

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et Informatique
Département Automatique**

MEMOIRE DE MAGISTER

En Automatique

Option : Automatique des Systèmes Continus et Productique

Présenté par :

M^{elle} NAIT ABDESSELAM Aldjia

Ingénieur d'état en Automatique

Sujet :

**Résolution d'un problème de contrôle optimal
des systèmes dynamiques hybrides**

Mémoire soutenu le :

devant le jury d'examen composé de :

Président :	Said DJENNOUNE;	Professeur	UMMTO
Rapporteur :	Mohamed AIDENE ;	Professeur	UMMTO
Examineur :	Mohand OUANES;	Maître de conférences (A)	UMMTO
Examineur :	Redouane KARA ;	Maître de conférences (B)	UMBB
Examineur :	Ahmed MAIDI ;	Maître de conférences (B)	UMMTO

** Remerciements **

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Conception de Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur M. AIDENE, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, et encadreur de ce mémoire, pour sa disponibilité et ses nombreux conseils.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur S. DJENNOUNE, Professeur à l'UMMTO, pour sa disponibilité et l'aide précieuse qu'il m'a apporté dans la préparation de ce mémoire et qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Ma gratitude à Monsieur R. KARA Maître de conférences à l'université UMBB ,pour son aide , son orientation sa disponibilité et pour toute la documentation qu'il ma fournit. Il m'a fait l'honneur d'avoir accepté d'être examinateurs de ce memoire.

Je remercie Monsieur A. MAIDI Maître de conférences à l'UMMTO, et Monsieur M. OUANES Maître de conférences à l'UMMTO, pour avoir accepté d'être examinateur de ce memoire.

Je tiens particulièrement à remercier mes parents qui sont à l'origine de ma formation , pour leur soutien et leur aide. Merci aussi à toute ma famille, mes collègues, mes amis(es) pour leurs encouragements.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

- * *Ma chère famille;*
- * *Mes amis(es).*

NAIT ABDESSELAM ALDJIA.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	5
1 Résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée	8
1.1 Introduction	8
1.2 Position du problème:	9
1.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle:	10
1.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité:	11
1.4.1 Critère d'optimalité:	11
1.4.2 Critère de suboptimalité:	12
1.4.3 Le problème dual	13
1.4.4 Décomposition de la valeur de suboptimalité	15
1.5 Méthode de résolution	16
1.5.1 Changement de plan	16
1.5.2 Changement de support	18
1.5.3 Algorithme	21
1.6 Exemple 1.1:	22
1.7 Conclusion	24
2 Résolution d'un problème de contrôle optimal par la méthode adaptée	25
2.1 Introduction	25
2.2 Position du problème	25
2.2.1 Support contrôle (Commande appui)	28
2.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle	29
2.3.1 Valeur de suboptimalité	30
2.3.2 Critère d'optimalité	31

2.3.3	Critère de suboptimalité	33
2.4	Méthode de résolution	36
2.4.1	Changement de commande:	37
2.4.2	Changement de support:	38
2.4.3	Algorithme	40
2.5	Exemple 2.1:	41
2.6	Conclusion	44
3	Généralités sur les systèmes dynamiques hybrides	45
3.1	Introduction	45
3.2	Définition d'un système hybride:	46
3.3	Classification des systèmes hybrides:	46
3.3.1	Système hybride à commutation autonome:	48
3.3.2	Système hybride à saut autonome:	50
3.3.3	Système hybride à commutations contrôlées:	51
3.3.4	Système hybride à saut contrôlé:	52
3.4	Modélisation des systèmes dynamiques hybrides:	53
3.4.1	Modélisation des SDH par les réseaux de Petri hybrides:	53
3.4.2	Modélisation des SDH par les automates hybrides:	54
3.4.3	Modélisation des SDH par les systèmes à interface:	56
3.5	Commande des systèmes dynamiques:	57
3.5.1	Formulation du problème de commande:	58
3.5.2	La programmation dynamique et les équations HJB	60
3.5.3	Principe du maximum pour les SDH:	60
3.5.4	Calcul des variations:	62
4	Résolution d'un problème de contrôle optimal d'une classe de systèmes dynamiques hybrides par la méthode adaptée	65
4.1	Introduction	65
4.2	Problème à coût final:	65
4.2.1	Formulation du problème de commande:	66
4.2.2	Support contrôle:	70
4.2.3	Méthode de résolution:	70
4.2.4	Changement de commande:	71
4.2.5	Changement de support:	72
4.2.6	Optimisation des instants de commutation:	75

4.2.7	Exemple 4.1:	76
4.3	Problème à erreur terminale	80
4.3.1	Formulation du problème de commande	80
4.3.2	Support contrôle:	81
4.3.3	Formule d'accroissement de la fonctionnelle:	82
4.3.4	Changement de commande:	85
4.3.5	Changement de support:	87
4.3.6	Exemple 4.2:	89
	Conclusion générale	93
	Bibliographie	95
	Annexe	99

Notations

L : la fonction coût.

F : la matrice de transition.

$\Delta(t)$: le vecteur des estimations ou la co-commande.

y : le vecteur des potentiels.

Φ : la fonction dual.

β : la valeur de suboptimalité.

θ : le pas de changement de commande.

σ : le pas de changement de support.

ψ : la solution du système conjugué: $\dot{\psi} = -A'\psi$.

G : la solution de l'équation $\dot{G} = -G(t)A$.

τ : instant ou ensemble des instants de commutation.

f : le champ de vecteurs.

X : espace d'état continu.

Q : espace d'état discret.

T_{sup} : l'ensemble des instants du support.

T_N : l'ensemble des instants de non support.

u : la commande constante par morceaux.

$w(t)$: la pseudo-commande.

$l(t)$: la direction de changement de commande.

$\Delta\delta(t)$: les variations de la co-commande.

Introduction générale

Historiquement, les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie. C'est ainsi que G.B.Dantzig propose en 1947 le terme de Programmation Linéaire [15, 16], pour l'étude des problèmes théorique et algorithmique liés à l'optimisation des fonctions linéaires sous contraintes linéaires. L'apparition de systèmes à structure complexe a motivé le développement de la théorie du calcul des variations [10], devenue plus tard, la théorie du contrôle optimal [12, 20, 31].

Cette théorie, a connu un véritable essor depuis les années cinquante avec la découverte d'outils puissants tels que le principe du maximum de Pontryaguin, formulé par L.S.Pontryaguin en 1956 [30], qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations, et le principe de programmation dynamique de R. Bellman [5]. L'objectif peut être est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations, ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation.

Avec le développement des systèmes automatisés, les problèmes issus de l'industrie sont de plus en plus riches en problèmes de contrôle. Les applications de la théorie du contrôle optimal sont de ce fait extrêmement nombreuses dans des domaines très différents tels que l'aéronautique, l'automatique, la robotique, la biologie, etc.

L'automatique s'est intéressée dès ces origines à l'étude et la commande des systèmes physiques généralement représentés par un modèle dynamique continu [17], modélisé par un ensemble d'équations différentielles, ou par un modèle à événements discrets [13, 29], défini par une séquence d'événements qui provoque la transition entre un nombre fini d'états. Chacun de ces domaines a créé un ensemble de théories et de méthodes et développé des solutions performantes pour régler les problèmes qui se posent [1, 20, 44, 47, 48]. Les progrès de la technologie tels que, les ordinateurs plus rapides et les capteurs plus fiables ont conduit l'homme à construire des systèmes plus complexe. Cependant, l'application de méthodes rigoureuses pour traiter les aspects continus d'une part, et les aspects événementiels d'autre part, ne saurait garantir la qualité du système global tant que les interactions entre ces deux aspects ne sont pas prise en compte. Donc, la combinaison des deux aspects continu et discret dans un même modèle est indispensable, d'où la notion de

modèle hybride. De manière générale, les systèmes dynamiques faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continue et événementielle sont appelés systèmes dynamiques hybrides (SDH)[7, 29, 34, 57].

L'intérêt porté à ce type de systèmes a grandi ces dernières années, du fait de leur présence dans un nombre important de domaines d'applications, comme par exemple, ceux de l'aéronautique, la robotique, l'électronique de puissance, les systèmes de transport, les systèmes flexibles de production, etc.

Le contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides est un domaine de recherches relativement récent et en plein essor. Cependant, contrairement au contrôle des systèmes continus, pour lesquels les problèmes sont bien identifiés, celui des systèmes hybrides manque à l'heure actuelle d'un cadre théorique unifié. Une difficulté majeure est d'arriver à concilier le caractère à la fois continu et discret de ces systèmes. En effet, même si la dynamique continue dans un mode donné de l'automate hybride est bien connue, les transitions discrètes entre les modes peuvent engendrer des phénomènes inattendus, sur lesquels les solutions au sens classique ne sont pas définies.

Un certain nombre de travaux ont été effectués dans ce domaine, en utilisant les méthodes issues de la commande optimale des systèmes dynamiques continus, tels que le principe de maximum de Pontryaguin [20, 30], le principe de la programmation dynamique [5, 4, 3] et le calcul des variations [31, 42]. Cependant, cette théorie classique pour les systèmes continus, ne peut s'appliquer directement aux problèmes hybrides, les résultats doivent être adaptés pour prendre en compte les discontinuités apparaissant dans les systèmes hybrides, ce qui rend sa résolution très complexe, voir [2, 6, 8, 9, 14, 27, 39, 40, 54, 55].

Une autre approche pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, a été proposée par R. Gabasov et F.M. Kirillova dans les années 80, appelée méthode adaptée de la programmation linéaire. Cette méthode est une généralisation de la méthode de simplexe [15, 16], à l'opposé de celle-ci, la méthode adaptée atteint l'optimum du problème en passant par l'intérieur de l'ensemble des solutions réalisables. Elle a été utilisée avec succès pour résoudre des problèmes de programmation linéaire [21], ensuite à la résolution des problèmes de contrôle optimale des systèmes continus [22, 36, 37, 38, 49].

Dans notre travail, nous proposons d'adapter cette méthode à la résolution d'un problème de contrôle de système dynamique hybride. Nous nous intéressons plus particulièrement à une classe de systèmes hybrides dont la partie continue est représentée par une structure de système continu linéaire évoluant sur un espace d'état délimité par des spécifications de fonctionnement (contraintes sur l'état). Ainsi, l'évolution du système peut être décrite par une équation différentielle linéaire et par des commutations entre les

différentes dynamiques continues.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres:

Le premier chapitre consiste à étudier la mise en oeuvre de la méthode adaptée. L'originalité de cette approche est d'utiliser la notion du support, l'outil principal de la méthode pour résoudre des problèmes classiques de la programmation linéaire.

Dans le deuxième chapitre, on étudie le problème de commande optimale d'un système dynamique continu, en utilisant le principe de la méthode adaptée de la programmation linéaire. Le problème peut être soumis à un certain nombre de contraintes: sur l'état et sur la commande.

Le troisième chapitre consiste à présenter les systèmes dynamiques hybrides. Une classification de ces systèmes est proposée par M.S.Branicky en fonction des types de phénomènes hybrides considérés. Chaque classe est illustrée par un exemple. Ensuite, différents moyens de représentation des systèmes dynamiques hybrides ont été présentés, ainsi que les principales approches utilisées pour résoudre les problèmes de commande optimale.

Le quatrième chapitre a pour objectif d'étendre la méthode étudiée dans le chapitre I et II à la résolution de deux problèmes de contrôle optimal d'une classe de système dynamique hybride à commutation de modèle autonome. Le premier consiste à résoudre un problème à coût final et le deuxième, est un problème à erreur terminale. Il s'agit de déterminer la commande constante par morceaux et les instants de commutation permettant d'approcher au mieux un état désiré à l'instant final donné. Deux exemples de systèmes mécaniques ont été traités, en supposant le premier exemple à plusieurs instants de commutation et le deuxième à un seul instant de commutation.

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale sur ce qui a été fait et des perspectives de continuation de ce travail.

Chapitre 1

Résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée

1.1 Introduction

En mathématique, les problèmes de programmation linéaire sont des problèmes d'optimisation où la fonction objective et les contraintes sont toutes linéaires. En 1947, G. B. Dantzig a proposé la méthode de simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire [15, 16], en construisant tout d'abord une solution réalisable qui est un sommet d'un polytope puis on se déplace selon les arêtes de ce polytope pour atteindre des sommets pour lesquels la valeur de l'objectif est de plus en plus grande jusqu'à atteindre l'optimum.

En 1979, Leonid Khachiyan a proposé un algorithme polynomial [32] pour la programmation linéaire, basé sur la méthode de l'ellipsoïde en optimisation non linéaire. Cependant, l'efficacité pratique de cet algorithme est décevante : l'algorithme de simplexe est pratiquement toujours plus performant. En revanche, ce résultat a encouragé la recherche dans les méthodes de points intérieurs. En 1984, Narendra Karmarkar propose un algorithme de point intérieur [35]. C'est le premier algorithme polynomial efficace à la fois en théorie et en pratique. Depuis lors, plusieurs méthodes de points intérieurs ont été proposées et étudiées.

Une généralisation de la méthode du simplexe a été faite par R.Gabasov et F.M.Kirillova dans les années 80 [21], appelée méthode adaptée, c'est une méthode de point intérieur permettant une résolution particulièrement rapide des problèmes linéaires, en tenant compte des contraintes générales et simples, et sans introduire des variables d'écart pour transformer les contraintes simples. Cet algorithme évolue à l'intérieur de l'ensemble des solutions

admissibles et ne rejoint son bord qu'à la convergence.

Dans ce chapitre, nous rappelons le principe de la méthode adaptée, en étudiant un problème classique de la programmation linéaire avec contraintes. L'avantage principal de cette méthode est le fait de définir un plan d'appui comme étant la paire constituée d'un plan admissible quelconque et un appui du problème, ce qui permet de résoudre le problème en deux étapes : le changement du plan et le changement du support (d'appui).

1.2 Position du problème:

Considérons le problème de maximisation de la fonctionnelle:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sous les contraintes suivantes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ d_{*1} \leq x_1 \leq d_1^*, \dots, d_{*n} \leq x_n \leq d_n^*, \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $J = \{1, 2, \dots, n\}$ est l'ensemble d'indices des variables x_1, x_2, \dots, x_n ; $I = \{1, 2, \dots, m\}$ est l'ensemble d'indices des paramètres b_1, b_2, \dots, b_m . Introduisons le vecteur $x(J) = (x_j, j \in J) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $c = c(J)$, $b = b(I)$, $d_* = d_*(J)$, $d^* = d^*(J)$ et la matrice $A = A[I, J] = (a_{ij}, i \in I, j \in J)$, avec $\text{rang} A = m$, $m \leq n$.

Alors le problème (1.1) prend la forme suivante:

$$\begin{cases} L(x) = c'x \longrightarrow \max, \\ Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*, \end{cases} \quad (1.2)$$

Le domaine admissible est défini comme suit:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, \quad d_* \leq x \leq d^*\}$$

Le vecteur x de l'ensemble X est dit plan du problème (1.2) s'il vérifie à la fois la contrainte générale ($Ax = b$) et la contrainte simple ($d_* \leq x \leq d^*$)

Définition 1.1. Un plan x^0 du problème (1.2) est dit plan optimal s'il vérifie :

$$L(x^0) = \max L(x).$$

Définition 1.2. Un plan x^ϵ est dit epsilon-optimal si et seulement si:

$$L(x^\epsilon) - L(x^0) \preceq \epsilon.$$

Où ϵ est un nombre réel positif.

Définition 1.3. L'ensemble $J_{sup} \subset J, |J_{sup}| = m$ est dit support des contraintes du problème (1.2), et la matrice $P = A[I, J_{sup}]$ la matrice du support, si P est inversible

La contrainte générale $Ax = b$ peut être donnée sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} Px_{sup} + A[I, J_N]x_N &= b, \quad x_N = \{x_j, j \in J_N\}, J_N = J \setminus J_{sup}, \\ x_{sup} &= P^{-1}(b - A_N x_N), \quad A_N = A(I, J_N). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nous pouvons introduire la notation suivante:

$$Q = Q(J_{sup}, I) = P^{-1}.$$

Le principe de la méthode adaptée de la programmation linéaire est que le support change avec le changement de la solution admissible, d'où la définition suivante:

Définition 1.4. La paire $\{x, J_{sup}\}$ formée d'un plan x et du support J_{sup} est dite support plan du problème (1.2).

Définition 1.5. Un plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est dit non-dégénéré si $d_{*j} \prec x_j \prec d_j^*, j \in J_{sup}$, $x_j, j \in J$ étant la j -ème composante du vecteur x

1.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle:

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan d'appui du problème, considérons le nouveau plan $\bar{x} = x + \partial x$
Calculons la formule d'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta L(x) = L(\bar{x}) - L(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\partial x, \quad (1.4)$$

Comme x est un plan d'appui du problème, alors on a:

$$A\partial x = A(\bar{x} - x) = A\bar{x} - Ax = b - b = 0, \quad (1.5)$$

Or

$$P\partial x_{sup} + A_N \partial x_N = 0,$$

Et

$$\partial x_{sup} = -QA_N \partial x_N. \quad (1.6)$$

Ainsi, pour tout $\partial x_N = (\partial x_j, j \in J_N)$ et $\partial x_{sup} = (\partial x_j, j \in J_{sup})$, on obtient le vecteur $\partial x = (\partial x_{sup}, \partial x_N)$ De la, la formule d'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta L(x) = c'_{sup} \partial x_{sup} + c'_N \partial x_N = -(c'_{sup} Q A_N - c') \partial x_N. \quad (1.7)$$

Le vecteur

$$\Delta' = (\Delta_j, j \in J) = c'_{sup} Q A - c'. \quad (1.8)$$

est appelé co-plan ou vecteur d'estimation, il est évident qu'il est égal à zéro pour les composantes du support ou d'appui:

$$\Delta'_{sup} = c'_{sup} Q P - c'_{sup} = c'_{sup} - c'_{sup} = 0,$$

Pour calculer les composantes de non-support du co-plan, il est nécessaire d'utiliser le vecteur des potentiels:

$$u' = c'_{sup} Q, \quad (1.9)$$

Alors nous avons:

$$\Delta'_N = u' A_N - c'_N, \quad (1.10)$$

Or

$$\Delta_j = u' a_j - c_j, j \in J_N, \quad (1.11)$$

Avec $a_j = A[I, j]$ est la j -ème colonne de la matrice A.

De (1.7) et (1.8) l'expression de l'accroissement de la fonctionnelle s'écrit:

$$\Delta L(x) = -\Delta'_N \partial x_N = - \sum_{j \in J_N} \Delta_j \partial x_j. \quad (1.12)$$

1.4 Critère d'optimalité et de suboptimalité:

1.4.1 Critère d'optimalité:

Théorème 1.1. [21] *Les relations:*

$$\begin{cases} x_j = d_{*j} & \text{si } \Delta_j \succeq 0, \\ x_j = d_j^* & \text{si } \Delta_j \preceq 0, \\ d_{*j} \prec x_j \prec d_j^*, & \text{si } \Delta_j = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

sont suffisantes, et dans le cas de non-dégénérescence, elle sont nécessaires pour l'optimalité du plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ du problème (1.2).

Preuve. Condition suffisante:

Supposons que les relations (1.13) sont vérifiées pour un plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ du problème (1.2), de (1.12) on tire: $\Delta L(x) = 0$ ce qui implique que $\{x, J_{sup}\}$ est un plan d'appui du problème.

Condition nécessaire:

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan d'appui non-dégénéré du problème (1.2), Supposons que x est optimal et que les relations (1.13) ne sont pas vérifiées, c'est à dire qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$, tel que:

$$\Delta_{j_0} \succ 0, \quad x_{j_0} \neq d_{*j_0} \quad \text{ou} \quad \Delta_{j_0} \prec 0, \quad x_{j_0} \neq d_{j_0}^*$$

Construisons un nouveau plan \bar{x} de la manière suivante: $\bar{x} = x + \theta l$ où θ est un nombre réel positif non nul et l est un vecteur défini par:

$$l_j = 0, j \in J_N \setminus j_0, \quad l_{j_0} = \begin{cases} d_{*j_0} - x_{j_0}, & \text{si } \Delta_{j_0} \succ 0 \\ d_{j_0}^* - x_{j_0}, & \text{si } \Delta_{j_0} \prec 0 \end{cases}$$

Et comme $Al = 0$, on aura:

$$l[J_B] = -QA[I, J_N]l[J_N].$$

Comme le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est non dégénéré, on peut trouver $\theta \succ 0$ tel que $\bar{x} = x + \theta l$ soit un plan d'appui du problème (1.2). Et posant $\bar{x} = x + \theta l$, on remplace dans la formule (1.12), on obtient: $L(x + \theta l) - L(x) = -\theta \Delta' l = -\theta \Delta'_{j_0} l_{j_0} \succ 0$ ce qui contredit l'optimalité du plan x

1.4.2 Critère de suboptimalité:

Le maximum de la fonction $\Delta L(x)$ sous les contraintes suivantes:

$$d_{*j} \preceq \bar{x}_j = x_j + \partial x_j \preceq d_j^*, \quad j \in J_N.$$

est atteint pour:

et est égal à

$$\beta = \beta(x, J_{sup}) = \left[\sum_{\Delta_j \succ 0, j \in J_N} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \sum_{\Delta_j \prec 0, j \in J_N} \Delta_j (x_j - d_j^*) \right]. \quad (1.14)$$

appelée valeur de suboptimalité du plan du support $\{x, J_{sup}\}$. De là, on a toujours

$$L(x^0) - L(x) \leq \beta(x, J_{sup}). \quad (1.15)$$

Théorème 1.2. [21] Si $\beta(x, J_{sup}) \leq \epsilon$ alors x est ϵ - optimal.

Preuve. Si $\beta(x, J_{sup}) \leq \epsilon \implies L(x^0) - L(x) \leq \epsilon$, c'est à dire que x^0 est ϵ - optimal.

1.4.3 Le problème dual

Soit $\{x^0, J_{sup}^0\}$ plan d'appui satisfaisant le critère d'optimalité (1.13). Soit u^0 le vecteur des potentiels tel que $u'^0 = c'_{sup}Q$, correspondant au support J_{sup}^0 .

En utilisant (1.11) et (1.13) nous avons:

$$\begin{aligned} a'_j u^0 - c_j &\succeq 0 \text{ pour } x_j = d_{*j}, \\ a'_j u^0 - c_j &\preceq 0 \text{ pour } x_j = d_j^*, \\ a'_j u^0 - c_j &= 0 \text{ pour } d_{*j} \prec x_j \prec d_j^*, \quad j \in J_N, \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nous avons aussi

$$a'_j u^0 - c_j = 0, \quad j \in J_{sup}, \quad (1.17)$$

Nous introduisons le vecteur:

$$\delta^0 = \delta^0(j) = A' u^0 - c. \quad (1.18)$$

A partir de (1.17) on peut écrire:

$$\delta_{sup}^0 = 0, \quad \delta_N^0 = c'_{sup}QA_N - c'_N, \quad (1.19)$$

Construisons les vecteurs v^0, w^0 avec

$$\begin{aligned} v_j^0 &= \delta_j^0, \quad w_j^0 = 0 \text{ pour } \delta_j^0 \succeq 0, \\ v_j^0 &= 0, \quad w_j^0 = -\delta_j^0 \text{ pour } \delta_j^0 \prec 0, \quad j \in J. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Selon (1.18)-(1.20) le vecteur $\lambda^0 = (y = u^0, v = v^0, w = w^0)$ satisfais les relations:

$$A'y - v + w = c, \quad v \succeq 0, \quad w \succeq 0. \quad (1.21)$$

Nous calculons la valeur

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda^0) &= b'u^0 - d'_*v^0 + d'^*w^0 \\ &= c'_{sup}Qb - \sum_{\delta_j^0 \succeq 0, j \in J_N} d_{*j}\delta_j^0 - \sum_{\delta_j^0 \prec 0, j \in J_N} d_j^*\delta_j^0, \\ &= c'_{sup}Qb - \sum_{j \in J_N} x_j^0\delta_j^0 = c'_{sup}Qb - (c'_{sup}QA_N - c'_N)x_N^0, \\ &= c'_{sup}(Qb - QA_Nx_N^0) + c'_Nx_N^0 = c'_{sup}x_{sup}^0 + c'_Nx_N^0 = c'x^0, \end{aligned}$$

Alors

$$\Phi(\lambda^0) = L(x^0). \quad (1.22)$$

Soit $\lambda = (y, v, w)$, satisfaisant (1.21), et x une solution admissible arbitraire:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= b'y - d'_*v + d'^*w \succeq x'A'y - x'v + x'w, \\ &= x'(A'y - v + w) = c'x,\end{aligned}$$

c'est à dire:

$$\Phi(\lambda) \succeq L(x). \quad (1.23)$$

Comparons (1.22) et (1.23) nous constatons que $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$ est la solution du problème suivant:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= b'y - d'_*v + d'^*w \longrightarrow \min \\ A'y - v + w &= c, \quad v \succeq 0, \quad w \succeq 0\end{aligned} \quad (1.24)$$

C'est un problème de programmation linéaire. Où le problème (1.2) est appelé primal, et le problème (1.24) est appelé dual

Définition 1.6. Le vecteur $\lambda = (y, v, w)$ satisfaisant les contraintes du problème (1.24) est appelé plan admissible dual. Le vecteur $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$ est appelé plan optimal dual.

Le vecteur $\lambda^0 = (y^0, v^0, w^0)$ solution du problème dual correspond au support J_{sup}^0 . nous introduisons une même construction correspondant au support arbitraire J_{sup} . A partir de la formule $u' = c'_{sup}Q$, le vecteur $\delta = A'u - c$ est appelé co-plan correspondant au support J_{sup} . Utilisant le co-plan δ , et construisant v, w avec

$$\begin{aligned}v_j &= \delta_j, \quad w_j = 0, \quad \text{pour } \delta_j \succeq 0, \\ v_j &= 0, \quad w_j = -\delta_j, \quad \text{pour } \delta_j \prec 0, \quad j \in J.\end{aligned} \quad (1.25)$$

Considérons le vecteur $\lambda = (y, v, w)$ plan admissible du problème dual, $\bar{\lambda} = (y, \bar{v}, \bar{w})$ est un autre plan. Alors $\Phi(\lambda) \preceq \Phi(\bar{\lambda})$.

De plus, on a J_{sup} un support et δ un co-plan correspondant. Le vecteur $\mathbf{x} = \mathbf{x}(J) = (\mathbf{x}_{sup}, \mathbf{x}_N)$ avec

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j &= d_{*j} \quad \text{si } \delta_j \succ 0, \quad \mathbf{x}_j = d_j^*, \quad \text{si } \delta_j \prec 0, \\ \mathbf{x}_j &= d_{*j} \quad \text{ou } d_j^*, \quad \text{si } \delta_j = 0, \quad j \in J_N, \\ \mathbf{x}_{sup} &= Q(b - A_N \mathbf{x}_N).\end{aligned} \quad (1.26)$$

est appelé pseudo-plan correspondant. On peut considérer l'ensemble des indices suivant:

$$\begin{aligned}J_N^+ &= \{j \in J_N : \text{si } \delta_j \succ 0\}, \\ J_N^- &= \{j \in J_N : \text{si } \delta_j \prec 0\},\end{aligned} \quad (1.27)$$

Le pseudo-plan correspondant est dit plan optimal du problème:

$$\begin{aligned} c'x &\longrightarrow \max \\ Ax = b, \quad d_{*N} \preceq x_N \preceq d_N^*. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Les conditions (1.26) permet de satisfaire les conditions d'optimalité (1.13) si

$$d_{*sup} \preceq x_{sup} \preceq d_{sup}^*. \quad (1.29)$$

c'est à dire que \mathbf{x} est le plan admissible du problème primal (1.2), alors, c'est un plan optimal.

Le vecteur $\partial x_N = \mathbf{x} - x_N$ maximise l'accroissement de la fonctionnelle quand on calcul la valeur de suboptimalité

$$\beta(x, J_{sup}) = \Delta'_N(x_N - \mathbf{x}_N). \quad (1.30)$$

Pour tout support nous avons

$$c'\mathbf{x} = \Phi(\lambda). \quad (1.31)$$

Où λ est le plan admissible dual correspondant au support J_{sup} et \mathbf{x} est le pseudo-plan admissible correspondant.

