MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER 2

SPECIALITE: MATHÉMATIQUES

OPTION: MATHÉMATIQUES APPLIQUES A LA GESTION

Thème

EXTENSION DE LA DUALITÉ DANS UN ENVIRONNEMENT FLOU

Présenté par:

Yasmine Bouam et Dihia Amiri

Devant le jury d'examen composé de :

Président :	M^{me} Rezika Kheffache	MAA U.M.M.T.O
Examinateur :	M^{r} Abdelkader Merakeb	MCA U.M.M.T.O
Promotrice :	M^{me} Ouiza Bouarab	MCB U.M.M.T.O

Soutenu le 2016/ 2017

Remerciements

Nous remercions d'abord notre Bon Dieu qui nous a ouvert les portes du savoir et nous a permis de réaliser ce modeste travail.

Nous tenons à remercier *Mme* BOUARAB de nous avoir fait l'honneur d'être promotrice de ce mémoire.

Nos vives reconnaissances de nous avoir proposé ce sujet, pour toute sa présence, ses précieux conseils et remarques.

Nous avons eu un énorme plaisir de travailler avec elle.

Nous souhaitons également remercier nos enseignants qui nous ont tenu et transmis le savoir, l'esprit de recherche et de persévérance dans nos études durant notre cursus.

Nous remercions nos camarades pour leur soutien et encouragements.

Enfin, nous remercions chaleureusement nos chers parents pour tous

leurs efforts. Nous espérons que leur fierté ne sera pas que celle

de ce titre obtenu, mais surtout d'avoir fait de nous ce que nous sommes.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes chers parents pour leur soutien, leur patience, leurs sacrifices et leurs amour.

Mes sœurs pour leur affection et leurs encouragements qui ont toujours été pour moi des plus précieux.

Mounir et sa famille.

Elyane que j'adore.

Tous mes amis spécialement Sabah, Hayet et leurs familles.

Ma binôme Yasmine et sa famille.

Dihia

Dédicaces

Je remercie le Bon Dieu tout puissant de m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie cette thèse à

La mémoire de mon père que Dieu le garde dans son vaste paradis,

Ma mère pour son soutien et son dévouement tout au long de mes études,

Mes frères Farid, Mohand et Djamel que je remercie pour leurs encouragements, leurs aides ainsi que toute ma grande famille.

À l'homme qui m'a choisi pour me donner son nom à jamais, mon époux et sa famille.

À ma binôme Dihia et à tous mes amis sans citer de noms.

À tous ceux qui aiment Yasmine et ceux que Yasmine aime.

Yasmine ou Katia

Table des matières

La Programmation Linéaire (PL) est un instrument générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence différents dans des contextes divers. La Programmation Linéaire relève des mathématiques de la Recherche Opérationnelle (RO) et a des applications en gestion ainsi qu'en économie, en statistique, en physique,… etc.

En mathématiques, le problème de Programmation Linéaire est un problème qui consiste à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de plusieurs variables qui sont reliées par des relations linéaires appelées contraintes. La Programmation Linéaire est une technique mathématique permettant de déterminer la meilleure solution d'un problème dont les données et les inconnues satisfont une série d'équations et d'inéquations linéaires, il existe plusieurs méthodes qui assurent la résolution du problème de manière exacte comme la méthode du simplexe (Dantzig 1947), la méthode duale, la méthode duale-simplexe, la méthode de Khachyan, la méthode adaptée (Gobasov 1970) et la méthode Karmatar , ... etc.

Parmi les méthodes les plus connues pour résoudre les problèmes de la Programmation Linéaire en nombres réels sont la méthode du simplexe et la méthode du dual.

La méthode du simplexe a été conçue en 1947 par George Dantzig [3] pour résoudre des problèmes de grande taille. Il s'agit d'une méthode algébrique robuste et efficace basée sur la résolution de systèmes d'équations linéaires mais elle est plus compliquée et exige plus de temps. Le fondement mathématique de cette méthode garantit une grande précision des résultats. Les fondements de la méthode du simplexe ont été énoncés en 1949 et publiés en 1959 par G. Dantzig.

Si les données du problème sont mal connues ou imprécises de nature floue, on parlera alors d'un programme linéaire flou qui est considéré comme le meilleur outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement imprécis.

Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque L. A. Zadeh [17], professeur à l'université de Californie à Berkeley, a introduit la notion de sous-ensemble flou à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe de catégorie aux limites mal définies, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien. Les premières publications sur la théorie des ensembles flous datent de 1965 (Zadeh) suivies par les travaux de Goguen en 1967 et 1969. Ces travaux démontrent l'intention de leurs auteurs à généraliser la notion classique d'un ensemble et d'une proposition afin d'accommoder les données floues. Dans le même contexte, Bellman et Zadeh 1970 ont développé la Programmation Linéaire Floue qu'ils ont appliqué à un processus de décision dans un environnement flou.

La théorie des ensembles flous offre donc une structure mathématique dans laquelle des concepts vagues peuvent être précisément et rigoureusement étudiés.

Elle peut également être considérée comme un langage de modélisation convenable à des situations caractérisées de relations, critères ou phénomènes flous.

Cette thèse de Master est organisée en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous parlerons de la Programmation Linéaire déterministe, nous donnerons un exemple d'un problème réel et sa modélisation en reliant un programme linéaire. Puis, nous exposerons les différentes formes d'un problème primal et ses liens avec son problème dual correspondant. Puis nous exposerons une méthode de résolution à savoir la méthode du simplexe.

Dans le deuxième chapitre, nous allons introduire la théorie des ensembles flous, donner les définitions et les concepts de base facilitant la compréhension du chapitre trois.

Le troisième chapitre, abordera la Programmation Linéaire Floue dont le caractère flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux puis nous détaillerons le concept de problème primal flou et le problème dual flou avec toute la théorie correspondante. Ainsi, notre modeste contribution dans notre thèse, consiste à généraliser ou faire une extension des résultats étudiés au chapitre un du cas déterministe au cas flou.

I.1 Introduction

La programmation mathématique a comme objet l'étude des problèmes d'optimisation en dimension finie. Ces problèmes ou modèles représentent généralement une abstraction mathématique réelle.

La Programmation Linéaire, introduite par G.B. Dantzig en 1947au lendemain de la deuxième guerre mondiale, constitue le domaine de la programmation mathématique le plus étudié. Elle concerne l'optimisation d'un programme mathématique où la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

I.2 Exemple réel de problème linéaire

Une usine produit deux types de ciment rapportant 50 \$ et 70 \$ par tonne. Pour faire une tonne de ciment de type I il faut 40 min de calcination dans un four à chaux et 20 min de broyage. Pour fabriquer une tonne de ciment de type II il faut 30 min de four à chaux et 30 min de broyage. Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 6h et 8h par jour.

Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

Ce problème se modélise aisément par le programme linéaire suivant, en notant x_1 et x_2 les quantités à produire des deux ciments.

$$\begin{cases} \max F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 & (1) \\ 40x_1 + 30x_2 \leq 360 & (2) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 480 & (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

La ligne (1) représente le profit total **F** qui est le critère à optimiser, appelé aussi fonction objectif, fonction de coût ou fonction économique. **max** signifie que le critère doit être maximisé, (on mettrait **min** pour minimiser). Les autres lignes représentent les contraintes.

Les lignes (2), (3) et (4) désignent le domaine des solutions réalisables. La contrainte (2) concerne la disponibilité du four:

elle stipule que le temps total de calcination requis par les ciments ne doit pas dépasser les 360 minutes ou 6h. La contrainte (3) décrit de même la disponibilité du broyeur.

La contrainte (4) précise le domaine des variables, appelée aussi contrainte de non-négativité.

I.3 Forme générale d'un programme linéaire

Un problème de Programmation Linéaire peut se représenter sous forme des trois modèles [2], [6], [11], [13] et [16] suivants :

I.3.1 Forme canonique mixte

Il s'agit d'un problème de Programmation Linéaire (encore appelé programme linéaire) écrit sous la forme suivante:

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)} \left[F(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \right]$$

$$\begin{cases} Contraintesinégalités: \ \forall i \in I_1, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \\ Contrainteségalités: \ \forall i \in I_2, & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ Contraintesdesignes: & \forall j \in J_1, x_j \geq 0 \\ \qquad \forall j \in J_2, x_j \ de\ signe\ quelconque. \end{cases} \tag{1.1}$$

L'ensemble $I = I_1 \cup I_2$ est l'ensemble des indices des contraintes avec $\mathrm{card}(I) = m$. Autrement dit, il y a m contraintes.

L'ensemble $J = J_1 \cup J_2$ est l'ensemble des indices des variables avec $\mathrm{card}(J) = n$. Autrement dit, il y a n variables.

I.3.2 Forme canonique pure

Un Programme Linéaire (PL) est dit sous forme canonique pure s'il s'écrit de la manière suivante :

$$(PL)\begin{cases} max[F(x) = c^T x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n] \\ \quad s.c. \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Où

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

Et la matrice A de taille $m \times n$ est telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous cette forme, il n'y a pas de contraintes d'égalité c'est-à-dire $I_2 = \emptyset$ avec$J_2 = \emptyset$.

I.3.3 Forme standard

Sous cette forme $I_1 = \emptyset$ et $J_2 = \emptyset$. Un Programme Linéaire (PL) est dit sous forme standard s'il s'écrit :

$$(PL)\begin{cases} max[F(x) = c^T x] \\ \quad s.c. \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

I.4 Solution de base réalisable [4], [13], [16]

Définition 1

On appelle solution réalisable tout vecteur x qui satisfait les contraintes du (PL) tel que $Ax = b \; et \; x \geq 0$.

Définition 2

Soit $B \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $card(B) = m$ tels que les colonnes $a_j (j \in B)$ de A soient linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes a_j est inversible. On dit alors que l'ensemble B indices est une base.

- Les variables $x_B = (x_j,\ j \in B)$ sont appelées variables de base.
- Les variables $x_H = (x_j\ ,\ j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.

Définition3

On dit que $x = (x_B, x_H)^T$est une solution de base associée à la base B si $x_H = 0$.

Remarque 1

Si $x = (x_B, x_H)^T$ est une solution de base réalisable alors $x_H = 0$ et $x_B = (A_B)^{-1}.b$

I.5 Propriétés géométriques des solutions de base réalisables

On note $D_R = \{x \in \mathbb{R}^n\ ,\ Ax = b,\ \ x \geq 0\}$,

l'ensemble des solutions réalisables d'un (PL) sous forme standard.

Commençons par rappeler les notions de polyèdre et d'ensemble convexe :

Définition 4

_ L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \ a'x = b\}$ représente un hyperplan de $\mathbb{R}^n$;

_ L'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \ a'x \leq b\}$ représente un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^n$ dont l'hyperplan correspondant constitue la frontière.

Définition 5 Polyèdre

Un polyèdre S est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés et /ou d'hyperplans. Un polyèdre est un ensemble convexe fermé.

- Un polyèdre Q de $\mathbb{R}^n$ est défini par $Q = \{x \in \mathbb{R}^n\ ,\ \ Ax \leq b\}$ où A est une matrice $m \times n$.
- Un ensemble E est dit convexe si :
  $\forall x, y \in E, \lambda x + (1 - \lambda) y \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition 1

L'ensemble $D_R$des solutions réalisables de (PL) est un polyèdre convexe, fermé.

Définition 6

Un point $x \in D_R$ est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas de$y, z \in D_R$, $y \neq z$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ avec $0 < \lambda < 1$.

Théorème 1

x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de D_R.

Remarque 2

L'optimum de la fonction objectif F sur D_R, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de D_R.

Pour résoudre un problème linéaire(PL) sous forme standard, il suffit de se restreindre aux solutions de base réalisables (c'est-à-dire les sommets de D_R). Tout se passe donc avec les solutions de base.

L'ensemble D_R n'est pas nécessairement borné. En fait pour un(PL), trois situations (et seulement trois) peuvent se produire :

1. $D_R = \emptyset$: le (PL) n'a pas de solution,
2. $D_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif F n'est pas majorée sur D_R : le maximum de F vaut $+\infty$. Si D_R est borné, ce cas est exclu;
3. $D_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif F est majorée sur D_R : le (PL) admet une solution optimale (non nécessairement unique).

Définition 7 Solution dégénérée et non dégénérée [6]

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B > 0$.

Si, au moins, une composante $x_B = 0$ alors x est appelée une solution de base réalisable dégénérée.

I.6Méthodes de résolution du (PL)

Dans notre travail nous allons dérouler la méthode la plus utilisée qui est la méthode du simplexe. L'algorithme du simplexe, introduit en 1947 par G.B Dantzig, nous permet de se déplacer d'une solution de base réalisable à une autre améliorant la valeur de la fonction objectif, jusqu'à trouver une solution optimale en un nombre fini d'étapes. Malgré une complexité théorique dans le pire des cas exponentielle, il permet de résoudre rapidement la plupart des problèmes.

I.6.1 Variable d'écart et la transformation à la forme standard

La méthode de résolution que nous employons nécessite que les contraintes fonctionnelles du modèle soient exprimées sous forme d'équations linéaires (forme standard) au lieu d'inéquations. Cette transformation s'effectue facilement en introduisant dans le modèle de nouvelle variable appelée variable d'écart.

I.6.1.1 Transformation d'une inéquation de signe $(\leq)$

Toute contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

peut être remplacée par un système de contrainte suivant:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i \\ e_i \in \mathbb{R} \; et \; e_i \geq 0. \end{cases}$$

où

$$e_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (1.4)$$

est appelée variable d'écart.

I.6.1.2 Transformation d'une inéquation de signe (≥)

Toute contrainte de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

peut être remplacée par un système de contrainte suivant:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i = b_i \\ e_i \in \mathbb{R} \; et \; e_i \geq 0 \end{cases}$$

où

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \qquad (1.5)$$

est aussi appelée variable d'écart.

