

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI de TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE

pour l'obtention du Diplôme de MASTER II

Option : ENTRAINEMENTS ELECTRIQUES

Thème

ETUDE D'UN MICRO-ACTIONNEUR À LEVITATION MAGNETIQUE

Proposé et dirigé par : Mr H. Mohellebi

Etudié par : Mr M.S. Hamache

Co-dirigé par : Mr F. Hocini

Promotion 2012

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier celui qui m'a accordé sa confiance en me proposant ce sujet : mon promoteur Mr Hassane Mohellebi, professeur à l'UMMTO. Ses orientations, ses conseils et aussi sa patience m'ont été très utiles pendant tout le temps qu'a duré mon travail. Mes remerciements aussi à Mr F. Hocini, enseignant à l'UMMTO et co-promoteur de ce mémoire, pour l'aide qu'il m'a apportée.

Je voudrais aussi remercier les personnes qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je n'omettrais pas de remercier Mme Z. Oudni, Mme G. Ouali, Messieurs M. Moudoud, M. Meghlat, M. Zaouia, A. Diche, enseignants à l'UMMTO, pour leur aide et leur soutien. Ma gratitude va également à toutes les personnes qui n'ont pas vu en mes cheveux blancs un frein pour une nouvelle aventure universitaire.

Un grand merci à ma mère, pour tous ses sacrifices ; à mes enfants, Aghiles et Massyl, qui ont accepté que je "mette en veille" certaines de mes obligations envers eux pendant mes études; et enfin à ma femme je dis : « Sans toi, tout ceci n'aurait pu arriver. Tu as été la sève qui a nourri mon parcours par tes encouragements et ton soutien indéfectible mais aussi par tes suggestions (même si je ne les ai pas toujours admises) ».

SOMMAIRE

Remerciements

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Notions d'électromagnétisme – Equations de Maxwell.....	3
I.1. Introduction	3
I.2. Quelques grandeurs électriques et magnétiques	3
Charge électrique.....	3
Champ électrique	3
Champ magnétique.....	4
Densité de charge électrique.....	4
Densité de courant électrique	4
I.3. Lois fondamentales d'électricité et de magnétisme	4
I.3.a. Théorème de Gauss	4
I.3.b. Théorème d'Ampère	4
I.3.c. Loi de Biot et Savart.....	5
I.3.d. Loi de Faraday	5
I.4. Les équations de Maxwell	5
I.4.a. Première équation de Maxwell	5
I.4.b. Deuxième équation de Maxwell	6
I.4.c. Troisième équation de Maxwell	6
I.4.d. Quatrième équation de Maxwell	6
I.5. Relations du milieu	7
I.6. Loi d'Ohm	8
I.7. Conditions de passage	8
I.7.a. Champ électrique et densité de champ électrique.....	8

• Composante tangentielle	8
• Composante normale	9
I.7.b. Champ magnétique H et induction magnétique B	10
• Induction B	10
• Variation du champ magnétique H à la frontière de deux milieux	10
I.8. Conditions aux limites	10
• Conditions de Dirichlet	11
• Condition de Neumann	11
• Condition mixte (Dirichlet, Neumann)	11
I.9. Les hypothèses simplificatrices	11
I.10. Effet de peau	12
I.11. Les équations aux dérivées partielles	13
I.11.a. Définition	13
I.11.b. Différents types d'équations aux dérivées partielles.....	13
• Equations elliptiques	13
• Equations paraboliques.....	14
• Equations hyperboliques.....	14
• Equations aux dérivées partielles non linéaires.....	15
I.12. Equations et modèles du champ électromagnétique	15
I.12.a. Le modèle général de Maxwell	15
I.12.b. Modèles magnétodynamiques	16
• Modèle magnétodynamique linéaire exprimé en termes de potentiel vecteur magnétique	18
• Modèle bidimensionnel exprimé en termes de potentiel vecteur magnétique	18
• Equation aux dérivées partielles dans le cas bidimensionnel	19
- En coordonnées cartésiennes.....	19
- En coordonnées cylindriques, cas 2 D axisymétrique	19
I.12.c. Modèle magnétostatique.....	20
• Modèle magnétostatique scalaire	20
• Modèle magnétostatique vectoriel	20
- Cas bidimensionnel cartésien	21
- Cas axisymétrique 2 D	22

I.13. Equation de conservation de l'énergie électromagnétique.....	22
I.14. Les effets mécaniques.....	23
I.14.a. Notion d'énergie et de coénergie magnétiques.....	23
I.14.b. Calcul des forces magnétiques par la méthode de la variation de l'énergie et de la coénergie magnétiques.....	24
• A partir de l'énergie magnétique	24
• A partir de la coénergie	24
I.14.c. Calcul de la force par la méthode des travaux virtuels	25
I.14.d. Tenseur de Maxwell	25
I.14.e. Force de Lorentz.....	25
I.15. Conclusion.....	26
Chapitre II : Méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	27
II.1. Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles.....	27
II.1.a. Méthode des différences finies (MDF).....	28
II.1.b. Méthode des intégrales de frontières (MIF).....	29
II.1.c. Méthode des volumes finis (MVF).....	29
II.2. Méthode des éléments finis	29
II.2.1. Introduction.....	29
II.2.2. Principe de la MEF.....	30
a. Méthode variationnelle	30
b. Méthode de Galerkin.....	31
II.2.3. Etapes suivies dans la MEF	32
II.2.4. La discrétisation.....	33
II.2.4.a. Quelques formes d'éléments de référence classiques.....	33
II.2.4.b. Fonctions d'interpolation ou fonctions de forme.....	36
II.2.4.c. Fonction d'approximation sur un élément.....	36
II.2.4.d. Exemple de calcul de fonction d'approximation : cas d'un élément triangulaire quelconque	37

II.2.5. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	39
II.2.5.a. Problème magnétodynamique.....	39
• Cas cartésien 2D.....	39
• Cas axisymétrique 2D	41
II.2.5.b. Cas magnétostatique.....	42
• Cas cartésien	42
• Cas axisymétrique.....	43
II.2.6. Discrétisation temporelle.....	43
II.2.6.a. Méthode d'Euler explicite.....	43
II.2.6.b. Méthode d'Euler implicite.....	44
II.2.6.c. Méthode d'Euler semi-implicite.....	44
II.2.7.Méthodes de résolution des systèmes algébriques.....	45
a. Méthodes directes.....	45
a.1. Méthode de Cramer.....	46
a.2 Méthode d'élimination de Gauss.....	46
b. Méthodes itératives.....	47
b.1. Méthode de Jacobi.....	48
b.2 Méthode de Gauss-Seidel.....	48
Chapitre III : Applications.....	49
III.A. Lévitación magnétique.....	49
III.A.1. Lévitación par des aimants supraconducteurs.....	50
III.A.1.a. Supraconductivité.....	50
III.A.1.b. L'effet Meissner-Ochsenfeld.....	50
III.A.1.c. Obtention de la lévitation.....	51
III.A.2.Lévitation par des électroaimants.....	52
III.A.2.a. Lévitación magnétique active (ou lévitation électromagnétique).....	52
III.A.2.b. Lévitación électrodynamique.....	52

III.A.2.b.1 Lévitiation électrodynamique à base de courants de Foucault induits dans des supraconducteurs en mouvement.....	53
III.A.2.b.2. Lévitiation électromagnétique à champs alternatifs.....	53
III.A.3. Lévitiation stabilisée par l'effet gyroscopique.....	54
III.A.4. Applications de la lévitation magnétique.....	55
III.A.4.a. Les paliers magnétiques.....	55
III.A.4.b. D'autres applications des suspensions magnétiques.....	56
III.A.4.c Les microactionneurs.....	56
i- Micro-relais	57
ii- Micro-pompes ou micro-valves.....	57
III.B. Couplage magnétique-mécanique.....	58
III.B.1. Rappel des équations	58
III.B.1.a. Equations électriques.....	58
III.B.1.b. Equation mécanique.....	58
III.B.1.c. Equation électromagnétique.....	59
III.B.2. Modèles de couplage.....	59
III.B.2.a. Modèle non couplé.....	59
III.B.2.b. Modèle de couplage paramétrique.....	59
III.B.2.c. Modèle du couplage direct.....	60
III.B.2.d. Modèle de couplage indirect (ou alterné).....	60
III.C. Application 1.....	62
III.C.1. Présentation du dispositif.....	62
III.C.1.a. Structure géométrique.....	62
III.C.1.b. Dimensions géométriques.....	62
III.C.1.c. Caractéristiques physiques.....	63
III.C.1.d. Domaine de résolution et conditions aux limites.....	63
III.C.2. Méthode de résolution.....	64
III.C.3. Maillage du dispositif.....	65

III.C.4. Allure des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique.....	67
III.C.5. Evolution des grandeurs mécaniques.....	67
III.C.6. Interprétation des résultats.....	69
III.D. APPLICATION II.....	71
III.D.1. Présentation du dispositif.....	71
III.D.1.a. Structure géométrique.....	71
III.D.1.b. Dimensions géométriques.....	71
III.D.1.c. Caractéristiques physiques.....	72
III.D.1.d. Domaine de résolution et conditions aux limites.....	72
III.D.2. Méthode de résolution.....	73
III.D.3. Maillage du dispositif.....	74
III.D.4. Allure des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique.....	75
III.D.5. Evolution des grandeurs mécaniques.....	76
III.D.6. Interprétation des résultats.....	78
III.E. Conclusion.....	78
Conclusion générale.....	79

Bibliographie

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les entraînements électriques occupent actuellement une grande place dans des domaines variés qui s'étendent de l'industrie militaire à l'électrodomestique. Pour une grande partie des applications concernées, il s'agit de produire et d'exploiter des mouvements linéaires. On doit alors opter soit pour une transmission directe ou une transmission indirecte passant par un système de conversion rotation/translation. Il est évident que la première solution est la plus indiquée, ne serait-ce qu'en raison de l'inertie, de la précision réduite ou de la maintenance qui sont les corollaires de la seconde option.

L'étendue des performances attendues des machines électromagnétiques linéaires (en termes de courses et de puissances) est très large. Elle englobe des applications à très forte accélérations (lanceurs), celles exigeant de très grandes vitesses (train à propulsion magnétique), les systèmes à positionnement précis (électronique), ceux à poussée importante (usinage) et les actionneurs aéronautiques. De multiples raisons font donc que, malgré des coûts encore élevés, en comparaison de ceux des machines rotatives, elles émergent de plus en plus dans l'industrie, le transport, le domaine médical,... Ajoutons aussi que les possibilités de miniaturisation qu'elles offrent font qu'on les retrouve même dans des domaines tels que les biotechnologies.

Dans la multitude de voies ouvertes pour l'exploitation des phénomènes électromagnétiques et susceptibles d'aboutir à des actionneurs électromagnétiques linéaires, certaines sont plus exploitées que d'autres. Ainsi, le moteur synchrone linéaire trouve des applications de plus en plus accrues. Nous, nous avons choisi d'étudier deux types d'actionneurs à mouvement vertical sans support matériel.

Ils sont de dimensions réduites, ce qui pourrait être un avantage pour leur exploitation et leurs coûts. Pour la première application, l'actionneur en question est constitué d'une bobine surmontée d'un cylindre métallique. L'alimentation sinusoïdale de l'inducteur, engendre des courants de Foucault dans le plateau. Ces courants interagissent avec le flux inducteur et produisent une force magnétique pouvant aboutir à l'expulsion du disque.

Il est commun de trouver des études de dispositifs à lévitation magnétique utilisant des supraconducteurs. Ceci permet, grâce à des densités de courant importantes admises dans ces matériaux, de produire des forces mécaniques pouvant soulever des masses. Notre objectif est de contourner le double écueil que constituent le refroidissement et le prix des supraconducteurs.

La forme axisymétrique du dispositif justifie une étude bidimensionnelle en coordonnées cylindriques. Le modèle qui convient pour cette première application est le modèle magnétodynamique.

Dans une deuxième application, un actionneur vertical basé sur la répulsion exercée par un électroaimant alimenté en courant permanent, sur un aimant permanent est étudié. Le modèle magnétostatique qui lui est appliqué sera traité en deux dimensions, en raison de la forme du dispositif.

Dans chaque cas, nous essayerons d'abord d'adopter une formulation en fonction du potentiel vecteur magnétique. De cette variable découleront les expressions de toutes les autres telles que l'induction magnétique et la force magnétique. De ces résultats pourront être déduites les performances de l'objet à concevoir.

Nous ne pouvons entamer notre travail sans un rappel, certes non exhaustif, de notions d'électromagnétisme et des équations de base régissant ce domaine, et plus particulièrement les équations de Maxwell. Rappels qui nous permettront de développer quelques modèles parmi les plus utilisés dans l'étude des phénomènes électromagnétiques. Ce sera l'objet du chapitre I.

La plupart des phénomènes physiques sont régis par des lois décrites par des équations aux dérivées partielles ; l'électromagnétisme n'échappe pas à la règle. La résolution analytique de ces équations n'est possible qu'au terme de simplifications qui ne sont admissibles que pour des cas rares. Pour le reste, notamment des problèmes à géométrie complexes et pour des matériaux non linéaires, il est impératif de passer à l'utilisation d'outils plus performants que sont les méthodes numériques. Le chapitre II en présente quelques unes, en insistant sur la méthode des éléments finis. Les avantages qu'elle présente justifient largement sa présence dans des branches aussi variées que la mécanique et le génie civil.

Dans le dernier chapitre, il nous a semblé utile de présenter d'abord, même de manière succincte, des notions sur la lévitation magnétique et le couplage magnétique-mécanique. En effet, notre dispositif est un actionneur vertical et l'obtention du mouvement vertical peut être basée sur divers procédés; nous en avons donc présenté quelques uns. De plus, la force magnétique servant à soulever la partie mobile est le résultat d'un couplage entre deux phénomènes: magnétique et mécanique; le premier engendre une action mécanique, le second en changeant la géométrie du système influe sur les valeurs et la répartition du champ magnétique. On a donc jugé utile de décrire les différentes méthodes permettant de prendre en considération cette interaction. La prise en compte du mouvement se fera par la méthode de remaillage. Nous terminerons bien sûr par l'étude proprement dite des dispositifs.

NOTIONS D'ÉLECTROMAGNÉTISME

EQUATIONS DE MAXWELL.

I.1. Introduction : [1] [2]

L'interaction électromagnétique est l'interaction dont les effets sont les plus fréquents dans la vie courante. En dehors des effets de la pesanteur, la quasi-totalité des phénomènes de la vie quotidienne découle de l'électromagnétisme.

La notion d'électromagnétisme date de 1860, lorsque J.C. Maxwell unifia l'électrodynamique et le magnétisme en une seule théorie. Les quatre équations de Maxwell sont toujours utilisées pour décrire les effets de l'électromagnétisme. Elles ont été établies à partir de faits expérimentaux connus à l'époque de Maxwell.

I.2. Quelques grandeurs électriques et magnétiques : [1] [3]

- Charge électrique :

La charge électrique q d'une particule est une grandeur caractéristique de cette particule. La charge d'une particule ne varie pas en fonction de sa vitesse (principe de l'invariance de la charge).

- Champ électrique :

Une charge électrique q_1 immobile crée autour d'elle une propriété locale de l'espace que l'on appelle champs électrique. Cette propriété fait que si une autre charge q_2 est placée dans cet espace, elle subit une force F proportionnelle à cette charge :

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E}$$

\vec{E} est le champ électrique créé par q_1 . Son module est

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{q_1}{d^2} \text{ (V/m)} ; \tag{1.1}$$

d : distance entre les deux charges ; $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$: permittivité électrique du milieu.

ϵ_0 : perméabilité électrique du vide ;

ϵ_r : perméabilité relative du milieu.

- Champ magnétique :

Lorsqu'une charge électrique q_1 se déplace, elle génère une propriété vectorielle de l'espace qu'on appelle champ magnétique (induction magnétique).

Cette nouvelle propriété fait que, si une autre charge q_2 se déplace dans ce champ magnétique à une vitesse \vec{v} , elle subit une force magnétique

$$\vec{f}_m = q_2 \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}; \quad (1.2)$$

\vec{B} : vecteur induction magnétique.

- Densité de charge électrique :

La densité de charge électrique peut être ponctuelle ou distribuée sur une ligne, une surface ou un volume.

- Densité de courant électrique :

Un mouvement de charges crée un courant électrique dont la densité est définie par

$$\vec{J} = \sum \rho_i \cdot \vec{v}_i \quad (1.3)$$

ρ_i : densité moyenne de charge ;

\vec{v}_i : vitesse moyenne de ces charges ;

\vec{J} : densité de courant volumique.

I.3. Lois fondamentales d'électricité et de magnétisme : [1] [3]

I.3.a. Théorème de Gauss :

Le flux de champ électrique à travers une surface fermée est égal au quotient de la charge intérieure à la surface par la permittivité électrique du vide :

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

I.3.b. Théorème d'Ampère :

La circulation d'un champ magnétique le long d'un contour fermé est égal e à la somme algébrique des courants coupant la surface délimitée par ce contour :

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i \quad (1.5)$$

C : contour fermé ; I_i : courant d'indice i .

I.3.c. Loi de Biot et Savart :

L'induction magnétique \vec{dB} , produite en un point P par un courant électrique I traversant un élément filiforme $d\vec{l}$ situé à une distance r de ce point, est donnée par la loi suivante :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (1.6)$$

L'induction créée pour tout un circuit (c), ensemble des éléments $d\vec{l}$, est :

$$\vec{B} = \int_{(c)} \vec{dB} \quad (1.7)$$

I.3.d. Loi de Faraday :

Lorsqu'un champ magnétique traversant un circuit fermé varie de $d\phi$ pendant un temps dt , ou lorsqu'un conducteur coupe un flux $d\phi$, il apparaît à ses bornes une fem induite. Son sens obéit à la loi de Lenz : le courant résultant se dirige de sorte à créer un flux s'opposant à la cause qui l'a créée.

Expression de la fém. :

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \quad (1.8)$$

I.4. Les équations de Maxwell : [1] [2] [3] [4]

I.4.a. Première équation de Maxwell :

Elle exprime le théorème de Gauss.

On sait que : $Q_t = \iiint_V \rho \cdot dV$, ρ : densité volumique de charge électrique

et d'après le théorème de Gauss : $Q_t = \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{ds}$.

Appliquons le théorème de la divergence sur la seconde équation :

$$Q_t = \iiint_V \text{div } \vec{D} \cdot dV .$$

Et par identification avec la première, on aura :

$$\text{Div } \vec{D} = \rho \quad (1.9)$$

C'est la forme locale de la première équation de Maxwell.

I.4.b. Deuxième équation de Maxwell :

La loi de Faraday énonce que $e = - \frac{d\phi}{dt}$ aux bornes d'un circuit (C) dont le flux interne varie de $d\phi$. Or, la circulation d'un champ électrique le long d'un circuit (C) est : $e = \int_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

L'expression du flux est $\phi = \iint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{ds}$, avec s : surface correspondant au flux $d\phi$ et B : induction magnétique en un point de s.

Donc on peut déduire que : $\int_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot \vec{ds}$.

Après application du théorème de Stokes, l'équation devient :

$$\iint_s \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot \vec{ds}.$$

D'où la deuxième équation de Maxwell :

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (I.10)$$

I.4.c. Troisième équation de Maxwell :

Appliquons la divergence aux deux termes de la deuxième équation de Maxwell :

$$\text{Div} (\text{rot } \vec{E}) = - \frac{d}{dt} \text{div} (\vec{B});$$

or $\text{div} (\text{rot } \vec{E}) = 0$; d'où

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (I.11)$$

Ce résultat signifie que le flux est conservatif, c'est-à-dire que le flux à travers une surface fermée est toujours nul. Si cette divergence était différente de zéro, cela supposerait l'existence de charges magnétiques, ce qui ne correspond pas à la réalité physique.

I.4.d. Quatrième équation de Maxwell :

A partir de la loi d'Ampère

$$\oint_{(c)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i = I, \text{ avec } (c) : \text{contour fermé, } H : \text{champ magnétique,}$$

I_i : courant embrassé par le contour (c),

et sachant que

$$I = \int_{(s)} \vec{J} \cdot \vec{ds}, \text{ } J : \text{densité de courant, } s : \text{surface de contour (c), on}$$

peut écrire que

$$\oint_{(c)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(s)} \vec{J} \cdot d\vec{s} .$$

Par application du théorème de Stokes sur le contour (c) délimitant la surface (s) et par identification,

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} .$$

Pour rester en conformité avec l'équation de conservation de charge électrique, Maxwell a ajouté un terme : $\vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, correspondant au courant de déplacement ; alors l'équation devient

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (I.12)$$

Le champ magnétique peut être créé par un champ électrique (courant de conduction) et/ou par la variation temporelle de ce champ.

Récapitulatif : forme locale des équations de Maxwell.

$$\text{Div } \vec{D} = \rho ; \text{ équation de Maxwell-Gauss.}$$

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} ; \text{ équation de Maxwell-Faraday.}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 ; \text{ équation de conservation de flux.}$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} ; \text{ équation de Maxwell-Ampère.}$$

I.5. Relations du milieu : [1] [2]

Pour étudier les phénomènes électromagnétiques dans un milieu, les équations de Maxwell doivent être complétées par

- les relations du milieu ;
- la loi d'Ohm.

Les propriétés électriques et magnétiques, spécifiques du milieu, sont données par les relations du milieu :

- $\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$, avec $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; (I.13)

- $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$, avec $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$. (I.14)

\vec{D} : Induction électrique ou vecteur déplacement ;

\vec{B} : Induction magnétique ;

\vec{E} : Champ électrique ;

\vec{H} : Excitation magnétique ou champ magnétique ;

ϵ : Permittivité électrique absolue ;

ϵ_0 : Permittivité électrique du vide ($\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m) ;

ϵ_r : Permittivité électrique relative du milieu ;

μ : Permittivité magnétique ;

μ_0 : Permittivité magnétique du vide ($\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ H/m) ;

μ_r : Permittivité magnétique relative du milieu.

ϵ et μ peuvent dépendre de l'espace, du milieu, de la température et des champs électrique et magnétique.

I.6. Loi d'Ohm :

Elle exprime pour un conducteur, la relation entre la conductivité électrique σ du milieu, la densité de courant J en un point M de ce milieu et le champ électrique E en ce point :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (I.15)$$

Pour un milieu en mouvement :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \sigma \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (I.16)$$

B : induction magnétique en M.

I.7. Conditions de passage : [5]

Les équations de Maxwell associées aux relations du milieu et à la loi d'Ohm, permettent de décrire l'état d'un système. Mais leur résolution nécessite aussi la connaissance des conditions de passage d'un milieu à un autre, relatives aux champs mis en jeu.

Ces conditions expriment les relations entre les valeurs des champs de part et d'autre d'une surface S séparant deux milieux de caractéristiques électriques et/ou magnétiques différentes.

I.7.a. Champ électrique et densité de champ électrique :

- Composante tangentielle :

Le champ électrique étant un champ conservatif, son intégrale le long d'une courbe fermée est nulle quelque soit le chemin suivi.

milieu 1



Figure I.1.

milieu 2

Dans l'exemple illustré par la figure I.1 ,

$$\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Si les chemins 1-2 et 3-4 tendent vers zéro mais toujours de part et d'autre de la surface S, alors

$$\int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

De plus si 2-3 et 4-1 sont élémentaires, ils se rapprochent de l'élément de courbe appartenant à S et on peut écrire que

$$\int_2^3 E_{t1} \cdot dl - \int_4^1 E_{t2} \cdot dl = 0 ; \text{ c'est-à-dire que}$$

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (I.17),$$

$$\text{d'où aussi} \quad D_{t1}/\epsilon_1 = D_{t2}/\epsilon_2 \quad (I.18).$$

ϵ_1, ϵ_2 : permittivités électriques des milieux 1 et 2.

- Composante normale :

Considérons le cylindre de petites dimensions de la figure I.2. D'après le théorème de Gauss :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{int} ; \text{ avec } Q_{int} : \text{ charge électrique intérieure à la surface fermée } S.$$

Si l'on considère que la surface latérale tend vers zéro, alors

$$\oint_{s_{sup}} D_{n1} \cdot ds_1 - \oint_{s_{inf}} D_{n2} \cdot ds_2 = Q_{int} ;$$

avec s_{sup} et s_{inf} surfaces circulaires supérieure et inférieure de la figure.

