l'ensemble des $(\widetilde{I},y)$ solution du problème de Cauchy. On définit alors y^* sur J par $y^*(x) = y(x)$ si $(\widetilde{I},y)$ est solution et $x \in I$. On peut faire ça par unicité locale.

La solution y^* est ainsi maximale.

Remarques : Si la condition local-lipschitz n'est pas vérifiée, on n'a plus l'unicité.

4.1.2 Théorème de Cauchy-Peano

Le théorème de Cauchy-Peano-Arzelà est un théorème qui garantit qu'un problème de Cauchy possède toujours au moins une solution locale, sous réserve que la fonction définissant l'équation différentielle soit continue.

Théorème (Cauchy-Peano) Soit I un intervalle non vide de R,U un ouvert de R^n, $(t_0,x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \to R^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = f(t,X) & ; \\ X(t_0) = x_0. & . \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors (4.1) admet une solution locale.

Démonstration : On commence par remarquer que (1) est équivalent à

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,X(s))ds$$

car f est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit $r,M > 0$ tels que

$B_f(x_0,r) \subset U,J := [t_0 - \frac{r}{M},t_0 + \frac{r}{M}] \subset I$ et $\sup_{(t,x)\in J\times B(x_0,r)} \parallel f(t,x) \parallel \leq M.$

On note

$A := \{x : J \to B_f(x_0,r)$ M- lipschitzienne telle que $x(t_0) = x_0\}$

et on définit l'opérateur T sur A par

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,X(s))ds$$

Le but est donc de montrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini : pour $x \in A$ et $t \in J$, on a

$$\parallel T(x)(t) - x_0 \parallel = \parallel \int_{t_0}^{t} f(s,X(s))ds \parallel \leq M|t - t_0| < r$$

et pour $t_1,t_2 \in J$,

$$\parallel T(x)(t_2) - T(x)(t_1) \parallel = \parallel \int_{t_1}^{t_2} f(s,X(s))ds \parallel \leq M|t_2 - t_1|,$$

donc T est bien défini.
A est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que A est compact. En effet, pour $t \in J$, $x(t)|x \in A \subset B_f(x_0,r)$ donc A est ponctuellement bornée (on est en dimension finie) et pour $x \in A$,

$$\parallel x(t_1) - x(t_2) \parallel \leq M|t_1 - t_2|$$

donc A est bien équicontinue.

Montrons que T est continu pour pouvoir appliquer le théorème de Schauder. Soit $x,y \in A$ et $\varepsilon > 0$, alors f est uniformément continue sur $J \times B_f(x_0,r)$ donc il existe $\eta > 0$

tel que

$$\| x - y \|_\infty < \eta \Rightarrow \| f(t,x(t)) - f(t,y(t)) \| < \varepsilon.$$

D'où, pour $\| x - y \|_\infty < \eta$,

$$\| T(x)(t) - T(y)(t) \| \leq \int_{t_0}^{t} \| f(s,x(s)) - f(s,y(s)) \| \, ds < \varepsilon \frac{M}{r},$$

donc T est continu.

Finalement, A est un convexe fermé non vide, T est continu de A dans A et A est compact donc $T(A)$ l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe pour T.

4.2 Théorème d'inversion locale

Le théorème d'inversion locale est un résultat de calcul différentiel. Il indique que si une fonction f est continûment différentiable en un point, si sa différentielle en ce point est inversible alors, localement, f est inversible et son inverse est différentiable.

Théorème:[21] Soit $f : U \subset R^n \to R^n$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert U de R^n contenant 0. On note $a = f(0)$, et on suppose que $Df(0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de 0 dans R^n et un voisinage W de a dans R^n tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.

Démonstration: La démonstration comprendra deux étapes principales. Dans un premier temps, on établira l'existence locale d'un inverse pour f à l'aide d'une méthode de point fixe, puis on étudiera la régularité de cet inverse.