I.7 Algorithme du simplexe de maximisation [13], [16]

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un (PL) sous forme standard , la matrice A peut s'écrire :

$$A = (A_B \, , A_H)$$

avec A_B une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible , correspondant aux variables de base et A_H une matrice de taille $m \times (n - m)$, correspondant aux variables hors -base. On décompose, également à la même permutation près les composantes de

$$x = (x_B, x_H)^T$$

avec x_B les variables de base et x_H les variables hors base.

Le but de l'algorithme est de trouver une autre base B^* et une solution de base x^*associée telle que :

$F(x^*) > F(x)$ (x^*est meilleur que x)

La méthode du simplexe consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (variable sortante).

I.7.1 Détermination de la variable entrante et calcul des coûts réduits [13]

On écrit la fonction objectif F avec les variables de base et hors base. On a

$b = Ax = (A_B, A_H)\binom{x_B}{x_H} = A_B x_B + A_H x_H$ avec A_B inversible donc $x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H)$. Ce qui implique que :

$$F(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_H^T x_H \text{ avec } c = (c_B, c_H)^T$$

$$= c_B^T A_B^{-1}(b - A_H x_H) + c_H^T x_H$$

$$= c_B^T A_B^{-1} b + (c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H).x_H$$

Or $x_B^* = A_B^{-1} b$ (car $x_H^* = 0$) et donc $c_B^T A_B^{-1} b = c^T x^* = F(x^*)$ donc

$$F(x) = F(x^*) + (c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H).x_H$$

Le vecteur $L_H^T = c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H$ s'appelle vecteur des coûts réduits.

− Si les coûts réduits sont tous négatifs c'est-à-dire $L_H^T \leq 0$, il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif F donc l'algorithme se termine c'est-à-dire qu'on a trouvé une solution de base réalisable optimale.

− Dans le cas contraire (il existe $(L_H)_i \geq 0$), on a intérêt à faire rentrer dans la base, la variable hors -base qui a le coût réduit positif le plus grand possible.

On note $e \notin B$ l'indice de variable entrante. on choisit e tel que :

$$(L_H)_e = \max_j \{(L_H)_j, (L_H)_j > 0\}$$

Ce qu'on note par

$$e = \max_j \{(L_H)_j, (L_H)_j > 0\} \tag{1.6}$$

Remarque 3

Si on traite d'un problème de minimisation c'est-à-dire avec $\min F(x)$, alors la variable entrante x_e est déterminée par l'indice

$$e = \min_j \{(L_H)_j, (L_H)_j < 0\} \tag{1.7}$$

I.7.2 Détermination de la variable sortante [11], [13]

Une fois l'indice e choisi, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_e jusqu'à annuler une des variables de base. Cette variable sera alors la variable sortante.

$$Ax = b \Leftrightarrow A_B x_B + A^e x_e = b$$

OùA^edésigne la e-ième colonne de A

$$\Leftrightarrow x_B = A_B^{-1}(b - A^e x_e)$$

$$\Leftrightarrow x_B = x_B^* - A_B^{-1} A^e x_e$$

$$\Leftrightarrow x_B = x_B^* - z x_e$$

où l'on a noté $z = A_B^{-1} A^e \in \mathbb{R}^m$.

$-$ Si $z \leq 0$, on peut augmenter x_e autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base x_B. La fonction objectif n'est pas majorée sur D_R, c'est à dire le maximum de F vaut $+\infty$. Dans ce cas, l'algorithme s'arrête.

$-$ Sinon (il existe $z_i > 0$), pour avoir la positivité $(x_B^*)_i - z_i x_e \geq 0$ pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport

$(x_B^*)_i / z_i$ pour $i = 1, \dots, m$ avec $z_i > 0$, soit le plus petit possible. On choisit

$$s = \min_i \left\{ \frac{(x_B^*)_i}{z_i}, \ z_i > 0 \right\}$$

On a, dans ce cas, $x_s = 0$ et $x_B \geq 0$. La valeur de la variable sortante est donnée alors par :

$$x_e = \min_i \left\{ \frac{(x_B^*)_i}{z_i}, \quad z_i > 0 \right\} \qquad (1.8)$$

Remarque4

Solution optimale unique

Une solution de base réalisable est optimale et unique si, pour les variables hors base :

- Dans le cas d'une maximisation tous les $L_H^T < 0$,
- Dans le cas d'une minimisation tous les $L_H^T > 0$.

Solution optimale multiple

Il existe une infinité de solutions optimales pour (PL) si :

- Pour une variable hors base $L_H^T = 0$.

En effet, s'il y a un terme $L_H > 0$ sous le vecteur a_j,on peut introduire a_j dans la base et obtenir une autre solution de base optimale.

I.7.3 Procédure de l'algorithme du simplexe

Étape0:

- Calcul des variables de base réalisables :

étant donné $A = (A_B, A_H)$, on calcule les variables de base réalisables

$$x_B^* = A_B^{-1} b \geq 0.$$

- Calcul des coûts réduits : $L_H^T = c_H^T - c_B^T A_B^{-1} A_H$
- Si $L_H \leq 0$ alors x_B^*est une solution optimale ($\rightarrow$ arrêt de l'algorithme.).

Étape1: Variable entrante:

$$e = \max_j \{ (L_H)_j, (L_H)_j > 0 \}$$

Étape2: Variable sortante : Calcul de $z = A_B^{-1} A^e$ puis

$$s = \min_i \left\{ \frac{(x_B^*)_i}{z_i} \quad , \quad z_i > 0 \right\}$$

Étape 3: On obtient une nouvelle base B^* et une nouvelle matrice A_{B^*} dans laquelle la colonne A^e remplace la colonne A^s. Calcul de $A_{B^*}^{-1}$ et retour à l'étape 1.

I.7.4 Méthode des tableaux [13]

Les calculs précédents peuvent se simplifier si on s'arrange pour avoir toujours

$A_B = I_d$. On dit qu'on maintient l'identité sous la base. De cette façon, la résolution d'un système $A_B x_B = b$ est immédiate, puisque$x_B = b$. On va donc chercher à travailler avec la forme simpliciale de(PL).

On suppose que la matrice A se décompose en $A = (I_m, A_H)$oùI_m est la matrice identité d'ordre m et on dispose d'une solution de base réalisable $x = (x_B,\ x_H)^T$ avec

$x_B = b$ et $x_H\ = 0$.

Dans ce cas, les coûts réduits se simplifient en :

$$L_H^T = c_H^T - c_B^T A_H$$

et les indices e et s des variables entrantes et sortantes sont donnés par :

$$e = \max_j \{(L_H)_j, (L_H)_j > 0\}$$

$$s = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ie}}, où a_{ie}\ =\ (A_H)_{i,e} > 0\right\}$$

avec $x_e = \frac{b_s}{a_{se}}$

On réécrit les expressions ci-dessus, sous forme d'un tableau , comme suit :

Tableau1

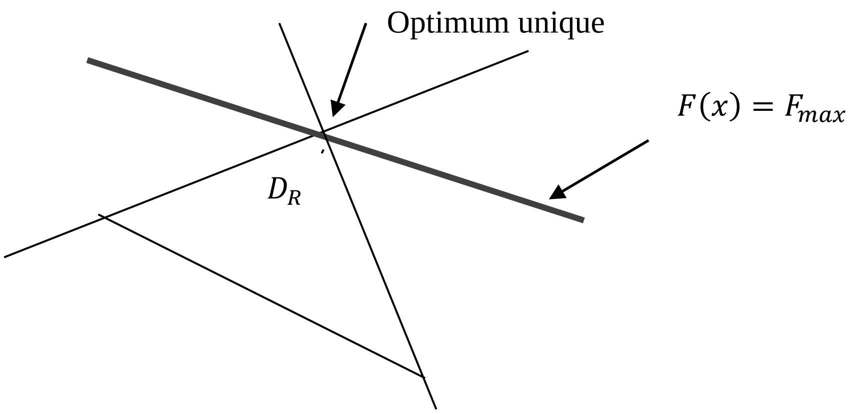
$Base$	x_B	x_H	$S.B.R$
L_H^T	0	$L_H^T = c_H^T - c_B^T A_H$	$c_B^T A_B^{-1} b$
x_B	I_m	$A_B^{-1} A_H$	$A_B^{-1} b$

Le tableau , ci-dessus, nous donne toutes les informations dont on a besoin pour procéder à la méthode du simplexe.

I.7.5 Finitude du simplexe [13]

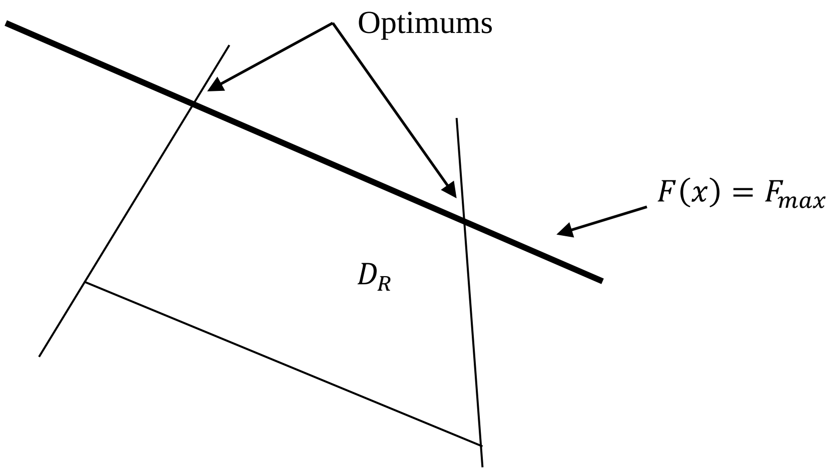
A chaque étape de l'algorithme du simplexe, on peut distinguer des cas remarquables qui conduisent à l'arrêt de l'algorithme.

1. Si les coûts réduits $L_H < 0$, alors la solution de base réalisable courante est l'unique optimum.

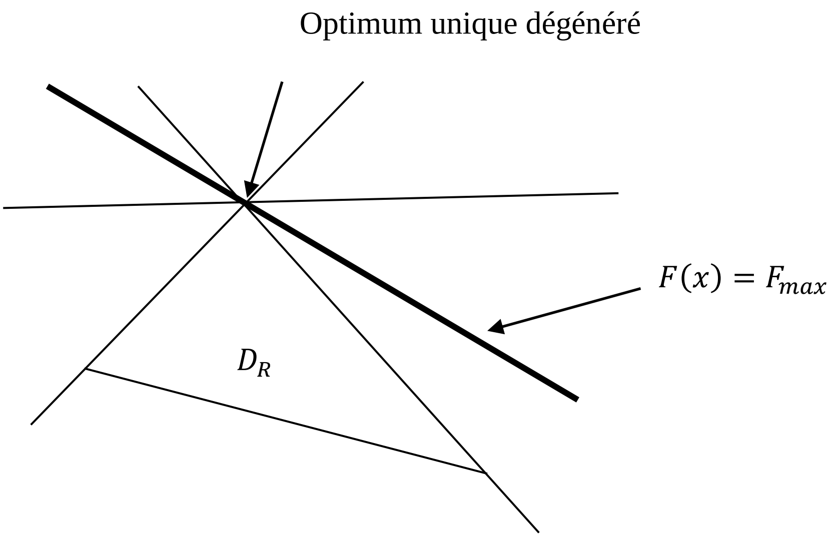


2. Si les coûts réduits $L_H \leq 0$, alors il ya deux cas remarquables:

i) Si $(L_H)_e = 0$ et $x_e > 0$, alors l'optimum n'est pas unique.



$ii)$ Si $(L_H)_e = 0$ et $x_e = 0$, alors l'optimum est unique. Dans ce cas, la base est dite dégénérée c'est à dire qu'il existe une variable de base nulle.

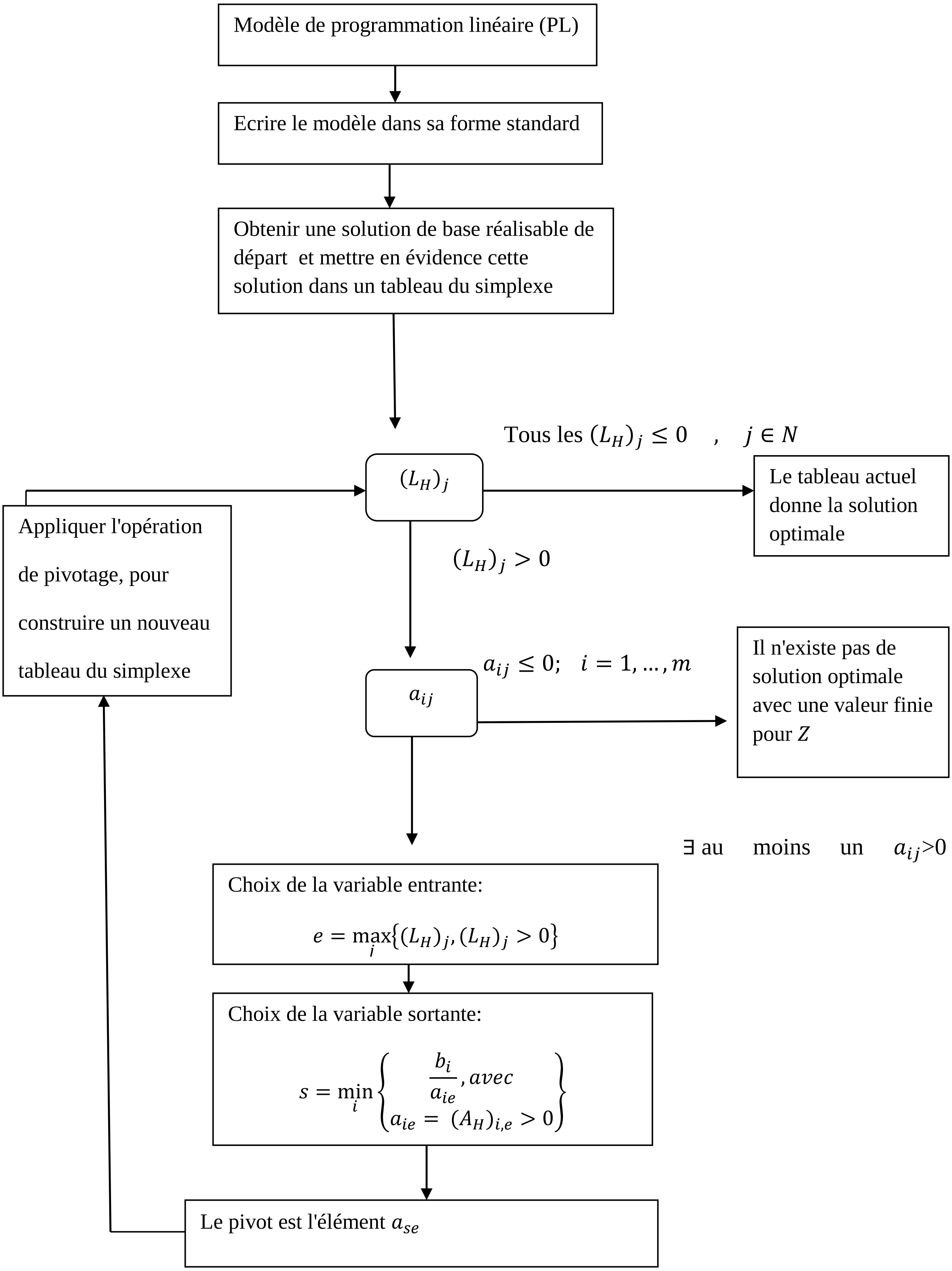


3. Si $(L_H)_e > 0$ et x_e est non borné alors la fonction objectif F n'est pas majorée.

Théorème 2

Si au cours de l’algorithme du simplexe, aucune base rencontrée n’est dégénérée, alors l’algorithme se termine en un nombre fini d’itérations.