1.4.4 Décomposition de la valeur de suboptimalité

Considérons la paire $\{x, J_{sup}\}$ plan d'appui, $\beta(x, J_{sup})$ la valeur de suboptimalité calculée dans (1.14), $\lambda = (y, v, w)$ le plan admissible dual correspondant. Alors

$$\begin{aligned} \beta(x, J_{sup}) &= \Delta'_N(x_N - \mathbf{x}_N) = \delta'(x - \mathbf{x}) = (u'A - c')(x - \mathbf{x}), \\ &= c'\mathbf{x} - c'x = \Phi(\lambda) - L(x) = \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0) + L(x^0) - L(x), \\ &= \beta(J_{sup}) + \beta(x), \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\beta(x, J_{sup}) = \beta(x) + \beta(J_{sup}). \quad (1.32)$$

Où $\beta(x) = L(x^0) - L(x)$ est le degré de non optimalité du plan x . $\beta(J_{sup}) = \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0)$ est le degré de non optimalité du support J_{sup} .

Nous avons donc, le plan x^0 est dit optimal si $\beta(x^0) = 0$, le support J_{sup}^0 est dit optimal si $\beta(J_{sup}^0) = 0$.

1.5 Méthode de résolution

Considérons le plan de départ $\{x, J_{sup}\}$ pour lequel le critère d'optimalité n'est pas vérifiée, et que $\beta(x, J_{sup}) \succ 0$. L'itération de la méthode adaptée de la programmation linéaire consiste à chercher un autre plan d'appui $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$ qui améliore $\{x, J_{sup}\}$ afin d'avoir

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) \preceq \beta(x, J_{sup}),$$

et cela peut être réalisé en deux étapes:

- Changement de plan $x \longrightarrow \bar{x}$ qui permet de diminuer le degré de non optimalité du plan du problème $\beta(\bar{x}) \preceq \beta(x)$.
- Changement de support $J_{sup} \longrightarrow \bar{J}_{sup}$ qui permet de diminuer le degré de non optimalité du support $\beta(\bar{J}_{sup}) \preceq \beta(J_{sup})$.

1.5.1 Changement de plan

Soit $\{x, J_{sup}\}$ un plan d'appui du problème, calculons le vecteur d'estimation $\Delta = A'u - c$, ($u = Q'c_{sup}$), les composantes non support de pseudo-plan \mathbf{x} sont donné comme suit:

$$\mathbf{x}_j = \begin{cases} d_{*j}, & \text{pour } j \in J_N^+, \\ d_j^*, & \text{pour } j \in J_N^-, \end{cases} \quad (1.33)$$

Et la valeur de suboptimalité:

$$\beta(x, J_{sup}) = \Delta'_N(x_N - \mathbf{x}_N).$$

Si $\beta(x, J_{sup}) \preceq \epsilon$, Alors arrêter le processus avec x ϵ -optimal.

Si $\beta(x, J_{sup}) \succ \epsilon$, On va construire la direction:

$$l = \mathbf{x} - x, \quad (1.34)$$

et le nouveau plan $\bar{x} = x(\theta)$ tel que:

$$x(\theta) = x + \theta l, \quad \theta \succeq 0,$$

Où θ est le pas de changement.

Selon (1.34), la direction peut être construite comme suit:

$$l_j = \begin{cases} d_{*j} - x_j, & \text{si } \Delta_j \succ 0 \\ d_j^* - x_j, & \text{si } \Delta_j \prec 0 \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, j \in J_N \\ l[J_{sup}] = -QA[I, J_N]l[J_N], & \end{cases} \quad (1.35)$$

Les propriétés suivantes sont importantes:

– La contrainte générale s'écrit:

$$Ax(\theta) = Ax + \theta A(\mathbf{x} - x) = (1 - \theta)Ax + \theta A\mathbf{x} = b.$$

– L'accroissement de la fonctionnelle suivant le pas et la direction:

$$dL(x(\theta))/d\theta = c'l = -\Delta'_N l_N = \beta(x, J_{sup}) \succ \epsilon, \quad \epsilon \succeq 0$$

Le pas peut être calculé de telle sorte que les contraintes simples soient vérifiées. pour $0 \preceq \theta \prec 1$ les composantes non support sont vérifiées $d_{*N} \preceq x_N(\theta) \preceq d_N^*$, contrairement aux composantes de support $d_{sup}^* \preceq x_{sup}(\theta) \preceq d_{sup}^*$. A partir de là, nous calculons le pas maximal θ^0 qui vérifie la contrainte simple de support:

$$d_{*j} \preceq x_j(\theta) = x_j + \theta l_j \preceq d_j^*, \quad j \in J_{sup} \quad (1.36)$$

Notons que θ_j est le pas maximal déterminé pour chaque composante d'appui $\{j \in J_{sup}\}$. Les trois cas suivant sont possible pour toute composante $\{j \in J_{sup}\}$:

1. $l_j \succ 0$, la composante $x_j(\theta)$ augmente et peut atteindre la valeur critique d_j^* pour $\theta = \theta_j = \frac{(d_j^* - x_j)}{l_j}$
2. $l_j \prec 0$, la composante $x_j(\theta)$ diminue et peut atteindre la valeur critique d_{*j} pour $\theta = \theta_j = \frac{d_{*j} - x_j}{l_j}$
3. $l_j = 0$, la composante $x_j(\theta)$ ne change pas $x_j(\theta) = x_j$ et $\theta = \theta_j = \infty$

Alors, on obtient:

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{(d_j^* - x_j)}{l_j}, & \text{pour } l_j \succ 0, \\ \frac{d_{*j} - x_j}{l_j}, & \text{pour } l_j \prec 0, \\ \infty, & \text{pour } l_j = 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Donc, le pas maximal θ^0 en respectant les composantes de $x_j(\theta)$, $j \in J_{sup}$, est égal à:

$$\theta^0 = \theta_{j_0} = \min \theta_j, \quad j \in J_{sup} \quad (1.38)$$

l'indice $j_0 \in J_{sup}$ indique la première composante $x_{j_0}(\theta^0)$ qui peut atteindre l'une des bornes de la contrainte simple.

Si $\{x, J_{sup}\}$ est un plan d'appui non dégénéré, Alors $\theta^0 \succ 0$ puisque $\theta_j \succ 0$, $j \in J_{sup}$

Ainsi, le nouveau plan $\bar{x} = x(\theta) = x + \theta^0 l$ peut être construit. Nous calculons la valeur de suboptimalité de plan d'appui $\{\bar{x}, J_{sup}\}$:

$$\beta(\bar{x}, J_{sup}) = \Delta'_N(\bar{x}_N - \mathbf{x}_N) = \Delta'_N(x_N + \theta^0 l_N - \mathbf{x}_N),$$

$$= \Delta'_N(1 - \theta^0)(x_N - \mathbf{x}_N) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup}) \preceq \beta(x, J_{sup}),$$

Si

$$\beta(\bar{x}, J_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup}) \preceq \epsilon.$$

Alors, la résolution du problème est arrêtée, avec \bar{x} est plan ϵ -optimal. Sinon, on passe au changement de support.

1.5.2 Changement de support

Définition 1.7. Le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est dit dualement non dégénéré, si toutes les composantes du non support de co-plan correspondant sont pas égal à zéro:

$$\delta_j = \Delta_j \neq 0, j \in J_N, \quad (1.39)$$

Le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ qui à la propriété:

$$d_{*j} \prec x_j \prec d_j^*, j \in J_{sup} \quad (1.40)$$

est dit primalement non dégénéré.

D'autre part, Le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est dit non dégénéré, s'il vérifie (1.39),(1.40).

Pour tout support J_{sup} est associé un plan dual correspondant λ qui permet de calculer le degré de non optimalité du support:

$$\beta(J_{sup}) = \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0). \quad (1.41)$$

Considérons $\bar{\lambda}$ un nouveau plan dual, vérifiant les conditions:

1. $\Phi(\bar{\lambda}) \preceq \Phi(\lambda)$.
2. $\bar{\lambda}$ est le plan dual associé à un nouveau support $\overline{J_{sup}}$

Pour tel changement, le degré de non optimalité doit diminuer:

$$\beta(\overline{J_{sup}}) = \Phi(\bar{\lambda}) - \Phi(\lambda^0) \preceq \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0) = \beta(J_{sup}).$$

Afin de calculer $\bar{\lambda}$ nous construisons le vecteur $\lambda(\sigma) = (y(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$, $\sigma \succeq 0$. Comme les composantes du plan dual $\lambda = (y, v, w)$ sont trouvées à partir de la première composante y , alors, même $\lambda(\sigma)$, $\sigma \succeq 0$, doit être calculé en commençant par $y(\sigma)$. D'abord, nous déterminons le changement des composantes de support de co-plan:

$$\delta_{sup}(\sigma) = \delta_{sup} + \sigma \partial \delta_{sup}, \quad (1.42)$$

Où

$$\partial\delta_{sup} = -\text{sign}(l_{j_0}), l_{j_0} = \mathbf{x}_{j_0} - x_{j_0}. \quad (1.43)$$

Selon (1.42) et (1.43), la seule composante de co-plan qui va changer est δ_{j_0} , c'est à dire celle correspondant à $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0}(\theta^0)$, et selon (1.42) et (1.43) les propriétés suivantes sont vraies:

Pour $l_{j_0} < 0$ nous avons $\delta_{j_0}(\sigma) \succeq \delta_{j_0} = 0$, $\bar{x}_{j_0} = d_{*j_0}$.

Pour $l_{j_0} > 0$ nous avons $\delta_{j_0}(\sigma) \preceq \delta_{j_0} = 0$, $\bar{x}_{j_0} = d_{j_0}^*$.

Pour $\delta_{sup}(\sigma), \sigma \succeq 0$ donné, et l'équation: $\delta'_{sup} = y'P - c'_{sup}$ On a:

$$y'P = \delta'_{sup} + c'_{sup} \implies y' = (\delta'_{sup} + c'_{sup})Q,$$

$$y' = (\delta'_{sup}(\sigma) - \sigma\partial\delta'_{sup} + c'_{sup})Q \implies y' = (\delta'_{sup}(\sigma) + c'_{sup})Q - \sigma\partial\delta'_{sup}Q,$$

$$y'(\sigma)PQ - \sigma\partial\delta'_{sup}Q \implies y' = y'(\sigma) - \partial y' \implies y'(\sigma) = y' + \sigma\partial y',$$

Où

$$y' = c_{sup}Q, \partial y' = \partial\delta_{sup}Q = -Q\text{sign}(l_{j_0}).$$

Après détermination de $y(\sigma)$, nous calculons les composantes de non support de co-plan:

$$\delta'_N(\sigma) = y'(\sigma)A_N - c'_N = y'A_N - c'_N + \sigma\partial y'A_N = \delta'_N + \sigma\partial\delta'_N, \quad (1.44)$$

Où

$$\partial\delta'_N = \partial y'A_N = -A_N\text{sign}(l_{j_0}). \quad (1.45)$$

Dans le premier lieu, nous considérons le cas où le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est dualement non dégénéré, Alors:

$$v_j(\sigma) = \delta_j(\sigma) = \delta_j + \sigma\partial\delta_j, w_j(\sigma) = 0, \text{ si } \delta_j > 0,$$

$$v_j(\sigma) = 0, w_j(\sigma) = -\delta_j(\sigma) = -\delta_j - \sigma\partial\delta_j, \text{ si } \delta_j < 0, j \in J_N,$$

$$v_j(\sigma) = w_j(\sigma) = 0, j \in J_{sup} \setminus j_0, \quad (1.46)$$

$$v_{j_0}(\sigma) = \delta_{j_0}(\sigma) = \sigma, w_{j_0}(\sigma) = 0 \text{ pour } \partial\delta_{j_0} = 1 (c - \acute{a} - d l_{j_0} < 0),$$

$$v_{j_0} = 0, w_{j_0}(\sigma) = -\delta_{j_0}(\sigma) = -\sigma \text{ pour } \partial\delta_{j_0} = -1 (c - \acute{a} - d l_{j_0} > 0),$$

Le comportement de la fonction objective duale $\Phi(\lambda)$ pour $\lambda(\sigma)$ est égal:

$$\Phi(\lambda(\sigma)) = b'y(\sigma) - d'_*v(\sigma) + d'^*w(\sigma),$$

$$= b'y(\sigma) - \mathbf{x}'_N\delta_N(\sigma) - d'_{*j_0}v_{j_0}(\sigma) + d'_{j_0}^*w(\sigma),$$

$$\begin{aligned}
 &= b'y + \sigma b' \Delta y - \mathbf{x}'_N \delta_N - \sigma \mathbf{x}'_N \Delta \delta_N - \sigma \bar{x}_{j_0} \Delta \delta_{j_0}, \\
 &= \Phi(\lambda) + \sigma (b' \Delta y - \mathbf{x}'_N \Delta \delta_N - \bar{x}_{j_0} \Delta \delta_{j_0}), \\
 &= \Phi(\lambda) + \sigma (b' \Delta y - \mathbf{x}'_N A'_N \Delta y - \bar{x}_{j_0} \Delta \delta_{j_0}), \\
 &= \Phi(\lambda) + \sigma (b' - \mathbf{x}'_N A'_N) Q \Delta \delta_N - \bar{x}_{j_0} \Delta \delta_{j_0}, \\
 &= \Phi(\lambda) + \sigma (\mathbf{x}'_{sup} \Delta \delta_N - \bar{x}_{j_0} \Delta \delta_{j_0}) = \Phi(\lambda) - \sigma |\mathbf{x}_{j_0} - \bar{x}_{j_0}|.
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

On pose:

$$\alpha = -|\mathbf{x}_{j_0} - \bar{x}_{j_0}| \prec 0, \tag{1.48}$$

Selon (1.47), (1.48), la fonction objective dual $\Phi(\lambda(\sigma))$ diminue, jusqu'à ce que l'une de composantes de $\delta_j(\sigma), j \in J_N$ s'annule, et la valeur de σ^1 peut être déterminée par:

$$\begin{aligned}
 \sigma^1 &= \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_N} \sigma_j, \\
 \sigma_j &= \begin{cases} -\delta_j / \partial \delta_j, & \text{si } \delta_j \partial \delta_j \prec 0, \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

Notons que dans le cas de la dégénérescence dual les composantes $\sigma_j, j \in J_N$ peuvent prendre la valeur nulle. D'après (1.27), nous considérons:

$$\delta_j \partial \delta_j \begin{cases} \prec 0, & \text{si } j \in J_N^+, \partial \delta_j \prec 0 \text{ ou } j \in J_N^-, \partial \delta_j \succ 0 \\ \succ 0, & \text{si } j \in J_N^+, \partial \delta_j \succ 0 \text{ ou } j \in J_N^-, \partial \delta_j \prec 0 \end{cases}$$

Alors, nous avons:

$$\sigma^* = \sigma^1 = \sigma_{j_1}, \bar{\lambda} = \lambda(\sigma^*), \bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1.$$

Par construction, nous avons:

$$\Phi(\bar{\lambda}) = \Phi(\lambda) = \sigma^* \alpha. \tag{1.50}$$

La matrice $\bar{P} = A(I, \bar{J}_{sup})$ obtenue à partir de $P = A(I, J_{sup})$ par le changement de la colonne a_{j_0} en a_{j_1} est inversible, par conséquent \bar{J} est un support. Alors, on obtient $\bar{\delta}_{sup} = \bar{\delta}(\bar{J}_{sup}) = 0$.

$$\bar{\delta}_{j_1} = 0, \bar{\delta}(\bar{J}_{sup} \setminus j_1) = \bar{\delta}(J_{sup} \setminus j_0) = \delta(J_{sup} \setminus j_0),$$

La valeur de suboptimalité diminue de $|\alpha| \sigma^*$:

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) = \beta(\bar{x}, J_{sup}) + \alpha \sigma^* \prec \beta(\bar{x}, J_{sup}), \tag{1.51}$$

A l'itération de la méthode, la valeur de suboptimalité change comme suit:

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_{sup}) + \alpha \sigma^*. \tag{1.52}$$

Elle est strictement décroissante si le plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$ est primalement non dégénéré. Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) \preceq \epsilon$. Alors \bar{x} est un plan ϵ -optimal. Sinon, on passe à la nouvelle itération avec un plan d'appui $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$.

1.5.3 Algorithme

La méthode adaptée de la programmation linéaire est décrite de la manière suivante:

1. Prendre un plan d'appui de départ $\{x, J_{sup}\}$

- Calculer le vecteur des potentiels $u' = c'[J_{sup}]Q/Q = A^{-1}(I, J_{sup})$.
- Calculer le vecteur des estimation $\Delta' = u'A - c'$.
- subdiviser l'ensemble J_N en deux partie

$$J_N^+ = \{j \in J_N : \Delta_j \succeq 0\}, J_N^- = \{j \in J_N, \Delta_j \prec 0\},$$

$$J_N^+ \cup J_N^- = J_N, J_N^+ \cap J_N^- = \emptyset,$$

- Determiner les composantes non support du pseudo plan \mathbf{x}_N :

$$\mathbf{x}_N = \begin{cases} d_{*j}, & \text{pour } j \in J_N^+ \\ d_j^*, & \text{pour } j \in J_N^- \end{cases}$$

2. Test d'optimalité du plan d'appui $\{x, J_{sup}\}$

- Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(x, J_{sup})$

$$\beta(x, J_{sup}) = \sum_{j \in J_N} \Delta_j(x_j - \mathbf{x}_j).$$

- Si $\beta(x, J_{sup}) = 0$ alors arrêter le processus avec $\{x\}$ solution optimale.
- Si $\beta(x, J_{sup}) \preceq \epsilon$ alors arrêter le processus avec $\{x\}$ solution ϵ -optimale.
- Si $\beta(x, J_{sup}) \succ \epsilon$, alors aller à 3

3. Changement du plan $x \rightarrow \bar{x}$

$$\bar{x} = x + \theta^0 l \text{ avec } \beta(\bar{x}, J_{sup}) \preceq \beta(x, J_{sup}).$$

- Calculer le vecteur $l = \mathbf{x} - x$
- Calculer le pas $\theta^0 = \theta_{j_0} = \min_{j \in J_{sup}} \theta_j$ où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{(d_j^* - x_j)}{l_j}, & \text{pour } l_j \succ 0, \\ \frac{(d_{*j} - x_j)}{l_j}, & \text{pour } l_j \prec 0, \\ \infty, & \text{pour } l_j = 0, j \in J_{sup}. \end{cases}$$

- Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l$.
- Calculer $\beta(\bar{x}, J_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup})$.

4. Test d'optimalité du nouveau plan \bar{x}
 - Si $\beta(\bar{x}, J_{sup}) = 0$, alors arrêter le processus de résolution avec \bar{x} la solution optimale.
 - Si $\beta(\bar{x}, J_{sup}) \preceq \epsilon$, alors arrêter le processus avec \bar{x} solution ϵ -optimale.
 - Sinon, aller à 6
5. Changement de support (appui) $J_{sup} \rightarrow \bar{J}_{sup}$

- Calculer la direction $\partial\delta_N$ de changement des composantes non support du co-plan $\delta_j = \Delta_j$.
- Calculer la direction $\partial\delta_N = -A_N \text{sign } l_{j_0}$ avec $\partial\delta_{sup} = -\text{sign } l_{j_0}$
- Calculer $\alpha = -|\mathbf{x}_{j_0} - \bar{x}_{j_0}|$
- Calculer $\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_N} \sigma_j$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\delta_j / \partial\delta_j, & \text{si } \delta_j \partial\delta_j \prec 0 \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

Et le nouveau support: $\bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1$

- Calculer la valeur de suboptimalité correspondant à $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) = \beta(\bar{x}, J_{sup}) + \alpha\sigma^*.$$

- Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) = 0$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$ support plan optimal.
- Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) \preceq \epsilon$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$ support plan ϵ -optimal.
- Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) \succ 0$, Aller à 3 avec le nouveau plan d'appui $\{\bar{x}, \bar{J}_{sup}\}$

1.6 Exemple 1.1:

Soit le problème suivant:

$$L(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

Sous les contraintes suivantes:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ 0 \preceq x_1 \preceq 20; 0 \preceq x_2 \preceq 20; 0 \preceq x_3 \preceq 20; \\ 0 \preceq x_4 \preceq 30; 0 \preceq x_5 \preceq 40; \end{cases}$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}; c' = (-1 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 0)$$

$$d_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; d^* = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}; J = \{1,2,3,4,5\}; I = \{1,2\}; m = 2; n = 5.$$

le plan admissible de départ: $x' = (5 \quad 0 \quad 5 \quad 10 \quad 20)$; $J_N = \{1,2,3\}$;

$$J_{sup} = \{4,5\}; A_{sup} = P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de la valeur de suboptimalité:

$$\beta(x, J_{sup}) = 70 \succ \epsilon$$

On passe au changement du plan:

$$\bar{x} = x + \theta^0 l$$

On calcul la direction et le pas:

$$l_N = (15 \quad 20 \quad 15); l_{sup} = (-20 \quad -40)$$

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{*4} - x_4}{l_4} = \frac{1}{2}, & l_4 \prec 0 \\ \frac{d_{*5} - x_5}{l_5} = \frac{1}{2}, & l_5 \prec 0 \end{cases}$$

$$\theta^0 = \theta_{j_0} = \min(1, \theta_j), j \in J_{sup}$$

Nous choisissons $\theta^0 = \theta_4 = \frac{1}{2}$, donc $j_0 = \{4\}$

Et le nouveau plan :

$$\bar{x} = x + \frac{1}{2}l = \left(\frac{25}{2} \quad 10 \quad \frac{25}{2} \quad 0 \quad 0 \right)$$

La nouvelle valeur de suboptimalité:

$$\beta(\bar{x}, J_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup}) = 35 \succ \epsilon$$

Donc, on passe au changement de support:

Calcul de $\partial\delta$ et σ :

$$\partial\delta_{sup} = (1 \quad 0); \partial\delta_N = (1 \quad 1 \quad -1)$$

$$\sigma^1 = \sigma_{j_1} = \min(\sigma_j) = 1$$

Alors, la valeur minimale de σ_j correspond $j_1 = \{1\}$ Et le nouveau support $\bar{J}_{sup} = (J_{sup} \setminus j_0) \cup j_1$.

La valeur de suboptimalité:

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_{sup}) + \alpha\sigma_{j_1} = 25 \succ \epsilon$$

On a $\beta(\bar{x}, \bar{J}_{sup}) \succ 0$ alors on passe de nouveau au changement du plan, puis, au changement du support jusqu'à obtenir un support plan optimal.

Après 4 itérations, on obtient la solution optimale $x = (20, 10, 20, 0, 0)$ et la valeur maximale de la fonctionnelle $L(x) = 60$.

La résolution de ce problème en utilisant la méthode du simplexe nous a donné la solution optimale en 7 itérations, ce qui veut dire que la méthode adaptée de la programmation linéaire converge rapidement vers la solution optimale.

1.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la résolution d'un problème de programmation linéaire, en utilisant la méthode adaptée. Cette dernière, est basée sur la notion du support, qui est l'outil principale de la méthode. L'application de cette méthode pour résoudre les problèmes de programmation linéaire montre l'efficacité de la méthode par rapport à l'algorithme du simplexe, du fait qu'elle converge rapidement vers la solution optimale. Par conséquent, La méthode adaptée a trouvé un champ d'application beaucoup plus large incluant aussi bien les problèmes de contrôle optimal.

Chapitre 2

Résolution d'un problème de contrôle optimal par la méthode adaptée

2.1 Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un processus peut se résumer comme suit: Étant donné un processus défini par son modèle, trouver parmi toutes les commandes admissibles celles qui permettent de satisfaire des conditions initiales et finales données, de satisfaire diverses contraintes imposées et d'optimiser un critère choisi. L'objectif de ce chapitre, est de résoudre un problème de commande optimale d'un système dynamique linéaire. La résolution de tel problème peut éventuellement se faire par la méthode adaptée de la programmation linéaire [36, 37, 49]. Après avoir formulé le problème et donner quelques notions de support contrôle, on démontre les critères d'optimalité et de suboptimalité sur lesquels est construit l'algorithme de résolution. Cette méthode peut être en effet utilisée efficacement pour déterminer une solution en boucle ouverte.

2.2 Position du problème

Soit $T = [t_0, t_f]$, $h = (t_f - t_0)/N$, où N est un entier positif, $T_h = \{t_0, t_0 + h, \dots, t_f - h\}$, $u(t)$, $t \in T$ une commande constante par morceaux prenant des valeurs constantes sur des intervalles de longueur h , si $u(t) = u(t_0 + sh)$, $t \in [t_0 + sh, t_0 + (s+1)h]$, $s = \overline{0, N-1}$, cette commande est bornée supérieurement par d^* et inférieurement par d_* , tout en sachant que d^* et d_* sont des réels.

Dans la classe des commandes constantes par morceaux, on considère le problème de commande optimale suivant:

Maximiser le critère:

$$L(u) = c'x(t_f) \longrightarrow max \quad (2.1)$$

d'un système continu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} Hx(t_f) = g, \\ d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T = [t_0, t_f], \end{cases} \quad (2.3)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est n -vecteur représentant l'état du système au temps t .

$A = A(J, J)$ est une $n \times n$ -matrice caractérisant le système.

$B = B(J)$ est un n -vecteur.

$H = H(I, J)$ est une $m \times n$ -matrice et $\text{rang}H = m \preceq n$.

$c = c(J)$ le vecteur des coûts.

x_0 est la position initiale du système.

$I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ les ensembles d'indices.

La solution du système différentiel (2.2) est donnée par:

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^t F(t-s)Bu(s)ds,$$

où $F(t)$ est la solution du système:

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \quad t \in T \\ F(0) = I_n, \end{cases}$$

avec I_n la matrice identité.

La solution à $t = t_f$ est:

$$x(t_f) = F(t_f, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} F(t_f, t)Bu(t)dt, \quad t \in T.$$

On a

$$u(t) = u(t_0 + sh), \quad t \in [t_0 + sh, t_0 + (s+1)h], \quad s = \overline{0, N-1}. \quad (2.4)$$

Alors $x(t_f)$ peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{aligned} x(t_f) = & F(t_f, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t_f, \vartheta)Bu(t_0)d\vartheta + \int_{t_0+h}^{t_0+2h} F(t_f, \vartheta)Bu(t_0+h)d\vartheta \\ & + \int_{t_0+2h}^{t_0+3h} F(t_f, \vartheta)Bu(t_0+2h)d\vartheta + \dots + \int_{t_f-h}^{t_f} F(t_f, \vartheta)Bu(t_f-h)d\vartheta, \end{aligned}$$

$$x(t_f) = F(t_f, t_0)x_0 + \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} F(t_f, \vartheta)Bu(t)d\vartheta. \quad (2.5)$$

en remplaçant (2.5) dans (2.1) et (2.3), on obtient:

$$\begin{aligned} L(u) &= c'F(t_f, t_0)x_0 + \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} c'F(t_f, \vartheta)Bu(t)d\vartheta, \\ HF(t_f, t_0)x_0 + \sum_{t \in T_h} \int_t^{t+h} HF(t_f, \vartheta)Bu(t)d\vartheta &= g. \end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_t^{t+h} c'F(t_f, \vartheta)Bd\vartheta, \quad \varphi(t) = \int_t^{t+h} HF(t_f, \vartheta)Bd\vartheta, \\ \bar{g} &= g - HF(t_f, t_0)x_0, \quad F(t_f, \vartheta) = F(t_f)F^{-1}(\vartheta) = e^{A(t_f - \vartheta)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le problème de départ devient:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T_h} p(t)u(t) &\longrightarrow \max, \\ \sum_{t \in T_h} \varphi(t)u(t) &= \bar{g}, \\ d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le problème (2.7) est un problème de programmation linéaire à m contraintes générales et N variables. Lorsque le nombre de variable est très grand, il est difficile de résoudre le problème par les méthodes classiques de la programmation linéaire. Nous avons alors à résoudre le problème en utilisant les concepts de la méthode adaptée de la programmation linéaire.

Soit $\psi_c(t)$, $t \in T$, la solution du système conjugué:

$$\dot{\psi} = -A'\psi(t); \quad \psi(t_f) = c, \quad (2.8)$$

$\psi(t_f) = c$ est la condition initiale.

Soit $G(t)$, $t \in T$, une $m \times n$ -matrice, solution de l'équation:

$$\dot{G} = -G(t)A, \quad G(t_f) = H,$$

avec $G(t_f) = H$ la condition initiale.

Alors le vecteur $p(t)$ prend la forme:

$$p(t) = \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta)Bd\vartheta.$$

Et la matrice $\varphi(t)$ prend la forme:

$$\varphi(t) = \int_t^{t+h} G(\vartheta)Bd\vartheta, \quad t \in T_h.$$

Définition 2.1. Toute commande vérifiant les contraintes du problème (2.7) est dite commande admissible.