Comme les surfaces sont égales et si nous considérons les densités de flux constantes sur les surfaces respectives :

$$\oint_{s_{sup}} (D_{n1} - D_{n2}) \cdot ds = Q_{int}.$$

Puisque les surfaces se rapprochent de la frontière, Q_{int} est une charge surfacique et s'écrit :

$$Q_{int} = \int \rho_s \cdot ds.$$

Nous déduisons donc que

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (I.19)$$

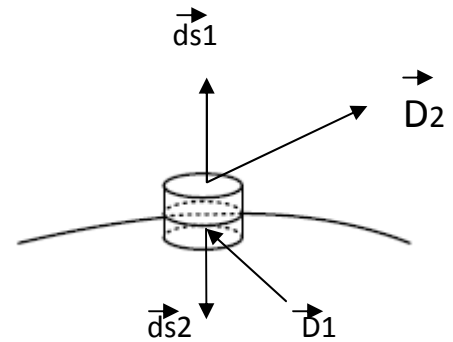


Figure I.2

La composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de la surface de séparation de deux diélectriques distincts.

La composante normale de la densité de flux électrique D subit une discontinuité de valeur ρ_s à la traversée de la surface de séparation.

I.7.b. Champ magnétique H et induction magnétique B :

En passant par les mêmes raisonnements qu'en a), nous obtenons les résultats suivants :

- Induction B :

La composante normale de l'induction magnétique \vec{B} est continue à la traversée de la surface de séparation de deux milieux distincts :

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (I.20)$$

- Variation du champ magnétique H à la frontière de deux milieux :

La composante tangentielle de H est continue à la traversée d'une surface de séparation dépourvue de courant :

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (I.21)$$

Si la surface de séparation porte une nappe de courant, on y observe une discontinuité tangentielle du champ magnétique.

I.8. Conditions aux limites :

La résolution des équations aux dérivées partielles régissant un système électromagnétique, nécessite la connaissance des valeurs des champs aux frontières du domaine d'étude.

- Conditions de Dirichlet :

Cette condition fixe une valeur exacte à une inconnue sur la frontière Γ du domaine d'étude :

$$A_{\Gamma} = A_0, A_0 \text{ est une constante.} \quad (1.22)$$

- Condition de Neumann :

Elle nous renseigne sur la valeur de la dérivée de l'inconnue sur la frontière du domaine étudié. Elle est souvent fixée sur des parties de frontières correspondant aux plans de symétrie des domaines.

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = A_1. \quad (1.23)$$

- Condition mixte (Dirichlet, Neumann) :

Elle considère les deux cas précédents. Sa forme générale est

$$a.A + b. \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} = c; \quad (1.24)$$

a, b : coefficients définis sur le domaine d'étude ;

c : valeur de l'inconnue sur la frontière ;

A : inconnue du problème.

I.9. Les hypothèses simplificatrices : [1] [3] [4]

La représentation des phénomènes physiques réels, appelée modélisation, présente souvent de grandes difficultés et peut même s'avérer impossible. Cependant, du fait que pour un objet d'étude, certains phénomènes prédominent notablement sur d'autres (qui deviennent négligeables), des hypothèses simplificatrices permettent d'établir des modèles relativement simples, donnant des résultats dont la marge d'erreur est acceptable.

Les hypothèses simplificatrices qu'on peut poser sont :

- Les fréquences de travail dans le domaine de l'électrotechnique, sont inférieures aux radiofréquences ($< 10^{12}$ Hz) ; nous pouvons donc négliger la densité de courant de déplacement $\vec{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ devant la densité de courant de conduction

$$\vec{J}_C = \sigma \cdot \vec{E}.$$

- Les matériaux utilisés sont supposés isotropes.
- La charge d'espace est supposée négligeable dans les conducteurs.
- Le courant induit par le mouvement des pièces mobiles dans un champ magnétique ($\sigma \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$) est négligé devant le courant de conduction, si la vitesse v est faible. Il est évidemment nul si le champ et la vitesse sont colinéaires.

Des hypothèses simplificatrices supplémentaires sont indispensables afin de justifier le traitement en bidimensions des phénomènes électromagnétiques, sur les dispositifs à étudier.

Compte tenu des hypothèses précédentes, les équations de Maxwell prennent les formes suivantes :

$$\text{Div } \vec{D} = 0.$$

$$\text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

$$\text{div } \vec{B} = 0.$$

$$\text{Rot } \vec{H} = \vec{J}.$$

I.10. Effet de peau : [34]

Toute substance conductrice de l'électricité, sous l'effet d'un champ magnétique variable dans le temps, est le siège de courants appelés courants de Foucault.

Le champ magnétique qui pénètre la substance décroît, à partir de la surface extérieure, ainsi que les courants induits. On est alors en présence de ce qui est connu sous le nom de l'effet de peau. La grandeur caractéristique de ce phénomène est la profondeur de pénétration, donnée par

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot f \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} \quad (I.25)$$

f : fréquence;

σ : conductivité électrique du matériau;

μ_0 : perméabilité absolue;

μ_r : perméabilité relative du matériau.

La profondeur de pénétration dépend donc de la fréquence du champ et de la nature du matériau.

Dans le cas d'un conducteur cylindrique plein, de diamètre D, l'effet de peau est caractérisé par le rapport δ/D .

- Si $\delta/D < 0,1$, variation exponentielle ;
- Si $\delta/D > 0,4$, variation linéaire ;
- Si $0,1 < \delta/D < 0,4$, variation type Bessel.

I.11. Les équations aux dérivées partielles : [3] [4]

Le comportement de la majorité des phénomènes physiques est modélisé à l'aide des équations aux dérivées partielles.

I.11.a. Définition :

Les équations aux dérivées partielles sont une forme d'équations différentielles dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Elles prennent souvent les formes suivantes :

$$\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z}, \frac{\delta^2}{\delta x^2}, \frac{\delta^2}{\delta y^2}, \frac{\delta^2}{\delta z^2}.$$

I.11.b. Différents types d'équations aux dérivées partielles :

On distingue trois types d'équations aux dérivées partielles traduisant le comportement des phénomènes physiques :

- Equations elliptiques : Elles traduisent les phénomènes de type potentiel, en électrostatique et magnétostatique.

Pour un problème scalaire, l'équation est

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0 ;$$

$\phi(x,y,z)$: inconnue du problème.

Pour un problème vectoriel :

$$\frac{\delta^2 \phi_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta z^2} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta z^2} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta z^2} = 0 .$$

Avec : $\vec{\phi} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$.

- Equations paraboliques : Ces équations régissent des phénomènes liés à des régimes transitoires, tels que la pénétration des courants de Foucault (induits), la diffusion de la chaleur ou les régimes transitoires des machines électriques.

Forme de l'équation dans le cas d'un problème scalaire :

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Dans le cas d'un problème vectoriel :

$$\frac{\delta^2 \phi_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta z^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial t} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta z^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial t} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta z^2} - \frac{\partial \phi_z}{\partial t} = 0.$$

Avec : $\vec{\phi} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$.

- Equations hyperboliques : Elles traduisent les phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques.

Forme pour une variable inconnue scalaire :

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} = 0.$$

Pour une variable vectorielle :

$$\frac{\delta^2 \phi_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \phi_x}{\delta t^2} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \phi_y}{\delta t^2} = 0 ;$$

$$\frac{\delta^2 \phi_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 \phi_z}{\delta t^2} = 0.$$

$\vec{\phi} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$.

- Equations aux dérivées partielles non linéaires :

La majorité des phénomènes physiques sont non linéaires. Les coefficients des équations les régissant varient en fonction de la variable recherchée.

Ce type d'équation s'écrit comme suit :

$$-\vec{\nabla} \cdot [c(\phi) \cdot \vec{\nabla} \phi] + a(\phi) \cdot \phi - f = 0.$$

ϕ : fonction inconnue ;

$a(\phi), c(\phi)$: coefficients dépendants de ϕ ;

f : terme source.

I.12. Equations et modèles du champ électromagnétique : [7] [8]

L'effet des champs électrique et magnétique (ou de leur combinaison) détermine le fonctionnement de tout appareil électromagnétique, en basse ou haute tension. La connaissance de ces champs, permet d'avoir accès au calcul des performances de l'appareil et au détail des conditions de son fonctionnement, que ce soit en régime transitoire ou permanent. Nous pouvons, par exemple, déduire la valeur de la fem d'une génératrice, à partir de l'évaluation du champ magnétique en chaque point de l'entrefer.

Lors de nombreuses étapes du processus de conception d'un appareil électrique, l'évaluation des champs électrique et magnétique est un travail indispensable.

I.12.a. Le modèle général de Maxwell :

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques classiques sont régis par les équations aux dérivées partielles de Maxwell et par les relations du milieu considéré.

Nous avons alors le système des sept équations suivant :

$$\begin{array}{l}
 \text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \\
 \text{Rot } \vec{H} = \vec{J}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Rot } \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{Rot } \vec{H} = \vec{J} \end{array}} \right\} \text{Equations de couplage électromagnétique.}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Div } \vec{B} = 0 \\
 \text{Div } \vec{D} = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Div } \vec{B} = 0 \\ \text{Div } \vec{D} = 0 \end{array}} \right\} \text{Equations de conservation.}$$

$$\begin{array}{l}
 \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_r \\
 \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_r \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \end{array}} \right\} \text{Propriétés des matériaux}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Loi d'Ohm

\vec{E} : Champ électrique.

\vec{D} : Induction électrique.

\vec{H} : Champ magnétique.

\vec{B} : Induction magnétique.

\vec{J} : Densité de courant électrique.

\vec{B}_r : Induction rémanente des aimants.

μ : Perméabilité magnétique.

ε : Perméabilité électrique.

σ : Conductibilité électrique.

Remarques : - Matériaux isotropes : σ, μ, ε sont des scalaires ;

- Matériaux anisotropes : σ, μ, ε sont des tenseurs.

La résolution directe de ce système d'équations n'est pas encore possible. Mais, suivant les dispositifs étudiés, nous adoptons des hypothèses simplificatrices aboutissant à des modèles simplifiés, donnant des résultats satisfaisants.

Les actionneurs, objets de notre étude, sont alimentés en courant alternatif pour l'un et continu pour l'autre. Nous développeront donc, dans ce qui suit, l'étude des modèles magnétodynamiques et magnétostatiques.

I.12.b. Modèles magnétodynamiques : [7] [8] [9] [10]

Ces modèles correspondent au cas où les sources de courant ou de tension générant les champs, sont des variables fonctions du temps.

Dans la limite des hypothèses simplificatrices évoquées plus haut, la densité volumique de charge ρ est nulle. De plus, ces phénomènes ont lieu dans des matériaux ferromagnétiques conducteurs, donc : $\vec{B}_r = \vec{0}$.

La troisième équation de Maxwell signifie qu'il existe une fonction potentiel vecteur magnétique \vec{A} telle que :

$$\vec{B} = \text{Rot } \vec{A} . \quad (I.26)$$

Remplaçons B dans la première équation de Maxwell. On aura :

$$\text{Rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}.$$

Ce qui suppose l'existence d'un potentiel scalaire V , tel que :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.27)$$

Et, sachant que : $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{B}/\mu) = \vec{\nabla} \wedge [(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})/\mu]$ et que $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, la deuxième équation de Maxwell devient :

$$\vec{\nabla} \wedge [(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})/\mu] = \sigma \cdot (-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

Ou bien :

$$\vec{\nabla} \wedge (v \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sigma \cdot \vec{\nabla} V \quad (1.28)$$

$v = 1/\mu$: susceptibilité magnétique du milieu.

Le champ électrique total est la somme de deux champs :

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla} V \text{ qui dérive d'un potentiel,}$$

$$\text{et } \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ qui est un champ électromoteur (induit). } \vec{E}_2$$

n'existe que s'il y a variation du potentiel vecteur magnétique \vec{A} , c'est-à-dire si l'on est en régime variable.

De là, on peut écrire que le courant est la somme de deux termes :

$$\vec{J}_s = \sigma \cdot \vec{E}_1, \text{ courant source ou courant d'excitation. Le}$$

traitement des problèmes correspondants à ce modèle nécessitent que la valeur de J_s soit connue ;

$$\vec{J}_{\text{ind}} = \sigma \cdot \vec{E}_2, \text{ courant induit.}$$

L'équation (1.28) s'écrit

$$\vec{\nabla} \wedge (v \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s \quad (1.29)$$

C'est l'équation magnétodynamique transitoire en termes de potentiel vecteur magnétique.

Remarque: Si la pièce est en mouvement, à une vitesse v , nous aurons deux courants induits : $\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma \cdot v \wedge \vec{B}$ (ou $\sigma \cdot v \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$).

Pour pouvoir résoudre cette équation, on doit d'abord définir totalement le potentiel vecteur \vec{A} . Pour cela, on fixe sa divergence. Selon la condition, appelée jauge, imposée à \vec{A} , nous obtenons divers modèles.

Parmi les différentes conditions de jauge, nous choisissons la plus communément utilisée et qui convient lorsque la densité de charge volumique est nulle dans le milieu étudié. Cette jauge dite de Coulomb, est :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (1.30)$$

Les équations (1.29) et (1.30) sont difficiles à résoudre, si le système est non linéaire. Des modèles simplifiés sont donc mis en œuvre, lorsque les approximations qui en découlent ne s'éloignent pas de la précision recherchée.

- Modèle magnétodynamique linéaire exprimé en termes de potentiel vecteur magnétique :

Si la perméabilité magnétique μ est supposée constante, en fonction de l'induction magnétique, et que nous considérons la même jauge que ci-haut, alors l'équation (1.29) devient :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + \sigma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mu \vec{J}_s \quad (1.31).$$

$$\text{Avec } \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Si les courants d'excitation sont sinusoïdaux (régime harmonique), on peut utiliser la notation complexe et le terme $\sigma \cdot \mu \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ sera noté $j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu \cdot \vec{A}$, avec j : unité imaginaire et ω : pulsation de la source.

$$\text{D'où : } \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) + j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu \cdot \vec{A} = \mu \vec{J}_s \quad (1.32).$$

$$\text{Avec } \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

(1.31) est l'équation magnétodynamique harmonique en termes de potentiel vecteur magnétique.

Ce modèle sert à des études tridimensionnelles. Trois inconnues sont à déterminer en chaque point : \vec{A}_x , \vec{A}_y et \vec{A}_z ; ce qui entraîne des analyses très coûteuses. Lorsque la géométrie le permet, on opte pour des modèles bidimensionnels.

- Modèle bidimensionnel exprimé en termes de potentiel vecteur magnétique :
[10]

Utilisé dans le cas d'objets longs ou pourvus de symétrie de révolution, parcourus de courants généralement perpendiculaires au plan d'étude.

Le potentiel vecteur \vec{A} n'a alors qu'une seule composante (perpendiculaire au plan d'étude).

D'où, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} = A_z \cdot \vec{k}, \text{ qui ne dépend que de } x \text{ et } y ; \quad (1.33)$$

$$\text{et } \vec{J}_s = J_{sz} \cdot \vec{k} \quad (I.34)$$

La jauge de Coulomb est naturellement vérifiée : $\text{div } \vec{A}_z = 0$.

L'équation (I.29) se transforme en

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \cdot \vec{\nabla} \wedge A_z) + \sigma \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t} = J_{sz} \quad (I.35),$$

qui ne comporte qu'une seule inconnue (A_z).

Remarque : Si μ est constante et les courants sinusoïdaux, l'équation sera simplifiée en

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge A_z) + j \cdot \sigma \cdot \mu \cdot A_z = \mu \cdot J_{sz} \quad (I.36).$$

La résolution de cette équation est aisée et peu coûteuse.

- Equation aux dérivées partielles dans le cas bidimensionnel :
 - En coordonnées cartésiennes :

Le développement de l'équation (I.35) correspondant au cas de courants perpendiculaires au plan d'étude et circulant suivant l'axe (z), en intégrant la jauge de Coulomb, donne :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t} = - J_{sz} \quad (I.37)$$

$$(\text{Car } \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot A) = 0)$$

Dans le cas harmonique (courant source sinusoïdal) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot A_z = - J_{sz} \quad (I.38)$$

- En coordonnées cylindriques , cas 2 D axisymétrique : [11]

Le potentiel A a une seule composante qui est perpendiculaire au plan d'étude (et parallèle au courants) et on a

$\vec{A} = r \cdot A_\phi$; A_ϕ étant la composante de \vec{A} dans la direction angulaire et dépendant seulement du rayon r et de la variable z.

De plus $\vec{J}_s = J_{sz} \cdot \vec{k}$.

Sachant que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge A = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \vec{a}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \cdot \vec{a}_z$, c'est-à-dire que :

$$B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \quad \text{et} \quad B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r},$$

l'équation (I.35) aboutit à

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = -J_s \phi . \quad (I.38)$$

Cas harmonique :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) - j \cdot \sigma \cdot \omega \cdot \frac{A}{r} = -J_s \phi \quad (I.39)$$

I.12.c. Modèle magnétostatique : [7] [12]

En magnétostatique, les phénomènes sont caractérisés par une invariance des champs par rapport au temps ; c'est-à-dire que $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$.

- Modèle magnétostatique scalaire :

Ce modèle suppose, en plus de l'invariance des champs, que les courants sont nuls dans la pièce à étudier.

Les relations de base de ce modèle sont :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{0} \quad (I.40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (I.41)$$

C'est le cas des dispositifs dans lesquels les champs sont créés par des sources extérieures et indépendantes du dispositif étudié ou bien par des aimants permanents.

Dans ce dernier cas, nous avons

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{rm} ; \quad (I.42)$$

avec B_{rm} : induction rémanente du milieu.

L'équation (I.40) implique l'existence d'une fonction potentiel scalaire magnétique ϕ telle que :

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \phi . \quad (I.43)$$

En intégrant (I.42) et (I.43) dans (I.41), on aura

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \cdot \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{rm} \quad (I.44)$$

La résolution de cette équation est maîtrisée.

- Modèle magnétostatique vectoriel :

Le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps ($\frac{\partial B}{\partial t} = 0$) et les champs électrique E et magnétique M sont découplés. À la différence du cas précédent, l'objet à modéliser est parcouru par des courants non nuls. Le modèle se base sur les relations ci-dessous :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \quad (I.45)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (I.46)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} + \vec{B}_{rm} \quad (I.47)$$

La condition (I.46) permet de définir un potentiel vecteur A tel que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (I.48)$$

Pour que ce potentiel vecteur soit complètement défini, on doit aussi fixer la valeur de sa divergence. Le choix effectué précédemment pour la jauge sera maintenu :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

En intégrant V(I.47) et (I.48) (I.45) et, on aboutit aux équations :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \right) &= \vec{J} + \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}_{rm}}{\mu} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad (I.49)$$

auxquelles on doit ajouter la loi de comportement des matériaux

$$\frac{1}{\mu} = f(B)$$

Cette loi exprime la non linéarité entre les champs B et H due la saturation des milieux magnétiques.

Dans ce modèle, les conditions aux limites doivent porter sur le potentiel vecteur.

- Cas bidimensionnel cartésien :

Lorsque la pièce étudiée est suffisamment longue, l'étude est menée sur une coupe : le problème devient bidimensionnel. Si, en plus, les courants créant le champ magnétique sont perpendiculaires au plan d'étude, suivant l'axe Oz, le potentiel vecteur aura une seule composante non nulle Az ; cette composante ne dépendant pas de la variable "z". La condition de jauge est naturellement vérifiée.

L'équation (I.49) devient

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu} \cdot \vec{\nabla} \wedge A_z \right) = J_z + \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}_{rm}}{\mu}$$

Si le champ rémanent \vec{B}_r à une composante nulle suivant l'axe Oz, il peut s'écrire sous la forme

$$\vec{B}_{rm} = (B_{rx}, B_{ry}, 0)$$

et la relation bidimensionnelle devient

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -J_{sz} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{ry}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_{rx}}{\mu} \right) \right] \quad (I.50)$$

- Cas axisymétrique 2 D : [13]

Si les pièces étudiées ont une symétrie de révolution, le potentiel vecteur aura une seule composante $\vec{A}\phi$. $A\phi$ ne dépend que de r et z . La seule composante du courant est $J_s\phi$.

Le champ rémanent étant à deux dimensions et indépendant de ϕ , il s'écrit

$$\vec{B}_{rm} = (B_{rr}, 0, B_{rz})$$

L'équation à deux dimensions résultante est

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_r \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_z \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -J_s\phi + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_{rz}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_{rr}}{\mu} \right) \quad (I.51)$$

I.13. Equation de conservation de l'énergie électromagnétique : [4] [12] [14]

La présence d'un champ électrique E et d'un champ magnétique H , dans un milieu donné, a pour corollaire l'existence d'une énergie électromagnétique en ce milieu.

Pour retrouver les différentes formes que cette énergie peut prendre, nous démarrerons des deux équations suivantes de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Multiplions la première équation par \vec{H} et la seconde par \vec{E} puis effectuons la soustraction membre à membre des deux résultats ; on aboutit à

$$\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = - \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} - \vec{E} \cdot \vec{J}_c - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Or } \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H})$$

D'où

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \wedge \vec{H} + \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E} \cdot \vec{J}_c + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$$

La densité volumique de la puissance apportée sous forme électromagnétique est

$$P_{em} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E} \cdot \vec{J}_c + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

En intégrant sur tout le volume du milieu étudié, on a :

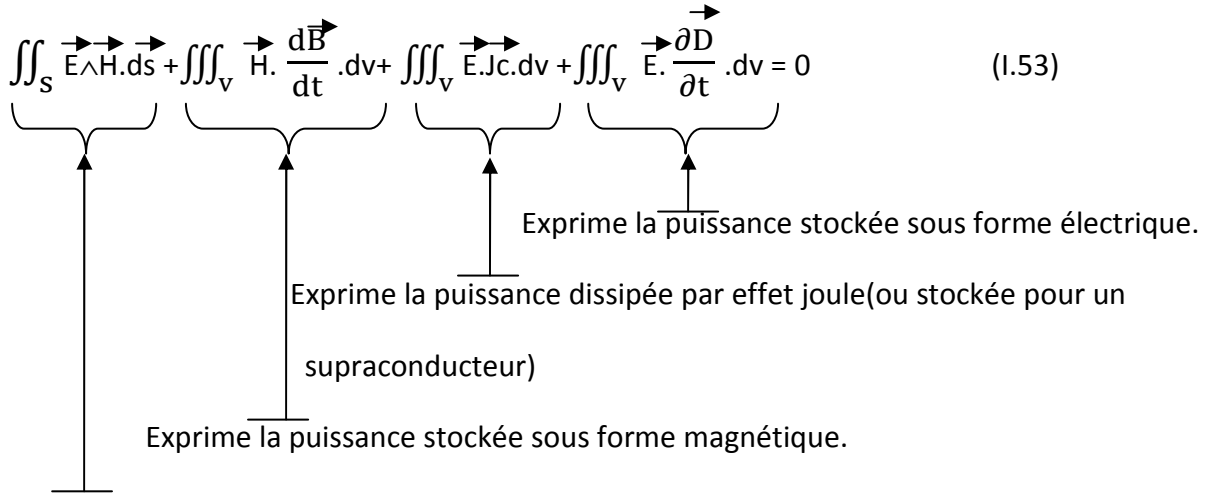
$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{v} + \iiint_V \left(\vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{v} = 0. \quad (I.52)$$

Comme on sait que (théorème de la divergence) :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{v} = \iint_S \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{s},$$

l'équation (I.52) devient :

$$\iint_S \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot d\vec{s} + \iiint_V \vec{H} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{v} + \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \cdot d\vec{v} + \iiint_V \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{v} = 0 \quad (I.53)$$



Exprime la puissance électromagnétique apportée à travers la surface S enveloppant le volume V qui est le siège des différentes transformations.

Le deuxième et le quatrième termes conduisent en partie à des pertes.

La puissance rayonnée à travers une surface S enveloppant un volume V est égale à la somme des puissances dissipées ou stockées dans ce volume. Cette énergie ne comprend pas l'énergie apportée sous forme de chaleur.

L'équation ci-haut exprime la conservation de l'énergie électromagnétique.