I.7.6 Organigramme de l'algorithme du Simplexe (maximisation)



I.8 Exemple numérique

Soit le problème linéaire suivant:

$$(PL)\begin{cases} \max\limits_{(x_1,x_2)} [F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2] \\ \text{sous les contraintes:} \\ 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Transformons le problème en forme standard en ajoutant des variables d'écart x_3, x_4, x_5.

$$(PL)_1\begin{cases} \max\limits_{(x_1,x_2)} [F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2] \\ \text{sous les contraintes:} \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20 \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

Une solution de base réalisable évidente est donnée par $x_3 = 81,\ x_4 = 55,$

$x_5 = 20$ (variables de base) et $x_1 = x_2 = 0$ (variables hors-base), ce qui donne une valeur de la fonction objectif $F_{opt} = 0$.

Etape1.

Tableau1−solution de départ

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$S.B.R$
x_3	3	9	1	0	0	81
x_4	4	5	0	1	0	55
x_5	2	1	0	0	1	20
	-6	-4	0	0	0	$F_{opt} = 0$

Appliquer le critère d'entrée et de sortie d'une variable.

$$\min_j \{(L_H)_j,\quad (L_H)_j > 0\} = -6 \rightarrow x_e^{(1)} = x_1 \rightarrow variable\ entrante.$$

$$x_e^{(1)} = x_1 = \min\left(\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{20}{2}\right) = \frac{20}{2} \rightarrow x_s^{(1)} = x_5 \rightarrow variable\ sortante.$$

Etape2.

Tableau2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$S.B.R$
x_3	0	$\frac{15}{2}$	1	0	$\frac{-3}{2}$	51
x_4	0	**3**	0	1	-2	15
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	10
	0	1	0	0	-3	$F_{opt} = 60$

$$\min_j \{(L_H)_{j,} \quad (L_H)_j > 0\} = \text{-1} \rightarrow x_e^{(2)} = x_2 \rightarrow variable \;\; entrante.$$

$$x_e^{(2)} = x_2 = \min\left(\frac{51}{\frac{15}{2}}, \frac{15}{3}, \frac{10}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{15}{3} \rightarrow x_s^{(2)} = x_4 \rightarrow variable \;\; sortante.$$

L'inverse de la matrice de base est donnée par: $A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette étape correspond à l'examen du sommet.

$x = (x_1 = 10, x_2 = 0)$ de l'ensemble D_R des solutions réalisables.

Etape3.

Tableau3

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$S.B.R$
x_3	0	0	1	$\frac{-5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{27}{2}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	5
x_1	1	0	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{15}{2}$
	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-7}{3}$	$F_{opt} = 65$

Tous les nouveaux coûts réduits sont négatifs. L'optimum est donc atteint avec $\max F = 65$.

La solution optimale x^* de (PL) par la méthode du simplexe est :

$$x^*\left(x_1^* = \frac{15}{2};\ x_2^* = \frac{10}{2};\ x_3^* = \frac{27}{2};\ x_4^* = 0;\ x_5^* = 0\right)^T$$

I.9 Dualité

Le concept de dualité est un concept fondamental en programmation linéaire. En fait, il faut considérer que deux programmes linéaires duaux ne constituent pas deux problèmes distincts mais deux aspects du même problème sachant que quand on résout un programme linéaire, on résout simultanément son dual.

En programmation linéaire, la dualité est un élément très important pour plusieurs éléments. A tout programme linéaire (PL) que l'on qualifiera de primal, on peut associer un programme linéaire dual (PLD) dit dual de façon telle qu'il existe des relations très fortes entre les solutions (variables et objectifs) de l'un de l'autre.

Définition 8

Au programme linéaire primal suivant:

$$(PLP)\begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} [F(x) = c^T x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On associe le programme linéaire dual correspondant suivant:

$$(PLD)\begin{cases} \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} [G(y) = b^T y] \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

I.9.1 Comparaison entre Primal et Dual [13]

Primal	Dual
- $\max(F)$ - coefficient c de F - second membre b -m contraintes inégalités$(Ax \leq b)$ -n contraintes de positivité$(x \geq 0)$	- $\min(G)$ - second membre c - coefficient b de G - m contraintes de positivité$(y \geq 0)$ - n contraintes inégalités $(A^T y \geq c)$

Si le problème primal est sous forme standard avec les contraintes $Ax = b$ alors on passe à la forme canonique pure en écrivant les contraintes$Ax = b \Leftrightarrow \binom{A}{-A} \leq \binom{b}{-b}$. De façon générale, on a la définition suivante lorsque le problème primal est sous forme canonique mixte :

Primal	Dual
- $\max\limits_{x\in\mathbb{R}^n}[F(x) = c^T x]$ - $\forall i \in I_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ \leq b_i$ -$\forall i \in I_2,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ = b_i$ -$\forall j \in J_1,\ x_j \ \geq 0$ -$\forall j \in J_2,\ x_j$ de signe quelconque	- $\min\limits_{y\in\mathbb{R}^m}[G(y) = b^T y]$ - $\forall i \in I_1, y_i \geq 0$ - $\forall i \in I_2, y_i$ de signe quelconque -$\forall j \in J_1,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \ \geq c_j$ - $\forall j \in J_2, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \ = c_j$

Exemple 1

Soit le problème primal (PLP) suivant:

$$(PLP)\begin{cases} \max F = 6x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Son problème dual (PLD)correspondant s'écrit :

$$(PLD)\begin{cases} \min F = 81y_1 + 55y_2 + 20y_3 \\ 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 9y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 4 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

I.9.2 Utilisation algorithmique de la dualité

La première utilisation, évidente, du problème dual (PLD) est de le résoudre directement s'il est plus simple que le problème primal(PLP).

Ce sera le cas, en particulier, lorsque (PLP) n'a pas de solution admissible évidente mais qu'il est facile d'en construire une pour le problème dual (PLD).

I.9.3 Propriétés du dual

-On remarque que la condition d'admissibilité d'une solution de base pour (PLD) est $\overline{c} \geq 0$, qui est la condition d'optimalité de (PLP).

De façon analogue (duale), la condition d'admissibilité d'une solution de base pour le problème primal est $\overline{b} \geq 0$, qui est la condition d'optimalité du problème dual.

- On résoudra donc plutôt (PLD) au lieu de (PLP) s'il est plus simple ou (et) si l'on parvient plus facilement à construire une solution avec $\overline{c} \geq 0$ qu'avec $\overline{b} \geq 0$.

Exemple 2

Soit le problème(PLP) suivant :

$$(PLP)\begin{cases} \min F = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ x_1 + 3x_3 \geq 3 \\ x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

L'introduction des variables d'écart x_4 et x_5 donne :

$$\begin{cases} \min F = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ -x_1 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ -x_2 - 2x_3 + x_5 = -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les termes de $\overline{b}$ sont négatifs donc la solution de base construite n'est pas admissible dont le premier tableau simplexe est donné par :

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S.B.R
x_4	-1	0	-3	1	0	-3
x_5	0	-1	-2	0	1	-5
	4	6	18	0	0	0

Comme les coûts réduits sont tous positifs donc la solution de la base associée est admissible pour le problème dual.

Le problème dual (PLD) s'écrit :

$$(PLD)\begin{cases} \max w = 3y_1 + 5y_2 \\ s.c. \\ y_1 \geq 4 \\ y_2 \geq 6 \\ 3y_1 + 2y_2 \geq 18 \\ y_1, y_2 \quad \leq 0 \end{cases}$$

(PLD) est résolu facilement par la méthode du simplexe dont la solution optimale est donnée par

$$y^* \ (y_1^* = 2;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 2;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0)$$

et $w^* = 36$.

I.9.4Théorèmes de Dualité [11], [13]

Théorème 3

Le dual du dual est le primal.

Preuve

Le dual d'un (PLP) sous forme canonique pure s'écrit :

$$(PLD)\begin{cases} \min\limits_{y\in\mathbb{R}^m} [G(y) = b^T y] \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(PLD)\begin{cases} \max\limits_{y\in\mathbb{R}^n} [-G(y) = (-b)^T y] \\ -A^T y \leq -c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On prend le dual du dual et on a:

$$(PLD)\begin{cases} \min\limits_{x} [(-c^T)x] \\ (-A^T)^T x \geq (-b)^T \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(PLP)\begin{cases} \max\limits_{x} [c^T x] \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On s'intéresse à présent aux liens qui existent entre les solutions de programmes linéaires en dualité

Théorème 4: Théorème Faible de Dualité

Soit x une solution réalisable d'un (PLP) sous forme canonique mixte et y une solution réalisable du problème dual (PLD). Alors :

1- $F(x) \leq G(y)$.

2- si$F(x) = G(y)$ alors x et y sont des solutions optimales du (PLP) et (PLD) respectivement.

Preuve

1- On a d'une part $Ax \leq b, x \geq 0$ et d'autre part $A^T y \geq c, y \geq 0$. Par conséquent,
$F(x) = c^T x \leq (A^T y)^T x = y^T Ax \leq y^T b = \ G(y)$ car $y \geq 0$

2- Soient x et y deux solutions réalisables du primal et du dual respectivement, telles que$F(x) = G(y)$. D'après le théorème (4.1), pour toute solution réalisable x de(PLP), on a $F(x) \leq G(y^*) = F(x^*)$ donc x^*est une solution optimale.

Soient x et y deux solutions réalisables du primal et du dual respectivement, telles que

$F(x) = G(y)$. D'après théorème (4.1), pour toute solution réalisable$y$de(PLD), on a

$G(y) \leq F(x^*) = G(y^*)$ donc y^*est une solution optimale.

Théorème 5: Théorème Fort du Dualité

Si le problème primal (PLP) admet une solution réalisable optimale x^* alors le problème dual (PLD) admet lui aussi une solution réalisable optimale y^* et on

$F(x^*) = G(y^*)$.

Preuve

On suppose que (PLP) est sous forme standard. Si (PLP) admet une solution réalisable optimale, il admet une solution de base réalisable optimale. On note B^*la base optimale et on désigne par x^* la solution de base réalisable optimale : $x^* = A_{B^*}^{-1} b$. On choisit alors

$$y^* = (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}$$

Montrons que y^* est une solution réalisable optimale pour le dual (PLD). On a

$$A_{H^*}^{\ T} y^* = A_{H^*}^T (A_{B^*}^{-1})^T c_{B^*}$$

$$= (A_{B^*}^{-1} A_{H^*})^T c_{B^*}$$

$$= c_{H^*} - L_{H^*}$$

Or, à l'optimum tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls

$(L_{H^*} \leq 0)$ donc $A^T_{H^*}y^* \geq c_{H^*}$. Par définition, on a $A^T_{B^*}y^* = c_{B^*}$ et donc on obtient:

$A^T y^* \geq c$ avec y^* de signe quelconque.

Par conséquent,y^* est une solution réalisable du dual (PLD). On remarquera que le problème primal (PLP) étant mis sous forme standard, il n'y a pas de contrainte de positivité sur les variables y du dual.

$$F(x^*) = c^T x^* = c^T_{B^*} A^{-1}_{B^*} b$$

$$= ((A^{-1}_{B^*})^T c_{B^*})^T b$$

$$= \mathrm{G}(\mathrm{y}^*)$$

Remarque 5

On a vu d'après la remarque (2) qu'il avait trois cas possibles pour le problème primal (PLP) :

(1) Il existe (au moins) une solution optimale.
(2) L'ensemble D_R des solutions réalisables n'est pas borné et l'optimum est infini.
(3) Pas de solution réalisable ($D_R = \emptyset$).

Les mêmes situations se retrouvent pour le problème dual. Plus précisément, le lien entre les deux problèmes en dualité est donné par le résultat suivant.

Théorème 6

Etant donnés un problème primal (PLP) et son dual (PLD), une et une seule des trois situations suivantes a lieu:

a)-Les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales (à l'optimum, les coûts réduits sont égaux).

b)-Un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.

c)-Aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.