Pour tout $y \in R^n$, on définit la fonction F_y par, pour $x \in U$,

$$F_y(x) = x - Df(0)^{-1}(f(x) - y).$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Fixons dans un premier temps $y \in R^n$. La fonction F_y est de classe C^1 sur U, et

$$DF_y(x) = I_n - Df(0)^{-1}Df(x).$$

En particulier, $DF_y(0) = 0$, et par continuité de DF_y, il existe $\tau > 0$ tel que, si $\| x \| \leq \tau$, alors $\|\mathrm{DF}_y(x) \| \leq \varepsilon$ (on peut choisir τ tel que $B_f(0,\tau) \subset U$). On en déduit, par le théorème des accroissements finis, que $\| F_y(x) - F_y(0) \| \leq \varepsilon \| x \| \leq \varepsilon\tau$. Notons que τ est indépendant de y, puisque c'est le cas de DF_y.

On a $F_y(0) = Df(0)^{-1}(y-a)$. Soit $W = y \in R^n, \| Df(0)^{-1}(y-a) \| < (1-\varepsilon)\tau$; c'est un voisinage ouvert de a. Soit $y \in W$. Alors l'inégalité précédente montre que

$$\| F_y(x) \| < \varepsilon\tau + (1-\varepsilon)\tau = \tau.$$

Ainsi, si $x \in B_f(0,\tau)$, alors $F_y(x)_f(0,\tau)$, et par conséquent, F se restreint en une application de $B_f(0,\tau)$ dans elle-même ; la boule $B_f(0,\tau)$ étant un fermé de R^n, elle est complète.

On a montré de plus que F est ε-lipschitzienne sur $B_f(0,\tau)$, et comme $\varepsilon < 1$, F est contractante. Par le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in B_f(0,\tau)$ tel que $F(x) = x$, autrement dit, $f(x) = y$. On a même $x \in \overline{B}(0,\tau)$, car on peut appliquer ce qui précède à un $\tau' < \tau$ tel que $\| Df(0)^{-1}(y-a) \| < (1-\varepsilon)\tau'$, et obtenir $x_f(0,\tau') \subset \overline{B}(0,\tau)$.

Posons $V = B(0,\tau) \bigcap f^{-1}(W)$. Alors ce qui précède montre que f est une bijection de V sur W. En effet, si $x \in V$, $f(x) \in W$ (puisque $x \in f^{-1}(W)$), et pour tout $y \in W$, il existe un unique $x \in B(0,\tau)$, nécessairement dans V , tel que $f(x) = y$.

Nous avons donc montré l'existence d'un inverse local pour f. Nous allons maintenant nous intéresser à la régularité de cet inverse.

Montrons dans un premier temps que $f^{-1} : W \to V$ est lipschitzienne. Nous allons pour cela réutiliser les applications F_y définies plus haut. Soient $y,y_0 \in W$, et posons $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. On a alors $F_y(x) = x$ et $F_{y_0}(x_0) = x_0$. Ainsi

$$\begin{aligned} x - x_0 &= F_y(x) - F_{y_0}(x0) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) - (F_y(x_0) - F_{y_0}(x_0)) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) + Df(0)^{-1}(y - y_0). \end{aligned}$$

Comme F_y est ε-lipschitzienne, on obtient

$$\| x - x_0 \| \leq \varepsilon \| x - x_0 \| + \| Df(0)^{-1} \| . \| y - y_0 \|$$

et ainsi,

$$\| f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \| = \| x - x_0 \| \leq \frac{\| Df(0)^{-1} \|}{1 - \varepsilon} \| y - y_0 \|$$

Donc f^{-1} est lipschitzienne, et en particulier continue.

Afin d'établir la différentiabilité de f, montrons d'abord que $Df(x)$ est inversible si $\| x \| \leq \tau$. Fixons un tel x et notons, pour simplifier, $A = Df(0)$ et $B = Df(x)$. On a, pour y quelconque, $DF_y(x) = I_n - A^{-1}B$, et rappelons que $\| DF_y(x) \| \leq \varepsilon$ pour $\| x \| \leq \tau$. En particulier, $\| I_n - A^{-1}B \| < 1$, et par conséquent, la série

$$\sum_{k \in N} (I_n - A^{-1}B)^k$$

est convergente, et converge vers un inverse de $I_n - (I_n - A^{-1}B) = A^{-1}B$. Donc $A^{-1}B$ est inversible, et donc c'est également le cas de $B = Df(x)$.