- Vecteur de Poynting : Il est défini par le produit

$$\vec{S}_p = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (I.54)$$

I.14. Les effets mécaniques :

Dans l'étude d'un dispositif électrotechnique, on est souvent amené à calculer, en plus des valeurs des champs électromagnétiques, celles des forces mécaniques générées par la présence de courants baignant dans ces champs.

I.14.a. Notion d'énergie et de coénergie magnétiques : [15]

La caractéristique B(H) d'un milieu donné (figure II.3), nous renseigne sur la notion d'énergie et de coénergie magnétiques.

Les densités d'énergie W et de coénergie W_c d'un système magnétique sont données par les aires situées respectivement au dessus et au dessous de la caractéristique $B(H)$.

$$W = \int_0^B H. dB ; \quad (1.55)$$

$$W_{co} = \int_0^H B. dH. \quad (1.56)$$

L'énergie et la coénergie sont obtenues en multipliant ces densités par le volume associé au milieu.

$$W_{total} = \int_V \left(\int_0^B H. dB \right). dv ; \quad (1.57)$$

$$W_{cototal} = \int_V \left(\int_0^H B. dH \right). dv. \quad (1.58)$$

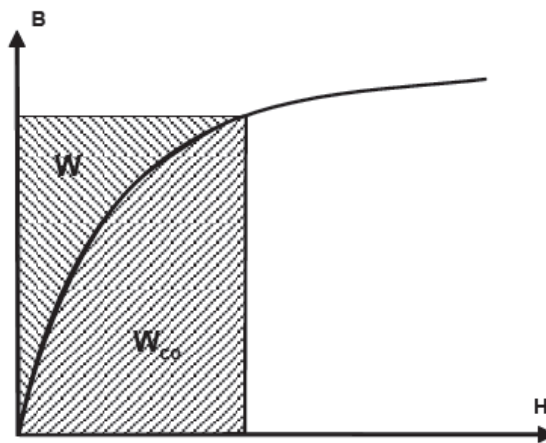


Figure II.3 : Densité d'énergie W et de coénergie W_{co} magnétiques.

1.14.b. Calcul des forces magnétiques par la méthode de la variation de l'énergie et de la coénergie magnétiques.

- A partir de l'énergie magnétique :

La force magnétique s'obtient en dérivant l'énergie magnétique par rapport au déplacement, à courant constant. En supposant un déplacement linéaire à un degré de liberté :

$$F = \frac{\partial W_{tot}}{\partial x} \quad (1.59);$$

W_{tot} : Energie magnétique totale.

- A partir de la coénergie :

Dans ce cas, on dérive la coénergie par rapport au déplacement, à flux constant :

$$F = \frac{\partial W_{cotot}}{\partial x} \quad (1.60);$$

Wcotot : Coénergie magnétique totale.

I.14.c. Calcul de la force par la méthode des travaux virtuels : [3]

Le principe consiste à utiliser la MEF pour calculer la force magnétique totale.

Le calcul de la force est effectué par rapport à un système de coordonnées locales (u,v,w).

L'expression de la force est

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \iiint_V [\int_0^H B \cdot dH] \cdot dV$$

$$F = \frac{\partial}{\partial x} \sum_e \iiint_{V_e} [\int_0^H B \cdot dH] \cdot dV_e$$

x : coordonnée liée au déplacement.

I.14.d. Tenseur de Maxwell : [3]

Si les milieux ne sont pas parcourus par des courants, les forces magnétiques peuvent être calculées par l'application du tenseur de Maxwell.

Les forces sont alors définies directement du champ magnétique :

$$F = \oiint_S [(\vec{B}_n \cdot \vec{H}_t) \cdot \vec{t} + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2\mu_0} B_n^2 - \mu_0 H_t^2) \cdot \vec{n}] \cdot d\vec{S} \quad (I.61).$$

\vec{B}_n : Composante normale de l'induction magnétique.

\vec{H}_t : Composante tangentielle du champ magnétique.

\vec{n} : Normale extérieure à la surface d'intégration S (vecteur unitaire).

\vec{t} : Vecteur unitaire tangent à la surface S.

S : Surface d'intégration contenant le milieu où la force est à calculer.

I.14.e. Force de Lorentz : [3] [11]

Elle résulte de la coexistence d'une induction magnétique due à une source d'excitation, et d'une densité de courant induit dans un milieu conducteur. Son expression est la suivante :

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \wedge \vec{B} \cdot dv, \quad (I.62)$$

avec : $\vec{J} \wedge \vec{B}$, densité de force magnétique, et v le volume du domaine d'étude.

- Composantes de la force de Lorentz pour un système axisymétrique 2D :

$$F_r = 2\pi \iint_S J_i \phi \cdot B_z \cdot r \cdot dr \cdot dz; \quad (I.63)$$

$$F_z = -2\pi \iint_S J_i \phi \cdot Br \cdot r \cdot dr \cdot dz. \quad (1.64)$$

Avec : $\vec{A} = (0, A\phi, 0)$;

S : Surface du domaine d'étude en deux dimensions ;

$$B_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} ;$$

$$B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} ; \text{ (voir 12) c)).}$$

$$J_i \phi = -\frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial t}, \text{ courant induit suivant la direction angulaire } \phi.$$

- Composantes de la force de Lorentz pour un système en coordonnées cartésiennes 2D :

$$F_x = \iint_S J_z \cdot B_y \cdot dx \cdot dy ; \quad (1.65)$$

$$F_y = - \iint_S J_z \cdot B_x \cdot dx \cdot dy. \quad (1.66)$$

Avec :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} ;$$

$$B_y = - \frac{\partial A_z}{\partial x} ;$$

$$J_z = -\sigma \cdot \frac{\partial A_z}{\partial t} \text{ cf. 12) b).}$$

I.15. Conclusion :

Les outils permettant de décrire les phénomènes électromagnétiques ont été exposés, et les équations régissant le fonctionnement exprimées, notamment en fonction du potentiel vecteur magnétique. Il nous reste à décrire quelques méthodes numériques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles découlant de ce qui précède. C'est le sujet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION

DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

La réalité physique est complexe; ce qui rend sa compréhension difficile. Des approximations sont alors indispensables afin d'aboutir à des modèles.

La première étape dans la procédure de modélisation consiste à isoler le système étudié de son environnement. Le comportement du système isolé est ensuite décrit par des modèles mathématiques, en général, des équations différentielles dans le volume (ou la surface) et des conditions sur les surfaces extérieures (ou les contours).

Si des solutions analytiques existent pour ce modèle, la solution est dite 'exacte'. Malheureusement, cette solution n'existe que pour des systèmes extrêmement simplifiés. Pour le reste, on procède à des simplifications ; on accepte alors une solution imprécise du moment que l'erreur est estimée. Deux familles d'approximations sont envisageables : analytique et numérique. La solution analytique approchée consiste à poser des hypothèses permettant de résoudre analytiquement le modèle mathématique (l'erreur est d'origine analytique). Quant à la solution numérique approchée, elle considère le modèle mathématique original, mais introduit l'approximation au niveau de la technique de résolution (erreur d'origine numérique).

Les technologies modernes nécessitent l'étude de systèmes de plus en plus complexes. Les méthodes numériques sont devenues les principaux outils utilisés par l'ingénieur pour l'analyse, la conception, le dimensionnement et l'optimisation de ces derniers.

Ces méthodes permettent de traiter des systèmes très variés avec des géométries et des comportements complexes. Elles ont connu des développements considérables avec les progrès réalisés en informatique (sur tous les plans : méthodes, machines et logiciels). Les ingénieurs gagnent ainsi un temps considérable ; ce qui leur permet de concevoir une plus grande variété de prototypes.

Les modèles mathématiques et numériques ne peuvent être validés que par une confrontation avec l'expérimentation. La comparaison des résultats, ainsi que les observations réelles, sont les seuls garants d'une démarche cohérente et d'un certain contrôle de l'erreur par confrontation des résultats.[16]

II.1. Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles: [13] [17]

Avec l'apparition des calculateurs modernes se sont développées des méthodes numériques telles que : la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis, la méthode des

intégrales de frontières, la méthode des éléments finis. Nous présentons ici de façon succincte ces différentes méthodes, exceptée la dernière qui sera développée en §II.2.

II.1.a. Méthode des différences finies (MDF):

Initialement, elle fut développée pour les problèmes linéaires, en coordonnées cartésiennes ou polaires ; plus tard, elle fut étendue aux problèmes non linéaires. [17]

Le domaine d'étude est maillé en éléments carrés dans le cas bidimensionnel, cubiques dans cas tridimensionnel. L'équation à résoudre est écrite pour chaque nœud du domaine maillé. On obtient alors un système d'équations dont le nombre est égal au nombre de nœuds.

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor. Le principe est de remplacer l'opérateur différentiel par un opérateur de différence. De sorte que les dérivées sont approximées par des expressions de différence. La dérivée d'une fonction f dans la direction x est définie comme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \right)$$

Si la distance de séparation entre les points est suffisamment petite, on peut approcher la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction f par

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \left(\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_p = \frac{f(w) + f(e) - 2f(p)}{h_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_p = \frac{f(n) + f(s) - 2f(p)}{h_2^2}$$

Cette procédure est strictement applicable aux points intérieurs d'une région R . Elle peut être illustrée par l'exemple simple de la figure II.1.

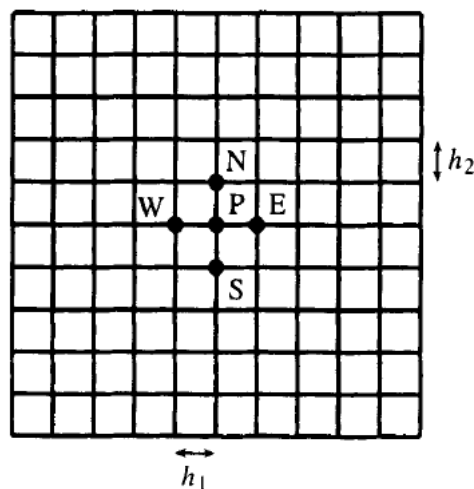


Figure II.1. Maillage rectangulaire et les cinq points utilisés pour l'approximation.

La MDF est de mise en œuvre simple. Cependant elle est d'une précision limitée car on limite le développement en série de Taylor, sur lequel elle se base, au troisième terme. [13] Par ailleurs, le nombre de nœuds requis exige une grande capacité mémoire et un temps d'exécution important. [17] Ajoutons enfin qu'elle est difficilement applicable aux domaines à géométrie complexe. [13]

II.1.b. Méthode des intégrales de frontières (MIF): [2] [13]

La MIF permet la représentation du domaine tout en limitant la discrétisation à la frontière. Ainsi, le calcul des valeurs de l'inconnue sur la frontière suffit pour obtenir la solution en tout point du domaine. Cette méthode est d'un emploi restreint aux milieux linéaires. Elle est particulièrement intéressante pour l'étude de structures tridimensionnelles ou lorsque l'air ou les milieux passifs occupent une grande partie du domaine d'étude.

Cette méthode a l'inconvénient de conduire à un système algébrique à matrice pleine (pas de termes nuls) ; ce qui augmente le temps utilisateur, donc le coût de calcul.

II.1.c. Méthode des volumes finis (MVF) : [13]

La MVF se déduit de la MDF. Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Chaque élément contient quatre nœuds. Un volume fini entoure chaque nœud.

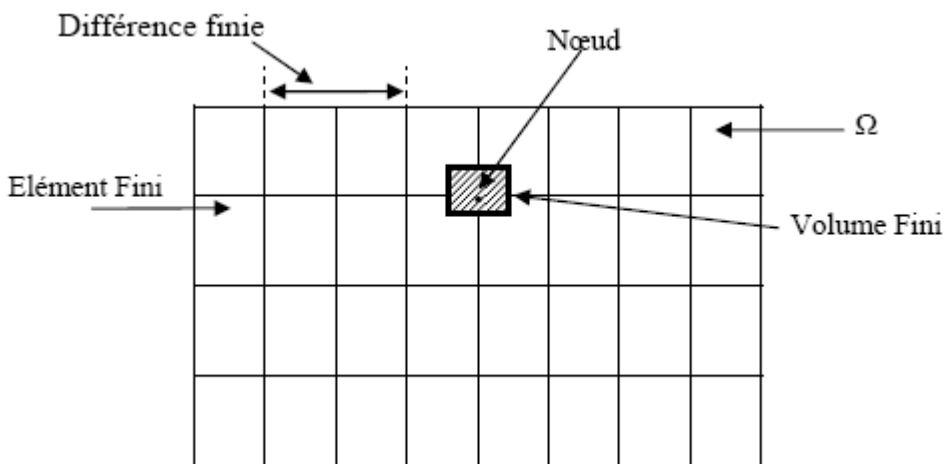


Figure II.2: Maillage du domaine d'étude.

Cette méthode est utilisée en particulier en mécanique des fluides, où elle donne des résultats plus précis que la MDF.

II.2. Méthode des éléments finis :

II.2.1. Introduction : [1] [16]

Les modèles mathématiques des phénomènes électromagnétiques sont tous définis par des équations aux dérivées partielles.

La complexité des dispositifs électromagnétiques modernes, l'introduction de nouveaux matériaux,...rendent le calcul des champs inconnus difficile, voire impossible. Au début du 20^{ème} siècle est née la méthode de Ritz-Rayley. Elle consiste à supposer une allure générique du champ inconnu. Les caractéristiques du milieu quasi-continu sont déterminées par un nombre limité de paramètres. Par ailleurs, la complexité de la géométrie, pour laquelle il est difficile de définir une seule allure du champ inconnu, est contournée en découpant le domaine d'étude en formes simples où les champs locaux sont à déterminer par la méthode de Ritz-Rayley.

La MEF est basée sur l'application de l'approximation de Ritz-Rayley sur des sous-domaines de formes simples, qui sont ensuite assemblés pour constituer la géométrie finale du dispositif étudié.

La méthode des éléments finis est très utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles, dans divers domaines des sciences de l'ingénieur. Les domaines d'application vont du calcul des structures à l'analyse acoustique, en passant par l'analyse thermique, électromagnétique et écoulement des fluides, avec possibilité de faire des couplages entre différents phénomènes. Les systèmes étudiés peuvent être linéaires, non linéaires, transitoires, vibratoires, etc.

II.2.2. Principe de la MEF : [1] [7] [10]

La méthode de la MEF est basée sur la substitution à la forme différentielle que représentent les EDP, d'une formulation intégrale du phénomène à étudier, en tenant compte des conditions aux limites.

Les formulations intégrales les plus couramment utilisées sont de deux types :

- la méthode variationnelle ;
- la méthode de Galerkin.

a. Méthode variationnelle : [6] [7] [10]

Cette méthode nécessite de connaître, au préalable, la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Elle est basée sur l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par

$$F(A) = \int_{\Omega} L(A).d\Omega \quad (II.1)$$

L : Fonction de Lagrange, avec $L(A) = W_c - W_p$.

W_c : Energie cinétique du système.

W_p : Energie potentielle du système.

Ω : Domaine d'étude.

Prenons comme exemple le cas d'un phénomène magnétostatique. La fonction L est

$$L = \int_0^B \nu \cdot b \cdot db - J \cdot A. \quad (II.2)$$

D'où l'expression suivante de la fonctionnelle d'énergie :

$$F(A) = \int_{\Omega} \left[\int_0^B \nu \cdot b \cdot db - J \cdot A \right] d\Omega \quad (II.3)$$

ν : reluctivité magnétique ($\nu=1/\mu$) :

b : induction magnétique ;

B : module de l'induction magnétique ;

J : densité de courant ;

A : Potentiel vecteur magnétique.

La résolution de ce problème revient à chercher la fonction A qui minimise $F(A)$. Pour cela, on utilise le principe de Ritz-Rayley qui consiste à écrire :

$$\frac{\partial F(A)}{\partial A_i} = 0 \text{ ou } \frac{\partial F(A)}{\partial A_1} = \frac{\partial F(A)}{\partial A_2} = \dots = \frac{\partial F(A)}{\partial A_n} = 0. \quad (II.4)$$

Avec : $A^* = \sum_{i=1}^{nn} \phi_i \cdot A_i$, approximation de l'inconnue A ;

nn : nombre de nœuds du domaine d'étude, A_i : valeur de l'inconnue au nœud « i ».

Nous aurons ainsi un système de n équations à n inconnues dont la solution permet de connaître A .

b. Méthode de Galerkin : [7]

Appelée aussi méthode des résidus pondérés, elle n'exige pas la connaissance de la fonctionnelle d'énergie.

On recherche la solution A de l'équation aux dérivées partielles dans l'ensemble des solutions possibles, c'est-à-dire dans l'ensemble des fonctions continues, dérivables par morceaux dans le domaine d'étude Ω et qui est vérifiant les conditions aux limites.

On exprime le fait que A est solution de l'équation considérée et des conditions aux limites associées en écrivant que, pour toute fonction ϕ_i , continue, dérivable par morceau, on doit avoir

$$F(A) = \int_{\Omega} R \cdot \phi_i \cdot d\Omega = 0. \quad (II.5)$$

Avec : $R = L(A) - f$,

R : résidu de l'approximation ;

L : opérateur différentiel ;

f : fonction définie sur le domaine Ω ;

A : inconnue.

La méthode de Galerkin consiste à choisir n fonctions de projection (ou fonctions tests) $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, indépendantes et si possible orthogonales, qui annulent l'intégrale $F(A)$.

Approchons la fonction inconnue A par $A^* = \sum_{i=1}^{nn} \alpha_i A_i$; (II.6)

α_i : fonction d'interpolation ;

nn : nombre de nœuds du domaine.

Si nous choisissons comme fonctions tests, les fonctions d'interpolation, nous aurons nn équations à nn inconnues.

Les fonctions tests ϕ_i peuvent être différentes des fonctions d'interpolation α_i ; cependant, si nous choisissons $\phi_i = \alpha_i$, on obtient un système d'équations mieux adapté à une résolution numérique (on dit qu'il est mieux conditionné).

Dans ce qui suit, c'est la méthode de Galerkin qui sera utilisée.

II.2.3. Etapes suivies dans la MEF : [1] [3] [18]

La résolution d'un problème par la MEF suit les étapes suivantes :

- traduire le phénomène physique sous forme d'un modèle mathématique (EDP) avec les conditions aux limites, au bord du domaine d'étude, nécessaires et suffisantes nécessaires et suffisante pour l'unicité de la solution ;
- construire une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites ;
- diviser le domaine en un nombre fini de sous-domaines (maillage) appelés mailles ;
- choisir la famille des champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous-domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent les champs locaux en fonction des valeurs aux nœuds ; la maille complétée par ces éléments est alors appelée élément.
- ramener le problème à un problème discret : c'est la discrétisation ;
- résoudre le problème discret ;
- construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs ;
- visualiser et exploiter la solution, pour juger sa qualité numérique et si elle satisfait aux critères du cahier des charges.

II.2.4. La discrétisation :

L'obtention d'une solution exacte est aussi difficile en formulation intégrale que différentielle. Par conséquent, on cherche une solution approchée, sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions indépendantes connues et dont la manipulation est aisée.

Même en procédant ainsi, le problème n'est pas pour autant résolu, en raison des formes géométriques, souvent complexes des domaines de résolution.

La résolution de tels problèmes passe par la discrétisation du domaine entier en sous-domaines ou éléments, de formes géométriques simples et en cherchant une approximation $u^e(x)$ de la fonction inconnue $u_{ex}(x)$ sur chaque élément.

La fonction approchée s'écrit

$$u(x) = \sum_e u^e(x), \text{ pour une dimension.} \quad (II.7)$$

L'approximation de l'inconnue se fait en chaque élément par des fonctions d'interpolation. La fonction d'interpolation est définie en fonction de la géométrie de l'élément.

Les sous-domaines vérifient les conditions suivantes :

$$D = \sum_{i=1}^{ne} D_i \text{ et } D_i \cap D_j = \emptyset, \text{ quel que soit } i, i \neq j.$$

Le calcul des fonctions d'interpolation sur des éléments réels de formes généralement quelconques sont complexes.

En pratique, ces fonctions sont construites pour des éléments de référence, possédant des propriétés géométriques qui permettent de simplifier les calculs. On ne définit alors qu'une seule fois, pour chaque type d'élément, les fonctions d'interpolation. Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique. [6] [19]

a. Quelques formes d'éléments de référence classiques : [1] [6] [17] [20]

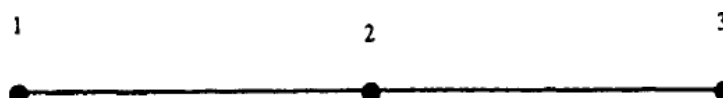
Les éléments classiques sont définis selon le degré de la courbe d'interpolation qui leur est associée. On rencontre généralement des éléments linéaires, quadratiques ou cubiques.