Il y adonc 3 situations (au lieu de 9) qui peuvent se résumer dans le tableau suivant :

		Dual		
		(1) Solution optimale	(2) Optimum infini	(3) pas de solution
Primal	(1) Solution optimale	(a)	impossible	Impossible
	(2) Optimum infini	impossible	impossible	(b)
	(3) pas de solution	impossible	(c)	Impossible

Théorème 7 (Ecarts complémentaires) [11]

Deux solutions optimales réalisables x^* et y^* respectivement du primal et du dual sont optimales si et seulement si :

$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j\right)x_j^* = 0,\ j = \overline{1,n}$ (1)

$\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* - b_i\right)y_i^* = 0,\ i = \overline{1,m}$ (2)

Preuve

- Condition nécessaire :(⇒)
  Soient x^* et y^* deux solutions optimales du primal et du dual respectivement. Les relations de la dualité donnent,

$$c^T x^* = b^T y^* = {y^*}^T b = y^{*T} A x^*$$

$\Rightarrow {y^*}^T A x^* - c^T x^* = 0$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0.$

On a obtenu une somme de termes positifs

$\left(x_j^* \geq 0, \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j \geq 0\right)$, qui est égale à zéro, donc chaque terme est nul :

$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j\right)x_j^* = 0, j = \overline{1,n}$ d'où la relation (1).

On aussi :$y^{*T}b = {y^*}^T Ax^*$

⇨$\sum_{j=1}^{m} y_i^*\, b_i - \sum_{j=1}^{m} y_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* = 0$

⇨$\sum_{j=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^*\right)$ =0.

Comme $Ax^* = b$, alors $y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* - b_i\right) = 0,\ \ i = \overline{1,m}$ d'où la relation (2)

- Condition suffisante :(⇐)

Soient $\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* - c_j\right)x_j^* = 0,\ j = \overline{1,n}$

et $\left(-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^* - b_i\right)y_i^* = 0,\ i = \overline{1,m}$

En sommant la première équation par rapport à j et la deuxième par rapport à i, on obtient :

$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\, x_j^* - \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j^* = 0$,(3)

$\sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^* - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^*\, x_j^* = 0$(4)

Des deux équations (3) et (4) on obtient $c^T x^* = b^T y^*$, et on vertu du théorème(4), on déduit que x^* et y^* sont des solutions optimales de (PLP) et (PLD) respectivement.

Remarque 6

De manière générale, la solution optimale du problème dual (PLD) est donnée par :

$(-$coûts réduits) des variables d'écart obtenus appelés aussi multiplicateurs optimaux au dernier tableau simplexe de la résolution du problème primal (PLP) pour un problème à maximum.

$(+$coûts réduits) des variables d'écart obtenus appelés aussi multiplicateurs optimaux au dernier tableau simplexe de la résolution du problème primal (PLP) pour un problème à minimum.

Remarque 7

Ainsi dans l'exemple numérique la solution optimale du problème dual (PLD) correspondant est donnée directement du dernier tableau simplexe du (PLP) par:

$y^*\left(y_1^* = 0; y_2^* = \frac{1}{3}; y_3^* = \frac{7}{3}\right)$ et $G(y^*) = 65$

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté et détaillé deux méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire (la méthode du simplexe et la dualité). Dans un premier temps nous avons parlé brièvement sur la programmation linéaire, puis nous avons montré l'application de cette méthode et aussi la dualité pour la résolution des problèmes de programmation linéaire.

II.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est en fait, selon Zadeh, un pas vers un rapprochement entre la précision des mathématiques classiques et la subtile imprécision du monde réel. La théorie des ensembles flous a été développée par Zadeh (1965) [17] pour représenter l'incertitude due à l'imprécision dans l'information ne pouvant être modélisée par la théorie probabiliste.

Aujourd'hui, les domaines d'application dans lesquels il existe des utilisations de la logique floue sont très variés : médecine, biologie, écologie, économie, recherche scientifique...etc. Bien que la recherche ait renforcé la théorie des ensembles flous, il n'existe toujours pas de consensus sur la détermination des fonctions d'appartenance.

II.2 Préliminaires sur les ensembles flous

Dans la théorie des ensembles classiques, il n'y a que deux situations acceptables pour un élément, appartenir ou ne pas appartenir à un sous-ensemble. Le mérite de Zadeh a été de tenter de sortir de cette logique booléenne en introduisant la notion d'appartenance pondérée, permettre des graduations dans l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble, c'est-à-dire d'autoriser un élément à appartenir plus ou moins fortement à ce sous-ensemble [17].

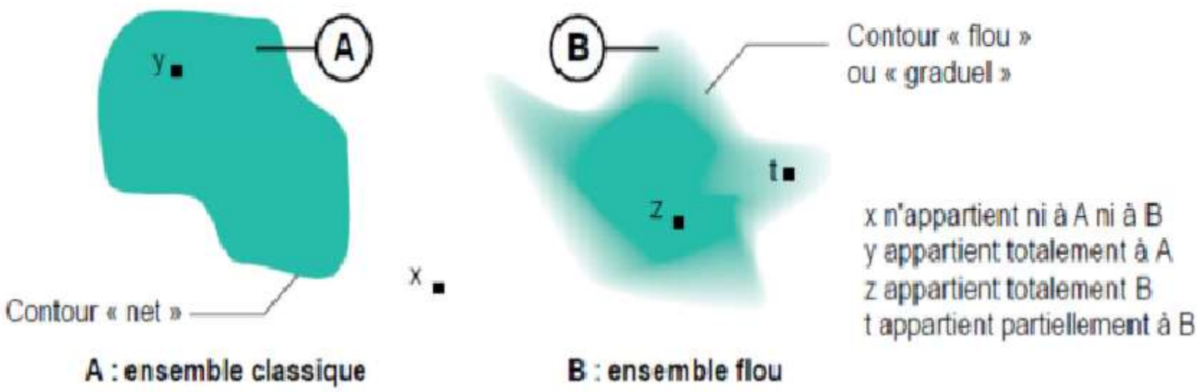


FIG 1.1 -Ensemble classique et ensemble flou

Définition 1 : Soit X un ensemble de référence et soit x un élément quelconque de X.

Un ***ensemble flou*** $\tilde{A}$ de X est défini comme l'ensemble des couples

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in X\}$$

où $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$

Ainsi, un sous ensemble flou $\tilde{A}$ de X est caractérisé par une fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}$ qui associe, à chaque point x de X un réel dans l'intervalle $[0,1]$; $\mu_{\tilde{A}}(x)$ représente selon le contexte le degré d'appartenance de x à $\tilde{A}$, le niveau de similarité de x avec un prototype ou le degré de comptabilité de x avec un concept donné.

Exemple de sous ensemble flou

On se propose de mesurer l'acuité visuelle (moyenne des deux yeux) des individus d'une certaine localité.
Soit A l'ensemble des individus ayant une bonne acuité visuelle. Cet ensemble a un contour mal défini.

En effet, il y'a des individus dont l'acuité visuelle est égale à 1, 0.8, 0.6 ou toute autre valeur comprise entre 0 et 1.

Remarque 1

Dans un environnement flou, on observe les trois cas possibles suivants :

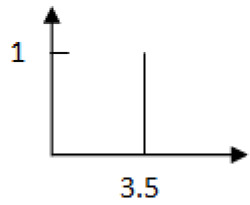
$$\begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) = 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } \tilde{A}, \\ 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 & \text{si } x \text{ appartient partiellement à } \tilde{A}, \\ \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient entièrement à } \tilde{A}. \end{cases} \tag{2.1}$$

On peut faire remarquer que si $\tilde{A}$ est un sous-ensemble classique, la fonction d'appartenance qui lui est associée ne peut prendre que la valeur extrême 0 ou 1.
On a dans ce cas :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin \tilde{A} \\ 1 & si\ x \in \tilde{A} \end{cases} \tag{2.2}$$

- Nombre réel :

  Exemple : 3.5



- Nombre flou :

  Exemple : 3.5

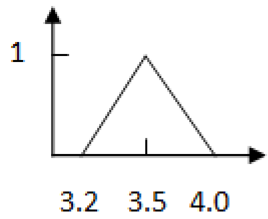


Figure 2.1 - Comparaison entre un nombre flou et un nombre réel

II.2.1 Caractéristiques d'un ensemble flou [5], [12], [17]

Un ensemble flou est complètement défini par la donnée de sa fonction d'appartenance. A partir d'une telle fonction, un certain nombre de caractéristiques de l'ensemble flou peuvent être étudiées.

Définition 2 : Support d'un ensemble flou $\tilde{A}$

Le support d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $supp\ (\tilde{A})$, est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent au moins un petit peu. Il est défini par :

$$supp\ (\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}. \quad (2.3)$$

Définition 3 : Hauteur d'un ensemble flou $\tilde{A}$

La hauteur d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, notée $h(\tilde{A})$, est le plus fort degré avec lequel un élément de X appartient à $\tilde{A}$. Elle est définie par :

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (2.4)$$

Définition 4 : Noyau d'un ensemble flou $\tilde{A}$

Le noyau d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $Noy(\tilde{A})$, est l'ensemble de tous les éléments qui lui appartiennent totalement (avec un degré 1). Il est défini par :

$$Noy(\tilde{A}) = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\} \qquad (2.5)$$

Définition 5 : Ensemble flou normalisé

Un ensemble flou $\widetilde{A}$ est normalisé s'il existe $x_0 \in X$ tel que $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$.

Définition 6 : Coupe de niveau α

Une coupe de niveau α d'un ensemble flou $\tilde{A}$, notée $\tilde{A}^{\alpha}$, où $\alpha \in]0; 1]$, est l'ensemble ordinaire des éléments qui appartiennent à $\tilde{A}$ avec un degré au moins égal à α. Il est défini par :

$$\tilde{A}^{\alpha} = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \qquad (2.6)$$

Définition 7 : Cardinalité

La cardinalité d'un ensemble flou $\tilde{A}$ de X, noté $|\tilde{A}|$, est le nombre d'éléments appartenant à $\tilde{A}$ pondéré par leur degré d'appartenance. Formellement, pour $\tilde{A}$ fini,

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (2.7)$$

Définition 8 : Ensemble flou convexe

Un ensemble flou $\tilde{A} \in X$ est dit convexe si et seulement si: $\forall x_1, x_2 \in X$ et $\forall \lambda \in [0,1]$, on a :

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)) \qquad (2.8)$$

Proposition 1

− $\tilde{A}$ est convexe si seulement si $\tilde{A}^{\alpha}$ est convexe $\forall \alpha \epsilon [0,1]$.

− Si $\tilde{A}$ est convexe et $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors $\tilde{A}^{\alpha_2} \subset \tilde{A}^{\alpha_1}$.

II.3 Nombre flou

Définition 9 : Un nombre flou est un ensemble flou $\widetilde{A}$ normalisé et convexe de $\mathbb{R}$ dont la fonction d'appartenance est continue par morceaux.

Définition 10 : Un nombre flou $\widetilde{A}$ est non négatif si:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0; \forall x < 0 \tag{2.9}$$

Remarque 2 : Si le $Noy(\tilde{A})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on parle alors d'intervalle flou.

II.4 Opérations sur les nombres flous [15], [17], [18]

Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ deux sous-ensembles flous d'un même référentiel X. Les opérations les plus couramment utilisées sur les ensembles flous sont données par:

– Inclusion

On dit que $\widetilde{A} \subseteq \tilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a : $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$.

– Egalité

On dit que $\widetilde{A} = \tilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a : $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$.

– Intersection

$\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ est le sous-ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \ \mu_{\tilde{B}}(x)), \ \forall \ x \in X$.

– Réunion

$\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ est le sous-ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$.

– Complémentaire

$\underline{\tilde{A}}$ est le sous-ensemble flou complémentaire de $\tilde{A}$ dont la fonction d'appartenance est donnée par $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 - \ \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$.

– Produit cartésien

Soient $\widetilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n, n$ sous-ensembles flous de $X_1, X_2, \dots, X_n$ respectivement. Le produit cartésien de $\widetilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$, est le sous-ensemble flou ayant pour fonction d'appartenance :

$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, \dots, x_n) = \min\left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right)$

II.4.1 Propriétés de l'union et de l'intersection

Soient $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ trois sous ensembles flous, on représente quelques propriétés par :

− **Commutativité** : $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$ et $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$

− **Associativité** : $\tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C}$ et

$$\tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$$

− **Idempotence :** $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$ et $\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$

− **Distributivité** : $\tilde{A} \cup \left(\tilde{B} \cap \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cup \tilde{B}\right) \cap \left(\tilde{A} \cup \tilde{C}\right)$ et

$$\tilde{A} \cap \left(\tilde{B} \cup \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} \cap \tilde{B}\right) \cup \left(\tilde{A} \cap \tilde{C}\right)$$

− **Identité :** $\tilde{A} \cup \emptyset = \tilde{A}$; $\tilde{A} \cap X = \tilde{A}$

− **Cardinalité :** $\left|\tilde{A}\right| + \left|\tilde{B}\right| = \left|\tilde{A} \cap \tilde{B}\right| + \left|\tilde{A} \cup \tilde{B}\right|$

II.5 Nombre flou de type *L-R*, [5]

Définition 10

Un nombre flou $\tilde{A}$ est de type L-R s'il existe deux fonctions L, R telles que sa fonction d'appartenance est donnée par:

$$\begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & si \quad x \leq m \;\; avec\; \alpha > 0\,, \\ R\left(\frac{x-n}{\beta}\right) & si \quad x \geq n \;\; avec\;\; \beta > 0. \end{cases} \qquad (2.10)$$

Où:

L(Left) et R(Right) sont des fonctions dites "fonctions de référence" du nombre flou $\tilde{A}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- L et R fonctions non croissantes sur $[0, +\infty[$,
- L et R sont symétriques : $L(x) = L(-x)$; $R(x) = R(-x)\ \forall x$,
- $L(0) = R(0) = 1$.