Définition 2.2. Une commande admissible $u^0(t)$ est dite optimale si et seulement si

$$L(u^0) = \left[\max_{d_* \preceq u \preceq d^*} L(u) \right].$$

et la trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite "trajectoire optimale"

Définition 2.3. Une commande admissible $u^\epsilon(t)$ est dite ϵ -optimale si et seulement si

$$L(u^0) - L(u^\epsilon) \preceq \epsilon,$$

avec ϵ un positif donné

2.2.1 Support contrôle (Commande appui)

Dans l'ensemble T_h , nous choisissons un ensemble $T_{sup} = \{t_l, \quad l = \overline{1, m}\}$, formé de points isolés appelés des moments d'appui, ensuite, nous construisons la $m \times m$ -matrice $\varphi_{sup} = \{\varphi(t), \quad t \in T_{sup}\}$. L'ensemble $T_{sup} = \{t_l, \quad l = \overline{1, m}\}$ est appelé support (appui) du problème si la matrice de support ou d'appui $\varphi_{sup} = \{\varphi(t_l), \quad l = \overline{1, m}\}$ est inversible, c'est à dire $\det(\varphi_{sup}) \neq 0$

La construction de la matrice φ_{sup} peut se faire par deux méthode:

1. La première méthode consiste à construire m -états $X_l(t_f)$, $l = \overline{1, m}$ du système (2.2) correspondant à l'état initial $x(t_0) = 0$, et la commande:

$$u_l(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_l, t_l + h) \\ 0, & t \in T \setminus [t_l, t_l + h), \quad l = \overline{1, m} \end{cases}$$

Puis, nous multiplions $X_l(t_f)$ par la matrice H , et on aura $\varphi_{sup} = HX_l(t_f)$, $l = \overline{1, m}$

2. La deuxième méthode consiste à construire m solutions $\xi_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ du système conjugué (2.8), dans des intervalles $[t, t + h]$, $t \in T_{sup}$, avec des conditions initiales $\psi(t_f) = h_i$, et nous obtenons la matrice:

$$\varphi_{sup} = \int_t^{t+h} \xi'_i(\vartheta)Bd\vartheta, \quad t \in T_{sup}, \quad i = \overline{1, m}$$

avec, h_i est la i^{eme} colonne de la matrice H .

Remarques

- Si le point initial x_0 n'est pas contrôlable, alors, il n'existe pas de commande u admissible ni donc de trajectoire du système considéré reliant x_0 à la cible, (la notion de contrôlabilité est abordée dans l'annexe).
- L'écriture suivante (par exemple): $T \setminus T_{sup}$ signifie tout t appartenant à T et n'appartient pas à T_{sup} , $T \setminus \{t_l\}$ tout t appartenant à T et différent de t_l .

Définition 2.4. La paire $\{u, T_{sup}\}$ formée de la commande admissible $u = \{u(t), t \in T\}$ et du support T_{sup} est appelée support contrôle (commande appui).

2.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, T_{sup}\}$ un support contrôle de départ, $x(t)$ sa trajectoire correspondante. Construisons le vecteur des potentiels y qui est solution de l'équation:

$$y' \varphi_{sup} = p_{sup},$$

Donc

$$y' = p'_{sup} \varphi_{sup}^{-1}, \quad p_{sup} = (p(t), t \in T_{sup}), \quad (2.9)$$

la co-commande:

$$\Delta(t) = p(t) - y' \varphi(t), \quad t \in T_h.$$

La co-trajectoire $\psi(t)$, $t \in T$ est la solution du système conjugué, avec la condition initiale $\psi(t_f) = c - H'y$.

connaissant la co-trajectoire $\psi(t)$, $t \in T$, la co-commande peut être écrite sous la forme suivante:

$$\Delta(t) = \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta, \quad t \in T_h \quad (2.10)$$

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \partial u(t)$, $t \in T$ une autre commande admissible, et $\bar{x}(t) = x(t) + \partial x(t)$ sa trajectoire correspondante. Déterminons l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(\bar{u}) - L(u) = c' \bar{x}(t) - c' x(t), \\ &= c' F(t_f, t_0) x_0 + \sum_{t \in T_h} p(t) \bar{u}(t) - c' F(t_f, t_0) x_0 - \sum_{t \in T_h} p(t) u(t), \\ &= \sum_{t \in T_h} p(t) \bar{u}(t) - \sum_{t \in T_h} p(t) u(t) = \sum_{t \in T_h} p(t) (\bar{u}(t) - u(t)) = \sum_{t \in T_h} p(t) \partial u(t), \end{aligned}$$

D'autre coté, on a $\bar{u}(t)$ et $u(t)$ sont admissible, alors:

$$\sum_{t \in T_h} \varphi(t) \bar{u}(t) - \sum_{t \in T_h} \varphi(t) u(t) = 0 \implies \sum_{t \in T_h} \varphi(t) \partial u(t) = 0,$$

De là:

$$\sum_{t \in T_{sup}} \varphi(t) \partial u(t) + \sum_{t \in T_N} \varphi(t) \partial u(t) = 0, \quad T_N = T_h \setminus T_{sup}.$$

Comme $\varphi_{sup} = \{\varphi(t), t \in T_{sup}\}$ est inversible et $u(t)$ constante par morceau, alors:

$$\partial u(T_{sup}) = -\varphi_{sup}^{-1} \sum_{t \in T_N} \varphi(t) \partial u(t),$$

Avec

$$T_{sup} = \{t_l, l = \overline{1, m}\} \quad \text{et} \quad \partial u(T_{sup}) = \{\partial u_1, \dots, \partial u_m\}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \sum_{t \in T_{sup}} p(t) \partial u(t) + \sum_{t \in T_N} p(t) \partial u(t) = p_{sup} \partial u(T_{sup}) + \sum_{t \in T_N} p(t) \partial u(t), \\ \Delta L &= -p_{sup} \varphi_{sup}^{-1} \sum_{t \in T_N} \varphi(t) \partial u(t) + \sum_{t \in T_N} p(t) \partial u(t), \\ &= - \sum_{t \in T_N} (p_{sup} \varphi_{sup}^{-1} \varphi(t) - p(t)) \partial u(t). \end{aligned}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient:

$$\Delta L = - \sum_{t \in T_N} \Delta(t) \partial u(t). \quad (2.11)$$

2.3.1 Valeur de suboptimalité

La co-commande $\Delta(t)$ a la propriété suivante:

$$\Delta(t) = 0, \quad \text{si} \quad t \in T_{sup}$$

Maintenant, nous construisons une pseudo-commande $w(t)$, $t \in T$.

Tout d'abord, il suffit de construire une pseudo-commande $w(t)$, pour $t \in T_N$, où $T_N = T_h \setminus T_{sup}$

Donc

$$\begin{cases} w(t) = d_* & \text{si } \Delta(t) \prec 0, \\ w(t) = d^* & \text{si } \Delta(t) \succ 0, \\ w(t) \in [d_*, d^*] & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T_N. \end{cases}$$

En utilisant la contrainte générale du problème (2.7), les valeur $w(t)$ $t \in T_{sup}$ peuvent être trouvées par l'équation:

$$\sum_{t \in T_{sup}} \varphi(t)w(t) + \sum_{t \in T_N} \varphi(t)w(t) = \bar{g}. \quad (2.12)$$

Une méthode dynamique pour construire $w_{sup} = \{w(t), t \in T_{sup}\}$ consiste à calculer $\bar{x}_0(t_f)$ solution de l'équation (2.2) avec une commande $u(t) = w(t)$, $t \in T_N$, $u(t) = 0$, $t \in T_{sup}$, et une condition initiale $x(t_0) = 0$.

Alors, $w_{sup} = \{w(t), t \in T_{sup}\}$ est obtenu par la résolution de l'équation:

$$\varphi_{sup}w_{sup} = \bar{g} - H\bar{x}_0(t_f).$$

Si $d_* \preceq w(t) \preceq d^*$, $t \in T_{sup}$ alors $u^0(t) = w(t)$, $t \in T_h$, est la commande optimale.

La solution $\bar{x}(t)$, $t \in T$, de l'équation (2.2) avec la commande constante par morceaux $u(t) = w(t)$, $t \in T_h$, et la condition initiale $x(t_0) = x_0$ est appelée une pseudo-trajectoire.

La valeur:

$$\beta = \beta(u, T_{sup}) = c' \bar{x}(t_f) - c' x(t_f) = \sum_{t \in T_N} \Delta(t)(w(t) - u(t)), \quad (2.13)$$

est appelée valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, T_{sup}\}$.

De là on a:

$$\Delta L = L(\bar{u}) - L(u) \preceq \beta(u, T_{sup}),$$

et pour $\bar{u} = u^0$ on a

$$L(u^0) - L(u) \preceq \beta(u, T_{sup}).$$

De cette dernière inégalité on tire les résultats suivants:

2.3.2 Critère d'optimalité

Théorème 2.1. [36] *Les relations:*

$$\begin{cases} u(t) = d^*, & \text{si } \Delta(t) \succeq 0, \\ u(t) = d_*, & \text{si } \Delta(t) \preceq 0, \\ d_* \prec u(t) \prec d^* & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T_h, \end{cases} \quad (2.14)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non-dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle $\{u, T_{sup}\}$.

Preuve. Condition suffisante:

Si les relations (2.14) sont vérifiées alors de (2.13) on aura $u(t) = w(t)$, donc $\beta(u, T_{sup}) = 0$. Comme $\Delta L = L(\bar{u}) - L(u) \preceq \beta(u, T_{sup}) = 0$. Alors $\{u, T_{sup}\}$ est un support contrôle optimal.

Condition nécessaire:

Procédons par l'absurde:

Soit $\{u, T_{sup}\}$ un support contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (2.14) ne sont pas vérifiées, c'est à dire: il existe un moment $t_* \in T_h$ tel que

$$\Delta(t_*) \succ 0 \text{ et } u(t_*) \succ d_* \quad \text{ou} \quad \Delta(t_*) \prec 0 \text{ et } u(t_*) \prec d^*.$$

Construisons la commande $\bar{u}(t) = u(t) + \partial u(t)$ tel que

$$\partial u(t) = 0, \quad t \in T_N \setminus t_*, \quad \partial u(t) = \begin{cases} d_* - u(t_*) & \text{si } \Delta(t_*) \succ 0, \\ d^* - u(t_*) & \text{si } \Delta(t_*) \prec 0. \end{cases}$$

L'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta L = L(\bar{u}) - L(u) = - \sum_{t \in T_N} \Delta(t) \partial u(t),$$

$$\Delta L = -\Delta(t_*) \partial u(t_*) - \sum_{t \in T_N \setminus t_*} \Delta(t) \partial u(t).$$

Et comme $\partial u(t) = 0$, $t \in T_N \setminus t_*$, alors

$$\Delta L = -\Delta(t_*) \partial u(t_*) \succ 0,$$

$\implies L(\bar{u}) \succ L(u)$, et ceci contredit l'optimalité de support contrôle $\{u(t), T_{sup}\}$

Notons qu'un support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ est dit dégénéré, si la valeur de la fonction coût correspondante ne change pas en appliquant l'algorithme.

Principe de maximum

En utilisant l'équation (2.10) correspondant à la co-commande $\Delta(t)$, $t \in T_h$, et la co-trajectoire $\psi(t)$, $t \in T_h$, nous pouvons écrire le critère d'optimalité sous forme du principe du maximum:

Pour qu'une commande admissible $u(t)$, $t \in T_h$, et sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T_h$ soient optimales, il est nécessaire et suffisant de trouver un tel support T_{sup} , satisfaisant la condition :

$$\int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta u(t) = \max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta u(t), \quad t \in T_N,$$

la condition de transversalité:

$$y' Hx(t_f) = \max_{Hx=g} y' Hx.$$

2.3.3 Critère de suboptimalité

Principe ϵ -maximum

Théorème 2.2. [36](principe ϵ -maximum)

Soit $\epsilon \succeq 0$ donné. Pour que la commande admissible $u(t)$, $t \in T_h$, et sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T_h$ soient ϵ -optimale, il est nécessaire et suffisant de trouver un tel support T_{sup} , pour lequel, la condition ϵ -maximum soit vérifiée:

$$\int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta u(t) = \max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta u(t) - \epsilon(t), \quad t \in T_N,$$

avec

$$\sum_{t \in T_N} \epsilon(t) \preceq \epsilon. \quad (2.15)$$

Preuve. Condition suffisante:

En utilisant l'accroissement de la fonctionnelle, la valeur de suboptimalité β du support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ est égale à:

$$\beta(u, T_{sup}) = \sum_{t \in T_N} \Delta(t)[w(t) - u(t)].$$

D'après la relation (2.10) on a:

$$\begin{aligned} \beta(u, T_{sup}) &= \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B [w(t) - u(t)] d\vartheta, \\ &= \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} [\psi'(\vartheta) B w(t) - \psi'(\vartheta) B u(t)] d\vartheta, \\ &= \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B w(t) d\vartheta - \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B u(t) d\vartheta, \\ &= \max_u \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B u(t) d\vartheta - \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B u(t) d\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{t \in T_N} \max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta - \sum_{t \in T_N} \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta, \\
 &= \sum_{t \in T_N} \left[\max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta - \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta \right], \\
 &= \sum_{t \in T_N} \epsilon(t) \preceq \epsilon.
 \end{aligned}$$

$L(\bar{u}) - L(u) \prec \beta(u, T_{sup})$, alors pour $\bar{u} = u^0$, on obtient:

$$L(u^0) - L(u) \prec \beta(u, T_{sup}) \preceq \epsilon,$$

donc $\bar{u}(t)$ est ϵ -optimale.

Condition nécessaire:

Soit $u(t)$ une commande ϵ -optimale. On va faire une décomposition de la valeur de suboptimalité $\beta(u, T_{sup})$. Pour cela introduisons le problème dual:

$$D(\kappa, v(t), \omega(t)) = \bar{g}\kappa - \sum_{t \in T_h} v(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega(t)d^* \longrightarrow \min \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \kappa\varphi(t) - v(t) + \omega(t) = p(t), \\ v(t) \succeq 0, \quad \omega(t) \succeq 0, \quad t \in T_h. \end{cases} \quad (2.17)$$

L'ensemble $(\kappa, v(t), \omega(t))$, $t \in T_h$ défini de la façon suivante:

$$\begin{cases} \kappa = y, \\ v(t) = \Delta(t), \quad \omega(t) = 0 & \text{si } \Delta(t) \succ 0, \\ v(t) = 0, \quad \omega(t) = -\Delta(t) & \text{si } \Delta(t) \prec 0, \quad t \in T_h. \end{cases} \quad (2.18)$$

vérifie les contraintes (2.14) c'est à dire que c'est une solution admissible du dual, et désignons par $(y^0, v^0(t), \omega^0(t))$, $t \in T_h$ une solution optimale.

On remplace les relations $\Delta(t) = y'\varphi(t) - p(t)$ dans la valeur de suboptimalité β , on obtient:

$$\begin{aligned}
 \beta &= \sum_{t \in T_h} \Delta(t)u(t) - \sum_{t \in T_h} \Delta(t)w(t), \\
 &= \sum_{t \in T_h} [y'\varphi(t) - p(t)]u(t) - \sum_{t \in T_h} v(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega(t)d^*, \\
 &= \sum_{t \in T_h} y'\varphi(t)u(t) - \sum_{t \in T_h} p(t)u(t) - \sum_{t \in T_h} v(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega(t)d^*.
 \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\sum_{t \in T_h} \varphi(t)u(t) = g - HF(t_f)x_0 = \bar{g} \implies \sum_{t \in T_h} y'\varphi(t)u(t) = \bar{g}y'.$$

A l'optimalité on a:

$$L(u^0) = D(y^0, v^0, \omega^0),$$

donc

$$\sum_{t \in T_h} p(t)u^0 = \bar{g}y^0 - \sum_{t \in T_h} v^0(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega^0(t)d^*,$$

d'où

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{t \in T_h} p(t)u^0(t) - \bar{g}y^0 + \sum_{t \in T_h} v^0(t)d_* - \sum_{t \in T_h} \omega^0(t)d^* \\ &\quad - \sum_{t \in T_h} p(t)u(t) + \bar{g}y' - \sum_{t \in T_h} v(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega(t)d^*, \\ &= \left[\sum_{t \in T_h} p(t)u^0(t) - \sum_{t \in T_h} p(t)u(t) \right] + \left[\bar{g}y' - \sum_{t \in T_h} v(t)d_* \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t \in T_h} \omega(t)d^* - (\bar{g}y^0 - \sum_{t \in T_h} v^0(t)d_* + \sum_{t \in T_h} \omega^0(t)d^*) \right], \\ &= [L(u^0) - L(u)] + [D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0, v^0, \omega^0)], \\ &= \beta_u + \beta_{sup}. \end{aligned}$$

où

- $\beta_u = L(u^0) - L(u)$ est appelée la mesure de la non optimalité de la commande $u(t)$, $t \in T_h$.
- $\beta_{sup} = D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0, v^0, \omega^0)$ est appelée la mesure de la non optimalité du support T_{sup} .

Si on associe à la commande $u(t)$, $t \in T_h$ un support optimal T_{sup}^0 alors on aura $\beta_{sup} = 0$.

De là, la valeur de suboptimalité devient $\beta(u, T_{sup}^0) = \beta_u$.

Comme $u(t)$ est ϵ -optimale $\implies L(u^0) - L(u) = \beta_u = \beta(u, T_{sup}^0) \leq \epsilon$. Posons:

$$\epsilon(t) = \Delta(t)(w(t) - u(t)), \quad t \in T_h$$

On a $\Delta(t) = \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B d\vartheta$, $t \in T_h$, on obtient alors:

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B(w(t) - u(t)) d\vartheta, \quad t \in T_h, \\ \epsilon(t) &= \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bw(t) d\vartheta - \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta, \quad t \in T_h, \\ \epsilon(t) &= \max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta - \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) Bu(t) d\vartheta, \quad t \in T_h, \end{aligned}$$

$$\sum_{t \in T_h} \epsilon(t) = \sum_{t \in T_h} [\max_u \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B w(t) d\vartheta - \int_t^{t+h} \psi'(\vartheta) B u(t) d\vartheta], \quad t \in T_h.$$

d'où

$$\beta(u, T_{sup}) = \sum_{t \in T_h} \epsilon(t) \preceq \epsilon.$$

Ce qui implique la condition ϵ -maximum (2.15).

2.4 Méthode de résolution

Le support est utilisé non seulement pour déterminer la commande optimale ou ϵ -optimale, mais il est considéré comme étant l'outil principal de la méthode. Comme il change durant les itérations suivant le changement de la commande, il est naturel de les considérer comme une paire.

Soit $\{u, T_{sup}\}$ un support contrôle de départ pour lequel la condition ϵ -maximum n'est pas vérifiée. une itération de l'algorithme consiste à effectuer le changement de support contrôle $\{u, T_{sup}\} \longrightarrow \{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$ de sorte que $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \preceq \beta(u, T_{sup})$. Cela se fait en deux procédures:

1. Changement de commande $u(t) \longrightarrow \bar{u}(t)$.
2. Changement de support $T_{sup} \longrightarrow \bar{T}_{sup}$.

Le support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ est dit primalement non dégénéré si:

$$d_* \prec u(t) \prec d^*, \quad t \in T_{sup}.$$

Le support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ est dit dualement non dégénéré si:

$$\Delta(t) \neq 0, \quad t \in T_N, \quad T_N = T_h \setminus T_{sup}.$$

Remarque: Les instants $T_{N_0} \in T_N$, sont appelés les zéros du non support T_N si $\Delta(T_{N_0}) = 0$.

Supposons que pour un $\epsilon \succeq 0$ donné, la condition ϵ -maximum et les inégalités $d_* \preceq w(t) \preceq d^*$, $t \in T_{sup}$ ne sont pas vérifiées pour un support contrôle de départ $\{u, T_{sup}\}$. Une itération de la méthode consiste à faire un changement de commande puis un changement de support.

2.4.1 Changement de commande:

On construit une nouvelle commande admissible sous la forme:

$$\bar{u}(t) = u(t) + \partial u(t) = u(t) + \theta^0 l(t), \quad t \in T_h,$$

Où $l(t)$ est la direction d'amélioration de la commande $u(t)$, $t \in T_h$ et θ^0 le pas maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible:

$l(t)$ sera définie de sorte qu'elle maximise l'accroissement de la fonctionnelle. Pour cela, posons:

$$l(t) = w(t) - u(t), \quad t \in T_N. \quad (2.19)$$

On a $u(t)$, $\bar{u}(t)$ sont admissible, alors:

$$\begin{aligned} \theta \sum_{t \in T_h} \varphi(t) l(t) &= 0, \\ \implies \sum_{t \in T_{sup}} \varphi(t) l(t) + \sum_{t \in T_N} \varphi(t) l(t) &= 0, \\ \implies \sum_{t \in T_{sup}} \varphi(t) l(t) &= - \sum_{t \in T_N} \varphi(t) l(t). \end{aligned}$$

Nous avons $l(T_{sup}) = l_{sup}$, et φ_{sup} est inversible donc

$$l_{sup} = -\varphi_{sup}^{-1} \sum_{t \in T_N} \varphi(t) l(t). \quad (2.20)$$

Détermination du pas maximal:

$\bar{u}(t) = u(t) + \theta(t)l(t)$, $t \in T$ une commande admissible donc elle doit vérifier

$$d_* \preceq \bar{u}(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h$$

C'est à dire

$$d_* \preceq u(t) + \theta(t)l(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h.$$

Sur T_N on a $\theta = 1$ et sur T_{sup} on doit avoir:

$$d_* - u(t) \preceq \theta(t)l(t) \preceq d^* - u(t), \quad t \in T_{sup}.$$

De là, on a $\theta(t_0) = \min \theta(t)$ où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(d^* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) \succ 0, \\ \frac{(d_* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) \prec 0, \\ \infty & \text{si } l(t) = 0 \quad t \in T_{sup}. \end{cases} \quad (2.21)$$

d'où le pas maximal:

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t_0)).$$

Calculons la valeur de suboptimalité de la nouvelle commande \bar{u} avec le support de départ T_{sup} :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}, T_{sup}) &= \sum_{t \in T_h} \Delta(t)[w(t) - \bar{u}(t)], \\ &= \sum_{t \in T_h} \Delta(t)[w(t) - u(t) - \theta^0 l(t)], \\ &= \sum_{t \in T_h} \Delta(t)[w(t) - u(t)] - \sum_{t \in T_h} \Delta(t)\theta^0 l(t), \\ &= \beta(u, T_{sup}) - \theta^0 \sum_{t \in T_h} \Delta(t)[w(t) - u(t)], \\ &= \beta(u, T_{sup}) - \theta^0 \beta(u, T_{sup}), \\ &= (1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}). \end{aligned}$$

De là

- Si $\theta^0 = 1$, alors $\beta(\bar{u}, T_{sup}) = 0$ d'où \bar{u} est une commande optimale.
- Si $(1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}) < \epsilon$, alors \bar{u} est ϵ -optimale.
- Si $(1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}) > \epsilon$, alors on passe au changement du support.

2.4.2 Changement de support:

De la procédure du changement de commande, nous avons $\theta^0 = \theta(t^0)$, $t^0 \in T_{sup}$, $\beta(\bar{u}, T_{sup}) > \epsilon$. Alors, le moment t^0 doit sortir de la base et le remplacer par un autre moment qui va permettre de diminuer la mesure de non optimalité de support β_{sup} . Cette procédure est basée sur le passage de $T_{sup} \longrightarrow \bar{T}_{sup}$.

La première étape pour construire un nouveau support \bar{T}_{sup} , consiste à déterminer les variations du vecteur des potentiels Δy par la résolution d'un système d'équations linéaires:

$$-\varphi'_{sup} \Delta y = \Delta \delta(t), \quad t \in T_{sup},$$

Où $\Delta \delta(t^0) = \text{sign } \bar{u}(t^0)$ et $\Delta \delta(t) = 0$, $t \in T_{sup} \setminus t^0$.

Notons que $\Delta \delta(t)$, $t \in T_h$, est la variation de la co-commande engendrée par les variations Δy , elle est définie par:

$$\Delta \delta(t) = -\Delta y' \varphi(t) = -\Delta y' \int_t^{t+h} G(\vartheta) B d\vartheta, \quad t \in T_N.$$

Le nouveau vecteur des estimations est donné par:

$$\bar{\Delta}(t) = \Delta(t, \sigma) = \Delta(t) + \sigma \Delta \delta(t), \quad t \in T_h, \quad \sigma \succeq 0. \quad (2.22)$$

Ainsi, le problème dual est donné comme suit:

$$D(y(\sigma), v(t, \sigma), \omega(t, \sigma)) = \bar{g}y(\sigma) - \sum_{t \in T_h} v(t, \sigma) d_* + \sum_{t \in T_h} \omega(t, \sigma) d^* \longrightarrow \min, \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} y(\sigma) - v(t, \sigma) + \omega(t, \sigma) = p(t), \\ v(t, \sigma) \succeq 0, \quad \omega(t, \sigma) \succeq 0, \quad t \in T_h. \end{cases} \quad (2.24)$$

L'ensemble $(y(\sigma), v(t, \sigma), \omega(t, \sigma))$, $t \in T_h$ est donné par:

$$\begin{cases} y(\sigma) = y + \sigma \Delta y, \\ v(t, \sigma) = \Delta(t, \sigma), \quad \omega(t, \sigma) = 0, \quad \text{si } \Delta(t, \sigma) \succ 0, \\ v(t, \sigma) = 0, \quad \omega(t, \sigma) = -\Delta(t, \sigma), \quad \text{si } \Delta(t, \sigma) \prec 0, \quad t \in T_h. \end{cases} \quad (2.25)$$

Notons que $D(y(\sigma), v(t, \sigma), \omega(t, \sigma))$ est La fonctionnelle du problème dual, tel que:

$$D(y(\sigma), v(t, \sigma), \omega(t, \sigma)) = D(y, v(t), \omega(t)) - \sigma |w(t_0) - \bar{u}(t_0)|.$$

On pose:

$$\alpha = -|w(t^0) - \bar{u}(t^0)| \prec 0. \quad (2.26)$$

Selon les valeurs de $\sigma \succeq 0$, la valeur de la fonctionnelle $D(y(\sigma), v(t, \sigma), \omega(t, \sigma))$ diminue de la quantité α jusqu'à ce que l'une des valeur des composantes de non support de $\Delta(t, \sigma^*)$ s'annule.

Maintenant, pour déterminer la valeur de σ^* , il est nécessaire de calculer $\sigma(t)$ à chaque instant $t \in T_N$.

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{-\Delta(t)}{\Delta \delta(t)} & \text{si } \Delta(t) \Delta \delta(t) \prec 0, \quad t \in T_h, \\ 0 & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad \text{et } u \neq d_*, \quad \Delta \delta(t) \succ 0 \quad \text{ou} \\ & \Delta(t) = 0, \quad \text{et } u \neq d^*, \quad \Delta \delta(t) \prec 0, \quad t \in T_h, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Et σ^* est défini par:

$$\sigma^* = \min_{t \in T_h} \sigma(t) = \sigma(t^*) \quad (2.28)$$

De la, le nouveau support sera:

$$\bar{T}_{sup} = (T_{sup} \setminus \{t^0\}) \cup \{t^*\}. \quad (2.29)$$

La valeur de suboptimalité pour le nouveau support contrôle $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$ est:

$$\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(u, T_{sup}) + \alpha \sigma^*. \quad (2.30)$$

Dans le cas où $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \preceq \epsilon$, alors la résolution du problème (2.7) est terminée, et la commande $\bar{u}(t)$ est ϵ -optimale.

Si $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \succ \epsilon$, alors on passe à l'itération suivante.