- Éléments à une dimension :

Élément linéaire :



Élément quadratique :

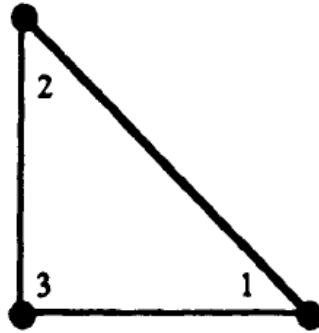


Élément cubique :

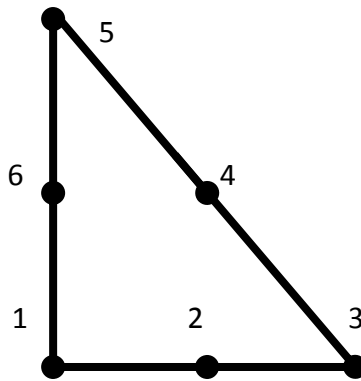


- Éléments à deux dimensions triangulaires:

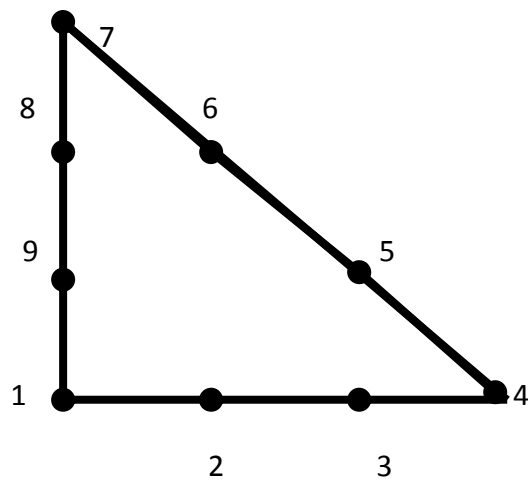
Élément linéaire



Élément quadratique

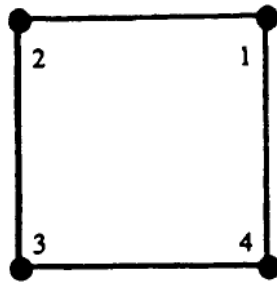


Élément cubique

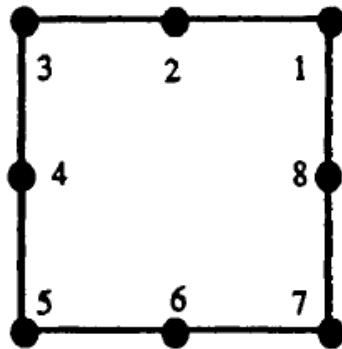


- Éléments carrés (à deux dimensions) :

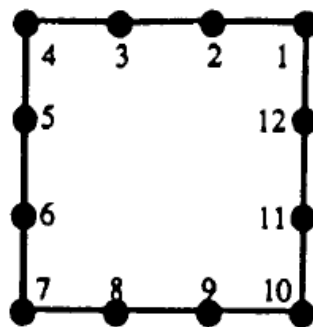
Élément linéaire :



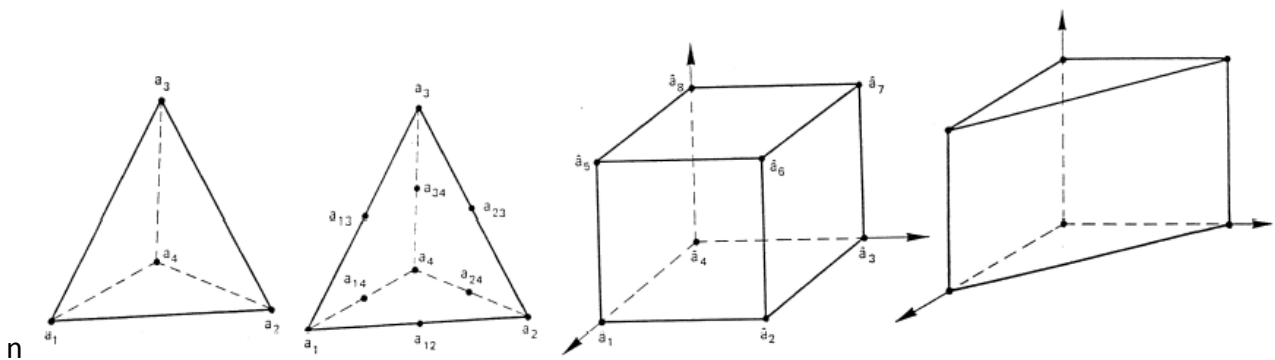
Élément quadratique :



Élément cubique :



- Éléments à trois dimensions :



Éléments :

tétraédriques

cubique

prismatique

a_1, a_2, \dots, a_n : paramètres de l'approximation ;

$P_1(x,y), P_2(x,y), P_3(x,y), \dots, P_n(x,y)$: fonctions de base de l'approximation ; ce sont des fonctions connues, linéairement indépendantes, ;

Les paramètres a_i n'ont pas de sens physique. On préfère choisir à leur place les valeurs de la fonction u en n nœuds de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$:

$$u(x_1, y_1) = u_{ex}(x_1, y_1) = u_1$$

$$u(x_2, y_2) = u_{ex}(x_2, y_2) = u_2$$

.....

$$u(x_n, y_n) = u_{ex}(x_n, y_n) = u_n$$

On obtient la fonction approchée suivante :

$$u^e(x,y) = \langle N_1(x,y) \ N_2(x,y) \ N_3(x,y) \ \dots \ N_n(x,y) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (II.9)$$

u_1, u_2, \dots, u_n : variables nodales ;

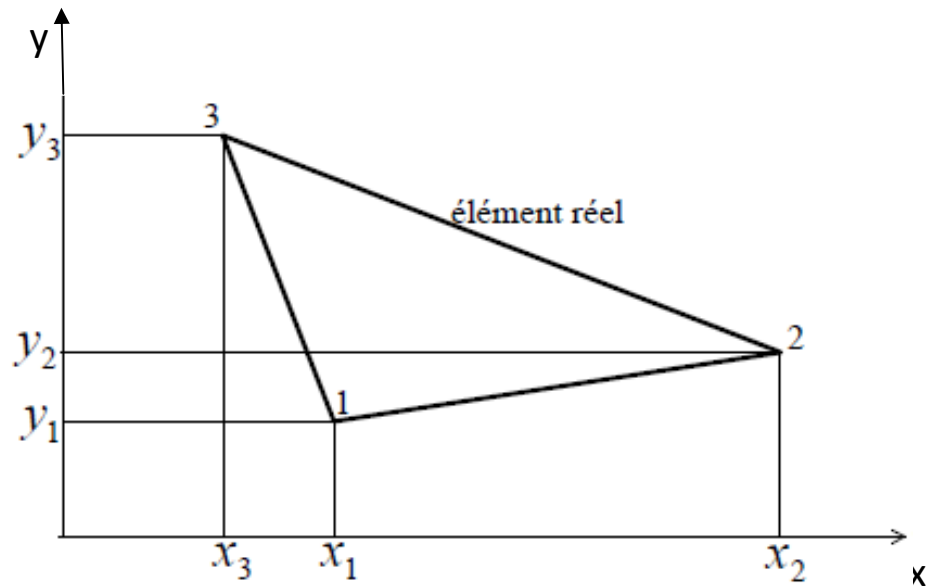
$N_1(x,y), N_2(x,y), N_3(x,y), \dots, N_n(x,y)$: fonctions de forme ou fonctions d'interpolation

La relation (II.9) définit une approximation nodale.

L'approximation nodale par sous-domaines est aussi dénommée "approximation par éléments finis".

d. Exemple de calcul de fonction d'approximation : cas d'un élément triangulaire quelconque : [10]

Soient u_1, u_2 et u_3 les valeurs de la fonction inconnue u , aux 3 nœuds respectifs d'un triangle 'e'.



La fonction d'approximation est de la forme

$$u^e(x,y) = \langle 1 \ x \ y \rangle \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (II.10)$$

La réécriture de cette équation en chaque nœud du triangle aboutit au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

D'où on peut déduire les coefficients a, b, c par

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La relation (II.10) devient donc $u^e(x,y) = \langle x \ y \ 1 \rangle \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

D'où :

$$u^e(x,y) = \langle N_1^e(x,y) \quad N_2^e(x,y) \quad N_3^e(x,y) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (II.11)$$

Avec, par permutation circulaire de ijk :

$$N_i^e(x,y) = \frac{1}{2 \cdot A^e} \cdot (\Delta_{jk} + x \cdot y_{jk} - y \cdot x_{jk}); \quad (II.12)$$

$$A : \text{Aire du triangle, } 2A = (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2); \quad (II.13)$$

$$x_{jk} = x_j - x_k, \quad y_{jk} = y_j - y_k.$$

Remarque : Sur tout le domaine discrétisé en "ne" sous domaines, la fonction d'approximation s'écrit

$$u(x,y) = \sum_{e=1}^{ne} u^e(x,y). \quad (II.14)$$

u^e est nulle en dehors du domaine "e".

La forme précédente de la fonction inconnue aboutit à

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \cdot u_i \quad (II.15)$$

N_i fonction d'interpolation au nœud "i"

n : nombre de nœuds du domaine

u_i : valeur de l'inconnue au nœud "i".

II.2.5. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques : [1] [6] [7] [10] [11]

Les deux formulations intégrales les plus couramment utilisées dans la méthode des éléments finis sont la méthode variationnelle et la méthode des résidus pondérés ou méthode de Galerkin.

Le choix est généralement porté sur la deuxième méthode qui n'exige pas la connaissance préalable de la fonctionnelle d'énergie. Nous traiterons à l'aide de cette méthode, les équations aux dérivées partielles (EDP) correspondant aux modèles utilisés dans notre travail (modèle magnétodynamique à deux dimensions et modèle magnétostatique à deux dimensions).

II.2.5.a. Problème magnétodynamique :

- Cas cartésien 2D :

Les pièces traversées par les courants étant considérées très longues sur l'axe "z" et perpendiculaires au plan (x,y) d'étude, le potentiel vecteur aura pour expression :

$\vec{A} = Az \cdot \vec{k}$, \vec{k} : vecteur unitaire suivant l'axe "z".

De plus : $\vec{J}_s = J_{sz} \cdot \vec{k}$ (II.16)

Rappelons que l'EDP correspondante, en régime transitoire est

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial Az}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial Az}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial Az}{\partial t} = - J_{sz} \quad (II.17)$$

La solution de cette équation est une fonction continue, dérivable par morceau sur tout le domaine d'étude Ω et doit vérifier la condition de Dirichlet sur toute ou sur une partie de la frontière "C".

De plus, soit $w_i(x,y)$ une fonction continue, dérivable par morceau et telle que $w_i=0$ sur une partie de "C", la solution de l'EDP doit aussi vérifier la relation suivante

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial Az}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial Az}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial Az}{\partial t} + J_{sz} \right] \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (II.18)$$

Dans la méthode de Galerkin, on choisit n fonctions de projection ou fonctions tests $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ pour lesquelles on écrit l'équation précédente.

Appliquons le théorème de Green sur l'égalité (II.18) qui devient alors

$$\iint_{\Omega} \left[\nu \left(\frac{\partial Az}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial Az}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_x} \nu \frac{\partial Az}{\partial x} w_i d\Gamma_x - \int_{\Gamma_y} \nu \frac{\partial Az}{\partial y} w_i d\Gamma_y + \iint_{\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial Az}{\partial t} w_i \cdot d\Omega - \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot w_i \cdot d\Omega = 0 \quad (II.19)$$

Le deuxième et le troisième termes de cette équation peuvent être condensés en

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial Az}{\partial n} \cdot w_i \cdot d\Gamma$$

Si on considère aussi la condition de Dirichlet ($w_i=0$ sur une partie de la frontière) et celle de Neumann $\frac{\partial Az}{\partial n}$ sur le reste de cette frontière, on obtient

$$\iint_{\Omega} \left[\nu \left(\frac{\partial Az}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial Az}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \iint_{\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial Az}{\partial t} w_i \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot w_i \cdot d\Omega \quad (II.20)$$

Soit $A^*(x,y)$ la solution approchée de $A(x,y)$ et ϕ_j les fonctions d'interpolation telles que

$$A^*(x,y) = \sum_{j=1}^{nn} A_j \cdot \phi_j, \text{ avec } nn : \text{ nombre de nœuds du domaine.}$$

Nous pouvons choisir les fonctions de projections w_i identiques aux fonctions d'interpolation ϕ_j . Dans ce cas, si nous remplaçons $A(x,y)$ par sa valeur discrétisée, l'équation (II.20) s'écrira comme suit

$$\iint_{\Omega} \nu \sum_{j=1}^{nn} A_j \cdot \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} \sigma \cdot \sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial A_j}{\partial t} \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot \phi_i \cdot d\Omega \quad (II.21)$$

ou bien

$$\sum_{j=1}^{nn} A_j \iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega + \sum_{j=1}^{nn} \frac{\partial A_j}{\partial t} \iint_{\Omega} \sigma \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot \phi_i \cdot d\Omega \quad (II.22)$$

Pour nn fonctions de projection, on a un système de nn équations à nn inconnues A_j . Ce système est de la forme

$$\sum_{j=1}^{nn} M_{ij} A_j + \sum_{j=1}^{nn} N_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial t} = K_{ij} \quad (II.23)$$

où : $M_{ij} = \iint_{\Omega} v \cdot \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot d\Omega$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot \phi_i \cdot d\Omega$$

En écriture matricielle :

$$[M] \cdot \{A\} + [N] \cdot \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} = \{K\}. \quad (II.24)$$

$\{A\}$: vecteur colonne des valeurs A_j ; $[M]$, $[N]$, $[K]$: matrices dont les éléments sont explicités plus haut.

Dans le cas de courants sinusoïdaux, (II.22) prendra la forme suivante

$$\iint_{\Omega} v \sum_{j=1}^{nn} A_j \cdot \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \cdot \phi_j \cdot \phi_i \cdot d\Omega \right] = \iint_{\Omega} J_{sz} \cdot \phi_i \cdot d\Omega \quad (II.25)$$

ω : pulsation des courants sources.

L'écriture matricielle est

$$[[M] + j\omega [N]] \cdot \{A\} = \{K\}. \quad (II.26)$$

- Cas axisymétrique 2D :

Le potentiel vecteur \vec{A} se réduit à sa composante angulaire A_ϕ , qui est perpendiculaire au plan d'étude et parallèle aux courants.

L'équation du modèle correspondant est de la forme suivante (en régime transitoire) :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial r A_\phi}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial r A_\phi}{\partial t} = - J_s \phi. \quad (II.27)$$

Sa formulation intégrale avec la méthode de Galerkin et en utilisant comme fonctions de projection les fonctions de d'interpolation ϕ_j aux nœuds j , donne

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} + J_s \phi \right] \cdot \phi_j \cdot dr \cdot dz = 0 \quad (II.28)$$

L'application du théorème de Green transforme l'équation en

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) dr.dz - \int_{\Gamma} \frac{\nu}{r} \frac{\partial A}{\partial n} \cdot \phi_i . d\Gamma + \iint_{\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \phi_i \cdot \frac{dr.dz}{r} = \iint_{\Omega} J_s \phi_i . dr.dz \quad (II.29)$$

Avec les conditions aux limites, $\frac{\partial A}{\partial n} \cdot \phi_i$ s'annule (Dirichlet et Neumann homogène) :

$$\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) dr.dz + \iint_{\Omega} \sigma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \phi_i \cdot \frac{dr.dz}{r} = \iint_{\Omega} J_s \phi_i . dr.dz \quad (II.30)$$

Si nous remplaçons A par sa valeur discrétisée ($A^*(x,y) = \sum_{j=1}^{nn} A_j \cdot \phi_j$), le résultat est

$$\sum_{j=1}^{nn} \left[\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dr.dz \right] A_j + \sum_{j=1}^{nn} \left[\iint_{\Omega} \sigma \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot \frac{dr.dz}{r} \right] \cdot \frac{\partial A_j}{\partial t} = \iint_{\Omega} J_s \phi_i . dr.dz \quad (II.31)$$

Pour nn fonctions de projection, le système de nn équations à nn inconnues prend la forme matricielle

$$[M] \cdot \{A\} + [N] \cdot \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} = \{K\}. \quad (II.32)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dr.dz ;$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \cdot \phi_i \cdot \phi_j \cdot \frac{dr.dz}{r} ;$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} J_s \phi_i \cdot dr.dz .$$

A_j : Valeur du potentiel magnétique au nœud "j".

La résolution des systèmes (II.24) et (II.32) nécessite une discrétisation temporelle.

Cas harmonique :

$$[[M] + j\omega [N]] \cdot \{A\} = \{K\}. \quad (II.33)$$

II.2.5.b. Cas magnétostatique :

Nous éviterons la répétition des démonstrations développées en magnétodynamique. Avec les mêmes hypothèses qu'en haut, notamment celles permettant d'étudier des objets présentant une symétrie, nous obtenons les résultats ci-dessous.

- Cas cartésien 2D:

$$\sum_{j=1}^{nn} A_j \iint_{\Omega} \nu \cdot \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} J_s z \cdot \phi_i . d\Omega + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{ry}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_{rx}}{\mu} \right) \right] \cdot \phi_i . d\Omega \quad (II.34)$$

En réécrivant l'équation précédente avec nn fonctions de projection (identiques aux fonctions tests), on aura un système représenté par l'écriture matricielle suivante

$$[M].[A] = [K] + [G] \quad (II.35)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} J_s z \cdot \phi_i \cdot d\Omega$$

$$G_{ij} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_{ry}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_{rx}}{\mu} \right) \right] \cdot \phi_i \cdot d\Omega$$

- Cas axisymétrique 2D:

$$\sum_{j=1}^{nn} \left[\iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dr \cdot dz \right] A_j = \iint_{\Omega} J_s \phi \cdot \phi_i \cdot dr \cdot dz - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{B_{rz}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{B_{rr}}{\mu} \right) \cdot \phi_i \cdot dr \cdot dz \quad (II.36)$$

Avec nn fonctions de projection, l'écriture matricielle correspondant au système obtenu est

$$[M].[A] = [K] + [G]$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) dr \cdot dz ;$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} J_s \phi \cdot \phi_i \cdot dr \cdot dz .$$

$$G_{ij} = - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_{rz}}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_{rr}}{\mu} \right) \right] \phi_i \cdot dr \cdot dz$$

II.2.6. Discrétisation temporelle : [1] [21]

Résoudre un système différentiel dépendant du temps consiste à trouver un ensemble de fonctions $\{A(t)\}$ qui satisfont ce système à tout instant t ainsi que les conditions initiales imposées à $t=t_0$. Parmi les nombreuses méthodes, nous présenterons celle d'Euler.

La méthode d'Euler est l'une des méthodes dites d'intégration directe. Ces méthodes consistent à construire numériquement à partir de A_0 (valeur initiale), une suite de valeurs de la solution aux instants successifs $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, ..., $t_0 + n\Delta t$. Les approximations des dérivées par rapport au temps sont de type différences finies.

II.2.6.a. Méthode d'Euler explicite :

Notre système est du premier ordre, il peut donc s'écrire sous la forme générale

$$\left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} = \{f(\{A\}, t)\} \text{ pour } t > t_0 \quad (II.37)$$

$$\{A(t_0)\} = \{A_0\}$$

Discrétisons $\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\right\}$ par la formule des différences finies décentrée à gauche :

$$\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\right\}_t = \frac{1}{\Delta t}(\{A\}_{t+\Delta t} - \{A\}_t) ; \quad (II.38)$$

Ceci aboutit à la réécriture suivante de (II.37), à l'instant "t" :

$$\{A\}_{t+\Delta t} = \{A\}_t + \Delta t \cdot \{f(\{A\}_t, t)\}. \quad (II.39)$$

$\{f\}$ ne fait pas intervenir $\{A\}_{t+\Delta t}$: la formule de récurrence est dite explicite.

On construit ainsi successivement les valeurs de $\{A\}$ aux différents instants $t_0 + \Delta t$, $t_0 + 2\Delta t$, ..., $t_0 + n\Delta t$.

Dans la pratique, la méthode précédente est réorganisée pour résoudre le système (II.32). Nous obtenons

$$[N] \cdot \{A\}_{t+\Delta t} = \Delta t \cdot \{K\}_t + ([N] - \Delta t \cdot [M]) \cdot \{U\}_t \quad (II.40)$$

Les algorithmes d'Euler explicites ne sont stables que si Δt est inférieure à une valeur critique Δt_c .

II.2.6.b. Méthode d'Euler implicite :

La méthode consiste à écrire (II.37) à l'instant $t + \Delta t$ et à utiliser la formule des différences finies décalée à droite :

$$\left\{\frac{\partial A}{\partial t}\right\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}(\{A\}_{t+\Delta t} - \{A\}_t) \quad (II.41)$$

D'où la formule de récurrence implicite d'Euler :

$$\{A\}_{t+\Delta t} = \{A\}_t + \Delta t \cdot \{f(\{A\}_{t+\Delta t}, t + \Delta t)\}. \quad (II.42)$$

La méthode implicite d'Euler est inconditionnellement stable.

II.2.6.c. Méthode d'Euler semi-implicite :

On écrit (II.37) à l'instant $t + \alpha \cdot \Delta t$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$ et la formule d'Euler est

$$\{A\}_{t+\Delta t} = \{A\}_t + \Delta t \cdot \{f(\{A\}_{t+\alpha \Delta t}, t + \alpha \Delta t)\}. \quad (II.43)$$

où

$$\{A\}_{t+\alpha\Delta t} = \alpha \cdot \{A\}_{t+\Delta t} + (1-\alpha) \cdot \{A\}_t \quad (II.44)$$

Pour $\alpha=0.5$, nous obtenons le schéma très utilisé de Crank-Nicholson.

II.2.7. Méthodes de résolution des systèmes algébriques :

Le calcul numérique des champs consiste en général en la résolution de systèmes d'équations algébriques linéaires. Les différentes matrices qui en résultent ont des caractéristiques diverses (éparses ou denses, symétrique ou non symétriques,...). On trouve par conséquent plusieurs méthodes de résolution de ces systèmes et on peut les classer en deux catégories :

- Les méthodes directes ;
- Les méthodes itératives. [13][17]

a. Méthodes directes :

On utilise les méthodes directes pour la résolution des systèmes linéaires à matrices pleines de faibles dimensions. Elles permettent la résolution du système en un nombre fini d'étapes, et conduisent à la solution exacte. Seulement, l'inconvénient est qu'elles exigent un espace mémoire et un temps de résolution importants. [13][17]

Considérons le système d'équation suivant

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = y_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = y_2$$

.

.

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = y_n$$

En notation matricielle, on écrit

$$A \cdot x = y$$

où

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{array} \right\} \text{ est une matrice à } n \text{ lignes et } n \text{ colonnes (n.n),}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est un vecteur à } n \text{ lignes et une colonne}$$

et

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \text{ un } n \text{ vecteur.}$$

Il s'agit ici, connaissant les valeurs du vecteur de forçage y , de trouver les valeurs de x .

Nous pouvons être appelés à chercher la solution d'un tel système à chaque pas d'une méthode de résolution d'un problème non linéaire ou à chaque incrémentation d'un problème dynamique par exemple. [17]

a.1 Méthode de Cramer :

En principe, le système précédent à une solution simple :

$$x = A^{-1} \cdot y$$

L'apparence simple d'une telle résolution est contredite par la considération des calculs qu'il est nécessaire d'effectuer. L'évaluation du déterminant d'une matrice $n \cdot n$, requiert $(n-1) \cdot n$ multiplications. Pour de grandes valeurs de n , il est clair que les calculateurs seront poussés aux limites de leurs capacités. [17]

a.2 Méthode d'élimination de Gauss : [17]

Cette méthode est la plus populaire et la plus efficace des méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires. Si la matrice ne possède pas de propriétés particulières à exploiter, la méthode d'élimination de Gauss est alors la plus appropriée.

Nous décrivons l'élimination par colonnes, même si l'élimination par lignes fonctionne aussi bien et avec le même nombre de pas.

Soit le système matriciel suivant

$$A \cdot x = y.$$

Dans la méthode d'élimination de Gauss, nous éliminons les colonnes de sorte à obtenir un système triangulaire. Alors, pour trouver la solution, nous effectuerons des substitutions à partir du dernier terme.

La matrice A est notée comme suit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

Pour avoir des zéros sous la diagonale, la procédure est explicitée en prenant le cas de la première colonne. Commençons par la deuxième équation. Si nous multiplions la première équation par a_{21}/a_{11} et que l'on soustrait le résultat de la deuxième équation, nous aurons un zéro en position (2,1) de la matrice A. De même pour obtenir un zéro en position (3,1), on multiplie la première équation par a_{31}/a_{11} puis le résultat sera ôté de la troisième équation. L'algorithme est donné ci-dessous :

$$a_{jk} = a_{jk} - (a_{ji}/a_{ii}) \cdot a_{ik}, \quad k=1+1, \dots, n$$

$$j=i+1, \dots, n$$

et

$$y_j = y_j - (a_{ji}/a_{ii}), \quad j=i+1, \dots, n.$$

Le signe "=" signifie est «substitué par». Notons que la diagonale ne doit pas contenir de zéro. Si c'est le cas, et si la matrice n'est pas singulière, nous devons chercher un « pivot ».

Lorsque le processus d'élimination est complet, le système devient triangulaire supérieur. La dernière équation ne contenant qu'un seul terme est alors directement résolue ;

$$x_n = y_n / a_{nn}.$$

Les autres inconnues sont trouvées (dans l'ordre, à partir de la dernière équation jusqu'à la première) par substitution en utilisant l'algorithme suivant

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j) / a_{ii}, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1.$$

b. Méthodes itératives: [2] [13]

Ces méthodes sont mieux adaptées aux matrices d'ordres élevés comportant de nombreux éléments nuls (matrices creuses). Elle consiste à passer d'un estimé x^k à un estimé x^{k+1} de cette même équation. S'il ya convergence, on atteint la solution après un certain nombre d'opérations.

Parmi ces méthodes citons : la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel.

b.1 Méthode de Jacobi :

Soit un système de trois équations à trois inconnues :

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = y_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = y_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = y_3$$

On résout la première équation à x_1 , la deuxième à x_2 et la troisième à x_3 :

$$x_1 = (y_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3) / a_{11}$$

$$x_2 = (y_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3) / a_{22}$$

$$x_3 = (y_3 - a_{31} \cdot x_1 - a_{32} \cdot x_2) / a_{33}$$

On donne aux inconnues des valeurs arbitraires x_1^0, x_2^0, x_3^0 et on les introduit dans le système précédent. On obtient de nouvelles valeurs x_1^1, x_2^1, x_3^1 qu'on introduit encore dans le même système pour avoir $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots$

L'algorithme est le suivant

$$x_i = (y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)}) / a_{ii}, \quad i \neq j \text{ et } i=1, \dots, n.$$

Le calcul sera arrêté si

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{ou bien si} \quad |(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})| / x_i^{(k)} < \varepsilon.$$

ε : précision imposée par l'utilisateur.

b.2 Méthode de Gauss-Seidel : [13]

Cette méthode consiste à résoudre le système $A \cdot x = y$ par l'algorithme suivant

$$x_i^{(k+1)} = (y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)}) / a_{ii},$$
$$i=1, \dots, n.$$

On donne aux inconnues x_i des valeurs arbitraires x_i^0 puis on effectue le nombre d'itérations nécessaires pour avoir

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad |(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})| / x_i^{(k)} < \varepsilon.$$

ε : précision imposée par l'utilisateur.