On note $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{L-R}$

Exemple

$$L(x) = e^{-|x|^p}$$

$$L(x) = \max\ (0, 1 - |x|^p), p \in N^*$$

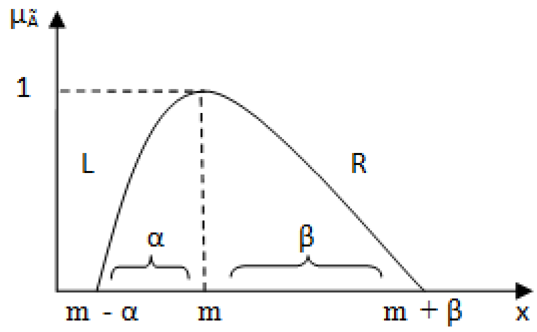


Figure 2.3 - Représentation d'un nombre flou de type L-R

Remarque 3

1. Il existe plusieurs types de nombres flous de type *L-R*, lorsque les fonctions de référence *L* et *R* sont linéaires, on parle alors de nombres flous de type triangulaire ou de type trapézoïdal.
2. Dans notre travail, nous nous intéresserons principalement au type trapézoïdal de nombres flous.

II.5.1 Nombre flou de type triangulaire [5], [7]

Un nombre flou $\tilde{A}$ est dit de type triangulaire noté (a, α, β) (voir figure 1.2) si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}(x)$ est donnée par:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a + \alpha}{\alpha} & si \quad a - \alpha \leq x \leq a, avec\ \alpha > 0, \\ 1 & si \quad x = a, \\ \dfrac{a + \beta - x}{\beta} & si \quad a \leq x \leq a + \beta, \quad avec\ \beta > 0. \end{cases}$$

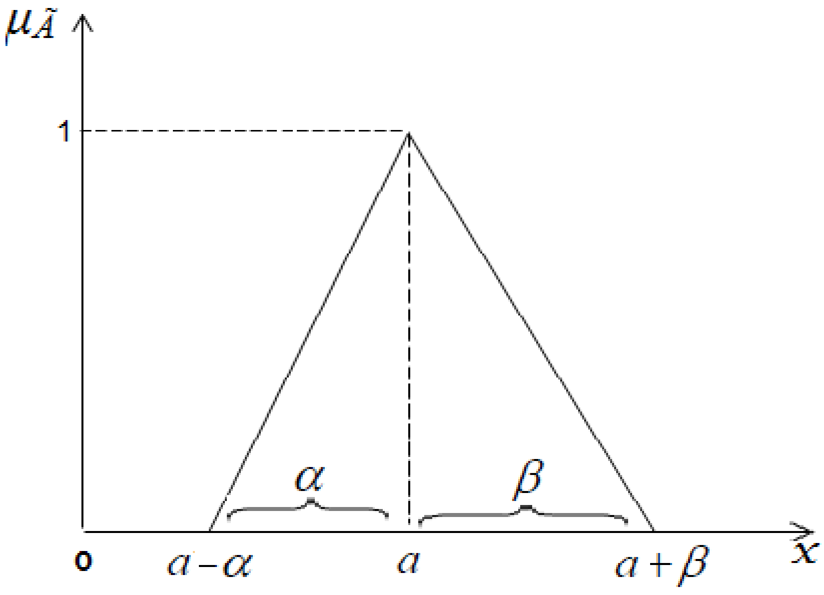


FIG 1.2- Nombre flou triangulaire (a, α, β)

II.5.2 Comparaison et arithmétique de nombres flous triangulaires

Soient deux nombres flous de type triangulaire $\tilde{A} = (a, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b, \alpha_2, \beta_2)$.

i) Comparaison de deux nombres flous triangulaires

1. Un nombre flou triangulaire $\tilde{A}$ est non négatif si et seulement si $\alpha_1 \geq 0$,

2. $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a = b,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,$

3. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a \leq b,\ a - \alpha_1 \leq b - \alpha_2,\ a + \beta_1 \leq b + \beta_2.$

ii) Opérations arithmétiques sur les nombres flous triangulaires

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a + b, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2),$

2. $-\tilde{A} = -(a, \alpha_1, \beta_1) = (-a, \beta_1, \alpha_1),$

3. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a - b, \alpha_1 + \beta_2, \beta_1 + \alpha_2),$

4. $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) & si\ \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda a, -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1) & si\ \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$

II.5.3. Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou $\tilde{A}$ est un nombre flou trapézoïdal noté $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ (voir figure (1.3)) si sa fonction d'appartenance est donnée par :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a^L + \alpha}{\alpha} & si\ a^L - \alpha \leq x \leq a^L, \\ 1 & si\ a^L \leq x \leq a^U, \\ \dfrac{a^U + \beta - x}{\beta} & si\ a^U \leq x \leq a^U + \beta. \end{cases} \quad (2.11)$$

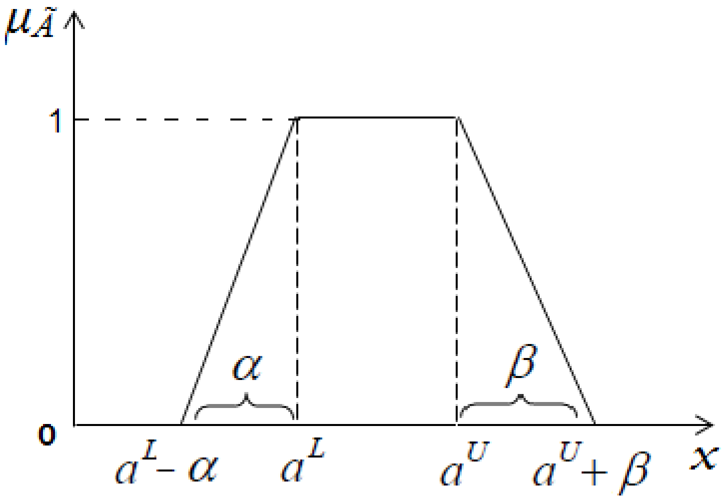


FIG1.3- Nombre flou trapézoïdal $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$

II.5.3.1 Comparaison et arithmétique de nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous trapézoïdaux $\tilde{A} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{B} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$.

i) Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

1. Un nombre flou trapézoïdal $\tilde{A}$ est dit négatif si et seulement si $a^U + \beta_1 \leq 0$,

2. Un nombre flou trapézoïdal $\tilde{A}$ est dit positif si et seulement si $a^L - \alpha_1 \geq 0$,

3. $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow a^L = b^L,\ a^U = b^U,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,$

4. $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^U \leq b^U,$

$$a^L - \alpha_1 \leq b^L - \alpha_2, \;\; a^U + \beta_1 \leq b^U + \beta_2.$$

ii) Opérations arithmétiques sur les nombres flous trapézoïdaux

1. $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a^L + b^L, a^U + b^U, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2),$

2. $-\tilde{A} = -(a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1) = (-a^U, -a^L, \beta_1, \alpha_1),$

3. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a^L - b^U, a^U - b^L, \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1),$

4. $\lambda \otimes \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a^U, \lambda\alpha_1, \lambda\beta_1) & si \;\; \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \\ (\lambda a^U, \lambda a^L, -\lambda\beta_1, -\lambda\alpha_1) & si \;\; \lambda < 0, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Notation

On note par $F(\mathbb{R})$ l'ensemble des nombres flous de type trapézoïdal.

II.6 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire dans un premier temps, les concepts fondamentaux de la théorie des nombres flous. Puis nous avons introduit l'arithmétique des nombres flous de type *L-R* qui nous servira comme support pour la résolution de notre problème principal au chapitre trois.

III.1 Introduction

En Programmation Linéaire, les données sont supposées être connues avec précision. Dans le cas où ces dernières sont mal connues ou imprécises de nature floue, nous parlons alors de la Programmation Linéaire Floue. Dans notre cas, le flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux. En utilisant les fonctions « Ranking » et l'arithmétique des nombres flous de type trapézoïdal, nous pouvons résoudre les problèmes linéaires flous par la méthode du simplexe flou et aussi par le dual flou qui n'est rien d'autre qu'une extension du simplexe et dual classique étudiés au chapitre un.

III.2 Fonction Ranking $\mathfrak{R}$ [1], [7], [8], [9], [14]

Une approche efficace pour comparer les nombres flous est l'utilisation des fonctions Ranking ou fonctions de classement. Une fonction Ranking $\mathfrak{R}$ est définie de l'ensemble des nombres flous trapézoïdaux $F(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}(\mathfrak{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R})$. De différents types de fonctions Ranking ont été introduits dans la littérature et certains ont été utilisés pour résoudre des problèmes de programmation linéaire avec des paramètres flous.

Proposition1

Soient $\tilde{a}$ et$\tilde{b}$ deux nombres flous trapézoïdaux, on définit un ordre sur $F(\mathbb{R})$ comme suit :

- On dit que $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b}$si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{a}) \geq \mathfrak{R}(\tilde{b})$,
- On dit que $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{b}$si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{a}) > R(\tilde{b})$,
- On dit que $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{b}$si et seulement si $\mathfrak{R}(\tilde{a}) = \mathfrak{R}(\tilde{b})$.

Lemme1

Soient $\tilde{a}$ et$\tilde{b}$ deux nombres flous trapézoïdaux dans $F(\mathbb{R})$ et soit $\mathfrak{R}$ une fonction Ranking. Alors

- $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\leq} \tilde{a}$,
- $\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} - \tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{0} \Leftrightarrow -\tilde{b} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} -\tilde{a}$,
- Si$\tilde{a} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{b}$ et $\tilde{c} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{\mathrm{d}}$ alors$\tilde{a} + \tilde{c} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{\mathrm{b}} + \tilde{\mathrm{d}}$,
- $\mathfrak{R}(k\tilde{a} + \tilde{b}) = k\, \mathfrak{R}(\tilde{a}) + \mathfrak{R}(\tilde{b})$ pour tout $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{R}$ ($\mathfrak{R}$ est linéaire).

Remarque 1

Comme suggestion d'une fonction linéaire Ranking $\Re$ d'un nombre flou trapézoïdal $\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha, \beta)$ où$\tilde{a} \in F(\mathbb{R})$ est :

$$\Re\,(\tilde{a}) = a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad (3.1)$$

Ainsi en utilisant (3.1) pour les deux nombres flous trapézoïdaux
$\tilde{a} = (a^L, a^U, \alpha_1, \beta_1)$ et $\tilde{b} = (b^L, b^U, \alpha_2, \beta_2)$ on a donc :

$$\tilde{a} \underset{\Re}{\geq} \tilde{b} \Leftrightarrow a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1) \geq b^L + b^U + \frac{1}{2}(\beta_2 - \alpha_2)$$

III.3 Programmation Linéaire Floue

Un problème de Programmation Linéaire en Nombres Flous Trapézoïdaux noté (PLF), dans le cas où le vecteur des coûts $\tilde{c}$, la matrice des conditions $\tilde{A}$ et le vecteur des contraintes $\tilde{b}$ sont des nombres flous trapézoïdauxest défini comme suit :

$$(PLF)\begin{cases} \max \tilde{\mathrm{F}}(x) \underset{\Re}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j\, x_j \\ \quad s.c. \\ \sum \tilde{a}_{ij}\, x_j \underset{\Re}{\leq} \tilde{\mathrm{b}}_\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}} \\ x_j \geq 0, \quad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}} \end{cases} \qquad (3.2)$$

Où

$\tilde{a}_{ij} = \left(a_{ij}^L, a_{ij}^U, \theta_{ij}, \delta_{ij}\right) \in F(\mathbb{R}), \tilde{b}_i = \left(b_i^L, b_i^u, \theta_j, \delta_j\right) \in F(\mathbb{R})$ et

$\tilde{c}_j = \left(c_j^U, c_j^L, \rho_j, \mu_j\right) \in F(\mathbb{R})$ pour tout $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}}et\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}}$.

Théorème 1

Le problème (PLF) et le problème suivant sont équivalents :

$$(P_{\tilde{c}})\begin{cases} \max \tilde{\mathrm{F}}(x) \underset{\Re}{=} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j\, x_j \\ \quad s.c. \\ \sum a_{ij}\, x_j \leq \mathrm{b}_\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{m}} \\ x_j \geq 0\,, \quad \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}} \end{cases} \qquad (3.3)$$

Preuve

Soient P_1 et P_2 les ensembles de solutions réalisables des problèmes (PLF) et $(P_{\tilde{c}})$ respectivement.

Montrons que $P_1 = P_2$

Soit

$$x \in P_1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, x_j \underset{\Re}{\leq} \tilde{\mathrm{b}}_{\mathrm{i}}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}^L, a_{ij}^U, \theta_{ij}, \delta_{ij}\right). x_j \underset{\Re}{\leq} \left(b_i^L, b_i^u, \theta_j, \delta_j\right), \qquad i = 1, \dots, m.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j. a_{ij}^L, \sum_{j=1}^{n} x_j. a_{ij}^U, \sum_{j=1}^{n} x_j. \theta_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_j. \delta_{ij}\right\} \underset{\Re}{\leq} \left(b_i^L, b_i^u, \theta_j, \delta_j\right),$$
$$i = 1, \dots, m.$$

D'après la relation$\tilde{a} \underset{\Re}{\leq} \tilde{\mathrm{b}} \Leftrightarrow \Re(\tilde{a}) \leq \Re\left(\tilde{\mathrm{b}}\right)$, on obtient :

$$\Leftrightarrow$$
$$\Re\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j. a_{ij}^L, \sum_{j=1}^{n} x_j. a_{ij}^U, \sum_{j=1}^{n} x_j. \theta_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_j. \delta_{ij}\right\} \leq \Re\left(b_i^L, b_i^u, \theta_j, \delta_j\right)$$
$$i = 1, \dots, m.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left\{a_{ij}^L + a_{ij}^U + \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \theta_{ij}\right)\right\} x_j \leq b_i^L + b_i^u + \frac{1}{2}(\delta_i - \theta_i),$$

$$i = 1, \dots, m.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \Re(\tilde{a}_{ij}) x_j \leq \Re(\tilde{\mathrm{b}}_{\mathrm{i}}),$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq \mathrm{b_i}, \qquad i = 1, \dots, m.$$

$\Leftrightarrow x \in P_2$ donc $P_1 = P_2$

Comme $P_1 = P_2$ et que toute solution réalisable optimale de (PLF) est solution réalisable optimale de $(P_{\tilde{c}})$ donc on conclut que les deux problèmes sont équivalents.