Soient x,$x_0 \in V$, y,$y_0 \in W$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Comme f est différentiable en x_0, on a

$$y - y_0 = Df(x_0)(x - x_0) + o(\| x - x_0 \|).$$

Or, on a montré que f^{-1} est lipschitzienne c'est-à-dire que $\| x - x_0 \| \leq C \| y - y_0 \|$ pour une certaine constante C. Donc $o(\| x - x_0 \|) = o(\| y - y_0 \|)$ et ainsi

$$x - x_0 = Df(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\| y - y_0 \|),$$

ce qui signifie que f^{-1} est différentiable en y_0, de différentielle $Df(f^{-1}(y0))^{-1}$. De plus, $y \mapsto Df(f^{-1}(y))^{-1}$ est continue (composée des applications continues $y \mapsto f^{-1}(y)$, $x \mapsto Df(x)$, et $A \mapsto A^{-1}$). Donc f^{-1} est de classe C^1 sur W.

4.3 Application aux équations aux dérivées partielles

4.3.1 Les théorèmes de Stampacchia et de Lax-Milgram

On rappelle d'abord le théorème de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert :

Théorème: Soient H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in K$ tel que

$$\| x - y \| \leq \| x - z \|$$

pour tout $z \in K$. Si on note $y := P_K x$, alors y est caractérisé par :

1. $y \in K$,
2. pour tout $z \in K$, $< x - y; z - y > \leq 0$.

De plus, pour tous $u,v \in K$,

$$\| P_K u - P_K v \| \leq \| u - v \| . \tag{4.2}$$

On introduit maintenant une définition générale dans un espace de Hilbert :

Définition : Soit H un espace de Hilbert. Soit $A : H \times H \to R$ une forme bilinéaire. On dit que :

1. a est continue si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que, pour tous $u,v \in H$,

$$| a(u,v) | \leq C \parallel u \parallel . \parallel v \parallel;$$

2. a est coercive si, et seulement si, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in H$:

$$a(u,u) \geq c \parallel u \parallel^2:$$

Théorème : [**Théorème de Stampacchia**][22] Soient H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$. Soit $K \subset H$ un fermé convexe non vide. Alors, pour toute forme linéaire continue φ sur H, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$a(u,v-u) \geq \varphi(v-u)$$

pour tout $v \in K$.

Preuve : il existe un unique $f \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $\varphi(v) =< f,v >$. De plus, pour tout $u \in H$, la forme linéaire $v \mapsto a(u,v)$ est conitnue sur H, donc il existe un unique $Au \in H$ tel que $a(u,v) =< Au,v >$ pour tout $v \in H$.

Pour tous $u,v \in H$,

$$|< Au,v >| \leq C \parallel u \parallel . \parallel v \parallel$$

donc, pour tout $u \in H$,

$$\parallel Au \parallel \leq C \parallel u \parallel$$

ce qui montre que A est continue. De plus, pour tout $u \in H$,

$$< Au,u > \geq c \parallel u \parallel^2 . \tag{4.3}$$

On cherche $u \in K$ tel que, pour tout $v \in K$,

$$< Au,v-u > \geq < f,v-u > , \tag{4.4}$$

Soit $\rho > 0$. On voit que (4.4) est équivalente à

$$< \rho f - \rho Au + u - u,v-u > \leq 0 \tag{4.5}$$

pour tout $v \in K$. D'après le théorème , (4.5) est équivalente à

$$u = P_K(\varrho f - \rho Au + u). \tag{4.6}$$

On définit maintenant $S : K \to K$ par

$$Sv := P_K(\rho f - \rho Av + v).$$

On va montrer que, pour un choix convenable de ρ, S est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1. Soient v_1,$v_2 \in K$. D'après (4.1),