CHAPITRE III

APPLICATIONS

Notre objectif est d'étudier un actionneur vertical. Il est intéressant de présenter, au préalable, quelques notions sur la lévitation magnétique et le couplage magnétique-mécanique. En effet, cet actionneur magnétique permettra d'obtenir un mouvement vertical d'une pièce le composant par l'action d'une force qui s'oppose à l'action de la pesanteur. Ce qui justifie la première partie de ce chapitre. Cette force ne pourrait exister sans la présence d'un champ magnétique inducteur. Le mouvement qui en résulte influe sur la géométrie et par conséquent sur le champ magnétique ; nous sommes donc en présence d'un couplage magnétique-mécanique, d'où la présentation de la deuxième partie.

III.A LEVITATION MAGNETIQUE :

La lévitation est la mise en suspension (ou l'élévation) sans support physique d'un être ou d'un objet pesant, au dessus du sol.

En physique, la lévitation est la technique qui permet d'élever un objet par l'intermédiaire de procédés électrostatiques, électromagnétiques, magnétiques ou électrodynamiques. La lévitation magnétique s'obtient par l'acquisition de la compensation du poids d'un objet par la force créée par l'une des trois dernières techniques citées.

Pour faire léviter un objet, il ne suffit pas de rapprocher deux pôles magnétiques de même nom. Comme nous pouvons le constater très facilement avec deux aimants permanents, la stabilité est un véritable problème : les pôles de noms différents s'attirent. La lévitation par attraction pose aussi autant de problèmes. Dans les deux cas, nous ne pouvons obtenir qu'un équilibre instable. [2] [22] [23] [24] [25]

Plus généralement, pour qu'un objet soit en lévitation dans un champ magnétique, les efforts doivent être générés et contrôlés suivant les six degrés de liberté, soit trois translations et trois rotations.[26]

Le théorème de S. Earnshaw, énoncé en 1839, appuie ces constats d'instabilité. Il peut s'énoncer ainsi :

« Tout ensemble rigide de charges électriques ou d'aimants permanents ne peut être en équilibre stable sous l'action uniquement d'un champ électrostatique ou d'un champ magnétostatique. » [27]

Résumons quelques conséquences qui ont été tirées de ce théorème : [26]

- Aimants permanents : Il y a impossibilité de réaliser une suspension stable uniquement à base d'aimants ou d'électroaimants parcourus par des courants constants.

- Matériaux à aimantation non constante, dans des champs statiques:
 - Matériaux ferromagnétiques ou paramagnétiques (susceptibilité magnétique χ positive) : le corps s'aimante et ne peut trouver de stabilité.
 - Matériaux diamagnétiques (susceptibilité magnétique χ négative) : la stabilité est possible.
- Matériaux conducteurs dans un champ statique : pour qu'il y ait stabilité, il faut que le conducteur laisse circuler un courant permanent en champ statique. Seuls les supraconducteurs possèdent cette caractéristique.
- Matériaux conducteurs dans un champ magnétodynamique : on peut obtenir la stabilité.

Néanmoins, il est possible d'obtenir une lévitation stable en magnétostatique, en contournant ce théorème par l'exploitation de diverses solutions.

III.A.1. Lévitation par des aimants supraconducteurs :

III.A.1.a. Supraconductivité : [4] [24]

Découverte par H.K. Onnes en 1911, la supraconductivité est un état physique dans lequel se retrouvent certains métaux à très basse température. En effet, au dessous d'une certaine température, dite « critique » T_c , ces métaux ont une résistivité électrique nulle. Ils ne dissipent pas d'énergie lorsqu'ils sont traversés par un courant électrique. De même qu'un courant induit peut y circuler indéfiniment dans le temps.

III.A.1.b. L'effet Meissner-Ochsenfeld : [2] [4] [24]

En 1933, Meissner et Ochsenfeld découvrent une autre propriété des supraconducteurs. Sous des températures inférieures à T_c et plongés dans un champ magnétique, ces matériaux expulsent les lignes d'induction \vec{B} . Ils sont donc, à ces températures, imperméables au champ magnétique. Ce phénomène est dit aussi diamagnétisme des supraconducteurs.

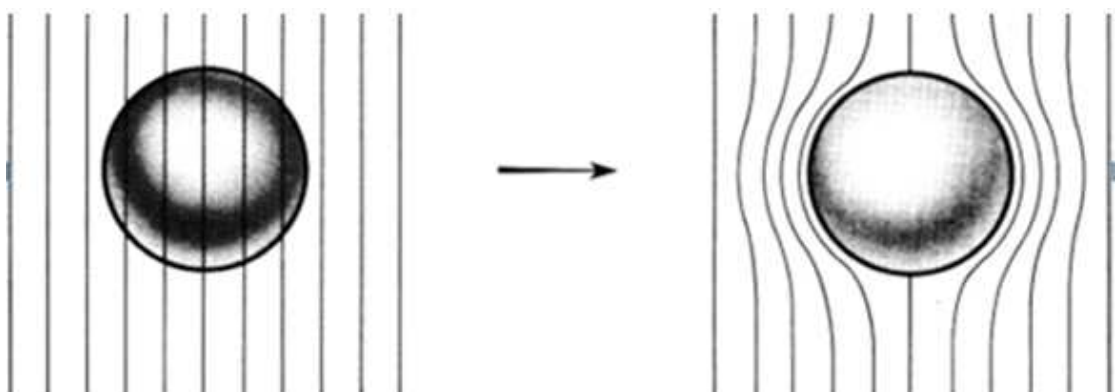


Figure III.1. Effet Meissner dans une sphère supraconductrice refroidie dans un champ magnétique constant. En franchissant la température de transition, les lignes d'induction B sont éjectées de la sphère.

III.A.1.c. Obtention de la lévitation : [2] [24] [27] [28] [29]

L'expulsion du champ est due à la création par le supraconducteur diamagnétique d'un champ de sens contraire au champ inducteur. L'effet Meissner peut donc aboutir à la lévitation magnétique due aux forces de répulsion entre les deux aimants.

La figure III.2 illustre un aimant en lévitation au-dessus d'un supraconducteur. Le disque tend à expulser le champ de l'aimant. Lorsqu'on approche l'aimant du supraconducteur, celui-ci baigne dans un champ magnétique variable. Il est alors le siège de courants induits. Dans un métal normal, ces courants sont très vite dissipés ; dans le supraconducteur, ils circulent sans rencontrer de résistance. A leur tour ces champs induits génèrent un champ magnétique directement opposé au champ inducteur, de sorte que l'induction B à l'intérieur du supraconducteur soit nulle. Et comme dans tout diamagnétique, l'expulsion des lignes de champ de ce corps se traduit par l'apparition d'un moment magnétique, qui s'oriente de sorte que le corps a tendance à se déplacer, sous l'action d'une force magnétique, vers les zones de faible champ. Le diamagnétique étant une image de l'aimant, il y a répulsion entre les deux.

L'aimant soumis à l'action de la force de répulsion et de son poids, lévite.



Figure III.2. Un aimant en lévitation au-dessus d'un disque supraconducteur.

Notons qu'on peut aussi faire léviter un supraconducteur au-dessus d'un aimant comme l'illustre la figure III.3. Nous éviterons de nous étaler sur le sujet, l'objectif étant ici de donner un aperçu sur la lévitation par supraconducteur.



Figure III.3. Un disque supraconducteur en lévitation au-dessus d'aimants.

III.A.2.Lévitation par des électroaimants : [24] [26] [30]

III.A.2.a. Lévitation magnétique active (ou lévitation électromagnétique) :

Lorsque l'on rapproche deux électroaimants dont les champs magnétiques sont opposés, on peut obtenir une lévitation si on arrive à régler le problème d'instabilité. Il est à noter qu'on peut remplacer un des électroaimants par un aimant. Pour vaincre l'instabilité, on est amenés à introduire un dispositif de contrôle (de régulation), de type électronique ou électronique de puissance. Les lévitations utilisant ce principe sont d'ailleurs appelées « lévitations magnétiques actives » ou « paliers magnétiques actifs » (PMAs)- active magnetic bearings (AMBs). Ces PMAs utilisent des systèmes de commande pour contrôler le champ magnétique, afin de produire les forces de rappel qui agissent directement sur le corps suspendu.

Le fonctionnement de tels systèmes est illustré par l'exemple simple d'un électroaimant interagissant avec un objet ferromagnétique (figure III.4.a). La force verticale d'attraction est, dans ce type de systèmes, inversement proportionnelle à la distance entre les deux aimants (figure III.4.b).

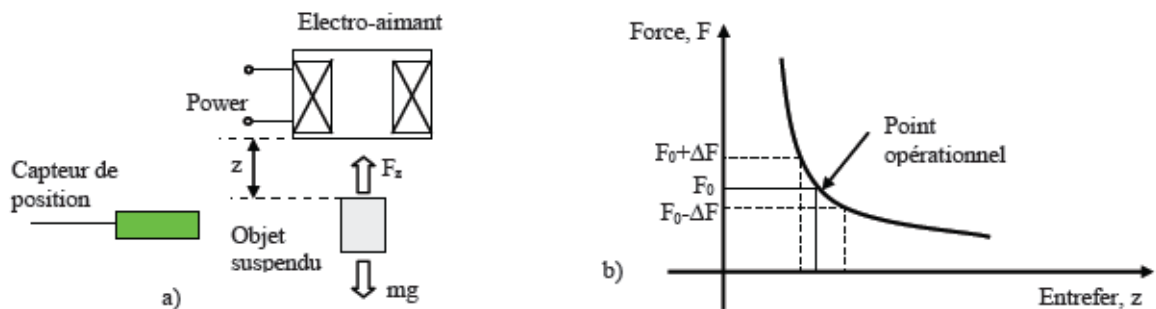


Figure III.4. Principe de la suspension électromagnétique

a) Configuration physique

b) Caractéristique (Force- distance)

Plusieurs méthodes sont utilisées pour le contrôle du champ magnétique, et par conséquent la stabilisation de l'objet en sustentation. Ces méthodes sont dites explicites à cause de l'utilisation de capteurs.

Le web regorge d'expériences spectaculaires relevant de ce type d'expériences.

Le transrapid allemand et le Swiss metro fonctionnent sur le principe de la LEM.

III.A.2.b. Lévitation électrodynamique :

Le principe électrodynamique est basé sur la génération de forces répulsives dues aux courants induits (Loi de Lenz).

III.A.2.b.1 Lévitation électrodynamique à base de courants de Foucault induits dans des supraconducteurs en mouvement :

Un aimant permanent, un électroaimant ou un aimant supraconducteur en mouvement au-dessus d'une surface conductrice (ou l'inverse), y génère des courants de Foucault. L'interaction entre ces courants et le champ magnétique produit une force (de Laplace) opposée au poids et qui augmente d'abord avec la vitesse puis se stabilise. Si cette force est suffisante, on obtient la lévitation de l'aimant (ou de la surface conductrice).

Ce phénomène est appelé lévitation électrodynamique ou EDL.

La figure III.5. est une représentation schématisée des dispositifs fonctionnant sur ce principe.

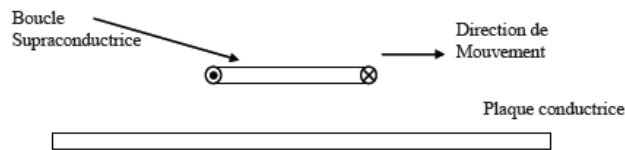


Figure III.5. Boucle de courant supraconductrice en mouvement au-dessus d'une plaque conductrice

La lévitation du JR-MAGLEV japonais est obtenue en utilisant un procédé basé sur ce principe. En effet, des bobines supraconductrices embarquées génèrent un champ magnétique. Ce champ induit au passage du train, dans des bobines en forme de « 8 » placées sur la voie, des courants : d'une attraction-répulsion entre le supraconducteur et les bobines résulte la lévitation. Malheureusement, ceci n'est valable qu'aux grandes vitesses ; en deçà d'une certaine valeur de celles-ci, le train utilise des roues.

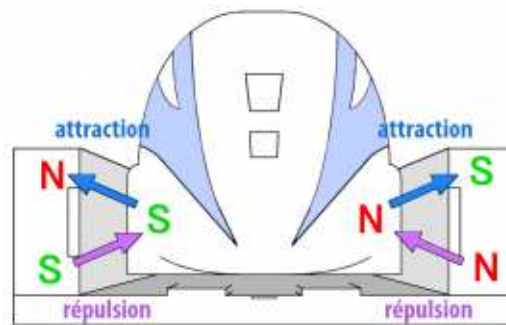


Figure III.6. Lévitiation du JR-MAGLEV. Elle est due aux pôles qui apparaissent par induction sur les côtés de la voie. Hauteur de lévitation : environ 10 cm.

Les procédés de refroidissement et le coût des supraconducteurs nous conduisent à chercher des solutions alternatives.

III.A.2.b.2. Lévitiation électromagnétique à champs alternatifs :

La production de courants induits peut s'obtenir par le mouvement des électroaimants par rapport aux plaques conductrices, comme au paragraphe précédent. Mais il suffit aussi de placer la plaque conductrice à proximité d'une bobine en cuivre alimentée par une source de courant ou de tension variables.

A l'évidence, une puissance importante doit être fournie à la bobine. On constate alors que l'électroaimant et la plaque s'échauffent très rapidement.

L'exemple de la figure III.7. montre un disque de cuivre suspendu au-dessus d'une bobine.



Figure III.7. Exemple de Lévitación électrodynamique par courant alternatif

L'expérience de Thomson prouve qu'on peut obtenir la lévitation à partir de 60 Hz et un fort courant issu d'un circuit résonnant. En raison de la grande dissipation de puissance sous forme de chaleur, le test ne peut durer que quelques secondes.

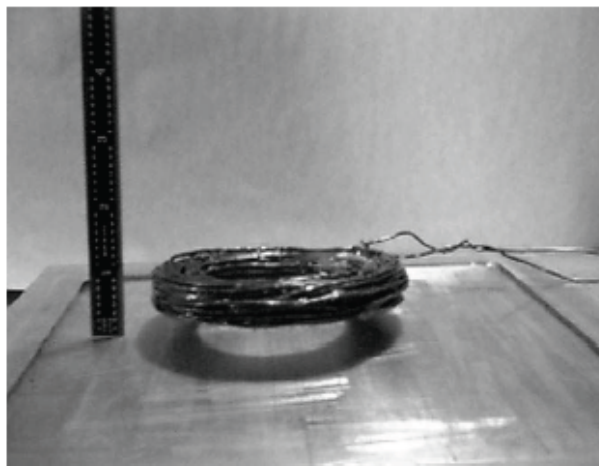


Figure III.8. Expérience de Thomson.
Une bobine suspendue au dessus d'une plaque en aluminium

Cette méthode n'est utilisée de manière industrielle que dans des fours à induction. Lorsque le matériau conducteur à chauffer est soumis à des champs variables, il subit une force tendant à l'éloigner de l'inducteur. Ceci permet de ne pas avoir de contact entre le métal en fusion et le creuset qui risque de le polluer.

III.A.3. Lévitación stabilisée par l'effet gyroscopique : [26] [31]

Sans prétendre remettre en cause le théorème d'Earnshaw, nous pouvons réaliser une lévitation stable avec deux aimants permanents. Ce théorème étant valable uniquement pour des systèmes fixes, on utilise « l'effet gyroscopique » pour la stabilisation. Il résulte de la rotation de l'objet lévitant.

Essayons de donner une explication simple de l'effet gyroscopique. Toute masse lancée à grande vitesse autour d'un axe acquiert une énergie cinétique et, par conséquent, un moment cinétique élevés. Pour changer son orientation, il faut modifier son énergie cinétique, donc mettre en jeu une force non négligeable. L'axe d'une toupie tournante par exemple, tend à garder une direction fixe. C'est l'effet gyroscopique.

Pour vaincre l'instabilité d'un aimant lévitant sur un autre, on part de l'idée directrice suivante : on lance en rotation à grande vitesse, au dessus d'un aimant, un anneau aimanté. Les forces de réaction gyroscopiques résultantes s'opposent au phénomène d'instabilité.

C'est d'ailleurs sur ce principe que fonctionne le Lévitron. Cet objet de distraction est constitué d'un aimant de sustentation (en ferrite carrée aimantée circulairement) logé dans un socle en bois, et d'une toupie composée d'une rondelle (en ferrite aimantée aussi) et d'une tige centrale.

La toupie lancée au-dessus du socle reste en mouvement et en lévitation pendant un temps allant parfois jusqu'à trois minutes.

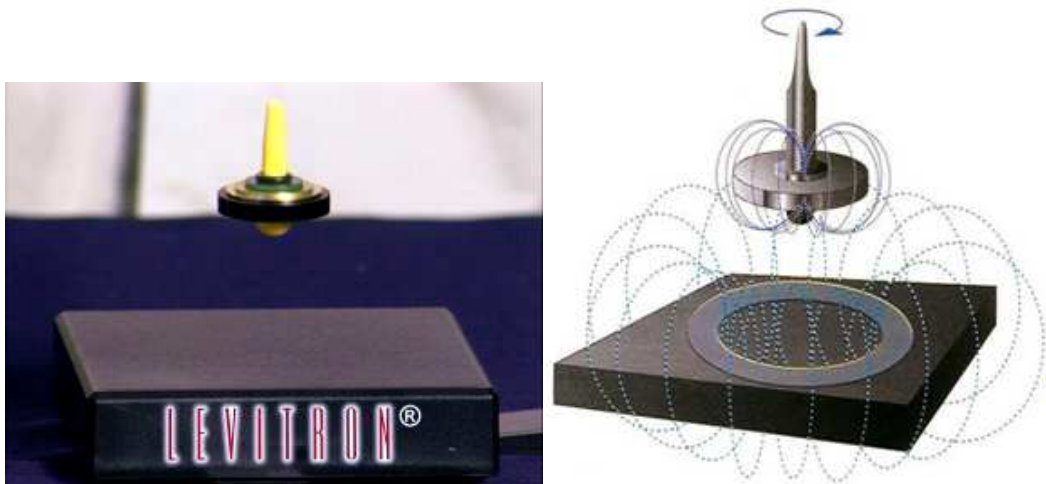


Figure III.9. Toupie Levitron

Inconvénient : il s'agit d'un principe difficile à mettre en œuvre en pratique, en raison de la faiblesse en rendement et en capacité de charge. De plus, la stabilité est très sensible à de nombreux paramètres tels que le poids du rotor, l'aimantation rémanente et la vitesse de rotation. La suspension n'est stable que dans une certaine plage de vitesse.

III.A.4. Applications de la lévitation magnétique :

Outre les trains à sustentation magnétiques déjà cités (en phase de développement), il existe d'autres applications de la lévitation magnétique. Nous en citons ci-dessous quelques exemples.

III.A.4.a. Les paliers magnétiques : [24] [25] [26]

Les paliers magnétiques sont utilisés lorsque les autres paliers ont atteint leurs limites. Fonctionnant grâce à l'interaction magnétique engendrée entre la pièce mobile et la pièce statique, ils permettent à un rotor de tourner sans aucun contact. Leur domaine d'utilisation

concerne les applications à très hautes vitesses de rotation, celles pour lesquelles il faut minimiser les pertes, éviter l'usure, empêcher la pollution d'un environnement sensible par des poussières ou un lubrifiant, supprimer les vibrations, fonctionner à très basses ou à très hautes températures et limiter la maintenance.

Deux types de paliers magnétiques simples sont représentés sur les figures III.10 et III.11. Ils sont constitués au minimum de deux bagues d'aimants permanents en interaction, l'une des bagues étant fixe tandis que l'autre est solidaire du rotor. En fonction des directions d'aimantation des deux bagues, il est possible d'obtenir, avec la même géométrie, soit un centreur soit une butée.

Dans le cas de la première figure, si la bague intérieure se décale radialement, son homologue extérieure la repousse vers le centre ; il s'agit donc d'un centreur. S'agissant de la seconde figure, si la partie intérieure se décale axialement, la bague extérieure la rappelle dans son plan de symétrie. Il s'agit donc d'une butée.

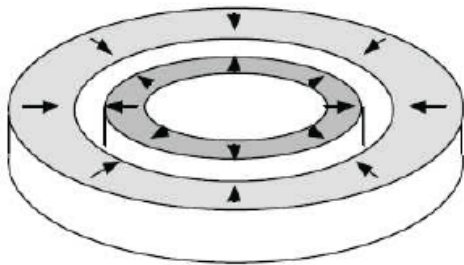


Figure III.10. Centreur à aimant permanent.

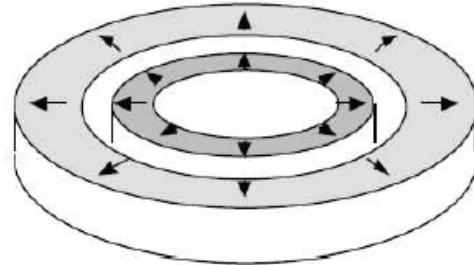


Figure III.11. Butée à aimant permanent

III.A.4.b. D'autres applications des suspensions magnétiques : [25]

Elles sont utilisées dans des domaines divers. Elles peuvent supporter des pièces d'à peine quelques grammes telles que des disques de compteurs électriques jusqu'à des machines de plusieurs tonnes telles que certains compresseurs. Les parties sustentées peuvent être immobiles (téléscopes) ou soumises à des vitesses élevées (centrifugeuses, turbines,...).

III.A.4.c. Les micro-actionneurs : [33]

Dans le domaine des objets miniaturisés, des micro-systèmes intégrés servent d'actionneurs ou de capteurs.

Les technologies actuelles permettent de fabriquer des micro-aimants et de construire des micro-systèmes magnétiques. Les déplacements importants sont alors possibles.

Ces micro-actionneurs sont en phase de développement. Bien que des actionneurs basés sur des principes physiques différents existent, les actionneurs magnétiques présentent des avantages tels que des valeurs plus importantes des déplacements.

Voici décrits brièvement quelques exemples de réalisations.

i. Micro-relais :

Leurs applications essentielles sont partout où l'on a peu de place et où l'on a besoin de commuter rapidement (en moins de 1 milliseconde).

ii. Micro-pompes ou micro-valves :

Ces pompes sont principalement constituées d'un ou de plusieurs actionneurs à membrane et micro-valves. Nous en présentons ci-dessous un exemple dont le principe est décrit en figure III.12.

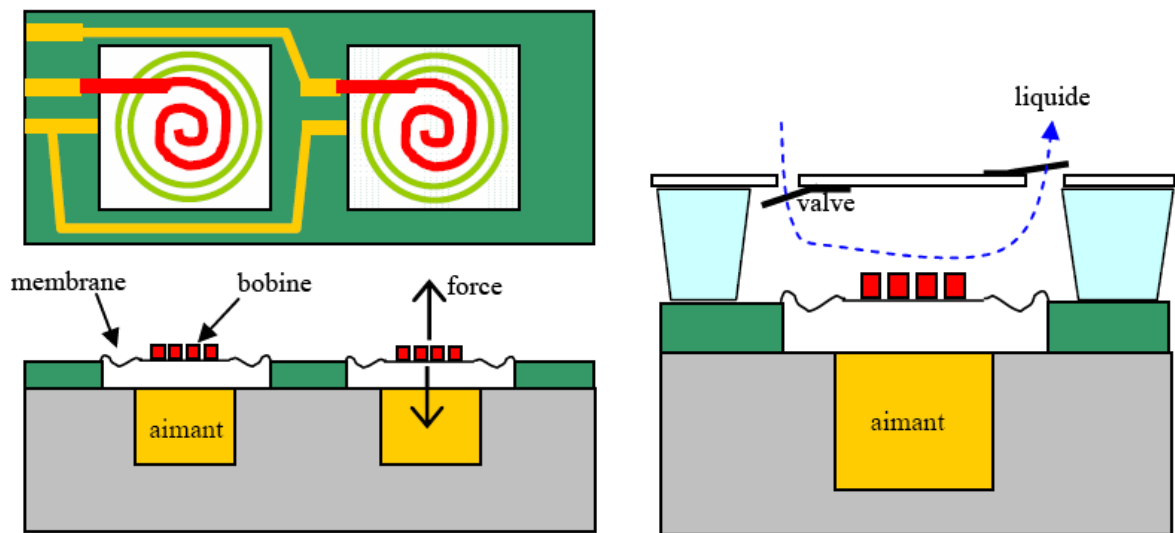


Figure III.12. Principe de micro-pompe

a) structure de base

b) passage du liquide

La micro-pompe est composée d'un aimant intégré dans le substrat et d'une bobine implantée dans le diaphragme. Au passage d'un courant dans la bobine, celle-ci est attirée ou repoussée selon les flèches. La membrane est résistante à l'eau. Si l'on ajoute deux valves unidirectionnelles, le liquide peut être pompé de gauche à droite.