III.4 Résolution d'un problème linéaire flou à contraintes déterministes

Un problème de Programmation Linéaire en Nombres Flous Trapézoïdaux (PLNFT) à contraintes déterministes est défini par :

$$(\mathrm{PLNFT}) \begin{cases} \max \tilde{\mathrm{F}}(x) \underset{\Re}{=} \tilde{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} x \\ s.c. \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Où$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$,$\tilde{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \in (F(\mathbb{R}))^{n}$ et$x \in \mathbb{R}^{n}$ avec $\Re$ une fonction Ranking linéaire.

Définition1 Solution réalisable [7], [8]

On dit qu'un vecteur $x \in \mathbb{R}^{n}$ est une solution réalisable du problème(PLNFT) si et seulement si x satisfait les contraintes du problème c'est à dire $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition2 Solution optimale [9], [10]

Une solution réalisable x^* est une solution optimale pour le problème(PLNFT) si pour toute solution réalisable$x$, on a $\tilde{c}x^* \underset{\Re}{\geq} \tilde{c}x$.

III.4.1 Solution de base réalisable

Nous introduisons la définition d'une solution de base réalisable pour un problème de programmation linéaire en nombres flous trapézoïdaux (PLNFT). Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Hypothèse

Supposons que $rang(A) = m$.

Définition3 : Ensemble des indices de base

Soit $B \subset \{1, \dots, n\}$ un ensemble d'indices avec $card(B) = m$ tel que les colonnes a_j, $j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée A_B formée des colonnes a_j , $j \in B$, est inversible. On dit alors que l'ensemble B des indices est une base.

- Les variables $x_B = \left(x_j, j \in B\right)$sont appelées variables de base.
- Les variables $x_H = \left(x_j, j \notin B\right)$sont appelées variables hors-base.

Remarque 2

On peut toujours écrire les décompositions par blocs suivantes :

$A = (B, H)$ où B est appelée matrice de base et H matrice hors base

et $x = (x_B, x_H)^T$.

Définition4 : Solution de base réalisable

On dit que $x = (x_B, x_H)^T$est une solution de base associée à la base B si elle vérifie :

$Ax = b$ avec $x_B = B^{-1}b$ et $x_H = 0$

Si, en plus$x_B \geq 0$, alors x est une solution de base réalisable.

Définition5 : Solution dégénérée et non dégénérée

Une solution de base réalisable x est dite non dégénérée si $x_B \geq 0$.

Si, au moins, une composante $x_B = 0$ alors x appelée une solution de base réalisable dégénérée.

III.5 Méthode du simplexe flou [1], [4], [8], [15]

On dispose d'une solution de base réalisable x d'un programme linéaire flou sous forme standard, la matrice A peut s'écrire

$$A = (A_B\ , A_H)$$

avec A_B une matrice carrée de taille $m \times m$, inversible , correspondant aux variable de base et A_H une matrice de taille $m \times (n-m)$, correspondant aux variable hors -base. On décompose également à la même permutation près des composantes $x\ = (x_B, x_H)^T$ avec x_B les variables de base et x_H les variables hors base.

Le but est de trouver une autre base B^* et une solution de base x^*associée telle que

$$\tilde{F}(x^*) \underset{\Re}{>} \tilde{F}(x)$$

La méthode du simplexe flou consiste à faire rentrer une variable hors-base dans la nouvelle base (variable entrante) et faire sortir à la place une variable de base (variable sortante).

III.5.1 Détermination de la variable entrante et calcul des coûts réduits

On écrit la fonction objectif F avec les variables avec les variables de base / hors – base. On a $b = Ax = A_B x_B + A_H x_H$ avec A_B inversible donc $x_B = A_B^{-1}(b - A_H x_H)$. On obtient donc :

$\check{F}(x)\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{c}^T x\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{c}_B^T x_B + \tilde{c}_H^T x_H$ avec $\tilde{c}\ \underset{\Re}{=}\ (\tilde{c}_B, \tilde{c}_H)^T$

$$\underset{\Re}{=} \tilde{c}_B^T A_B^{-1}(b - A_H x_H) + \tilde{c}_H^T x_H$$

$$\underset{\Re}{=} \tilde{c}_B^T A_B^{-1} b + (\tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_B^{-1} A_H) x_H$$

Or $x_B^* = A_B^{-1} b$ (car $x_H^* = 0$) et donc $\tilde{c}_B^T A_B^{-1} b\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{c}^T x^*\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{F}(x^*)$ donc

$$\tilde{F}(x)\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{F}(x^*) + (\tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_B^{-1} A_H)$$

Le vecteur $\tilde{L}_H^T\ \underset{\Re}{=}\ \tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_B^{-1} A_H$ (3.4)

S'appelle vecteur des coûts réduits.

− Si les coûts réduits sont tous négatifs c'est-à-dire $\tilde{L}_H^T \underset{\Re}{\leq} 0$, il n'est alors pas possible d'augmenter la fonction objectif $\tilde{F}$ donc l'algorithme se termine c'est-à-dire qu'on a trouvé une solution de base réalisable optimale.

− Dans le cas contraire où il existe $j \in H$ tel que $(\tilde{L}_H^T)_j \underset{\Re}{>} 0$, on a intérêt à faire rentrer dans la base, la variable hors -base qui a le coût réduit positif le plus grand possible.

On note $e \notin B$ l'indice de variable entrante. On choisit e tel que

$$(\tilde{L}_H)_e \underset{\Re}{=} \max_j\{(\tilde{L}_H)_j, (\tilde{L}_H)_j > 0\}$$

Ce qu'on note par :

$$e \underset{\Re}{=} \max_j\{(\tilde{L}_H)_j, (\tilde{L}_H)_j > 0\} (3.5)$$

Remarque 3

Si on traite d'un problème de minimisation c'est-à-dire avec

$\min \tilde{F}(x)$, alors la variable entrante $x_e$est déterminée par l'indice

$$e \underset{\Re}{=} \min_j\{(\tilde{L}_H)_j, (\tilde{L}_H)_j < 0\} (3.6)$$

III.5.2 Détermination de la variable sortante

Une fois l'indice e choisi, il faut déterminer quelle variable doit quitter la base. En maintenant la relation $Ax = b$, on augmente x_e jusqu'à annuler une des variables de base. Cette variable sera alors la variable sortante.

$$Ax = b \iff A_B x_B + A^e x_e = b$$

où A^edésigne la e-nième colonne de A

$$\iff x_B = A_B^{-1}(b - A^e x_e)$$

$$\Leftrightarrow x_B = x_B^* - A_B^{-1} A^e x_e$$

$$\Leftrightarrow x_B = x_B^* - z x_e$$

où l'on a noté

$z = A_B^{-1} A^e \in \mathbb{R}^m$.

$-$ Si $z \leq 0$, on peut augmenter x_e autant qu'on veut, on aura toujours la positivité de la variable de base x_B. La fonction objectif n'est pas majorée sur D_R, c'est à dire le maximum de $\tilde{F}$ vaut $+\infty$. Dans ce cas, l'algorithme s'arrête.

$-$ Sinon (il existe$z_i > 0$), pour avoir la positivité $(x_B^*)_i - z_i x_e \geq 0$ pour tout i, on choisit la variable sortante pour laquelle le rapport

$(x_B^*)_i / z_i$ pour $i = 1, \dots, m$ avec $z_i > 0$, est le plus petit possible.

On choisit

$$s = \min_i \left\{ \frac{(x_B^*)_i}{z_i}, \quad z_i > 0 \right\}$$

On a, dans ce cas, $x_s = 0$ et $x_B \geq 0$. La valeur de la variable entrante est donnée par :

$$x_e = \min_i \left\{ \frac{(x_B^*)_i}{z_i}, \quad z_i > 0 \right\} (3.7)$$

Remarque 4

Solution optimale unique : Une solution de base réalisable est optimale et unique si , pour les variable hors base :

- Dans le cas d'une maximisation tous les $\tilde{L}_H^T \underset{\mathfrak{R}}{<} \tilde{0}$,
- Dans le cas d'une minimisation tous les $\tilde{L}_H^T \underset{\mathfrak{R}}{>} \tilde{0}$.

Solution optimale multiple : Il existe une infinité de solution optimale.

- Si pour une variable hors base $\tilde{L}_H^T \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{0}$.

En effet, s'il y a un terme $\tilde{L}_H \underset{\Re}{>} 0$ sous le vecteur a_j, on peut introduire a_j dans la base et obtenir une autre solution de base optimale.

III.5.3 Procédure de l'algorithme du simplexe flou d'un problème (PLNFT) [1], [7], [8]

La méthode du simplexe flou pour un problème de maximisation est composée des deux étapes suivantes :

Étape initiale : La solution de base réalisable de départ est donnée par :

$x_B = B^{-1}b = \overline{b}, x_H = 0$ et l'objectif flou $\tilde{z} \underset{\Re}{=} \tilde{c}_B B^{-1} b \underset{\Re}{=} \tilde{c}_B \overline{b}$.

Étape principale :

1. - Calcul de $\tilde{L}_H$

- Calculer $\Re(\tilde{L}_H)_e$ pour toutes les variables hors base.

Soit

$$\Re(\tilde{L}_H)_e = \max_{j \in N} \left\{ \Re(\tilde{L}_H)_j ,\ \Re(\tilde{L}_H)_j > 0 \right\}$$

dans lequel N est l'ensemble des indices hors base actuels.

- Si $\Re(\tilde{L}_H)_e \leq 0$, alors Stop ; la solution actuelle est optimale.

- Sinon, on passe à l'étape (2).

2. - Si $a_{ie} \leq 0$, alors Stop ; le problème a une solution infinie.

- Sinon, déterminer la variable s qui va quitter la base de la manière suivante :

$$s = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ie}}, \qquad avec\ a_{ie} = (A_H)_{i,e} > 0 \right\}$$

3. - Mettre à jour en pivotant sur a_{se},

Mettre à jour $\tilde{b}_i$ en remplaçant par $(\tilde{b}_i - \frac{\tilde{b}_s}{a_{se}} a_{ie} > 0)$ pour $i \neq s$,

Mettre à jour $\tilde{F}$ en le remplaçant par $(\tilde{F} + \frac{\tilde{b}_s}{a_{se}} (\tilde{L}_H)_e)$.

Puis, mettre à jour la matrice de base B en remplaçant a_r par a_s et passer à l'étape 1.

III.5.4 Méthode des tableaux du simplexe flou d'un problème (PLNFT)

Les calculs précédents peuvent se simplifier si on s'arrange pour avoir toujours

$A_B = I_d$. On dit qu'on maintient l'identité sous la base. De cette façon, la résolution d'un système $A_B x_B = b$ est immédiate, puisque$x_B = b$. On va donc chercher à travailler avec la forme simpliciale de $(PLNFT)$.

On suppose donc que la matrice A se décompose en $A = (I_m, A_H)$, où I_m est la matrice identité d'ordre m, et on dispose d'une solution de base réalisable $x^* = (x_B^*, x_H^*)^T$ avec $x_B^* = b$ et $x_H^* = 0$.

Dans ce cas, les coûts réduits se simplifient en :

$$\tilde{L}_H^T \underset{\Re}{=} \tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_H$$

et les indices e et s des variables entrantes et sortantes sont données par :

$$e = \max_j \left\{ (\tilde{L}_H)_j, (\tilde{L}_H)_j \underset{\Re}{>} 0 \right\}$$

$$s = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ie}}, avec a_{ie} = , (A_H)_{i,e} > 0 \right\}$$

avec $x_e = \frac{b_s}{a_{se}}$

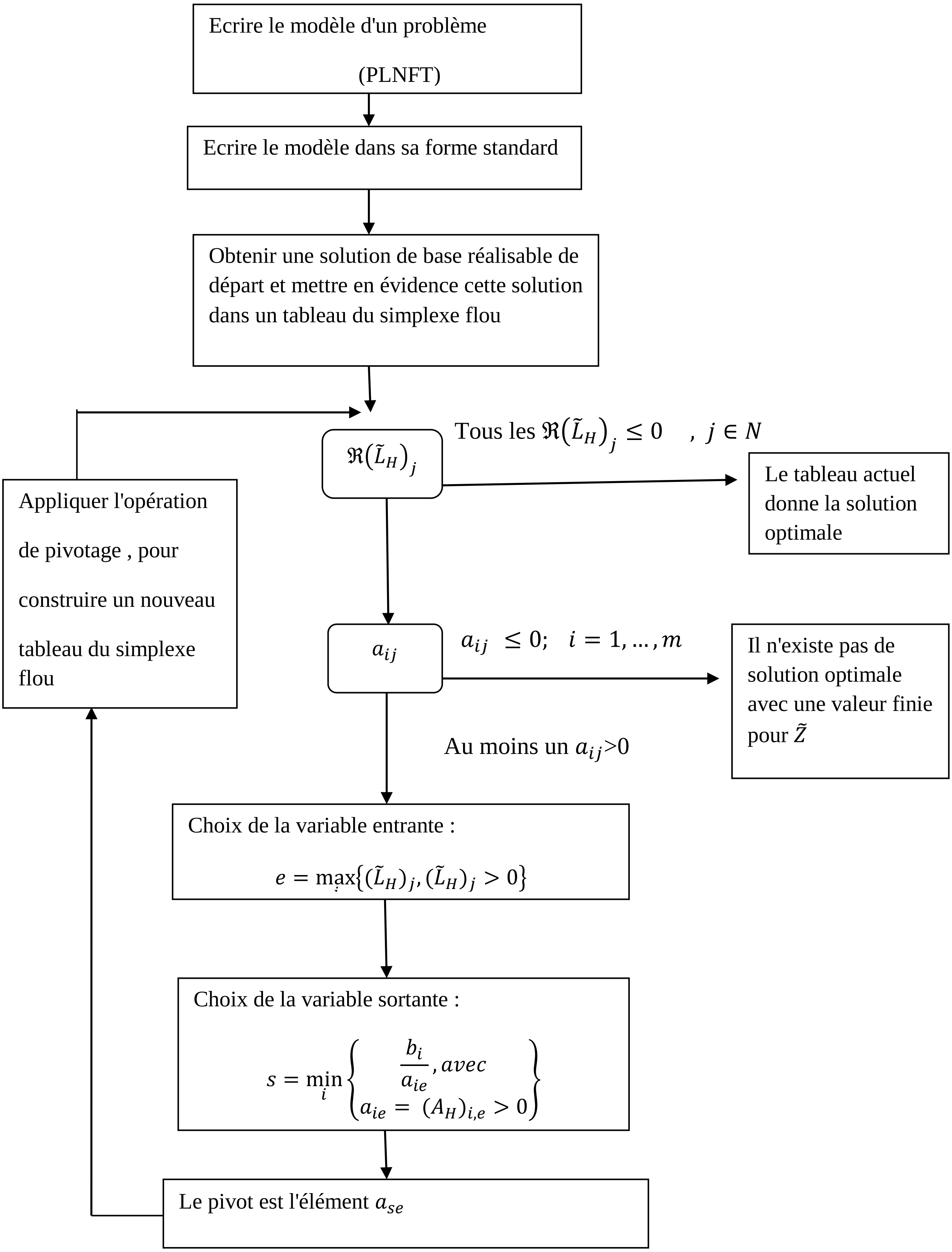
On réécrit les expressions ci-dessus, sous forme d'un tableau, comme suit :