$$\| Sv_1 - Sv_2 \| \leq \| v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2) \|;$$

donc, en utilisant (4.2) et (4.3),

$$\| Sv_1 - Sv_2 \|^2 \leq \| v_1 - v_2 \|^2 - 2\rho < v_1 - v_2, Av_1 - Av_2 > + \rho^2 \| Av_1 - Av_2 \|^2$$

$$\leq (1 - 2c\rho + \rho^2 C^2) \| v_1 - v_2 \|^2,$$

et il suffit de choisir $\rho > 0$ assez petit pour avoir $1 - 2c\rho + \rho^2 C^2 < 1$. Le théorème du point fixe montre alors qu'il existe un unique $u \in K$ tel que $Su = u$, ce donne exactement (4.6) donc (4.4).

Un corollaire essentiel du théorème de Stampacchia est le théorème de Lax- Milgram :

Théorème : [**Théorème de Lax-Milgram**] Soient H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$. Alors, pour toute forme linéaire continue φ sur H, il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$,

$$a(u,v) = \varphi(v).$$

Preuve :
Définissons en premier lieu un opérateur $A : H \to H$ de la manière suivante : pour tout $u \in H$, l'application

$$H \to R \qquad v \mapsto a(u,v)$$

est linéaire et continue (car a est linéaire en la seconde variable et est continue). Il existe un unique élément, noté $A(u)$, dans H tel que, pour tout v dans H, $< A(u)|v >= a(u,v)$. la vérification que A est une application linéaire. Pour u dans H, on a

$$\| A(u) \|= sup_{u\in h\setminus\{0\}} \frac{< A(u) \mid v >}{\| v \|} = sup_{u\in h\setminus\{0\}} \frac{< a(u,v) >}{\| v \|} \leq C \| u \| .$$

car a est continue. Ceci montre que A est continue de norme $\leq C$.

Comme, pour tout u dans H,$\alpha \| u \|\leq a(u,u) =< A(u)|u >\leq\| Au \|. \| u \|$, l'on obtient

$$\| Au \|\geq \alpha \| u \| , \qquad \forall u \in H$$

En particulier A est injectif. Cette même majoration permet de montrer que l'image $A(H) \subset H$ est un sous espace fermé : en effet, si $(u_n)_{n\in N}$ est une suite de H telle que $(Au_n)_n$ est une suite convergente, alors la majoration, pour tout $n,m \in N$, $\| u_n - u_n \|\leq\| Au_n - Au_n \| /\alpha$, montre que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy ; elle converge donc vers $u \in H$, et la suite $(Au_n)_n$ converge vers Au.

Montrons enfin que l'image $A(H)$ est dense : en effet, soit $v \in A(H)^\perp$, on a alors, pour tout $u \in H$, $a(u,v) =< A(u)|v >= 0$ et en particulier $a(v,v) = 0$. On en déduit que $v = 0$ et donc que $A(H^\perp) = 0$. Ceci est l'une des caractérisations de la densité d'un sous-espace vectoriel.

Puisque $A(H)$ est à la fois fermé et dense, il vient que $A(H) = H$, autrement $A : H \to H$ est surjectif.

On a ainsi démontré que $A : H \to H$ est une application linéaire bijective et continue. Les inéaglités $\| u \|\leq\| Au \| /a$ permettent de montrer que A^{-1} est continu de norme $\leq 1/\alpha$.

Soit maintenant $f \in H$ tel que $\phi(v) =< f|v >$ pour tout $v \in H$. L'équation est alors équivalente à $A(u) = f$. L'existence et l'unicité cherchées suivent donc du fait que A est une bijection.

4.3.2 Application aux équations aux dérivées partielles

On va maintenant appliquer la théorie des espaces de Sobolev pour résoudre le problème suivant. On notera $\triangle$ l'opérateur Laplacien

$$\triangle := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Soit $U \subset R^n$ un ouvert borné. On se donne une fonction $f : U \to R$ et on cherche les solutions $u : \overline{U} \to R$ du problème suivant :

$$\begin{cases} -\triangle u + u = f & dans \quad U \quad ; \\ u = 0 & sur \quad \partial U \quad . \end{cases} \tag{4.7}$$

Un tel problème, où on prescrit la valeur de u sur ∂U, s'appelle problème de Dirichlet. Il faut d'abord préciser le sens exact de (4.7).