2.4.3 Algorithme

1. Prendre un support contrôle de départ $\{u, T_{sup}\}$

- Calculer le vecteur des potentiels $y' = p'_{sup} \varphi_{sup}^{-1} / Q = A^{-1}(I, J_{sup})$.
- Calculer le vecteur des estimations $\Delta(t) = p(t) - y' \varphi(t)$, $t \in T_h$.
- Déterminer les composantes non support de la pseudo commande $w(t)$, $t \in T_N$, $T_N = T_h \setminus T_{sup}$:

$$w(t) = \begin{cases} d_*, & \text{si } \Delta(t) \prec 0, \\ d^*, & \text{si } \Delta(t) \succ 0, \\ \in [d_*, d^*], & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T_N. \end{cases}$$

2. Calculer w_{sup} .

3. Test d'optimalité du support contrôle $\{u, T_{sup}\}$.

- Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, T_{sup})$

$$\beta(u, T_{sup}) = \sum_{t \in T_N} \Delta(t) [w(t) - u(t)].$$

- Si $\beta(u, T_{sup}) = 0$ alors arrêter le processus avec $\{u\}$ commande optimale.
- Si $\beta(u, T_{sup}) \preceq \epsilon$ alors arrêter le processus avec $\{u\}$ commande ϵ -optimale.
- Si $\beta(u, T_{sup}) \succ \epsilon$, alors aller à 3

4. Changement de commande $u \rightarrow \bar{u}$

$$\bar{u} = u + \theta^0 l \quad \text{avec} \quad \beta(\bar{u}, T_{sup}) \preceq \beta(u, T_{sup}).$$

- Calculer le vecteur $l(t) = w(t) - u(t)$, $t \in T_N$, et $l_{sup} = -\varphi_{sup}^{-1} \sum_{t \in T_N} \varphi(t) l(t)$
- Calculer le pas $\theta^0 = \theta_{t^0} = \min (1, \theta(t))$, $t \in T_{sup}$ où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(d^* - u(t))}{l(t)}, & \text{si } l(t) \succ 0, \\ \frac{(d_* - u(t))}{l(t)}, & \text{si } l(t) \prec 0, \\ \infty, & \text{si } l(t) = 0, t \in T_{sup}. \end{cases}$$

- Calculer $\bar{u} = u + \theta^0 l$
- Calculer $\beta(\bar{u}, T_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(u, T_{sup})$.

5. Test d'optimalité du nouveau plan \bar{u}
 - Si $\beta(\bar{u}, T_{sup}) = 0$, alors arrêter le processus de résolution avec \bar{u} la commande optimale.
 - Si $\beta(\bar{u}, T_{sup}) \preceq \epsilon$, alors arrêter le processus avec \bar{u} commande ϵ -optimale.
 - Sinon, aller à 6
6. Changement de support (appui) $T_{sup} \rightarrow \bar{T}_{sup}$
 - Calculer les variations du vecteur des potentiels Δy .
 - Calculer la direction $\partial\delta(t)$ avec $\partial\delta(t^0) = -sign \bar{u}(t^0)$ et $\partial\delta(t) = 0$, $t \in T_{sup} \setminus t^0$.
 - Calculer $\alpha = -|w(t^0) - \bar{u}(t^0)|$.
 - Calculer $\sigma^* = \sigma(t^*) = \min_{t \in T_N} \sigma(t)$.

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\delta(t)/\partial\delta(t), & \text{si } \delta(t)\partial\delta(t) < 0, \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et le nouveau support: $\bar{T}_{sup} = (T_{sup} \setminus \{t^0\}) \cup \{t^*\}$.

- Calculer la valeur de suboptimalité correspondant à $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$

$$\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) = \beta(\bar{u}, T_{sup}) + \alpha\sigma^*.$$

- Si $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) = 0$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$ support contrôle optimal.
- Si $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \preceq \epsilon$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$ support contrôle ϵ -optimal.
- Si $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \succ 0$, Aller à 3 avec le nouveau plan d'appui $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$.

2.5 Exemple 2.1:

Pour mieux expliquer la méthode, nous allons partir d'un problème concret simple: le contrôle optimal d'un ressort.

Considérons une masse ponctuelle m , astreinte à se déplacer le long d'un axe (Ox), attachée à un ressort (voir figure 2.1).

On applique à cette masse ponctuelle une force extérieur horizontale $u(t)$.

Le problème donc, est de trouver la commande constante par morceaux $u(t)$, qui permet

d'amener la masse ponctuelle à sa position d'équilibre.

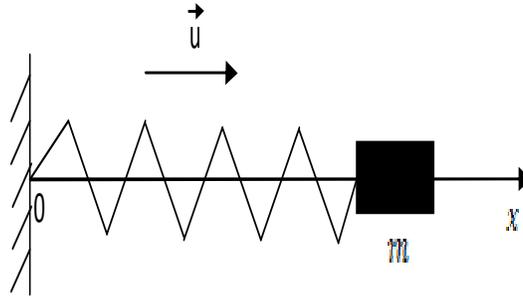


FIG. 2.1 – *Le ressort*

En tenant compte des contraintes $|u(t)| \leq 1$, et $Hx(10) = g$ trouver la commande qui minimisant la fonction coût:

$$\int_0^{10} u(t)dt \rightarrow \min$$

Le système différentiel correspondant à l'équation du mouvement est:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t), \end{cases}$$

$$x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_1(10) = 0, \quad x_2(10) = 0 \tag{2.31}$$

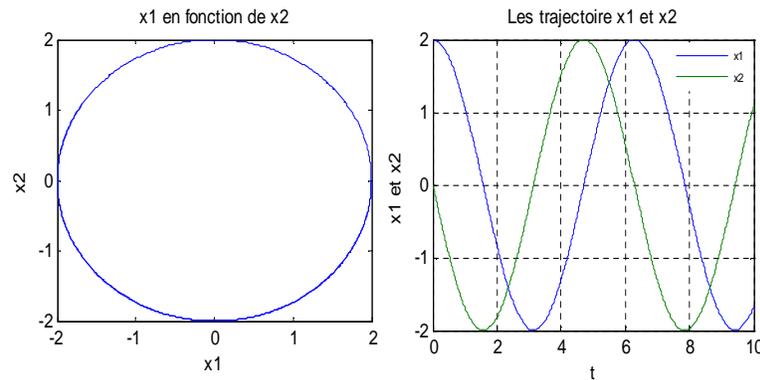
Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $rg(B, AB) = 2$. Donc, le système est contrôlable.

Si l'on applique aucune force extérieure, c'est à dire que $u(t) = 0$, on dit que le ressort est libre, et la masse ponctuelle oscille, et ne s'arrête jamais, donc ne parvient pas à sa position d'équilibre en un temps fini.

Ci-dessus, nous utilisons Matlab pour tracer dans le plan de phase (x_1, x_2) , les trajectoires solution associé, ainsi que $x_1(t)$, $x_2(t)$ en fonction du temps t .

FIG. 2.2 – $u(t) = 0$

L'idée que nous proposons consiste à utiliser la méthode adaptée de la programmation linéaire, présentée au début de ce chapitre, pour trouver la commande constante par morceaux $u(t)$, $t \in [0, 10]$ qui permet de ramener le ressort à sa position d'équilibre, supposée à l'origine $x(10) = (0; 0)$ en minimisant le coût donné.

La fonction objective peut s'écrire sous la forme canonique donnée par l'équation (2.1), en introduisant une nouvelle variable $\dot{x}_3 = u$, $x_3(0) = 0$. Alors, la fonctionnelle, prend la forme $-x_3(t_f) \rightarrow \max$.

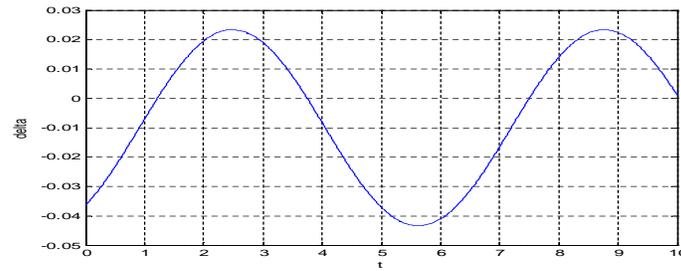
Dans la classe des commande contantes par morceaux avec un pas $h = 0.01$, le problème est équivalent à un problème de programmation linéaire, qu'on va résoudre avec la méthode adaptée.

Pour construire la commande optimale en boucle ouverte, nous allons procéder de la manière suivante:

Tout d'abord, on prend comme support initial $T_{sup} = \{3.75, 7.5\}$, correspondant à la matrice du support:

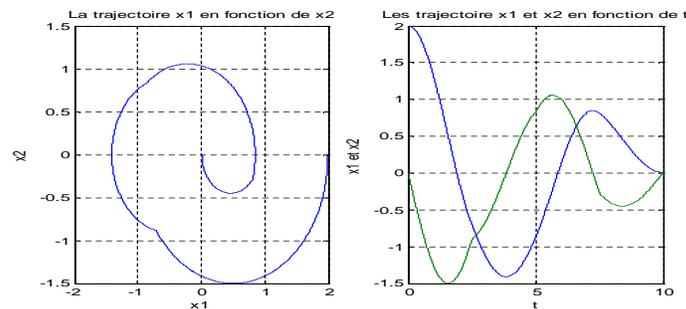
$$D_{sup} = \begin{pmatrix} -0.0003 & 0.0059 \\ 0.0100 & -0.0080 \end{pmatrix}$$

Nous calculons ensuite le vecteur des potentiels et la co-commande $\Delta(t)$, qu'on présente par la figure ci-dessous:

FIG. 2.3 – la co-commande $\Delta(t)$

On calcul $w(t)$, $t \in [0, 10]$, On trouve que $w(T_{sup}) \succeq 1$ et $\beta(u, T_{sup}) \succ \epsilon$.

Après 12 itérations, la trajectoire optimale présentée ci-dessous correspond au support optimal $T_{sup} = \{3.06, 6.56\}$, et le critère optimal est de 2.8963.

FIG. 2.4 – Les trajectoires x_1 en fonction de x_2 et $x(t)$

Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la méthode. Le temps mis pour la construction de la commande constante par morceaux en boucle ouverte n'est pas vraiment important, vu que ce temps dépend de la taille du système. Si on prend un autre exemple de dimension supérieure à 2, nous allons voir que le temps de calcul est plus grand que celui-ci, (exemple dans [37]).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons résolu le problème de commande optimale en boucle ouverte d'un système dynamique continu. Tout d'abord, nous avons transformé le problème sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Ensuite, l'utilisation de la méthode adaptée conduit à obtenir des résultats intéressants dans le cas des systèmes continus.

Nous verrons dans le chapitre 4, que cette méthode peut être étendue à la résolution des problèmes de commande en boucle ouverte, des systèmes dynamiques hybrides.

Chapitre 3

Généralités sur les systèmes dynamiques hybrides

3.1 Introduction

En automatique, un système physique est traditionnellement représenté par un modèle à dynamique continu [17] ou par un modèle à événements discrets [13, 29]. La nature de chacun de ces deux modèles dynamiques est définie par rapport aux variables utilisées pour décrire l'état du système et celles caractérisant le temps. Nous allons voir qu'à partir de la notion de variable d'état, on peut classer ces systèmes en différents types.

Les systèmes à dynamiques continues sont modélisés par des variables d'état continues qui prennent leurs valeurs sur l'ensemble des réels \mathbb{R} . En ce qui concerne les variables utilisées pour décrire le temps, ils peuvent être séparés en deux catégories, celles des systèmes continus où le temps est une variable continue, dans ce cas le modèle est souvent représenté par un ensemble d'équations différentielles, et celles des systèmes échantillonnés où le temps est une variable discrète, et le modèle est donné sous la forme d'équations récurrentes.

Les systèmes à événements discrets sont des systèmes qui prennent leurs valeurs dans un ensemble dénombrable et évolue d'une manière discontinue en fonction des changements discrets appelés événements. Deux types de modèles sont à distinguer : les modèles non temporisés où seul l'ordre de l'occurrence des événements intervient et les modèles temporisés où la variable temps, de nature discrète ou continue, sert d'horloge sur laquelle l'occurrence des événements est synchronisée. Ces systèmes peuvent être modélisés par des automates, les réseaux de Petri, etc.

Ainsi, il est suffisant dans certains cas et pour des objectifs spécifiques d'utiliser l'une de ces deux catégories de modèles dynamiques pour présenter un système physique donné. Cependant, dans la pratique, il est nécessaire d'utiliser un modèle dynamique permettant

la prise en compte des évolutions à la fois continues et événementielles, ce type de systèmes appelé systèmes dynamiques hybrides (SDH)[7, 29, 34, 57], couvrent plusieurs domaines d'applications tels que les systèmes électroniques, les systèmes de transport, les réseaux de communication, les systèmes flexibles de production, la robotique, etc.

Dans ce qui suit, nous donnons une définition et une classification des systèmes dynamiques hybrides, dont les principes ont été proposés par Branicky [7, 34, 57], suivi des exemples venant de domaines variés puis les différents moyens de représentation de ces systèmes. Ensuite, nous présenterons brièvement quelques travaux consacrés à la commande des systèmes hybrides.

3.2 Définition d'un système hybride :

Les systèmes dynamiques hybrides peuvent être définis comme des systèmes faisant intervenir explicitement et simultanément des phénomènes ou des modèles de type dynamique continu et événementiel, ce terme hybride se réfère au couplage essentiel de phénomènes continus et discrets au sein d'un système dont l'évolution au cours du temps est décrite par un ensemble de lois mathématiques qui peuvent être de natures continues au sens classique d'équations différentielles ou équations aux différences soumis au éléments décisionnels discrets ou événementiels.

La première formulation unitaire des concepts concernant les systèmes hybrides a été proposée par M.S Branicky [7, 34]. Ses travaux ont permis d'établir une classification de ces systèmes.

3.3 Classification des systèmes hybrides :

Nous présentons dans ce paragraphe la classification de Branicky des systèmes dynamiques hybrides

Phénomènes hybrides :

Soit $x(t)$ la trajectoire d'un état continu du système hybride avec une valeur initiale fixée et arbitraire $x(t_0) \in X$ et $\dot{x}(t)$ la vitesse de l'état continu pour le même système hybride.

Avant d'étudier comment se produisent les interactions entre les deux parties qui forment le système hybride, nous allons d'abord présenter les actions discrètes qui peuvent intervenir

lors de l'évolution d'un système continu décrit par une équation différentielle de la forme:

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \text{ pour } t \succeq 0. \quad (3.1)$$

où f est le champ de vecteurs.

On note τ l'instant où intervient une action discrète dont nous verrons ultérieurement comment elle peut être déclenchée. l'ensemble action et déclenchement est appelé phénomène hybride.

Action des phénomènes hybrides

Les action des phénomènes hybrides sur le système continu sont de deux types:

- Les phénomènes hybrides agissent sur la dynamique du système continu, modifiant ainsi cette dynamique. Le système hybride se situe alors pour $t \succeq \tau$ dans un autre mode de fonctionnement. On appelle ce phénomène commutation de modèle et τ instant de commutation. Un exemple simple de modèle formel avec deux modes de fonctionnement est le suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x,t) & \text{pour } t \prec \tau, \\ \dot{x}(t) &= f_2(x,t) & \text{pour } t \succeq \tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Les phénomènes hybrides agissent également sur le vecteur d'état du système, le faisant évoluer de manière différente pour $t = \tau$. C'est-à-dire qu'à l'instant τ , l'état saute de $x(\tau^-)$ à $x(\tau^+)$ sans changement de modèle ($x(\tau^-) \neq x(\tau^+)$). On appelle ce phénomène saut de l'état. Un exemple de modèle formel est représenté par les équations suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,t) & \text{pour } t \succeq 0 \text{ et } t \neq \tau, \\ x(\tau^+) &= x(\tau^-) + g & g \neq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

- Les deux actions peuvent être couplées. En effet, on peut considérer qu'à l'instant τ , on a une commutation de modèle et saut du vecteur d'état. Un exemple de modèle formel est le suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(x,t) & \text{pour } t \prec \tau, \\ x(\tau^+) &= x(\tau^-) + g & g \neq 0, \\ \dot{x}(t) &= f_2(x,t) & \text{pour } t \succ \tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'état continu du système, est alors ré-initialisé de $x(\tau^-)$ à $x(\tau^+)$. Notons que τ^- et τ^+ correspondent respectivement aux limites à gauche et à droite de τ , et g la constante provoquant une discontinuité à l'instant τ .

Déclenchement des phénomènes hybrides

L'action du phénomène hybride, comme le passage d'un mode de fonctionnement à un autre est déclenchée par un événement. Ces événements sont alors classés en deux types:

- Les événements déclenchés lorsque le vecteur d'état continu atteint certaines valeurs, provoquant ainsi un phénomène hybride dit autonome.
- Les événements déclenchés par une commande discrète externe, provoquant un phénomène hybride dit contrôlé.

Classification des phénomènes hybrides

A partir de ces considérations, Branicky a proposé la classification suivante:

- Systèmes hybrides à commutation autonome.
- Systèmes hybrides à saut autonome.
- Systèmes hybrides à commutation contrôlée.
- Systèmes hybrides à saut contrôlé.

Les paragraphes suivants développent les caractéristiques de chaque catégorie avec des exemples illustratifs.

3.3.1 Système hybride à commutation autonome:

Ces systèmes sont représentés par des équations différentielles définies par morceaux, l'espace d'état X est un sous ensemble fermé de \mathbb{R}^n . X est découpé en sous domaines $\{X_q, q \in Q\}$, fermé, d'intérieur non vide et deux à deux disjoints, et tel que:

$$\bigcup_{q \in Q} X_q = X$$

Sur chaque domaine X_q , on définit un champ de vecteurs f_q .

D'un autre point de vu, c'est un système qui est caractérisé par un changement discontinu du champ de vecteur $f(x(t), u(t))$ lorsque l'état atteint certains seuils. ceci peut être illustré

par la figure suivante:

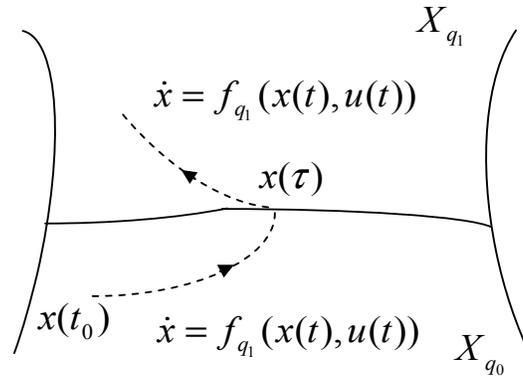


FIG. 3.1 – Trajectoire du système dynamique à commutation autonome

La trajectoire du système dynamique à commutation autonome, se construit de la manière suivante (voir figure 3.1). Si $x(t_0)$ appartient à l'intérieur du domaine X_{q_0} , alors $x(t)$ est solution de l'équation différentielle associée au champs de vecteurs $f_{q_0}(x(t), u(t))$ jusqu'à l'instant τ où $x(t)$ atteint la frontière séparant le domaine X_{q_0} du domaine X_{q_1} , $x(t)$ devient alors solution de l'équation différentielle associée au champs de vecteurs $f_{q_1}(x(t), u(t))$

Exemple 3.1:

Considérons l'exemple classique d'un thermostat utilisé pour maintenir la température dans une chambre. Le système étudié est composé d'un système de chauffage et d'un capteur de température. Les seuils inférieur et supérieur du thermostat sont fixés à des valeurs θ_m et respectivement θ_M tel que $\theta_m < \theta_M$. Le système de chauffage est en marche tant que la température dans la chambre est inférieure au seuil θ_M . Le chauffage est arrêté lorsque le capteur détecte le seuil supérieur θ_M , et il reste en arrêt jusqu'au moment où la température chute au dessous du seuil inférieur θ_m . La température de la chambre et le thermostat peuvent être vue comme un système dynamique dont l'évolution continue est définie par la variation de la température x dans la chambre et l'évolution discrète par le passage de l'état en marche du système de chauffage dans l'état d'arrêt.

L'évolution de la température peut être modéliser par les équations différentielles suivantes:

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(x) = -x + \alpha, & \text{si le chauffage est en marche.} \\ f_2(x) = -x, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est une constante réelle positive.

la figure suivante représente le modèle du thermostat et la trajectoire de la température

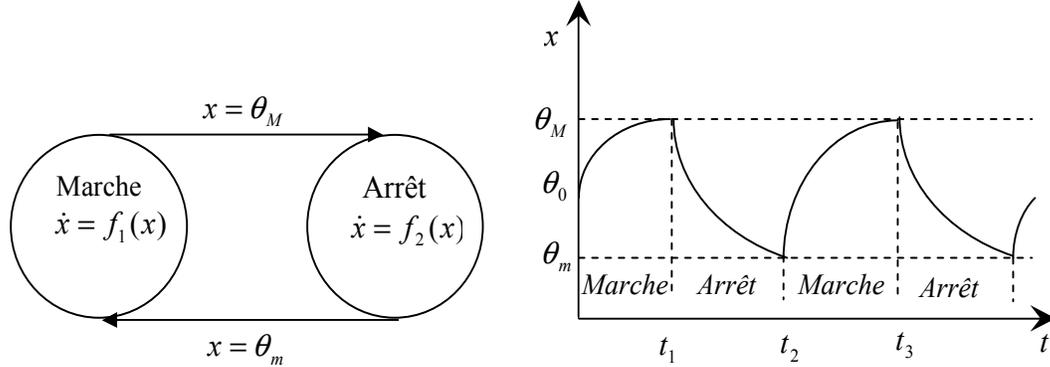


FIG. 3.2 – *Modèle du thermostat et trajectoire de la température*

3.3.2 Système hybride à saut autonome:

Dans ce cas, lorsque l'état atteint une certaine région de l'espace d'état, il effectue un saut, c'est à dire qu'il passe de façon discontinue de sa valeur courante à une autre.

Généralement, dans le cas des systèmes à saut autonome, le système possède un seul mode de fonctionnement et une seule transition autorisant la ré-initialisation de la variable continue.

Exemple 3.2:

On considère une balle de masse m soumise à l'action de la gravité g . On la laisse tomber d'une altitude z_0 avec une vitesse initiale nulle. La trajectoire $z(t)$ de la balle suit donc l'équation différentielle issue de la mécanique classique $m\ddot{z}(t) = -mg$. Quand $z(t) = 0$, la balle touche le sol et rebondit en perdant une fraction de son énergie.

$$\dot{z}(t^+) = -c\dot{z}(t^-), \text{ avec } c \leq 1$$

En posant $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \dot{z}(t)$, le modèle hybride de la balle rebondissante est donné par l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g, \\ x_1 \succeq 0, \end{cases}$$

Le modèle de la balle rebondissante est représenté par la figure ci-dessous:

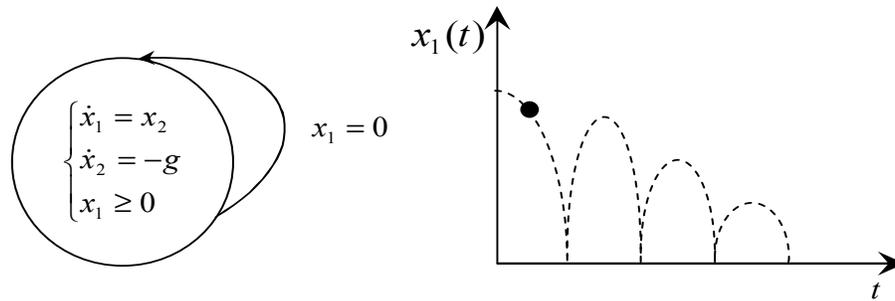


FIG. 3.3 – *Modèle de la balle rebondissante*

3.3.3 Système hybride à commutations contrôlées:

Un système dynamique à commutations contrôlées ou switched system est système hybride où la variable discrète $q(t)$ n'est pas vue comme une variable d'état mais comme une variable de contrôle. Ainsi, l'évolution de $q(t)$ n'est pas contrainte par un système de gardes mais donnée par un individu extérieur (commande).

Exemple 3.3:

Considérons un système constitué d'un réservoir avec une vanne d'alimentation et une vanne d'évacuation (figure 3.5)

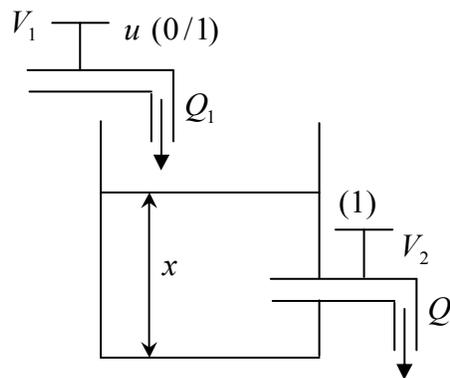


FIG. 3.4 – *Réservoir avec une vanne d'alimentation et vanne d'évacuation*

x représente le niveau du liquide dans le réservoir et u est le signal de commande de la vanne d'alimentation V_1 qui peut avoir les valeurs 0 (fermée) ou 1 (ouverte). la vanne d'évacuation V_2 est supposée ouverte. L'équation d'état est alors $\dot{x} = -ax + bu$, où a, b sont

des paramètres réels, positifs constants liés aux grandeurs physiques du réservoir. Quand le signal u commute de 1 à 0, la vitesse d'état $\dot{x}(t)$ permute de $-ax + b$ à $-ax$, avec un saut négatif d'amplitude b .

3.3.4 Système hybride à saut contrôlé:

Dans ce cas, la valeur de l'état change de façon discontinue, en réponse à une commande. Ce type de comportement est présent dans les systèmes électrotechniques, avec des entrées de types impulsionnels.

Exemple 3.4:

Considérons un système hybride à saut commandé, constitué d'un intégrateur pur avec une entrée en impulsion de Dirac, éventuellement retardé. L'équation de la dynamique est:

$$\dot{x}(t) = \delta(t - t_1), \quad t_1 > 0; \quad x(0) = 0$$

La trajectoire d'état est alors la fonction échelon unitaire, éventuellement retardée, comme l'indique la figure 3.6.

Ce système hybride est défini par les équations suivantes:

$$x(t) = \Gamma(t - t_1), \quad t \geq 0$$

$$\dot{x}(t) = 0, \quad x(t) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq t < t_1$$

$$\dot{x}(t) = 0, \quad x(t) = 1 \quad \text{pour } t_1 \leq t$$

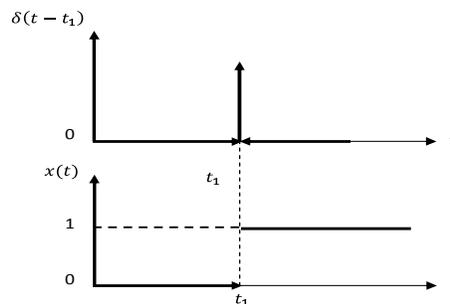


FIG. 3.5 – Comportement du système hybride à saut contrôlé

3.4 Modélisation des systèmes dynamiques hybrides:

La modélisation des systèmes dynamiques hybrides est une étape importante qui permet l'étude et la mise au point d'une loi de commande. Elle consiste à proposer des modèles précis qui peuvent décrire le comportement riche et complexe des systèmes dynamiques hybrides.

Ce domaine a reçu l'attention des chercheurs, et plusieurs formalismes ont été proposés afin d'établir un modèle homogène permettant la conciliation entre les parties discrètes et continus. Les modèles les plus utilisés pour la représentation des systèmes hybrides sont décrits ci-dessous:

3.4.1 Modélisation des SDH par les réseaux de Petri hybrides:

Les réseaux de Petri sont proposés pour la première fois par Petri (1962), dans le but de représenter des systèmes à événements discrets. Une limite pratique de réseaux de Petri intervient lorsque le nombre de jetons est très grand. En effet, cela provoque une augmentation du nombre d'états atteignables, ce qui conduit à la définition des réseaux de Petri continus. Dans ce modèle, les marquages de places sont des nombres réels mais strictement positifs, et le franchissement de transition est un processus continu [18, 46, 57]. La modélisation des systèmes hybrides conduit naturellement aux réseaux de Petri hybrides [46], contenant des places et des transitions continues, et des places et des transitions discrètes, le marquage d'une place continue est représenté par un nombre réel, dont l'unité est appelée marque, et le marquage d'une place discrète est représenté par un nombre entier dont l'unité est appelée jeton. Afin de mettre en évidence le couplage entre la dynamique discrète et la dynamique continue du système, Le graphisme des RDP hybrides est réalisé en adoptant les conventions suivantes:

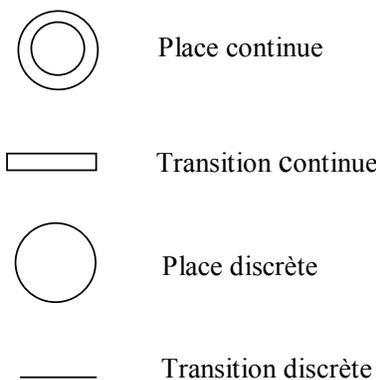


FIG. 3.6 – Places et transitions d'un RDP hybride

Exemple 3.5:

Considérons une vanne notée V_1 , qui commande le remplissage du bac R_2 , cela fait intervenir une variable discrète dont l'action peut être modélisée par un RDP généralisé. Enfin, une fois le bac R_2 est rempli, 60% du produit va dans un bac R_3 commandé par la vanne V_2 avec un débit v_2 , ensuite, le reste du produit va dans un bac R_4 commandé par la vanne V_3 avec un débit v_3 . Ce système peut être modélisé par le RDP hybride de la figure:

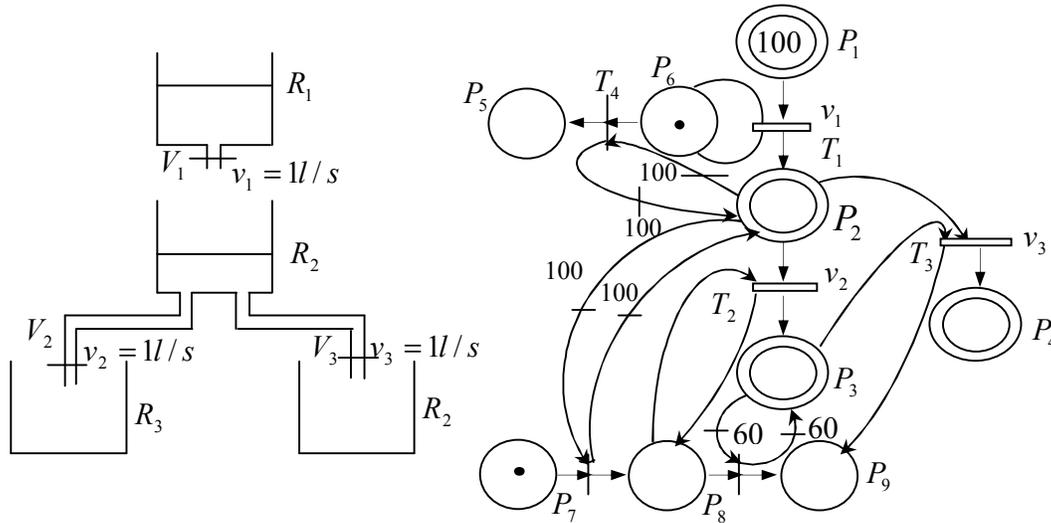


FIG. 3.7 – Exemple modélisé par un réseaux de Petri hybride.