Tableau simplexe flou

$Base$	x_B	x_H	$S.B.R$
$\Re(\tilde{L}_H^T)$	0	$\Re(\tilde{L}_H^T) = \Re\ (\tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_H)$	$\Re(\tilde{c}_B^T A_B^{-1} b) = \Re(\bar{\tilde{Z}})$
$\tilde{L}_H^T$	$\tilde{0}$	$\tilde{L}_H^T \underset{\Re}{=} \tilde{c}_H^T - \tilde{c}_B^T A_H$	$\bar{\tilde{Z}} \underset{\Re}{=} \tilde{c}_B^T A_B^{-1} b$
x_B	I	$A_B^{-1} A_H$	$\bar{b} = A_B^{-1} b$

Le tableau, ci-dessus, nous donne toutes les informations dont on a besoin pour procéder à la méthode du simplexe flou.

III.5.5 Organigramme de l'algorithme du Simplexe Flou d'un problème (PLNFT) (maximisation)



III.6 Exemple numérique pour résoudre (PLNFT)

Résolvons le problème de programmation linéaire en nombres flous trapézoïdal (PLNFT) suivant en utilisant la méthode du simplexe flou.

$$(P_1)\begin{cases} \max \tilde{F}(x) \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)x_1 + (6,10,2,6)x_2 \\ s.c. \\ (2,4,10,2)x_1 + (1,2,1,1)x_2 \underset{\Re}{\leq} (2,3,1,3) \\ (2,3,1,1)x_1 + (2,4,6,2)x_2 \underset{\Re}{\leq} (5,10,20,10) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_2)\begin{cases} \max \tilde{F}(x) \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)x_1 + (6,10,2,6)x_2 \\ s.c. \\ \Re\big((2,4,10,2)x_1 + (1,2,1,1)x_2\big) \leq \Re(2,3,1,3) \\ \Re\big((2,3,1,1)x_1 + (2,4,6,2)x_2\big) \leq \Re(5,10,20,10) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(P_3)\begin{cases} \max \tilde{F}(x) \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)x_1 + (6,10,2,6)x_2 \\ s.c. \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le modèle sous sa forme standard s'écrit :

$$(P_4)\begin{cases} \max \tilde{F}(x) \underset{\Re}{=} (5,8,2,5)x_1 + (6,10,2,6)x_2 \\ s.c. \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

On obtient alors un systèmes d'équations comportant $n = 4$ inconnues et $m = 2$ contraintes. On obtient une solution de base en annulant $(4 - 2) = 2$ variables. On assure une solution de base réalisable en annulant les variables $x_1 et\ x_2$:

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \qquad x_4 = 10.$$

C'est la solution de base réalisable de départ qui est mise en évidence dans le tableau 1du simplexe

Tableau1 - Solution de départ

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
$\Re(\widetilde{L}_H^T)$	$-\frac{29}{2}$	-18	0	0	0
$\widetilde{L}_H^T$	(-8,-5,5,2)	(-10,-6,6,2)	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$
x_3	2	3	1	0	6
x_4	5	4	0	1	10

Les variables hors base sont $x_1$et x_2 .

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable :

$$\min_j \left\{\Re\ (\tilde{L}_H)_j, \Re\ (\tilde{L}_H)_j \underset{\Re}{<} 0\right\} = \min\{\Re(\tilde{L}_H)_1, \Re\ (\tilde{L}_H)_2\}$$

$$= \min\left(-\frac{29}{2}, -18\right) = -18$$

→ la variable entrante est x_2.

$$\text{et } \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ie}}\ , (A_H)_{i,e} > 0\right\} = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{i1}}\ , (A_H)_{i1} > 0\right\}$$

$$=\min\left(\frac{6}{3}, \frac{10}{4}\right) = 2$$

→ la variable sortante est x_3.

En pivotant sur $a_{32} = 3$, on obtient le tableau 2 suivant :

Tableau 2

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
$\Re(\widetilde{L}_H^T)$	$-\frac{5}{2}$	0	6	0	36
$\widetilde{L}_H^T$	$(-4,\frac{5}{3},\frac{19}{3},6)$	$\tilde{0}$	$(2,\frac{10}{3},\frac{2}{3},2)$	$\tilde{0}$	(12,20,4,12)
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	2
x_4	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	2

On applique les critères d'entrée et de sortie d'une variable

$$\Re\left(\widetilde{L}_H^T\right) = \min_j \left\{\Re\ (\tilde{L}_H)_j, \qquad \Re\ (\tilde{L}_H)_j \underset{\Re}{<} 0\right\}$$

$$\min_i \left\{\frac{b_i}{a_{ie}}\ , (A_H)_{i,e} > 0\right\} = \min_i \left\{\frac{b_i}{a_{i2}}\ , (A_H)_{i2} > 0\right\}$$

$\rightarrow$ la variable sortante est x_4

La variable x_1 entre dans la base et la variable sortante est x_4 et le pivot est $a_{41} = \frac{7}{3}$.

Tableau3

	x_1	x_2	x_3	x_4	S.B.R
$\Re(\widetilde{L}_H^T)$	0	0	$\frac{32}{7}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{267}{7}$
$\widetilde{L}_H^T$	$\tilde{0}$	$\tilde{0}$	$\left(-\frac{2}{7},\frac{30}{7},\frac{30}{3},\frac{38}{7}\right)$	$\left(-\frac{5}{7},\frac{12}{7},\frac{18}{7},\frac{19}{7}\right)$	$\left(\frac{90}{7},\frac{148}{7},\frac{32}{7},\frac{90}{7}\right)$
x_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{10}{7}$
x_1	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$

Comme $\Re\left(\widetilde{L}_H^T\right) > 0$ pour toutes les variables hors base alors la

solution $x^* = \left(\frac{6}{7},\frac{10}{7}\right)$ est optimale et

$$\tilde{F}(x^*) = \tilde{F}\left(\frac{6}{7},\frac{10}{7}\right) = (5,8,2,5) \times \frac{6}{7} + (6,10,2,6) \times \frac{10}{7}$$

$$= \left(\frac{90}{7}, \quad \frac{148}{7}, \quad \frac{32}{7}, \quad \frac{90}{7}\right)$$

avec $\Re\left(\tilde{F}(x^*)\right) = \frac{90}{7} + \frac{148}{7} + \frac{1}{2}\left(\frac{90}{7} - \frac{32}{7}\right)$

$\Re\left(\tilde{F}(x^*)\right) = \frac{267}{7}$.

III.7 Dualité Floue

III.7.1 Forme du problème dual flou

Au Programme Linéaire Primal Flou (PLPF) suivant,

$$(PLPF)\begin{cases} \max\limits_{x\in \mathbb{R}^n} \left[\tilde{F}(x) \underset{\Re}{=} \tilde{c}^T x\right] \\ \tilde{A}\,x \underset{\Re}{\leq} \tilde{b} \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

On associe le Programme Linéaire Dual Flou (PLDF) suivant :

$$(PLDF)\begin{cases}\min\limits_{y\in \mathbb{R}^m}\left[\tilde{G}(y) \underset{\Re}{=} \tilde{b}^T y\right]\\ \quad \tilde{A}^T y \quad \underset{\Re}{\geq} \quad \tilde{c}\\ \qquad y \geq 0\end{cases} \tag{3.9}$$

III.7.2 Comparaison entre Primal flou et Dual flou

Primal flou	**Dual flou**
-max($\tilde{F}$) -coefficient $\check{c}$ de F -second membre $\tilde{b}$ - m contraintes inégalités ($\tilde{A}x \underset{\Re}{\leq} \tilde{b}$) - n contraintes de positivité ($x \geq 0$)	-min($\tilde{G}$) -second membre $\tilde{c}$ -coefficient $\tilde{b}$ de G -m contraintes de positivité($y \geq 0$) - n contraintes inégalité ($\tilde{A}^T y \underset{\Re}{\geq} \tilde{c}$)

Exemple Numérique

On considère un programme linéaire flou (PLPF) suivant :

$$(PLPF)\begin{cases}\max \tilde{z}(x) \underset{\Re}{=} (2,3,1,1)x_1 + (3,4,1,2)x_2\\ s.c. \quad (1,2,1,1)x_1 + (2,3,1,2)x_2 \underset{\Re}{\leq} (5,6,2,2)\\ (2,3,1,3)x_1 + (1,2,1,1)x_2 \underset{\Re}{\leq} (4,6,2,1)\\ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}$$

Où $(a^L, a^U, \alpha, \beta)$ est un nombre flou de type trapézoïdal.

En utilisant comme fonction Ranking $\Re$ ($\tilde{a}$)= $a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$,le programme(PLPF)devient :

$$(\text{PLPF})_1 \begin{cases} \max\ z(x) = 5x_1 + 7.5x_2 \\ s.c. \quad 3x_1 + 5.5x_2 \leq 11 \\ \quad 6x_1 + 3x_2 \leq 9.5 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit ce programme sous forme standard

$$(\text{PLPF})_2 \begin{cases} \max z = 5x_1 + 7.5x_2 \\ s.c. \quad 3x_1 + 5.5x_2 + x_3 = 11 \\ \quad 6x_1 + 3x_2 + x_4 = 9.5 \\ \quad x_1, x_2 x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale par la méthode du simplexe obtenue est :

$x_1^* = \frac{77}{96}$, $x_2^* = \frac{25}{16}$ et

$$\tilde{z}^* = (2,3,1,1) \times \frac{77}{96} + (3,4,1,2) \times \frac{25}{16} = \left(\frac{151}{24}, \frac{277}{32}, \frac{227}{96}, \frac{377}{96}\right)$$

et $\Re(\widetilde{z_*}) = \frac{151}{24} + \frac{277}{32} + \frac{1}{2}\left(\frac{377-227}{96}\right) = \frac{3019}{192} \approx 15.72.$

Le dual du programme flou linéaire flou (PLPF) s'écrit :

$$(PLDF) \begin{cases} \min \tilde{w} \underset{\Re}{=} (5,6,2,2)y_1 + (4,6,2,1)y_2 \\ s.c. \quad (1,2,1,1)y_1 + (2,3,1,3)y_2 \underset{\Re}{\geq} (2,3,1,1) \\ \quad (2,3,1,2)y_1 + (1,2,1,1)y_2 \underset{\Re}{\geq} (3,4,1,2) \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

D'après la fonction Ranking $\Re$ ($\tilde{a}$)= $a^L + a^U + \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$, on obtient :

$$(PLDF)_1 \begin{cases} \min \tilde{z} \underset{\Re}{=} 11y_1 + 9.5y_2 \\ s.c. \quad 3y_1 + 6y_2 \geq 5 \\ \quad 5.5y_1 + 3y_2 \geq 7.5 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale du (PLDF) par la méthode du simplexe, est

$$y_1^* = \frac{5}{4}; \quad y_2^* = \frac{5}{24}$$

$\widetilde{w}^* \underset{\Re}{=} (5,6,2,2) \times \frac{5}{4} + (4,6,2,1) \times \frac{5}{24} = \left(\frac{170}{24}, \frac{210}{24}, \frac{70}{24}, \frac{65}{24}\right)$ d'après la fonction Ranking, on obtient :

$\Re(\widetilde{w}^*) = \frac{170}{24} + \frac{210}{24} + \frac{1}{2}\left(\frac{65-70}{24}\right) = \frac{755}{48} \approx 15.72.$

Remarque 5

Les deux problèmes primal et dual ont des solutions optimales et

$\Re(\tilde{z}^*) = \Re(\widetilde{w}^*) \approx 15.72.$

III.7.3 Théorèmes de dualité [10]

Théorème1

Le dual du dual flou est le primal flou.