Définition : Une solution classique de (4.7) est une fonction $u \in C^2(\overline{U})$ vérifiant (7) au sens usuel, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} -\triangle u(x) + u(x) = f(x) & pour \quad tout \quad x \in U \quad ; \\ u(x) = 0 & pour \quad tout \quad x \in \partial U \quad . \end{cases}$$

Définition : On suppose $f \in L^2(U)$. Une solution faible de (7) est une fonction $u \in W_0^{1,2}(U)$ telle que, pour toute $v \in W_0^{1,2}(U)$;

$$\int_U \nabla u(x).\nabla v(x) dx + \int_U u(x)v(x)dx = \int_U f(x)v(x)dx.$$

On précise que, pour tout $x \in U$,

$$\nabla u(x).\nabla v(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).\frac{\partial v}{\partial x_i}(x).$$

On montre alors :

Théorème :

1. Toute solution classique de (4.7) est une solution faible.

2. Pour toute fonction $f \in L^2(U)$, il existe une unique solution faible de (4.7).

Preuve : pour 1. soit u une solution classique de (4.7). Alors $u \in W^{1,2}(U) \bigcap C(\overline{U})$, donc $tr\ u = 0$, donc $u \in W_0^{1,2}(U)$ (théorème de trace). De plus, pour toute $v \in C_c^{\infty}(U)$, on a

$$\int_U \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_U u(x)v(x)dx = \int_U f(x)v(x)dx.$$

et, par densité de $C_c^{\infty}(U)$ dans $W_0^{1,2}(U)$, cela reste vrai pour toute $v \in W_0^{1,2}(U)$.

Pour 2. on applique le théorème de Lax-Milgram avec $H := W_0^{1,2}(U)$, $a(u,v) : \int_U \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_U u(x)v(x)dx$ et $\varphi(v) := \int_U f(x)v(x)dx$. Le caractère coercif de a provient de la définition de la norme $W^{1,2}(U)$.

On peut en fait montrer que, si $f \in L^2(U)$, l'unique solution $u \in W_0^{1,2}(U)$ de (4.7) est en fait plus régulière. Pour préciser ce résultat, on définit un espace de Sobolev d'ordre 2 :

Définition : Soient $U \in R^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq +\infty$. Soit $u \in L^1_{loc}(U)$.

1. Soient $1 \leq i; j \leq n$ et $v \in L^1_{loc}(U)$. On dit que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = v$ au sens faible si, et seulement si, pour toute fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(U)$,

$$\int_U u(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x)dx = \int_U v(x)\varphi(x)dx :$$

2. On dit que $u \in W^{2,p}(U)$ si, et seulement si $u \in W^{1,p}(U)$ et, pour tous $1 \leq i; j \leq n$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(U)$. On pose alors

$$\| u \|_{W^{2,p}(U)} \begin{cases} (\int_U \mid u(x) \mid^p dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_U \mid \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \mid^p dx + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_U \mid \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) \mid^p dx)^{\frac{1}{p}} \\ si \quad p \leq +\infty \\ \\ \| u \|_{L^\infty(U)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^\infty(U)} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \|_{L^\infty(U)} \qquad si \quad p = +\infty \end{cases}$$

On définit également la notion d'ouvert de classe C^2.