3.4.2 Modélisation des SDH par les automates hybrides:

L'automate hybride a été présenté par [26], est une extension des automates à états finis.

Rappel sur les automates à états finis: Un automate à états finis noté AEF, est une machine qui peut prendre un nombre fini d'états. Il est défini par le quintuple suivant:

$$AEF = \langle Q, \Sigma, \Gamma, I, \mathbf{F} \rangle$$

où

- $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}$: Ensemble fini d'états discret correspondant aux états de fonctionnement de la machine
- $\Sigma = \{\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_m\}$ ensemble de symboles représentant les transitions d'états

- Γ est la fonction qui associe à chaque état et à chaque symbole de transition un ensemble d'état, c'est la fonction de transitions d'état.

$$\Gamma : Q \times \Sigma \longrightarrow Q' \subseteq Q,$$

$$(q, \varrho) \longrightarrow Q' \subseteq Q,$$

- $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux.
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux.

Exemple: Soit un serveur donné par la figure suivante:

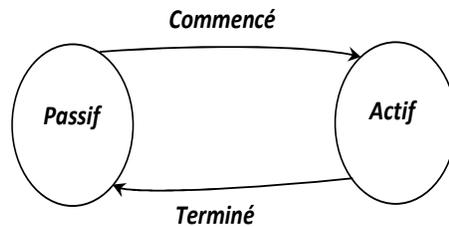


FIG. 3.8 – Modélisation d'un serveur à deux états

Le serveur est libre lorsqu'il est dans l'état passif, et il est occupé dans l'état actif. La figure (3.8) est une représentation graphique d'un AEF à deux états, tel que:

- $Q = \{Actif, Passif\}$.
- $\Sigma = \{Commencé, Terminé\}; I = \{Passif\}$
- $\Gamma\{Passif, Commencé\} = \{Actif\}; F = \{Actif\}$
- $\Gamma\{Commencé, Passif\} = \{Passif\}$

Automates hybrides:

Les automates hybrides sont issus des automates à états finis classiques, ils combinent les parties continues et discrètes dans une même structure. Les sommets du graphe contiennent les informations sur l'état continu et discret du système et les arcs reliant les sommets sont franchis lorsqu'une condition spécifiée sur les valeurs des variables continues et/ou discrètes est vérifiée. Nous pouvons dire qu'un automate hybride évolue par une alternance de pas continus, où les variables continues et le temps évoluent de façon continue, et de pas discrets où plusieurs transitions discrètes et instantanées peuvent être franchies [25, 14, 24].

Considérons l'automate représenté dans la figure 3.2 modélisant un thermostat utilisé pour maintenir la température dans une chambre, l'évolution continue est représentée par

des équations différentielles associées aux sommets du graphe et l'évolution événementielle est modéliser par les arcs étiquetés du graphe.

Les sommets *Marche* et *Arrêt* représentent les états discrets du système où l'évolution continue a lieu. Les prédicats $(x = \theta_M)$ et $(x = \theta_m)$ sur les arcs traduisent les *conditions pour l'occurrence d'un évènement*.

3.4.3 Modélisation des SDH par les systèmes à interface:

Cette méthode de modélisation est une représentation purement analytique des systèmes hybrides basée essentiellement sur un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences.

Les différents modèles interface proposés en littérature sont:

- Le modèle proposé par Antasklis [43], est divisé en trois parties. La première contient le système continu, la deuxième contient le SED et la troisième l'interface.

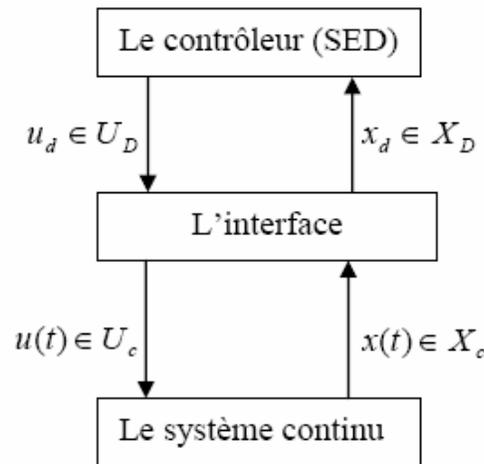


FIG. 3.9 – *Modèle à interface d'Antasklis*

- Le modèle de Brockett [11], qui a utilisé d'une manière simultanée les commandes continues et discrètes en introduisant une horloge ou un compteur variable.
- Le modèle à interface généralisée, qui a une particularité d'inclure toute les particularités des modèles cités ci-dessus. Ce qui fait que le modèle est capable de décrire l'influence de la partie discrète sur la partie continue et vice versa. Il est constitué d'un système hybride en boucle ouverte contrôlé par un contrôleur hybride, comme le montre la figure suivante:

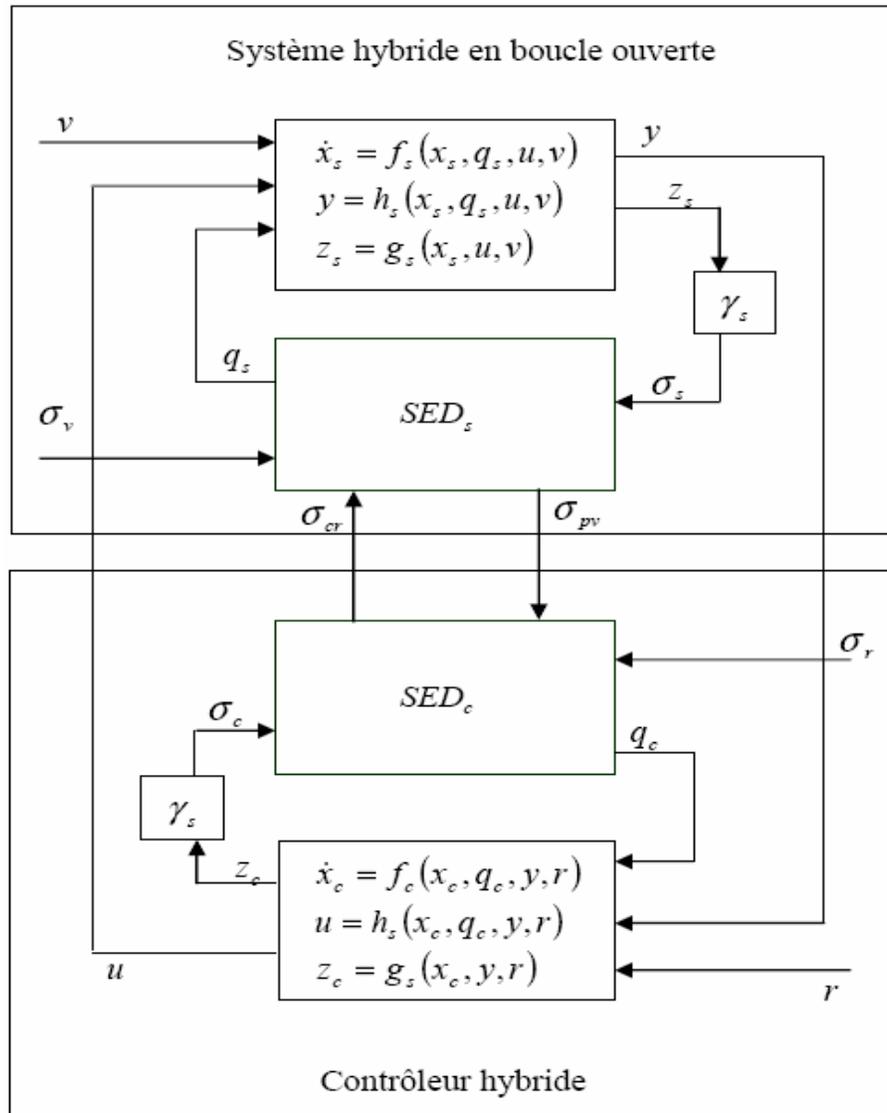


FIG. 3.10 – Schéma détaillé d'un modèle de système hybride à interface généralisé

3.5 Commande des systèmes dynamiques:

Contrairement au cas des systèmes continus ou des systèmes à événements discrets pour lesquels la notion de commande et les problèmes de synthèse associés sont bien identifiés et clairement définis, la commande des systèmes hybrides est une notion beaucoup plus large. En effet, le fait que ces systèmes font intervenir deux types de dynamiques, une continue

et une autre discrète, favorise la diversité des formulations du problème de commande hybride rencontrées dans la littérature. D'autre part, la théorie classique pour les systèmes continus [5, 10, 4, 1, 30], ne peut pas s'appliquer directement aux problèmes hybrides: Les résultats doivent être adaptés pour prendre en compte les discontinuités.

Plusieurs approches issues de la commande optimale des systèmes continus sont proposées pour résoudre les problèmes de commande optimale des systèmes dynamiques hybrides.

Une première approche générale de la commande optimale des SDH est proposée par Branicky dans [9]. Cette approche repose sur le principe de la programmation dynamique de R. Bellman [33, 5]. Pour un problème simplifié ne comportant que des sauts commandés, S. Hedlund et A. Rantzer [27] présentent une méthode de discrétisation du problème de contrôle formulé en termes d'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman [4, 3]. Une version hybride du Principe du Maximum de Pontryaguine est proposée dans [39, 9, 41]. Ce principe permet pour un problème de commande classique (système continu) d'énoncer des conditions nécessaires vérifiées par la commande optimale. La prise en compte des discontinuités de modèles provoquées par les événements discrets est intégrée et garantit alors une optimisation globale du critère. Citons également les travaux de Sussmann [54] qui a énoncé une version hybride et très générale du principe du maximum, et les travaux de P. Riedinger, C. Lung et F. Kratz qui énoncent et démontrent un principe du maximum hybride valable pour une classe très générale de systèmes hybrides [51, 50]. Une autre méthode basée sur le formalisme du calcul des variations [14, 24], consiste à déterminer les expressions des gradients des fonctions coût, utile à la mise en oeuvre des méthodes de descente. Des calculs formels ont ainsi déjà été utilisés dans [2, 23].

Nous allons présenter brièvement les trois approches adaptées à la résolution des problèmes de commande optimale des SDH.

3.5.1 Formulation du problème de commande:

En toute généralité, il est possible de définir un système hybride de la manière suivante: Pour un ensemble fini d'états discrets $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}$, on associe une famille d'équations différentielles:

$$\dot{x}(t) = f_{q_i}(x(t), u(t), t) \quad (3.6)$$

Où

- $q_i \in Q$, $i = \overline{1, r+1}$.
- L'état continu $x(t)$ prend ses valeurs dans \mathbb{R}^n .

- La commande continue $u(t)$ prend ses valeurs dans l'ensemble U inclus dans \mathbb{R}^m .
- Le champs f_{q_i} est supposé défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$, $\forall q_i \in Q$.

Nous supposons donc de manière très générale qu'un changement d'état discret q_i est déterminé par la donnée d'une fonction de transition discrète φ :

$$q(t^+) = \varphi(x(t^-), q(t^-), v(t), t) \quad (3.7)$$

Où

- $v(t) \in \Omega$ représente la commande discrète.
- La variable discrète $q(t)$ est une fonction du temps constante par morceaux.
- Les notations t^+ et t^- dans (3.7) correspondent respectivement aux limites à gauches et à droites de t .

La valeur de la fonction de transition discrète φ dépend de deux sortes de phénomènes discrets qui affectent l'évolution de $q(t)$:

- Un changement provoqué par la commande discrète $v(t)$ est appelé saut commandé.
- Un événement issu de la partie continue correspondant à la validation d'une condition frontière sur (x, t) . Ces conditions aux frontières peuvent représenter des seuils, des saturations, des hysteresis, des délais entre deux commutations..., etc. Elles déterminent comment la dynamique continue agit sur la fonction de transition discrète.
- Un ensemble de fonctions de saut $\Phi_{(q_i, q_{i+1})}$ associées aux transitions d'état discret est également considéré:

$$x(t^+) = \Phi_{(q_i, q_{i+1})}(x(t^-), t) \quad (3.8)$$

Avec l'occurrence d'une transition de q_i vers q_{i+1} , où $i = \overline{1, r}$ l'état continu est alors ré-initialisé de $x(t^-) \in \mathbb{R}^n$ vers $x(t^+) \in \mathbb{R}^n$

Les équations (3.6), (3.7) et (3.8) permettent de modéliser les différents phénomènes hybrides: saut sur l'état et discontinuités sur le champs provoqués de manière volontaire ou involontaire.

Posons $[t_0, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_r, \tau_{r+1} = t_f]$ et $q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{r+1}\}$ les suites respectivement des instants de commutation et des modes associés à la commande $(u, v)(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_f]$.

On peut alors définir un critère hybride par:

$$J(u, v) = \int_{t_0}^{t_f} L_{q(t)}(x(t), u(t), t) dt = \sum_{i=0}^r \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} L_{q_i}(x(t), u(t), t) dt \quad (3.9)$$

Une commande optimale $(u, v)(t)$ est alors une commande qui minimise J sur l'intervalle $[t_0, t_f]$.

La formulation du critère que nous venons de donner n'est pas la plus générale, nous aurions pu ajouter au critère des coûts associés aux transitions d'état discret et des coûts initial et terminal. Nous sommes maintenant en mesure de présenter trois résultats théoriques énonçant des conditions nécessaires.

3.5.2 La programmation dynamique et les équations HJB

La programmation dynamique a été utilisée pour la résolution d'un problème de commande optimale hybride [8, 27, 39, 55]. La formulation que nous donnons est une adaptation du résultat original au problème que nous venons de décrire.

Théorème 3.1. *Si une trajectoire admissible $(x,q)(t)$ déterminée par la donnée de la condition initiale $(x_0, q_0)(t)$ de la commande $(u,v)(t)$, est optimale alors les conditions suivantes sont vérifiées:*

a. *Pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$.*

$$\frac{\partial V(x(t), q(t), t, t_f)}{\partial t} = - \inf_u \{ L_{q(t)}(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial V(x(t), q(t), t, t_f)}{\partial x} \right]^T f_{q(t)}(x(t), u(t), t) \} \quad (3.10)$$

b. *Pour tout t et pour tout $v \in \Omega$*

$$V(x(t), q_i, t, t_f) \preceq V(x', q_{i+1}, t, t_f) \quad (3.11)$$

avec

$$q_{i+1} = \wp(x(t), q(t), v, t)$$

$$x' = \Phi_{(q_i, q_{i+1})}(x(t), t)$$

Cette approche repose sur le principe d'optimalité de Bellman et les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Des résultats intéressants sont obtenus en petite dimension, mais cette formulation nécessite soit une discrétisation complète du problème avec un risque d'explosion combinatoire, soit la résolution des équations aux dérivées partielles d'HJB, qui sont difficiles à résoudre efficacement.

3.5.3 Principe du maximum pour les SDH:

Le principe du maximum de Pontryaguine, est un outil puissant pour rechercher les trajectoires optimales d'un système. L'idée principale est d'exploiter les conditions nécessaires d'optimalité dans chaque mode de fonctionnement d'un système hybride [9, 39, 54]. Une difficulté de la mise en oeuvre d'une telle méthode réside dans le calcul de l'état adjoint à

un instant donné, indispensable pour résoudre le problème de minimisation de l'hamiltonienne.

Théorème 3.2. *On introduit l'hamiltonien H_q associé au système hybride:*

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) = \lambda^T f_{q_i}(x, u, t) - \lambda^0 L_{q_i}(x, u, t) \quad (3.12)$$

Si le contrôle u est optimal sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, alors il existe une application non triviale $\lambda : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue par morceaux telle que:

. Pour tout $t \in [t_0, t_f]$, $(\lambda^, \lambda^{0*}, x^*, u^*)(t)$ vérifie la condition du maximum:*

$$H_{q_i}(\lambda^*, \lambda^{0*}, x^*, u^*, t) = \sup_{u \in U} H_{q_i}(\lambda^*, \lambda^{0*}, x^*, u, t) \quad (3.13)$$

- . $\dot{x}(t) = \frac{\partial H_{q_i}}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda^0, x, u, t)$*
- . $\dot{\lambda}(t)^T = -\frac{\partial H_{q_i}}{\partial x}(\lambda, \lambda^0, x, u, t)$ (équation d'Euler-Lagrange).*
- . $H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, t) = 0$ Le long de la trajectoire optimale.*
- . A chaque instant de transition τ_i entre deux modes q_i et q_{i+1} , les conditions de transversalité s'écrivent:*
 - Si τ_i est un instant de transition depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} alors:*

$$\lambda(\tau_i^+) = \lambda(\tau_i^-) - \frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^T(x(t), t)}{\partial x} \pi|_{t=\tau_i}$$

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^+) = H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^-) + \frac{\partial C_{q_i, q_{i+1}}^T(x(t), t)}{\partial t} \pi|_{t=\tau_i} \quad (3.14)$$

avec π un vecteur de dimension p .

- Si τ_i est un instant de transition non contraint depuis le mode q_i vers le mode q_{i+1} alors:*

$$\lambda(\tau_i^+) = \lambda(\tau_i^-)$$

$$H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^+) = H_{q_i}(\lambda, \lambda^0, x, u, \tau_i^-) \quad (3.15)$$

- . $\lambda(t)$ doit vérifier aux instants initial et final les conditions de transversalité:*

$$\lambda(t_0) \in N_{C_0}(x(t_0)) \quad \lambda(t_f) \in N_{C_f}(x(t_f)) - \lambda_0 \frac{\partial \Phi_{q_{r+1}}(x(t_f), t_f)}{\partial x} \quad (3.16)$$

Où $N_C(x)$ représente le sous espace normal à C au point x , C_0 et C_f définissent respectivement les frontières des ensembles X_0 et X_f .

L'utilisation du principe du maximum permet une caractérisation des solutions optimales. Elle peut sembler conduire à des résultats directement. Les conditions de transversalité nous fournissent à chaque instant de commutation une relation entre les limites à gauche et à droite de la fonction Hamiltonienne et de la variable adjointe. Mais aucune information n'est disponible sur l'instant et le lieu où se produit la commutation, alors la dynamique discrète conduit à des bifurcations sur les trajectoires continues à chaque instant où une transition discrète est autorisée.

3.5.4 Calcul des variations:

Le calcul des variations a été adapté à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides [2, 14, 24, 23]. Ce qui permet de déterminer les expressions de l'état adjoint ainsi que des gradients des critères par rapport aux différentes grandeurs de commande, ce qui rend possible la mise en oeuvre de méthodes de descente.

On formule le problème de manière générale, en considérant les changements de modèle intervenant dans l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$, à des instants τ_i . On note $\xi_i = x(\tau_i)$, $i = 1, \dots, r$.

Le problème de commande que l'on pose consiste à chercher une commande u^* , les instants de commutation τ_i^* et le temps final t_f^* qui minimisent le critère:

$$J(u, \tau, t_f) = \sum_{i=0}^r \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} L_{q_i}(\dot{x}(t), u(t), x(t), t) dt + \sum_{i=0}^r N_i(\xi_i, \tau_i) + K(x_f, t_f) \quad (3.17)$$

Où

$$L_{q_i}(\dot{x}(t), u(t), x(t), t) = M_{q_i}(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)(\dot{x}(t) - f_{q_i}(x(t), u(t), t)), \quad q_i \in Q = \{q_1, \dots, q_{r+1}\}$$

$M_{q_i}(x(t), u(t), t)$ est une fonction à valeur dans \mathbb{R} de classe C^1 , $N_i(\xi_i, \tau_i)$ le coût de changement de modèle et $K(x_f, t_f)$ le coût final.

L'Hamiltonien et le moment conjugué s'expriment par:

$$H_{q_i} = -L_{q_i} + \dot{x}^T \frac{\partial L_{q_i}}{\partial \dot{x}} + \dot{u}^T \frac{\partial L_{q_i}}{\partial \dot{u}} = -M_{q_i} + \lambda^T f_{q_i}, \quad q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}$$

$$P(t) = \begin{cases} \frac{\partial L_{q_i}}{\partial \dot{u}} = 0 \\ \frac{\partial L_{q_i}}{\partial \dot{x}}, \end{cases} \quad \text{état qdjoint du système.}$$

En écrivant la stationarité de la variation générale du critère par rapport à l'état x , à la commande u , aux instants de commutation τ_i et à l'instant final t_f , on obtient le système

adjoint et les gradients du critère par rapport à la commande u , les instants de commutation τ_i et l'instant final t_f suivants:

- Système adjoint:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H_{q_i}}{\partial x}(t) - \dot{\lambda}(t) &= 0, \quad q_i \in Q \\ \lambda(\tau_i^-) - \lambda(\tau_i^+) + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i}(\xi_i, \tau_i) &= 0 \\ \frac{\partial K}{\partial x_f}(x_f, t_f) + \lambda(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

- Gradient du critère par rapport à la commande u :

$$\nabla J_u = -\frac{\partial H_{q_i}}{\partial u}(t), \quad q_i \in Q$$

- Gradient du critère par rapport aux instants de commutation τ_i :

$$\nabla J_{\tau_i} = -H_{q_i}(\tau_i^-) + H_{q_{i+1}}(\tau_i^+) + \frac{\partial N_i}{\partial \tau_i}(\xi_i, \tau_i)$$

- Gradient du critère par rapport à l'instant final t_f :

$$\nabla J_{t_f} = -H_{q_{i+1}}(t_f) + \frac{\partial K}{\partial t_f}(x_f, t_f)$$

Cette méthode permet d'obtenir suivant le type de commande, les expressions des gradients d'un critère par rapport à la commande u , ou par rapport aux instants de commutation et l'instant final, de calculer l'état adjoint du système hybride et mis en évidence sa discontinuité lors d'une commutation ou d'un saut. Des méthodes de descente ont été utilisées avec les expressions des gradients et de l'état adjoint, pour calculer les grandeurs de commande optimales. Les résultats numériques ont montré l'efficacité de la méthode. Cependant, dans le cas des systèmes complexes le temps de calcul est important.

Conclusion

Les systèmes dynamiques hybrides sont des systèmes qui combinent une partie discrète et une partie continue. Ceux-ci ont reçu beaucoup d'attention et plusieurs formalismes ont été proposés afin d'établir un modèle homogène permettant la conciliation entre les parties discrètes et continues.

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition et une classification des systèmes dynamiques hybrides suivant les caractéristiques des phénomènes hybrides. Ensuite, nous

avons passé en revue les principales approches de modélisation et de commande des systèmes hybrides. Plusieurs modélisations hybrides ont été développées dans la littérature. Cette étape importante regroupe un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système à étudier, et la mise au point d'une loi de commande.

La commande des systèmes dynamiques hybrides a pour objectif d'intervenir dans l'évolution du système au bon moment, pour assurer le respect des spécifications imposées tout au long de son fonctionnement. En effet, un certain nombre de travaux ont été effectués dans ce domaine dont le point commun est d'adapter les méthodes de l'automatique continue aux systèmes hybrides.

Le travail que nous allons présenter dans la suite a pour but de résoudre deux problèmes de contrôle optimal, en utilisant la méthode adaptée de la programmation linéaire, qui consiste à trouver une commande constante par morceaux et les instants de commutation, permettant de ramener le système d'un état initial donné à un état final désiré tout en respectant certaines contraintes

Chapitre 4

Résolution d'un problème de contrôle optimal d'une classe de systèmes dynamiques hybrides par la méthode adaptée

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier deux problèmes de commande optimale d'un système dynamique hybride. L'étude sera centrée sur une classe de systèmes hybrides composée de sous systèmes linéaires avec des commutations autonomes. Cette classe est l'une des plus importantes, pour deux raisons principales. D'abord, elle est suffisamment riche pour permettre une modélisation réaliste de nombreux problèmes. Ensuite, sa simplicité relative permet la conception d'outils algorithmique pour l'analyse et la commande de ces systèmes.

On s'intéresse à deux problèmes de contrôle optimal. Le premier consiste à résoudre un problème à coût final. Le deuxième, est un problème à erreur terminale. Il s'agit de déterminer la commande constante par morceaux et les instants de commutation permettant d'approcher au mieux un état désiré à l'instant final donné. Des mises en oeuvre numériques des deux problèmes sont proposées, afin de confirmer les résultats établis.

4.2 Problème à coût final:

Nous nous intéressons à une classe de systèmes où les commutations interviennent lorsque l'état atteint une valeur donnée, appelée seuil. Cette classe de modèles pouvant

être considérés comme des processus continus évoluant dans un intervalle de temps $[t_0, t_f]$ et dans lesquels des événements discrets provoquent des modifications de la structure de leur modèle.

4.2.1 Formulation du problème de commande:

On formule le problème de manière générale. Les changements de modèle interviennent dans l'intervalle de temps $T = [t_0, t_f]$ à des instants $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ appelés instants de commutation que l'on suppose en nombre fini et vérifiant:

$$t_0 = \tau_0 \prec \tau_1 \prec \tau_2 \prec \dots \prec \tau_r \prec \tau_{r+1} = t_f.$$

Ce système est régi dans chaque intervalle de temps $[\tau_{i-1}, \tau_i[$ par une équation notée:

$$\dot{x}(t) = A_{q_i}x(t) + B_{q_i}u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\} \quad (4.1)$$

où $x(t)$ un n -vecteur représentant l'état continu du système à l'instant $t \in [t_0, t_f]$, x_0 est la position initiale supposée contrôlable, A_{q_i} , $i = \overline{1, r+1}$ des $n \times n$ matrices constantes, B_{q_i} , $i = \overline{1, r+1}$ des n -vecteurs, q la variable discrète qui permet de sélectionner entre différents modes.

Soit $h = (t_f - t_0)/N$, où N un entier positif, $T_{h_i} = \{\tau_{i-1}, \tau_{i-1} + h, \dots, \tau_i - h\}$, $i = \overline{1, r+1}$, $T_{h_1} \cup T_{h_2} \cup \dots \cup T_{h_{r+1}} = T_h$.

$u(t)$, $t \in T_h$ une commande constante par morceaux prenant des valeurs constantes sur des intervalles de longueur h , si $u(t) = u(t_0 + kh)$, $t \in [t_0 + kh, t_0 + (k+1)h]$, $k = \overline{0, N-1}$.

Et

$$d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h. \quad (4.2)$$

Le problème de commande optimale que l'on pose consiste à chercher une commande constante par morceaux $u^*(t)$, $t \in T_h$ et les instants de commutation $\tau^* = (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_r^*)$ qui maximisent le critère:

$$L(u, \tau) = c'x(t_f) \rightarrow \max, \quad (4.3)$$

et qui vérifient les contraintes:

$$H_i x(\tau_i) = g_i, \quad i = \overline{1, r+1}. \quad (4.4)$$

Où $(g_i, i = \overline{1, r+1})$ des m -vecteurs, d_* , d^* sont des scalaires, c le vecteur des coûts, H_i des $m \times n$ -matrices de rang m ($\text{rang}(H_i) = m \preceq n$, $i = \overline{1, r+1}$), $t_0 = \tau_0$, $t_f = \tau_{r+1}$.