Les micro-valves et micro-pompes sont utilisées même en microbiologie.

III.B COUPLAGE ELECTROMAGNETIQUE-MECANIQUE

Un phénomène physique n'agit pas toujours indépendamment des autres phénomènes. On dit alors qu'il y a couplage entre deux ou plusieurs phénomènes.

Selon les applications attendues d'un dispositif, plusieurs sortes de couplages peuvent être mis en jeu. Celui qui nous intéresse particulièrement dans notre travail, c'est le couplage électromagnétique-mécanique résultant de la production de forces mécaniques par la présence de courants de Foucault dans un champ magnétique variable. Ces forces sont donc des forces électromagnétiques. Elles sont susceptibles de causer des déplacements ou des déformations de la structure mécanique. Une modification des forces et de la distribution du champ sont alors inévitables. Il s'agit d'une interaction bidirectionnelle. [11]

Cette interaction fait que les équations caractérisant l'évolution spatio-temporelle des phénomènes électromagnétiques et mécaniques, ne peuvent être résolues séparément et nécessitent un traitement simultané par un modèle mathématique couplé. L'utilisation d'un modèle de couplage plutôt qu'un autre dépend de l'importance de l'interaction des phénomènes magnétiques et mécaniques et des constantes de temps en jeu. Nous allons présenter ici quatre modèles de couplage magnéto-mécaniques. N'omettons pas de rappeler que la prise en compte du mouvement est indispensable dans un modèle magnéto-mécanique. [13] [32]

Commençons par présenter un rappel des équations qui sont à la base des couplages magnéto-mécaniques.

III.B.1. Rappel des équations :

III.B.1.a. Equations électriques : [11]

Elles permettent de donner l'expression mathématique régissant le terme source.

Par exemple, si l'excitation est donnée par la décharge d'un circuit RC, ces équations sont :

$$\begin{cases} v_c(t) + RC.i(t) + LC.d^2v_c(t)/dt^2 = 0 \\ i_c(t) = -C.dv_c(t)/dt \end{cases}$$

R : résistance du circuit d'excitation ; L : inductance du même circuit.

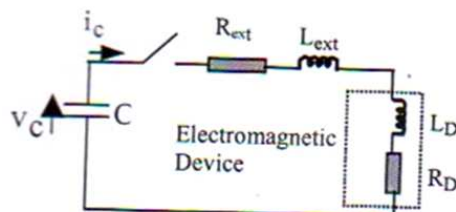


Figure III.13. Circuit électrique équivalent du système

III.B.1.b. Equation mécanique : [11] [32]

L'équation fondamentale de la dynamique donne l'équation mécanique suivante intégrant la

force mécanique : $M \cdot d^2z/dt^2 + C \cdot dz/dt + K \cdot z = F_m \pm F_g$;

où M est la masse, C le coefficient d'amortissement, K le coefficient de raideur, z la variable de déplacement, Fg la force de gravitation et Fm la force magnétique.

Lorsque le deuxième et le troisième termes sont négligeables, l'équation se réduit à

$$M \cdot d^2z/dt^2 = F_m \pm F_g$$

Fm est calculée par l'une des méthodes présentées au chapitre I.

III.B.1.c. Equation électromagnétique : [11]

Pour le problème axisymétrique à deux dimensions, par exemple, l'équation magnétodynamique en régime transitoire est

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \sigma \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = - J_{s\phi} ;$$

$J_{s\phi}$ est le terme source déduit des équations électriques,

$A = r \cdot A_\phi$ et A_ϕ est la composante du potentiel vecteur magnétique suivant la direction Φ .

III.B.2. Modèles de couplage :

III.B.2.a. Modèle non couplé : [32]

Ce type de couplage est conseillé dans le cas où les propriétés magnétiques et mécaniques sont faiblement couplées. Il suffit de calculer séparément la distribution du champ magnétique, la répartition des forces magnétiques et les déplacements qui en résultent. Ce modèle s'adapte à l'étude des vibrations d'origine magnétique dans les structures ferromagnétiques (par exemple, les moteurs).

III.B.2.b. Modèle de couplage paramétrique : [32]

Le champ magnétique est décrit par le flux vis-à-vis du circuit électrique et par les forces vis-à-vis du système mécanique. Connaissant les variations de ces grandeurs en fonction des paramètres variables tels que le courant et le déplacement, les équations du circuit électrique et du mouvement mécanique peuvent être résolues indépendamment du champ magnétique.

Le modèle paramétrique est constitué de deux étapes :

- Etape de paramétrisation : l'étude paramétrique du système à l'aide du calcul numérique (MEF) du champ magnétique. Il s'agit de déterminer la variation du flux et des forces en fonction de l'état de saturation magnétique, du mouvement relatif de la structure, de la température, etc. Cela s'effectue dans la plage de variation des courants et des déplacements.
- Etapes de résolution : résolution des équations électriques en tenant compte du flux et des forces précalculés.

Pour les systèmes subissant des déformations élastiques ou qui sont le siège de courants de Foucault, la paramétrisation est difficile. Ce modèle sied surtout aux systèmes en mouvement rigide (rotation des machines électriques, déplacements des électroaimants,...).

III.B.2.c. Modèle de couplage direct : [13] [32]

Dans ce modèle, les équations régissant le problème électromécanique sont résolues simultanément. Il est avantageusement utilisé dans le cas de problèmes fortement couplés. Cependant, le nombre d'itérations qu'il exige est plus important que pour un couplage alterné.

Par ailleurs, ce modèle présente une difficulté du fait que le système d'équations matricielles est non linéaire et non symétrique. Néanmoins, le système peut être symétrisé et linéarisé.

III.B.2.d. Modèle de couplage indirect (ou alterné): [13] [32]

Ce modèle consiste à résoudre alternativement les équations du champ magnétique (avec les équations du circuit électrique, s'il s'agit d'une alimentation en tension) et les équations du système mécanique.

Le couplage se fait par le transfert de données de l'un des problèmes vers l'autre. On a donc besoin d'une procédure itérative pour calculer le potentiel vecteur A.

Le modèle de couplage alterné permet la modélisation de phénomènes à niveau d'interaction important, que les dispositifs concernés subissent des déplacements rigides ou des déformations et que le problème soit statique ou dynamique.

Il nécessite un processus itératif de « prédiction-correction » selon l'importance de l'interaction des phénomènes magnéto-mécaniques. D'abord, on calcule le champ magnétique ainsi que la force magnétique correspondant à une configuration de structure initiale (phase de prédiction). La force servira à calculer le déplacement qui, à son tour, sera pris en compte dans l'équation magnétique pour l'itération suivante (phase de correction). Le contrôle de la convergence s'effectue soit en comparant les valeurs du déplacement de deux itérations successives (trait plein sur la figure III.14), soit en comparant les valeurs de la force (trait en pointillé).

Le modèle présent est simple et très utilisé. L'inconvénient qu'il présente est qu'il ne tient pas compte du couplage réel ; le transfert fréquent des informations est une source d'erreurs et de pertes de précision.

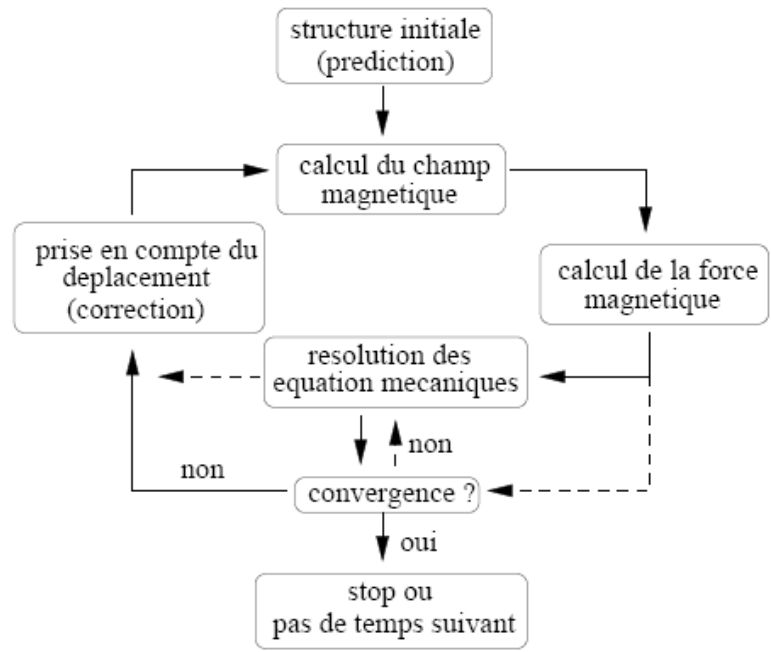


Figure III.14. Processus de couplage indirect.

III.C. APPLICATION I :

Les actionneurs linéaires présentent de grands avantages. Avec eux, on peut se passer des dispositifs de conversion mécanique rotation/translation, et nous obtenons une grande précision ($\approx 0.5 \mu\text{m}$) en plus d'une maintenance réduite. Ceux qui retiendront notre attention ici sont des actionneurs à mouvement vertical.

III.C.1. Présentation du dispositif :

Il s'agit ici d'étudier l'action d'une bobine plate à spires jointives, alimentée en courant sinusoïdal sur un disque métallique (cuivre). Ce dernier étant le siège de courants de Foucault, induits par la variation du flux inducteur, il en résulte une force magnétique de répulsion (loi de Lenz) entre l'induit et l'inducteur. Il s'agira donc de résoudre un problème magnétodynamique.

III.C.1.a. Structure géométrique :

Le dispositif étudié est constitué d'un inducteur axisymétrique, composé de la bobine, au-dessus duquel est posé un disque métallique, constituant l'induit. Il est représenté par la figure suivante.

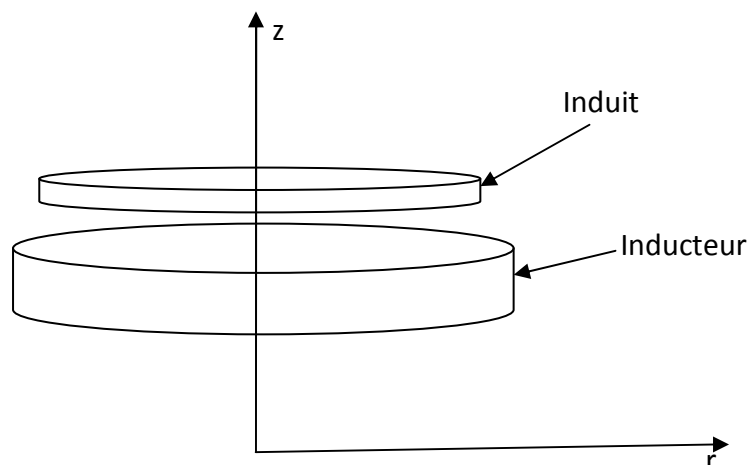


Figure III.15. Schéma représentant le dispositif étudié.

III.C.1.b. Dimensions géométriques :

Pour des raisons de symétrie, nous pouvons restreindre notre étude à un quart du dispositif. Le domaine considéré est représenté en figure III.16. Il est à deux dimensions (r, z).

Les dimensions sont :

- Inducteur : . rayon $r = 0.012 \text{ m}$
. épaisseur : $e = 0.005 \text{ m}$
- Induit : . rayon $r' = 0.01 \text{ m}$

. épaisseur : $e' = 0.002$ m

- Entrefer initial : $d = 0.002$ m

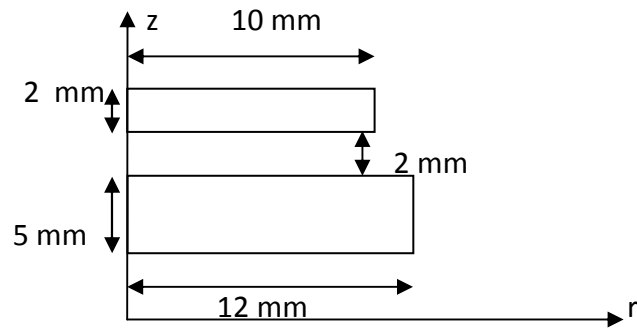


Figure III.16. Modèle géométrique du domaine d'étude.

III.C.1.c. Caractéristiques physiques :

- Air : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 1$

Conductivité électrique : $\sigma_1 = 0$

- Inducteur : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 1$

Conductivité électrique : $\sigma_2 = 5.85 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$

Densité de courant : $6 \cdot 10^7$ A/m². Fréquence : 100 Hz.

- Induit (en cuivre) : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r = 1$

Conductivité électrique : $\sigma_3 = 5.85 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$

Masse volumique : 8.9 g/cm³. Masse calculée : 0.0056 kg.

III.C.1.d. Domaine de résolution et conditions aux limites :

Le domaine de résolution est donc réduit à un quart du dispositif. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur les quatre frontières.

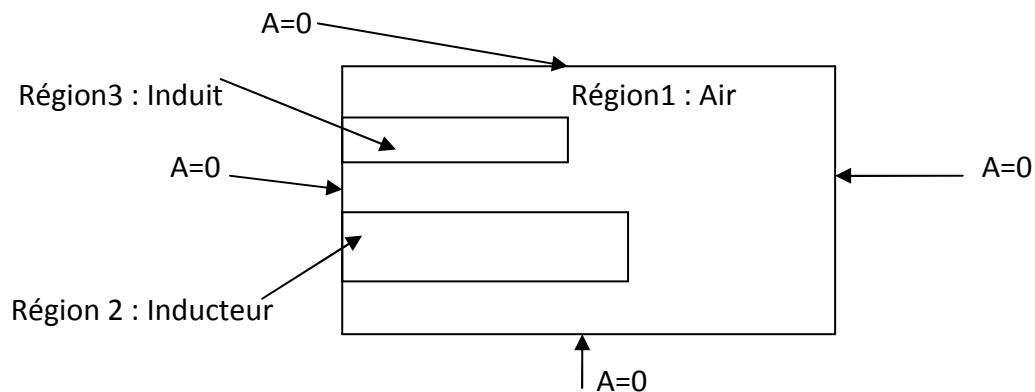


Figure III.17.a. Domaine de résolution et conditions aux limites.

La figure suivante (fig. III.17.b.) apporte des précisions sur les dimensions du domaine de résolution et du dispositif.

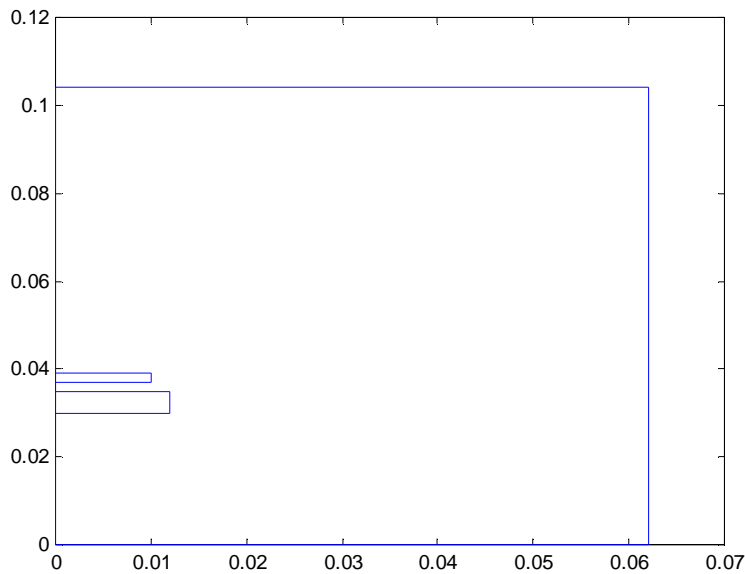


Figure III.17.b. Précisions géométriques sur le domaine de résolution.

III.C.2. Méthode de résolution :

L'objectif est de prévoir, pour un dispositif de dimensions données alimenté par un courant de valeur connue, l'évolution de la force magnétique en fonction des déplacements verticaux qu'elle engendre. Il s'agit aussi bien sûr de connaître l'évolution de ces déplacements et de la vitesse en fonction du temps.

Pour calculer les grandeurs mécaniques, nous devons d'abord établir un modèle mathématique décrivant les phénomènes électromagnétiques qui animent notre dispositif. Nous avons choisi d'utiliser une formulation en fonction du potentiel vecteur magnétique (A). En remarquant que le dispositif présente une symétrie de révolution, nous restreindrons notre étude sur un quart du domaine et sur deux dimensions ; l'équation aux dérivées partielles résultante est à une seule inconnue : la composante angulaire de " A " (A_ϕ).

La résolution se fera par la méthode des éléments finis, sous environnement MATLAB .

La force magnétique, résultat de l'interaction entre les courants de Foucault et le champ magnétique inducteur est alors déduite, par la formule de Lorentz (Cf.I.14), puis on calculera le déplacement et la vitesse.

La force magnétique étant le résultat d'un couplage magnétique-mécanique, il est nécessaire de faire appel à un modèle de couplage parmi ceux cités précédemment. Celui qui a été retenu est le modèle alterné. Le champ magnétique dans le domaine d'étude dépend de la position de la charge. Il en va donc de même pour les différentes grandeurs qu'il engendre ; le mouvement de la charge est pris en compte par la technique de remaillage.

A noter que la masse de l'inducteur est calculée en fonction de ses dimensions et de sa masse volumique.

L'algorithme de résolution est présenté ci-dessous.

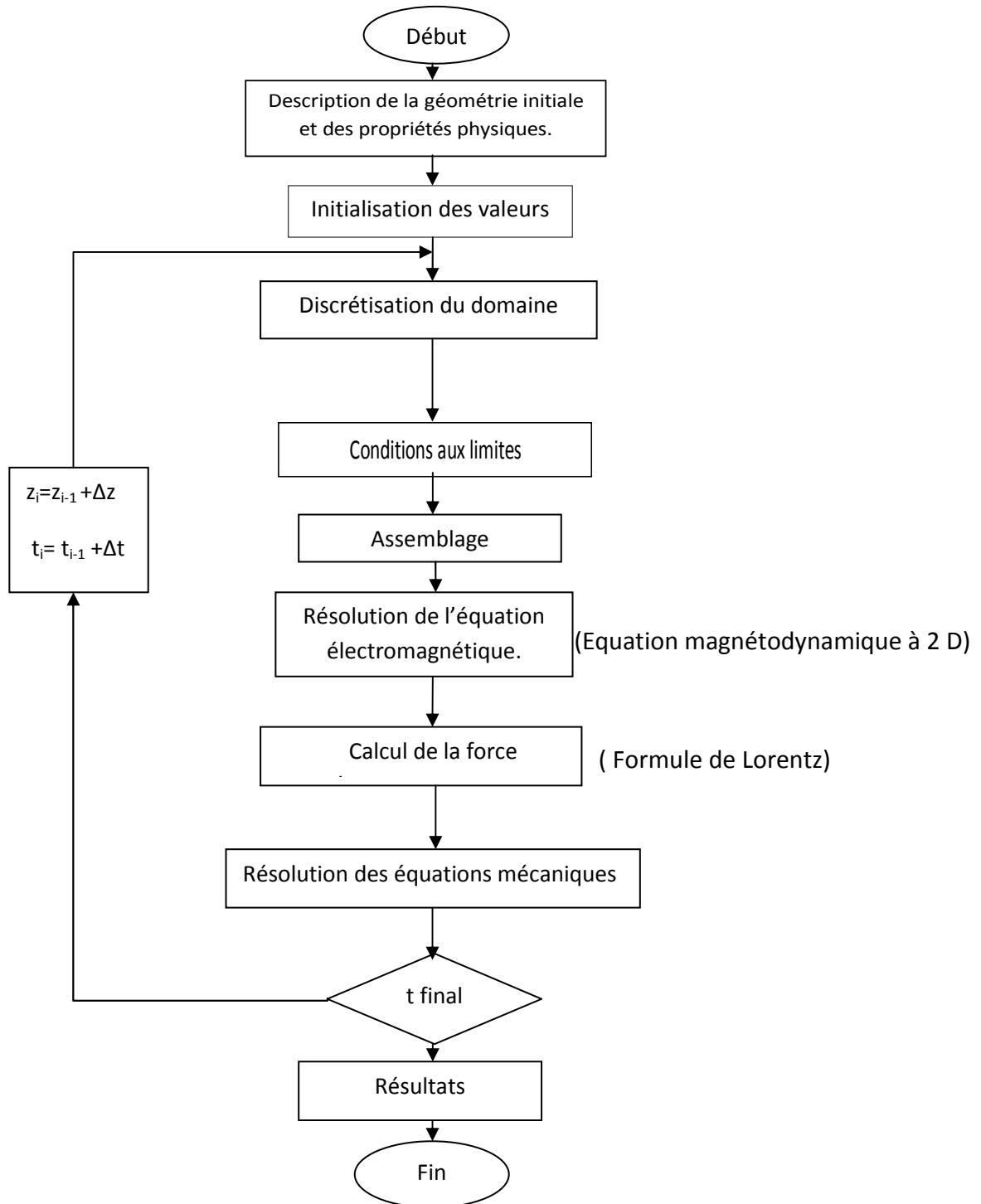


Figure III.18. Algorithme de résolution.

III.C.3. Maillage du dispositif :

Le maillage utilisé pour la résolution du problème en deux dimensions est de type triangulaire. Ses caractéristiques sont les suivantes :

Nombre d'éléments : $n_t=1460$;

Nombre de nœuds : $np = 774$.

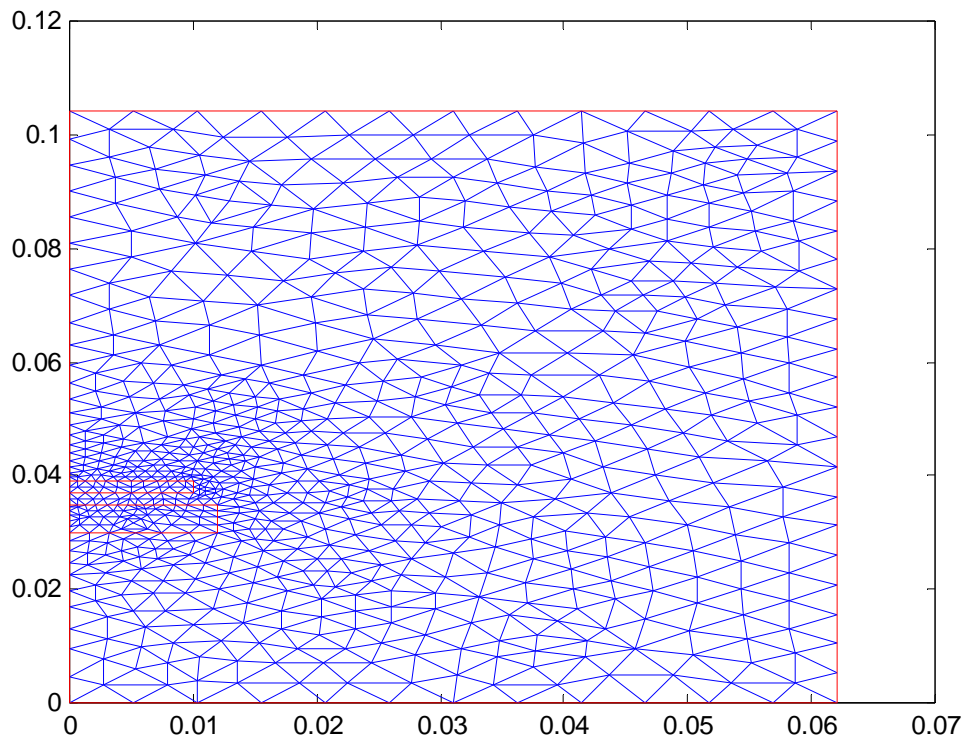


Figure III.19. Maillage du domaine.

Afin de mieux montrer le maillage de la zone occupée par l'objet d'étude, nous ajoutons la figure III.19.