Définition : Soit $U \subset R^n$ un ouvert. On dit que U est de classe C^2 si, et seulement si, pour tout $x_0 \in \partial U$, il existe $r > 0$ et une fonction $\gamma : R^{n-1} \to R$ de classe C^2 telle que

$$U \bigcap B(x_0,r) = x \in B(x_0,r); x_n > \gamma(x_1,...,x_{n-1}).$$

Alors :

Théorème : Soit $U \in R^n$ un ouvert borné de classe C^2. Soit $f \in L^2(U)$ et $u \in W_0^{1,2}(U)$ la solution de (4.7). Alors $u \in W^{2,2}(U)$ et il existe $C > 0$ ne dépendant que de U tel que

$$\| u \|_{W^{2,2}(U)} \leq C \| f \|_{L^2(U)} . \tag{4.8}$$

Preuve : on rappelle que la solution $u \in W_0^{1,2}(U)$ de (4.7) vérifie

$$\int_U \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_U u(x)\varphi(x)dx = \int_U f(x)\varphi(x)dx. \tag{4.9}$$

pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(U)$.

On prend d'abord le cas $U = R^n$. On utilise une méthode de translation. Pour tout $h \in R^n$ et toute fonction u sur R^n, on définit

$$D_h u := \frac{\tau_h u - u}{| h |}$$

Soit $h \neq 0$. Comme $u \in W^{1,2}(R^n)$, $D_h u \in W^{1,2}(R^n)$ et aussi $D_{-h}(D_h u) \in W^{1,2}(R^n)$. Appliquant (9) avec $\varphi := D_{-h}(D_h u)$, on obtient

$$\int_{R^n} \nabla u(x).\nabla D_{-h}(D_h u)(x)dx + \int_{R^n} u(x)D_{-h}D_h u(x)dx = \int_{R^n} f(x)D_{-h}D_h u(x)dx.$$

ou encore

$$\int_{R^n} | \nabla D_h u(x) |^2 \, dx + \int_{R^n} | D_h u(x) |^2 \, dx = \int_{R^n} f(x)D_{-h}D_h u(x)dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\| D_h u \|^2_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} \| D_{-h}D_h u \|_{L^2(R^n)}:$$

Or,

$$\| D_{-h}D_h u \|_{L^2(R^n)} \leq \| \nabla D_h u \|_{L^2(R^n)};$$

si bien que

$$\| D_h u \|^2_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} \| \nabla D_h u \|_{L^2(R^n)} ,$$

donc

$$\| D_h u \|_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} .$$

Cela signifie que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} .$$

et comme cela est vrai pour tout h, alors

$$\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} .$$

ce qui donne bien (8) dans ce cas.

On suppose maintenant que $U = R^n_+$. On raisonne de façon analogue, mais seulement pour $h \in R^{n-1} \times 0$. Soit un tel $h \neq 0$. On vérifie que $D_{-h} D_h u \in W^{1,2}_0(R^n_+)$, donc, comme précédemment,

$$\| D_h u \|^2_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)} \| D_{-h} D_h u \|_{L^2(R^n)} .$$

ce qui donne

$$\| D_{-h} D_h u \|_{L^2(R^n)} \leq \| \nabla D_h u \|_{L^2(R^n)};$$

donc, comme précédemment,

$$\| D_h u \|_{W^{1,2}(R^n)} \leq \| f \|_{L^2(R^n)}$$

pour tout $h \in R^{n-1} \times 0$.

Soient maintenant $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$. On prend $h = | h | e_j$ et $\varphi \in C^\infty_c(R^n_+)$. On a

$$| - \textstyle\int_{R^n_+} u(x) D_{-h}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})(x) dx | = | \textstyle\int_{R^n_+} D_h(\frac{\partial u}{\partial x_i})(x) \varphi(x) dx |$$

$$\leq \| f \|_{L^2(R^n_+)} \| \varphi \|_{L^2(R^n_+)} .$$

Faisant tendre $| h |$ vers 0, on obtient donc

$$| \int_{R^n_+} u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) dx | \leq \| f \|_{L^2(R^n_+)} \| \varphi \|_{L^2(R^n_+)} .$$

Cela signifie bien que $\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \|_{L^2(R^n_+)} \leq \| f \|_{L^2(R^n_+)}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq n-1$.
Comme $-\triangle u + u = f$ dans U, on peut donc écrire

$$| \int_{R^n_+} u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}(x) dx | \leq \sum_{i=1}^{n-1} | \int_{R^n_+} u(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x) dx | + | \int_{R^n_+} (f(x) - u(x)) \varphi(x) dx |$$

$$\leq C \| f \|_{L^2(R^n_+)} \| \varphi \|_{L^2(R^n_+)},$$

ce qui termine la preuve de (8) dans ce cas.