Nous avons considéré une classe de systèmes hybrides, où il n'y a pas de ré-initialisation de la variable continue, ce qui signifie qu'à tout instant de transition τ_i , entre deux modes de fonctionnement, nous avons:

$$x(\tau_i^+) = x(\tau_i^-) = x(\tau_i), \quad i = \overline{1, r}. \quad (4.5)$$

Les notations τ^- et τ^+ dans (4.5) correspondent respectivement aux limites à gauche et à droite de t .

Nous proposons de développer une méthode efficace pour la construction d'une commande optimale en boucle ouverte, basée sur le principe de la méthode adaptée de la programmation linéaire.

Définition 4.1. On appelle commande du système (4.1), tout ensemble (u, τ) formé de la commande constante par morceaux $u(t)$, $t \in T_h$ et des instants de commutation τ_i , $i = \overline{1, r}$

Définition 4.2. On dit que la commande (u, τ) est admissible si elle vérifie les contraintes suivantes:

$$H_i x(\tau_i) = g_i, \quad d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h.$$

Définition 4.3. On dit que la commande admissible (u^0, τ^0) est optimale si elle réalise le maximum du critère:

$$L(u^0, \tau^0) = \max_{(u, \tau)} L(u, \tau).$$

Définition 4.4. On dit que la commande admissible $(u^\epsilon, \tau^\epsilon)$ est ϵ -optimale si:

$$L(u^0, \tau^0) - L(u^\epsilon, \tau^\epsilon) \preceq \epsilon, \quad \epsilon \succeq 0.$$

La résolution du problème (4.1)-(4.4) se fait en deux étapes:

- la première étape consiste à fixer les instants de commutation τ_i , $i = \overline{1, r}$, pour résoudre le problème de contrôle optimal d'un système continu par morceaux.
- la seconde étape, consiste à chercher les instants de commutation optimaux.

Première étape:

Tout d'abord, on fixe les instants de commutation τ_i correspondant à une solution réalisable du problème, ensuite, on passe à la résolution du problème en utilisant la méthode présentée dans le chapitre II, sachant que durant l'évolution, l'état est décrit par des modèles différents.

Soit $u(t)$, $t \in T_h$ une commande constante par morceaux admissible associée à la trajectoire $x(t)$ solution de l'équation (4.1), et $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\}$ les instants de commutation admissible

fixés.

Soit $x(t)$ la solution du système différentiel sur l'intervalle $[t_0, \tau_1]$:

$$x(\tau_1) = F_{q_1}(\tau_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\tau_1} F_{q_1}(\tau_1, t)B_{q_1}u(t)dt.$$

Sur l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$:

$$x(\tau_2) = F_{q_2}(\tau_2, \tau_1)x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_{q_2}(\tau_2, t)B_{q_2}u(t)dt.$$

⋮

Sur l'intervalle $[\tau_{r-1}, \tau_r]$:

$$x(\tau_r) = F_{q_r}(\tau_r, \tau_{r-1})x(\tau_{r-1}) + \int_{\tau_{r-1}}^{\tau_r} F_{q_r}(\tau_r, t)B_{q_r}u(t)dt.$$

Sur l'intervalle $[\tau_r, \tau_{r+1}]$:

$$x(\tau_{r+1}) = F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, \tau_r)x(\tau_r) + \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, t)B_{q_{r+1}}u(t)dt, \quad \tau_{r+1} = t_f.$$

Le coût à maximiser est :

$$L(u) = c' \int_{t_0}^{\tau_1} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, \tau_r)F_{q_r}(\tau_r, \tau_{r-1}) \dots F_{q_1}(\tau_1, t)B_{q_1}u(t)dt + \dots + c' \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, t)B_{q_{r+1}}u(t)dt.$$

On a:

$$u(t) = u(t_0 + kh), \quad t \in [t_0 + kh, t_0 + (k+1)h], \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Et $\psi_c(t)$, $t \in T_h$ la solution de système conjugué:

$$\dot{\psi}_c(t) = -A'_{q_i}\psi_c(t), i = \overline{1, r+1}, \quad (4.6)$$

avec $\psi_c(t_f) = c$ la condition initiale.

A chaque instant de transition τ_i entre deux modes q_i et q_{i+1} nous avons la condition suivante:

$$\psi_c(\tau_i^+) = \psi_c(\tau_i^-). \quad (4.7)$$

La continuité de vecteur adjoint aux instants de transition est une conséquence du caractère autonome du modèle hybride considéré et de la non ré-initialisation de l'état continu $x(t)$.

$G_q(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ des matrices solution des équations:

$$\dot{G}_i = -G_i(t)A_{q_i}, \quad (4.8)$$

avec $G_i(\tau_i) = H_i$ les conditions initiales.

Donc, si on pose:

$$p_{q_i}(t) = \int_t^{t+h} \psi'_c(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta,$$

et

$$\varphi_{q_i}(t) = \int_t^{t+h} G_i(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta.$$

Où

$$p_{q_1}(t) = c' \int_{t_0}^{\tau_1} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, \tau_r) F_{q_r}(\tau_r, \tau_{r-1}) \dots F_{q_1}(\tau_1, t) B_{q_1} dt,$$

⋮

$$p_{q_{r+1}}(t) = c' \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, t) B_{q_{r+1}} dt.$$

$$\varphi_{q_1}(t) = H_1 \int_{t_0}^{\tau_1} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, \tau_r) F_{q_r}(\tau_r, \tau_{r-1}) \dots F_{q_1}(\tau_1, t) B_{q_1} dt,$$

⋮

$$\varphi_{q_i}(t) = H_i \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} F_{q_{r+1}}(\tau_{r+1}, t) B_{q_{r+1}} dt.$$

Le problème devient:

$$L(u) = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} p_{q_i}(t) u(t) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{t \in T_{h_i}} \varphi_{q_i}(t) u(t) = \bar{g}_i, \quad q \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}, \quad i = \overline{1, r+1}, \quad (4.9)$$

$$d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h,$$

Où

$$\bar{g}_i = g_i - H_i x_0(\tau_i), \quad F_{q_i}(\tau_i, t) = F_{q_i}(\tau_i) F_{q_i}^{-1}(t) = e^{A_{q_i}(\tau_i - t)},$$

$x_0(\tau_i)$, $t \in T_{h_i}$, les trajectoires du système (4.1) avec une commande $u(t) = 0$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

4.2.2 Support contrôle:

Dans l'ensemble T_h , nous choisissons un ensemble $T_{sup} = \{t_l, l = \overline{1, m}\}$, formé de m points isolés appelés des moments d'appui, ensuite, nous construisons la $m \times m$ -matrice $\varphi_{sup} = \{\varphi_{q_i}(t), t \in T_{sup}, q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}\}$. L'ensemble $T_{sup} = \{t_l, l = \overline{1, m}\}$ est appelé support du problème si la matrice de support ou d'appui $\varphi_{sup} = \{\varphi_{q_i}(t_l), l = \overline{1, m}, q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}\}$ est inversible, c'est à dire $\det(\varphi_{sup}) \neq 0$

4.2.3 Méthode de résolution:

La paire $\{u, T_{sup}\}$ constituée de la commande admissible $u(t)$, $t \in T_h$ et le support T_{sup} est appelée support contrôle du problème (4.9).

Le vecteur des potentiels y peut être déterminé par la solution de l'équation $y\varphi'_{sup} = p_{sup}$, où $p_{sup} = (p_{q_i}(t), t \in T_{sup}, q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\})$.

La co-commande est définie comme suit:

$$\Delta_{q_i}(t) = p_{q_i}(t) - y'\varphi_{q_i}(t), \quad t \in T_{h_i}, \quad q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}.$$

ou bien, en utilisant la co-trajectoire $\psi_c(t)$, $t \in T$, solution du système conjugué:

$$\dot{\psi}_c(t) = -A'_{q_i}\psi_c(t)$$

avec les conditions initiales $\psi_c(\tau_i) = c - H'_i y$, la co-commande est définie donc par:

$$\Delta_{q_i}(t) = \int_t^{t+h} \psi'_c(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta, \quad t \in T_{h_i}.$$

La pseudo-commande $w(t)$, $t \in T_h$ est définie dans $T_N = T_h \setminus T_{sup}$ par:

$$\begin{cases} w(t) = d_*, & \text{si } \Delta_{q_i}(t) \leq 0, \\ w(t) = d^*, & \text{si } \Delta_{q_i}(t) \geq 0, \\ w(t) \in [-1, 1], & \text{si } \Delta_{q_i}(t) = 0, \quad t \in T_N. \end{cases} \quad (4.10)$$

Et $w(t)$, $t \in T_{sup}$ est déterminé par:

$$\sum_{t \in T_{sup}} \varphi_{q_i}(t) w(t) + \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) w(t) = \bar{g}_i, \quad i = \overline{1, r+1}, \quad T_{N_i} \subset T_{h_i}, \quad (4.11)$$

Si $d_* \preceq w(t) \preceq d^*$, $t \in T_{sup}$, alors $u^*(t) = w(t)$, $t \in T_h$ est une commande optimale.

$\varkappa(t)$, $t \in T$, la solution de l'équation (4.1) avec la commande discrète $u(t) = w(t)$, $t \in T_h$, et la condition initiale $x(t_0) = x_0$, appelée la pseudo-trajectoire.

Remarque: L'existence et l'unicité d'une solution globale pour le système (4.1) sont démontrées dans l'annexe.

la valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ peut être définie comme suit:

$$\beta(u, T_{sup}) = c'x(t_f) - c'x(t_0). \quad (4.12)$$

Si $\beta(u, T_{sup}) \leq 0$, on dit que le support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ est ϵ -optimal.

Maintenant, supposons que pour un ϵ positif donné, la valeur de suboptimalité de support contrôle $\beta(u, T_{sup}) > 0$ et l'inégalité $d_* \leq w(t) \leq d^*$, $t \in T_{sup}$ n'est pas vérifiée, une itération consiste à effectuer un changement de support contrôle $\{u, T_{sup}\}$ en un nouveau support contrôle $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$, cela se fait en deux procédures:

- Changement de commande $u(t) \rightarrow \bar{u}(t)$
- Changement de support $T_{sup} \rightarrow \bar{T}_{sup}$

4.2.4 Changement de commande:

On construit une nouvelle commande admissible sous la forme:

$$\bar{u}(t) = u(t) + \partial u(t) = u(t) + \theta^0 l(t), \quad t \in T_h.$$

Où $l(t)$ est la direction d'amélioration de la commande $u(t)$, $t \in T_h$ et θ^0 le pas maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible:

$l(t)$ sera définie de sorte qu'elle maximise l'accroissement de la fonctionnelle. Pour cela, posons:

$$l(t) = w(t) - u(t), \quad t \in T_N. \quad (4.13)$$

On a $u(t)$, $\bar{u}(t)$ sont admissible, alors:

$$\begin{aligned} & \theta \sum_{t \in T_{h_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t) = 0, \\ \implies & \sum_{t \in T_{sup}} \varphi_{q_i}(t) l(t) + \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t) = 0, \\ \implies & \sum_{t \in T_{sup}} \varphi_{q_i}(t) l(t) = - \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t). \end{aligned}$$

Nous avons $l(T_{sup}) = l_{sup}$, et φ_{sup} est inversible donc

$$l_{sup} = -\varphi_{sup}^{-1} \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t). \quad (4.14)$$

Détermination du pas maximal:

$\bar{u}(t) = u(t) + \theta(t)l(t)$, $t \in T$ une commande admissible donc elle doit vérifier

$$d_* \preceq \bar{u}(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h.$$

C'est à dire

$$d_* \preceq u(t) + \theta(t)l(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h,$$

Sur T_N on a $\theta = 1$ et sur T_{sup} on doit avoir:

$$d_* - u(t) \preceq \theta(t)l(t) \preceq d^* - u(t), \quad t \in T_{sup}.$$

De la on a $\theta(t_0) = \min \theta(t)$ où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(d^* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) \succ 0, \\ \frac{(d_* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) \prec 0, \\ \infty & \text{si } l(t) = 0 \quad t \in T_{sup}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Le pas maximal sera:

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t_0)).$$

La valeur de suboptimalité de la nouvelle commande \bar{u} avec le support de départ T_{sup} est:

$$\beta(\bar{u}, T_{sup}) = (1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}).$$

De là

- Si $\theta^0 = 1$, alors $\beta(\bar{u}, T_{sup}) = 0$ d'où \bar{u} est une commande optimale.
- Si $(1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}) \prec \epsilon$, alors \bar{u} est ϵ -optimale.
- Si $(1 - \theta^0)\beta(u, T_{sup}) \succ \epsilon$, alors on passe au changement du support.

4.2.5 Changement de support:

On définit la quasicommande $\tilde{w}(t)$, $t \in T_h$ comme suit:

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} w(t), & \text{si } d_* \preceq w(t) \preceq d^*, \\ \text{sign}(w(t)), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.16)$$

La différence entre la quasi-commande et la pseudo-commande est que la quasi-commande satisfait la contrainte simple $d_* \preceq \tilde{w}(t) \preceq d^*$, $t \in T_h$, mais la trajectoire correspondante $\tilde{x}(t)$, $t \in T_h$, ne peut pas vérifier les contraintes générales $H_i \tilde{x}(t) \neq g_i$.

Considérons la norme:

$$\tilde{g}(T_{sup}) = \max_{i \in I} \|g_i - H_i \tilde{x}(\tau_i)\|, \quad I = \{1, 2, \dots, r + 1\},$$

où $\tilde{x}(t), t \in T_h$ est la trajectoire du système correspondant à la quasi-commande $\tilde{w}(t), t \in T_h$. Pour $\epsilon \succeq 0$ et $\mu \succeq 0$, la commande réalisable $u(t), t \in T_h$ est dite $\epsilon\mu$ -solution du problème (4.9) si la trajectoire $x(t), t \in T_h$ satisfait l'inégalité $c'x^0(t_f) - c'x(t_f) \preceq \epsilon$, et la norme $\tilde{g}_i(T_{sup}) = \max_{i \in I} \|g_i - H_i \tilde{x}(\tau_i)\|$ satisfait l'inégalité $\tilde{g}(T_{sup}) \preceq \mu$.

Si la pseudo-commande $w(t), t \in T_h$ satisfait l'inégalité $d_* \preceq |w(t)| \preceq d^*(t \in T_{sup})$, alors $w(t)$ est la commande optimale du problème (4.9). Si pour $\mu \succeq 0$, l'inégalité $\tilde{g} \preceq \mu$ est satisfaite par la quasi-commande $\tilde{w}(t), t \in T_h$, alors, $\tilde{w}, t \in T_h$ est une 0μ -solution du problème (4.9).

Soit $t^0 \in T_{sup}$ l'instant obtenu après la procédure de changement de commande, cet instant correspond à l'une des valeurs de support vérifiant:

$$w(t^0) = \max |w(t)|, \quad t \in T_{sup}. \quad (4.17)$$

L'instant $t^0 \in T_{sup}$ doit être éliminé du support T_{sup} , et le remplacer par un autre instant. La première étape pour construire un nouveau support \bar{T}_{sup} consiste à déterminer les variations du vecteur des potentiels. Pour calculer ensuite, la valeur de σ^* .

Soit $T_{n_0} = \{t \in T_N \setminus \tau : \Delta_{q_i}(t) = 0\}$ les instants non support correspondant à $\Delta_{q_i}(t)$ nul. Considérons $T_{sn} = \{T_{sup} \cup T_{n_0} \cup \tau\} \cup \{t_0, t_f\} = \{t_s, s \in K\}$, où $S = \{0, 1, \dots, s\}$.

On utilise l'algorithme présenté dans le chapitre II, pour construire un support optimal \bar{T}_{sup}^0 du problème (4.9), avec les instants de commutation fixes.

Les variations du vecteur des potentiels Δy peuvent être déterminées de la même manière que pour le cas des systèmes continus. Et les variations de la co-commande $\Delta \delta_{q_i}(t)$ est définie par:

$$\Delta \delta_{q_i}(t) = -\Delta y \varphi_{q_i} = -\Delta y \int_t^{t+h} G_i(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta.$$

Le nouveau vecteur des estimations est donné par:

$$\bar{\Delta}_{q_i}(t) = \Delta_{q_i}(t, \sigma) = \Delta_{q_i}(t) + \sigma \Delta \delta_{q_i}(t), \quad t \in T_{h_i}, \quad \sigma \succeq 0. \quad (4.18)$$

Soit le vecteur suivant:

$$\xi_i = \gamma_i \sum_{s \in S} (-1)^s \sum_{t \in T_N} \varphi_{q_i}(t), \quad i = \overline{1, r+1},$$

où

$$\gamma_i = \begin{cases} \text{sign}(\Delta_{q_i}(\tau_{i-1})), & \text{si } \tau_{i-1} \in T_{sup}, \\ \text{sign}(\Delta_{q_i}(\tau_{i-1} + h)), & \text{si } \tau_{i-1} \in T_{sup}. \end{cases}$$

Pour tout point $t \in T_{n_0}$, on calcule $\sigma(\tilde{t})$ pour lequel $\Delta_{q_i}(t, \sigma) = 0$.

- Si $\Delta_{q_i}(\tilde{t}) \cdot \Delta \delta_{q_i}(\tilde{t}) \prec 0$, alors $\tilde{t} = t, \quad t \in T_{n_0}$,

– sinon $\tilde{t} = t - h$, $t \in T_{n0}$.

Ensuite on calcule

$$\sigma(\tilde{t}) = -\Delta_{q_i}(\tilde{t})/\Delta\delta_{q_i}(\tilde{t}).$$

Soit s_0 l'indice de t^0 dans T_{sn} .

– Si $(-1)^{s_0}\gamma_i\Delta\delta_{q_i}(t^0) \prec 0$, alors

$$\xi_i = \xi_i - (-1)^{s_0}\gamma_i\varphi_{q_i}(t^0), \text{ et } \tilde{t}^0 = t^0 + h,$$

– Si $(-1)^{s_0}\gamma_i\Delta\delta_{q_i}(t^0) \succ 0$, alors

$$\xi_i = \xi_i + (-1)^{s_0}\gamma_i\varphi_{q_i}(t^0), \text{ et } \tilde{t}^0 = t^0 - h.$$

Introduisons \tilde{t}^0 dans T_{n0} , et on calcule:

$$\sigma(\tilde{t}^0) = -\Delta_{q_i}(\tilde{t}^0)/\Delta\delta_{q_i}(\tilde{t}^0),$$

et

$$\sigma(t_0) = \begin{cases} -\Delta_{q_i}(t_0)/\Delta\delta_{q_i}(t_0), & \text{si } \Delta_{q_i}(t_0).\Delta\delta_{q_i}(t_0) \prec 0, \\ \infty, & \text{si } \Delta_{q_i}(t_0).\Delta\delta_{q_i}(t_0) \succ 0, \end{cases}$$

$$\sigma(t_f) = \begin{cases} -\Delta_{q_i}(t_f)/\Delta\delta_{q_i}(t_f), & \text{si } \Delta_{q_i}(t_f).\Delta\delta_{q_i}(t_f) \prec 0, \\ \infty, & \text{si } \Delta_{q_i}(t_f).\Delta\delta_{q_i}(t_f) \succ 0, \end{cases}$$

On pose $T_n^0 = T_{n0} \cup \{t_0, t_f\}$ Choisissons

$$\sigma^* = \sigma(t^*) = \min_{t \in T_n^0} \sigma(t).$$

De la, le nouveau support est:

$$\bar{T}_{sup} = (T_{sup} \setminus \{t^0\}) \cup \{t^*\}. \quad (4.19)$$

Ce support, correspond aux instants de commutation fixés.

Soit la nouvelle valeur de suboptimalité de support contrôle $\{\bar{u}, \bar{T}_{sup}\}$ donnée par (2.30), ne vérifiant pas le critère d'optimalité, et $\beta(\bar{u}, \bar{T}_{sup}) \succ \epsilon$, on construit alors un nouveau support contrôle, en procédant en deux étapes. Une fois la valeur de la fonctionnelle pour le support contrôle trouvé $\{\bar{u}^0, \bar{T}_{sup}^0\}$ n'augmente pas, on passe à la deuxième étape, qui consiste à améliorer les instants de commutation.

Deuxième étape :

4.2.6 Optimisation des instants de commutation:

Après avoir calculé le support optimal $\bar{T}_{sup}^0(\tau)$ correspondant aux instants de commutation fixe, On passe à la correction des instants de commutation de tel sort à trouver une solution optimale. A cet effet, On utilise la méthode du gradient pour déterminer les instants de commutation optimaux τ^0 . Ainsi, on calcule les dérivées partielles $\partial L(u, \tau) / \partial \tau_i, i \in I = \{1, 2, \dots, r\}$ de la fonction objective en respectant les instants de commutation $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$.

Notons par $\bar{u}_{sup}^0(\tau) = \bar{u}^0(t|\tau), t \in \bar{T}_{sup}^0$ les valeurs de support de la commande optimale $\bar{u}^0(t), t \in T_h$, à des instants de commutation fixe $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r\}$, et par $x(t, \bar{u}^0(\tau)), t \in T_h$, la trajectoire correspondante.

Considérons les petites variations $\Delta \tau_i$ de τ_i pour lesquelles les valeurs du support $t \in \bar{T}_{sup}^0$ ne change pas. La commande optimale correspondant aux perturbations $\tau_i + \Delta \tau_i$ diffère de $\bar{u}^0(t|\tau), t \in T_h$ seulement en des composantes de support $\bar{u}_{sup}^0(\tau) + \Delta \bar{u}_{sup}^0$, alors

$$\begin{aligned} & H_i x(\tau_i + \Delta \tau_i, \bar{u}_{sup}^0(\tau) + \Delta \bar{u}_{sup}^0) - H_i x(\tau_i, \bar{u}_{sup}^0(\tau)), \quad i = \overline{1, r}, \\ & \Rightarrow H_i \frac{\partial x(\tau_i, \bar{u}_{sup}^0(\tau))}{\partial \tau_i} \Delta \tau_i + H_i \frac{\partial x(\tau_i, \bar{u}_{sup}^0(\tau))}{\partial \bar{u}_{sup}} \Delta \bar{u}_{sup} = 0, \end{aligned}$$

De là

$$\Delta \bar{u}_{sup} = -\varphi_{sup}^{-1}(\tau) H_i \frac{\partial x(\tau_i, \bar{u}_{sup}^0(\tau))}{\partial \tau_i}, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, r\}, \quad (4.20)$$

Les dérivées partielles de la fonction objective:

$$\frac{\partial L(u, \tau)}{\partial \tau_i} = c'_N \frac{\partial x_N(t_f|\tau), \bar{u}_{sup}^0(\tau)}{\partial \tau_i} + c'_{sup} \frac{\partial x_{sup}(t_f|\tau), \bar{u}_{sup}^0(\tau)}{\partial \tau_i},$$

En remplaçant (4.20), nous obtenons:

$$\frac{\partial L(u, \tau)}{\partial \tau_i} = c' \frac{\partial x(t_f|\tau, \bar{u}_{sup}^0(\tau))}{\partial \tau_i} - y'(\tau) \frac{\partial x(\tau_i|\tau, \bar{u}_{sup}^0(\tau))}{\partial \tau_i}, \quad (4.21)$$

Nous utilisons la méthode de gradient, pour déterminer la direction de changement des instants de commutation, nous obtenons enfin le nouveau vecteur $\tau^* = \{\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_r^*\}$, correspondant à la commande optimale globale $\{u^*, \tau^*\}$

4.2.7 Exemple 4.1:

Considérons le système, représenté par la figure ci-dessous.

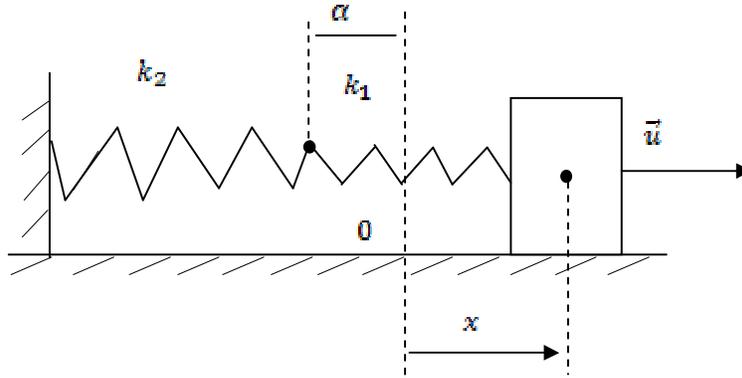


FIG. 4.1 – deux ressort

Une masse ponctuelle m , se déplace le long d'un axe (ox), attachée à deux ressort de coefficients de raideurs k_1 et k_2 (voir la figure 4.1). On applique à cette masse une force extérieure horizontale $u(t)$. Le problème consiste à trouver la commande constante par morceaux $u(t)$ et les instants de commutation optimaux, qui permet de maximiser la vitesse de l'objet:

$$\dot{x}(t_f) \rightarrow \max$$

Nous avons deux modes de fonctionnement:

$$f_{q_1}(t) = \begin{cases} x_2(t), \\ -k_1 x_1(t) + u, & \text{si } x \succeq \alpha \end{cases}$$

$$f_{q_2}(t) = \begin{cases} x_2(t), \\ -k_1 x_1(t) - k_2(x_1(t) + \alpha) + u, & \text{si } x \preceq \alpha \end{cases}$$

Soient $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $\alpha = 0.5$, $x_0 = (1; 0)$; $t_0 = 0$, $t_f = 6$ et $h = 0.01$.

Le problème de commande optimale à résoudre consiste à maximiser la fonctionnelle suivante:

$$L(u, \tau) = x_2(t_f) \rightarrow \max$$

Si on suppose qu'on à 3 instants de commutation τ_i , $i = 1, 2, 3$. C'est-à-dire que l'évolution du système est de la manière suivante:

$$\begin{cases} f_{q_1}(t), & \text{si } t \in [t_0, \tau_1) \\ f_{q_2}(t), & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2) \\ f_{q_1}(t), & \text{si } t \in [\tau_2, \tau_3) \\ f_{q_2}(t), & \text{si } t \in [\tau_3, t_f] \end{cases}$$

Alors, les contraintes sont:

$$x_1(\tau_i) = 0.5$$

$$x_1(t_f) = 0$$

et

$$|u(t)| \leq 1$$

Si l'on applique aucune force extérieur, c'est à dire que $u(t) = 0$, nous avons dans le plan de phase, plusieurs trajectoires solutions. voir la figure ci-dessous.

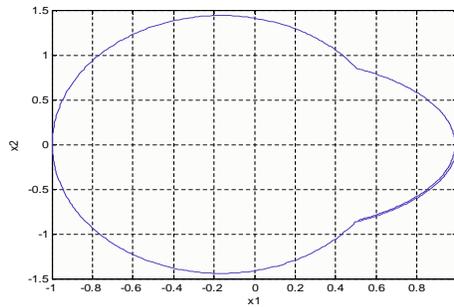


FIG. 4.2 - $u(t) = 0$

Tout d'abord on fixe les instants de commutation $\tau = \{0.77, 3.3, 3.96\}$. Ensuite, Choisissons le support de départ $T_{sup} = \{1.5\}$ correspondant à $D_{sup} = -0.0028 \neq 0$, pour construire la co-commande $\Delta(t)$, voir la figure ci-dessous:

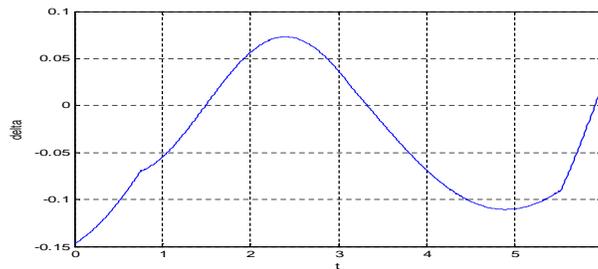


FIG. 4.3 - la co-commande $\Delta(t)$

On remarque que $\Delta(t)$ s'annule en instant de support et en deux autre points correspondant aux instants de non support $T_{n0} = \{3.327, 5.908\}$.