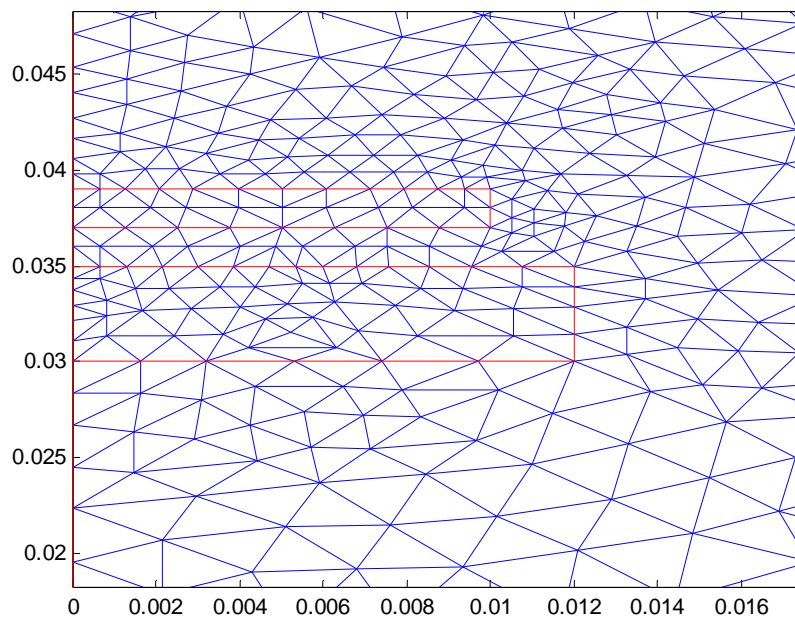


Figure III.20. Zoom sur une partie du maillage.

III.C.4. Allure des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique :

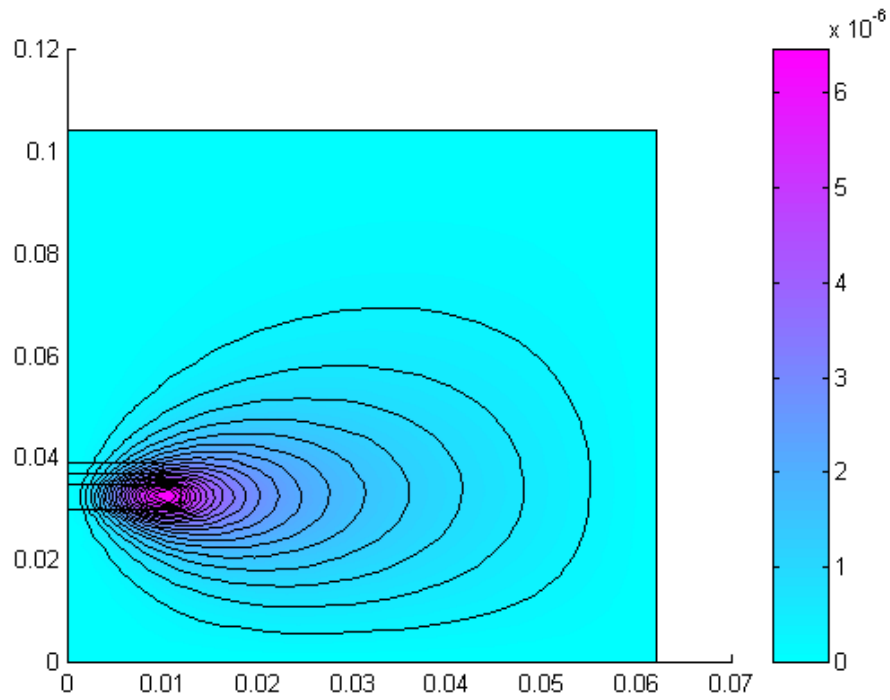


Figure III.21. Courbes des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique au démarrage.

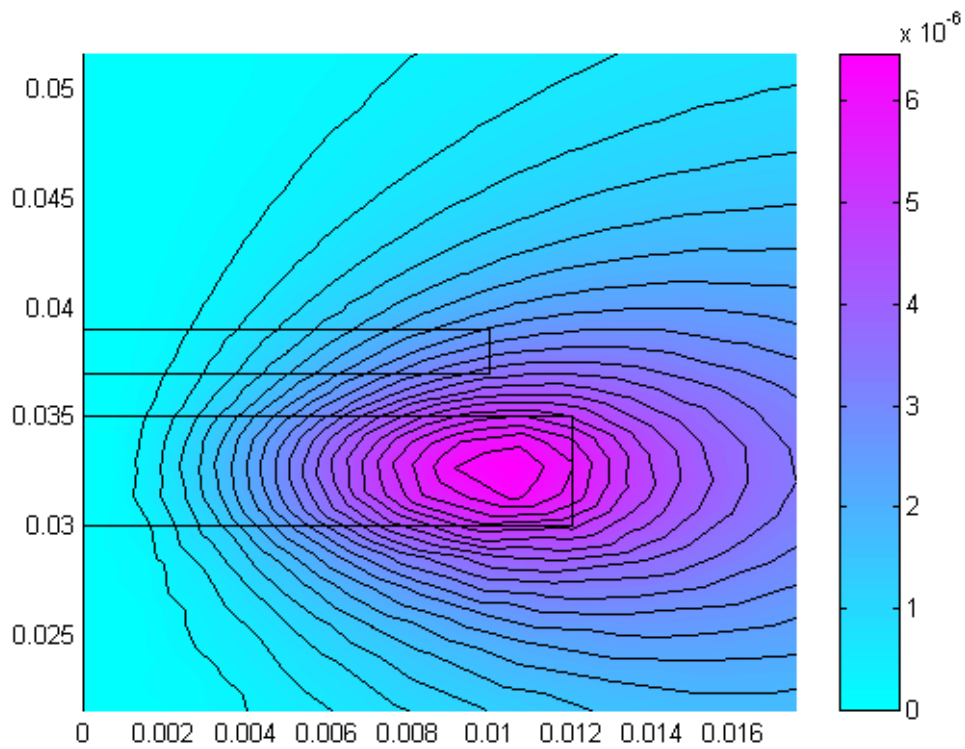


Figure III.22. Zoom sur la zone d'interaction.

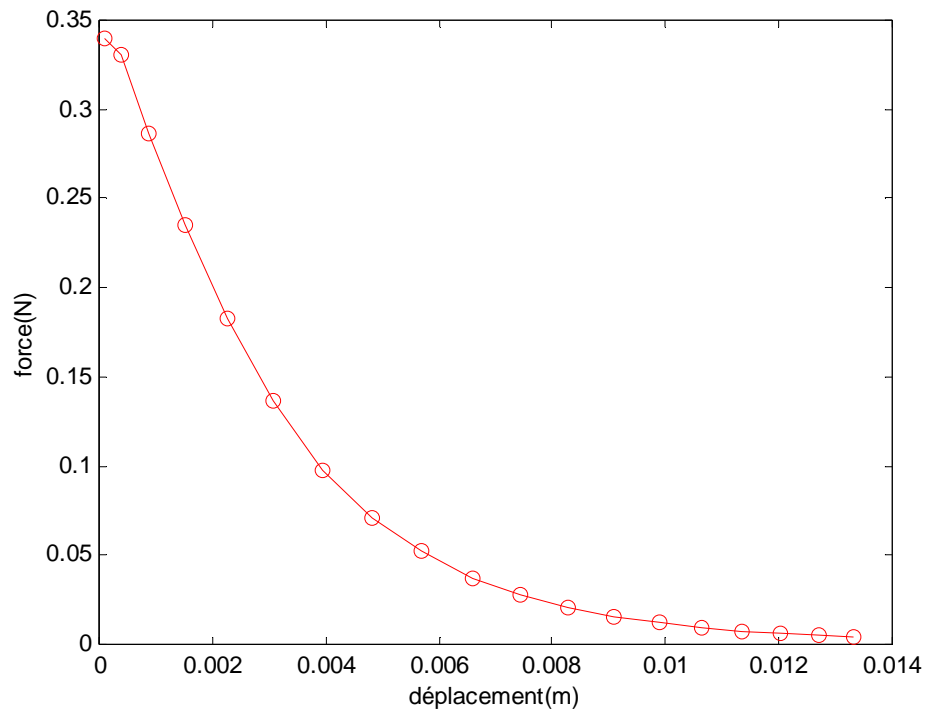


Figure III.23. Variation de la force magnétique en fonction du déplacement du disque.

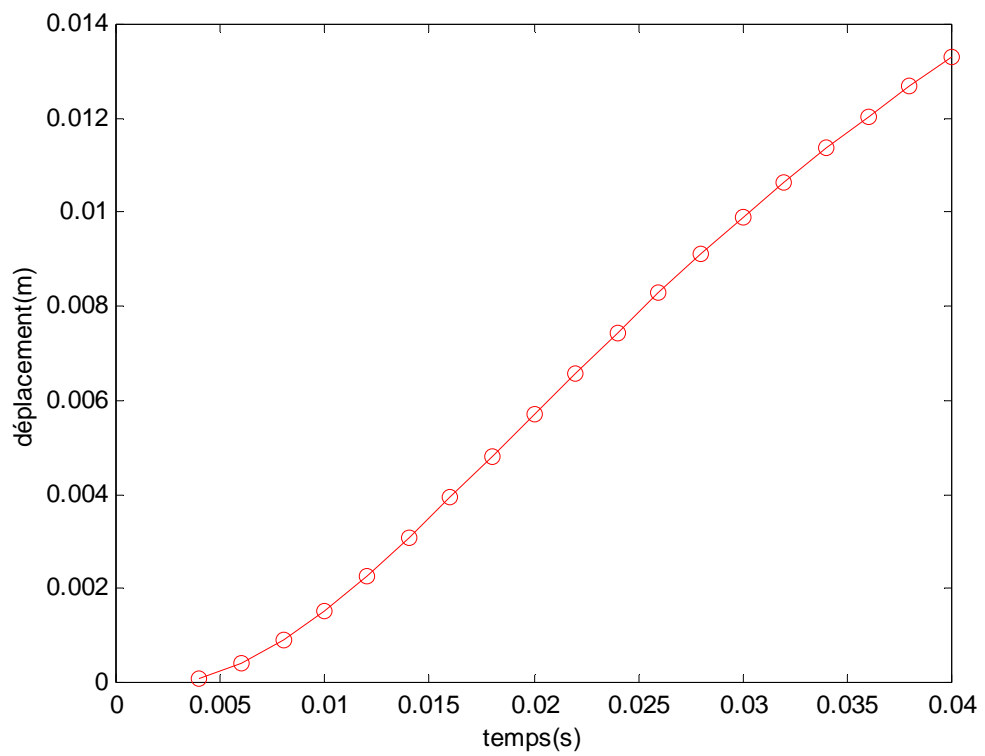


Figure III.24. Variation du déplacement en fonction du temps.

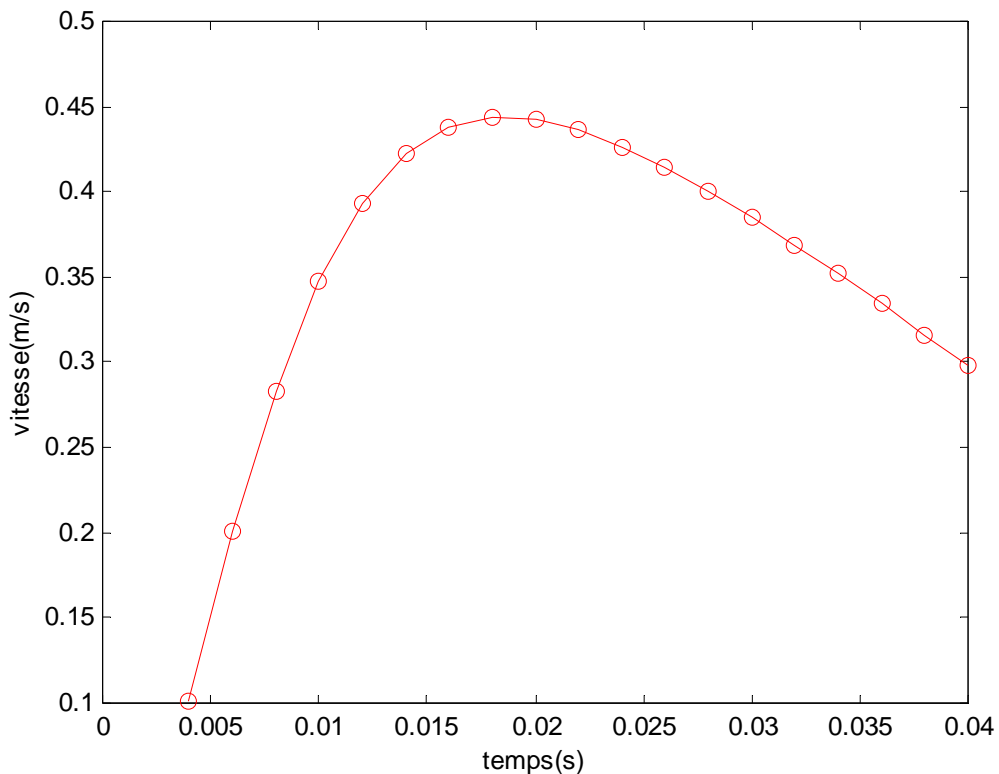


Figure III.25. Variation de la vitesse en fonction du temps.

III.C.6. Interprétation des résultats :

i. Maillage :

Nous avons remarqué que le nombre de triangles et le nombre de nœuds peut varier d'une itération à l'autre. Ceci est logique puisque la position initiale, en raison de la complexité de la géométrie et de la distribution du champ, nécessite un maillage plus élaboré et plus fin : le nombre de triangles et le nombre de nœuds sont alors plus grands.

ii. Grandeurs mécaniques :

En raison de la proximité du disque et de la bobine, le champ inducteur a un effet plus important et produit des courants induits de plus grandes valeurs. Cet effet va en diminuant à mesure que l'induit monte. Les conséquences essentielles sont expliquées ci-après.

- La force magnétique prend sa valeur maximale à proximité de la bobine. Elle diminue à mesure que le déplacement augmente – ou que le champ s'atténue.
- Les valeurs des déplacements élémentaires vont en s'accroissant, en raison de l'augmentation de la vitesse ; mais au-delà d'environ 10 ms, la conséquence de la diminution de la force commence à apparaître.

- La vitesse augmente sous l'effet de l'accélération due à la supériorité de la force magnétique par rapport au poids du disque. La diminution de cette force aboutit forcément à une valeur critique à partir de laquelle l'accélération change de signe, faisant diminuer la vitesse.

iii. Performances :

Des déplacements précis en des temps de l'ordre de quelques millisecondes peuvent être obtenus. Mais cette performance va en diminuant à mesure que le temps augmente (car la vitesse de déplacement diminue).

III.D. APPLICATION II:

Dans le domaine des applications des actionneurs, on trouve des aimants plutôt que des disques métalliques comme partie mobile. L'aimant permanent est soumis à l'action d'un champ magnétique créé par une bobine. L'action de répulsion entre l'électroaimant et l'aimant permettra, sous certaines conditions de soulever ce dernier.

III.D.1. Présentation du dispositif :

Ce deuxième dispositif que l'on se propose d'étudier est composé d'une bobine en forme d'anneau à l'intérieur de laquelle est placé un aimant permanent. Le champ exciteur est créé par un courant permanent : nous avons donc à résoudre un problème magnétostatique.

III.D.1.a. Structure géométrique :

Le dispositif étudié est constitué d'un inducteur axisymétrique, composé d'une bobine spirale en cuivre, en anneau, à l'intérieur duquel est posé un aimant cylindrique. La figure III.25 représente l'objet avec l'aimant en position haute.

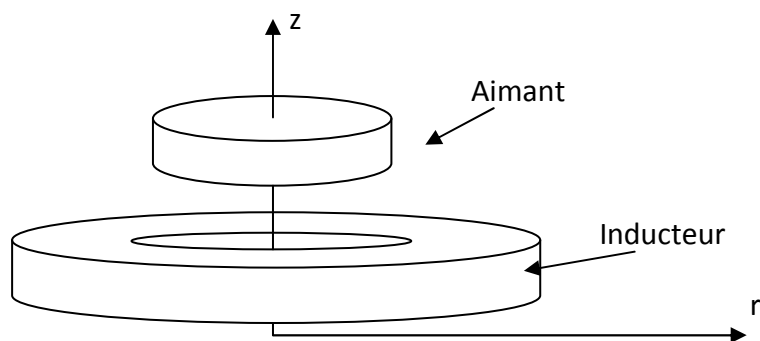


Figure III.26. Schéma représentant le dispositif étudié.

III.D.1.b. Dimensions géométriques :

Pour des raisons de symétrie, nous pouvons restreindre notre étude à un quart du dispositif. Le domaine considéré est représenté en figure III.27. Il est à deux dimensions (r, z).

Les dimensions sont :

- Inducteur : . rayon intérieur $r_i = 0.0012$ m
. rayon extérieur $r_e = 0.0025$
. épaisseur : $e = 0.005$ m
- Aimant : . rayon $r' = 0.01$ m
. épaisseur : $e' = 0.004$ m

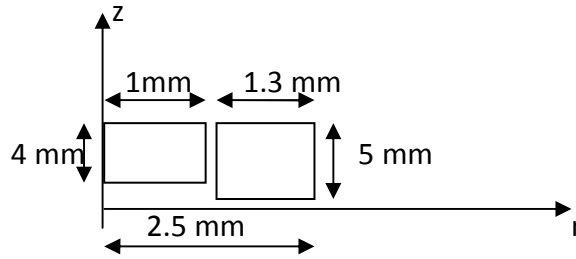


Figure III.27. Modèle géométrique du domaine d'étude.

III.D.1.c. Caractéristiques physiques :

- Air : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r=1$

Conductivité électrique : $\sigma_1=0$

- Inducteur : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r=1$

Conductivité électrique : $\sigma_2=5.85.10^7 (\Omega.m)^{-1}$

Densité de courant : $1.5.10^7 A/m^2$

- Aimant : Perméabilité magnétique relative : $\mu_r=1$

Conductivité électrique : $\sigma_3=0 (\Omega.m)^{-1}$

Masse : 5 g.

Aimantation : $M_z =5.85.10^5 A/m$.

III.D.1.d. Domaine de résolution et conditions aux

limites :

Le domaine de résolution est donc réduit à un quart du dispositif. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet sur les quatre frontières.

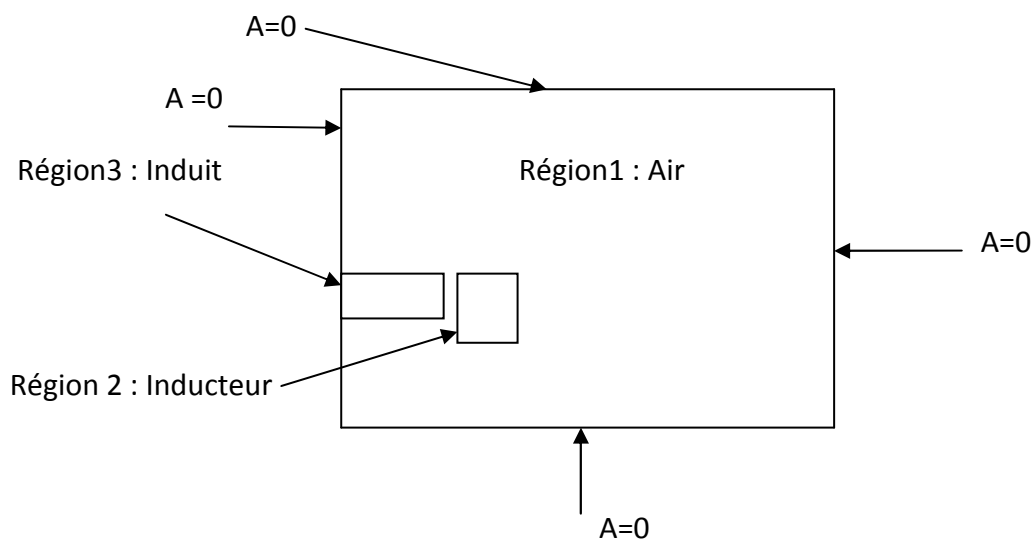


Figure III.28.a. Domaine de résolution et conditions aux limites.

La figure suivante (fig. III.28.b.) apporte des précisions sur les dimensions du domaine de résolution et du dispositif.

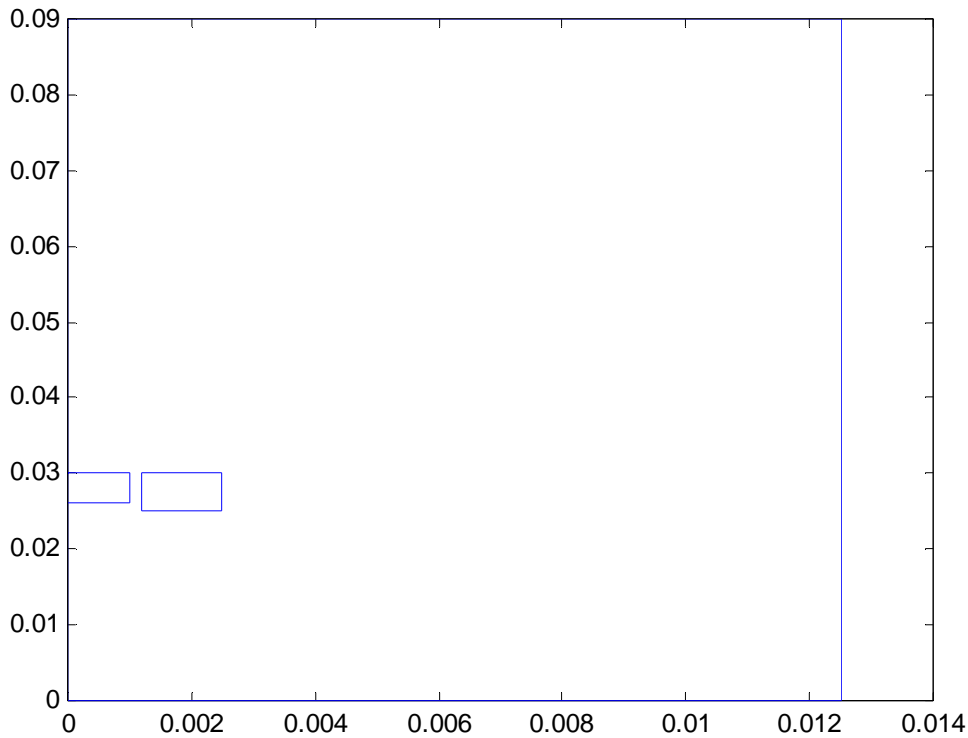


Figure III.28.b. Précisions géométriques sur le domaine de résolution.

III.D.2. Méthode de résolution :

La procédure de résolution est la même que celle décrite pour la précédente application.

Seulement, on introduira au même algorithme des équations et des paramètres qui ne sont pas toujours ceux du cas précédent.

Le modèle mathématique établi sera basé sur une formulation en fonction du potentiel vecteur magnétique.

La méthode des éléments finis sera aussi retenue pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Le code de calcul sera développé sous environnement MATLAB. La méthode de remaillage et le modèle de couplage alterné seront aussi retenus.

Pour le calcul de la force magnétique, on utilisera la formule de la variation de l'énergie magnétique. (Cf. I.14.)

Pour l'essentiel donc, le même algorithme de résolution sera appliqué. L'équation aux dérivées partielles donnant l'expression du potentiel vecteur magnétique, et l'expression de la force magnétique diffèrent.

III.D.3. Maillage du dispositif :

Le maillage utilisé pour la résolution du problème en deux dimensions est de type triangulaire. Ses caractéristiques sont les suivantes :

Nombre d'éléments : $nt=3288$;

Nombre de nœuds : $np = 1703$.