Pour le cas où U est un domaine borné de classe C^1, soit $k \geq 1$. Il est possible de définir les dérivées faibles d'ordre k de façon analogue aux dérivées faibles d'ordre 1 et 2, puis l'espace de Sobolev $W^{k,p}(U)$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. On définit également les ouverts de classe C^k pour tout entier $k \in C^k$. On peut alors prouver :

Théorème : Soit $U \subset R^n$ un ouvert borné de classe C^{m+2}, avec $m \in N$. Soit $f \in W^{m,2}(U)$ (on convient que $W^{0,2}(U) = L^2(U)$). Alors l'unique solution $u \in W_0^{1,2}(U)$ de (7) appartient à $W^{m+2,2}(U)$ et

$$\| u \|_{W^{m+2,2}(U)} \leq C \| f \|_{W^{m,2}(U)} .$$

On peut énoncer des théorèmes de plongement pour les espaces $W^{k,p}$ analogues à ceux vus pour $W^{1,p}$. En particulier, si $m > \frac{n}{2}$, $W^{m+2,2}(U) \hookrightarrow C^2(\overline{U})$.
On déduit du théorème que, si U est de classe C^{m+2} et $f \in W^{m,2}(U)$ avec $m > \frac{n}{2}$, alors la solution $u \in W_0^{1,2}(U)$ de (7) appartient à $C^2(\overline{U})$, c'est donc une solution classique de (7). En effet, comme u est de trace nulle, on a bien $u = 0$ sur ∂U. De plus, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$,

$$\int_u (-\triangle u(x) + u(x) - f(x)) \varphi(x) dx = 0,$$

ce qui montre que $-\triangle u(x) + u(x) - f(x) = 0$ pour presque tout $x \in U$. Mais comme $-\triangle u + u - f$ est continue sur $\overline{U}$, $-\triangle u + u - f$ est identiquement nulle sur U.

[1] G. Choquet. Cours d'Analyse. Tome II. Masson (1964) .

[2] L. Kelley. General Topology Van Nostrand (1955).

[3] N. Bourbaki. Eléments de mathématique. Topologie Générale. Hermann.

[4] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications, Springer.

[5] C. Bessaga, On the converse of the Banach fixed point principle, colloq. Math.7 (1959) 41-43.

[6] S. Gonnord et N. Tosel, Calcul diff´erentiel, Ellipses, 1998.

[7] Agarwal, R.P., O'Regan, D., Sahu, D.R.: Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications. Springer, New York (2009) .

[8] M. Cosnard et J. Demongeot ,THEOREME DE POINT FIXE ET PROCESSUS DE GALTON-WATSON, Ann. SC. math. Québec, 1984, vol. 8, no 1, pp. 5-21.

[9] D. W. Boyd and S.W.Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[10] M. Edelstein, An extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7-10.

[11] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326-329.

[12] M. Geraghty, On contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 604-608.

[13]] J. A.Meszaros, A comparison of various definitions of contractive type mappings, Bull. Calcutta Math. Soc., 84 (2) (1992), 167-194.

[14] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.

[15] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326-329.

[16] A. Tychonoff, « Ein Fixpunktsatz », Math. Ann., vol. 111,? 1935, p. 767–776.

[17] Shizuo Kakutani, « A generalization of Brouwer's fixed point theorem », Duke Math. J., vol. 8, no 3,? 1941, p. 457-459.

[18] Ky Fan, « Fixed-point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological

Linear Spaces ≫, PNAS, vol. 38, no 2,? 1952, p. 121-126.

[19] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 2 (1955), 1–20 ; corrigendum.

[20] J.P Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.

[21] Sandrine CARUSO, Petit guide de calcul différentiel, Rouvière .

[22] Breizis, théorème V.6p83 et pages 136-137 pour les applications.