Après 46 itérations, nous avons la fonction objective optimale correspondant aux instants

de commutation fixe est $L(u^*, \tau) = 0.8754$, Les résultats sont illustrés par la figure ci-dessous:

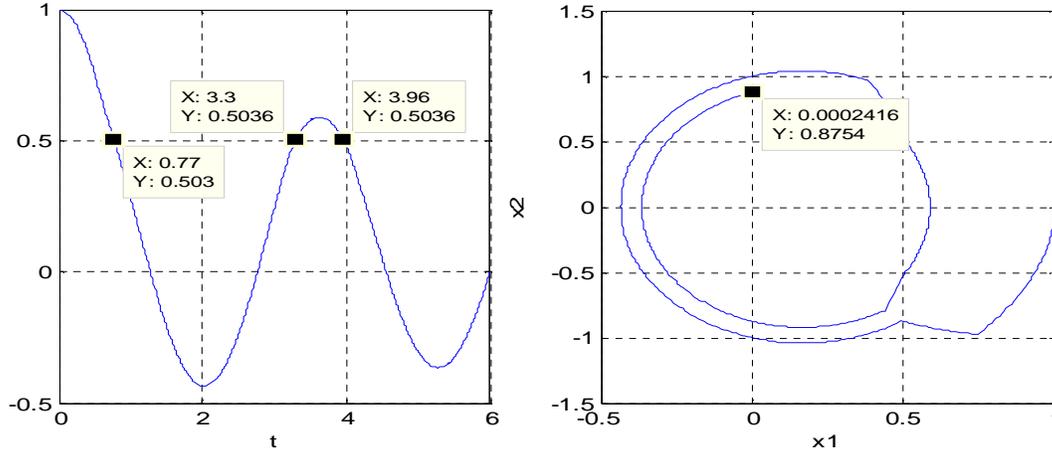


FIG. 4.4 – Trajectoire optimale correspondant aux instants fixe.

et la commande constante par morceaux trouver est montré par la figure ci-dessous:

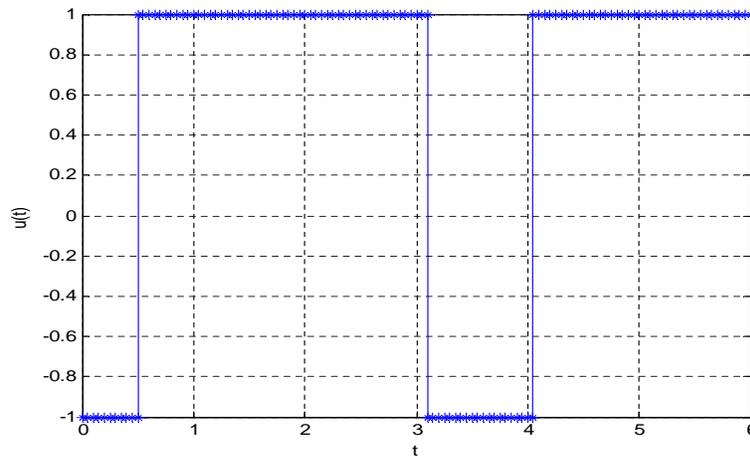


FIG. 4.5 – commande optimale $u^*(t)$ pour τ

Maintenant, la correction des instants de commutation est faite en 9 itérations, et les instants de commutation optimaux sont: $\tau^* = \{0.76, 3.26, 3.98\}$. Et la fonction objective correspondante est $L(u^*, \tau^*) = 0.9268$.

Les résultats obtenus sont illustrés par la figure suivante:

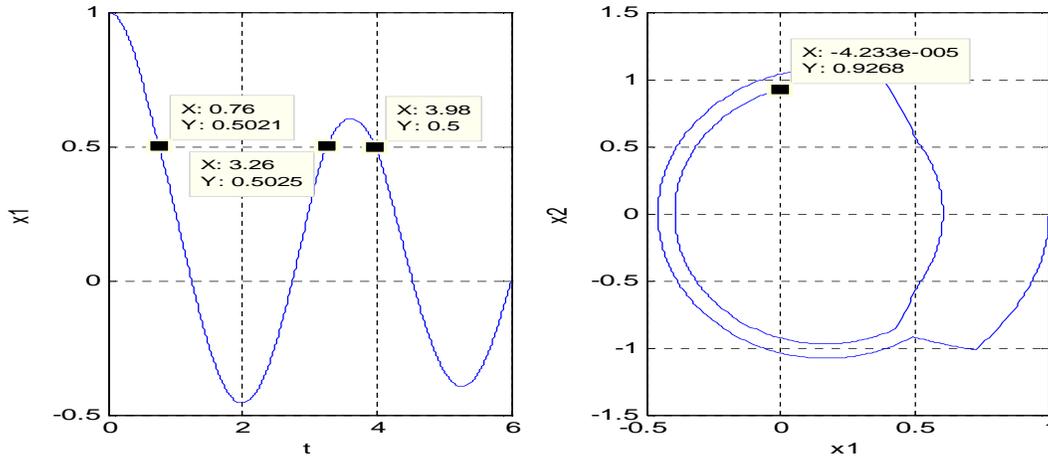


FIG. 4.6 – Trajectoire optimale correspondant aux instants optimaux.

Dans ce cas, la commande u^* change en instant de support optimal obtenu, quand on a fixé les instants de commutation. Ce support optimal $T_{sup}^0 = \{0.51\}$, en ce moment $u(0.51) = u_{sup} = 0.95$, voir la figure 4.7

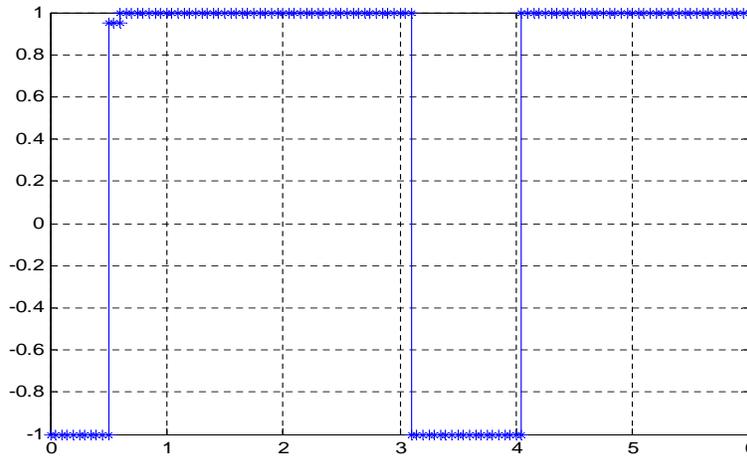


FIG. 4.7 – commande optimale $u^*(t)$ pour τ^*

Les résultats obtenus montrent l'efficacité, de la méthode, mais elle demeure lente à cause du temps perdu dans le calcul du support optimal.

4.3 Problème à erreur terminale

Dans cette partie, on s'intéresse à la même classe de systèmes hybrides. La dynamique de ce système est donnée par l'équation (4.1).

On considère le cas d'une seule commutation de modèle sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, se produisant à un instant τ_1 lorsque l'état du système atteint un certain seuil. supposant

$$t_0 = \tau_0 \prec \tau_1 \prec t_f = \tau_2$$

Dans ce cas nous avons $r = 1$.

Les équations d'état continues du système défini par l'équation générale (4.1) se réduisent alors au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{q_1}x(t) + B_{q_1}u(t) \text{ pour } t \in [\tau_0, \tau_1), \\ \dot{x}(t) = A_{q_2}x(t) + B_{q_2}u(t) \text{ pour } t \in (\tau_1, \tau_2], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.22)$$

où A_q et B_q ($q = \{q_1, q_2\}$) des $n \times n$ et $n \times 1$ matrices constantes, x_0 la position initiale.

4.3.1 Formulation du problème de commande

Soit $h = (t_f - t_0)/N$, où N un entier positif. $T_{h_1} = \{t_0, t_0 + h, \dots, \tau_1 - h\}$ et $T_{h_2} = \{\tau_1, \tau_1 + h, \dots, t_f - h\}$. $T_h = T_{h_1} \cup T_{h_2}$. $u(t), t \in T_h$ une commande constante par morceaux prenant des valeurs constantes sur des intervalles de longueur h , si $u(t) = u(t_0 + sh)$, $t \in [t_0 + sh, t_0 + (s+1)h]$, $s = \overline{0, N-1}$.

Le problème de commande optimale que l'on pose, consiste à chercher une commande u^* constante par morceaux et l'instant de commutation τ_1^* , qui minimisent le critère:

$$L(u, \tau_1) = \sum_{k \in K} |c'_k \cdot x(t_f) - x_{dk}| \longrightarrow \min. \quad (4.23)$$

En tenant compte des contraintes suivantes:

$$\begin{cases} H_i \cdot x(\tau_i) = g_i, \quad t_f = \tau_2 \quad i = \overline{1, r+1}, \\ d_* \leq u(t) \leq d^*, \quad t \in T_h, \end{cases} \quad (4.24)$$

Où g_i des m -vecteurs, d_* et d^* sont des scalaires, $c = c[K, J]$ une $p \times n$ matrice des coûts, x_{dk} les valeurs désirées, H_i des $m \times n$ -matrice, $u(t)$ est la commande constante par morceaux définie sur un intervalle $T = [t_0, t_f]$.

En appliquant les résultats de la méthode adaptée de la programmation linéaire, nous

allons résoudre le problème de commande optimale d'un système continu par morceaux, en fixant l'instant de commutation τ_1 . Ensuite, on le corrige de tel sorte à avoir une solution optimale globale du système considéré.

En utilisant les équations (4.6) et (4.8), on peut poser:

$$p_{k_{q_i}}(t) = \int_t^{t+h} \psi'_{c_k}(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta = \int_t^{t+h} c'_k F_{q_i}(\tau, \vartheta) B_{q_i} d\vartheta,$$

et

$$\varphi_{q_i}(t) = \int_t^{t+h} G_i(\vartheta) B_{q_i} d\vartheta = \int_t^{t+h} H_i F_{q_i}(\tau, \vartheta) B_{q_i} d\vartheta.$$

On remplace cette solution dans (4.21) et (4.22), le problème devient:

$$L(u, \tau_1) = \sum_{k \in K} \left| \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} p_{k_{q_i}}(t) u(t) - \bar{x}_{dk} \right| \rightarrow \min,$$

$$\sum_{t \in T_{h_i}} \varphi_{q_i}(t) u(t) = \bar{g}_i, \quad q \in Q = \{q_1, q_2\}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (4.25)$$

$$d_* \preceq u(t) \preceq d^*, \quad t \in T_h,$$

où

$$\bar{x}_{dk} = x_{dk} - c'_k x_0(t_f),$$

$$\bar{g}_i = g_i - H_i x_0(\tau_i), \quad F_{q_i}(\tau_i, \vartheta) = F_{q_i}(\tau_i) F_{q_i}^{-1}(\vartheta) = e^{A_{q_i}(\tau_i - \vartheta)}$$

$x_0(t_f)$, $t \in T_h$ La trajectoire du système global (4.1) avec une commande $u(t) = 0$, $t \in [t_0, t_f]$.

$x_0(\tau_i)$, $t \in T_{h_i}$, les trajectoires du système (4.1) avec une commande $u(t) = 0$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$.

4.3.2 Support contrôle:

Dans l'ensemble $T = [t_0, t_f]$, choisissons m points distincts t_l , $l = \overline{1, m}$. L'ensemble $T_{sup} = \{t_l, l = \overline{1, m}\}$ est appelé appui des contraintes si la matrice des contraintes $\varphi_{sup} = (\varphi_{q_i}(t), t \in T_{sup})$, $q_i = \{q_1, q_2\}$ est inversible, c'est à dire $\det \varphi_{sup} \neq 0$.

En utilisant l'appui des contraintes, construisons la co-commande:

$$\Delta_{k_{q_i}}(t) = p_{k_{q_i}}(t) - y_k \varphi_{q_i}(t), \quad (4.26)$$

où

$$y_k = p_{k_{sup}} \varphi_{sup}^{-1}, \quad p_{k_{sup}} = p_{k_{qi}}(T_{sup}).$$

Soit $T_f \subset T \setminus T_{sup}$ l'ensemble des points isolés et $K_f \subset K$ tels que $|K_f| = |T_f|$.

La paire $Q_f = (T_f, K_f)$ est appelée appui de la fonctionnelle si la matrice $\Delta_f = \Delta[K_f, T_f]$ est inversible.

Pour une commande admissible $u(t)$, $t \in T_h$, construisons les ensembles suivants:

$$K_N^+(u) = \{k \in K_N / (c'_k x(t_f) - x_{kd}) \succ 0\},$$

$$K_N^-(u) = \{k \in K_N / (c'_k x(t_f) - x_{kd}) \prec 0\},$$

$$K_N^0(u) = \{k \in K_N / (c'_k x(t_f) - x_{kd}) = 0\}, \quad K_N = K \setminus K_f,$$

et le vecteur:

$$\nu'[K_f] = -\nu'[K_N] \Delta[K_N, T_f] \Delta_f^{-1},$$

où $\nu'[K_N] = \nu'_k$, $k \in K_N$ tel que:

$$\nu_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in K_N^+(u), \\ -1, & \text{si } k \in K_N^-(u), \\ 0, & \text{si } k \in K_N^0(u). \end{cases}$$

Définition 4.5. L'appui Q_f est dit régulier si le vecteur $\nu'[K] = (\nu'[K_f], \nu'[K_N])$ vérifie: $|\nu'_k| \leq 1$, $k \in K_f$, pour toute commande admissible u

Définition 4.6. La paire $Q_{sup} = (T_{sup}, Q_f)$ est appelée appui du problème.

Pour un instant de commutation τ_1 fixe, nous avons la paire (u, Q_{sup}) formée de l'appui Q_{sup} et d'une commande admissible u appelée commande appui (support contrôle).

Définition 4.7. Une commande appui (u, Q_{sup}) est dite non dégénérée si:

$$d_* \prec u(t) \prec d^*, \quad t \in T_{sup} \cup T_f,$$

$$c'_k x(t_f) - x_{kd} \neq 0, \quad k \in K_N.$$

4.3.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle:

Soit (u, Q_{sup}) un support contrôle de départ du problème (4.24) et $\bar{x}(t)$ la trajectoire correspondant à une autre commande admissible $\bar{u} = u + \Delta u$.

Calculons l'accroissement de la fonctionnelle:

$$L(\bar{u}, \tau_1) - L(u, \tau_1) = \sum_{k \in K} |c'_k \bar{x}(t_f) - \bar{x}_{dk}| - \sum_{k \in K} |c'_k x(t_f) - \bar{x}_{dk}|.$$

On pose:

$$\begin{aligned}\varpi_k(\bar{u}) &= c'_k \bar{x}(t_f) - \bar{x}_{dk} = c'_k(x(t_f) + \partial x(t_f)) - \bar{x}_{dk}, \\ \varpi_k(u) &= c'_k x(t_f) - \bar{x}_{dk}, \quad \eta_k = c'_k \partial x(t_f), \\ \varpi_k(\bar{u}) &= \varpi_k(u) + \eta_k.\end{aligned}$$

La fonctionnelle devient:

$$\begin{aligned}L(u, \tau_1) &= \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u)| + \sum_{k \in K_N^+(u)} \varpi_k(u) - \sum_{k \in K_N^-(u)} \varpi_k(u), \\ L(\bar{u}, \tau_1) &= \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u) + \eta_k| + \sum_{k \in K_N(u)} |\varpi_k(u) + \eta_k|.\end{aligned}$$

De là on a:

$$\begin{aligned}L(\bar{u}, \tau_1) - L(u, \tau_1) &= \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u) + \eta_k| + \sum_{k \in K_N(u)} |\varpi_k(u) + \eta_k|, \\ &- \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u)| - \sum_{k \in K_N^+(u)} \varpi_k(u) + \sum_{k \in K_N^-(u)} \varpi_k(u), \\ &= \sum_{k \in K_N^+(u)} c'_k \partial x(t_f) - \sum_{k \in K_N^-(u)} c'_k \partial x(t_f) + R + E,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}R &= \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u) + \eta_k| - \sum_{k \in K_f} |\varpi_k(u)|, \\ E &= \sum_{k \in K_N^+(u)} (|\varpi_k(u) + \eta_k| - \varpi_k(u)) + \sum_{k \in K_N^-(u)} (|\varpi_k(u) + \eta_k| + \varpi_k(u)) + \sum_{k \in K_N^0(u)} |c'_k \partial x(t_f)|.\end{aligned}$$

On a:

$$c'_k \partial x(x_f) = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} p_{k_{q_i}}(t) \partial u(t), \quad i = \overline{1, r+1}.$$

En utilisant (4.26), on obtient:

$$\sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) \partial u(t) = \sum_{t \in T_{h_i}} p_{k_{q_i}} \partial u(t) - y_k \sum_{t \in T_{h_i}} \varphi_{q_i} \partial u(t).$$

On a $\bar{u}(t)$ et $u(t)$ sont admissible, alors:

$$\sum_{t \in T_{h_i}} \varphi_{q_i}(t) \partial u(t) = 0, \tag{4.27}$$

et

$$\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) \partial u(t) = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} p_{k_{q_i}} \partial u(t) = c'_k \partial x(x_f), \quad (4.28)$$

$$\nu'[K_N] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) \partial u(t) = \nu'[K_N] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} p_{k_{q_i}} \partial u(t) = \nu'[K_N] c'[K_N] \partial x(\tau_i),$$

donc:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_N^+(u)} c'_k \partial x(t_f) - \sum_{k \in K_N^-(u)} c'_k \partial x(t_f) &= \nu'[K_N] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K_N, t] \partial u(t) \\ &= \nu'[K] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K, t] \partial u(t) - \nu'[K_f] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K_f, t] \partial u(t) \\ &= \nu'[K] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K, t] \partial u(t) - \nu'[K_f] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K_f, t] \partial u(t) \\ &= \nu'[K] \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K, t] \partial u(t) - \nu'[K_f] \eta[K_f]. \end{aligned}$$

De là, on obtient:

$$L(\bar{u}, \tau_1) - L(u, \tau_1) = \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}(t) \partial u(t) - \sum_{k \in K_f} \nu'_k \eta_k + R + E, \quad (4.29)$$

où

$$\Delta_{q_i}(t) = \nu'[K] \Delta_{q_i}[K, t]. \quad (4.30)$$

La pseudo-commande $w(t)$, $t \in T_N$ peut être déterminée, en utilisant les équations (4.10).

Et $w(t)$, $t \in T_{sup} \cup T_f$ est déterminé par:

$$\sum_{t \in T_{sup} \cup T_f} \varphi_{q_i}(t) w(t) + \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) w(t) = \bar{g}_i, \quad i = \overline{1, r+1}, \quad T_{N_i} \subset T_{h_i}, \quad (4.31)$$

Si $d_* \preceq w(t) \preceq d^*$, $t \in T_{sup} \cup T_f$, alors $u^*(t) = w(t)$, $t \in T_h$ est une commande optimale.

On utilise La pseudo-trajectoire $\mathfrak{a}(t)$, $t \in T$ correspondant à la pseudo-commande $w(t)$, $t \in T_h$, pour calculer la valeur de suboptimalité du support contrôle (u, Q_{sup}) (voir (4.12)).

Maintenant, si le critère de suboptimalité n'est pas vérifié, pour un ϵ positif donné, on passe à l'amélioration de support contrôle (u, Q_{sup}) , et ceci en deux étapes:

- Changement de commande $u(t) \rightarrow \bar{u}(t)$.

– Changement de support $Q_{sup} \rightarrow \overline{Q}_{sup}$.

4.3.4 Changement de commande:

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t)$ une autre commande. Construisons la direction $l(t)$, et le pas θ tels que $\bar{u}(t)$, $t \in T_h$ soit admissible.

Détermination de la direction admissible:

$$l(t) = w(t) - u(t). \quad (4.32)$$

De (4.27), On obtient:

$$\sum_{t \in T_{sup}} \varphi_{q_i}(t) l_{sup} = - \sum_{t \in T_f} \varphi_{q_i}(t) l_f - \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t),$$

donc:

$$l_{sup} = -\varphi_{sup}^{-1} \left(\sum_{t \in T_f} \varphi_{q_i}(t) l_f - \sum_{t \in T_{N_i}} \varphi_{q_i}(t) l(t) \right). \quad (4.33)$$

De (4.28), nous avons:

$$\begin{aligned} \eta[K_f] &= \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{h_i}} \Delta_{q_i}[K_f, t] \partial u(t), \\ \eta[K_f] &= \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_f} \Delta_{q_i}[K_f, t] l(t) + \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{q_i}[K_f, t] l(t), \end{aligned}$$

d'où:

$$l_f = \Delta_f^{-1} \eta[K_f] - \Delta_f^{-1} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{q_i}[K_f, t] l(t), \quad (4.34)$$

Détermination du pas maximal:

1. $K_N^+(u) = K_N^+(\bar{u})$
 $(c'_k x(t_f) - x_{dk}) \succ 0 \Rightarrow (c'_k \bar{x}(t_f) - x_{dk}) \succ 0 \Rightarrow (c'_k \bar{x}(t_f) - c'_k x(t_f)) \succ -(c'_k x(t_f) - x_{dk})$
 Donc: $c'_k \partial x(t_f) \succ -(c'_k x(t_f) - x_{dk}) \Rightarrow -\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \succ -(c'_k x(t_f) - x_{dk})$
 $\Rightarrow \theta \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \prec (c'_k x(t_f) - x_{dk})$
 $\Rightarrow \theta \prec \frac{(c'_k x(t_f) - x_{dk})}{\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t)}$ si $\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \succ 0$
2. $K_N^-(u) = K_N^-(\bar{u})$
 $(c'_k x(t_f) - x_{dk}) \prec 0 \Rightarrow (c'_k \bar{x}(t_f) - x_{dk}) \prec 0 \Rightarrow (c'_k \bar{x}(t_f) - c'_k x(t_f)) \prec -(c'_k x(t_f) - x_{dk})$

$$\begin{aligned}
 & \text{Donc: } c'_k \partial x(t_f) \prec -(c'_k x(t_f) - x_{dk}) \Rightarrow -\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \prec -(c'_k x(t_f) - x_{dk}) \\
 & \Rightarrow \theta \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \succ (c'_k x(t_f) - x_{dk}) \\
 & \Rightarrow \theta \prec \frac{(c'_k x(t_f) - x_{dk})}{\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t)} \quad \text{si } \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \prec 0
 \end{aligned}$$

$$3. K_N^0(u) = K_N^0(\bar{u})$$

$$\begin{aligned}
 & (c'_k x(t_f) - x_{dk}) = 0 \Rightarrow (c'_k \bar{x}(t_f) - x_{dk}) = 0, \text{ d'où } c'_k \partial x(t_f) = 0 \\
 & \Rightarrow \theta \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{si } \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) = 0
 \end{aligned}$$

On pose:

$$\theta_{k_*} = \min_{k \in K_N(u)} \theta_k$$

où:

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{(c'_k x(t_f) - x_{dk})}{\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t)} & \text{si } k \in K_N^+(u) \text{ et } \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \succ 0, \\ \frac{(c'_k x(t_f) - x_{dk})}{\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t)} & \text{si } k \in K_N^-(u) \text{ et } \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) \prec 0, \\ 0 & \text{si } k \in K_N^0(u) \text{ et } \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{q_i}}(t) l(t) = 0, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.35)$$

$\bar{u}(t)$ doit vérifier les contraintes simple $d_* \preceq \bar{u}(t) \preceq d^*$

On pose:

$$\theta_{t_*} = \min_{t \in T_{sup} \cup T_f} \theta_t$$

Où:

$$\theta_k = \begin{cases} \frac{d^* - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) \succ 0, \\ \frac{d_* - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) \prec 0, \\ \infty & \text{si } l(t) = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

De (4.35), (4.36), on aura le pas maximal:

$$\theta^0 = \min(1, \theta_{t_*}, \theta_{k_*}).$$

La nouvelle valeur de suboptimalité est:

$$\beta(\bar{u}, Q_{sup}) = (1 - \theta^0) \beta(u, Q_{sup}).$$

De là:

- Si $\theta^0 = 1$, alors \bar{u} est optimale.
- Si $\beta(\bar{u}, Q_{sup}) \preceq \epsilon$, alors \bar{u} est ϵ -optimale.
- Si $\beta(\bar{u}, Q_{sup}) \succ \epsilon$, alors on passe à l'amélioration de support.

4.3.5 Changement de support:

La procédure du changement de commande, nous a permis de déterminer θ^0 , pour lequel la valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, Q_{sup})$ n'est pas vérifié. Alors, on passe à l'amélioration de support $Q_{sup} \rightarrow \bar{Q}_{sup}$.

Ce changement de support entraîne le changement de vecteur des estimations:

$$\bar{\Delta}_{q_i}(t) = \Delta_{q_i}(t) + \sigma^0 \Delta\delta_{q_i}(t), \quad (4.37)$$

de (4.26) et (4.30), on a:

$$\Delta_{q_i}(t) = \nu'[K]p_{k_{q_i}}(t) - o\varphi_{q_i}, \quad o = \nu'[K]y_k,$$

alors (4.37) peut s'écrire comme suit:

$$\bar{\Delta}_{q_i}(t) = \bar{\nu}'[K]p_{k_{q_i}}(t) - \bar{o}\varphi_{q_i} = (\nu'[K] + \sigma^0 \partial\nu'[K])p_{k_{q_i}}(t) - (o + \sigma^0 \partial o)\varphi_{q_i},$$

Dans ce cas:

$$\Delta\delta_{q_i}(t) = \partial\nu'[K]p_{k_{q_i}}(t) - \partial o\varphi_{q_i}(t),$$

d'où:

$$\Delta\delta_{sup} = \partial\nu'[K]p_{k_{sup}} - \partial o\varphi_{sup}, \quad (4.38)$$

et on obtient:

$$\partial o = -\Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1} + \partial\nu'[K]p_{k_{sup}}\varphi_{sup}^{-1}, \quad (4.39)$$

On remplace (4.39) dans $\Delta\delta_{q_i}(t)$:

$$\Delta\delta_{q_i}(t) = \partial\nu'[K]p_{k_{q_i}}(t) + \Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_{q_i}(t) - \partial\nu'[K]p_{k_{sup}}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_{q_i}(t),$$

donc:

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{q_i}(t) &= \Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_{q_i}(t) - \partial\nu'[K]\Delta_{q_i}[K,t], \quad t \in T_f \cup T_{N_i}, \\ \Delta\delta_{q_i}(t) &= \Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_{q_i}(t) - \partial\nu'[K_f]\Delta_{q_i}[K_f,t] - \partial\nu'[K_N]\Delta_{q_i}[K_N,t], \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta\delta_f = \Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_f - \partial\nu'[K_f]\Delta_f - \partial\nu'[K_N]\Delta_{q_i}[K_N,T_f].$$

D là, on obtient $\partial\nu'[K_f]$:

$$\partial\nu'[K_f] = -\Delta\delta_f\Delta_f^{-1} + \Delta\delta_{sup}\varphi_{sup}^{-1}\varphi_f\Delta_f^{-1} - \partial\nu'[K_N]\Delta_{q_i}[K_N,T_f]\Delta_f^{-1}.$$

On calcul pour tout $t \in T_{N_i}$ les valeurs de $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = -\frac{\Delta_{q_i}(t)}{\Delta\delta_{q_i}(t)}, \quad \text{si } \Delta_{q_i}(t)\Delta\delta_{q_i}(t) < 0.$$

On prend:

$$\sigma_{t_{**}} = \sigma(t_{**}) = \min_{t \in T_{N_i}} \sigma(t). \quad (4.40)$$

Et pour $|\bar{\nu}_k| \leq 1$, $k \in K_f$, on calcul σ_k :

$$\sigma_k = \begin{cases} \frac{1-\bar{\nu}_k}{\partial \nu_k}, & \text{si } \partial \nu_k \succ 0, \\ \frac{-1-\bar{\nu}_k}{\partial \nu_k}, & \text{si } \partial \nu_k \prec 0, \\ \infty, & \text{si } \partial \nu_k = 0, \quad k \in K_f. \end{cases}$$

On prend:

$$\sigma_{k_*} = \min_{k \in K_f} \sigma_k,$$

et

$$\sigma^* = \min(\sigma_{k_*}, \sigma_{t_{**}}).$$

Le changement de support se fera suivant deux cas:

1. **Le premier cas** $\theta^0 = \theta_{t_*}$

(a) Si $t_* \in T_f$

on aura:

$$\Delta \delta_{q_i}(t_*) = \text{sign}(\bar{u}(t_*)), \quad \Delta \delta_{q_i}(t) = 0, \quad t \in T_f \setminus \{t_*\} \cup T_{sup} \quad \text{et} \quad \partial \nu[K_N] = 0.$$

Donc:

$$\partial \nu'[K_f] = -\Delta \delta_f \Delta_f^{-1}, \quad \Delta \delta_{q_i}(t) = \nu'[K_f] \Delta_{q_i}(t), \quad t \in T_{N_i}.$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{k_*}$, alors le nouveau support est:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup}, \quad \bar{T}_f = T_f \setminus \{t_*\}, \quad \bar{K}_f = K_f \setminus \{k_*\}. \quad (4.41)$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{t_{**}}$, alors le nouveau support est:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup}, \quad \bar{T}_f = T_f \setminus \{t_*\} \cup \{t_{**}\}, \quad \bar{K}_f = K_f. \quad (4.42)$$

(b) Si $t_* \in T_{sup}$

$$\Delta \delta_{q_i}(t_*) = \text{sign}(\bar{u}(t_*)), \quad \Delta \delta_{q_i}(t) = 0, \quad t \in T_{sup} \setminus \{t_*\} \cup T_f \quad \text{et} \quad \partial \nu[K_N] = 0.$$

Donc:

$$\partial \nu[K_f] = \Delta \delta_{sup} \varphi_{sup}^{-1} \varphi_f \Delta_f^{-1}, \quad \Delta \delta_{q_i}(t) = \Delta \delta_{sup} \varphi_{sup}^{-1} \varphi_{q_i}(t) - \partial \nu'[K_f] \Delta_{q_i}[K_f, t], \quad t \in T_{N_i}.$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{k_*}$, si $\exists t' \in T_f$ tel que $\Delta \delta_{sup} \varphi_{sup}^{-1} \varphi_{t'} \neq 0$, alors, on permute les moments t_* et t' comme suit:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup} \setminus \{t_*\} \cup \{t'\}, \quad \bar{T}_f = T_f \setminus \{t'\} \cup \{t_*\}, \quad \bar{K}_f = K_f. \quad (4.43)$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{t^{**}}$, alors le nouveau support est:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup} \setminus \{t_*\} \cup \{t^{**}\}, \quad \bar{T}_f = T_f, \quad \bar{K}_f = K_f. \quad (4.44)$$

2. $\theta^0 = \theta_{k_*}$

$$\partial\nu_{k_*} = \text{sign}\left(\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{t \in T_{N_i}} \Delta_{k_{0q_i}}(t)l(t)\right), \quad \Delta\delta_{sup} = 0, \quad \Delta\delta_f = 0, \quad \partial\nu[K \setminus k_0] = 0,$$

d'où:

$$\begin{aligned} \partial\nu'[K_f] &= -\nu'[K_N]\Delta_{q_i}[K_N, T_f]\Delta_f^{-1} \\ \Delta\delta_{q_i}(t) &= -\partial\nu'[K_f]\Delta_{q_i}[K_f, t] - \partial\nu'[K_N]\Delta_{q_i}[K_N, t], \quad t \in T_N. \end{aligned}$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{k_*}$ alors:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup}, \quad \bar{T}_f = T_f, \quad \bar{K}_f = K_f \setminus \{k_0\} \cup \{k_*\}. \quad (4.45)$$

– Si $\sigma^* = \sigma_{t^{**}}$, alors le nouveau support est:

$$\bar{T}_{sup} = T_{sup}, \quad \bar{T}_f = T_f \cup \{t^{**}\}, \quad \bar{K}_f = K_f \cup \{k_*\}. \quad (4.46)$$

Après avoir déterminé le nouveau support, on calcule la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_{sup})$ donné par (2.30). Ensuite, on fait les test de suboptimalité:

- Si $\beta(\bar{u}, \bar{Q}_{sup}) \leq \epsilon$ alors le support contrôle $\{\bar{u}, \bar{Q}_{sup}\}$ est ϵ -optimale.
- Sinon on refait l'itération.