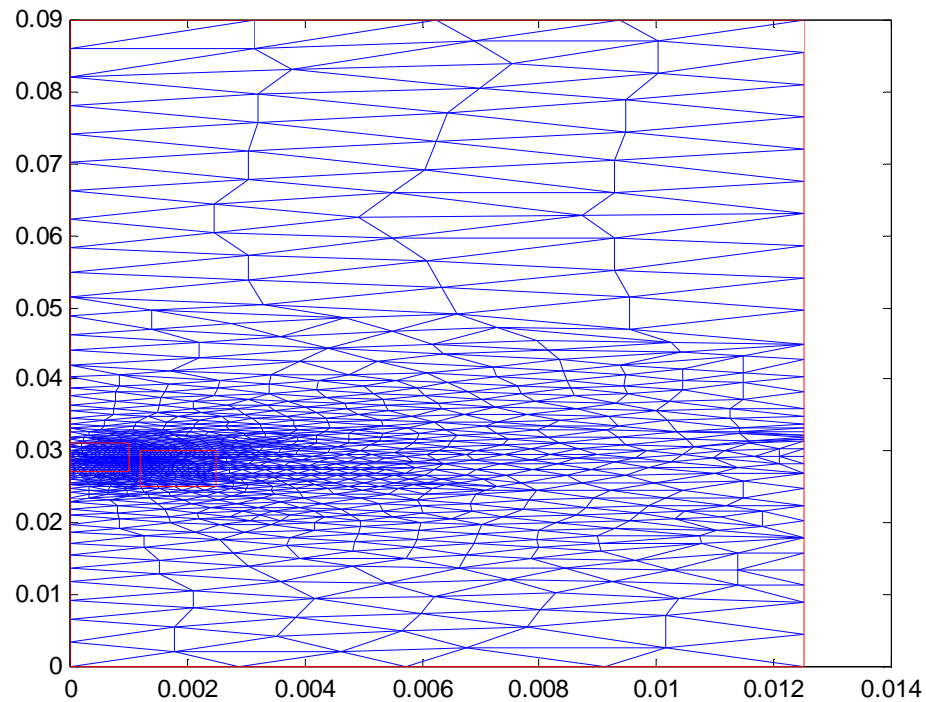


Figure III.29. Maillage du domaine.

Afin de mieux montrer le maillage de la zone occupée par l'objet d'étude, nous ajoutons la figure III.19.

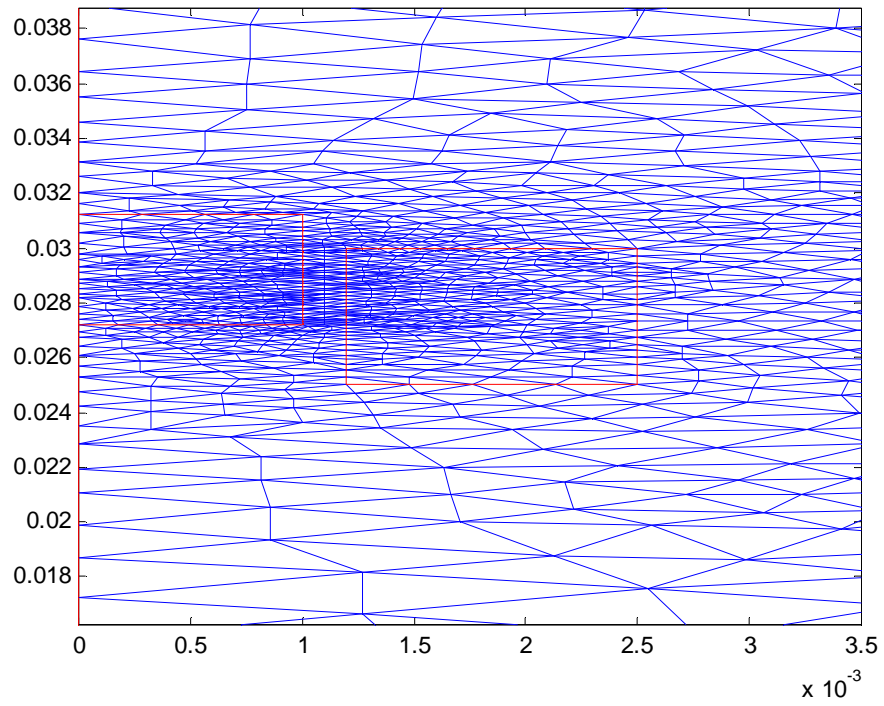


Figure III.30. Zoom sur une partie du maillage.

III.D.4. Allure des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique :

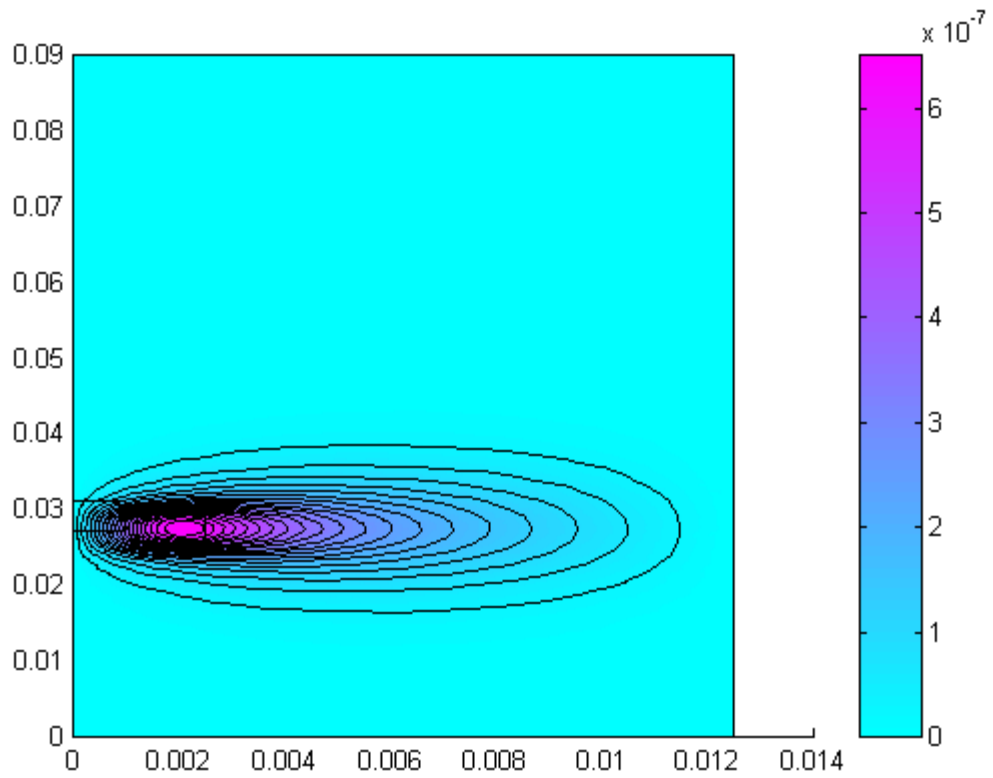


Figure III.31. Courbes des isovaleurs du potentiel vecteur magnétique au démarrage.

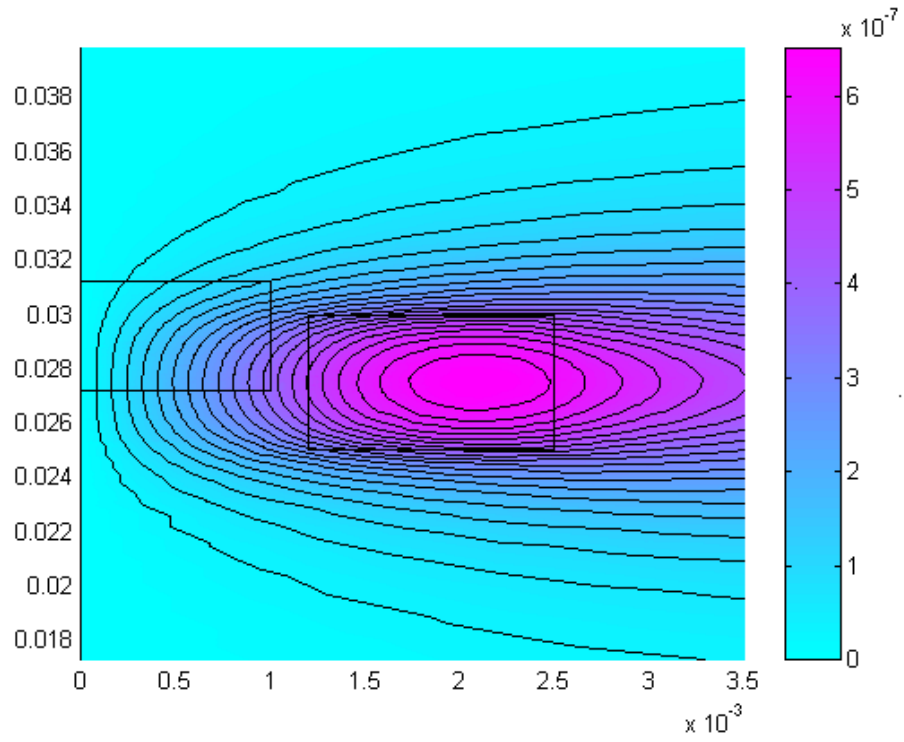


Figure III.32. Zoom sur la zone d'interaction.

III.D.5. Evolution des grandeurs mécaniques :

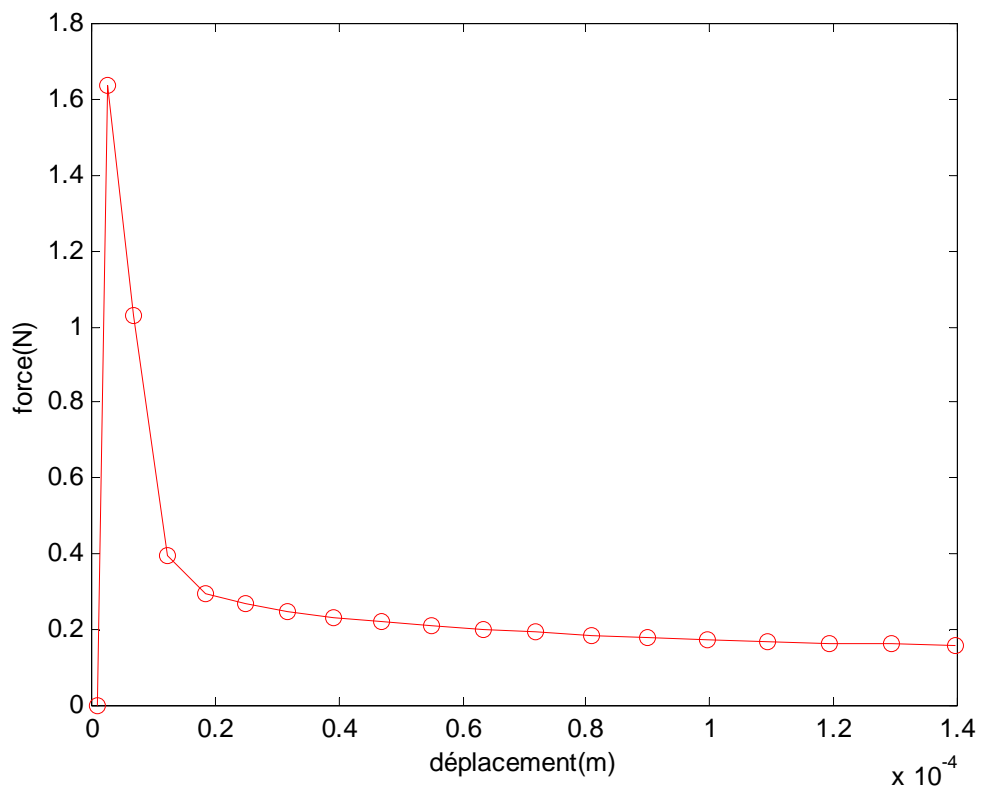


Figure III.33. Variation de la force magnétique en fonction du déplacement de l'aimant.

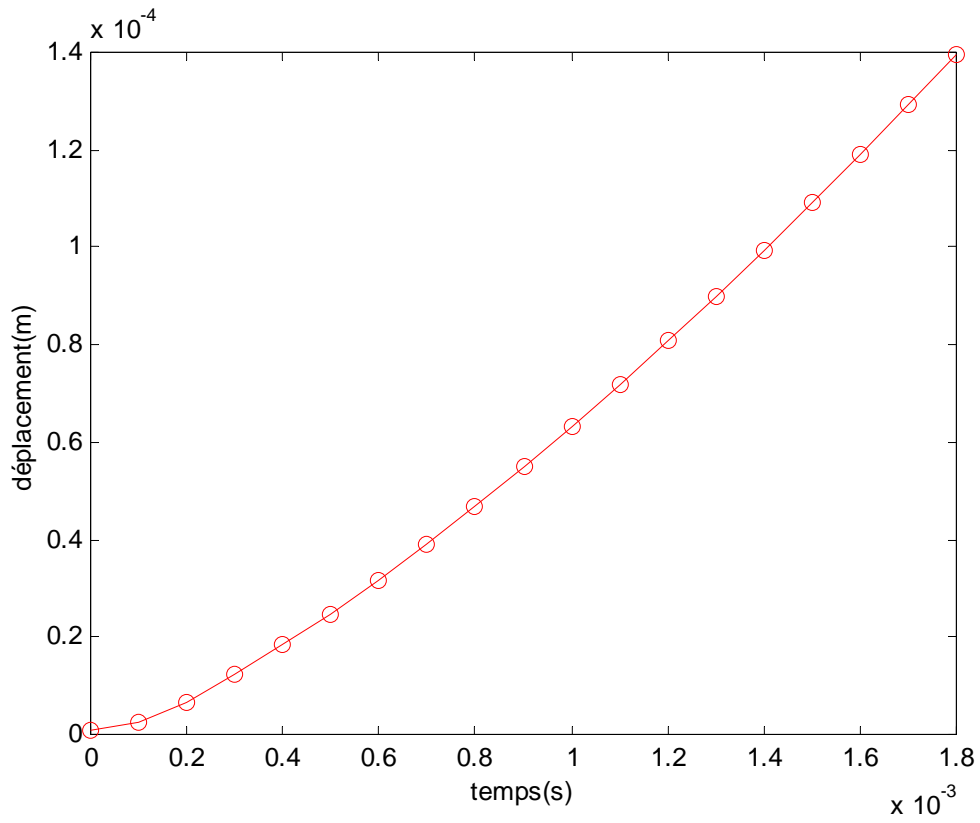


Figure III.34. Variation du déplacement en fonction du temps.

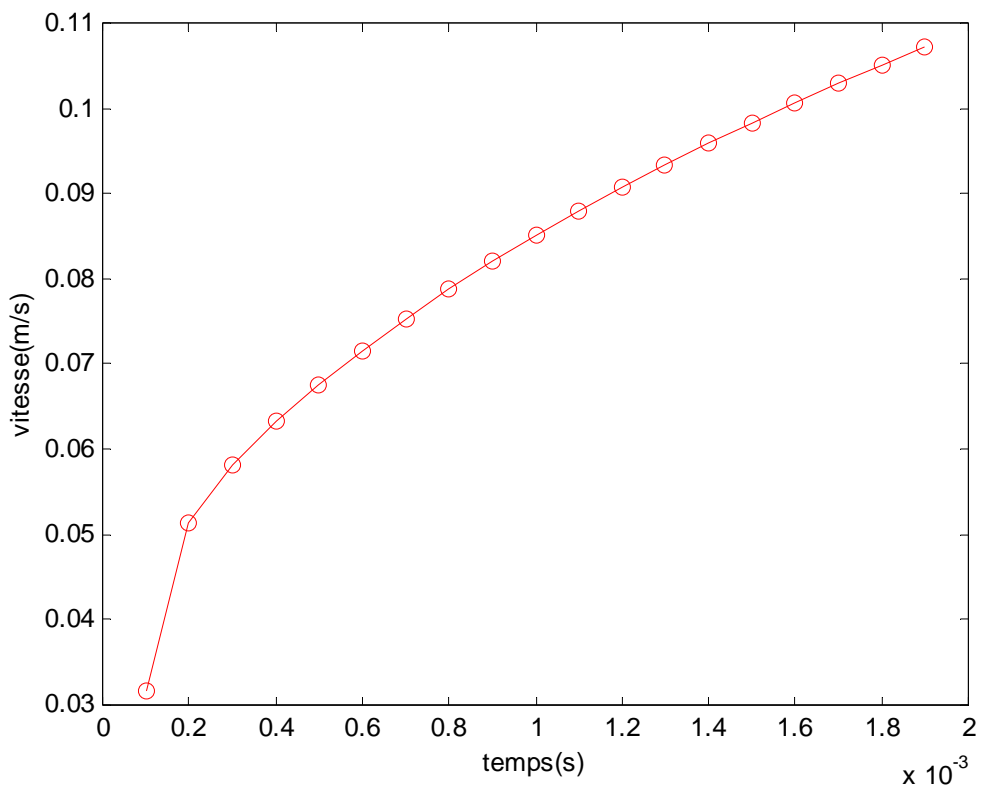


Figure III.35. Variation de la vitesse en fonction du temps.

III.D.6. Interprétation des résultats :

Maillage : Le nombre d'éléments et de nœuds reste ici aussi fonction de la position de l'élément mobile. Il en va de même pour le maillage.

Au départ, l'aimant est au maximum de son énergie potentielle. La force magnétique est alors au maximum de sa valeur dès le démarrage. L'aimant s'éloigne et se dirige vers des régions à potentiel descendant. La force diminue et avec elle la vitesse de déplacement ; car ici aussi, le poids de l'aimant s'oppose à la force magnétique et lorsqu'elle la dépasse en valeur, le mouvement est en décélération.

III.E.CONCLUSION :

Pour les deux applications, la première relevant d'un problème magnétodynamique, et la deuxième d'un problème magnétostatique, nous avons constaté une évolution semblable des grandeurs correspondantes. L'explication est, rappelons-le, la variation du champ magnétique en fonction de la position de la partie mobile de l'objet étudié.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les actionneurs magnétiques présentés dans notre travail sont de dimensions réduites. Les avantages qui en découlent sont multiples (coût, possibilité de miniaturisation,...). Même si les réalisations industrielles ne sont pas actuellement très nombreuses, les nouvelles technologies permettent de nouveaux espoirs, notamment par la fabrication d'aimants à faibles dimensions. Le choix s'est porté sur ceux à mouvement vertical.

Le travail a été entamé par des rappels des notions d'électromagnétisme et des équations de Maxwell, ce qui nous permet de cerner l'essentiel sur les équations aux dérivées partielles proches de nos deux applications ; on s'est particulièrement penché sur les modèles magnétostatique et magnétodynamique à deux dimensions. La formulation utilisée pour les deux cas est la formulation en fonction du potentiel vecteur magnétique ; les autres grandeurs en seront ensuite déduites. Des simplifications permises par la géométrie des dispositifs permettent une étude à deux dimensions en axisymétrique.

Nous avons ensuite passé en revue quelques méthodes numériques permettant la résolution de ces équations. Parmi elles, le choix s'est porté sur la méthode des éléments finis qui a fait ses preuves dans différents domaines de la technologie.

La résolution de l'équation différentielle, en chaque point du domaine, permet de résoudre l'équation mécanique et de trouver la force de répulsion induit-inducteur à chaque position du premier. Le modèle retenu pour la prise en compte du mouvement est la technique de remaillage. L'interaction entre les phénomènes électromagnétique et les phénomènes mécaniques est modélisée par la méthode de couplage alterné.

La résolution est effectuée sous environnement MATLAB.

Nous avons restreint notre étude à des durées faibles d'alimentation des bobines. Elles nous ont permis d'aboutir à des déplacements de quelques millimètres en quelques microsecondes pour la première application et de quelques dizaines de micromètres en moins de deux microsecondes pour la seconde. Cela donne une idée sur la large gamme d'actionneurs que l'on pourrait concevoir et (pourquoi pas) réaliser. Ils ne dépendent que du cahier des charges et des limites établies par la technologie.

L'étude des actionneurs et des micro-actionneurs est un domaine en pleine expansion. Des perspectives sont ouvertes par la miniaturisation permise par les nouvelles technologies ainsi que par l'étude d'actionneurs en positions asservies (stabilisées à des hauteurs fixes).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Azzoun, Tifrani et G. Yousfi. « Etude d'un électroaimant à supraconducteur. » Mémoire d'ingénieur. UMMTO-2006.
- [2] D. Amrani et M. Kebbas. « Modélisation d'un dispositif de lévitation magnétique à supraconducteur par la méthode des éléments finis en utilisant la formulation potentiel vecteur magnétique-champ-électrique ». Mémoire d'ingénieur. UMMTO-2002.
- [3] S. Yacine, et F. Saoula. « Machines synchrones linéaires à aimants permanents. » Thèse d'ingénieur. UMMTO-2006.
- [4] M. Hamama et M. Chérifi. « Etude des caractéristiques de dispositifs à supraconducteurs destinés à la lévitation magnétique et effet de la température. » Mémoire d'ingénieur. UMMTO-2005.
- [5] J.A. Edminister. « Electromagnétisme. Cours et problèmes. » Serie Schaum, McGraw-Hill-1985.
- [6] A. Diche. « Développement de modèles de transformation pour l'étude des capteurs à courants de Foucault. » Mémoire de magister. UMMTO-2003.
- [7] J.-C. Sabonnadière et J.-L. Coulomb. « Calcul des champs électromagnétiques. » Techniques de l'Ingénieur. D3020.
- [8] J.-L. Coulomb et J.-C. Sabonnadière. « CAO en électrotechnique. » Hermès-1985.
- [9] Annequin et Boutigny. « Cours de Physique. Electricité 2 mathématiques spéciales. Vuibert-1978.
- [10] H. Mohellebi. « Cours EE36. Master II. »
- [11] F. Hocini, M. Abdellah, M. Zaouia, H. Mohellebi. « Modèle de Couplage Electromagnétique-Mécanique pour l'étude en Régime Dynamique d'un Système Electromagnétique. » 1ere CNEA.SBA-2004.
- [12] G. Fournet. « Electromagnétisme. » Techniques de l'Ingénieur. D1020.
- [13] Y. Belkhiri. « Modélisation des Phénomènes Electromagnétiques et Mécaniques Couplés par la Méthode des Volumes Finis (CVM). » Mémoire de magister. Université de Batna.
- [14] H. Mohellebi. « Electromagnétisme. » Cours.
- [15] Bertrand du Peloux de Saint Romain. « Modélisation des actionneurs électromagnétiques par réseaux de reluctances. Création d'un outil métier dédié au prédimensionnement par optimisation. » Thèse de doctorat. Université J. Fourier-2007.
- [16] A. Chateaneuf. « Comprendre les éléments finis. » Technosup.
- [17] M.V.K. Chari et S.J. Salon. « Numerical methods in electromagnetism. » Academic Press-2000.

- [18] D. Euvrard. « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, la mécanique et des sciences de l'ingénieur : différences finies, éléments finis. » MASSON-1994.
- [19] H. Oudin. « Méthode des éléments finis. » (Polycopié).
- [20] Eric Blayo. « Notes de cours sur la méthode des éléments finis. » pdf.
- [21] Dhatt G., G. Touzot et E. Lefrançois. « Méthode des éléments finis. » Lavoisier-2005.
- [22] www.trouvez-tout.fr
- [23] www.energiesdemain.e-monsite.com
- [24] Z. Torki. « Etude d'un système de lévitation magnétique appliqué à la propulsion électromagnétique LE MAGLEV. » Mémoire de magister.EMP-2006.
- [25] S. Ighebriouène et M. Dahmani. « Modélisation par éléments finis des phénomènes couplés magnétiques-mécaniques en régime transitoire avec prise en compte du mouvement : application à un dispositif électrodynamique de lévitation (TEAM WORKSHOP PROBLEME 28). » Mémoire d'ingénieur. UMMTO-2004.
- [26] H. Allag. « Modèles et calcul des systèmes de suspension magnétique passive- Développements et calculs analytiques en 2D et 3D des interactions entre les aimants permanents. » Thèse de doctorat. Université de Grenoble-2010.
- [27] Journées UdPPC-2007, Paris. Lévitation.
- [28] www.epfl.ch/course
- [29] www.e-scio.net
- [30] <http://nelecocq.ovh.org/wp-content/uploads>
- [31] Sciences et Vie no 934. Juillet 95, p. 148.
- [32] F. Rapetti. « Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints. » Thèse de doctorat. Université Paris 6-2000.
- [33] Jiri Stepanek. « Commande et asservissement en lévitation d'un micro-actionneur magnétique bistable. » Thèse de doctorat. INP de Grenoble.
- [34] F. Tuaz. « Evolution dans la mise en œuvre des plasmas thermiques inductifs : choix du paramètre Fréquence. » Séminaire LRTI-IUT de Saint-Nazaire, 26 et 27 Avril 1992.