Preuve

le dual d'un (PLPF) sous forme canonique pure s'écrit:

$$(PLDF)\begin{cases} \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \left[\tilde{G}(y) \underset{\Re}{=} \tilde{b}^T y\right] \\ \tilde{A}^T y \quad \underset{\Re}{\geq} \tilde{c} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(PLDF)\begin{cases} \min\limits_{y \in \mathbb{R}^m} \left[-\tilde{G}(y) \underset{\Re}{=} \left(-\tilde{b}\right)^t . y\right] \\ -\tilde{A}^T y \quad \underset{\Re}{\leq} -\tilde{c} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

On prend le dual du dual et on obtient$\tilde{F}(x)$

$$(PLDF)\begin{cases} \min\limits_{x}[(-\tilde{c}^t)x] \\ \left(-\tilde{A}^t\right)^t x \underset{\Re}{\geq} \left(-\tilde{b}\right)^t \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(PLPF)\begin{cases}\max\limits_{x}[\tilde{c}^T x]\\ \tilde{A}\,x \underset{\Re}{\leq} \tilde{b}\\ x \geq 0\end{cases}$$

Théorème2

Si x_0 et $y_0$sont deux solutions réalisables du primal flou et du dual flou respectivement, alors$\tilde{c}x_0 \underset{\Re}{\leq} y_0\tilde{b}$.

Preuve

On multiplie $\tilde{A}x_0 \underset{\Re}{\leq} \tilde{b}$à gauche par $y_0 \geq 0$ et$y_0\tilde{A} \underset{\Re}{\geq} \tilde{c}$à droite par $x_0 \geq 0$et on trouve

$$\tilde{c}x_0 \underset{\Re}{\leq} y_0\tilde{A}x_0 \underset{\Re}{\leq} y_0\tilde{b}$$

d'où

$$\tilde{F}(x_0) \underset{\Re}{\leq} \tilde{G}(y_0)$$

Théorème3

Soient x_0 et y_0 deux solutions réalisables du primal flou et du dual flou respectivement, si$\tilde{F}(x_0) \underset{\Re}{=} \tilde{G}(y_0)$ alors x_0 et $y_0$sont deux solutions optimales du primal flou et du dual flou respectivement.

Preuve

Soient x_0 et y_0 deux solutions réalisables du primal flou (PLPF) et du dual flou (PLDF) respectivement, telles que$\tilde{F}(x_0) \underset{\Re}{=} \tilde{G}(y_0)$. D'après le Théorème (2) pour x solution réalisable de$(PLPF)$, on a :

$\tilde{F}(x) \underset{\Re}{\leq} \tilde{G}(y_0) \underset{\Re}{=} \tilde{F}(x_0)$ donc $x_0$est une solution optimale du primal flou.

Soientx_0 et y_0 deux solutions réalisables du primal flou et du dual flou respectivement, telles que$\tilde{F}(x_0) \underset{\Re}{=} \tilde{G}(y_0)$. D'après le Théorème (2) pour y solution réalisable de$(PLDF)$, on a:

$\tilde{G}(y) \underset{\Re}{\leq} \tilde{F}(x_0) \underset{\Re}{=} \tilde{G}(y_0)$ donc $y_0$est une solution optimale du dual flou.

Remarque 6

Etant donnés un problème primal flou $(PLPF)$ et son dual flou $(PLDF)$, une et une seule des trois situations suivantes a lieu:

1)- Les deux problèmes possèdent chacun des solutions optimales x_0 et y_0 avec $\tilde{c}x_0 \underset{\Re}{=} y_0\tilde{b}$.

2)- Un des problèmes possède une solution réalisable avec un optimum infini, l'autre n'a pas de solution.

3)- Aucun des deux problèmes ne possède de solution réalisable.

Par exemple pour vérifier la remarque (3.3), considérons l'exemple suivant :

$$(PLPF)\begin{cases} \max \tilde{z} \underset{\Re}{=} (1,2,5,1)x_1 + (-1,0,2,6)x_2 \\ s.c. \\ (1,2,5,1)x_1 + (-1,1,3,1)x_2 \underset{\Re}{\leq} (-1,1,4,2) \\ (0,1,6,2)x_1 - (-1,1,3,1)x_2 \underset{\Re}{\leq} (-2,-1,3,7) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(PLPF)_1\begin{cases} \max \tilde{z} \underset{\Re}{=} (1,2,5,1)x_1 + (-1,0,2,6)x_2 \\ s.c. \\ \Re(\,(1,2,5,1)x_1 + (-1,1,3,1)x_2) \leq \Re(-1,1,4,2) \\ \Re((0,1,6,2)x_1 - (-1,1,3,1)x_2) \leq \Re(-2,-1,3,7) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(PLPF)_2\begin{cases}\max \tilde{z} \underset{\Re}{=} (1,2,5,1)x_1 + (-1,0,2,6)x_2 \\ s.c. \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}$$

$$(PLDF)\begin{cases}\min \tilde{z} \underset{\Re}{=} (-1,1,4,2)y_1 + (-2,-1,3,7)y_2 \\ s.c. \\ (1,2,5,1)y_1 + (0,1,6,2)y_2 \underset{\Re}{\geq} (1,2,5,1) \\ (-1,1,3,1)y_1 - (-1,1,3,1)y_2 \underset{\Re}{\geq} (-1,0,2,6) \\ y_1, y_2 \geq 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$(PLDF)_1\begin{cases}\min \tilde{z} \underset{\Re}{=} (-1,1,4,2)y_1 + (-2,-1,3,7)y_2 \\ s.c. \\ \Re((1,2,5,1)y_1 + (0,1,6,2)y_2) \underset{\Re}{\geq} \Re(1,2,5,1) \\ \Re((-1,1,3,1)y_1 - (-1,1,3,1)y_2) \underset{\Re}{\geq} \Re(-1,0,2,6) \\ y_1, y_2 \geq 0\end{cases}$$

$$(PLDF)_2\begin{cases}\min \tilde{z} \underset{\Re}{=} (-1,1,4,2)y_1 + (-2,-1,3,7)y_2 \\ s.c. \\ y_1 - y_2 \geq 1 \\ -y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0\end{cases}$$

Les deux problèmes $(PLPF)$ et $(PLDF)$ n'ont pas de solution réalisable.

Théorème4 :(Ecarts complémentaires)

Deux solutions réalisable x_0 et y_0 respectivement du primal flou (PLPF) et du dual flou (PLDF) sont optimales si et seulement si

$$(y_0\tilde{A} - \tilde{c})x_0 + y_0(\tilde{b} - \tilde{A}x_0) \underset{\mathfrak{R}}{=} \tilde{0}.$$

Preuve

Condition nécessaire ($\Longrightarrow$)

Supposons que x_0 et y_0 sont deux solutions réalisables du primal flou$(PLPF)$ et du dual flou$(PLDF)$ respectivement ainsi,

$\tilde{A}x_0 \underset{\mathfrak{R}}{\leq} \tilde{b}$ et

$$\mathfrak{R}(\tilde{A})\, x_0 \leq \mathfrak{R}(\tilde{b}) \quad (1)$$

En utilisant la fonction Ranking $\mathfrak{R}$, on obtient

$\mathfrak{R}(\tilde{A}) = (\mathfrak{R}(\tilde{a}_{ij}))_{m\times n}$ et $\mathfrak{R}(\tilde{b}) = (\mathfrak{R}(\tilde{b}_i))_{m\times 1}$,

avec $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in F(\mathbb{R})$, pour $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

En ajoutant à (1) la variable d'écart u, on obtient

$$\mathfrak{R}(\tilde{A})\, x_0 + u = \mathfrak{R}(\tilde{b}) \quad (2)$$

Puisque y_0 est une solution réalisable du dual flou (PLDF) alors

$y_0\tilde{A} \underset{\mathfrak{R}}{\geq} \tilde{c}$ et $\mathfrak{R}(y_0\tilde{A}) \geq \mathfrak{R}(\tilde{c})$ $\Leftrightarrow$

$$y_0\mathfrak{R}(\tilde{A}) \geq \mathfrak{R}(\tilde{c}).$$

En ajoutant la variable d'écart v on obtient l'égalité suivante (3)

$$y_0\,\mathfrak{R}(\tilde{A}) - v = \mathfrak{R}(\tilde{c}) \quad (3)$$

On multiplie (2) à gauche par $y_0 \geq 0$ à gauche et (3) à droite par $x_0 \geq 0$, on obtient :

$$y_0\mathfrak{R}(\tilde{A})\, x_0 + y_0 u = y_0\mathfrak{R}(\tilde{b}), \quad (4)$$

$y_0\Re\left(\tilde{A}\right) x_0 - vx_0 = \Re\,(\tilde{c})x_0.$ (5)

En faisant la soustraction de (5) et (4), on obtient :

$y_0u + vx_0 = y_0\Re\left(\tilde{b}\right) - \Re\,(\tilde{c})\,x_0.$ (6)

D'après la remarque (6.1) et l'optimalité de x_0 et y_0, on a :

$y_0\,\Re\left(\tilde{b}\right) = \Re\,(\tilde{c})\,x_0$ et d'après l'égalité (6),

on déduit que : $y_0u + vx_0$=0 (7)

Finalement, en remplaçant l'égalité (7) dans (6), on obtient:

$(y_0\Re\left(\tilde{A}\right) - \Re\,(\tilde{c}))x_0 + y_0\left(\Re\left(\tilde{b}\right) - \Re\left(\tilde{A}\right) x_0\right) = 0$ (8)

Ce qui implique

$(y_0\tilde{A} - \tilde{c})x_0 + y_0(\tilde{b} - \tilde{A}x_0) \underset{\Re}{=} \tilde{0}.$ (9)

La condition suffisante ($\Longleftarrow$) se fait de manière similaire .

III.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que tous les résultats existants en programmation linéaire et dualité peuvent être généralisés aux problèmes linéaires flous en utilisant la fonction Ranking $\Re$.

Le caractère flou des coefficients des problèmes primal et dual sont caractérisés par des nombres flous de type trapézoïdal.

Depuis plusieurs années, on considère que les deux sources d'incertitude principales sont le manque d'information et la variabilité des phénomènes. On modélise, alors, les informations soit par des distributions de probabilité (informations aléatoires) soit par des ensembles flous (informations incomplètes). La théorie des ensembles flous apparait comme un outil bien adapté pour modéliser un concept vague.

Dans notre travail nous avons abordé, en premier lieu, des programmes linéaires dont les données sont supposées être connues avec précision qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation déterministes dont la résolution s'est faite par la méthode du simplexe classique de Dantzig et la dualité. Nous avons exposé les théorèmes de dualité qui permettent de donner les liens existants entre le problème primal et le problème dual correspondant dans la programmation linéaire.

Ensuite nous avons traité des programmes linéaires, dont les données sont approximatives ou vagues, qui sont appelés des problèmes linéaires d'optimisation flous. Dans notre cas, le flou est caractérisé par des nombres flous trapézoïdaux. En utilisant les fonctions Ranking et l'arithmétique des nombres flous de type trapézoïdal, nous avons résolu les problèmes linéaires flous par la méthode du simplexe flou et aussi par le dual flou qui n'est rien d'autre qu'une extension du simplexe et dual classique étudié au chapitre un.

Bibliographie

[1] Amiri N. M., Nasseri S. H. ,Yazdani A. ,Fuzzy Primal Simplexe Algorithms for solving Fuzzy Linear Programming Problems. Iranian Journal of ofOperation Research,1(2) pages 68-84,2009.

[2] Baillargeon G., Programmation linéaire appliquée. Les éditions SMG ,Québec,1996.

[3] Dantzig G.B., Linear Programming and Extentions.Princeton UnivercitéPress. Princeton, New Jersey ,1963.

[4] Drouche.H , Application du Simplexe Classique de Dantzig à un Problème Linéaire Flou. Thèse de master en R.O, UMMTO, 2016.

[5] Dubois D. , Prade H. , fuzzy sets and systems :Theory and Applications. AcademicPress , New York, 1980.

[6] El Barnoussi, Programmation linéaire Méthode duSimplexe.Publier en linge ; www.fsr. ac.ma/ cours / maths / bernoussi /RO-ELEBERNOUSSI-2010-P1.2010.

[7] Maleki H.R. , Tata M. , Mashinchi M. , Linear programming with fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 109 (2000) pages 21-33, 1998.

[8] Nasseri S.H. , Ardil E. , Yazdani A. , and Zaefarian R. , Simplex Method for solving Linear Programming with fuzzy Numbers. International Scholarly and SceintificResearch&Innovation , 1 (10) pages 500-504, 2007.

[9] Noora A. A., Karami P. , Ranking Function and its Application to fuzzy DEA, Ranking Function and its Application to fuzzy DEA-Hikari. Publier en linge : « www. m-hikari.com /imf …/29-32…/ nooraIMF pages 29-32-2008. »

[10] N. Mahdavi-Amiri, S. H. Nasseri, . Duality fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function. / Applied Mathematics and Computation 180, pages 206-216, 2006.

[11] Oukkacha. B , . Aidene. M. , Les Manuels de l'Etudiant. Recherche Opérationnelle. Programmation Linéaire. Page bleue 2005.

[12] SamuelAnb DT. Théories des ensembles flous. 16 /2009.

[13] Scheid J-F, Graphe et recherche opérationnelle. ESIAL. Publier en, linge :« www.isig.ac.cd/isiggoma/data/fichier/5568820f13cf6.pdf» 2010/2011.

[14] Sudha A. S. , Karpagamani V. , Solving fully fuzzy linear Programming problem using trapezoidal. Publier en ligne : www.jgrma.info /index.php /jgrma /article /viewFile/231 /162, 2014.

[15] Tareb.F , Merzouk.D. Résolution d'un Problème Linéaire Flou via l'optimisation Multiobjectif.Thèse de master R.O, UMMTO, 2015

[16] Teaching C. Chapitre 1 programmation linéaire .Généralités. Publier en linge : « www. rogp. hec. ulg. uc. be / Crama / Teaching / RO1lic /Docs / Chap1_PL.PDF ».

[17] Zadeh L. A. , Fuzzy sets, Information and control. 8(3), pages 338-358, 1965.

[18] Zerdani O. , UneContubution sur la Programmation Linéaire Multiobjectif Floue. Mémoire de Magister. R.O , UMMTO, 1992.