Dans le cas où les deux précédentes procédures ne diminuent pas la valeur de suboptimalité, ou cette diminution est insignifiante, on passe à la correction des instants de commutation, en utilisant la méthode de gradient qui permet de déterminer la direction de changement de ces instants, jusqu'à obtenir les instants optimaux correspondant à la solution optimale du système. cela ce fait de la même manière que la première partie de ce chapitre.

4.3.6 Exemple 4.2:

Considérons le système mécanique, représenté par la figure ci-dessous.

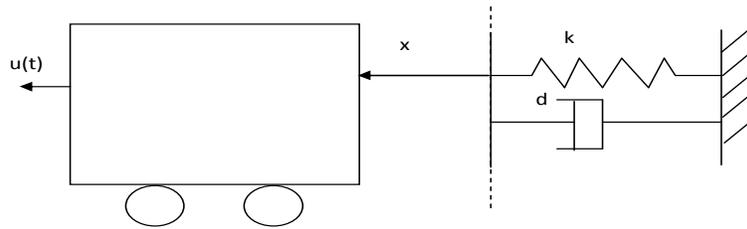


FIG. 4.8 – *système mécanique*

Le procédé schématisé par la figure ci-dessus est constitué d'un chariot animé, et un ressort de raideur k . Le coefficient d'amortissement est d .

Les équations différentielles qui caractérisent le fonctionnement du système dont l'entrée est la force $u(t)$ exercée sur le chariot, et la sortie est la position $x(t)$ sont les suivantes:

Le premier sous système est décrit par l'équation suivante:

$$f_1(x) = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

Le deuxième sous système est décrit par:

$$f_2(x) = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - dx_2 + u, \end{cases}$$

Le problème à résoudre consiste à minimiser la fonctionnelle suivante:

$$J(u, \tau) = |x_2(t_f) - x_{2_d}| \longrightarrow \min$$

sous les contraintes:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = 5, \\ x_1(t_f) = 0, \end{cases}$$

et

$$|u(t)| \preceq 2$$

Où τ est l'instant de commutation, et $u(t)$ la commande constante par morceaux.

Au départ, on pose $K_f = T_f = \emptyset$, on fixe l'instant de commutation à $\tau = 2.5$, et nous choisissons le support $T_{sup} = \{3\}$ correspondant à la matrice de support $D_{sup} = 0.0141$.

Pour une commande admissible de départ, nous avons obtenu la figure suivante:

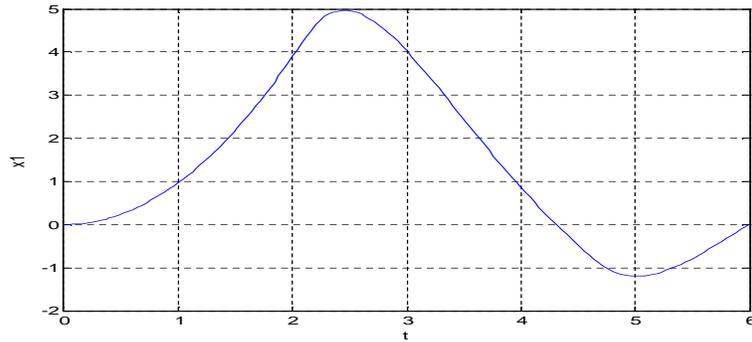


FIG. 4.9 – La trajectoire correspondant à la commande de départ

Après 53 itérations, nous avons obtenu la figure ci-dessous:

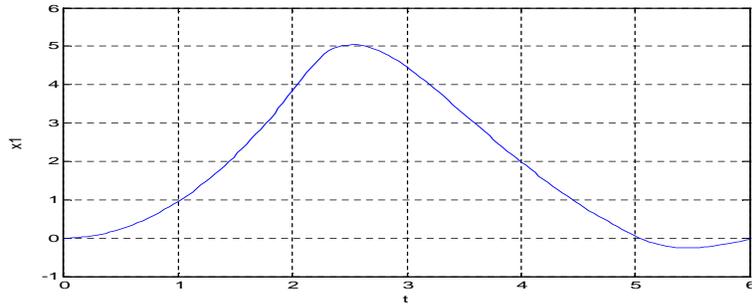


FIG. 4.10 – La trajectoire correspondant à $\tau = 2.5$

La dernière étape nous a permis de déterminer l'instant de commutation optimal, et la trajectoire optimale correspondante est:

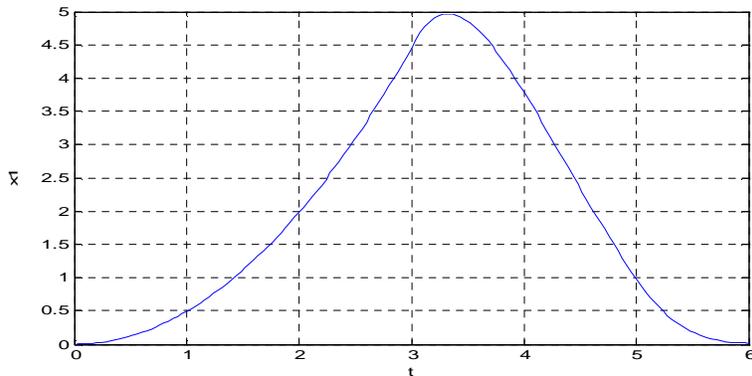


FIG. 4.11 – La trajectoire correspondant à $\tau = 3.24$

On remarque qu'à l'instant de commutation, l'état adjoint est continu, comme le montre la figure ci-dessous, cela est due au fait que l'état du système est continu en se point.

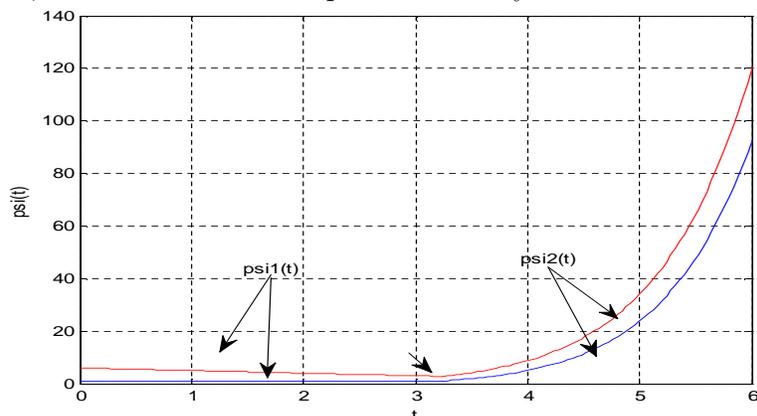


FIG. 4.12 – les composantes de l'état adjoint continues

La continuité de vecteur adjoint aux instants de transition est une conséquence du caractère autonome du modèle hybride considéré et de la non ré-initialisation de l'état continu $x(t)$. L'instant de commutation correspondant à la trajectoire optimale est $\tau = 3.24$.

Cette méthode nous a permis d'obtenir la commande optimale et l'instant de commutation optimal. Il nous a également permis de calculer l'état adjoint du système considéré, et ainsi mis en évidence la continuité de cet état adjoint lors d'une commutation de modèle. Les résultats obtenus, on montré l'efficacité de la méthode. Cependant, le temps de chaque itération est important.

Conclusion

Ce chapitre, est consacré à la résolution algorithmique d'un problème de contrôle optimal associé à la classe des systèmes dynamiques hybrides à commutation autonome. L'objectif est de mettre au point l'efficacité de la méthode adaptée de la programmation linéaire, permettant de trouver une solution ϵ -optimale. Nous avons constaté que cette méthode de résolution de problèmes continus, peut être donc utilisée pour résoudre les problèmes de contrôle optimal des systèmes hybrides.

En effet, la résolution de ce type de problème se fait en deux étapes. D'abord, on fixe les instants de commutations, ce qui nous ramène à résoudre un problème de commande en prenant en considération les différents modes de fonctionnement. Ensuite, on passe à la correction des instants de commutation en utilisant la méthode du gradient, jusqu'à l'obtention d'une commande et des instants optimaux.

Conclusion générale

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire a été d'étendre la méthode de R. Gabasov et F. M. Kirillova à la résolution des problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides. Nous avons considéré la classe de système dynamique à commutation autonome, car une grande partie des processus réels peut être représenté par des modèles issus de cette classe, et sa simplicité relative permet la conception d'outils algorithmique pour l'analyse et la commande de ses systèmes.

Nous avons proposé dans le premier chapitre de ce mémoire, un problème classique de la programmation linéaire, qu'on a résolu par la méthode adaptée ou dite du support. Nous avons implémenté et comparé la méthode adaptée avec la méthode de simplexe. Les résultats numériques ont montré que la méthode adaptée est plus robuste et plus rapide que la méthode de simplexe.

Dans le deuxième chapitre, nous avons adapté cette méthode, à la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire, le problème a été transformé, tout d'abord, à un problème de programmation linéaire, et nous avons constaté que la méthode adaptée est très efficace et les résultats obtenus montrent que le temps mis pour calculer la commande constante par morceaux en boucle ouverte n'est pas vraiment important.

Dans le chapitre 3, nous avons présenté, une définition et une classification des systèmes dynamiques hybrides suivant les caractéristiques des phénomènes hybrides, ainsi que les outils de modélisation. Nous avons ensuite passé en revue quelques résultats disponibles dans la littérature sur la commande des systèmes dynamiques hybrides en utilisant les méthodes issues de la commande des systèmes continus.

Dans le dernier chapitre, nous nous sommes intéressés à la commande d'une classe de système hybride à commutation autonome, nous avons montré que la méthode adaptée peut être étendu à la résolution des problèmes de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides.

Dans le cas des problèmes de commande hybride, il est nécessaire de prendre en compte les discontinuités qui interviennent dans les systèmes hybrides. Afin d'éviter les difficultés

liées aux discontinuités, nous avons résolu le problème en deux étapes.

Au départ, nous avons fixé les instants de commutations, ce qui permet de résoudre un problème de contrôle, sachant que durant l'évolution, le système est décrit par des modèles différents. Nous avons considéré, pour ce type de problèmes, le cas d'instant de commutation en nombre fini, et d'une commande monovariante. Les résultats numériques ont montré l'efficacité de la méthode qui permet dans de nombreux cas d'approcher la solution recherchée. Cependant, dans le cas des systèmes complexes, c'est-à-dire de systèmes d'ordre élevé et avec des modes de fonctionnement très différents, la convergence de la méthode est lente et le temps de calcul est important.

Dans la continuité du travail présenté dans ce mémoire, nous pourrions, dans de futurs travaux, résoudre des problèmes de contrôle des systèmes hybrides à commutation contrôlée, et à sauts d'état contrôlé ou autonome. et le problème de contrôle optimale en boucle fermée.

Bibliographie

- [1] M. Athans and P. L. Falb. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill, New York.
- [2] M. Sechilariu B. Cebron and J. Burger. Optimal control of hybrid dynamical systems with hysteresis. *Proceeding of European Control Conference*, 1999.
- [3] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Volume 17 Systems and Control: Foundations and Applications. Brkauser, 1997.
- [4] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*. Volume 17 of mathématiques et applications, Springer-Verlag, 1994.
- [5] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [6] A. Bensoussan and J.L. Menaldi. *Hybrid control and dynamic programming. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulse systems*. 3, 395-442, 1997.
- [7] M.S. Branicky. Studies in hybrid systems. *Ph.D.dissertation, Dept.Elec.Eng.and Computer Sci., Massachusetts Inst.Techaol., Cambridge*, June 1995.
- [8] M.S. Branicky and S.K. Mitter. Algorithms for optimal hybrid control. *Proceeding of the 34rd IEEE Conference on Decision and Control, La nouvelle Orléans*, pages 2661–2666, 1995.
- [9] M.S. Branicky and S.K. Mitter. Algorithms for optimal hybrid control. *Proceedings of the 34rd IEEE Conference on Decisions and Control, New Orleans, LA-*, pages 2661–2666, 1995.
- [10] P. Bérest. *Calcul des variations, application à la mécanique et à la physique*. Ellipses, Paris, 1997.
- [11] R. W. Brockett. Hybrid models for motion control systems. *Essays on Control, pages 29-53, 1993*.
- [12] E.B. Bryson and Y.C. Ho. *Applied Optimal Control*. Gin and Company, Waltham, 1968.

-
- [13] C. Cassandras. *Discrete Event Systems: Modeling and Performance Analysis*, Asken Associates Incorporated Publishers. 1993.
- [14] B. Cebron. Commande de systèmes dynamiques hybrides. *Thèse de Doctorat, Université d'Angers*, décembre 2000.
- [15] G.B. Dantzig. Linear optimal control processes and mathematical programming. *J.SIAM Contr.*, **4**, no.1,.
- [16] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [17] D.F. Delchamps. State space and input-output linear systems. *Springer-Verlag*, 1988.
- [18] R.David et H.Alla. *Du Grafset aux réseaux de Petri*, Hermès,Paris. 1992.
- [19] B. Bonnard et M. Chyba. The role of singular trajectories in control theory. *Mathematical Monographs, Springer-Verlag*, 2003.
- [20] E.Trélat. *Contrôle optimal:Théorie et applications*, Université Paris-Sud, Laboratoire AN-EDP, Mathématiques. 2005.
- [21] R.F. Gabasov. *Adaptive method for solving linear programming problems*. Université de Bruxelles, 1994.
- [22] R.F. Gabasov and F.M. Kirrilova. A constructive method for guaranteed optimization of nonlinear dynamical systems. *Dokl.Nat.Akad.Nauk Belarusi*, **44**, no.4, 2000,.
- [23] M. Gapaillard. Continuous representation for a class of optimal hybrid control problems. *Proceedings of IFAC World Congress,2005*.
- [24] M. Gapaillard. Représentation, commande et identification de systèmes hybrides. *PhD thesis, Université d'Angers,2005*.
- [25] A. Girard. Analyse algorithmique des systèmes hybrides. *PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble*, 2004.
- [26] H.Alla. *Outils de base: Automates finis, langages, et expressions régulières , actes de l'acole d'été d'automatique de Grenoble: Commande des systèmes à événements discrets Grenoble,France*. 1995.
- [27] S. Hedlund and A. Rantzer. Optimal control of hybrid systems. *Proceeding of IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix*, 1999.
- [28] M. Johansson. Piecewise linear control systems. *Lectures Notes in Control and Information Sciences. Springer*, **284**, 2003.
- [29] M. Kurovsky. Etude des systèmes dynamiques hybrides par représentation d'état discrète et automate hybride. *PhD thesis, Université de Grenoble,2002*.

- [30] R. Gamkrelidze L. Pontryaguine, V. Boltiansky and E. Michtchenko. The mathematical theory of optimal processes. *Editions de Moscou*, 1962.
- [31] M.M. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. Wiley, New York. 1967.
- [32] L.G.Khachian. *A polynomial algorithm in linear programming, Soviet Mathematics Doclady*. 20,191-194, 1979.
- [33] R. Hebbbar M.S. Branicky and G.Zhang. A fast marching algorithm for hybrid systems. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4897-4902, 1999.
- [34] S.K. Mitter M.S. Branicky and V. BORKAR. A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory. *IEEE Trans.on Automatic Control*, **43**:31–45, 1998.
- [35] N.Karmankar. *A new polynomial, time algorithm for linear programming, combinatorics*. 4,373-395, 1984.
- [36] R.F. Gabasov N.V. Balashevich and F.M. Kirillova. *Algorithms for Open-Loop and Closed Loop Optimization of linear control systems*, volume **41**, no.10. Zh.Vychisl.Mat.Mat.Fiz, 1984.
- [37] R.F. Gabasov N.V. Balashevich and F.M. Kirillova. Numerical methods for open-loop and closed-loop optimization of linear control systems. *Zh. Vychisl.Mat.Mat.Fiz*, **40**: 838–859., 2000.
- [38] R.F. Gabasov N.V. Balashevich and F.M. Kirillova. Numerical methods for open loop and closed loop optimisation of piecewise linear systems. *Zh. Vychisl.Mat.Mat.Fiz*, **41**, no.11:1658–1674., 2001.
- [39] C. Iung P. Riedinger and F. Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, **9**, 2003,pp.449–458.
- [40] C.lung P. Riedinger, F. Kratz and C.Zanne. Linear quadratic optimization for hybrid systems. *Proceedings of IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, (1999)*.
- [41] F. Kratz P. Riedinger and C.Zanne. Time optimal control of hybrid systems. *Proceedings of American Control Conference, San Diego, (1999)*.
- [42] E.R. Pinch. Optimal control and the calculus of variations. *Oxford University Press*, 1993.
- [43] M. Lemmon P.J. Antsaklis, J.A. Stiver. Hybrid system modeling and autonomous control systems. *Lecture Notes in Computer Science Hybrid Systems, Vol 736, Springer-Verlag, 1993*.
- [44] P. Ramadge and M. Wonham. The control of discrete event systems. *Proc. IEEE*, vol. 77, pages 81-89, 1989.

- [45] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic control* **45(4)**, April 2000.
- [46] R.David. *Modeling of hybrid systems using continuous and hybrid Petri nets, 7th int workshop on PN and performance models*. 1997.
- [47] R.E.Kalman. *Canonical structure of linear dynamical systems, In proceeding of the National Academy of sciences*. 596-600,1961.
- [48] R.E.Kalman. *mathematical description of linear dynamical systems, SIAM journal on control*. 1,152-192,1963.
- [49] F.M. Kirillova R.F. Gabasov and O.I Kostyukova. Construction of closed loop optimal controls in a linear problem. *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, **320**,no.6:1294–1299, 1991.
- [50] P. Riedinger. Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybride. *Thèse de l'institut National Polytechniques de Lorraine (INPI), Nancy, décembre 1999*.
- [51] P. Riedinger and C.lung. Optimal control for hybrid systems: An hysteresis example. *Proceedings of IEEE System, Man and Cybernetics, Tokyo, (1999)*.
- [52] A. Rondepierre. *Algorithmes hybrides pour le contrôle optimal des systèmes non linéaires*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 18 Juillet 2006.
- [53] T.I. Seidman. Optimal control for switching systems. *In Proceedings of the 21st Annual Conference on Information Sciences and systems, pp.485-489, The Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, december 1987*.
- [54] H.J. Sussmann. A maximum principle for hybrid oprimal control problems. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, AZ, December 1999*.
- [55] X. Xu and P.J. Antsaklis. A dynamic programming approach for optimal control of switched systems. *In Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000*.
- [56] X. Xu and P.J. Antsaklis. Optimal control of switched systems: new results and open problems. *in Proceedings of the 2000 American Control Conference, pages 2683-2687.2000*.
- [57] J. Zaytoon. *Systèmes dynamiques hybrides, ouvrage collectif sous la direction de Janan Zaytoon, Hermès, Paris, 2001*.

Annexe

Notion de contrôlabilité des systèmes:

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener en un temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final désiré. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère, on parle alors d'un problème de contrôle optimal.

Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation simple de la contrôlabilité due à Kalman.

Le système de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (4.47)$$

Où l'ensemble des contrôles admissibles de u des systèmes sont des fonctions mesurables bornées à valeurs dans un polyèdre U_m . Étant donné un point x_0 de \mathbb{R}^n , la question est de savoir s'il existe un contrôle u admissible tel que la trajectoire associée à u joigne x_0 à la cible en temps fini.

La contrôlabilité à l'origine est un problème issu de concepts plus généraux de la contrôlabilité complète. Un système dynamique est dit complètement contrôlable s'il existe une trajectoire admissible de ce système qui relie deux points donnés de l'espace d'état en temps fini.

La notion de contrôlabilité est apparue dans les années suivantes avec les travaux de R.E. Kalman [] dans le cadre des systèmes linéaires de type: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Ces systèmes ont suscité de nombreux travaux de recherche et nous disposons aujourd'hui de résultats puissants, à commencer par le fameux critère de contrôlabilité de Kalman [], en l'absence de contraintes sur l'état et le contrôle.

Contrôlabilité et domaine contrôlable:

Intuitivement la contrôlabilité d'un point x_0 vers la cible, correspond à l'existence d'une trajectoire admissible du système de contrôle considéré, qui relie x_0 à la cible en temps fini.

La contrôlabilité à l'origine d'un point x_0 de l'espace d'état est définie de la façon suivante:

Définition 4.8. le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est contrôlable vers la cible pour le système, si et seulement s'il existe un temps fini $t_f \geq 0$ et un contrôle admissible $u : [0, t_f] \rightarrow U_m$ tels que le problème:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0 \quad (4.48)$$

admet une solution $u(t)$ définie sur $[0, t_f]$. L'ensemble des points contrôlable du système (4.48).

Par ailleurs, la notion de contrôlabilité d'un système dynamique est étroitement liée à la notion d'atteignabilité.

Considérons un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ supposé contrôlable jusqu'à la cible par le système (4.48). D'après la définition (4.8), il existe donc une trajectoire admissible du système (4.48) qui relie x_0 à la cible en temps fini.

Ainsi, pour atteindre x_0 à la cible, l'idée est tout simplement de parcourir cette même trajectoire par renversement du temps en partant cette fois-ci de la cible.

Contrôlabilité de l'automate hybride

La définition (4.8) est une définition très générale qui s'applique à tout système de contrôle et donc en particulier au modèle hybride.

Un point x_0 donné de l'espace d'état est contrôlable jusqu'à la cible par le système hybride, si et seulement s'il existe une trajectoire admissible qui relie un état initial donné x_0 à un état final désiré en temps fini, cette définition fait intervenir le concept de solution ou trajectoire d'un système hybride voir (*figure3.1*).

Contrôlabilité des systèmes hybrides

Maintenant que le concept de solution ou trajectoire hybride d'un système dynamique hybride a été bien précisé, nous sommes en mesure de redéfinir la contrôlabilité d'un point donné de l'espace d'état pour le modèle hybride.

Définition 4.9. Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est contrôlable vers la cible par le système hybride, s'il

existe une exécution finie satisfaisant:

Pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$ tel que $r_i < r_{i+1}$

- $\forall t \in]r_i, r_{i+1}[$, $q_i \in Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{r+1}\}$ et $x(t) \in X_{q_i}$
- il existe une fonction de contrôle $u(t)$ mesurable définie sur $]r_i, r_{i+1}[$ à valeurs dans U_m telle que: $\forall t \in]r_i, r_{i+1}[$, $\dot{x}(t) = A_{q_i}x(t) + B_{q_i}u(t)$
- En posant: $T = ([r_i, r_{i+1}])$, $i = 0, \dots, r$ et $Q = \{q_i\}$, $i = 0, \dots, r$.

L'ensemble des points de \mathbb{R}^n contrôlable par l'automate hybride est appelé domaine contrôlable. A toute suite $q_i, i = 0, \dots, r$ de modes de l'automate de la façon suivante $X = \cup_{i=0}^r X_{q_i}$ défini comme l'union d'un nombre fini de domaine de l'espace d'état. Deux modes q et q' et $X_q \cap X_{q'} \neq \emptyset$

Existence de trajectoires optimales

Remarquons tout d'abord que si le point initial x_0 n'est pas contrôlable, alors il n'existe pas de contrôle u admissible ni donc de trajectoire du système considéré reliant x_0 à la cible. Une première condition nécessaire d'existence de trajectoires optimales d'un problème est donc la contrôlabilité à la cible du point initial x_0 . Sous cette condition, parmi l'ensemble des trajectoires admissibles d'un système hybride, on peut sélectionner celles si elles existent, qui minimisent le critère donné.

Le théorème énoncé ci dessous fournit un résultat d'existence de solutions optimales entre deux sous ensembles de l'espace d'état et repose sur la compacité des ensembles accessibles en temps fini T .

Théorème 4.1. [31] *On suppose f est L de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. On peut éventuellement avoir des contraintes sur l'état de la forme:*

$$C_1(x) \geq 0, \dots, C_r(x) \geq 0,$$

que l'on suppose continues sur \mathbb{R}^n le cas échéant:

Soient M_0 et M_1 , deux compacts de \mathbb{R}^n tels que M_1 est accessible depuis M_0 . On note U l'ensemble des contrôles admissibles joignant M_0 à M_1 et t_f le temps mis par le système pour aller de M_0 à M_1 selon le contrôle $u \in U$.

On suppose alors que:

- Il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ et notée x_u est uniformément bornée par b sur $[0, t_f]$ c.à.d:

$$\exists b > 0, \forall u \in U, \forall t \in [0, t_f] \quad \|x_u(t)\| \leq b.$$

– Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\tilde{V}(x) = \{(L(x,u), f(x,u)); u \in U_m\}$ est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal u défini sur $[0, t_f]$ tel que la trajectoire associée relie M_0 à M_1 en temps t_f et en coût minimum.

Des conditions d'existence de trajectoires optimales plus générales peuvent être obtenues [19, 31].

Nous supposons également:

- f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times U_m$.
- f lipschitzienne par rapport à x , uniformément par rapport à u c'est à dire:

$$\exists L_1 > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall u \in U_m, \| f(x_1, u) - f(x_2, u) \| \leq L_1 \| x_1 - x_2 \| .$$

- L de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times U_m$.
- L lipschitzienne par rapport à x , uniformément par rapport à u c'est à dire:

$$\exists L_2 > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall u \in U_m, \| L(x_1, u) - L(x_2, u) \| \leq L_2 \| x_1 - x_2 \| .$$